

ALICE PONTES BARRETO

**PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA O
DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO
COMBINATÓRIO NO ENSINO
FUNDAMENTAL**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

DARCY RIBEIRO - UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

06 de novembro de 2017

ALICE PONTES BARRETO

**PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA O
DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO
COMBINATÓRIO NO ENSINO FUNDAMENTAL**

“Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.”

Orientador: Prof^a. Liliana Angelina León Mescua

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

06 de novembro de 2017

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do **CCT / UENF**

78/2017

Barreto, Alice Pontes

Proposta de atividades para o desenvolvimento do raciocínio combinatório no ensino fundamental / Alice Pontes Barreto. – Campos dos Goytacazes, 2017.

151 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, 2017.

Orientador: Lílana Angelina León Mescua.

Área de concentração: Matemática.

Bibliografia: f. 101-103.

1. ANÁLISE COMBINATÓRIA 2. RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO 3. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS 4. MATERIAIS MANIPULÁVEIS I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas II. Título

CDD 511.6


ALICE PONTES BARRETO


PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA O
DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO
COMBINATÓRIO NO ENSINO FUNDAMENTAL

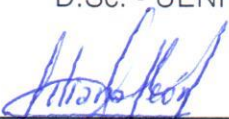
“Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.”

Aprovada em 06 de novembro de 2017.


Prof^a. **Silvia Cristina Freitas Batista**
D.Sc. - IFFluminense


Prof. **Oscar Alfredo Paz La Torre**
D.Sc. - UENF


Prof^a. **Elba Orocía Bravo Asenjo**
D.Sc. - UENF


Prof^a. **Liliana Angelina León Mescua**
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Dedico este trabalho a Deus, meu guia e fortaleza; à minha família e amigos que sempre me incentivaram, apoiaram e compreenderam os momentos de ausência.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus pelo dom da vida e por me conceder essa conquista, sem Ele nada sou.

Ao meu namorado Amarildo pela compreensão, companheirismo, carinho e por todo apoio que me deu ao longo deste curso. Sem você eu não teria chegado até aqui.

À minha família, em especial minha mãe Dolarice e minha avó Zeny, que são meu alicerce, por todo suporte e incentivo, me ajudando sempre a alcançar meus objetivos.

Aos professores do Profmat-UENF: Elba, Geraldo, Liliana, Mikhail, Nelson, Rigoberto e Oscar, por toda a dedicação e pelos ensinamentos transmitidos enriquecendo a minha formação.

À minha orientadora, professora Liliana Angelina León Mescua, que acreditou em meu trabalho. Agradeço por toda paciência, profissionalismo, competência e contribuição para a realização da presente pesquisa.

Ao coordenador do Profmat-UENF, professor Oscar Alfredo Paz La Torre, pelo auxílio, atenção e incansável disponibilidade.

Aos colegas e companheiros de curso, pela maravilhosa convivência e companhia, em especial, meus amigos Aline, Rogério, Tuane, Andréa e Marcelly, pela amizade e ajuda constante, tornando esta caminhada menos pesada.

Às colegas de trabalho Clésia e Flávia, pelo auxílio durante este curso.

À Capes e ao programa Profmat por ter me concedido esta oportunidade de aprendizagem.

À UENF por possibilitar estes anos de estudo e pesquisa.

“Os pensadores estão morrendo. Os estudantes no mundo todo estão se tornando, em sua maioria, do ensino fundamental à universidade, uma massa de repetidores de informações e não pensadores que amam a arte da crítica e da dúvida. Aprendemos a explorar os detalhes dos átomos e as forças que regem o Universo, mas não sabemos explorar o mundo de dentro. Temos informações que uma geração jamais teve, mas não sabemos pensar, transformar a informação em conhecimento e o conhecimento em experiência.”

Augusto Cury

Resumo

Este trabalho apresenta uma proposta de ensino para a abordagem da Análise Combinatória no Ensino Fundamental. O objetivo principal é propiciar uma sequência didática que favoreça a construção do raciocínio combinatório desde os anos iniciais da Educação Básica, facilitando, com isso, o prosseguimento do conteúdo no Ensino Médio, bem como um enriquecimento conceitual que também alcança outras áreas do conhecimento como Biologia, Química e Ciências da Computação, já que o raciocínio combinatório também é utilizado nessas áreas. Nesse intuito, utilizando a metodologia da Resolução de Problemas aliada ao uso de jogos, além de materiais manipuláveis, foram elaboradas atividades com base nos conceitos e procedimentos referentes a cada um dos ciclos do Ensino Fundamental, visando levar ao aluno a conhecer e familiarizar-se com problemas de contagem, representações gráficas, diferentes maneiras de combinações e com o princípio fundamental da contagem, favorecendo assim o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Palavras-chaves: Análise Combinatória. Raciocínio Combinatório. Resolução de Problemas. Materiais Manipuláveis.

Abstract

This work presents a teaching proposal for the Combinatorial Analysis in Elementary School. The main goal is to provide a didactic sequence that benefits a combinatorial reasoning construction since the early years of Basic Education, facilitating the development in High School, as well as an improvement that achieves different subjects as Biology, Chemistry and Computer Science, since the Combinatorial Analysis is also required in these subjects. To this end, using the Problem Solving Methodology combined with games, besides manipulable supplies, activities based on the concepts and steps related to each of the cycles of Elementary Education had been done, in order to lead the student to know and become acquainted with counting problems, graphical presentations, different ways of combination and fundamental counting principles, promoting the combinatorial reasoning development.

Keywords: Combinatorial Analysis. Combinatorial Reasoning. Problem Solving. Manipulable Supplies.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Quadrado Mágico de Ordem 3	20
Figura 2 – A Tartaruga Sagrada de Lo Shu	20
Figura 3 – Representação Mística do Lo Shu	21
Figura 4 – Melancolia	22
Figura 5 – Adaptação do Triângulo Aritmético de Ibn Mun'im	25
Figura 6 – Representação do Princípio Aditivo da Contagem	26
Figura 7 – Paralelo entre PCN's e Currículo Mínimo	29
Figura 8 – Problema de quebra-cabeça	35
Figura 9 – Etapas Metodológicas	41
Figura 10 – Lançamento de Dados	48
Figura 11 – Resposta ao Lançamento de Dados	48
Figura 12 – Vestidos e sapatos de Lara	50
Figura 13 – Combinações de vestimentas de Lara	50
Figura 14 – Vestimentas de Lara	51
Figura 15 – Árvore de possibilidades de vestimentas de Lara	51
Figura 16 – Faces de uma Moeda	52
Figura 17 – Árvore de possibilidades ao lançar uma moeda duas vezes	52
Figura 18 – Resposta da questão do lançamento de uma moeda duas vezes	53
Figura 19 – Casinhas formadas com o material dos Blocos Lógicos	56
Figura 20 – Cardápio da Lanchonete	59
Figura 21 – Dinheiro de Lucas	59
Figura 22 – Dinheiro recebido por Marcelo	61
Figura 23 – Escudo desenhado por Felipe	67
Figura 24 – Possibilidades de pintura do escudo utilizando ou não a mesma cor em ambos os lados	67
Figura 25 – Possibilidades de pintura do escudo utilizando cores diferentes em cada lado	68
Figura 26 – Representação da casa de Bia	69
Figura 27 – Borboleta	75
Figura 28 – Árvore das possibilidades de pintura da borboleta	77
Figura 29 – Possibilidades ao pintar a borboleta com duas restrições	79

Figura 30 – Árvore de possibilidades com os casais formados para a seleção	80
Figura 31 – Produto cartesiano com os casais formados para a seleção	81
Figura 32 – Labirinto	84
Figura 33 – Veleiro desenhado por Carlos e cores de giz de cera que ele possui.	86
Figura 34 – Veleiro de Carlos	87
Figura 35 – Cálculo de possibilidades de pintura do veleiro	87
Figura 36 – Resposta ao cálculo de possibilidades de pintura do veleiro	88
Figura 37 – Cardápio do restaurante Bom Paladar	88
Figura 38 – Estradas da questão 5	89
Figura 39 – Estradas da questão 6	90
Figura 40 – Cartão Loteria Esportiva	93

Lista de quadros

Quadro 1 – Conceitos e Procedimentos da Análise Combinatória Abordados no Ensino Fundamental	28
Quadro 2 – Somas Obtidas no Lançamento de Dois Dados	48
Quadro 3 – Resposta de Somas Obtidas no Lançamento de Dois Dados	49
Quadro 4 – Soma das faces igual a 4	49
Quadro 5 – Soma das faces igual a 9	49
Quadro 6 – Casinhas com os Blocos Lógicos	57
Quadro 7 – Solução Tabela Casinhas com os Blocos Lógicos	57
Quadro 8 – Opções de Lucas	60
Quadro 9 – Solução com as opções de Lucas	60
Quadro 10 – Localização dos cogumelos	69
Quadro 11 – Solução Localização dos cogumelos	70
Quadro 12 – Casais formados para a seleção	80
Quadro 13 – Formação dos casais incluindo Joice	81
Quadro 14 – Quadro que deve ser colorido	92

Lista de abreviaturas e siglas

PCN Parâmetros Curriculares Nacionais

SEEDUC Secretaria de Estado de Educação

Lista de símbolos

P_n	Permutação simples de n elementos
$C_{n,p}$	Combinação simples de classe p de n objetos
\cup	União de conjuntos

Sumário

Introdução	16
1 A ANÁLISE COMBINATÓRIA	19
1.1 Aspectos Históricos	19
1.2 Conceitos	26
1.2.1 Princípio Aditivo da Contagem ou Princípio de Adição	26
1.2.2 Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem	27
1.3 A Análise Combinatória no Ensino Fundamental	27
2 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O USO DE JOGOS	30
2.1 Problemas Matemáticos: Definições e Tipos	31
2.1.1 Problemas-Padrão	32
2.1.2 Problemas-Processo ou Heurísticos	33
2.1.3 Problemas de Aplicação	34
2.1.4 Problemas de Quebra-cabeça	34
2.2 Os Jogos como Recurso na Resolução de Problemas	35
2.3 Estruturas dos jogos	37
2.3.1 Jogos de Exercício	37
2.3.2 Jogos Simbólicos	38
2.3.3 Jogos de Regra	39
2.4 O Papel do Professor na utilização de jogos	40
2.5 Materiais manipuláveis aliados aos jogos e situações-problema	43
3 PROPOSTAS DE ATIVIDADES	45
3.1 1º Ciclo do Ensino Fundamental	46
3.1.1 Atividade 01: Introduzindo o Raciocínio Combinatório	46
3.1.2 Atividade 02: Os Blocos Lógicos e a Elaboração de Esquemas	54
3.1.3 Atividade 03: A Análise Combinatória e o Nosso Dinheiro	57
3.2 2º Ciclo do Ensino Fundamental	63
3.2.1 Atividade 04: Montando o Bolo	63
3.2.2 Atividade 05: Problemas de Contagem Diversos	65
3.2.3 Atividade 06: Jogo de Cartas Árvore das Possibilidades	71
3.3 3º Ciclo do Ensino Fundamental	73
3.3.1 Atividade 07: Problemas de Contagem - Agrupamentos e suas representações	73
3.3.2 Atividade 08: Inserindo novos problemas de contagem	82

3.4	4º Ciclo	84
3.4.1	Atividade 09: O Princípio Fundamental da Contagem	85
3.4.2	Atividade 10: Retomando problemas de contagem	91
3.4.3	Atividade 11: Jogo Trilhando com a Combinatória	96
	Considerações Finais	99
	REFERÊNCIAS	101

APÊNDICES 104

APÊNDICE A – ATIVIDADES PARA O 1º CICLO DO ENSINO FUNDAMENTAL		105
A.1	Ficha de Atividades 1	106
A.2	Ficha de Atividades 2	109
A.3	Ficha de Atividades 3	110
APÊNDICE B – ATIVIDADES PARA O 2º CICLO DO ENSINO FUNDAMENTAL		112
B.1	Ficha de Atividades 4	113
B.2	Ficha de Atividades 5	114
APÊNDICE C – ATIVIDADES PARA O 3º CICLO DO ENSINO FUNDAMENTAL		117
C.1	Ficha de Atividades 7	118
C.2	Ficha de Atividades 8	121
APÊNDICE D – ATIVIDADES PARA O 4º CICLO DO ENSINO FUNDAMENTAL		122
D.1	Ficha de Atividades 9	123
D.2	Ficha de Atividades 10	125
APÊNDICE E – MATERIAIS MANIPULÁVEIS		127
E.1	Blocos Lógicos	128
E.2	Cédulas e Moedas do Sistema Monetário Brasileiro	129
E.3	Material Manipulável “Montando o Bolo”	130
E.4	Cartas do Jogo Árvore das Possibilidades	131
E.5	Tabuleiro do Jogo Trilhando com a Combinatória	143
E.6	Fichas do Jogo Trilhando com a Combinatória	144
E.7	Fichas Numeradas	150

E.8	Peões para o Jogo Trilhando com a Combinatória	151
-----	--	-----

Introdução

As transformações constantes fazem necessária uma educação integral que leve o aluno desde os primeiros anos de escolaridade a raciocinar cientificamente, de forma que ele tenha ciência dos problemas que a humanidade enfrenta. Dowbor (2013) afirma que essas transformações não se limitam apenas à modernização das tecnologias de comunicação e informação. Ainda segundo esse autor, pelo fato da educação ser um elo entre a escola e o universo ao nosso redor, deve levar em consideração essas transformações.

Para Moraes, Comin e Costa (2009, p. 3)

a grande promessa da educação é para que se forme o cidadão crítico, participativo e com melhores conhecimentos e habilidades para se viver em sociedade, ao mesmo tempo em que possa atender às exigências do mercado de trabalho.

Assim, é importante aprimorar no discente a capacidade de conferir e solucionar problemas de forma ligeira e eficaz.

Nesse sentido, cabe à escola a responsabilidade de encurtar o distanciamento existente entre o ensino formal utilizado nas classes e as experiências cotidianas, incentivando os discentes a pensarem, tornando-os pessoas críticas e capazes de compreender a sociedade em sua volta.

Uma aliada fundamental, neste processo de ensino-aprendizagem é a Análise Combinatória, pois como afirma Teixeira (2014), as noções de Combinatória, assim como as noções de Estatística e de Probabilidade, constituem-se de valiosas ferramentas para a tomada de decisões.

Porém, ao longo dos anos como professora de turmas do 3º ano do Ensino Médio, tenho observado as diversas dificuldades que os estudantes apresentam ao se depararem com os mais simples problemas de contagem. Demonstrando, na maioria dos casos, não terem desenvolvido o raciocínio combinatório, faltando-lhes as noções básicas, como o domínio de representações gráficas, a capacidade de identificar possíveis maneiras de combinação e o conhecimento do princípio fundamental da contagem. Uma das prováveis causas disto é o fato do Currículo Mínimo (RIO DE JANEIRO, 2012) não apontar a Análise Combinatória como conteúdo essencial para o Ensino Fundamental II.

Diante deste fato surge a motivação para o desenvolvimento desta pesquisa, que possui como objetivo principal propiciar uma sequência didática que favoreça a construção do raciocínio combinatório desde os anos iniciais da Educação Básica, facilitando, com isso, o prosseguimento do conteúdo no Ensino Médio, bem como um enriquecimento conceitual que também alcança outras áreas do conhecimento como Biologia, Química e Ciências da Computação, já que o raciocínio combinatório também é utilizado nessas áreas.

Para isso, foi elaborada uma sequência composta de 11 atividades destinadas aos alunos do Ensino Fundamental, utilizando a metodologia da Resolução de Problemas, abordada nos trabalhos de [Pozo \(1998\)](#), [Miranda \(2015\)](#) e [Redling \(2011\)](#). A sequência emprega esta metodologia aliada ao uso de jogos, além de materiais manipuláveis, e baseadas nos conceitos e procedimentos referentes a cada um dos ciclos do Ensino Fundamental previstos nos Parâmetros Curriculares Nacionais ([BRASIL, 1997](#); [BRASIL, 1998](#)).

Deve-se salientar que durante a elaboração das atividades a questão-problema foi: como facilitar o desenvolvimento do raciocínio combinatório no Ensino Fundamental, usando recursos atraentes e dinâmicos que tornem as aulas significativas e agradáveis?

Outros autores, tais como [Gonçalves \(2017\)](#), [Silva \(2013\)](#), [Alves \(2010\)](#) e [Aquino \(2013\)](#) desenvolveram pesquisas importantes sobre o raciocínio combinatório. Em [Gonçalves \(2017\)](#), podemos encontrar atividades usando o jogo senha para alunos do Ensino Fundamental. Já em [Silva \(2013\)](#), é apresentada uma sequência didática para a Educação de Jovens e Adultos utilizando Jogos e Resolução de Problemas. O trabalho desenvolvido por [Alves \(2010\)](#) também apresenta uma sequência de atividades, porém voltada a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. [Aquino \(2013\)](#) faz sugestão de questões para explorar o raciocínio combinatório nos anos finais do Ensino Fundamental.

A presente pesquisa difere-se das estudadas por apresentar propostas de atividades direcionadas a desenvolver o raciocínio combinatório e a construção gradativa dos princípios de contagem nos quatro ciclos do Ensino Fundamental da Educação Básica, aliando três estratégias didáticas: a metodologia da Resolução de Problemas, a utilização de Jogos e de materiais manipuláveis.

O presente trabalho está estruturado em três capítulos.

No Capítulo 1 foi apresentada uma breve cronologia com os fatos mais relevantes a respeito da Análise Combinatória, relatando desde o surgimento dos primeiros problemas até suas aplicações na atualidade, citando também os matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento do tema. Em seguida, baseados nas orientações dos documentos oficiais ([BRASIL, 1997](#); [BRASIL, 1998](#)) foram expostos conceitos da Análise Combinatória, que, pelo fato do trabalho ser destinado ao Ensino Fundamental, limitou-se ao Princípio Aditivo e Princípio Multiplicativo.

O Capítulo 2 traz a metodologia a ser usada nas atividades que serão propostas. Apresenta-se a estratégia didática de Resolução de Problemas e a utilização de jogos como um importante recurso para esta estratégia. Nele encontram-se os princípios do método de Resolução de Problemas, definições e tipos de problemas matemáticos, bem como a contribuição do uso de jogos no trabalho com situações-problema, as estruturas dos jogos, a função do professor na utilização de jogos e a importância dos materiais manipuláveis aliados aos jogos e situações-problema.

No Capítulo 3 apresentam-se as atividades propostas para a inserção da Análise Combinatória no Ensino Fundamental, com o intuito de facilitar a compreensão do conteúdo e o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Encontram-se descritos em cada uma das atividades propostas, visando auxiliar o docente durante a aplicação, os objetivos, o público alvo a que se destinam, os pré-requisitos para a aplicação, materiais e tecnologias necessários para a aplicação, recomendações metodológicas, prováveis dificuldades, a descrição geral das atividades contendo as soluções de cada questão, as conclusões e possíveis continuções e desdobramentos da atividade.

Por fim, são apresentadas as considerações finais sobre o tema proposto, as referências bibliográficas e os apêndices contendo todo o material a ser utilizado durante a aplicação das atividades propostas.

Capítulo 1

A Análise Combinatória

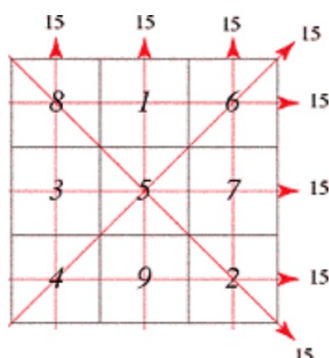
1.1 Aspectos Históricos

Uma percepção da história da matemática é essencial em qualquer discussão sobre a matemática e o seu ensino. Ter uma ideia, embora imprecisa e incompleta, sobre por que e quando se resolveu levar o ensino da matemática à importância que tem hoje são elementos fundamentais para se fazer qualquer proposta de inovação em educação matemática e educação geral. (D'AMBROSIO, 2011, p. 29)

Existem divergências quanto ao surgimento dos problemas relacionados à Análise Combinatória. Morgado et al. (2006) afirma que o desenvolvimento do binômio $(1 + x)^n$ está entre os primeiros problemas estudados ligados ao conteúdo.

Já para Wieleitner (1928), o problema mais antigo relacionado com a Análise Combinatória é o da formação dos quadrados mágicos, isso porque Quadrados Mágicos, Permutações e Combinações, estão ligados ao estudo de arranjos de subconjuntos de um conjunto de objetos. Para Vazquez e Noguti (2004, p. 2), um quadrado mágico de ordem n é “um arranjo de números $1, 2, 3, \dots, n^2$, em um quadrado $n \times n$ de forma que cada linha, coluna e diagonal deste quadrado possua a mesma soma”. Na Figura 1, o exemplo de um quadrado mágico de ordem 3 cuja soma é 15.

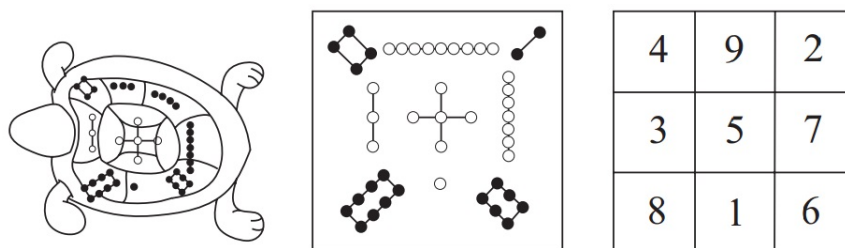
Figura 1 – Quadrado Mágico de Ordem 3



Fonte: Elaboração própria

Segundo [Januario \(2008\)](#), inúmeras são as versões referentes ao aparecimento dos Quadrados Mágicos. O autor afirma que a história mais popular relata que o primeiro quadrado mágico surgiu na China, em torno de 2200 a.C., e ficou conhecido como Lo Shu, cujo significado é rio livre. De acordo com uma lenda, Yu, o imperador da antiga China, pertencente à dinastia Hsia, encontrava-se às margens do Rio Lo meditando e então emergiu uma tartaruga, que era considerado animal sagrado, com estranhos sinais no casco ([SANTINHO; MACHADO, 2006](#)). A Figura 2 mostra a representação da tartaruga de Lo Shu e o quadrado mágico associado a ela.

Figura 2 – A Tartaruga Sagrada de Lo Shu



Fonte: Blogspot Reforçando Matemática - ([BROCK, 2016](#))

Disponível em <<http://reforcandomatematica.blogspot.com.br/2016/11/origem-do-quadrado-magico.html>>

O imperador notou que os sinais que possuíam formatos de nós feitos num tipo de barbante tinham a possibilidade de serem convertidos em números e que a soma de todos era quinze em qualquer direção, parecendo algarismos mágicos ([SANTINHO; MACHADO, 2006](#)).

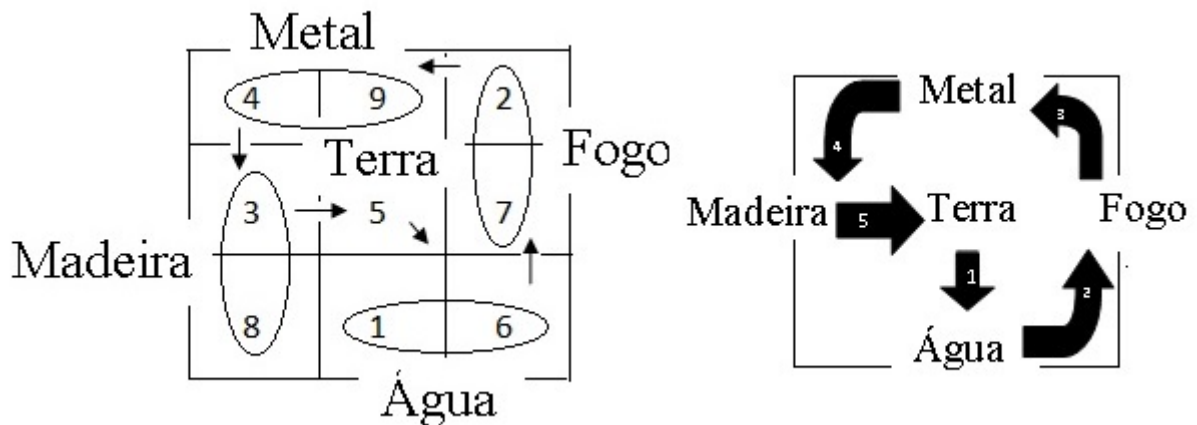
Conforme [Vazquez e Noguti \(2004, p. 2 e 3\)](#), este quadrado mágico “causava uma grande fascinação para a maioria das pessoas, pois nesta época, mesmo a mais simples aritmética era algo espantoso”.

Segundo [Santinho e Machado \(2006\)](#), ao quadrado mágico de Lo Shu foi conferido um caráter místico, cuja representação pode ser observada na Figura 3. Acreditava-se que

ele simbolizava a reunião dos princípios basais que constituíam o universo. Os dígitos pares representavam Yin (princípio feminino) e os dígitos ímpares o Yang (princípio masculino).

- O algarismo 5 simbolizava a Terra e em torno dele estão os quatro elementos fundamentais.
- a água, representada pelos algarismos 1 e 6;
- o fogo, representado pelos algarismos 2 e 7;
- a madeira, representada pelos algarismos 3 e 8;
- os metais, representados pelos algarismos 4 e 9.

Figura 3 – Representação Mística do Lo Shu



Fonte: [Santinho e Machado \(2006, p. 2\)](#)

[Vazquez e Noguti \(2004, p. 3\)](#) afirmam que não é conhecida a maneira e nem a época na qual a ideia dos quadrados mágicos foi transmitida aos árabes. “Alguns quadrados mágicos maiores que o Lo Shu foram encontrados por um grupo de estudantes árabes conhecido como os Ikhwan-al-Safa, que apresentaram os quadrados de ordem 4, 5 e 6 e afirmaram existir os de ordem 7, 8 e 9”. Porém, para [Vazquez \(2011, p. 21\)](#), “os quadrados mágicos chegaram à Europa no século XIV”.

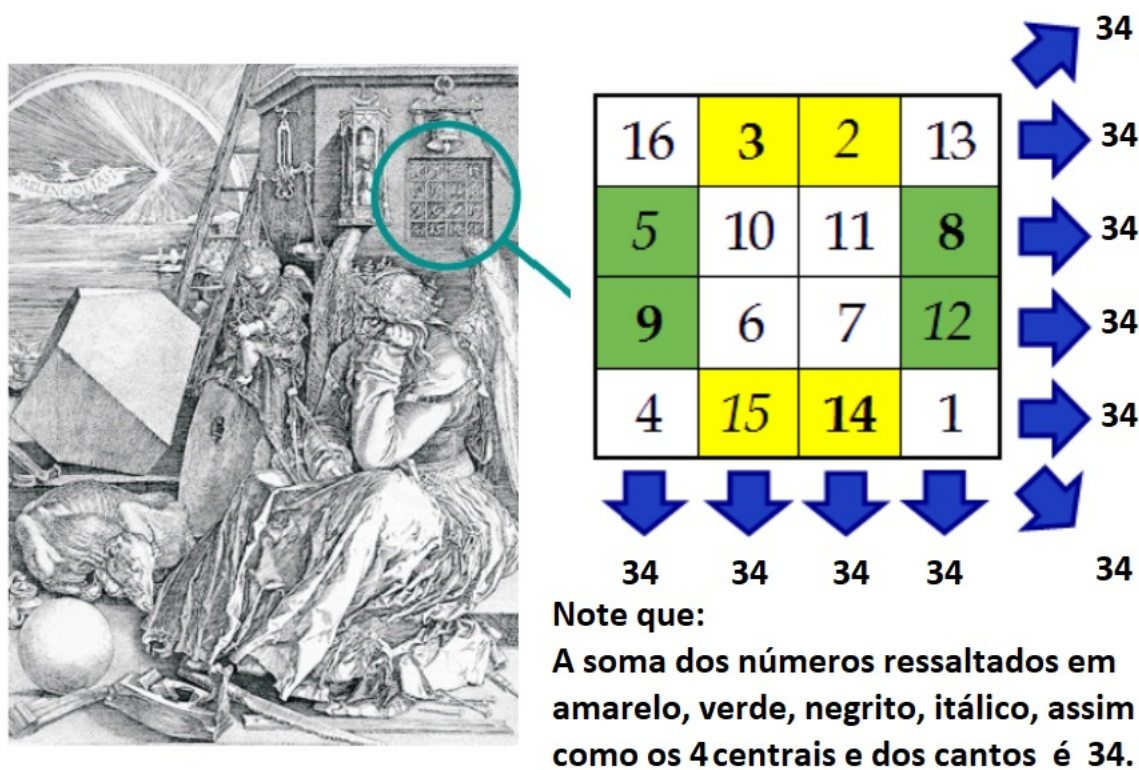
De acordo com [Biggs \(1979, p. 120\)](#), o manuscrito de Manuel Moschopoulos, escrito por volta de 1315, é apontado como a conexão existente entre os trabalhos iniciais sobre os quadrados mágicos e os trabalhos europeus subsequentes referentes ao tema. Segundo o mesmo autor neste manuscrito estão contidas as regras gerais para quadrados de ordem ímpar e para aqueles cuja ordem é divisível por 4.

Os quadrados mágicos despertaram o interesse de muitas pessoas. Hinrich Cornelius Agrippa (1486 - 1535), teologista e físico alemão, elaborou sete quadrados mágicos de

ordens 3 a 10, simbolizando os oito corpos celestes que ele conhecia como planetas, que são: Saturno, Júpiter, Marte, Sol, Vênus, Mercúrio, Lua e Terra. Alguns matemáticos como Bernard Frénicle de Bessy (1602 - 1675), Claude - Gaspar Bachet (1581 - 1638), Pierre de Fermat (1601 - 1665) e Leonhard Euler (1707 - 1783) interessaram-se pelos quadrados mágicos devido aos problemas referentes à construção, à classificação e à enumeração dos mesmos, levando-os a estudar esses quadrados e os cubos mágicos (SANTINHO; MACHADO, 2006).

Albrecht Dürer (1471-1528), um pintor e ilustrador alemão, demonstrou interesse pela matemática e no ano de 1514 retratou em uma de suas pinturas um quadrado mágico, sua gravura recebeu o nome de Melancolia. O quadrado mágico que foi retratado pelo artista fascina estudiosos por apresentar a constante mágica 34 (SANTINHO; MACHADO, 2006). A Figura 4 apresenta a referida pintura:

Figura 4 – Melancolia



Disponível em: <<http://calango74.blogspot.com.br/2012/11/o-quadrado-magico-de-durer.html>>

O quadrado exposto na gravura Melancolia é um quadrado mágico de ordem 4 que apresenta as seguintes peculiaridades:

- O resultado da soma dos números em qualquer uma das colunas, das linhas ou das diagonais é sempre 34;

- Nas casas centrais da última linha encontram-se os números 15 e 14, um ao lado do outro, compondo 1514, que é o ano de criação do quadro;
- Ainda na última linha encontramos nos quadrados extremos os números 4 e 1. O número 4 refere-se à letra D (quarta letra do alfabeto) e o número 1 refere-se à letra A (primeira letra do alfabeto), formando assim D. A., iniciais de “Dürer, Albrecht”;
- O resultado da soma dos quatro números localizados nos cantos (16, 13, 4 e 1) é 34;
- O resultado da soma dos quatro números situados nas casas centrais (10, 11, 6 e 7) é 34;
- O resultado da soma dos dois números centrais da linha superior (3 e 2) com os dois números centrais da linha inferior (15 e 14) é 34;
- O resultado da soma dos dois números centrais da primeira coluna (5 e 9) com os dois números centrais da última coluna (8 e 12) é 34;
- O resultado da soma dos números dos dois quadrados contíguos à casa extrema esquerda em cima (3 e 5) com os números dos dois quadrados contíguos à casa extrema direita embaixo (12 e 14) é 34;
- O resultado da soma dos números dos dois quadrados contíguos à casa extrema direita em cima (2 e 8) com os números dos dois quadrados contíguos à casa extrema esquerda embaixo (9 e 15) é 34.

Existem três importantes citações que estão claramente interligadas e são introdutórias ao campo de problemas combinatórios. São elas:

1. Problema do papiro de Rhind, um dos mais velhos manuscritos matemáticos sobreviventes, é egípcio e foi escrito em 1650 a.C.. “O problema nº 79 parece lidar com a soma de uma série de potências de 7 e, ao lado dos números, o escriba desenhou alguns hieróglifos, que podem ser traduzidos da seguinte forma:

Casas 7
Gatos 49
Ratos 343
Trigo 2401
Hekat 16807
19607. (BIGGS, 1979, p. 111)

2. Problema de Fibonacci, escrito por Leonardo de Pisa, em 1202, no *Líber Abaci*:

“Sete mulheres velhas estão indo para Roma; cada uma delas tem sete mulas; cada mula carrega sete sacos; cada saco contém sete pães; cada pão tem sete facas; e cada faca tem sete bainhas. Qual é o número total de coisas?” (BIGGS, 1979, p. 110)

De acordo com Biggs (1979), o problema do papiro de Rhind preservou-se obscuro até Leon Rodet (1881) perceber a relação existente com o problema de Fibonacci, propondo a interpretação que segue:

“Há sete casas, cada uma com sete gatos; cada gato mata sete ratos; cada rato teria comido sete cabeças de trigo, cada uma delas teria produzido sete medidas hekat de grãos.” (BIGGS, 1979, p. 111)

3. Poesia infantil que surgiu por volta de 1730:

Quando eu estava indo para St. Ives,
 Conheci um homem com sete esposas,
 Cada esposa tinha sete sacos,
 Cada saco tinha sete gatos,
 Cada gato tinha sete caixas,
 Caixas, gatos, sacos e esposas,
 Quantos iam para St. Ives? (BIGGS, 1979, p. 110)

Pode ser observado que os três problemas citados enfatizam a adição, a repetição e a memorização do número sete.

No final do século XVII, a teoria combinatória surge como um novo capítulo da Matemática, época em que foram redigidos os livros: *Traité du triangle arithmétique* (escrito em 1654 e publicado em 1665) de Pascal, *Dissertatio de arte combinatória* (1666) de Leibniz e *Ars magna sciendi sive combinatoria* (1669) de Athanasius Kircher. O tema foi intensamente discutido em trabalhos de matemáticos como Bernard Frénicle de Bessy (1693), John Wallis (1673), J. Bernoulli (1713) e Abraham de Moivre (1718) (VAZQUEZ; NOGUTI, 2004).

Bernard Frénicle de Bessy, matemático francês, apresentou em seu trabalho (1693) todos os 880 quadrados mágicos de ordem 4 (VAZQUEZ; NOGUTI, 2004).

Thomas Storde debatia seus procedimentos de cálculos de “variações” (consonante ao que nomeamos de “arranjos”) fundamentados em exemplos habituais como encontrar a quantidade de palavras possuindo três letras originadas através do alfabeto latino, constituído de vinte e quatro letras. Para tanto, empregava o procedimento a seguir (CAMPOS, 2011):

$$\binom{24}{3} P_3 = 2024 \times 6 = 12144$$

Ele também utilizava, apesar de não conhecê-lo, conceitos do triângulo de Pascal. O cálculo da quantidade de reuniões dos sete planetas (pressupondo a inclusão da Terra e da Lua) era realizado da seguinte maneira (CAMPOS, 2011):

$$\binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 2^7 - 7 - 1 = 120$$

De acordo com Campos (2011) entre o final do século XII e início do século XIII, o matemático Ahmad al-Ab'dari Ibn Mun'im considerou o seguinte problema: quantos diferentes pacotes de cores podem ser feitos de dez cores diferentes de seda? Primeiramente ele os calculou considerando pacotes contendo apenas uma cor, encontrando 10 possibilidades, isto é, $C_{10,1} = 10$. Para o cálculo das possibilidades utilizando duas cores, o matemático enumerou os pares em ordem:

$$(c_2, c_1); (c_3, c_1); (c_3, c_2); \dots; (c_{10}, c_1); (c_{10}, c_2); \dots; (c_{10}, c_9)$$

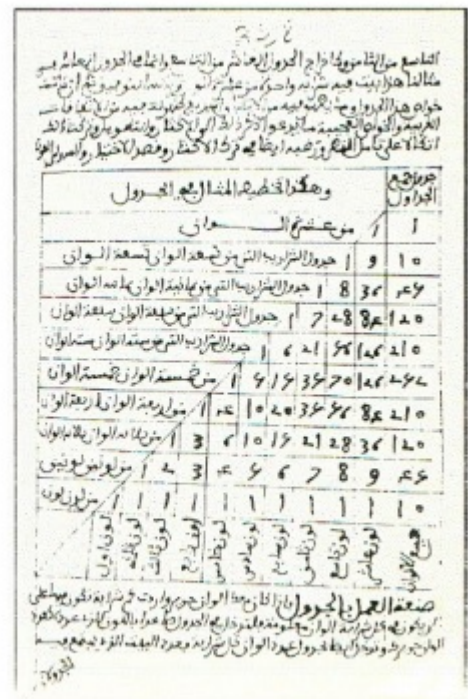
Constatando que:

$$C_{10,2} = 1 + 2 + \dots + 9 = C_{1,1} + C_{2,1} + \dots + C_{9,1} = 45.$$

Para simplificar seus cálculos Ibn Mun'im estruturou os resultados em uma tabela (Figura 5) que é conhecida na atualidade como triângulo de Pascal.

Figura 5 – Adaptação do Triângulo Aritmético de Ibn Mun'im

For a tassel of 10 colors										1	1
For a tassel of 9 colors									1	9	10
For a tassel of 8 colors								1	8	36	45
For a tassel of 7 colors							1	7	28	84	120
For a tassel of 6 colors						1	6	21	56	126	210
For a tassel of 5 colors					1	5	15	35	70	126	252
For a tassel of 4 colors				1	4	10	20	35	56	84	210
For a tassel of 3 colors			1	3	6	10	15	21	28	36	120
For a tassel of 2 colors		1	2	3	4	5	6	7	8	9	45
For a tassel of 1 color	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10
	using color #1	using color #2 (s earlier)	using color #3 (s earlier)	using color #4 (s earlier)	using color #5 (s earlier)	using color #6 (s earlier)	using color #7 (s earlier)	using color #8 (s earlier)	using color #9 (s earlier)	using color #10 (s earlier)	Total no. of tassels



Possibilidades para um Tassel Formado por 10 cores

Disponível em (CAMPOS, 2011, p. 34)

A Análise Combinatória tornou-se mais formal através da contribuição dos matemáticos europeus, assim ela passa a ser um poderoso recurso que possibilitaria o progresso em áreas como a Estatística, a Probabilidade e a Teoria dos Grafos.

Na atualidade, a Análise Combinatória dispõe de abundantes aplicações em muitas áreas do conhecimento, não se limitando apenas à Matemática, permeando também o campo das Ciências, como a Biologia, a Economia, a Física e a Química.

1.2 Conceitos

A Combinatória permite quantificar conjuntos ou subconjuntos de objetos ou de situações, selecionados a partir de um conjunto dado, ou seja, a partir de determinadas estratégias ou de determinadas fórmulas, pode-se saber quantos elementos ou quantos eventos são possíveis numa dada situação, sem necessariamente ter que contá-los um a um. (PESSOA; BORBA, 2010, p. 2)

A Análise Combinatória engloba diversos tipos de problemas, que vão além dos problemas de contagem, nos quais utilizamos geralmente as técnicas de Permutação, Arranjo e Combinação para resolvê-los. Para a solução desses problemas existem outros métodos que podem ser utilizados, como por exemplo, o princípio das gavetas de Dirichlet ou princípio da casa dos pombos, a Teoria de Ramsey, o princípio da inclusão-exclusão, entre outros. Porém, como o presente trabalho está destinado aos alunos do Ensino Fundamental, utilizaremos apenas os problemas de contagem considerando conjuntos finitos, vamos nos ater aos conceitos do Princípio Aditivo e Princípio Multiplicativo.

1.2.1 Princípio Aditivo da Contagem ou Princípio de Adição

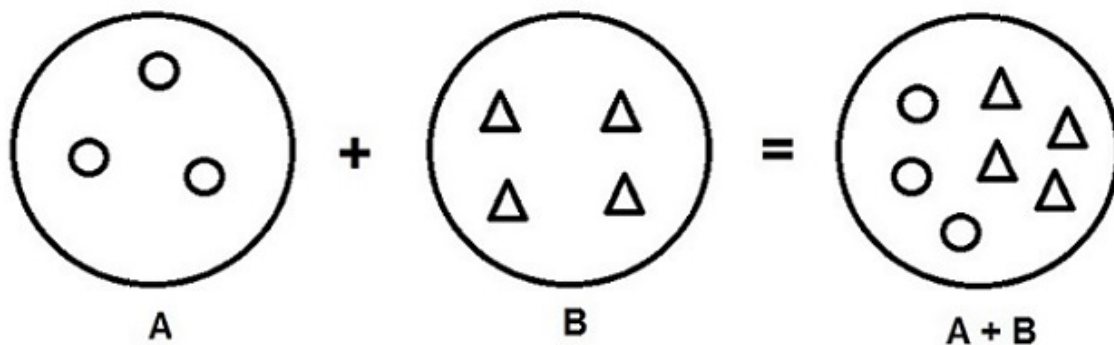
O Princípio de Adição é um princípio básico da contagem e consiste na reunião dos elementos de dois ou mais conjuntos.

Segundo Morgado et al. (2006), a aplicação das operações aritméticas a problemas de contagem motiva e facilita a aprendizagem das crianças. Eles também afirmam que a operação de adição é sempre introduzida em conexão com um problema de contagem.

Princípio da Adição: *Sejam A e B conjuntos disjuntos, com m e n elementos, respectivamente, logo $A \cup B$ contém $m + n$ elementos (MORGADO et al., 2006).*

A Figura 6 ilustra o Princípio de Adição:

Figura 6 – Representação do Princípio Aditivo da Contagem



Fonte: Elaboração própria

Exemplo 1.1. *Em uma eleição para representante de classe de uma turma deve-se escolher uma pessoa. A turma é formada por 7 meninas e 4 meninos. De quantas formas podemos escolher um representante de classe?*

Solução: O problema diz que precisamos escolher entre todos os alunos da turma um para ser representante. No grupo das meninas temos 7 possíveis escolhas e no grupo dos meninos temos 4 possíveis escolhas. Assim, pelo Princípio Aditivo da Contagem, temos $7 + 4 = 11$ formas de escolher um representante para a classe.

1.2.2 Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem

O Princípio Multiplicativo é uma ferramenta básica e essencial para a resolução de problemas de contagem.

Princípio Multiplicativo: *Caso a decisão d_1 possua m maneiras distintas de ser tomada e caso, feita a escolha da decisão d_1 , a decisão d_2 possua n maneiras distintas de ser tomada, portanto, o número de modos diferentes das decisões d_1 e d_2 serem tomadas, consecutivamente, é igual a $m \cdot n$ (MORGADO et al., 2006).*

Exemplo 1.2. *Ana possui 5 saias diferentes e 8 blusas também diferentes entre si. De quantas maneiras ela pode escolher um conjunto composto de uma saia e uma blusa para sair?*

Solução: Para formar um conjunto Ana precisa realizar as seguintes decisões:

- a) escolher uma saia entre as 5 saias que ela possui;
- b) escolher uma blusa entre as 8 blusas que ela possui.

Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos que Ana possui $5 \cdot 8 = 40$ maneiras diferentes de escolher um conjunto para sair.

1.3 A Análise Combinatória no Ensino Fundamental

A Análise Combinatória é uma aliada fundamental, na construção do raciocínio, indispensável na resolução de problemas.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997; BRASIL, 1998), a Análise Combinatória enquadra-se no bloco de conteúdos “Tratamento da Informação” e a mesma deve estar inserida em todos os ciclos do Ensino Fundamental. O objetivo é levar o aluno a lidar com situações-problemas que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem.

No decorrer do 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental (EF), os alunos devem ser levados a coletar, organizar e representar dados, com o objetivo de que compreendam a função das representações gráficas e “se tornem capazes de descrever e interpretar sua realidade, usando conhecimentos matemáticos”. (BRASIL, 1997, p. 49)

Para o 3º e 4º ciclo do EF, os PCN (BRASIL, 1998, p. 52), no que se refere a problemas de contagem dizem que: “o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades”.

A seguir, os temas referentes ao ensino de Análise Combinatória que devem ser abordados em cada um dos anos escolares do Ensino Fundamental de acordo com os PCNs BRASIL (1997, p. 52 e 61) e BRASIL (1998, p. 74 e 90).

Quadro 1 – Conceitos e Procedimentos da Análise Combinatória Abordados no Ensino Fundamental

Conceitos e Procedimentos	Anos Escolares							
	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º
Leitura e interpretação de informações contidas em imagens.	X	X						
Criação de registros pessoais para comunicação das informações coletadas.	X	X						
Produção de textos escritos a partir da interpretação de gráficos e tabelas.	X	X	X	X				
Coleta, organização e descrição de dados.	X	X	X	X	X	X		
Leitura, interpretação e elaboração de dados apresentados de maneira organizada por meio de listas, tabelas, diagramas e gráficos.	X	X	X	X	X	X	X	X
Identificação das possíveis maneiras de combinar elementos de uma coleção e de contabilizá-las usando estratégias pessoais.			X	X				
Representação e contagem dos casos possíveis em situações combinatórias.					X	X		
Utilização do princípio Multiplicativo para a construção do espaço amostral.							X	X

Autoria Própria

Por outro lado, a Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro (SEEDUC), elaborou uma ferramenta importante para auxiliar o planejamento de todas as escolas públicas estaduais do Rio de Janeiro. O Currículo Mínimo apresenta as competências e habilidades básicas que devem ser contempladas nos planos de curso e aulas da segunda

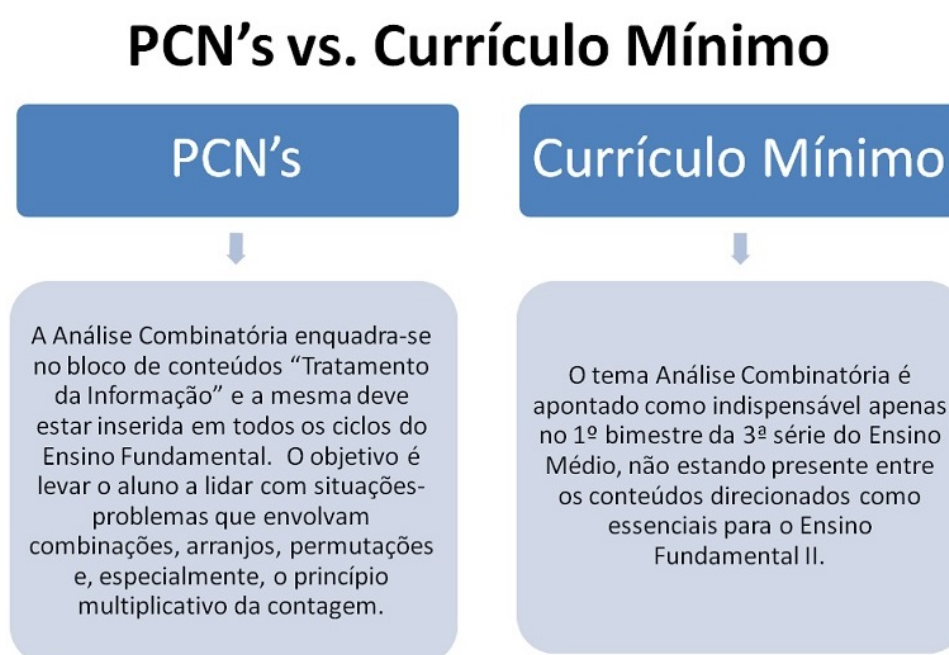
etapa do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Nele, o tema Análise Combinatória é apontado como indispensável apenas no 1º bimestre da 3ª série do Ensino Médio (RIO DE JANEIRO, 2012), não estando presente entre os conteúdos direcionados como essenciais para o Ensino Fundamental II.

A falta do tema Combinatória nesta modalidade de ensino pode trazer problemas, uma vez que, procurando adequar-se a este Currículo, autores de livros didáticos destinados à rede estadual podem deixar de apresentar o conteúdo no material destinado a estes anos escolares, dificultando a abordagem do assunto e o desenvolvimento do raciocínio combinatório nesta etapa, visto que o livro didático é um importante instrumento de apoio que auxilia na condução do trabalho docente.

Outra adversidade que pode ser gerada é o fato de docentes considerarem este conteúdo irrelevante para os alunos da segunda etapa do Ensino Fundamental, uma vez que o Currículo Mínimo não o contempla, e postergar sua aplicação ou, até mesmo, não o fazer. Assim, os alunos desta fase não teriam o devido contato com problemas de contagem, não construindo as noções básicas da Análise Combinatória, como as possibilidades de combinações, as representações gráficas, o princípio fundamental da contagem e, conseqüentemente, o raciocínio combinatório. Acarretando dificuldade de compreensão do conteúdo quando chegarem à 3ª série do Ensino Médio, atrapalhando seu prosseguimento.

A Figura 7 apresenta um paralelo entre o que está previsto nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997; BRASIL, 1998) e no Currículo Mínimo (RIO DE JANEIRO, 2012) acerca da abordagem da Análise Combinatória no Ensino Fundamental.

Figura 7 – Paralelo entre PCN's e Currículo Mínimo



Fonte: Elaboração própria

Capítulo 2

A Resolução de Problemas e o Uso de Jogos

Se trabalho com crianças, devo estar atento à difícil passagem ou caminhada da heteronomia para a autonomia, atento à responsabilidade da minha presença que tanto pode ser auxiliadora como pode virar perturbadora da busca inquieta dos educandos. (FREIRE, 2007, p. 70)

A Resolução de Problemas é uma estratégia didática eficiente para melhorar o raciocínio e aumentar a motivação dos estudantes em relação aos conteúdos matemáticos. Uma vez que a utilização de problemas leva o aluno a vários questionamentos e a refletir sobre eles, propiciando exercitar o raciocínio lógico, deixando de lado a simples utilização de regras e fórmulas. O método de resolução de problemas proporciona uma aprendizagem mais significativa e interessante, autores como [Pozo \(1998\)](#), [Miranda \(2015\)](#) e [Redling \(2011\)](#) desenvolveram trabalhos importantes que abordam esta metodologia.

Os PCN ([BRASIL, 1997](#)) afirmam que ao focalizar a resolução de problemas, a proposta a ser utilizada pode ser sintetizada nos princípios a seguir:

- I. a atividade matemática tem como ponto inicial o problema. A abordagem de conceitos, ideias e métodos matemáticos deve ser realizada, no decorrer do processo de ensino aprendizagem, através da exploração de problemas, isto é, por meio de situações nas quais os discentes tenham a necessidade de formular alguma técnica para solucioná-las;
- II. só existe um problema caso o aluno seja conduzido a compreender o enunciado da questão e a organizar a situação que ele retrata. Um exercício no qual o aluno simplesmente faz o emprego de processos operatórios ou de fórmulas, não pode ser considerado um problema;
- III. durante a resolução de um problema podem ser elaboradas aproximações sucessivas ao conceito, já, para a resolução de outro tipo de problema, o aluno pode fazer o uso

do que assimilou para solucionar outros problemas, o que necessita de transferências, ajustamentos, rupturas;

- IV. um grupo de conceitos é construído em resposta a um problema, que apresentam significados num grupo de problemas. Mediante uma sequência de generalizações e retificações se dá a construção de um conceito matemático, vinculado a outros conceitos;
- V. a resolução de problemas promove o contexto que possibilita a compreensão de atitudes, conceitos e procedimentos matemáticos, logo, não trata-se apenas de uma atividade a ser realizada em paralelo ou para aplicar a aprendizagem, e sim, de uma orientação para a aprendizagem.

Um trabalho voltado para facilitar a aplicação do conteúdo Análise Combinatória no Ensino Fundamental integrado à resolução de problemas é de grande valia para o atual momento. Porém, antes de iniciar o estudo sobre a Resolução de Problemas faz-se necessário compreender o que é de fato um Problema Matemático, e quais são suas peculiaridades, pois a classificação de uma determinada situação em problema ou não, é relativa ao conhecimento que o aluno possui sobre o tema no momento da aplicação.

2.1 Problemas Matemáticos: Definições e Tipos

A princípio, para facilitar a compreensão de problema matemático, segue a definição de (VILA; CALLEJO, 2006, p. 29):

Definição 2.1. *Um problema matemático, é uma situação, proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática, cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita ou de um processo que identifique automaticamente os dados com a conclusão e, portanto, deverá buscar, investigar, estabelecer relações e envolver suas emoções para enfrentar uma situação nova.*

Segundo Dante (2009, p. 48), um exercício: “serve para exercitar, para praticar determinado algoritmo ou procedimento. O aluno lê o exercício e extrai as informações necessárias para praticar uma ou mais habilidades algorítmicas”. Desse modo, a finalidade do exercício é a prática dos mecanismos que foram aprendidos, durante sua realização não estão presentes a investigação e nem o confronto com situações desconhecidas.

É de extrema importância saber diferenciar problemas de exercícios Pozo (1998) elucida que, esta diferença se dá devido aos métodos que dispomos e utilizamos no caso dos exercícios e que nos proporcionam a solução imediata. O mesmo autor, ainda ressalta que há possibilidade de que uma mesma situação seja um problema para uma determinada

pessoa e não o seja para outra, fato que pode ocorrer pela falta de interesse pela situação proposta ou devido o indivíduo já possuir habilidades para chegar à solução de uma maneira rápida e fácil, minimizando o problema, transformando-o num simples exercício.

Sendo assim, caso uma pessoa resolva um problema diversas vezes ele acabará sendo reduzido a um simples exercício, isto porque se a realização propiciar que a técnica de resolução seja prática e eficiente, a mesma técnica será usada constantemente, logo, a finalidade da atividade passará a ser a prática das habilidades que já foram alcançadas.

Dessa forma, para que uma situação seja considerada um problema matemático sua solução não deve estar acessível a princípio, pois esta deve ser construída, é preciso que ocorra uma ou várias ações/operações. O problema deve levar o aluno a organizar as situações expostas, a desenvolver táticas de solução e a verificar tais estratégias, bem como o resultado encontrado. Situações nas quais o docente só aplica um conhecimento, como, por exemplo, uma fórmula matemática ou algoritmo previamente estudado não pode ser considerado um problema.

Dante (2009), classifica os problemas em: Problemas-padrão, Problemas-processo ou heurísticos, Problemas de aplicação e Problemas de quebra-cabeça.

2.1.1 Problemas-Padrão

De acordo com Dante (2009), o problema-padrão não estimula a curiosidade do aluno nem o desafia, pois para resolver os mesmos, utiliza-se o emprego de operações que os alunos já conhecem, eles não requerem a aplicação de técnicas. O enunciado já inclui a saída para responder o problema, sendo a modificação de expressões habituais em expressões matemáticas a incumbência fundamental do aluno, discernindo quais cálculos podem ser usados para chegar à solução.

Assim, recapitular e consolidar conhecimentos fundamentais adquiridos através dos cálculos referentes às operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, bem como associar a utilização dessas quatro operações a eventos cotidianos, são propósitos dos problemas-padrão (DANTE, 2009).

Segundo Dante (2009), os Problemas-padrão são divididos em simples e compostos. Os simples são aqueles cuja resolução envolve apenas uma operação e os compostos, envolvem na sua solução duas ou mais operações.

São exemplos de Problemas-padrão simples:

Exemplo 2.1. *Tiago tem 5 camisas lisas e 8 camisas listradas. Quantas camisas Tiago possui?*

Exemplo 2.2. *Uma moto tem duas rodas. Quantas rodas têm 6 motos?*

Exemplo 2.3. *Divida equitativamente 120 alunos em 5 classes.*

Agora, vamos observar exemplos de Problemas-padrão compostos:

Exemplo 2.4. *Juca, Edu e Cauã dispõem juntos de 80 bolinhas de gude. Se Juca possui 20 bolinhas, Edu e Cauã têm o mesmo número de bolinhas, qual é a quantidade que cada menino possui?*

Exemplo 2.5. *Um feirante possui 240 bananas e deseja empacotá-las em caixotes com capacidade de 10 unidades, armazenando-as em embalagens com 4 caixotes cada uma. Quantas embalagens serão necessárias para empacotar todas as bananas?*

Exemplo 2.6. *Em um estacionamento estão 15 bicicletas, 20 motos e 35 carros. Qual é o total de rodas presentes nesse estacionamento?*

2.1.2 Problemas-Processo ou Heurísticos

Nesse tipo de problema as operações que devem ser utilizadas para que se chegue à solução não estão claras, perceptíveis na pergunta. Esses problemas não estão sujeitos ao emprego imediato de algoritmos e nem à tradução direta para a linguagem matemática. (DANTE, 2009)

Assim, para resolvê-los é necessário tempo para raciocinar e elaborar um plano de ação, o que incentiva a curiosidade e o espírito de investigação. Então, despertam um interesse maior dos alunos do que os problemas-padrão, além de desencadearem nos alunos o desenvolvimento de técnicas de resolução de problemas (DANTE, 2009).

Abaixo seguem exemplos de Problemas-Processo ou Heurísticos.

Exemplo 2.7. *Para um torneio de xadrez, que será realizado na escola de Paulo, foram inscritos 80 alunos. Uma das regras do torneio é que dois participantes joguem de cada vez e a pessoa que perder seja eliminada do torneio. Dessa forma, quantos jogos serão disputados no torneio?*

Exemplo 2.8. *Carla convidou as amigas Débora, Gabriela, Lídia e Tainá para uma reunião em sua casa. Caso cada uma delas cumprimente todas as demais com um aperto de mão, quantos apertos de mão ocorrerão?*

Muitas são as formas que o aluno pode usar para chegar à solução desses problemas: fazer dramatização, listas, diagramas, desenhos, entre outras. Dessa forma ele utiliza diversos processos de pensamento (DANTE, 2009).

Cabe salientar que a classificação do problema depende do público a que se destina. Se a mesma pergunta for feita para estudantes de anos escolares diversos, ela pode representar um problema para um enquanto que para outro não. Um exemplo, disso é se as questões acima forem propostas para alunos do 5º ano do Ensino Fundamental

irão representar um problema-processo, pois eles terão que desenvolver uma técnica para solucioná-lo, mas se as mesmas questões fossem apresentadas para alunos do 3º ano do Ensino Médio, que já possuem os conhecimentos de Análise Combinatória, para eles esses problemas não mais seriam problemas-processo, mas sim problemas-padrão, pois imediatamente aplicariam as técnicas que foram assimiladas nos anos anteriores.

2.1.3 Problemas de Aplicação

Os problemas de aplicação, também conhecidos como situações-problema contextualizadas, representam eventos, acontecimentos do cotidiano, que requerem que a matemática seja utilizada para encontrar a solução (DANTE, 2009).

Para resolvê-los geralmente é necessário pesquisa e levantamento de dados. Utilizam-se princípios e métodos matemáticos para passar a situação real para a linguagem matemática, assim, por exemplo, são elaboradas tabelas, gráficos, funções, são realizadas operações (DANTE, 2009).

Dante (2009, p. 28) cita o exemplo abaixo como problema de aplicação:

Exemplo 2.9. *“Para fazer seu relatório, um diretor de escola precisa saber qual é o gasto mensal, por aluno, que ele tem com merenda escolar. Vamos ajudá-lo a fazer esses cálculos?”*

É possível levantar os seguintes questionamentos em relação ao problema acima:

- a) Quantos alunos comem a merenda por dia? E por mês?
- b) Quantos quilos de arroz, macarrão, tomate, cebola, sal etc. a escola recebe por mês?
- c) Qual é o preço atual, por quilo, de cada um desses alimentos?
- d) Qual é o salário mensal da merendeira?
- e) Quanto se gasta de gás? (DANTE, 2009, p. 28)

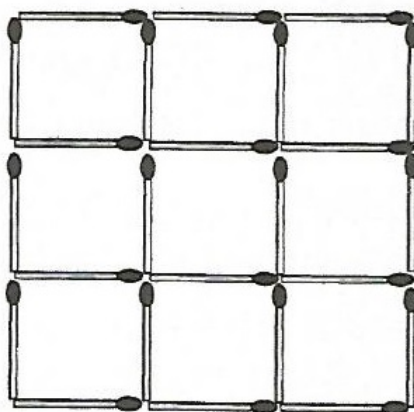
2.1.4 Problemas de Quebra-cabeça

Estes problemas são atraentes e desafiantes. Normalmente são divertidos e integram a parte da matemática que pode ser denominada de matemática recreativa. Para solucioná-los é necessário, em geral, de uma jogada de sorte ou de destreza para observar alguma artimanha ou frequência que possa resolver o problema (DANTE, 2009).

A seguir é apresentado um exemplo de problema de quebra-cabeça, (DANTE, 2009, p. 67):

Exemplo 2.10. “Com 24 palitos de fósforo, forme 9 quadrinhos, como mostra a figura abaixo. Como fazer para tirar apenas 4 palitos e deixar 5 quadrinhos?”

Figura 8 – Problema de quebra-cabeça



Disponível em (DANTE, 2009, p. 67)

2.2 Os Jogos como Recurso na Resolução de Problemas

Para viabilizar o trabalho com situações-problema, é preciso ampliar as estratégias e os materiais de ensino e diversificar as formas e organizações didáticas para que, junto com os alunos, seja possível criar um ambiente de produção ou de reprodução do saber e, nesse sentido, acreditamos que os jogos atendem a essas necessidades. (SMOLE; DINIZ; MILANI, 2007, p. 13)

Conseguir motivar os alunos é na atualidade uma das maiores dificuldades enfrentada pelos docentes. As crianças e adolescentes têm acesso cada vez mais cedo a aparelhos eletrônicos, como smartphones e tablets e, a partir deles, a jogos eletrônicos. Diante do grande atrativo oferecido por essas tecnologias, do apelo visual e dinâmica que elas possuem, os jovens estão progressivamente acostumando-se a obter respostas prontas e ligeiras, com isso as aulas tradicionais tornaram-se pouco interessantes em nossa sociedade.

Assim, a inserção de práticas pedagógicas inovadoras é cada vez mais necessária para despertar a curiosidade e atenção dos alunos e, com isso, atingir o principal objetivo que é a aprendizagem.

De acordo com Lara (2004), o ensino da Matemática só proporciona o desenvolvimento do raciocínio lógico, da criatividade, do pensamento independente e da capacidade de resolver problemas caso os docentes proponham a desempenharem um trabalho voltado à realidade do aluno, que possibilite, por intermédio de recursos diversos, ocasionarem um ambiente de construção do conhecimento.

Perante essa realidade, a utilização de jogos apresenta-se como uma importante aliada para enriquecer as aulas, tornando-as mais atrativas e significantes.

Durante um jogo toda a ação do participante com o intuito de alcançar a sua finalidade, seu objetivo, tem a possibilidade de representar um desafio e, com isso, provocar confrontos mentais, cuja tentativa de respostas irá ocasionar a obtenção de ideias novas e mais eficazes, as quais existe a possibilidade de serem usadas para solucionar problemas.

[Silva \(2008\)](#) afirma que os jogos de regras podem ser um importante aliado para a conjunção dos processos cognitivos exigidos para o entendimento de problemas matemáticos, visto que, com a finalidade de jogar operatorialmente, é imprescindível que ocorra o desenvolvimento de um modelo de pensamento que poderá ser similar ao modelo exigido para solucionar problemas.

Assim, é possível aliar o recurso dos jogos ao método de resolução de problemas. [Smole, Diniz e Milani \(2007\)](#) realizam essa associação entre as duas metodologias de ensino, os autores propõem o uso de jogos tomando como base a resolução de problemas. Elas consideram que essa associação possibilita que o ensino seja organizado englobando outros aspectos além dos puramente metodológicos, visto que envolve toda uma postura frente ao significado de ensinar e como resultado, ao de aprender.

As autoras citadas no parágrafo anterior reforçam que os jogos propiciam o aparecimento de situações-problema:

Por sua dimensão lúdica, o jogar pode ser visto como uma das bases sobre a qual se desenvolve o espírito construtivo, a imaginação, a capacidade de sistematizar e abstrair e a capacidade de interagir socialmente. Isso ocorre porque a dimensão lúdica envolve desafio, surpresa, possibilidade de fazer de novo, de querer superar os obstáculos iniciais e o incômodo por não controlar todos os resultados. Esse aspecto, lúdico faz do jogo um contexto natural para o surgimento de situações-problema cuja superação exige do jogador alguma aprendizagem e certo esforço na busca por sua solução. ([SMOLE; DINIZ; MILANI, 2007](#), p. 10)

Assim, os desafios que os jogos ocasionam, bem como as situações de averiguações, indagações, erros, acertos, desenvolvimento de estratégias, entre outras, todas essas circunstâncias nos remetem a problemas, desta forma as duas metodologias estão relacionadas. Sendo assim, ao trabalhar com a metodologia de resolução de problemas é de fundamental importância incluir os jogos.

Inicialmente vamos determinar o conceito de jogo. Segundo [Huizinga \(2000, p. 33\)](#) :

o jogo é uma atividade ou ocupação voluntária, exercida dentro de certos e determinados limites de tempo e de espaço, segundo regras livremente consentidas, mas absolutamente obrigatórias, dotado de um fim em si mesmo, acompanhado de um sentimento de tensão e de alegria e de uma consciência de ser diferente da “vida quotidiana”.

Cabe destacar o caráter voluntário que o jogo possui, assim, a pessoa para participar de um jogo deve estar disposta a envolver-se, deve ter vontade de jogar. Logo, para que seja de fato usado como um instrumento de aprendizagem o jogo deve despertar o interesse dos alunos para que eles queiram fazer parte.

A utilização de jogos associados ao conteúdo propicia uma prazerosa experiência no ensino-aprendizagem, tornando as aulas mais interessantes e divertidas, além de ser um importante artifício para exercitar o raciocínio ao conduzir o estudante a encarar circunstâncias divergentes associadas à sua rotina.

Porém, a grande preocupação é que frequentemente os jogos são interpretados somente como uma distração, um lazer, desviando-se da sua real intenção que é o auxílio do ensino-aprendizagem, assim, não atingem o objetivo desejado. Por isso, é de extrema importância que durante a produção do jogo o docente tenha em mente o que almeja conseguir com seu uso, porque caso sejam bem preparados eles serão encarados como uma técnica de ensino capaz de contemplar diversos propósitos, que pode ser apenas a prática de alguma competência ou até mesmo a concepção do conhecimento.

Como afirma [Lara \(2004, p. 1 e 2\)](#), “a utilização dos jogos vem corroborar o valor formativo da Matemática, não no sentido apenas de auxiliar na estruturação do pensamento e do raciocínio dedutivo mas, também, de auxiliar na aquisição de atitudes”.

A autora ainda destaca o fato de muitos professores afirmarem que a Matemática não desenvolve o lado humano do aluno e reitera que existem muitos debates que questionam uma intensidade maior atribuída ao ensino da Matemática.

O uso de jogos vem para auxiliar no processo formativo do aluno como cidadão, uma vez que por possuir regras e determinados limites, contribui para desenvolver atitudes de colaboração, cooperação, respeito mútuo, cumprimento às regras, iniciativa, noções de justiça e responsabilidade, além das próprias habilidades matemáticas.

2.3 Estruturas dos jogos

Segundo [Macedo \(1995\)](#), Piaget propõe que todos os jogos podem ser estruturados segundo três formas: exercício, símbolo ou regra.

2.3.1 Jogos de Exercício

De acordo com [Macedo \(1995\)](#) a forma de assimilação que caracteriza os jogos de exercício é a assimilação funcional ou repetitiva, isto é, do prazer da função. Devido à essa forma de assimilação que são criados os hábitos das crianças.

A repetição, requerida pelas demandas de assimilação funcional dos esquemas de ação, tem por consequência algo muito importante para o

desenvolvimento da criança: a formação de hábitos. Nesse sentido, os jogos de exercício são formas de, por seu prazer funcional, repetir, por exemplo, uma sequência motora e por isso formar um hábito. Os hábitos, como analisa Piaget em seu livro *La Naissance de l'intelligence chez l'enfant* (1936), são a principal forma de aprendizagem no primeiro ano de vida e constituem a base para as futuras operações mentais. Apenas para citar uma das razões para isso, o que se passa é que a repetição, pelos hábitos, é a fonte de significados, ou seja, de compreensão das ações, enquanto formas dos conteúdos (por isso, esquemas) que se repetem e generalizam em um sistema. (MACEDO, 1995, p. 6)

A princípio, a atividade lúdica manifesta-se como uma sequência de exercícios motores simples, baseados na repetição, como, por exemplo, balançar os braços, chacoalhar objetos, reproduzir sons, andar, entre outros. Esses jogos iniciam-se durante a fase maternal e são predominantes até por volta dos dezoito meses de vida, porém suas características prosseguem figurando as demais estruturas dos jogos, assim, permanecem presentes até mesmo na fase adulta.

A assimilação funcional é importante para a aprendizagem, o uso da repetição auxilia o processo, pois executar alguma tarefa apenas uma vez é privado de significado. Porém, a repetição desprovida de sentido lúdico, que não é utilizada através de jogos de exercícios, é monótona, entediante e, dessa forma, não enriquece o ensino-aprendizagem.

De um ponto de vista estrutural, proponho que os jogos de exercício permitam às crianças enfrentar as tarefas escolares, mais em um sentido filosófico do que apenas utilitário. O saber que a filosofia proporciona, segundo Piaget (1965), é a coordenação de valores, isto é, a produção de conhecimento sobre as coisas em si mesmas. Nas ciências, ao contrário, o conhecimento justifica-se principalmente por sua função aplicada ou instrumental. Ora, essa segunda forma de conhecimento é a que predomina na escola. Sabemos que ela se justifica por sua função social de formar futuros cidadãos; cidadãos estes que têm de dominar as letras, os números, as ciências. Mas, tudo isso é muito abstrato e, por vezes, aborrecido para a criança. Poder pensar e tratar as coisas como um jogo, como algo lúdico ou autotélico, faz muitas vezes mais sentido para ela. (MACEDO, 1995, p. 7)

2.3.2 Jogos Simbólicos

Aparecem em uma fase posterior aos jogos de exercício, são predominantes entre os 2 e 6 anos de idade. Os jogos simbólicos “caracterizam-se por seu valor analógico, ou seja, por se poder tratar “A” como se fosse “B”, ou vice-versa” (MACEDO, 1995, p. 7). Nesse período surge a possibilidade de reproduzir, por meio de semelhança os conhecimentos já absorvidos por meio dos jogos de exercício.

Os jogos simbólicos caracterizam-se pela assimilação deformante (Piaget, 1945, apud Macedo). Isto porque nesse contexto a compreensão da realidade se dá por analogia. A criança possui a tendência de repetir nesses jogos as relações que predominam no seu cotidiano e, dessa forma, apropriar-se da realidade e de um meio de comunicar-se. Dessa

forma, ela é capaz de entender o mundo a seu redor, de acordo com as limitações que seu sistema cognitivo possui.

Essa assimilação deformante é de fundamental importância para o processo de aprendizagem escolar, pois como está presente nos PCN (BRASIL, 1997), os jogos possibilitam uma experiência que vai além da vivência de situações repetitivas. Através dos jogos as crianças compreendem como utilizar símbolos e a pensar por analogia (jogos simbólicos), assim, elas passam a imaginar os sentidos das coisas. Ao desenvolverem a capacidade de criar correspondências, elas tornam-se hábeis em elaborar linguagens, gerar padrões, preparando-se para obedecerem às regras e dar explicações.

Ainda passam a entender e a usar convenções e regras que serão aplicadas no processo de ensino e aprendizagem. Esse entendimento contribui para sua inserção num mundo social muito complexo e promove as aproximações iniciais com futuras teorizações (BRASIL, 1997).

Logo, através dos jogos simbólicos a criança passa a ser capaz de produzir linguagens e criar padrões. É nesse cenário que aparecem as teorias, a necessidade de explicação dos fatos, introduzindo, dessa forma, as futuras conjecturas das crianças. Assim, o que já havia sido assimilado com os jogos de exercício, juntamente com as capacidades desenvolvidas por meio da assimilação deformante, formam o pilar que possibilita que as crianças compreendam as matérias escolares.

2.3.3 Jogos de Regra

O desenvolvimento dos jogos de regras ocorre, em especial, no estágio de 7 a 12 anos e permanece pelo resto da vida do ser humano.

Neles estão presentes como propriedades essenciais as particularidades pertencentes aos jogos anteriormente citados. Dos jogos de exercício ficam a repetição, a regularidade, pois só existe modificação na maneira de jogar se as regras forem modificadas. Já, dos jogos simbólicos permanecem as convenções, que é a concepção que as regras são acordos ditados pelo criador do jogo ou por quem o sugeriu e que os participantes acolhem por vontade própria. Assim, tanto o valor lúdico quanto as convenções permanecem possuindo uma grande relevância nos jogos de regra.

Além dessas características, os jogos de regra apresentam uma nova, não presente nos jogos anteriores, que é a coletividade, isto é, cada jogada é realizada em consequência da maneira que o outro jogador procedeu. Desse modo, existe uma dependência entre os participantes do jogo.

Os PCN (BRASIL, 1997) afirmam que a participação em jogos de grupo representa uma conquista cognitiva, emocional, moral e social para a criança e um estímulo para o desenvolvimento do seu raciocínio lógico.

Macedo (1995) relata qual a relevância dos jogos de regra na construção do conhecimento na escola. Segundo esse autor sua importância se dá, pois renova o jogo de significados, experimentado pela criança no primeiro ano de vida, porém com um sentido simbólico e operatório. O fato dos jogos de regra atualizarem os jogos de significados se justifica porque a competição ocorre num contexto em que, por norma, todos os participantes possuem as mesmas condições, oportunidades.

Agilidade, melhor compreensão, fazer melhores adiantamentos, usar estratégias, incorrer em menos erros, entre outras táticas, são essenciais para obter êxito. Para vencer é necessário habilidade, atenção, concentração, possuir boa memória, capacidade de abstração e de estabelecer relações constantes. Portanto, ser melhor que si mesmo ou que o oponente é o desafio do jogo de regra, que é retomado a cada nova partida, pois ganhar uma partida não é o bastante para garantir a vitória na próxima. Desse modo, do ponto de vista funcional, os jogos de regra são interessantes pelo seu caráter competitivo. (MACEDO, 1995)

2.4 O Papel do Professor na utilização de jogos

Segundo os PCN (BRASIL, 1997), os jogos provocam um desafio genuíno no aluno e isso gera interesse e prazer. Daí surge a necessidade de inseri-los na cultura escolar, sendo de responsabilidade do professor a análise e avaliação da capacidade educativa dos jogos, bem como dos conceitos que almeja potencializar.

O trabalho com jogos nas aulas de matemática, quando bem planejado e orientado, auxilia o desenvolvimento de habilidades como observação, análise, levantamento de hipóteses, busca de suposições, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização, as quais estão estreitamente relacionadas ao assim chamado *raciocínio lógico*. (SMOLE; DINIZ; MILANI, 2007, p. 9)

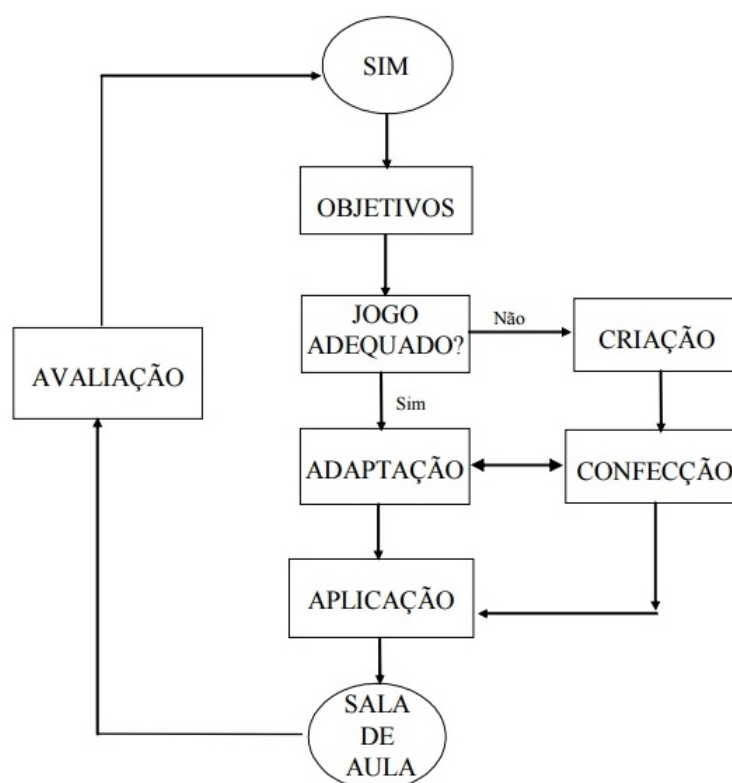
Para que realmente surta os efeitos esperados e favoreça a aprendizagem é preciso que os jogos sejam cuidadosamente escolhidos, planejados e orientados. Nesse sentido aparece o papel do professor, é ele que vai selecionar, planejar e orientar a utilização dessa ferramenta de ensino-aprendizagem.

Ao optar por incluir os jogos nas suas aulas o docente deve elaborar um plano que facilite a sua aplicação. Inicialmente, o professor precisa fazer uma seleção dos conteúdos que pretende aplicar, bem como das habilidades e competências que almeja que seus alunos aperfeiçoem através dos jogos. Depois ele deve escolher qual é o tipo de jogo mais adequado à sua finalidade.

Flemming e Melo (2003 apud FLEMMING, 2004) desenvolveram uma metodologia, que pode ser aplicada quando deseja-se trabalhar com jogos. A Figura 9 ilustra essa

metodologia.

Figura 9 – Etapas Metodológicas



Fonte: Artigo Criatividade e jogos Didáticos (FLEMMING, 2004)

Disponível em: <<http://www.sbemrasil.org.br/files/viii/pdf/02/MC39923274934.pdf>>

De acordo com a metodologia desenvolvida ao decidir utilizar um jogo com a classe, o professor inicia o seu planejamento e, com isso, surge o questionamento a seguir: **Qual o objetivo que deseja alcançar?** Assim, ele deve inicialmente responder a essa questão, definindo claramente os objetivos que pretende alcançar com a realização da atividade.

Após estipular os objetivos, prossegue-se o planejamento com a indagação a seguir: **Conheço um jogo adequado?** De acordo com a resposta obtida deve-se seguir um dos caminhos traçados no fluxograma. Cabe ressaltar aqui o que significa ser um jogo adequado, é aquele que proporciona alcançar os objetivos que foram inicialmente estipulados, além disso, também deve ser apropriado para as séries, para os alunos a que se destinam, correspondendo as suas perspectivas.

Agora, vamos dividir a metodologia segundo as respostas obtidas na pergunta anterior, começando pela resposta positiva.

Caso a resposta seja SIM, deve-se passar para o próximo passo que é responder à seguinte questão: **É necessário fazer uma adaptação?** É importante verificar se as características do jogo estão compatíveis com as características da classe em que será aplicado. Assim, deve-se verificar as regras do jogo, o número de participantes, a organização do

ambiente escolar, o tempo gasto com a atividade, acaso algo não esteja de acordo com a classe o professor deve fazer os ajustes necessários para que seja possível sua realização.

Depois de realizar a adaptação do jogo prossegue-se então para a etapa posterior, que consiste em responder à pergunta: **Quais são os materiais necessários para que o jogo seja aplicado?** Então, o docente deve listar todo o material que será utilizado durante o jogo, observando atentamente se o material é suficiente para o número de alunos da turma para que não falte nenhum material. Caso na listagem entre algum material que seja de uso pessoal do aluno, que ele utiliza diariamente faz-se necessário certificar-se que ele o levará no dia da aplicação do jogo.

A próxima etapa diz respeito à aplicação, logo surgem os questionamentos: **De que maneira aplicar o jogo? Em que momento da sequência didática inserir o jogo?** Assim, para responder a estes questionamentos é necessário ter em mente os objetivos enumerados no início da metodologia porque são eles que permitem apontar o melhor momento para que o jogo seja realizado.

Por exemplo, se o objetivo é fixar conteúdos, deve-se ter como pré-requisito que o conteúdo já tenha sido trabalhado anteriormente. Por outro lado, se o jogo vai ser usado para introduzir um conteúdo, precisa-se ter muito clara a passagem do jogo para o formalismo do conteúdo. Portanto, é de fundamental importância que o professor faça um planejamento formal das aulas nas quais o jogo vai ficar contextualizado. Seria estabelecer “o antes” e “o depois” da aplicação do jogo. (FLEMMING, 2004, p. 9)

Agora, retornando à pergunta **Conheço um jogo adequado?**, vamos considerar agora a resposta negativa.

Caso a resposta seja NÃO, o professor passa então para o momento de criação, no qual ele irá desenvolver um jogo que se adeque aos objetivos esperados. Depois dessa etapa de criação ele partirá para etapa de confecção, que já foi percorrida anteriormente quando a resposta foi positiva. Assim, observando o fluxograma podemos constatar que a maioria das etapas já foram trilhadas. Com isso, o planejamento encontra-se completo para a aplicação em sala de aula.

Então chega o momento de pensar nas situações prováveis de acontecerem durante a realização em sala de aula. Surge, assim, o questionamento: **O que pode ocorrer na sala de aula?** O professor poderá enumerar circunstâncias que ele espera serem possíveis de ocorrerem, porém, tem que estar ciente que poderá ocorrer eventos diversos dos relatados, que poderão ser adicionadas à essa lista depois de finalizada a aula.

Para concluir a metodologia surge a última indagação: **Como avaliar os resultados da aplicação do jogo?** Essa avaliação não refere-se à aprendizagem, mas sim ao procedimento utilizado. Com essa pergunta espera-se obter respostas acerca da realização do jogo, saber se todas as etapas estavam apropriadas, se há necessidade de fazer algum

reparo no jogo para as próximas aplicações. É necessário levar em consideração todos os aspectos com a finalidade de prosseguir as atividades didáticas em consonância com o jogo realizado.

Essa avaliação gera uma realimentação do processo metodológico proposto. É preciso ter a certeza de que em outros momentos a aplicação dos mesmos procedimentos poderá ter uma melhor qualidade tanto do ponto de vista do processo ensino-aprendizagem quanto do ponto de vista do processo recreativo. (FLEMMING, 2004, p. 10)

2.5 Materiais manipuláveis aliados aos jogos e situações-problema

A princípio é necessário definir o que são materiais manipuláveis. Também intitulado materiais manipulativos ou materiais concretos, segundo [Sousa e Oliveira \(2010\)](#), são objetos, desenvolvidos e/ou criados com a finalidade de trabalhar noções matemáticas de maneira a simplificar o entendimento e desenvolvimento do educando, proporcionando que os estudos sejam realizados de forma agradável. Esses materiais podem ser confeccionados pelo docente ou pelos próprios alunos com a orientação do professor.

De acordo com [Rodrigues \(2015\)](#), os materiais manipuláveis são classificados em estruturados e não-estruturados. Os estruturados apresentam conceitos matemáticos bem determinados. São exemplos destes materiais o tangram, o material dourado, o jogo da velha, os blocos lógicos, dentre outros. Já, os não-estruturados não possuem finalidade estabelecida, sua utilização depende da criatividade do docente. São exemplos deste tipo de materiais os palitos de picolé, tampas de garrafas, caixas de papelão, bolas de gude, entre outros.

Os PCN ([BRASIL, 1997](#)) defendem o uso desses materiais, como fichas, palitos, reprodução de cédulas e moedas, figuras bidimensionais e tridimensionais, durante a exploração de situações-problemas, principalmente no primeiro ciclo do Ensino Fundamental, porque servem de apoio para a aprendizagem, visto que possibilitam ao aluno experimentar, verificar e realizar conjecturas, aproximando teoria e prática, através da manipulação.

Diante da dificuldade enfrentada pelos docentes de conseguir motivar seus alunos, a utilização de materiais manipuláveis aliado ao uso de jogos e de situações-problema é imprescindível para facilitar a aquisição de conhecimentos matemáticos. Mas, assim como ocorre com os jogos, o uso desses materiais isoladamente, não significa que ocorrerá a aprendizagem. É essencial que, ao fazer o uso desses materiais, o professor participe do processo de ensino aprendizagem como mediador.

Dessa maneira, ao decidir utilizar o material manipulável, é preciso que o docente realize um planejamento cuidadoso, analisando criteriosamente o material, pesquisando sobre sua criação, os conceitos que poderão ser abordados, como utilizá-lo, se realmente

atende aos objetivos que se deseja alcançar. Com isso, o professor terá maior domínio do material, sendo capaz de explorá-lo de modo a obter um retorno significativo dessas aulas.

[Sousa e Oliveira \(2010\)](#) enfatizam que o emprego de materiais manipuláveis e jogos não é o único modo de abordar conteúdos matemáticos, porém, nas aulas em que a abordagem é realizada dessa maneira, a Matemática, temida por muitos e que apresenta uma grande quantidade de reprovações, é vista por alguns jovens de forma mais otimista e atraente. Assim, o medo da disciplina acaba e os estudantes começam a enxergar seu estudo como algo agradável, favorecendo a aprendizagem.

O uso de materiais manipuláveis e jogos durante as aulas, oportuniza a ampliação da gama de possibilidades que serão trabalhadas, indo além dos conceitos matemáticos e alcançando os conceitos sociais, permitindo trabalhar valores, como o convívio, o respeito aos demais, a colaboração com os colegas de classe, dentre outros ([SOUSA; OLIVEIRA, 2010](#)).

Capítulo 3

Propostas de Atividades

Este capítulo apresenta uma sequência de atividades que tem como objetivo geral estimular o desenvolvimento do raciocínio lógico e a organização do pensamento, visando propiciar o desenvolvimento do raciocínio combinatório no Ensino Fundamental.

A proposta é composta de atividades voltadas para atender os quatro ciclos do Ensino Fundamental, de modo a favorecer a construção gradativa dos princípios de contagem, englobando recursos importantes para a aquisição dos conhecimentos matemáticos, que são: contextualização, jogos e materiais manipuláveis. Assim, a proposta visa auxiliar os docentes no ensino de noções da Análise Combinatória e, conseqüentemente, facilitar a compreensão dos alunos acerca do conteúdo.

As atividades do 1º ciclo foram preparadas de modo a favorecer a leitura e interpretação de problemas que estimulam o espírito investigativo e cuja resolução envolve a utilização de representações gráficas, que são as tabelas de dupla entrada e a árvore das possibilidades, contando com o auxílio de materiais manipuláveis, recursos necessários nesta fase para facilitar a compreensão e aquisição do conhecimento.

Para o 2º ciclo, as atividades foram elaboradas com o intuito de rever os conceitos e noções já apreendidas no 1º ciclo, trabalhando a identificação das possíveis maneiras de combinar elementos de uma coleção e de contabilizá-las usando estratégias pessoais.

Ao chegar no 3º ciclo, os alunos continuam explorando problemas combinatórios através de representações gráficas, mas com um nível de dificuldade maior, condizente ao ciclo, acrescentando também outras representações como o produto cartesiano. Assim, os alunos podem ampliar ainda mais o conhecimento relativo à Combinatória, desenvolvendo noções de representação e contagem dos casos possíveis nas situações-problema combinatórias, atribuindo significados a elas.

Após os alunos terem desenvolvido diferentes estratégias de resolução de problemas de contagem nos ciclos anteriores, apoiados em representações gráficas, as atividades elaboradas para o 4º ciclo trazem problemas envolvendo o princípio aditivo e o princípio

multiplicativo para a construção do espaço amostral.

Assim, a sequência sugerida tem o intuito de que os alunos desenvolvam estratégias de solução próprias, aperfeiçoem seus métodos de contagem e de agrupamentos de objetos, contribuindo, com isso, para o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

3.1 1º Ciclo do Ensino Fundamental

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) o bloco de conteúdos Tratamento da Informação, no qual está inserida a Análise Combinatória deve ser trabalhada em todos os ciclos do Ensino Fundamental, portanto, as atividades elaboradas para este ciclo visam iniciar o ensino do conteúdo, introduzindo o raciocínio combinatório.

3.1.1 Atividade 01: Introduzindo o Raciocínio Combinatório

Objetivos

- Introduzir o raciocínio combinatório através da exploração de situações-problema;
- Estimular a coleta e organização de informações;
- Apresentar diferentes representações gráficas que podem ser utilizadas na resolução de problemas de contagem.

Público Alvo

Alunos do 2º e/ou 3º ano do Ensino Fundamental.

Pré-requisitos

É necessário o conhecimento prévio da Adição de Números Naturais.

Materiais e Tecnologias

Ficha de Atividades 1 contida no apêndice (APÊNDICE A), 2 dados, uma moeda de 1 real, quadro, giz ou pincel, apagador, lápis, borracha e lápis de cor nas cores: roxo, azul, marrom e preto.

Recomendações Metodológicas

- Orienta-se que a atividade seja realizada individualmente e em sala de aula;
- Durante a aplicação da atividade, o professor deve supervisionar os educandos, sanando as possíveis dúvidas que aparecerão, para que de fato ocorra a aprendizagem almejada.

Dificuldades Previstas

Apesar de ser uma atividade de fácil execução e possuir uma linguagem de fácil compreensão, alguns alunos podem apresentar dificuldades no preenchimento de tabelas e diagramas de árvore, por não estarem habituados a realizar estas tarefas.

Descrição Geral

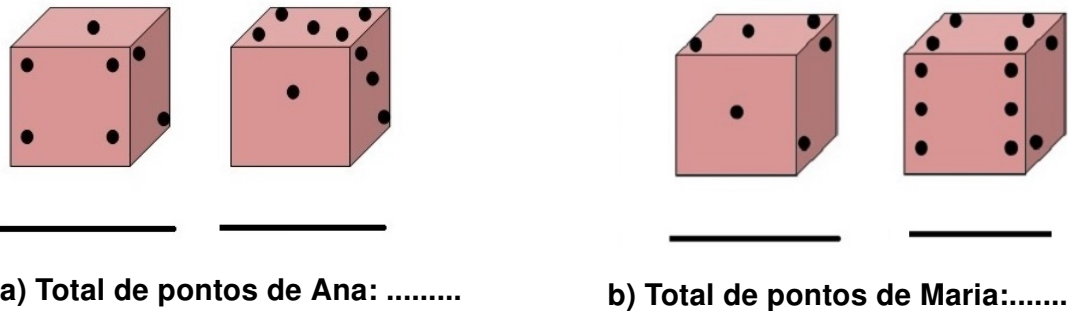
A Atividade 1, contém quatro questões, contemplando a leitura e interpretação de informações contidas em imagens, coleta e organização de informações, interpretação e elaboração de listas e tabelas de dupla entrada para comunicar a informação obtida. Na elaboração das questões, foram considerados a linguagem e o grau de dificuldade compatíveis com os alunos deste ciclo.

A questão 1 apresenta um jogo de regra e perguntas relacionadas a ele, nas quais são exploradas as possibilidades de resultado da soma no lançamento de dois dados. Para melhor compreensão da atividade, o professor deve utilizar os dados. Na questão 2 é apresentada uma tabela de dupla entrada e questões-problemas relacionadas a ela. Na questão 3 é explorada a árvore das possibilidades, então é importante que o professor leve os alunos a identificarem em todos os ramos da árvore os diversos agrupamentos de vestidos e sapatos que foram montados e as características que diferenciam uns dos outros, constatando-se que estabeleceram a enumeração de todos os possíveis agrupamentos. A questão 4 também explora a árvore das possibilidades, porém com problemas diferentes da questão 3. Nesta questão é importante a utilização da moeda de 1 real para facilitar o entendimento dos educandos.

Tempo Previsto: 70 minutos

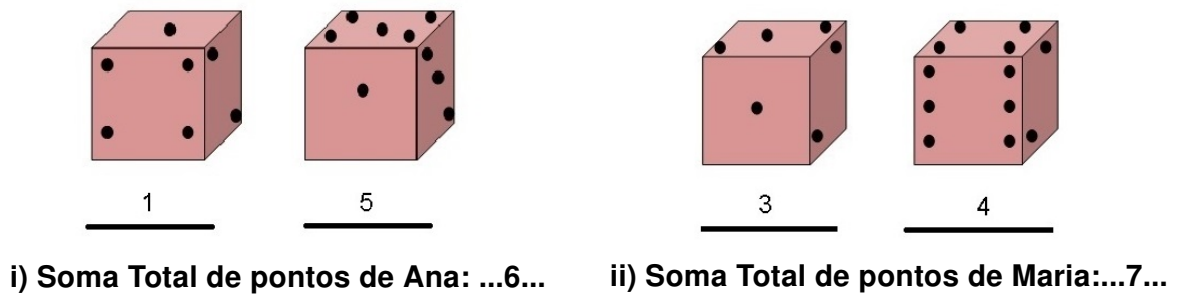
1. (30 minutos) Ana e Maria estão brincando de um jogo chamado “Role os Dados”. As regras desse jogo são:
 - Cada participante deve jogar dois dados e registrar o número de pontos obtidos nas faces superiores;
 - Depois de registrados os pontos cada participante deve somá-los para saber qual é o total;
 - O ganhador será o jogador que obtiver maior pontuação.
- a) Na Figura 10, registre o número de pontos tirados por Ana e por Maria, e depois, calcule o total de pontos de cada uma.

Figura 10 – Lançamento de Dados



Solução:

Figura 11 – Resposta ao Lançamento de Dados



b) Quem ganhou o jogo: Ana ou Maria?

Solução:

• **Maria**

c) Complete o quadro abaixo com as somas obtidas no lançamento de dois dados.

Quadro 2 – Somas Obtidas no Lançamento de Dois Dados

+	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Fonte – Produzido pelo autor.

Solução:

Quadro 3 – Resposta de Somas Obtidas no Lançamento de Dois Dados

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

- d) No Quadro 2, pinte de amarelo os quadrados onde a soma das faces foi 4. A seguir, escreva as duplas cuja soma foi 4.

Solução:

Quadro 4 – Soma das faces igual a 4

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

- No Quadro 4, as duplas cuja soma é 4 são: 1 e 3, 2 e 2, 3 e 1.

- e) No Quadro 2, pinte de azul celeste os quadrados onde a soma das faces foi 9. A seguir, escreva as duplas cuja soma foi 9.

Solução:

Quadro 5 – Soma das faces igual a 9

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

- No Quadro 5, as duplas cuja soma é 9 são: 3 e 6, 4 e 5, 5 e 4.

- f) É possível que a soma seja 13? Justifique.

Solução:

- Não. Porque a maior soma possível é 12.

2. (15 minutos) Para ir ao aniversário de sua amiga, Lara pode escolher um vestido e um sapato, entre os que ela possui. Observando a Figura 12, responda:

Figura 12 – Vestidos e sapatos de Lara



- a) Quantos vestidos Lara possui?

Solução:

- 2 vestidos.

- b) Quantos pares de sapato Lara possui?

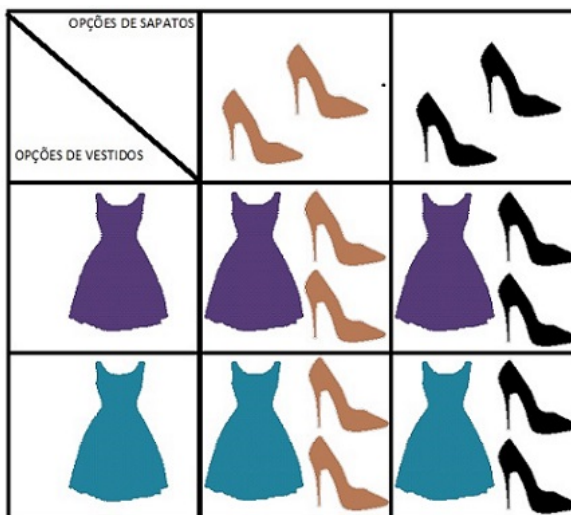
Solução:

- 2 pares de sapato.

- c) Pinte a Figura 12, mostrando as possíveis combinações que Lara pode vestir.

Solução:

Figura 13 – Combinações de vestimentas de Lara



d) De quantas maneiras diferentes Lara pode combinar seus vestidos com seus pares de sapato?

Solução:

- De 4 maneiras diferentes.

3. (10 minutos) Complete a árvore de possibilidades que Lara tem.

Figura 14 – Vestimentas de Lara



Solução:

Figura 15 – Árvore de possibilidades de vestimentas de Lara



4. (15 minutos) As moedas possuem duas faces, uma chamamos de cara e a outra de coroa. Observe na Figura 16 as duas faces de uma moeda de 1 real.

Figura 16 – Faces de uma Moeda



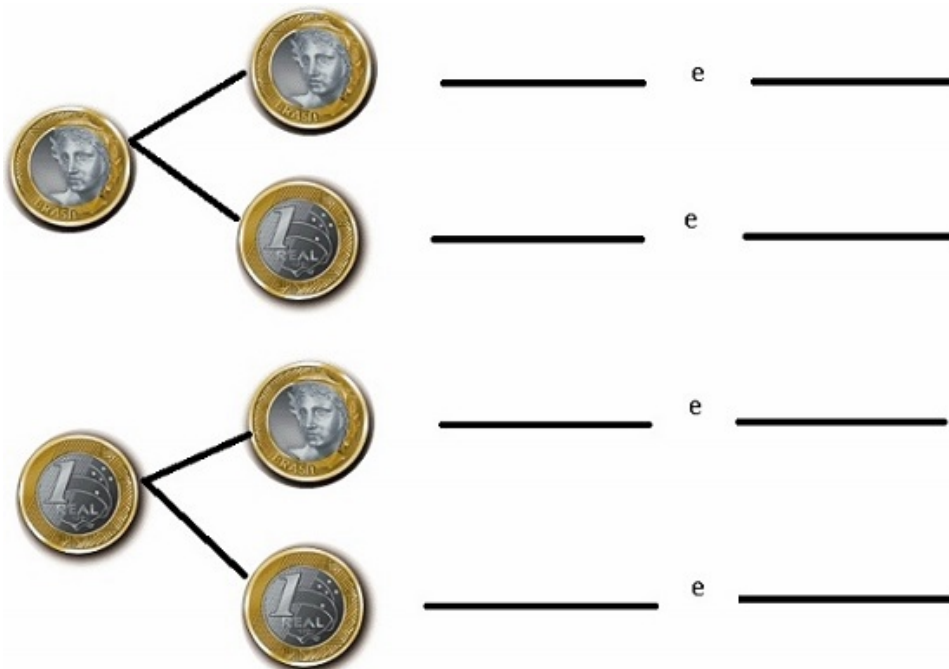
- a) Elisa está brincando de lançar moedas, ela possui uma moeda de 1 real. Quantos e quais são os resultados possíveis para o lançamento?

Solução:

- 2 resultados possíveis: cara ou coroa

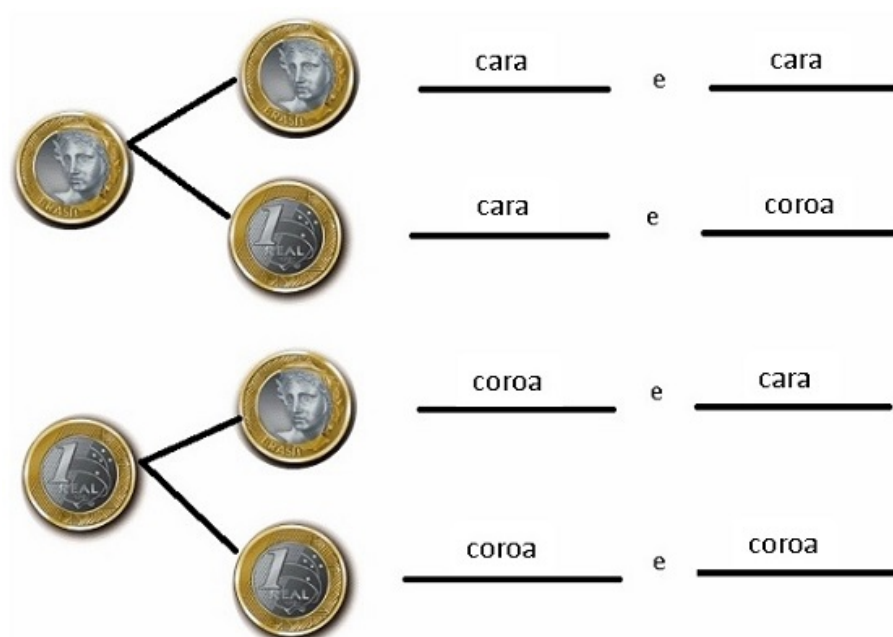
- b) Elisa quer saber quais resultados serão possíveis se ela lançar a moeda duas vezes. Ajude Elisa a descobrir, completando a árvore de possibilidades.

Figura 17 – Árvore de possibilidades ao lançar uma moeda duas vezes



Solução:

Figura 18 – Resposta da questão do lançamento de uma moeda duas vezes



c) Quantas possibilidades Elisa terá ao lançar uma moeda duas vezes?

Solução:

- Elisa terá 4 possibilidades.

Conclusões

O professor pode fazer um paralelo entre os resultados obtidos nos problemas para ser discutido no quadro da sala, junto à turma. Quanto à questão 1, é essencial que o professor faça seus alunos notarem que existem 11 possibilidades diferentes de resultados para a soma de lançamentos de dois dados e que no caso dos vestidos e moedas (questões 2, 3 e 4) há 4 possibilidades.

Além disso, também é importante destacar que nas questões 2 e 3 são usadas diferentes representações gráficas para descrever o mesmo problema. O docente deve propor que os alunos façam uma comparação, analisando as diferentes representações. O problema da questão 2, escolha de vestidos e sapatos, tem relação com o problema 4, lançamentos de uma moeda, pois em ambos, existem duas opções para a primeira escolha e para cada uma das opções realizadas na primeira escolha existem duas opções para a segunda escolha.

A partir disso, e analisando também as árvores de possibilidades construídas nas atividades, o professor poderia levantar questões como: Quantas são as possibilidades se Lara decidisse escolher o vestido azul? Quantas opções seriam se considerássemos como

resultado do primeiro lançamento a cara? Quantas possibilidades da soma dar 6 ou 5 no lançamento de dois dados?

Assim, além de estimular o raciocínio, levará os alunos a perceberem que as representações gráficas, como a árvore de possibilidades e tabelas de dupla entrada, possibilitam a reflexão acerca de informações ali presentes, sendo importantes aliadas na resolução de problemas de contagem.

Possíveis continuações e desdobramentos

Todas as questões propostas na atividade possibilitam a elaboração de novos problemas relacionados aos descritos, permitindo ao professor aumentar o nível de dificuldade, explorando ainda mais o raciocínio combinatório e as representações gráficas. Na questão 1, por exemplo, a dificuldade poderia ser aumentada utilizando problemas relacionados à multiplicação dos resultados, assim a atividade poderia ser aplicada para alunos do 3º e/ou 4º ciclos. Quanto ao problema da questão 2 ao acrescentar mais opções de cores de vestidos e de sapatos aumentar-se-ia o grau de dificuldade. Para a questão 4 o nível de dificuldade seria aumentado ao considerar-se o lançamento de mais moedas.

3.1.2 Atividade 02: Os Blocos Lógicos e a Elaboração de Esquemas

É importante salientar que [Teixeira \(2013\)](#) utilizou os Blocos Lógicos para propor a construção de árvores de possibilidade introduzindo, assim, o princípio multiplicativo. Nesta atividade nós usaremos o mesmo material para a construção de quadros e esquemas com o intuito de desenvolver o raciocínio combinatório através de situações-problema de contagem.

Objetivos

- Desenvolver o raciocínio combinatório;
- Explorar a elaboração de quadros e esquemas para comunicar as informações obtidas.

Público Alvo

Alunos do 2º e/ou 3º ano do Ensino Fundamental.

Pré-requisitos

Não há pré-requisitos.

Materiais e Tecnologias

Ficha de Atividades 2 contida no apêndice (APÊNDICE A), quadrados e triângulos contidos no material “Blocos Lógicos” (APÊNDICE E), quadro, giz ou pincel, apagador, lápis, borracha e lápis de cor nas cores: amarelo, vermelho e azul.

Recomendações Metodológicas

- Orienta-se que a atividade seja realizada individualmente e em sala de aula;
- Durante a realização da atividade é importante que o professor acompanhe e verifique se os alunos estão realizando corretamente as atividades, orientando-os em suas dificuldades.

Dificuldades Previstas

É possível que haja dificuldade na hora realizar a atividade de montagem e representação das casinhas diferentes usando o material Blocos Lógicos (APÊNDICE E), alguns alunos podem perder-se na hora da montagem, não conseguindo representar todas as possibilidades. O professor deve estar atento a este fato, observando e orientando os alunos em suas dificuldades.

Descrição Geral

A Atividade 2 contém três questões, utiliza o material “Blocos Lógicos” para explorar a coleta e organização de informações e a elaboração de representações gráficas. Na elaboração das questões, foram considerados a linguagem e o grau de dificuldade compatíveis com os alunos deste ciclo.

Na questão 1, utilizam-se os quadrados e triângulos do material “Blocos Lógicos” para fazer possíveis combinações, montando casinhas. A questão 2 explora a representação das possibilidades encontradas na questão 1. A questão 3 envolve a construção de um quadro para apresentar as possibilidades.

Tempo Previsto: 50 minutos

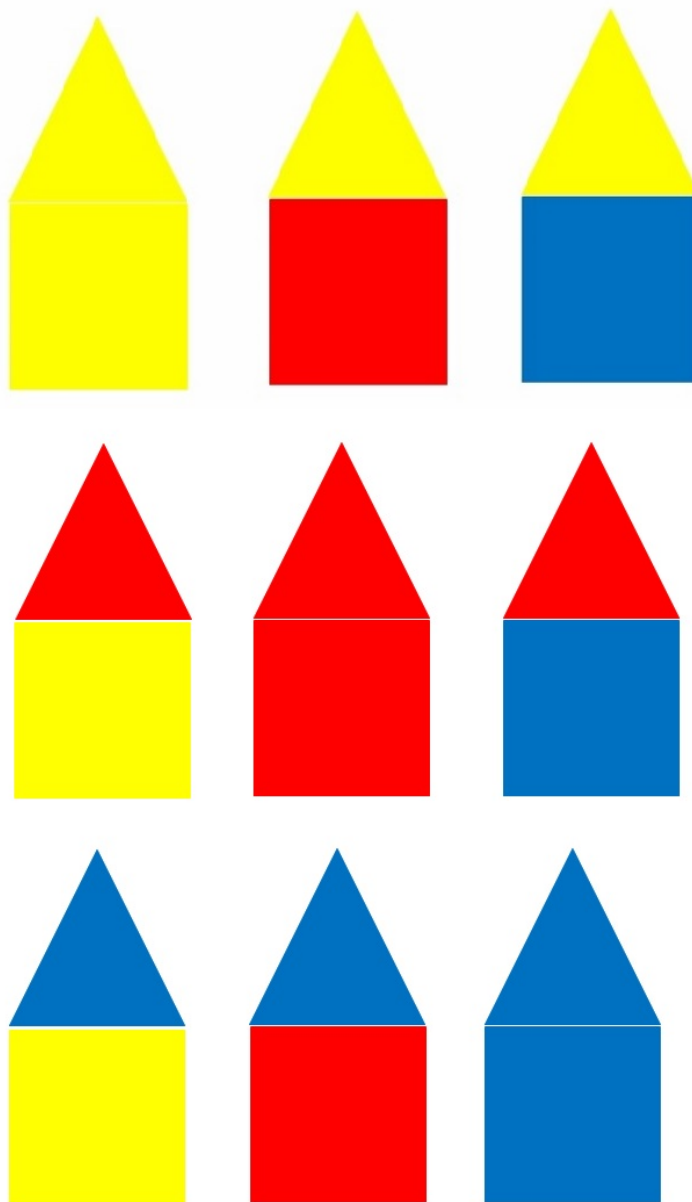
1. (20 minutos) Utilizando os quadrados e triângulos do material “Blocos Lógicos” que se encontra no apêndice (APÊNDICE E), quantas casinhas diversas podem ser montadas usando um triângulo (amarelo, vermelho, azul) para o telhado e um quadrado (amarelo, vermelho, azul) para a base?

Solução:

- 9 casinhas.
2. (20 minutos) Represente todas as possibilidades por meio de desenhos.

Solução:

Figura 19 – Casinhas formadas com o material dos Blocos Lógicos



3. (10 minutos) Registre todas as possibilidades de cor das casinhas obtidas na questão anterior no Quadro 6. Para tal, preencha os espaços em branco com a combinação da cor dos quadrados e triângulos.

Quadro 6 – Casinhas com os Blocos Lógicos

Triângulos \ Quadrados	Quadrado amarelo	Quadrado vermelho	Quadrado azul
Triângulo amarelo			
Triângulo vermelho			
Triângulo azul			

Solução:

Quadro 7 – Solução Tabela Casinhas com os Blocos Lógicos

Triângulos \ Quadrados	Quadrado amarelo	Quadrado vermelho	Quadrado azul
Triângulo amarelo	Triângulo amarelo e Quadrado amarelo	Triângulo amarelo e Quadrado vermelho	Triângulo amarelo e Quadrado azul
Triângulo vermelho	Triângulo vermelho e Quadrado amarelo	Triângulo vermelho e Quadrado vermelho	Triângulo vermelho e Quadrado azul
Triângulo azul	Triângulo azul e Quadrado amarelo	Triângulo azul e Quadrado vermelho	Triângulo azul e Quadrado azul

Conclusões

É importante que após a atividade o professor faça notar o número de possibilidades para formar uma casinha tendo três quadrados para base e três triângulos para o telhado.

Possíveis continuações e desdobramentos

O professor pode elaborar outras questões utilizando as peças do material “Blocos Lógicos” que não foram utilizadas, que são os retângulos e círculos, assim, por exemplo, utilizando os triângulos, quadrados e retângulos, o docente pode solicitar que os alunos encontrem o número total de possibilidades para formar uma casinha utilizando um triângulo para o telhado, um quadrado para a primeira peça da base e um retângulo para a segunda.

3.1.3 Atividade 03: A Análise Combinatória e o Nosso Dinheiro**Objetivos**

- Identificar e enumerar todos os diversos agrupamentos de objetos possíveis envolvidos nas situações-problema;
- Realizar trocas entre cédulas e moedas, associando-as em função de seus valores;
- Desenvolver o raciocínio combinatório através da resolução das situações-problema propostas.

Público Alvo

Alunos do 2º e/ou 3º ano do Ensino Fundamental.

Pré-requisitos

Faz-se necessário o conhecimento prévio da Adição de Números Naturais, bem como reconhecer as cédulas e moedas do sistema monetário brasileiro.

Materiais e Tecnologias

Ficha de Atividades 3 (APÊNDICE A), cédulas e moedas contidas no apêndice (APÊNDICE E), quadro, giz ou pincel, apagador, lápis e borracha.

Recomendações Metodológicas

- Orienta-se que a atividade seja realizada individualmente e em sala de aula;
- Durante a realização da atividade é importante que o acompanhamento e a orientação do professor para que a atividade seja realizada com sucesso.

Dificuldades Previstas

É possível que nem todos os alunos conheçam o sistema monetário brasileiro e, com isso, não consigam realizar a atividade. Caso esta dificuldade ocorra, é sugerido ao professor que, antes da realização da ficha de atividades, desenvolva uma atividade cuidadosa sobre o sistema monetário brasileiro, explorando as cédulas e moedas, bem como os seus valores.

Descrição Geral

A Atividade 3 contém três questões que contemplam a exploração de problemas combinatórios aliado à utilização de cédulas e moedas do sistema monetário brasileiro. Na elaboração das questões, foram considerados a linguagem e o grau de dificuldade compatíveis com os alunos deste ciclo.

A questão 1 explora situações-problema combinatórias, envolvendo interpretação de tabela, contagem, utilização de estratégias pessoais de resolução e procedimentos de cálculo. Na questão 2 são exploradas as possibilidades de combinações de cédulas para compor uma certa quantia. A questão 3 também explora as possibilidades de combinações de cédulas para compor uma certa quantia, porém, contemplando a representação dessas possibilidades.

Tempo Previsto: 80 minutos

1. (35 minutos) Observe na Figura 20 o cardápio da lanchonete da escola de Lucas.

Figura 20 – Cardápio da Lanchonete

<u>CARDÁPIO</u>	
LANCHES	
Hambúrguer assado-----	R\$ 3,50
Salgado-----	R\$ 2,00
Cachorro-quente-----	R\$ 3,00
Misto-quente-----	R\$ 2,50
Sanduíche natural-----	R\$ 4,00
BEBIDAS	
Suco de fruta-----	R\$ 2,00
Água-----	R\$ 1,50
Refrigerante-----	R\$ 3,00

- a) Lucas levou para a escola a quantia mostrada na Figura 21 para comprar a merenda. Escreva quantos reais Lucas possui.

Figura 21 – Dinheiro de Lucas



Solução:

- Lucas possui 6 reais.

- b) Com o dinheiro que possui Lucas pode comprar um salgado e um suco de frutas?

Solução:

- Sim.

- c) Ele pode comprar um sanduíche natural e um refrigerante?

Solução:

- Não.

- d) Caso Lucas decida comer um hambúrguer assado, quais são as possíveis bebidas que ele poderá comprar?

Solução:

- Ele poderá comprar suco de fruta ou água.

e) Caso Lucas queira comprar um lanche e uma bebida, quais são suas opções com o dinheiro que possui? Complete o Quadro 8 com todas as opções de Lucas.

Quadro 8 – Opções de Lucas

LANCHE	BEBIDA

Solução:

Quadro 9 – Solução com as opções de Lucas

LANCHE	BEBIDA
Hambúrguer assado	Suco de fruta
Hambúrguer assado	Água
Salgado	Suco de fruta
Salgado	Água
Salgado	Refrigerante
Cachorro-quente	Suco de fruta
Cachorro-quente	Água
Cachorro-quente	Refrigerante
Misto-quente	Suco de fruta
Misto-quente	Água
Misto-quente	Refrigerante
Sanduíche natural	Suco de fruta
Sanduíche natural	Água

2. (15 minutos) Marcelo ganhou de mesada do seu pai a quantia mostrada na Figura 22.

Figura 22 – Dinheiro recebido por Marcelo



- Marcelo pretende comprar um tênis que custa 70 reais. De quantas maneiras diferentes ele poderá compor exatamente os 70 reais utilizando apenas as cédulas acima? Quais são elas?

Solução:

- De 3 maneiras: com uma nota de 50 reais e duas notas de 10 reais, com uma nota de 50 reais e uma nota de 20 reais ou com duas notas de 20 reais e 3 notas de 10 reais.
3. (30 minutos) Serginho precisa comprar um caderno novo que custa 26 reais. Ele quer pagar o caderno usando apenas cédulas, sem receber troco e deseja encontrar todas as maneiras possíveis de fazer isso. Vamos ajudar Serginho! Desenhe abaixo todos os modos possíveis que Serginho tem de fazer o pagamento do caderno.

Solução:

1º modo:



2º modo:



3º modo:



4º modo:



5º modo:



6º modo:



Conclusões

Esta atividade serve de introdução para que posteriormente o professor possa fazer a atividade lúdica de simulação de compra e venda em um supermercado, propondo atividades que favoreçam ainda mais o desenvolvimento do raciocínio combinatório, nas quais os alunos possam raciocinar diferentes formas de compras que podem realizar possuindo certo valor em dinheiro, também diferentes formas de pagar e dar troco utilizando as moedas e cédulas que possuem.

Possíveis continuações e desdobramentos

O professor pode elaborar novos problemas, elevando o nível de dificuldade, por exemplo, para a questão 1 é possível acrescentar ao cardápio outras possibilidades de lanche. Para a questão 2 pode-se aumentar a quantidade de notas de 20 ou 50 reais.

3.2 2º Ciclo do Ensino Fundamental

As atividades deste ciclo foram desenvolvidas com linguagem simples, de fácil compreensão, adequada a esse nível de ensino, além de contar com o apoio de figuras bidimensionais, facilitando, assim, o entendimento acerca de problemas envolvendo o raciocínio combinatório. As questões abordam a identificação das possíveis maneiras de combinar elementos de uma coleção e de contabilizá-las usando estratégias pessoais, conceitos que devem ser trabalhados neste ciclo.

3.2.1 Atividade 04: Montando o Bolo

Objetivos

- Estimular o desenvolvimento do raciocínio lógico e a organização do pensamento;
- Determinar a quantidade de agrupamentos possíveis em situações-problema;
- Interpretar e solucionar problemas utilizando conhecimentos de análise combinatória.

Público Alvo

Alunos do 4º e/ou 5º ano do Ensino Fundamental.

Pré-requisitos

Não há pré-requisitos.

Materiais e Tecnologias

Ficha de Atividades 4 contida no apêndice (APÊNDICE B), material manipulável “Montando o Bolo” (APÊNDICE E), quadro, giz ou pincel, apagador, lápis e borracha.

Recomendações Metodológicas

- Para a realização do trabalho orienta-se que a turma seja organizada em grupos pequenos, de 2 a 4 alunos, cada um recebendo o material manipulável “Montando o Bolo” e uma Ficha de Atividades;
- Durante a realização do trabalho dos alunos, o professor deve supervisionar os grupos, orientando-os quanto à realização das tarefas propostas e incentivar momentos de trocas de experiências entre os alunos, socializando os resultados e conclusões.

Dificuldades Previstas

Não se espera que os alunos demonstrem dificuldades durante a realização da atividade, visto que a mesma é de fácil compreensão e conta com o auxílio do material manipulável que facilita a resolução dos problemas propostos.

Descrição Geral

A Atividade é formada por quatro questões, nas quais os alunos devem montar o bolo, fazendo todas as combinações possíveis com as três opções de massa e as quatro opções de recheio até chegarem aos resultados. Ao final de cada questão, é importante que o professor peça aos alunos que expliquem qual foi o procedimento utilizado para garantir que todas as opções fossem consideradas. Caso cada grupo encontre um valor diferente como resultado das questões, os procedimentos devem ser confrontados para que construam juntos o resultado correto.

Tempo Previsto: 2 horas-aulas de 50 minutos

1. (20 minutos) Zeca vai fazer aniversário e precisa escolher o seu bolo. A confeitaria “Sonhos” oferece três opções de massa: tradicional, chocolate ou morango e quatro opções de recheio: leite condensado, brigadeiro, limão ou morango. De quantas maneiras diferentes Zeca pode escolher o seu bolo?

Solução:

- Zeca pode escolher o bolo de 12 maneiras diferentes.

2. (15 minutos) Zeca decidiu que o bolo deve ter a massa de chocolate. Quantas são as possibilidades para Zeca escolher um bolo se ele possui quatro opções de recheio?

Solução:

- Zeca tem 4 possibilidades.

3. (35 minutos) Cláudia também vai comprar um bolo para a reunião em sua casa na confeitaria “Sonhos”. Porém, ela deseja que seu bolo tenha também a cobertura. Essa confeitaria oferece duas opções de cobertura: chantilly ou doce de leite. De quantas maneiras diferentes Cláudia pode escolher o bolo, se ela tem três opções de massa, quatro opções de recheio e duas opções de cobertura?

Solução:

- Cláudia pode escolher o bolo de 24 maneiras diferentes.

4. (30 minutos) Cláudia descobriu que uma de suas amigas não gosta de recheio de leite condensado. De quantos modos Cláudia pode montar o seu bolo sem que ele tenha recheio de leite condensado?

Solução:

- Cláudia pode montar o seu bolo de 18 maneiras diferentes.

Conclusões

No quadro, o professor fará uma coleta dos dados obtidos na atividade e abrirá o debate sobre as possíveis estratégias utilizadas para combinar elementos de uma coleção e contabilizá-las.

Possíveis continuações e desdobramentos

O professor poderá complementar o material manipulável acrescentando novas opções de massa, recheio e cobertura para o bolo e elaborar novas situações-problema.

3.2.2 Atividade 05: Problemas de Contagem Diversos

Objetivos

- Resolver problemas de contagem usando estratégias pessoais;
- Explorar as possibilidades quando existem restrições.

Público Alvo

Alunos do 4º e/ou 5º ano do Ensino Fundamental.

Pré-requisitos

Não há pré-requisitos.

Materiais e Tecnologias

Ficha de Atividades 5 contida no apêndice (APÊNDICE B), quadro, giz ou pincel, apagador, lápis, borracha e lápis de cor nas cores: azul e verde.

Recomendações Metodológicas

- Orienta-se que a atividade seja realizada individualmente e em sala de aula;
- Durante a realização da atividade é importante o acompanhamento e a orientação do professor, sanando as possíveis dúvidas e verificando se os alunos estão de fato atingindo os objetivos esperados.

Dificuldades Previstas

A atividade é de fácil execução e apresenta uma linguagem de fácil compreensão, logo, não é esperado que o discente apresente dificuldades durante sua realização.

Descrição Geral

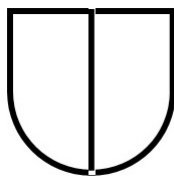
A Atividade é composta por cinco questões que apresentam problemas de contagem diversos que exploram o raciocínio combinatório por meio da resolução de problemas através da utilização de estratégias pessoais e procedimentos de cálculos. Durante a elaboração da atividade foram levados em consideração o nível de conhecimento dos alunos deste ciclo e os objetivos a serem alcançados.

A questão 1 apresenta problemas combinatórios simples envolvendo as possibilidades de pintura de um escudo. A questão 2 traz um problema de montagem de uma senha, envolvendo estratégias pessoais para a sua resolução. Caso seja necessário, o professor pode elaborar alguns cartões que indiquem os algarismos 2, 3 e 4, de forma que possam ser feitas algumas simulações para que os alunos sejam capazes de fazer as generalizações que se têm por objetivo. A questão 3 explora a formação de anagramas, também sem a utilização de fórmulas. Na hipótese de surgirem dúvidas o professor pode seguir a proposta feita anteriormente para a questão 2 e elaborar fichas com as letras M, A e R para exemplificar. A questão 4 apresenta uma situação-problema na qual o aluno deve completar o esquema para solucioná-lo. Na questão 5 são explorados problemas de combinação no qual os alunos deverão utilizar estratégias pessoais para resolvê-los. Nesta questão é importante que o professor evidencie que na formação de grupos a ordem dos alunos não diferencia um grupo do outro.

Tempo Previsto: 2 horas-aulas de 50 minutos

1. (30 minutos) Felipe gosta muito de futebol e faz parte do time da escola. Ele quer montar o escudo do time e para isso desenhou o modelo abaixo (Figura 23):

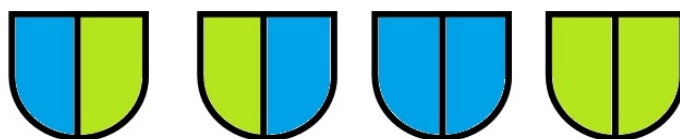
Figura 23 – Escudo desenhado por Felipe



- a) Felipe possui dois lápis nas cores azul e verde, mostre através de desenhos todas as diferentes possibilidades que Felipe tem de pintar o escudo, podendo ou não usar a mesma cor em ambos os lados.

Solução:

Figura 24 – Possibilidades de pintura do escudo utilizando ou não a mesma cor em ambos os lados



- b) Explique como você fez para pintar os diferentes escudos representados no item anterior.

Solução:

- Resposta pessoal.

- c) Quantos escudos diferentes Felipe vai conseguir obter com as duas cores, podendo ou não usar a mesma cor em ambos os lados?

Solução:

- 4 escudos.

- d) Agora, considere que Felipe deseja pintar cada lado do escudo de uma cor diferente do lado anterior. Desenhe abaixo os escudos diferentes que Felipe pode conseguir usando as cores que possui.

Solução:

- e) Explique como você fez para garantir que todas as opções fossem representadas.

Solução:

- Resposta pessoal.

Figura 25 – Possibilidades de pintura do escudo utilizando cores diferentes em cada lado



- f) Quantos escudos diferentes Felipe vai conseguir obter se deseja que cada lado tenha uma cor diferente do lado anterior?

Solução:

- 2 escudos.

2. (15 minutos) Carla tem um cofre onde guarda suas moedas, mas esqueceu a senha. Ela sabe que a senha é composta por 3 algarismos distintos e lembra que usou somente os algarismos 2, 4 e 6 na escolha da senha. Ajude Carla a encontrar o segredo de seu cofre. Utilizando os algarismos 2, 4 e 6:

- a) escreva todos os números de 3 algarismos que podem ser formados sem que haja repetição de algarismos;

Solução:

- 246, 264, 462, 426, 642, 624.

- b) agora, coloque-os em ordem crescente.

Solução:

- $246 < 264 < 426 < 462 < 624 < 642$.

- O número da senha do cofre de Carla é maior que 426 e menor que 624. Qual é a senha do cofre de Carla?

Solução:

- 462

3. (10 minutos) Os anagramas de uma palavra são obtidos ao trocarmos de lugar as letras de uma palavra. Observe os anagramas da palavra *MAR* : MRA, MAR, AMR, ARM, RAM, RMA.

- Agora, é com você, escreva todos os anagramas da palavra *LUA*.

Solução:

- LAU, LUA, AUL, ALU, UAL, ULA.

4. (15 minutos) Bia deseja enfeitar a área externa de sua casa e para isso comprou dois cogumelos de cerâmica iguais. Ela pretende colocá-los em um dos dois lados ou na frente da casa, de modo que os dois cogumelos podem ficar juntos do mesmo lado ou não. Observe na Figura 26 a representação da casa de Bia.

Figura 26 – Representação da casa de Bia



- Complete o Quadro 10 indicando as possibilidades que Bia dispõe para colocar um cogumelo ou os dois cogumelos ao lado esquerdo, à frente ou ao lado direito da casa. Quando você escolher um cogumelo para colocar em um dos lados ou à frente da casa escreva COGUMELO; quando escolher dois cogumelos escreva COGUMELO-COGUMELO e quando não há cogumelo junto de um dos lados ou à frente escreva SEM COGUMELO.

Quadro 10 – Localização dos cogumelos

LADO ESQUERDO	FRENTE	LADO DIREITO

Solução:

Quadro 11 – Solução Localização dos cogumelos

LADO ESQUERDO	FRENTE	LADO DIREITO
COGUMELO-COGUMELO	SEM COGUMELO	SEM COGUMELO
SEM COGUMELO	COGUMELO-COGUMELO	SEM COGUMELO
SEM COGUMELO	SEM COGUMELO	COGUMELO-COGUMELO
COGUMELO	COGUMELO	SEM COGUMELO
COGUMELO	SEM COGUMELO	COGUMELO
SEM COGUMELO	COGUMELO	COGUMELO

- De quantos modos distintos Bia pode colocar os cogumelos?.....

Solução:

- De 6 modos distintos.

5. (30 minutos) Para representar o 5º ano em um torneio de Matemática da escola é necessário montar um grupo composto por 3 alunos. Para realizar a escolha do grupo a professora deve escolher os 3 alunos dentre os que possuem a melhor média na matéria, que são: Artur, Caio, Daniela, Luana e Tito.

- a) Quantos grupos diferentes compostos de três alunos podem ser formados com os cinco alunos citados acima?

Solução:

- Podem ser formados 10 grupos.

- b) Agora, represente todos os grupos de 3 alunos que podem ser formados.

Solução:

- Grupo 1: Artur, Caio e Daniela; Grupo 2: Artur, Caio e Luana; Grupo 3: Artur, Caio e Tito; Grupo 4: Artur, Daniela e Luana; Grupo 5: Artur, Daniela e Tito; Grupo 6: Artur, Luana e Tito; Grupo 7: Caio, Daniela e Luana; Grupo 8: Caio, Daniela e Tito; Grupo 9: Caio, Luana e Tito; Grupo 10: Daniela, Luana e Tito.

- c) Quantos grupos podem ser formados de forma que Caio participe?

Solução:

- Podem ser formados 6 grupos.

- d) Relate como você procedeu para descobrir de quantos grupos Caio faz parte.

Solução:

- Resposta pessoal.

- e) Daniela não quer participar do torneio de Matemática, dessa forma, quais são os grupos que poderão ser formados sem Daniela?

Solução:

- Grupo 1: Artur, Caio e Luana; Grupo 2: Artur, Caio e Tito; Grupo 3: Artur, Luana e Tito; Grupo 4: Caio, Luana e Tito.

Conclusões

O professor deve levar os alunos a desenvolverem estratégias pessoais de resolução de problemas que envolvem contagem, através dessa atividade ele poderá constatar se os educandos já possuem independência para escolher uma representação gráfica para solucionar o problema ou se utilizam diretamente a enumeração dos casos possíveis. Também é importante que o docente enfatize a necessidade de não adiar dificuldades frente a problemas de Combinatória, deve salientar que: “Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.” (MORGADO; CARVALHO, 2014, p. 119)

Possíveis continuações e desdobramentos

O professor pode ampliar as questões-problemas, propondo outras, adicionando restrições diferentes, proporcionando uma exploração maior de problemas de contagem e, conseqüentemente, do raciocínio combinatório.

3.2.3 Atividade 06: Jogo de Cartas Árvore das Possibilidades

Objetivo:

Resolver situações-problema envolvendo Análise Combinatória através do lúdico.

Público Alvo

Alunos do 4º e/ou 5º ano do Ensino Fundamental.

Pré-requisitos

É necessário o conhecimento prévio da árvore das possibilidades.

Materiais e Tecnologias

Cartas do jogo contidas no apêndice (APÊNDICE E).

Recomendações Metodológicas

- Orienta-se que a turma seja dividida em duplas;
- Antes de iniciar a atividade é importante que o professor faça uma breve revisão sobre elaboração da árvore das possibilidades;

- Cada dupla deve receber 1 Jogo da Memória contendo 12 cartas-perguntas e 12 cartas-respostas;
- O professor deve garantir que todas as duplas recebam corretamente o material necessário para a realização da atividade, evitando, com isso, a dispersão dos alunos;
- Após a entrega do material para as duplas é de fundamental importância que o docente leia com os alunos as regras do jogo e as explique cuidadosamente;
- O professor deve participar da atividade como orientador, supervisionando se os discentes estão solucionando corretamente os problemas, se eles estão obedecendo às regras do jogo e sanando as possíveis dúvidas.

Dificuldades Previstas

O jogo é de fácil execução, portanto não se espera que os alunos demonstrem dificuldades durante sua realização.

Descrição Geral

A proposta de atividade 6 apresenta uma atividade lúdica, um jogo, que segundo a estrutura dos jogos proposta por [Piaget \(1945 apud MACEDO, 1995\)](#), o jogo caracteriza-se como um Jogo de Regra. Já, nas definições de [Lara \(2004\)](#), este jogo classifica-se como um jogo de treinamento, usado com o intuito de abstrair, entender ou generalizar um conhecimento matemático. Esta atividade proporciona ao aluno explorar situações-problema diversas de Análise Combinatória, revisando a representação gráfica da árvore das possibilidades para retratar a solução.

Tempo Previsto: 1 hora-aula de 50 minutos

As regras do jogo são:

1. As peças contendo as perguntas devem ser embaralhadas e distribuídas de forma que cada jogador receba 6 cartas-perguntas;
2. As cartas-respostas devem ser amontoadas sobre a mesa com as respostas viradas para baixo;
3. Definir a ordem de jogada através da sorte. Como o número de jogadores é 2 deve-se tirar “par ou ímpar” para definir a ordem;
4. O aluno que ganhou no “par ou ímpar” deve escolher uma pergunta entre as 6 que possui e questionar o seu adversário. Após a resposta do adversário o jogador que fez a pergunta deve tirar do monte de cartas-respostas aquela que possui o número correspondente à pergunta feita. Caso a resposta do outro jogador coincida com a que

foi retirada, então ele ficará com o par de cartas, tendo o direito de jogar novamente. Caso a resposta não coincida ele não recebe nada e passa a vez para o outro jogador;

5. Ao final do jogo o vencedor será o participante que tiver encontrado o maior número de pares correspondentes.

Conclusões

O professor, no final da atividade, deve salientar os conceitos de combinatória por trás de cada um dos 12 problemas do jogo.

Possíveis continuações e desdobramentos

O professor pode ampliar o jogo, formulando outras situações-problema.

3.3 3º Ciclo do Ensino Fundamental

De acordo com os PCN (BRASIL, 1998), a proposta de conteúdos para o ensino de Matemática no terceiro ciclo referente ao bloco Tratamento de Informação deve ampliar as noções já exploradas nos ciclos anteriores, “aprendendo também a formular questões pertinentes para um conjunto de informações, a elaborar algumas conjecturas e comunicar informações de modo convincente, a interpretar diagramas e fluxogramas” (BRASIL, 1998, p. 70).

Neste ciclo, é imprescindível incentivar a construção, análise e comparação de estratégias diversas de resolução de situações-problema (BRASIL, 1998).

O raciocínio combinatório deve ser explorado através da coleta, organização e análise de informações, interpretação e construção de representações gráficas, formulação de argumentos convincentes e resolução de situações-problema (BRASIL, 1998).

Para este ciclo foram elaboradas duas atividades com o objetivo de ampliar conceitos trabalhados no 1º e 2º ciclos, aperfeiçoando os procedimentos já conhecidos e de explorar a representação e contagem de situações que envolvem a combinatória. Para a elaboração das atividades foram consideradas todas as orientações citadas acima e também o nível de conhecimento dos alunos deste ciclo.

3.3.1 Atividade 07: Problemas de Contagem - Agrupamentos e suas representações

Objetivos

- Interpretar problemas de contagem e elaborar representações gráficas para comunicar as informações obtidas;

- Organizar dados;
- Representar e contar com restrições situações combinatórias;
- Desenvolver o raciocínio combinatório.

Público Alvo

Alunos do 6º e/ou 7º ano do Ensino Fundamental.

Pré-requisitos

É necessário o conhecimento prévio da adição de Números Naturais e das representações gráficas (árvore das possibilidades, quadro e produto cartesiano).

Materiais e Tecnologias

Ficha de Atividades 7 contida no apêndice (APÊNDICE C), quadro, giz ou pincel, apagador, lápis, borracha e lápis de cor nas cores: amarelo, azul, verde e vermelho.

Recomendações Metodológicas

- Orienta-se que a atividade seja realizada individualmente e em sala de aula;
- Durante a aplicação da atividade o professor deve supervisionar os educandos, sanando as dúvidas que poderão aparecer.

Dificuldades Previstas

Durante a realização da atividade alguns alunos podem demonstrar dificuldade de elaborar a árvore das possibilidades, os quadros e o produto cartesiano para representar as possíveis combinações existentes em cada questão. Assim, o professor pode utilizar essa atividade para explorar essas representações.

Descrição Geral

A Atividade 7 é composta por duas questões que envolvem coleta e organização de informações, elaboração de esquemas e diferentes representações gráficas.

Na questão 1 é proposto um problema no qual devem ser representadas todas as possibilidades de pintura de um desenho utilizando quatro cores, sem repetição de cores nas partes desse desenho. Ainda nessa questão, é explorada a representação gráfica da árvore das possibilidades. A questão 2 apresenta um problema combinatório no qual devem ser representados todos os casais possíveis de serem formados com as opções de meninos e meninas, esta atividade envolve a utilização de estratégias pessoais e de representações gráficas, que são: a árvore das possibilidades, quadro e o produto cartesiano.

Tempo Previsto: 2 horas-aulas de 50 minutos

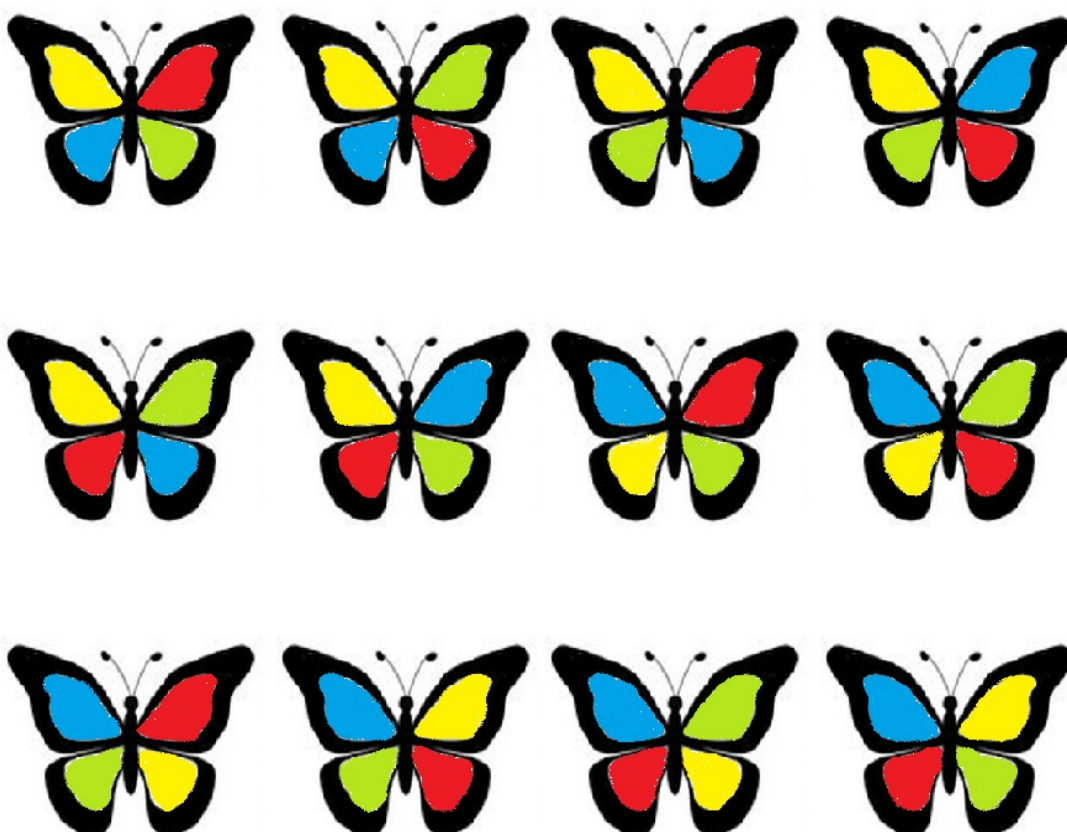
1. (50 minutos) Observe a borboleta que se encontra na Figura 27 e responda às questões.

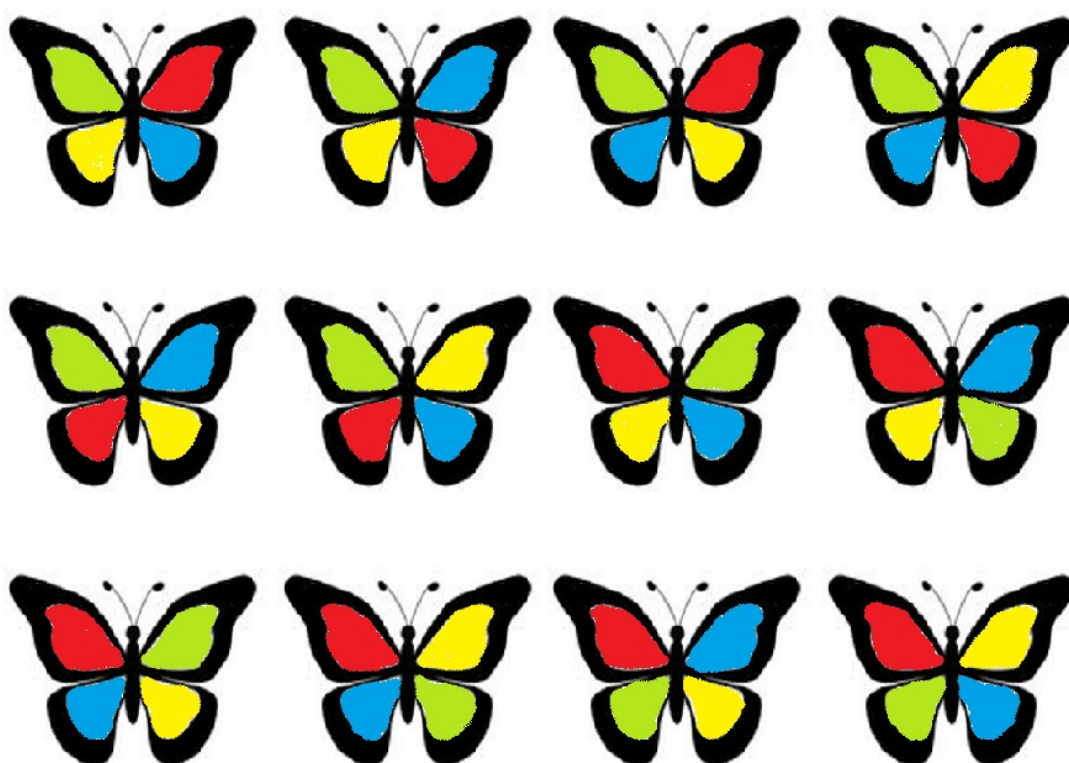
Figura 27 – Borboleta



- a) Caso você disponha de lápis de cor nas cores amarelo, azul, verde e vermelho, apresente todas as maneiras diversas de pintar a figura de modo que todas as quatro asas da borboleta sejam pintadas com cores diferentes.

Solução:





b) De quantas maneiras diferentes você pintou a figura?

Solução:

- 24 maneiras.

c) Explique que procedimento você usou para pintar as figuras do item a.

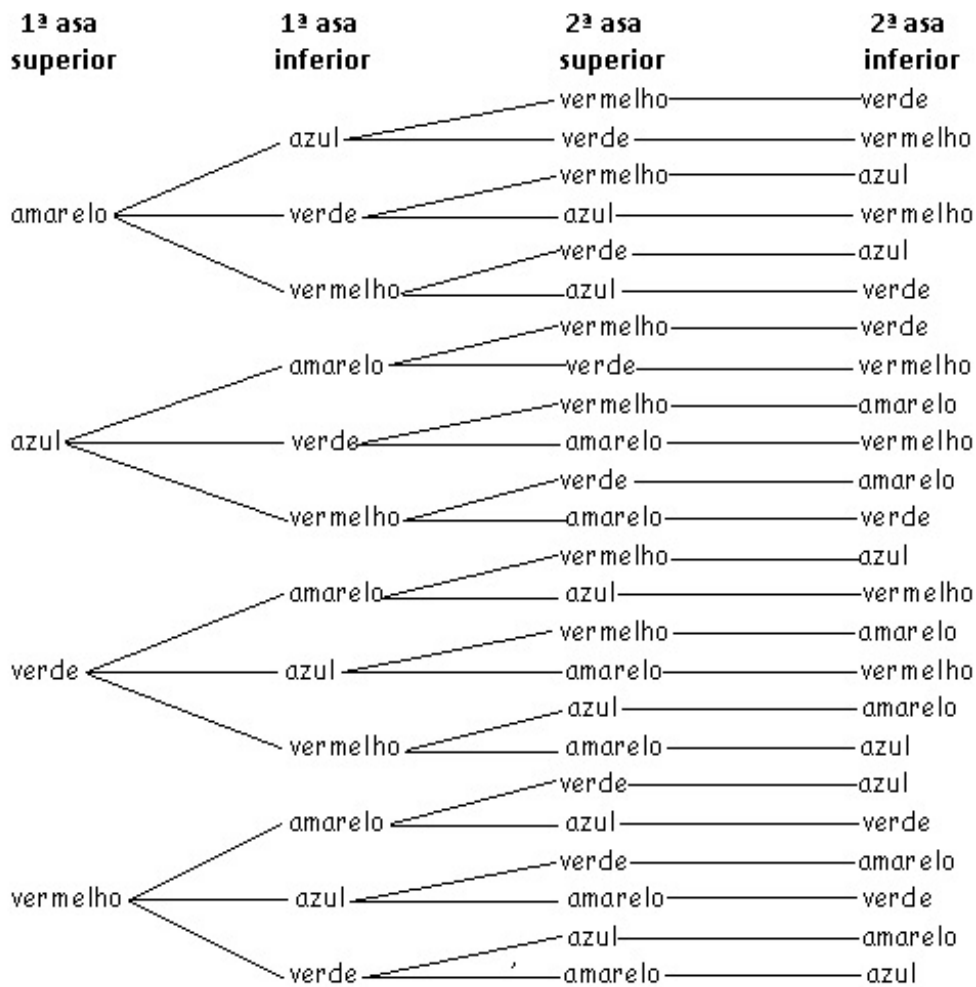
Solução:

- Resposta pessoal.

d) Elabore uma árvore das possibilidades para representar todas as formas diferentes de realizar a pintura da figura.

Solução:

Figura 28 – Árvore das possibilidades de pintura da borboleta



e) Quantas opções de cores você possuía para pintar a primeira asa superior da borboleta?

Solução:

- 4 opções.

• Para cada opção escolhida na pintura da primeira asa superior, quantos são os modos possíveis para a pintura da primeira asa inferior?

Solução:

- 3 opções.

• Após escolhidas as cores da pintura da primeira asa superior e da primeira asa inferior, quantos são os modos possíveis para a pintura da segunda asa superior?

Solução:

- 2 opções.

- Após escolhidas as cores da pintura da primeira asa superior, da primeira asa inferior e da segunda asa superior, quantos são os modos possíveis para a pintura da última asa?

Solução:

- 1 opção.

- f) Faça uma comparação entre os valores que você indicou como respostas nos itens da questão g e a quantidade de ramos da árvore de possibilidades. O que você observou?

Solução:

- Resposta pessoal.

- g) Ainda utilizando as cores amarelo, azul, verde e vermelho, de quantas maneiras diferentes você poderia pintar a borboleta caso a primeira asa superior só possa ser pintada de azul ou verde?

Solução:

- De 12 maneiras diferentes.

- h) Explique como você encontrou a resposta do item anterior.

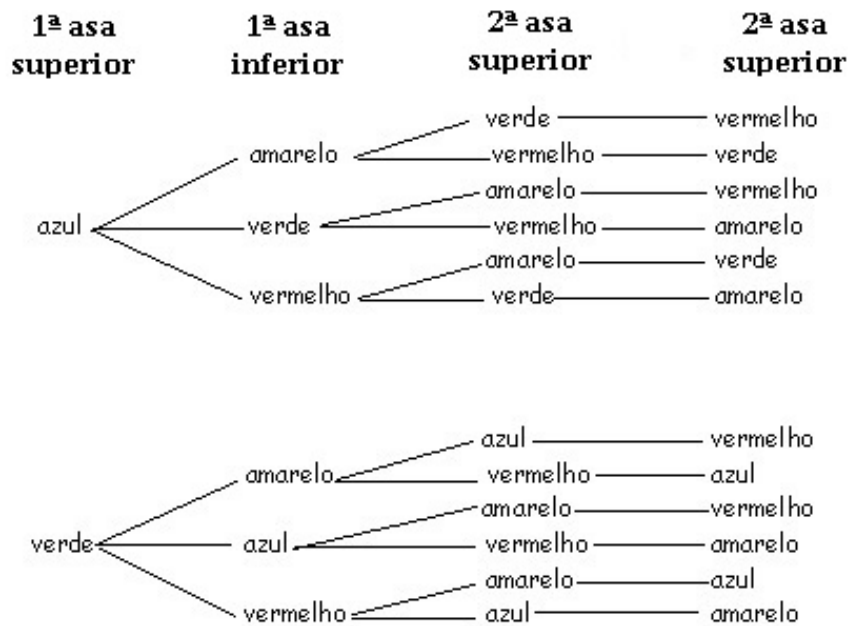
Solução:

- Resposta pessoal.

- i) Elabore uma árvore das possibilidades para indicar as possíveis maneiras de realizar a pintura considerando que a primeira asa superior só possa ser pintada de azul ou verde.

Solução:

Figura 29 – Possibilidades ao pintar a borboleta com duas restrições



j) E quantas seriam as possibilidades diferentes de pintar a borboleta se a segunda asa superior não pudesse ser pintada de amarelo?

Solução:

- 18 possibilidades.

2. (50 minutos) Para participar do Festival de Dança da escola de Joice os professores devem fazer uma seleção e escolher um casal de cada turma. Na turma de Joice sete alunos quiseram participar dessa seleção: Aldo, Felipe, Lucas, Daniel, Laís, Mara e Tina. Assim, a professora deverá escolher entre eles o casal que representará a turma, para isso ela terá que compor todos os possíveis casais e cada um deles deverá se apresentar para que a professora possa decidir.

a) Quantos casais serão formados para a seleção?

Solução:

- 12 casais.

b) Quantas vezes Felipe dançará durante a seleção? E Tina?

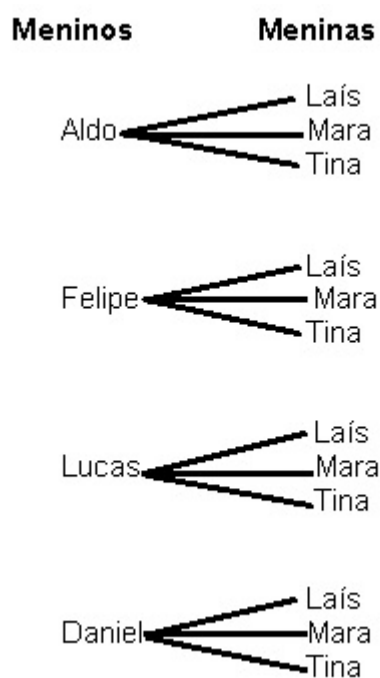
Solução:

- Felipe dançará 3 vezes e Tina dançará 4 vezes.

c) Faça uma árvore das possibilidades para apresentar todos os possíveis casais que serão formados para a seleção.

Solução:

Figura 30 – Árvore de possibilidades com os casais formados para a seleção



d) Agora, use um quadro para representar todos os casais que serão formados.

Solução:

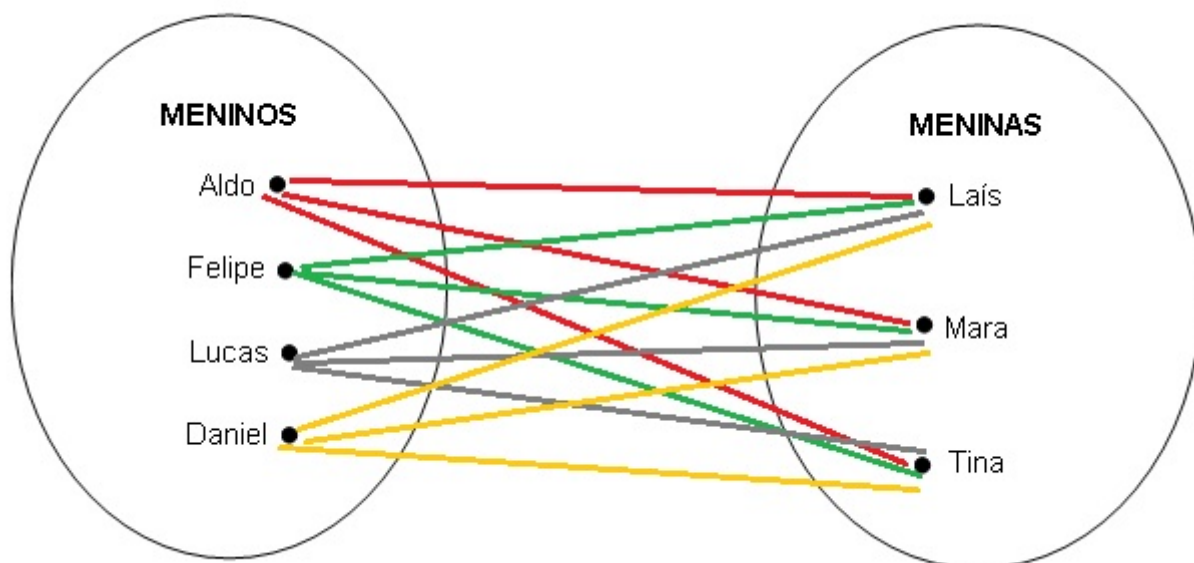
Quadro 12 – Casais formados para a seleção

Meninos \ Meninas	Laís	Mara	Tina
Aldo	Aldo e Laís	Aldo e Mara	Aldo e Tina
Felipe	Felipe e Laís	Felipe e Mara	Felipe e Tina
Lucas	Lucas e Laís	Lucas e Mara	Lucas e Tina
Daniel	Daniel e Laís	Daniel e Mara	Daniel e Tina

e) Utilizando o produto cartesiano faça a representação dos casais que se apresentam durante a seleção.

Solução:

Figura 31 – Produto cartesiano com os casais formados para a seleção



f) Caso Joice também decida participar da seleção, quantas vezes ela teria que se apresentar?

Solução:

- 4 vezes.

g) Faça um novo quadro incluindo Joice na formação dos casais.

Solução:

Quadro 13 – Formação dos casais incluindo Joice

Meninos \ Meninas	Laís	Mara	Tina	Joice
Aldo	Aldo e Laís	Aldo e Mara	Aldo e Tina	Aldo e Joice
Felipe	Felipe e Laís	Felipe e Mara	Felipe e Tina	Felipe e Joice
Lucas	Lucas e Laís	Lucas e Mara	Lucas e Tina	Lucas e Joice
Daniel	Daniel e Laís	Daniel e Mara	Daniel e Tina	Daniel e Joice

Conclusões

No final da atividade o professor deve evidenciar a importância de não adiar as dificuldades, realizando em primeiro lugar as decisões mais restritas. Além disso, deve levar os alunos a comparar vantagens e desvantagens na construção das representações gráficas utilizadas.

Possíveis continuações e desdobramentos

As questões propostas podem ser ampliadas, aumentando-se o nível de dificuldade, acrescentando novas cores para a questão 1 e outros alunos para participar da seleção na questão 2, assim, o professor pode explorar ainda mais as representações gráficas utilizadas para representar as possibilidades.

3.3.2 Atividade 08: Inserindo novos problemas de contagem

Objetivos

- Explorar situações-problema que envolvem diferentes tipos de agrupamentos;
- Desenvolver o raciocínio combinatório;
- Representar e contar os casos possíveis em situações combinatórias.

Público Alvo

Alunos do 6º e/ou 7º ano do Ensino Fundamental.

Pré-requisitos

Não há pré-requisitos.

Materiais e Tecnologias

Ficha de Atividades 8 contida no apêndice (APÊNDICE C), quadro, giz ou pincel, apagador, lápis e borracha.

Recomendações Metodológicas

- Orienta-se que a atividade seja realizada individualmente e em sala de aula;
- Durante a aplicação da atividade o professor deve supervisionar os educandos, sanando as possíveis dúvidas que aparecerão para que de fato ocorra a aprendizagem almejada.

Dificuldades Previstas

Alguns alunos podem demonstrar não saber aplicar estratégias pessoais para resolver problemas de contagem, com isso, apresentar dificuldades para realizar a atividade. Nesse sentido, as questões propostas podem ser utilizadas pelo professor para ajudar estes alunos a sanar suas dúvidas.

Descrição Geral

A Atividade 8 é composta de cinco questões que visam explorar a representação e contagem de situações combinatórias.

As questões 1, 2 e 3 estão interligadas, a primeira questão propõe um problema de formação de uma senha utilizando letras e algarismos, não havendo restrições. Cabe ressaltar aqui que uma questão deste tipo já foi introduzida no 3º ciclo, porém com um grau de dificuldade menor, utilizando apenas algarismos. Já as questões 2 e 3 utilizam-se do mesmo problema, porém, inserindo restrições diferentes. A questão 4 apresenta um problema combinatório, para sua resolução pode ser utilizado diferentes formas de estratégias pessoais, como a elaboração de esquemas e representações gráficas. Na questão 5 é apresentado um labirinto com diversos caminhos possíveis, no qual deve ser encontrada a quantidade de combinações possíveis para se chegar ao prêmio. Esta questão envolve coleta e organização de informações, bem como a utilização de estratégias pessoais de resolução e contagem.

Tempo Previsto: 1 hora-aula de 50 minutos

1. (10 minutos) Júlia precisa escolher uma senha de bloqueio da tela do seu celular. Essa senha deve ser formada por duas letras seguidas de dois algarismos. Júlia pretende usar as letras A e B e os algarismos 7 e 9. Quais e quantas são as senhas diferentes que Júlia poderá formar, podendo repetir ou não as letras e os algarismos?

Solução:

- Júlia pode formar as seguintes senhas: AA77, AA79, AA97, AA99, AB77, AB79, AB97, AB99, BA77, BA79, BA97, BA99, BB77, BB79, BB97 e BB99.

Logo, ela tem 16 maneiras diferentes de formar a senha.

2. (10 minutos) Caso Júlia decidisse não repetir as letras, quais e quantas seriam as senhas possíveis?

Solução:

- Júlia pode formar as seguintes senhas: AB77, AB79, AB97, AB99, BA77, BA79, BA97 e BA99.

Logo, ela tem 8 maneiras diferentes de formar a senha.

3. (10 minutos) E se ela não quisesse repetir letra e nem algarismo?

Solução:

- Júlia pode formar as seguintes senhas: AB79, AB97, BA79 e BA97.

Logo, ela tem 4 maneiras diferentes de formar a senha.

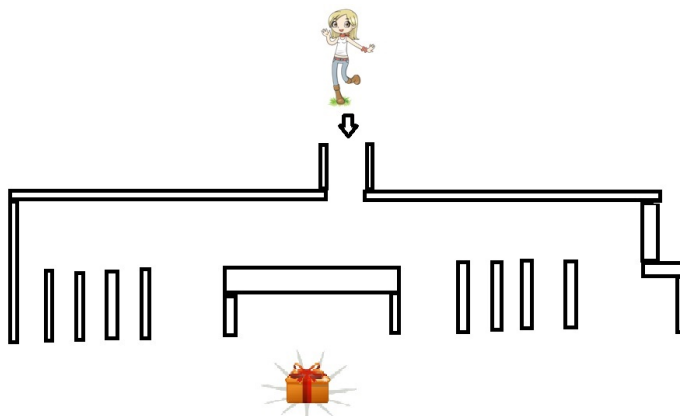
4. (10 minutos) Três irmãos, Léo, Lucas e Luan vão sentar em um banco que possui 3 lugares. De quantas maneiras diferentes eles podem sentar-se nesse banco?

Solução:

- Qualquer um dos 3 irmãos pode sentar-se no primeiro lugar, após o primeiro irmão estar sentado restam 2 irmãos que podem sentar no segundo lugar, após o segundo irmão estar sentado resta apenas 1 para sentar-se no último lugar. Logo, os irmãos podem sentar-se no banco de 6 maneiras diferentes.

5. (10 minutos) Quantos trajetos diferentes Lara pode escolher para chegar até o prêmio?

Figura 32 – Labirinto



Solução:

- Ao entrar no labirinto, Lara encontra duas opções de caminho para escolher. Tomado um dos caminhos surgem mais 5 opções de caminhos, dos quais ela precisa escolher um para encontrar o prêmio. Assim, Lara pode escolher 10 trajetos diferentes para chegar até o prêmio.

Conclusões

As situações-problema desta atividade podem ser resolvidas utilizando diferentes estratégias, logo, possibilitam ao professor avaliar quais técnicas estão sendo utilizadas por seus alunos diante de problemas de contagem.

Possíveis continuações e desdobramentos

A atividade proposta possibilita que os problemas sejam ampliados, permitindo ao professor aumentar o nível de dificuldade, formulando outros problemas relacionados aos resolvidos, explorando ainda mais o princípio fundamental da contagem. Um exemplo do que pode ser feito é aumentar as opções de caminhos do labirinto da questão 5.

3.4 4º Ciclo

De acordo com os PCN (BRASIL, 1998), a compreensão do princípio multiplicativo deve ocorrer no Ensino Fundamental, no 4º ciclo, pois os alunos já desenvolveram estratégias para resolver os problemas de contagem nos ciclos anteriores, apoiados em quadros,

diagramas, etc., assim, através desses problemas os alunos irão perceber que o princípio multiplicativo é um recurso que auxilia resolver mais facilmente muitos problemas.

Então, com base nisso, foram elaboradas três atividades para este ciclo, organizadas de modo a favorecer a compreensão do princípio multiplicativo, utilizando uma linguagem clara e compatível com as ações cognitivas dos alunos deste ciclo.

3.4.1 Atividade 09: O Princípio Fundamental da Contagem

Objetivos

- Explorar situações-problema envolvendo contagem;
- Desenvolver o raciocínio combinatório;
- Estimular a coleta e organização de informações;
- Utilizar o princípio aditivo da contagem para resolver problemas;
- Compreender o princípio multiplicativo.

Público Alvo

Alunos do 8º e/ou 9º ano do Ensino Fundamental.

Pré-requisitos

É necessário o conhecimento prévio da Adição e Multiplicação de Números Naturais.

Materiais e Tecnologias

Ficha de Atividades 9 contida no apêndice (APÊNDICE D), quadro, giz ou pincel, apagador, lápis e borracha.

Recomendações Metodológicas

- Orienta-se que a atividade seja realizada individualmente e em sala de aula;
- Durante a aplicação da atividade o professor deve supervisionar os educandos, sanando as possíveis dúvidas que aparecerão para que de fato ocorra a aprendizagem almejada.

Dificuldades Previstas

Alguns alunos podem não compreender corretamente, durante as primeiras questões, o princípio fundamental e, com isso, não conseguir utilizá-lo corretamente para resolver as questões seguintes. Caso esta dificuldade ocorra, sugere-se ao professor que oriente aos alunos que a apresentam para que construam a correta noção do princípio multiplicativo.

Descrição Geral

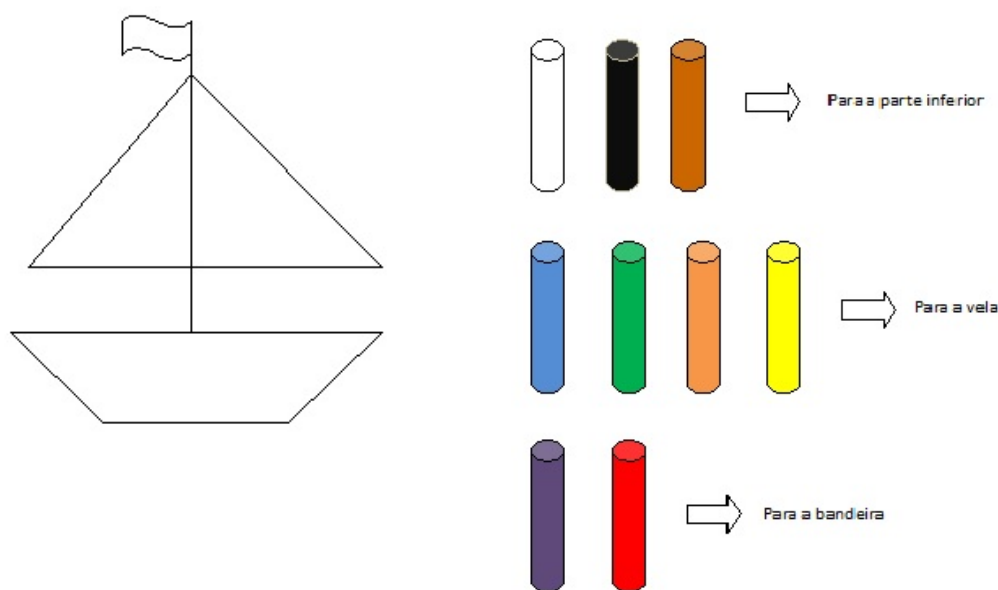
A Atividade 9, contém sete questões-problema envolvendo contagem que visam explorar a coleta e organização de informações, o princípio multiplicativo e o princípio aditivo para desenvolver o raciocínio combinatório.

Na questão 1 é introduzido a noção do princípio multiplicativo. As outras questões apresentam problemas combinatórios que buscam explorar este conceito. As questões 6 e 7, além do princípio multiplicativo, exploram também o princípio aditivo.

Tempo Previsto: 80 minutos

1. (10 minutos) Carlos desenhou um veleiro e pretende pintá-lo. Observe na Figura 33 o veleiro de Carlos e as opções de cores de giz de cera que ele possui.

Figura 33 – Veleiro desenhado por Carlos e cores de giz de cera que ele possui.



- a) Quantas opções de cores Carlos possui para pintar:

- a parte inferior?

Solução:

- 3 cores

- a vela?

Solução:

- 4 cores

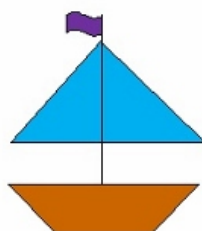
- a bandeira?

Solução:

- 2 cores

- b) Carlos escolheu a seguinte combinação de cores para seu veleiro: marrom para a parte inferior, azul para a vela e roxo para a bandeira. Observe a Figura 34:

Figura 34 – Veleiro de Carlos



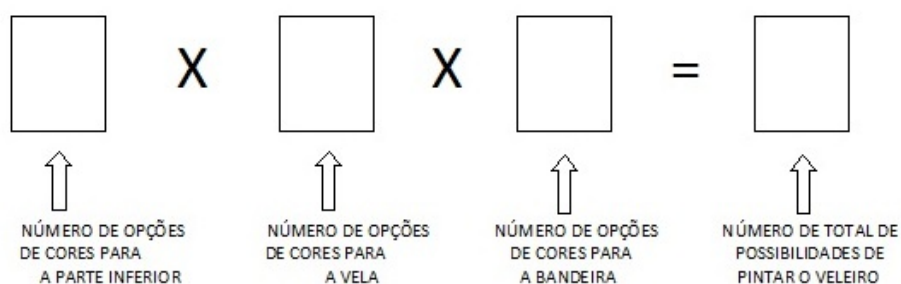
- E você, que cores escolheria para pintar o veleiro?

Solução:

- Resposta pessoal.

- c) De quantos modos diferentes Carlos poderia ter pintado o seu veleiro?

Figura 35 – Cálculo de possibilidades de pintura do veleiro



Solução:

Figura 36 – Resposta ao cálculo de possibilidades de pintura do veleiro


$$\boxed{3} \times \boxed{4} \times \boxed{2} = \boxed{24}$$

↑ ↑ ↑ ↑
 NÚMERO DE OPÇÕES NÚMERO DE OPÇÕES NÚMERO DE OPÇÕES NÚMERO DE TOTAL DE
 DE CORES PARA DE CORES PARA DE CORES PARA POSSIBILIDADES DE
 A PARTE INFERIOR A VELA A BANDEIRA PINTAR O VELEIRO

2. (10 minutos) Lucas vai ao restaurante Bom Paladar, onde pode montar o seu almoço com um tipo de bebida, um tipo de massa e um tipo de sobremesa. Observe na Figura 37 o cardápio do restaurante para responder às questões.

Figura 37 – Cardápio do restaurante Bom Paladar

RESTAURANTE BOM PALADAR		
BEBIDAS ÁGUA REFRIGERANTE SUCO DE LARANJA SUCO DE LIMÃO	MASSAS CANELONE ESPAGUETE LASANHA	SOBREMESAS BOLO PUDIM SORVETE



a) Quantas opções Lucas tem:

- de bebidas?
Solução: 4 opções.
- de massas?
Solução: 3 opções.
- de sobremesas?
Solução: 3 opções.

b) Quantas são as combinações possíveis para o almoço de Lucas?

Solução:

- $4 \times 3 \times 3 = 36$ combinações

3. (10 minutos) Na loja “Tudo para o Lar” existem seis tipos diferentes de lençol e quatro tipos diferentes de fronha. Quantos jogos de cama diversos podem ser formados contendo um lençol e uma fronha?

Solução:

- Primeiro vamos escolher um lençol. Logo, para montar o jogo de cama, podemos escolher qualquer uma das 4 fronhas. Assim, temos 4 jogos diversos com o mesmo lençol. Como existem 6 lençóis diferentes, podem ser formados 24 jogos de cama diferentes. ($24 = 6 \cdot 4$)
4. (10 minutos) Há 3 tipos diferentes de edredons na loja “Tudo para o Lar”. De quantas maneiras podem ser formados conjuntos de jogos de cama contendo um lençol, uma fronha e um edredom?

Solução:

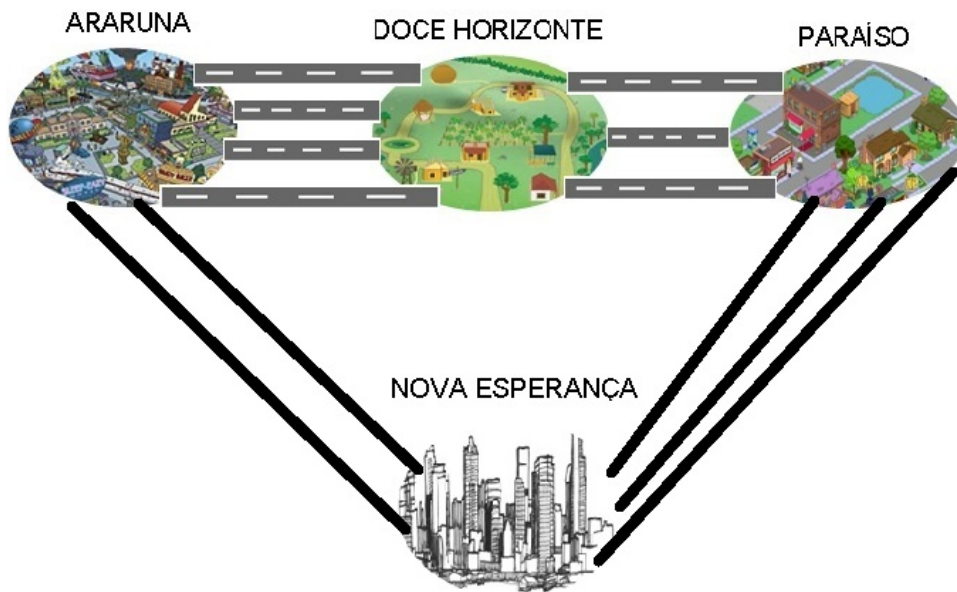
- Inicialmente escolhemos qualquer um dos 24 jogos de cama da questão anterior. Existem 3 modos diversos de completá-lo com um edredom. Logo, a quantidade de todos os jogos de cama possíveis de serem formados é 72. ($72 = 24 \cdot 3 = 6 \cdot 4 \cdot 3$)
5. (10 minutos) A Figura 38 mostra três cidades e as estradas que ligam essas cidades. Beto mora na cidade Araruna e precisa visitar sua avó que mora na cidade Paraíso. De quantos modos diferentes ele pode ir até a cidade Paraíso passando pela cidade Doce Horizonte?

Figura 38 – Estradas da questão 5

**Solução:**

- Primeiro vamos escolher uma estrada para ir de Araruna até Doce Horizonte. Logo, para chegar até Paraíso, podemos escolher qualquer uma das 3 estradas que ligam Doce Horizonte a Paraíso. Como existem 4 estradas diferentes que ligam Araruna a Doce Horizonte, Beto possui 12 opções de rotas diferentes para ir de Araruna até Paraíso passando por Doce Horizonte. ($12 = 4 \cdot 3$)
6. (10 minutos) Existe outra cidade (Figura 39) pela qual Beto pode passar para chegar até a cidade de sua avó além da cidade Doce Horizonte, é a cidade Nova Esperança. De quantos modos Beto pode chegar até Paraíso, seja passando por Doce Horizonte ou por Nova Esperança?

Figura 39 – Estradas da questão 6

**Solução:**

- Devemos levar em consideração duas situações: 1ª passar por Doce Horizonte ou 2ª passar por Nova Esperança. Para a primeira situação, já sabemos pelo problema da questão anterior que Beto tem 12 modos diferentes de chegar até Paraíso passando por Doce Horizonte. Já, para saber quantas opções ele vai ter se passar por Nova Esperança é necessário escolher primeiro uma estrada para ir de Araruna até Nova Esperança. Logo, para chegar até Paraíso, podemos escolher qualquer uma das três estradas que ligam Nova Esperança a Paraíso. Como existem 2 estradas diferentes que ligam Araruna a Nova Esperança, Beto possui 6 opções de rotas diferentes para ir até a cidade de Paraíso passando por Nova Esperança. Após considerar as duas situações basta somar a quantidade de opções encontradas em cada uma delas. Portanto, existem 18 modos distintos de Beto chegar até Paraíso.

7. (20 minutos) Breno foi à papelaria “Lápis e Companhia” para comprar alguns materiais escolares. Nessa loja são vendidos quatro tipos diferentes de cadernos, cinco tipos de lápis e três tipos de borrachas. De quantas maneiras Breno pode fazer uma compra de dois produtos diferentes?

Solução:

- Existem três casos possíveis: Breno comprar um caderno e um lápis, Breno comprar um caderno e uma borracha ou Breno comprar um lápis e uma borracha. São 20 possibilidades para o primeiro caso, 12 possibilidades para o segundo

caso e 15 para o terceiro. Portanto, somando, Breno pode fazer a compra de 47 maneiras diferentes.

Conclusões

É importante que ao final da atividade o professor faça uma avaliação acerca da interpretação dos alunos, observando se a mesma está correta em relação aos problemas estudados, visto que a utilização mecânica do princípio multiplicativo, isto é, apenas aplicar a multiplicação sem ao menos analisar o problema, pode conduzir a uma resposta correta, porém desprovida de sentido. Caso seja necessário para conduzir a uma interpretação correta, o professor deve utilizar diferentes representações mostrando a validade e o sentido do princípio multiplicativo.

Possíveis continuações e desdobramentos

O professor pode ampliar as questões propostas nessa atividade, aumentando o nível de dificuldade para explorar ainda mais o princípio fundamental da contagem. Na questão 1, por exemplo, a dificuldade poderia ser aumentada acrescentando mais opções de cores para a pintura do barco. Quanto ao problema da questão 2 poderiam ser incluídas mais opções de bebidas, massas e sobremesas. Para dar prosseguimento às questões 3 e 4 poderia acrescentar mais peças ao jogo de cama. Já, para as questões 5 e 6, a dificuldade poderia ser aumentada incluindo mais opções de estradas ligando as cidades. Na questão 7 poderia inserir outros tipos de materiais escolares.

3.4.2 Atividade 10: Retomando problemas de contagem

Objetivos

- Explorar situações-problema envolvendo contagem;
- Resolver problemas diversos utilizando o princípio multiplicativo;
- Desenvolver o raciocínio combinatório.

Público Alvo

Alunos do 8º e/ou 9º ano do Ensino Fundamental.

Pré-requisitos

É necessário conhecer o princípio fundamental da contagem para solucionar os problemas da atividade.

Materiais e Tecnologias

Ficha de Atividades 10 contida no apêndice (APÊNDICE D), quadro, giz ou pincel, apagador, lápis e borracha.

Recomendações Metodológicas

- Orienta-se que a atividade seja realizada individualmente e em sala de aula;
- Durante a aplicação da atividade o professor deve supervisionar os educandos, sanando as possíveis dúvidas que poderão surgir.

Dificuldades Previstas

É possível que alguns alunos não possuam os pré-requisitos necessários para a resolução da atividade, por isso sugere-se ao professor realizar uma breve revisão sobre representações gráficas (árvore das possibilidades e quadros) e princípio fundamental da contagem.

Descrição Geral

A Atividade 10 foi proposta com o intuito de apresentar situações-problema diversos para explorar ainda mais o princípio multiplicativo. Esta atividade é composta por oito questões.

Todas as questões apresentam problemas combinatórios que podem ser resolvidos com a utilização do princípio fundamental da contagem, assim, através dessa atividade os alunos irão perceber que este recurso facilita a resolução de muitos problemas.

Tempo Previsto: 2 horas-aulas de 50 minutos

1. (10 minutos) Abaixo se encontra um quadro no qual cada parte pode ser colorida de azul ou de preto. De quantas maneiras o quadro pode ser colorido?

Quadro 14 – Quadro que deve ser colorido



Solução:

- Dispomos de 2 cores para pintar cada uma das 4 partes, logo, pelo princípio fundamental da contagem o quadro pode ser colorido de 16 maneiras diferentes. (16= 2. 2. 2. 2)
2. (10 minutos) Um determinado jogo de Loteria Esportiva funciona da seguinte maneira: a pessoa que joga deve tentar adivinhar se ocorrerá uma vitória para um dos times ou um empate nos 13 jogos de futebol. Observe na Figura 40 o modelo de um cartão de Loteria Esportiva.

Figura 40 – Cartão Loteria Esportiva



LOTERIA ESPORTIVA

▪ Ganhe acertando os 13 jogos.

	1	TIME A	x	TIME B	2	D	T
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							

- Quantos são os modos possíveis para fazer o preenchimento do cartão desse jogo?

Solução:

- Para cada um dos jogos a pessoa dispõe de três opções: vitória para o time A, empate ou vitória para o time B. Logo, pelo princípio multiplicativo, é possível fazer o preenchimento do cartão desse jogo de 1 594 323 modos possíveis. ($1594323 = 3^{13}$)

3. (10 minutos) Uma turma de 20 alunos precisa escolher um representante e um vice-representante. De quantas maneiras isto pode ser feito?

Solução:

- Dispomos de 20 opções para representantes, escolhido o representante sobram 19 opções possíveis para vice-representante. Portanto, pelo princípio multiplicativo temos 380 maneiras de possíveis de escolher. ($380 = 20 \cdot 19$)

4. (10 minutos) Carlos foi até uma montadora de automóveis para escolher o seu carro. Essa montadora oferece os seguintes modelos de carros: sedã, pickup, hatchback, perua e minivan, que podem ser montados em 10 cores diferentes. Outra opção oferecida por essa montadora é a instalação ou não de ar condicionado. Quantas são as opções de carros oferecidas por essa montadora?

Solução:

- Para escolha do modelo Carlos pode escolher qualquer uma das 5 opções, escolhido o modelo Carlos deve escolher uma cor entre as 10 possíveis, por fim, deve escolher um opção entre as duas, de ter ou não ar condicionado. Logo, pelo princípio multiplicativo a montadora oferece 100 opções de carros diferentes. ($100 = 5 \cdot 10 \cdot 2$)

5. (10 minutos) Para desenvolver um projeto multicultural na escola de Lucas deve ser formada uma comissão composta por 1 professor da área de Matemática, 1 professor da área de Linguagens, 1 professor da área de Ciências da Natureza e 1 professor da área de Ciências Humanas. De quantas maneiras essa comissão poderá ser formada se a escola possui 7 professores de Matemática, 14 professores da área de Linguagens, 6 professores da área de Ciências Naturais e 8 professores da área de Ciências Humanas?

Solução:

- A escola possui 7 opções de professores de Matemática dos quais deve escolher 1 para montar a comissão, 14 opções de professores de Linguagens dos quais também deve selecionar 1, 6 opções de professores de Ciências Naturais para escolher 1 e 8 opções de Ciências Humanas dos quais também sairá 1 selecionado. Logo, pelo princípio multiplicativo a comissão poderá ser formada de 4 704 maneiras diferentes. ($4\ 704 = 7 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 8$)

6. (10 minutos) Quinze ginastas participam da final da prova de solo em uma competição de ginástica artística. Quantas são as possibilidades para o pódio?

Solução:

- Para o primeiro lugar do pódio estão concorrendo os 15 ginastas, depois de selecionado o primeiro colocado restam 14 ginastas concorrendo o segundo lugar, depois de escolhido o segundo colocado restam 13 ginastas concorrendo o terceiro lugar. Assim, pelo princípio fundamental da contagem são 2 730 possibilidades para o pódio. ($2\ 730 = 15 \cdot 14 \cdot 13$)

7. (30 minutos) O Campeonato Mundial de Futebol FIFA de 2018 será realizado na Rússia, esta será a vigésima primeira edição do evento, do qual participarão 32 países. Quantos são os resultados possíveis para primeiro e segundo lugares?

Solução:

- Os 32 países estão competindo para o primeiro lugar, escolhido o primeiro restam 31 países competindo pelo segundo lugar. Portanto, pelo princípio multiplicativo são 992 resultados possíveis para primeiro e segundo lugares. ($992 = 32 \cdot 31$)

8. (10 minutos) João é brasileiro e vai viajar para Rússia em 2018 para ver um dos jogos da Copa do Mundo. Ele vai aproveitar a viagem para visitar os seguintes pontos turísticos da Rússia: Praça Vermelha, Catedral de São Basílio, Kremlin, Teatro Bolshoi, Museu Hermitage e Catedral de Santo Isaac.

a) De quantas maneiras João pode organizar a sequência de pontos turísticos que ele vai visitar?

Solução:

- João possui 6 opções para escolher qual vai visitar primeiro, escolhido o primeiro lugar a visitar restam 5 opções das quais deve escolher uma para visitar em segundo lugar, escolhido o segundo lugar a visitar restam 4 opções de lugares possíveis para visitar em terceiro lugar, escolhido o terceiro lugar a visitar restam 3 possibilidades de lugares diferentes para escolher o quarto lugar para visitar, escolhido o quarto lugar sobram 2 lugares para escolher o quinto lugar a visitar e, por fim, resta 1 último lugar para visitar. Logo, pelo princípio fundamental da contagem João pode organizar a sequência de pontos turísticos de 720 maneiras diferentes. ($720 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$)

b) Caso João decida iniciar as visitas pelo Teatro Bolshoi quantas serão as sequências que ele pode organizar?

Solução:

- Como João vai iniciar as visitas pelo Teatro Bolshoi resta escolher a sequência dos outros lugares que pretende visitar. João possui 5 opções das quais deve escolher uma para visitar em segundo lugar, escolhido o segundo lugar a visitar restam 4 opções de lugares possíveis para visitar em terceiro lugar, escolhido o terceiro lugar a visitar restam 3 possibilidades de lugares diferentes para escolher o quarto lugar para visitar, escolhido o quarto lugar sobram 2 lugares para escolher o quinto lugar a visitar e, por fim, resta 1 último lugar para visitar. Logo, pelo princípio fundamental da contagem João pode organizar a sequência de pontos turísticos de 120 maneiras diferentes. ($120 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$)

c) E se ele pretende iniciar pelo Teatro Bolshoi e finalizar as visitas pelo Museu Hermitage, quantas serão as maneiras possíveis de realizar essas visitas?

Solução:

- Como João vai iniciar as visitas pelo Teatro Bolshoi e finalizar as visitas pelo Museu Hermitage resta escolher a sequência do segundo, terceiro, quarto e quinto lugares que pretende visitar. João possui 4 opções das quais deve escolher uma para visitar em segundo lugar, escolhido o segundo lugar a visitar restam 3

opções de lugares possíveis para visitar em terceiro lugar, escolhido o terceiro lugar a visitar restam 2 possibilidades de lugares diferentes para escolher o quarto lugar para visitar, escolhido o quarto lugar sobra 1 último lugar para visitar. Logo, pelo princípio fundamental da contagem João pode organizar a sequência de pontos turísticos de 24 maneiras diferentes. ($24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$)

Conclusões

Ao término da atividade o professor deve enfatizar a importância do princípio multiplicativo para resolver problemas de contagem, especialmente problemas nos quais se tem um número muito grande de opções. Para tal, ele pode levá-los a debater essa importância. Ele pode pedir para que seus alunos relatem como resolveriam a questão 3 sem utilizar o princípio fundamental da contagem, com isso, vão conseguir reconhecer essa importância.

Possíveis continuações e desdobramentos

Todas as questões propostas na atividade possibilitam que os problemas sejam ampliados, permitindo ao professor aumentar o nível de dificuldade, formulando novos problemas relacionados aos contidos na atividade. O que poderia ser feito acrescentando mais linhas e colunas ao quadro da questão 1, inserindo algumas restrições na questão 2, como, por exemplo, afirmar que no primeiro jogo ocorreu empate e perguntar as possibilidades de preenchimento diante da informação conhecida. Para as outras questões poderia aumentar o número de opções dadas em cada problema.

3.4.3 Atividade 11: Jogo Trilhando com a Combinatória

Objetivo

Resolver situações-problema envolvendo Análise Combinatória através do lúdico.

Público Alvo

Alunos do 8º e/ou 9º ano do Ensino Fundamental.

Pré-requisitos

É necessário saber elaborar esquemas como a árvore das possibilidades e quadros, bem como conhecer o princípio fundamental da contagem para solucionar os problemas do jogo.

Materiais e Tecnologias

Tabuleiro com a pista do jogo, 4 peões, 40 fichas-problemas, 40 fichas-soluções, fichas numeradas de 1 até 40, todos contidos no apêndice (APÊNDICE E), 1 saco, cola e tesoura.

Recomendações Metodológicas

- Orienta-se que a atividade seja realizada em grupos de no máximo quatro alunos;
- Antes de iniciar a atividade é importante que o professor faça uma breve revisão dos esquemas utilizados para solucionar os problemas de contagem, como árvore das possibilidades quadros e produto cartesiano, e também do princípio multiplicativo;
- Cada grupo deve receber 1 tabuleiro com a pista do jogo, 4 peões, 40 fichas-problemas, 40 fichas-soluções e 1 saco contendo as fichas numeradas de 1 a 40;
- O professor deve garantir que todas as equipes recebam corretamente todo o material necessário para a realização da atividade, evitando, com isso, a dispersão dos grupos;
- Após a entrega do material para os grupos é de fundamental importância que o docente explique cuidadosamente as regras do jogo;
- O professor deve participar da atividade como orientador, supervisionando se os discentes estão solucionando corretamente os problemas, se eles estão obedecendo às regras do jogo e sanando as possíveis dúvidas.

Dificuldades Previstas

Durante a aplicação alguns alunos podem demonstrar não saber resolver problemas de contagem e, devido a isso, deverão apresentar dificuldades para jogar. Nesse sentido, o jogo pode ser utilizado para auxiliar esses alunos a sanar suas dúvidas.

Descrição Geral

A proposta de atividade 11 apresenta uma atividade lúdica, um jogo, que segundo a estrutura dos jogos proposta por [Piaget \(1945 apud MACEDO, 1995\)](#), o jogo caracteriza-se como um Jogo de Regra. Já, nas definições de [Lara \(2004\)](#), este jogo classifica-se como um jogo de aprofundamento, utilizado com o intuito de aplicar os conhecimentos apreendidos acerca da Combinatória. Nesta atividade o aluno poderá explorar técnicas pessoais de resolução, as diferentes representações gráficas e o princípio fundamental da contagem, utilizando todo o conhecimento de raciocínio combinatório que foi adquirido.

Tempo Previsto: 2 horas-aulas de 50 minutos

As regras do jogo são:

1. Definir a ordem de jogada através da sorte. Caso o número de jogadores seja superior a 2 deve-se tirar “zerinho ou um” e para os 2 jogadores restantes tira-se “par ou ímpar”. Caso o número de jogadores seja 2 deve-se tirar “par ou ímpar” para definir a ordem.
2. Na mesma ordem de jogada, cada participante deverá escolher um peão para identificação;
3. Todos os jogadores devem posicionar seus peões na casa INÍCIO;

4. Cada jogador, na sua vez, deve retirar do saco um dos papéis que estão numerados de 1 a 40, pegar a carta-pergunta correspondente ao número sorteado e solucionar o problema proposto na carta;
5. Os outros participantes do jogo devem pegar no monte de cartas-respostas a carta correspondente ao problema para fazer a conferência da resposta do jogador. Caso a resposta esteja certa o jogador deve avançar o número de casas determinado pela quantidade de diamantes contidos na carta-pergunta. Caso a resposta esteja errada ele deverá permanecer na casa em que se encontra;
6. Independente do jogador ter acertado ou não a resolução do problema, devolve-se o número sorteado para o saco com os outros papéis numerados;
7. O vencedor será o participante que chegar primeiro à casa FIM, mesmo que tire pontos suficientes para ultrapassá-la.

Conclusões

As situações-problema contidas no jogo exploram a elaboração de representações gráficas e o princípio fundamental da contagem. A atividade possui o intuito de levar os educandos à uma leitura cuidadosa dos enunciados e aplicação dos conhecimentos já apreendidos em atividades anteriores. Ao final da atividade o professor deve ressaltar a importância de cada um dos conceitos abordados nos problemas.

Possíveis continuções e desdobramentos

O professor pode formular outras situações-problema para o jogo, explorando ainda mais o princípio multiplicativo.

Considerações Finais

Ao longo dos estudos realizados nessa pesquisa percebe-se que, apesar dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental preverem que as noções de Análise Combinatória devem estar incluídas aos conceitos a serem trabalhados em todos os ciclos do Ensino Fundamental, isso não ocorre. Este fato foi observado após a análise do Currículo Mínimo do estado do Rio de Janeiro (RIO DE JANEIRO, 2012), o qual não traz os referidos conceitos inseridos nas competências e habilidades a serem desenvolvidas do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, restringindo a exploração desse conteúdo apenas ao 3º ano do Ensino Médio. Dessa forma, os alunos não desenvolvem o raciocínio combinatório neste nível de ensino, sendo um dos motivos da grande dificuldade de aprendizagem da Análise Combinatória demonstrada por alunos do Ensino Médio. Portanto, faz-se necessário o desenvolvimento do raciocínio combinatório ao longo do Ensino Fundamental.

Pensando em tal necessidade foi elaborada uma sequência de atividades que visa introduzir as noções combinatórias através de situações-problemas, levando os alunos a familiarizarem-se com a contagem de agrupamentos, possibilidades de combinações e utilização de representações gráficas. O intuito desta sequência é de que, por meio da exploração desses tipos de situações eles possam, então, compreender a ideia do princípio fundamental da contagem, adquirindo, assim, as noções elementares da Análise Combinatória, que irá auxiliá-los na compreensão do conteúdo quando for estudado no Ensino Médio, além de outras áreas do conhecimento.

Para a viabilização deste trabalho, foi analisada a técnica de Resolução de Problemas, sendo possível perceber que tal estratégia didática é eficiente para melhorar o raciocínio e aumentar a motivação dos estudantes, logo, foi decidido integrá-la à aplicação do conteúdo Análise Combinatória. Outra questão observada foi a dificuldade de motivar os alunos que é uma realidade enfrentada pelos docentes na atualidade, reconhecendo ser fundamental a inserção de práticas pedagógicas inovadoras, bem como a ampliação de estratégias e materiais, inclusive voltado para o trabalho de resolução de situações-problemas. Observou-se através da pesquisa realizada que os jogos atendem essa necessidade e sendo, deste modo, um importante recurso na Resolução de Problemas.

Assim, a proposta de atividades foi desenvolvida aliando essas três estratégias didáticas: a metodologia da Resolução de Problemas, a utilização de Jogos e de materiais

manipuláveis, explorando os princípios básicos da Análise Combinatória e envolvendo situações do cotidiano do educando com o intuito de propiciar um ensino mais significativo.

Acredita-se que esta sequência de atividades elaborada irá contribuir para solucionar a questão problema que norteou esta pesquisa, uma vez que estabelece uma ligação entre os diferentes ciclos de ensino, iniciando com sugestões de atividades para introduzir a Análise Combinatória nas séries iniciais do Ensino Fundamental e finalizando com sugestões para trabalhar o conteúdo no 4^o ciclo. As atividades exploram os conceitos de Combinatória utilizando os mais variados métodos, como as representações gráficas, problemas contextualizados e jogos, que irão contribuir para aulas mais dinâmicas, significativas e agradáveis.

Espera-se que a sequência de atividades proposta sirva para auxiliar professores do Ensino Fundamental a trabalhar o conteúdo Análise Combinatória, proporcionando o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Cabe a cada docente selecionar e adaptar, se necessário, as atividades à realidade de seus alunos, para que ocorra a aprendizagem almejada.

A pesquisa não acaba com as possibilidades de novas abordagens sobre o tema, mas sim, impulsiona uma reflexão acerca da importância de construir o raciocínio combinatório a partir dos anos iniciais da Educação Básica, estimulando o surgimento de novas questões a serem analisadas em trabalhos posteriores. Pelo fato da proposta não ter sido aplicada, fica como sugestão para pesquisas futuras a sua aplicação e descrição dos resultados obtidos.

Referências

- ALVES, A. C. *Uma Introdução ao Pensamento Combinatório no 9^o ano do Ensino Fundamental*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010. Citado na página 17.
- AQUINO, C. de Alencar de. *Introduzindo o Pensamento Combinatório nos Anos Finais do Ensino Fundamental: uma proposta de ensino*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro, 2013. Profmat. Citado na página 17.
- BIGGS, N. L. The roots of combinatorics. *Revista Historia Mathematica*, v. 6, p. p. 109 – 136, 1979. Citado 3 vezes nas páginas 21, 23 e 24.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (1^a a 4^a séries)*. Brasília, DF, 1997. Citado 9 vezes nas páginas 17, 27, 28, 29, 30, 39, 40, 43 e 46.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5^a a 8^a séries)*. Brasília, DF, 1998. Citado 6 vezes nas páginas 17, 27, 28, 29, 73 e 84.
- BROCK, P. *Origem do Quadrado Mágico*. 2016. Disponível em: <<http://reforcandomatematica.blogspot.com.br/2016/11/origem-do-quadrado-magico.html>>. Acesso em: Acesso em: 21 set. 2017, às 09:42 a.m. Citado na página 20.
- CAMPOS, C. E. de. *Análise Combinatória e Proposta Curricular Paulista um Estudo dos Problemas de Contagem*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- D'AMBROSIO, U. *Educação matemática: da teoria à prática*. São Paulo: Papirus, 2011. Citado na página 19.
- DANTE, L. R. *Formulação e resolução de problemas de matemática : teoria e prática*. São Paulo: Ática, 2009. Citado 5 vezes nas páginas 31, 32, 33, 34 e 35.
- DOWBOR, L. *Tecnologias do Conhecimento: os desafios da educação*. São Paulo: Vozes, 2013. Citado na página 16.
- FLEMMING, D. M. Criatividade e jogos didáticos. *Recife: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática*, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 40, 41, 42 e 43.
- FLEMMING, D. M.; MELO, A. C. *Criatividade e jogos didáticos*. São José: Saint Germain, 2003. Citado na página 40.
- FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra, 2007. Citado na página 30.

- GONÇALVES, A. R. *Raciocínio Combinatório: Uma proposta de aula para o 6º ano do Ensino Fundamental Utilizando o Jogo da Senha*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017. Profmat. Citado na página 17.
- HUIZINGA, J. *Homo Ludens*. São Paulo: Perspectiva, 2000. Citado na página 36.
- JANUARIO, G. Quadrados mágicos: uma proposta de aprendizado com enfoque etnomatemático. *Niterói: III Congresso Brasileiro de Etnomatemática*, 2008. Citado na página 20.
- LARA, I. C. M. de. O jogo como estratégia de ensino de 5ª a 8ª série. *Recife: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática*, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 35, 37, 72 e 97.
- MACEDO, L. de. Os jogos e sua importância na escola. *Cadernos de Pesquisa*, v. 93, maio 1995. São Paulo. Citado 5 vezes nas páginas 37, 38, 40, 72 e 97.
- MIRANDA, A. S. M. S. *Resolução de problemas como metodologia de ensino: uma análise das repercussões de uma formação continuada*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 30.
- MORAES, D. N. M. de; COMIN, M. T. S.; COSTA, G. M. T. da. Olhando para o século xxi: a formação do professor e seu perfil profissional frente aos desafios. *Revista de Educação do Ideau*, v. 4, n. 8, p. 20, 2009. Citado na página 16.
- MORGADO, A. C. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: SBM, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 19, 26 e 27.
- MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta*. Rio de Janeiro: SBM: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014. Citado na página 71.
- PESSOA, C.; BORBA, R. O raciocínio combinatório do início do ensino fundamental ao término do ensino médio. *Salvador: X Encontro Nacional de Educação Matemática*, 2010. Citado na página 26.
- PIAGET, J. *La formation du symbole chez l'enfant: imitation, jeu et rêve, image et représentation*. Neuchâtel/ Paris: Delachaux et Niestlé, 1945. Citado 2 vezes nas páginas 72 e 97.
- PIAGET, J. *Sagesse et illusions de la philosophie*. Paris: PUF, 1965. Citado na página 38.
- POZO, J. I. *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender*. Porto Alegre: Artmed, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 17, 30 e 31.
- REDLING, J. P. *A Metodologia de Resolução de Problemas: concepções e práticas pedagógicas de professores de matemática do ensino fundamental*. Dissertação (Mestrado) — UNESP, Bauru, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 30.
- RIO DE JANEIRO. *Currículo Mínimo*. Rio de Janeiro, 2012. Disponível em: <<http://conexaoescola.rj.gov.br/curriculo-basico/matematica>>. Citado 3 vezes nas páginas 16, 29 e 99.
- RODRIGUES, A. F. C. do N. *O uso de Materiais Manipulativos e Jogos através de oficinas: Uma proposta para o ensino de Geometria*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2015. Citado na página 43.

SANTINHO, M. S.; MACHADO, R. M. Os fascinantes quadrados mágicos. *Goiás: III Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática*, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 20, 21 e 22.

SILVA, M. J. de C. O jogo como estratégia para a resolução de problemas de conteúdo matemático. *Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional (ABRAPEE)*, v. 12, n. 1, 2008. Citado na página 36.

SILVA, P. M. T. *O desenvolvimento do raciocínio combinatório na Educação de Jovens e Adultos: Uma abordagem através de Jogos e Resolução de Problemas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro, 2013. Profmat. Citado na página 17.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; MILANI, E. *Cadernos do Mathema: Jogos de Matemática de 6º a 9º ano*. Porto Alegre: Artmed, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 35, 36 e 40.

SOUSA, G. C. de; OLIVEIRA, J. D. ao Souza de. O uso de materiais manipuláveis e jogos no ensino de matemática. *Salvador: X Encontro Nacional de Educação Matemática*, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 44.

TEIXEIRA, P. J. M. aes. Os blocos lógicos e o desenvolvimento do raciocínio combinatório. *Curitiba: XI Encontro Nacional de Educação Matemática*, p. 10, Julho 2013. Citado na página 54.

TEIXEIRA, P. J. M. aes. *Resolvendo Problemas de Análise Combinatória nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014. Citado na página 16.

VAZQUEZ, C. M. R. *O Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio por Meio de Atividades Orientadoras em uma Escola Estadual do Interior Paulista*. Dissertação (Mestrado) — UFSCar, São Carlos, 2011. Citado na página 21.

VAZQUEZ, C. M. R.; NOGUTI, F. C. H. Análise combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. *Recife: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática*, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 19, 20, 21 e 24.

VILA, A.; CALLEJO, M. L. *Matemática Para Aprender a Pensar: o Papel das Crenças na Resolução de Problemas*. Porto Alegre: Artmed, 2006. Citado na página 31.

WIELEITNER, H. *História de La Matemática*. [S.l.]: Editorial Labor, 1928. Citado na página 19.

Apêndices

APÊNDICE A

Atividades para o 1º ciclo do Ensino Fundamental

A.1 Ficha de Atividades 1

FICHA DE ATIVIDADES

1. Ana e Maria estão brincando de um jogo chamado “Role os Dados”. As regras desse jogo são:

- Cada participante deve jogar dois dados e registrar o número de pontos obtidos nas faces superiores;
- Depois de registrados os pontos cada participante deve somá-los para saber qual é o total;
- O ganhador será o jogador que obtiver maior pontuação.

a) Na Figura abaixo, registre o número de pontos tirados por Ana e por Maria, e depois, calcule o total de pontos de cada uma.



(a) Total de pontos de Ana:

(b) Total de pontos de Maria:

b) Quem ganhou o jogo: Ana ou Maria? _____

c) Complete o quadro abaixo com as somas obtidas no lançamento de dois dados.

+	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

d) No quadro do item c, pinte de amarelo os quadrados onde a soma das faces foi 4. A seguir, escreva as duplas cuja soma foi 4.

e) No quadro do item c, pinte de azul celeste os quadrados onde a soma das faces foi 9. A seguir, escreva as duplas cuja soma foi 9.

f) É possível que a soma seja 13? Justifique.

2. Para ir ao aniversário de sua amiga, Lara pode escolher um vestido e um sapato, entre os que ela possui. Observando a figura a seguir, responda:



- a) Quantos vestidos Lara possui? _____
- b) Quantos pares de sapato Lara possui? _____
- c) Pinte a figura acima, mostrando as possíveis combinações que Lara pode vestir.
- d) De quantas maneiras diferentes Lara pode combinar seus vestidos com seus pares de sapato?
- _____
3. Complete a árvore de possibilidades que Lara tem.



4. As moedas possuem duas faces, uma chamamos de cara e a outra de coroa. Observe as duas faces de uma moeda de 1 real.



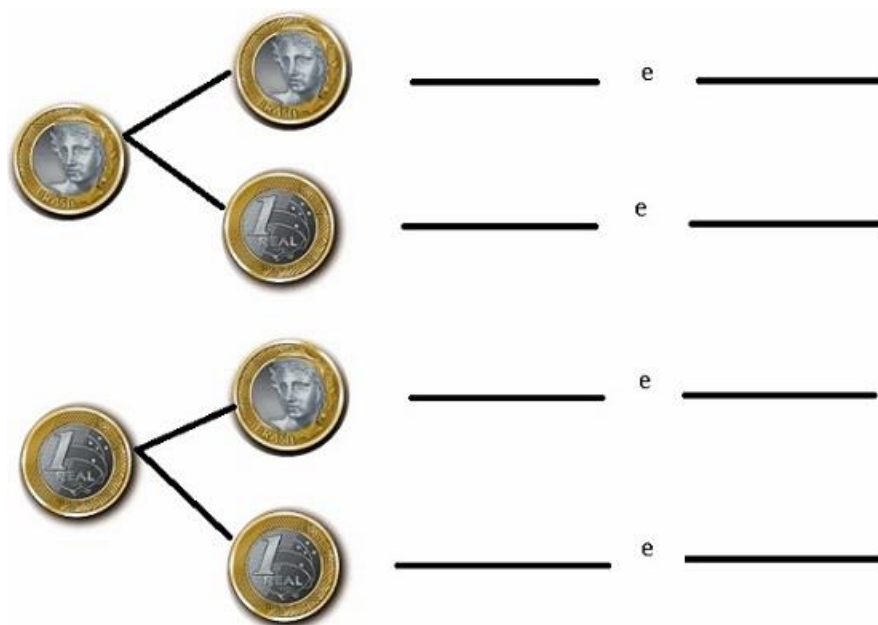
cara



coroa

- a) Elisa está brincando de lançar moedas, ela possui uma moeda de 1 real. Quantos e quais são os resultados possíveis para o lançamento?

- b) Elisa quer saber quais resultados serão possíveis se ela lançar a moeda duas vezes. Ajude Elisa a descobrir completando a árvore de possibilidades abaixo.



- c) Quantas possibilidades Elisa terá ao lançar uma moeda duas vezes?

A.2 Ficha de Atividades 2

FICHA DE ATIVIDADES

1. Utilizando os quadrados e triângulos do material “Blocos Lógicos” que se encontra no apêndice (APÊNDICE E), quantas casinhas diversas podem ser montadas usando um triângulo (amarelo, vermelho, azul) para o telhado e um quadrado (amarelo, vermelho, azul) para a base?

2. Represente todas as possibilidades por meio de desenhos.

3. Registre todas as possibilidades de cor das casinhas obtidas na questão anterior no quadro a seguir. Para tal, preencha os espaços em branco com a combinação da cor dos quadrados e triângulos.

Quadrados \ Triângulos	Quadrado amarelo	Quadrado vermelho	Quadrado azul
Triângulo amarelo			
Triângulo vermelho			
Triângulo azul			

A.3 Ficha de Atividades 3

FICHA DE ATIVIDADES

1. Observe na figura a seguir o cardápio da lanchonete da escola de Lucas.

CARDÁPIO	
 	
LANCHES	
Hambúrguer assado-----	R\$ 3,50
Salgado-----	R\$ 2,00
Cachorro-quente-----	R\$ 3,00
Misto-quente-----	R\$ 2,50
Sanduíche natural-----	R\$ 4,00
BEBIDAS	
Suco de fruta-----	R\$ 2,00
Água-----	R\$ 1,50
Refrigerante-----	R\$ 3,00

a) Lucas levou para a escola a quantia mostrada abaixo para comprar a merenda. Escreva quantos reais Lucas possui. _____



b) Com o dinheiro que possui Lucas pode comprar um salgado e um suco de frutas? _____

c) Ele pode comprar um sanduíche natural e um refrigerante? _____

d) Caso Lucas decida comer um hambúrguer assado, quais são as possíveis bebidas que ele poderá comprar? _____

e) Caso Lucas queira comprar um lanche e uma bebida, quais são suas opções com o dinheiro que possui? Complete o quadro abaixo com todas as opções de Lucas.

LANCHE	BEBIDA

2. Marcelo ganhou de mesada do seu pai a seguinte quantia:



- Marcelo pretende comprar um tênis que custa 70 reais. De quantas maneiras diferentes ele poderá compor exatamente os 70 reais utilizando apenas as cédulas acima? Quais são elas?

3. Serginho precisa comprar um caderno novo que custa 26 reais. Ele quer pagar o caderno usando apenas cédulas, sem receber troco e deseja encontrar todas as maneiras possíveis de fazer isso. Vamos ajudar Serginho! Desenhe abaixo todos os modos possíveis que Serginho tem de fazer o pagamento do caderno.

APÊNDICE B

Atividades para o 2º ciclo do Ensino Fundamental

B.1 Ficha de Atividades 4

FICHA DE ATIVIDADES

1) Zeca vai fazer aniversário e precisa escolher o seu bolo. A confeitaria "Sonhos" oferece três opções de massa: tradicional, chocolate ou morango e quatro opções de recheio: leite condensado, brigadeiro, limão ou morango. De quantas maneiras diferentes Zeca pode escolher o seu bolo?

2) Zeca decidiu que o bolo deve ter a massa de chocolate. Quantas são as possibilidades para Zeca escolher um bolo se ele possui quatro opções de recheio?

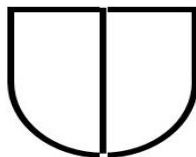
3) Cláudia também vai comprar um bolo para a reunião em sua casa na confeitaria "Sonhos". Porém, ela deseja que seu bolo tenha também a cobertura. Essa confeitaria oferece duas opções de cobertura: chantilly ou doce de leite. De quantas maneiras diferentes Cláudia pode escolher o bolo, se ela tem três opções de massa, quatro opções de recheio e duas opções de cobertura?

4) Cláudia descobriu que uma de suas amigas não gosta de recheio de leite condensado. De quantos modos Cláudia pode montar o seu bolo sem que ele tenha recheio de leite condensado?

B.2 Ficha de Atividades 5

FICHA DE ATIVIDADES

1. Felipe gosta muito de futebol e faz parte do time da escola. Ele quer montar o escudo do time e para isso desenhou o modelo abaixo:



- a) Felipe possui dois lápis nas cores azul e verde, mostre através de desenhos todas as diferentes possibilidades que Felipe tem de pintar o escudo, podendo ou não usar a mesma cor em ambos os lados.
- b) Explique como você fez para pintar os diferentes escudos representados no item anterior.
- _____
- c) Quantos escudos diferentes Felipe vai conseguir obter com as duas cores, podendo ou não usar a mesma cor em ambos os lados?
- _____
- d) Agora, considere que Felipe deseja pintar cada lado do escudo de uma cor diferente do lado anterior. Desenhe abaixo os escudos diferentes que Felipe pode conseguir usando as cores que possui.
- e) Explique como você fez para garantir que todas as opções fossem representadas.
- _____
- f) Quantos escudos diferentes Felipe vai conseguir obter se deseja que cada lado tenha uma cor diferente do lado anterior?
- _____
2. Carla tem um cofre onde guarda suas moedas, mas esqueceu a senha. Ela sabe que a senha é composta por 3 algarismos distintos e lembra que usou somente os algarismos 2, 4 e 6 na escolha da senha. Ajude Carla a encontrar o segredo de seu cofre. Utilizando os algarismos 2, 4 e 6:

a) escreva todos os números de 3 algarismos que podem ser formados sem que haja repetição de algarismos;

b) agora, coloque-os em ordem crescente.

3. Os anagramas de uma palavra são obtidos ao trocarmos de lugar as letras de uma palavra. Observe os anagramas da palavra **MAR** : MRA, MAR, AMR, ARM, RAM, RMA.

- Agora, é com você, escreva todos os anagramas da palavra **LUA**.

4. Bia deseja enfeitar a área externa de sua casa e para isso comprou dois cogumelos de cerâmica iguais. Ela pretende colocá-los em um dos dois lados ou na frente da casa, de modo que os dois cogumelos podem ficar juntos do mesmo lado ou não.

Observe na figura a seguir a representação da casa de Bia.



- Complete o quadro abaixo indicando as possibilidades que Bia dispõe para colocar um cogumelo ou os dois cogumelos ao lado esquerdo, à frente ou ao lado direito da casa. Quando você escolher um cogumelo para colocar em um dos lados ou à frente da casa escreva COGUMELO; quando escolher dois cogumelos escreva COGUMELO-COGUMELO e quando não há cogumelo junto de um dos lados ou à frente escreva SEM COGUMELO.

LADO ESQUERDO	FRENTE	LADO DIREITO

- De quantos modos distintos Bia pode colocar os cogumelos?

5. Para representar o 5º ano em um torneio de Matemática da escola é necessário montar um grupo composto por 3 alunos. Para realizar a escolha do grupo a professora deve escolher os 3 alunos dentre os que possuem a melhor média na matéria, que são: Artur, Caio, Daniela, Luana e Tito.

a) Quantos grupos diferentes compostos de três alunos podem ser formados com os cinco alunos citados acima?

b) Agora, represente todos os grupos de 3 alunos que podem ser formados.

c) Quantos grupos podem ser formados de forma que Caio participe?

d) Relate como você procedeu para descobrir de quantos grupos Caio faz parte.

e) Daniela não quer participar do torneio de Matemática, dessa forma, quais são os grupos que poderão ser formados sem Daniela?

APÊNDICE C

Atividades para o 3º ciclo do Ensino Fundamental

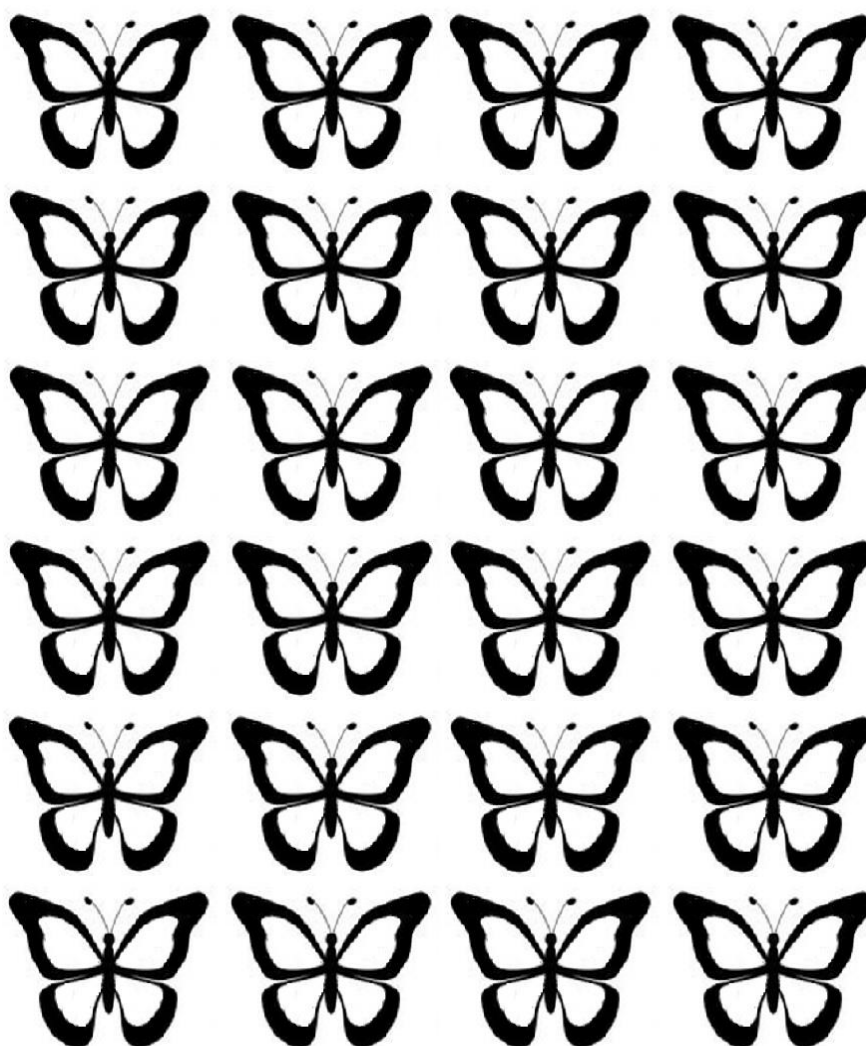
C.1 Ficha de Atividades 7

FICHA DE ATIVIDADES

1. Observe a borboleta que se encontra na figura abaixo e responda às questões.



- a) Caso você disponha de lápis de cor nas cores amarelo, azul, verde e vermelho, apresente todas as maneiras diversas de pintar a figura de modo que todas as quatro asas da borboleta sejam pintadas com cores diferentes.



- b) De quantas maneiras diferentes você pintou a figura? _____
- c) Explique que procedimento você usou para pintar as figuras do item a.
- _____
- d) Elabore uma árvore das possibilidades para representar todas as formas diferentes de realizar a pintura da figura.
- e) Quantas opções de cores você possuía para pintar a primeira asa superior da borboleta?
- _____
- Para cada opção escolhida na pintura da primeira asa superior, quantos são os modos possíveis para a pintura da primeira asa inferior? _____
 - Após escolhidas as cores da pintura da primeira asa superior e da primeira asa inferior, quantos são os modos possíveis para a pintura da segunda asa superior?
- _____
- Após escolhidas as cores da pintura da primeira asa superior, da primeira asa inferior e da segunda asa superior, quantos são os modos possíveis para a pintura da última asa?
- _____
- f) Faça uma comparação entre os valores que você indicou como respostas nos itens da questão g e a quantidade de ramos da árvore de possibilidades. O que você observou?
- _____
- g) Ainda utilizando as cores amarelo, azul, verde e vermelho, de quantas maneiras diferentes você poderia pintar a borboleta caso a primeira asa superior só possa ser pintada de azul ou verde?
- _____
- h) Explique como você encontrou a resposta do item anterior.
- _____
- i) Elabore uma árvore das possibilidades para indicar as possíveis maneiras de realizar a pintura considerando que a primeira asa superior só possa ser pintada de azul ou verde.

- j) E quantas seriam as possibilidades diferentes de pintar a borboleta se a segunda asa superior não pudesse ser pintada de amarelo?

2. Para participar do Festival de Dança da escola de Joice os professores devem fazer uma seleção e escolher um casal de cada turma. Na turma de Joice sete alunos quiseram participar dessa seleção: Aldo, Felipe, Lucas, Daniel, Laís, Mara e Tina. Assim, a professora deverá escolher entre eles o casal que representará a turma, para isso ela terá que compor todos os possíveis casais e cada um deles deverá se apresentar para que a professora possa decidir.

- a) Quantos casais serão formados para a seleção? _____

- b) Quantas vezes Felipe dançará durante a seleção? E Tina? _____

- c) Faça uma árvore das possibilidades para apresentar todos os possíveis casais que serão formados para a seleção.

- d) Agora, use um quadro para representar todos os casais que serão formados.

- e) Utilizando o produto cartesiano faça a representação dos casais que se apresentarão durante a seleção.

- f) Caso Joice também decida participar da seleção, quantas vezes ela teria que se apresentar?

- g) Faça um novo quadro incluindo Joice na formação dos casais.

C.2 Ficha de Atividades 8

FICHA DE ATIVIDADES

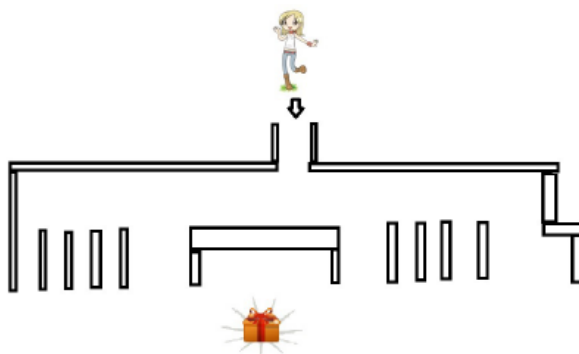
1. Júlia precisa escolher uma senha de bloqueio da tela do seu celular. Essa senha deve ser formada por duas letras seguidas de dois algarismos. Júlia pretende usar as letras A e B e os algarismos 7 e 9. Quantas e quais são as senhas diferentes que Júlia poderá formar, podendo repetir ou não as letras e os algarismos?

2. Caso Júlia decidisse não repetir as letras, quantas e quais seriam as senhas possíveis?

3. E se ela não quisesse repetir letra e nem algarismo?

4. Três irmãos, Léo, Lucas e Luan vão sentar em um banco que possui 3 lugares. De quantas maneiras diferentes eles podem sentar-se nesse banco?

5. Quantos trajetos diferentes Lara pode escolher para chegar até o prêmio?



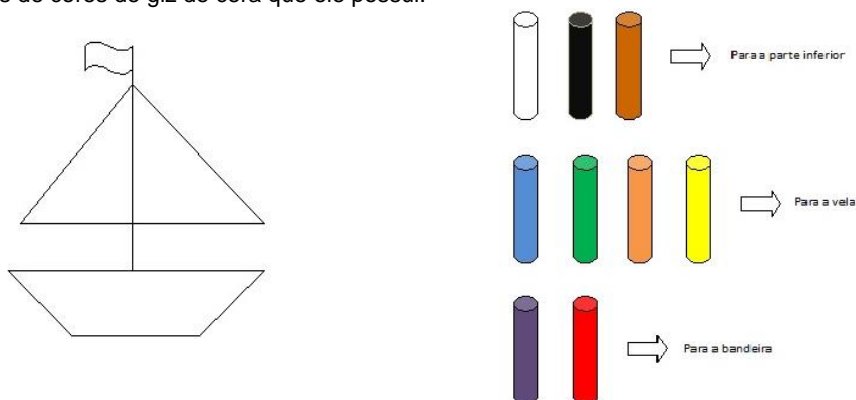
APÊNDICE D

Atividades para o 4^o ciclo do Ensino Fundamental

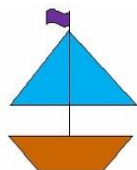
D.1 Ficha de Atividades 9

FICHA DE ATIVIDADES

1. Carlos desenhou um veleiro e pretende pintá-lo. Observe na figura o veleiro de Carlos e as opções de cores de giz de cera que ele possui.



- a) Quantas opções de cores Carlos possui para pintar:
- a parte inferior? _____
 - a vela? _____
 - a bandeira? _____
- b) Carlos escolheu a seguinte combinação de cores para seu veleiro: marrom para a parte inferior, azul para a vela e roxo para a bandeira. Observe:



- E você, que cores escolheria para pintar o veleiro? _____
- c) De quantos modos diferentes Carlos poderia ter pintado o seu veleiro?



2. Lucas vai ao restaurante Bom Paladar, onde pode montar o seu almoço com um tipo de bebida, um tipo de massa e um tipo de sobremesa. Observe o cardápio do restaurante para responder às questões.

RESTAURANTE BOM PALADAR		
BEBIDAS	MASSAS	SOBREMESAS
ÁGUA REFRIGERANTE SUCO DE LARANJA SUCO DE LIMÃO	CANELONE ESPAGUETE LASANHA	BOLO PUDIM SORVETE

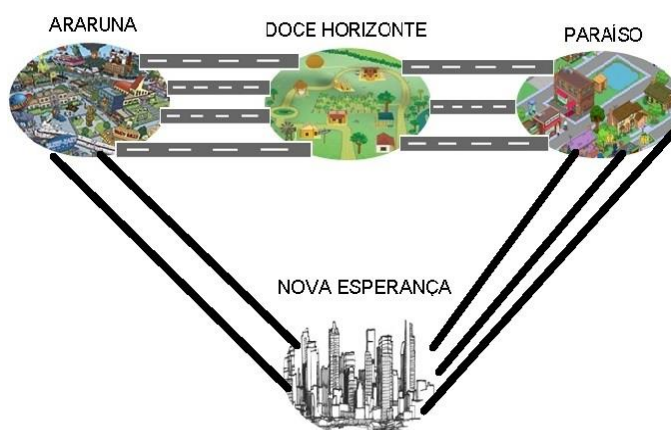


- a) Quantas opções Lucas tem:
- de bebidas? _____
 - de massas? _____
 - de sobremesas? _____
- b) Quantas são as combinações possíveis para o almoço de Lucas? _____
3. Na loja "Tudo para o Lar" existem seis tipos diferentes de lençol e quatro tipos diferentes de fronha. Quantos jogos de cama diversos podem ser formados contendo um lençol e uma fronha? _____
4. Há 3 tipos diferentes de edredons na loja "Tudo para o Lar". De quantas maneiras podem ser formados conjuntos de jogos de cama contendo um lençol, uma fronha e um edredom?

5. A figura a seguir mostra três cidades e as estradas que ligam essas cidades. Beto mora na cidade Araruna e precisa visitar sua avó que mora na cidade Paraíso. De quantos modos diferentes ele pode ir até a cidade Paraíso passando pela cidade Doce Horizonte?



6. Existe outra cidade pela qual Beto pode passar para chegar até a cidade de sua avó além da cidade Doce Horizonte, é a cidade Nova Esperança. De quantos modos Beto pode chegar até Paraíso, seja passando por Doce Horizonte ou por Nova Esperança?

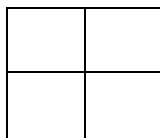


7. Breno foi à papelaria "Lápis e Companhia" para comprar alguns materiais escolares. Nessa loja são vendidos quatro tipos diferentes de cadernos, cinco tipos de lápis e três tipos de borrachas. De quantas maneiras Breno pode fazer uma compra de dois produtos diferentes?

D.2 Ficha de Atividades 10

FICHA DE ATIVIDADES

1. Abaixo se encontra um quadro no qual cada parte pode ser colorida de azul ou de preto. De quantas maneiras o quadro pode ser colorido? _____



2. Um determinado jogo de Loteria Esportiva funciona da seguinte maneira: a pessoa que joga deve tentar adivinhar se ocorrerá uma vitória para um dos times ou um empate nos 13 jogos de futebol. Observe na figura abaixo o modelo de um cartão de Loteria Esportiva.

		 LOTERIA ESPORTIVA • Ganhe acertando os 13 jogos.						
	1	TIME A	x	TIME B	2	D	T	
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								

- Quantos são os modos possíveis para fazer o preenchimento do cartão desse jogo?

3. Uma turma de 20 alunos precisa escolher um representante e um vice-representante. De quantas maneiras isto pode ser feito?

4. Carlos foi até uma montadora de automóveis para escolher o seu carro. Essa montadora oferece os seguintes modelos de carros: sedã, pickup, hatchback, perua e minivan, que podem ser montados em 10 cores diferentes. Outra opção oferecida por essa montadora é a instalação ou não de ar condicionado. Quantas são as opções de carros oferecidas por essa montadora?

5. Para desenvolver um projeto multicultural na escola de Lucas deve ser formada uma comissão composta por 1 professor da área de Matemática, 1 professor da área de Linguagens, 1 professor da área de Ciências da Natureza e 1 professor da área de Ciências Humanas. De quantas maneiras essa comissão poderá ser formada se a escola possui 7

professores de Matemática, 14 professores da área de Linguagens, 6 professores da área de Ciências Naturais e 8 professores da área de Ciências Humanas?

6. Quinze ginastas participam da final da prova de solo em uma competição de ginástica artística. Quantas são as possibilidades para o pódio?
-

7. O Campeonato Mundial de Futebol FIFA de 2018 será realizado na Rússia, esta será a vigésima primeira edição do evento, do qual participarão 32 países. Quantos são os resultados possíveis para primeiro e segundo lugares?
-

8. João é brasileiro e vai viajar para Rússia em 2018 para ver um dos jogos da Copa do Mundo. Ele vai aproveitar a viagem para visitar os seguintes pontos turísticos da Rússia: Praça Vermelha, Catedral de São Basílio, Kremlin, Teatro Bolshoi, Museu Hermitage e Catedral de Santo Isaac.

- a) De quantas maneiras João pode organizar a sequência de pontos turísticos que ele vai visitar?
-

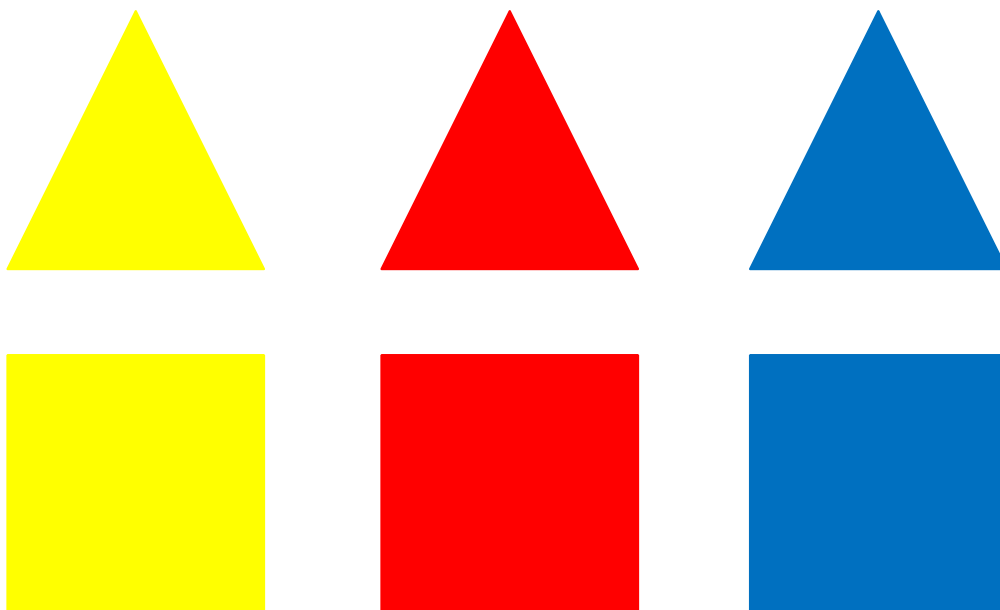
- b) Caso João decida iniciar as visitas pelo Teatro Bolshoi quantas serão as sequências que ele pode organizar?
-

- c) E se ele pretende iniciar pelo Teatro Bolshoi e finalizar as visitas pelo Museu Hermitage, quantas serão as maneiras possíveis de realizar essas visitas?
-

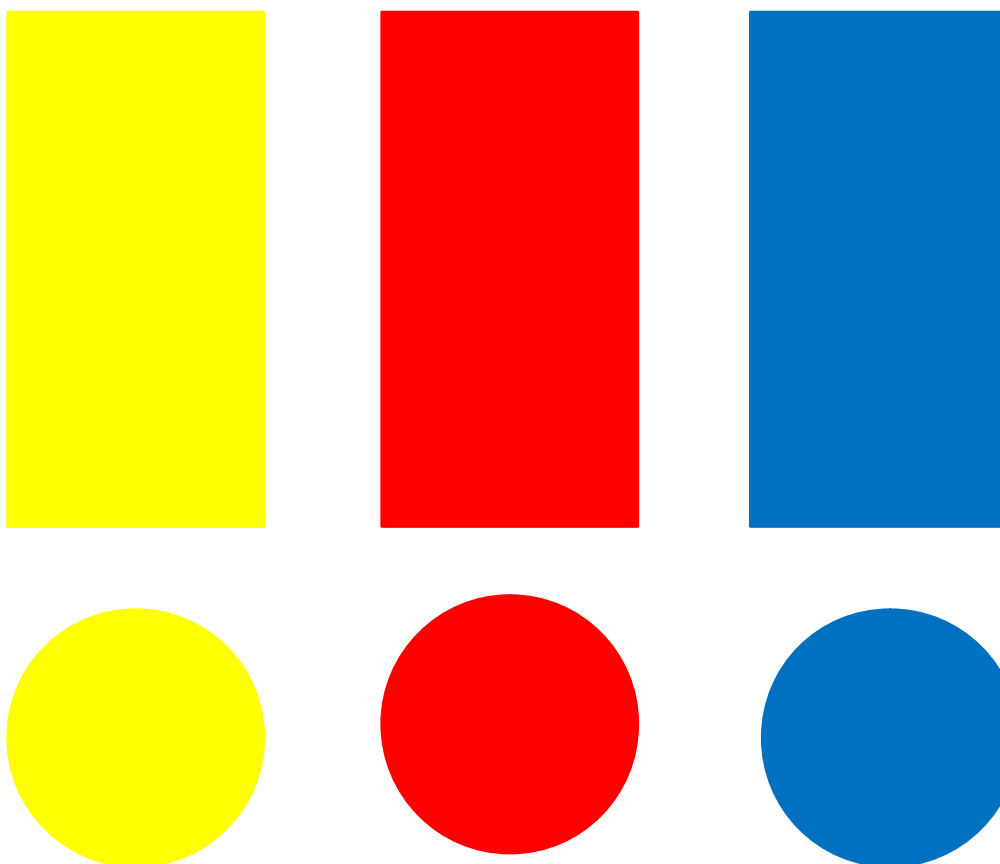
APÊNDICE E

Materiais Manipuláveis

E.1 Blocos Lógicos



Material complementar



E.2 Cédulas e Moedas do Sistema Monetário Brasileiro

- Cédulas

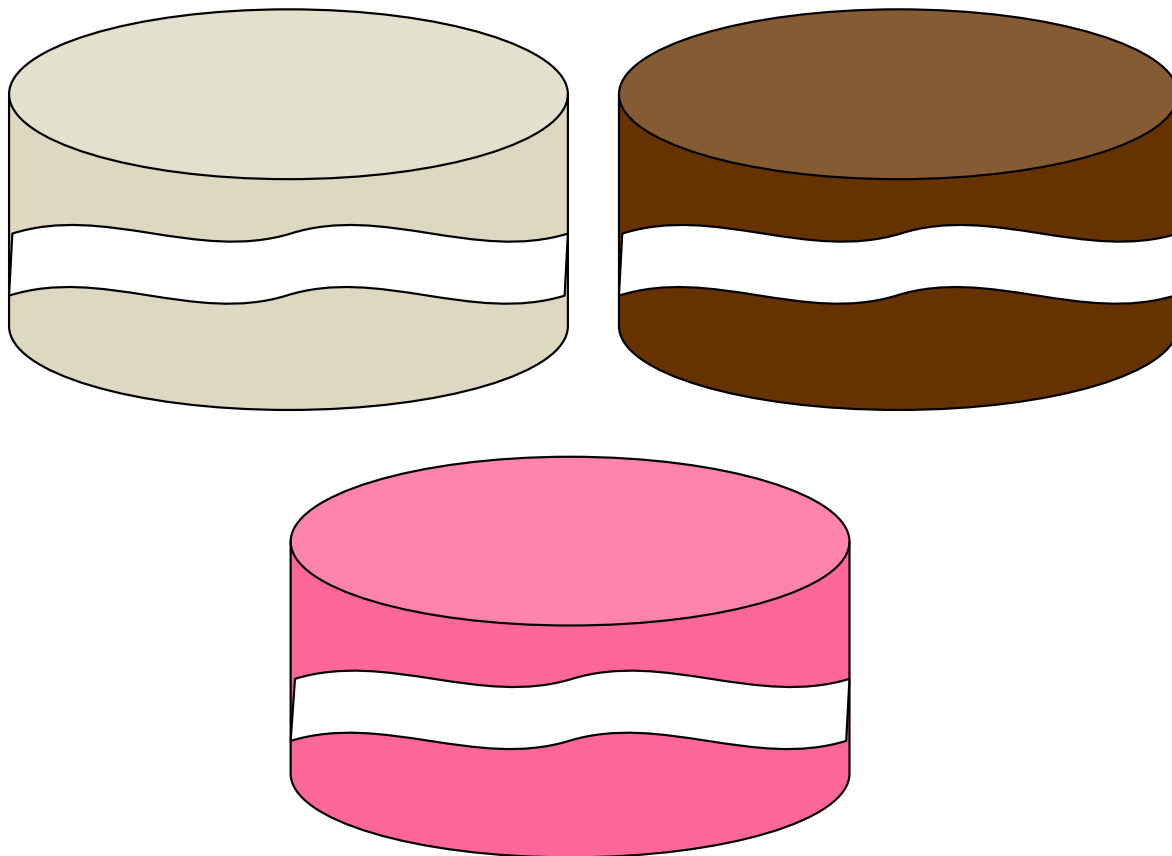


- Moedas

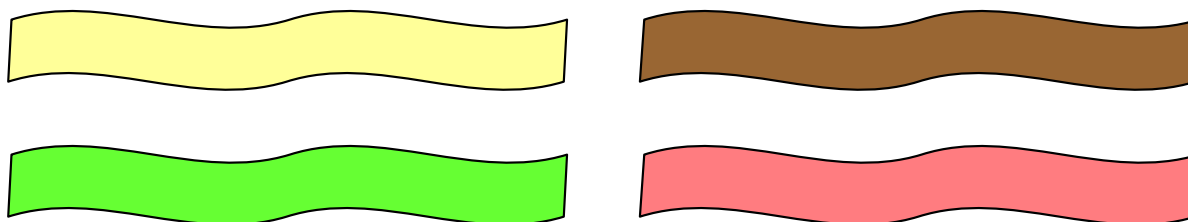


E.3 Material Manipulável “Montando o Bolo”

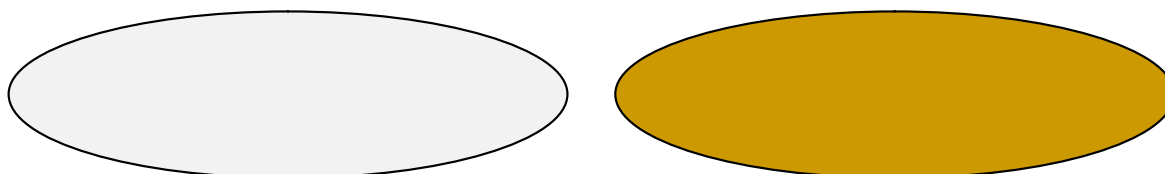
Massas



Recheios



Coberturas



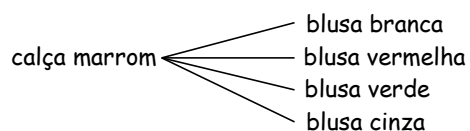
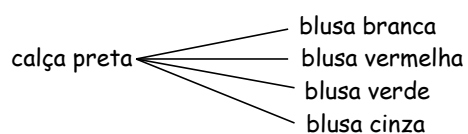
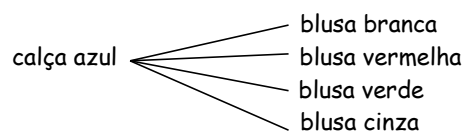
E.4 Cartas do Jogo Árvore das Possibilidades

FRENTE

Nando precisa escolher uma roupa para ir à festa de aniversário de seu amigo Edu. Ele dispõe de 3 calças nas cores azul, preta e marrom e 4 blusas nas cores branca, vermelha, verde e cinza. Quais são as maneiras diferentes que Nando pode escolher um conjunto composto por uma calça e uma blusa para ir ao aniversário de Edu?

1ª etapa
(escolha da calça)

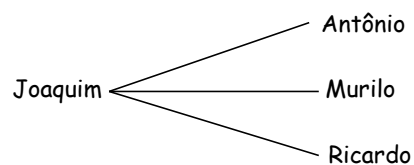
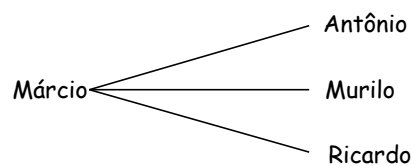
2ª etapa
(escolha da blusa)



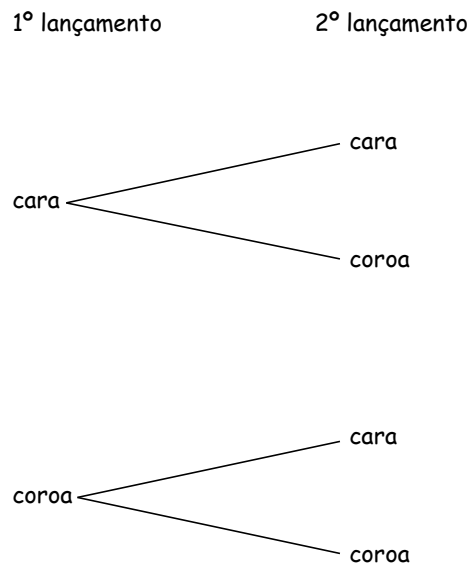
Para a eleição da Associação de Moradores do Bairro Roseiral, Márcio e Joaquim são candidatos a presidente, Antônio, Murilo e Ricardo são candidatos a vice-presidente. As eleições para presidente e vice-presidente são independentes. Quais são os resultados possíveis da eleição?

1ª etapa
(escolha do presidente)

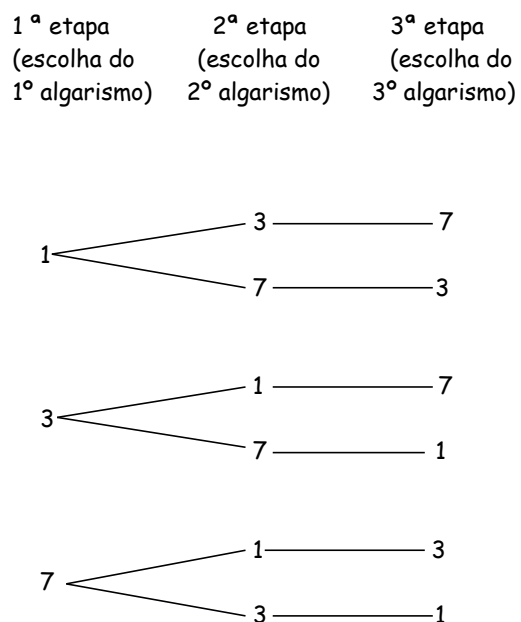
2ª etapa
(escolha do vice)



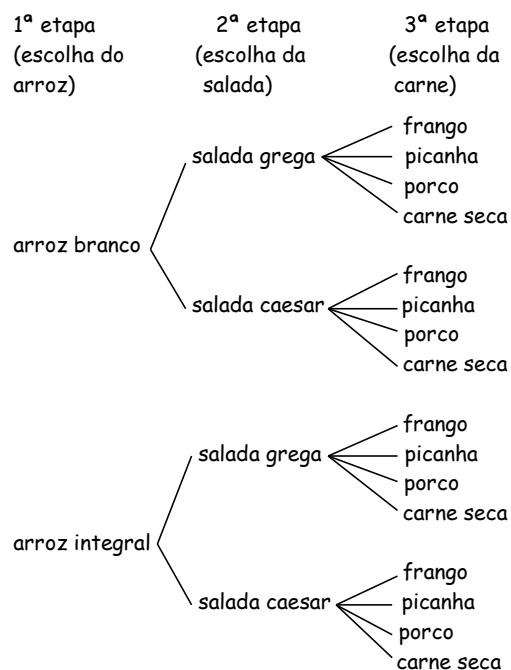
Caio lança uma moeda duas vezes e anota a face voltada para cima. Quais são as possíveis sequências anotadas por Caio?



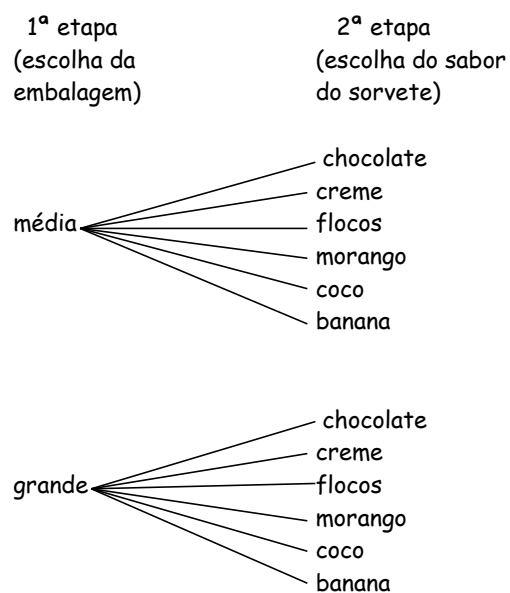
Mário precisa mandar uma carta para seu primo Rodolfo, mas esqueceu o número da casa de Rodolfo. Mário se lembra que o número é composto de três algarismos distintos e é formado pelos algarismos 1, 3 e 7. Quais são os números possíveis para a casa de Rodolfo?



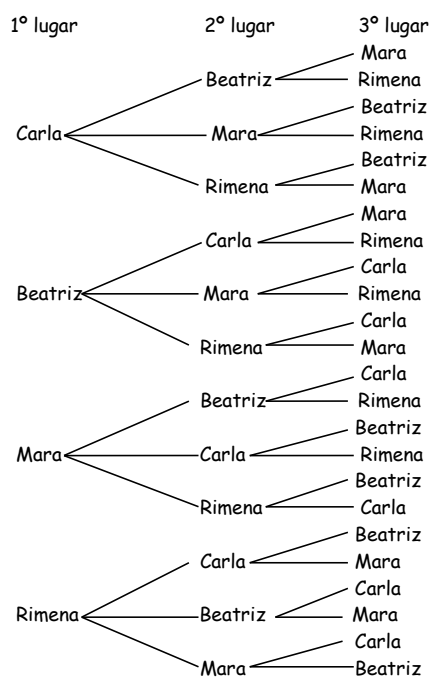
Rosana vai almoçar no restaurante Sabor da Casa. O cardápio do restaurante oferece 2 tipos de arroz: arroz branco e arroz integral; 2 tipos de salada: salada grega e salada caesar e 4 tipos de carne: frango, picanha, porco e carne seca. Quais são as possibilidades de escolha de Rosana?



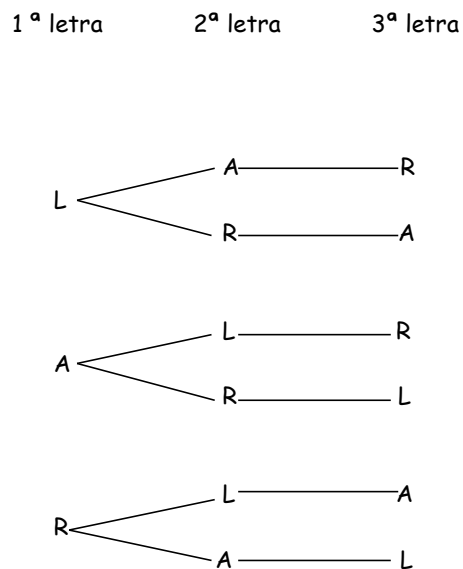
A sorveteria Sabor do Verão oferece 2 tipos de embalagem para sorvete: média ou grande e 6 sabores diferentes de sorvete: chocolate, creme, flocos, morango, coco e banana. Quais são as possíveis escolhas que um cliente dessa sorveteria pode fazer?



Carla, Beatriz, Mara e Rimena estão classificadas para a final da prova de 400 metros de natação. Quais são os resultados possíveis para os três primeiros lugares?



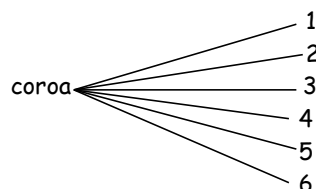
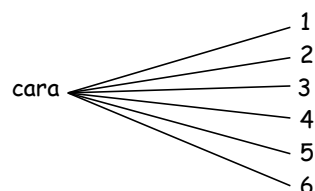
Quais são os anagramas da palavra LAR?



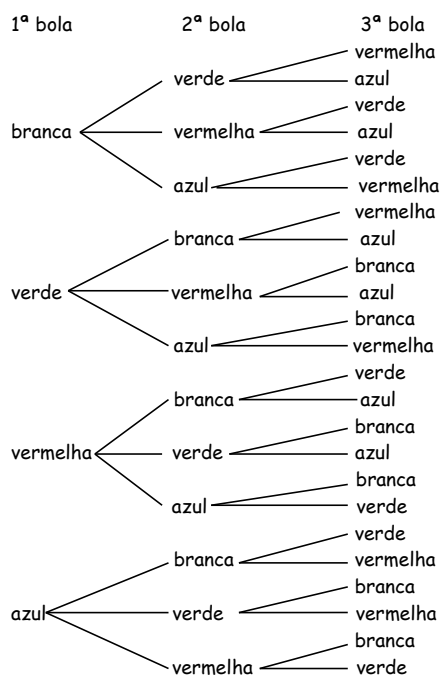
Felipe está participando de um jogo do qual ele precisa lançar um dado e uma moeda e anotar a face voltada para cima de cada um deles. Quais são os resultados possíveis que um participante desse jogo poderá obter?

1º etapa
(lançamento do dado)

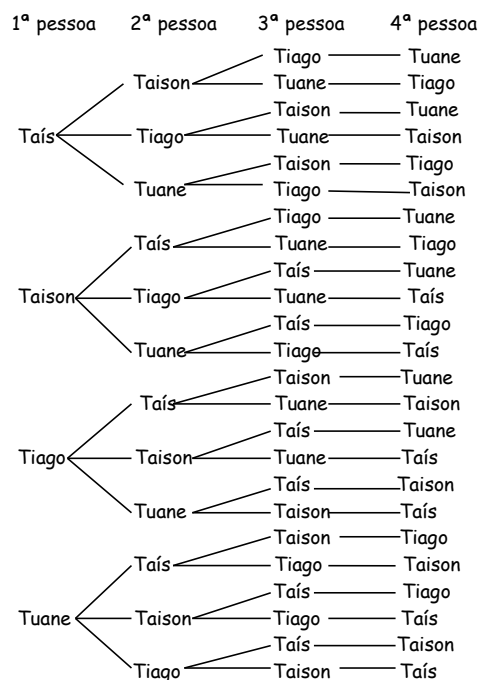
2º etapa
(lançamento da moeda)



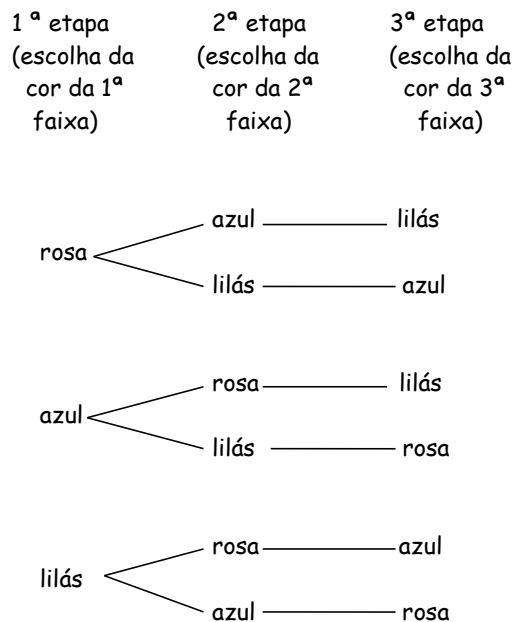
Uma urna contém uma bola branca, uma bola verde, uma bola vermelha e uma bola azul. Patrícia vai retirar três bolas dessa urna. Quais são as possíveis sequências de cores das bolas retiradas por Patrícia?



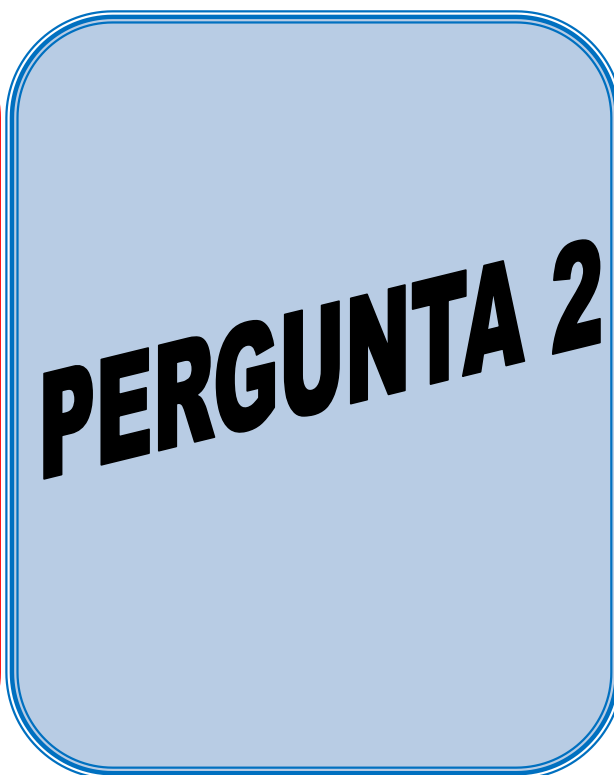
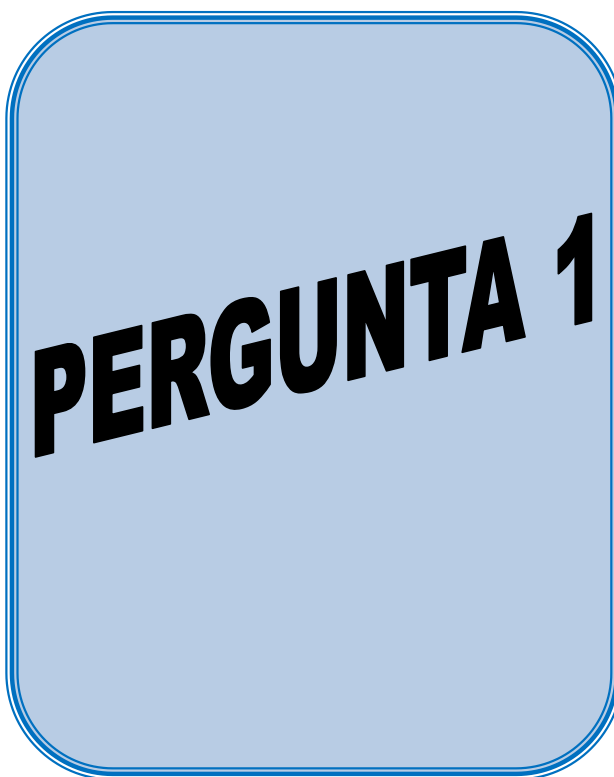
Taís, Taison, Tiago e Tuane vão formar uma fila para esperar o atendimento em uma agência de Correios. Quais são as maneiras possíveis dessa fila ser organizada?



Tiara deseja pintar a bandeira que representa seu clube de xadrez. A bandeira tem três faixas horizontais e a menina deseja pintá-las sem repetir as cores. Quais são as possibilidades de pintura dessa bandeira se Tiara possui tinta rosa, azul e lilás?



VERSO



RESPOSTA 3

PERGUNTA 3

RESPOSTA 4

PERGUNTA 4

RESPOSTA 5

PERGUNTA 5

RESPOSTA 6

PERGUNTA 6

RESPOSTA 7

PERGUNTA 7

RESPOSTA 8

PERGUNTA 8

RESPOSTA 9

PERGUNTA 9

RESPOSTA 10

PERGUNTA 10

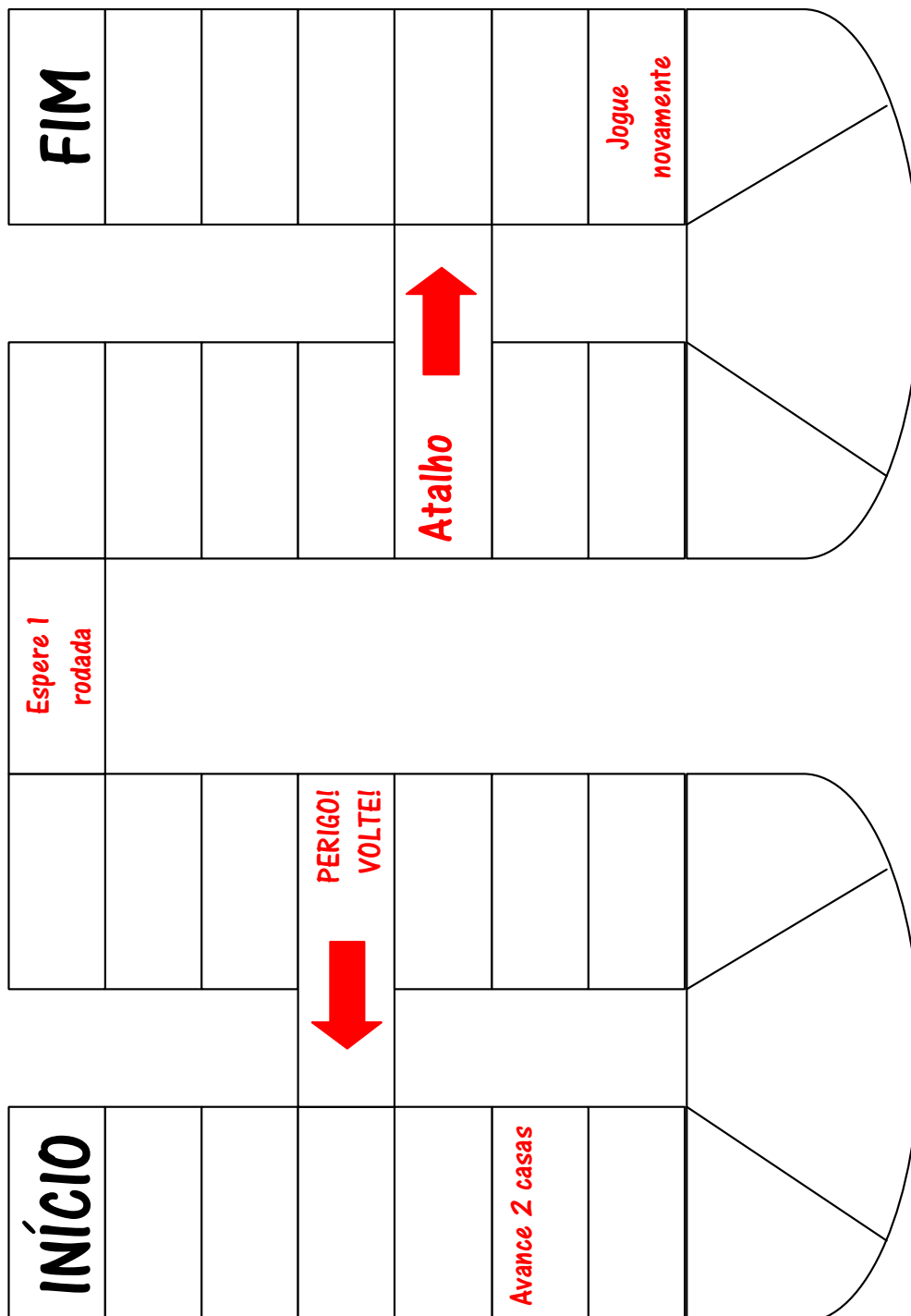
RESPOSTA 11

PERGUNTA 11

RESPOSTA 12


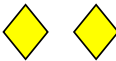

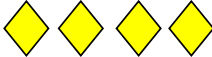

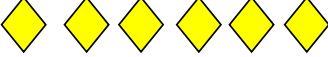

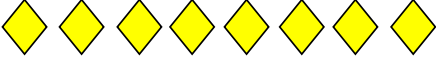
PERGUNTA 12


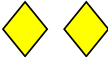

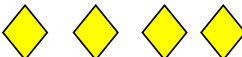

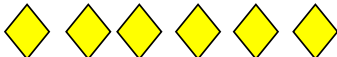
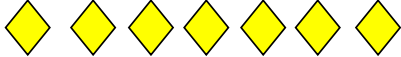
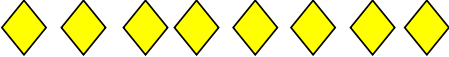
E.5 Tabuleiro do Jogo Trilhando com a Combinatória


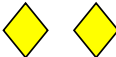

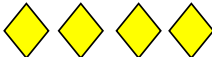

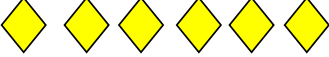

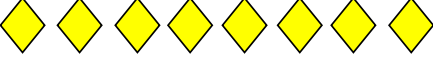



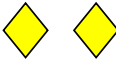


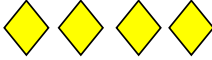

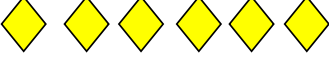

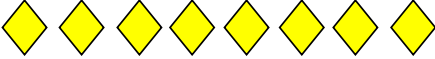
E.6 Fichas do Jogo Trilhando com a Combinatória


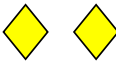

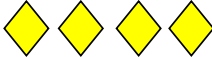

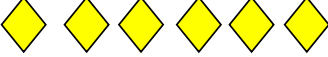

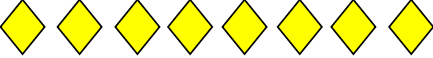
Fichas com problemas

1		2	
<p>Marcos vai a um restaurante disposto a comer um só tipo de massa e a beber um só tipo de suco. O cardápio do restaurante oferece sete tipos diferentes de massa e quatro tipos diferentes de suco. De quantas maneiras Marcos pode fazer sua refeição?</p>		<p>Laila está se arrumando para sair. Ela possui 5 saias e 8 blusas. De quantas maneiras Laila pode se arrumar usando uma saia e uma blusa?</p>	
3		4	
<p>Uma montadora de automóveis oferece seis modelos de carros e nove opções de cores. Combinando o modelo e a cor, quantos carros diferentes essa montadora pode produzir?</p>		<p>Numa classe existem 20 meninas e 15 meninos. Quantos casais diferentes podem ser formados para a dança da quadrilha?</p>	
5		6	
<p>Uma casa de festas possui 7 portas. De quantas maneiras uma pessoa poderá entrar nessa casa de festas e sair usando uma porta diferente da que entrou?</p>		<p>Em uma competição esportiva há 15 atletas. Nenhum pode ganhar mais de um prêmio. De quantas formas um primeiro prêmio e um segundo prêmio podem ser distribuídos?</p>	
7		8	
<p>Jonas possui 6 calças, 10 camisas e 4 pares de sapatos. De quantas maneiras diferentes Jonas poderá se vestir usando uma calça, uma camisa e um par de sapatos?</p>		<p>Um teste possui 10 questões cujas respostas para cada uma das questões são: verdadeiro ou falso. Quantas são as maneiras possíveis para responder a esse teste?</p>	

9		10	
<p>Uma sorveteria oferece 12 sabores de sorvete e 5 sabores de cobertura que podem ser servidos na casquinha ou no potinho. De quantas maneiras diferentes um cliente pode fazer seu pedido?</p>		<p>Tiago lança dois dados simultaneamente e anota as sequências dos resultados. Quantas sequências Tiago irá anotar?</p>	
11		12	
<p>Quantos são os anagramas da palavra RUA?</p>		<p>Laura pretende montar uma senha para bloqueio de tela do seu computador. Essa senha será composta de 4 algarismos. Ela deseja usar os algarismos 1, 2, 3, 4 ou 5. Quantas senhas Laura poderá formar, podendo haver repetição de algarismo?</p>	
13		14	
<p>Jorge reformou sua casa e comprou os algarismos 2, 4, 6 e 8 produzidos em madeira para colocar na fachada da sua casa indicando o número de sua residência. Quantos são os possíveis números da casa de Jorge?</p>		<p>Maria vai reformar sua casa e deseja pintar as paredes, janelas e portas. Ela pode escolher entre as tintas: branca, verde, rosa, azul e salmão para pintar as paredes, marrom e bege para as portas, laranja, amarelo e marfim para as janelas. De quantas maneiras diferentes pode ficar a casa de Maria?</p>	
15		16	
<p>Quantos são os anagramas da palavra ROMA?</p>		<p>A lanchonete "Sabor em Dobro" oferece em seu cardápio uma sobremesa de frutas que pode ser composta de 2 frutas. As opções de frutas para a salada são: banana, maçã, uva, abacaxi, manga, kiwi e morango. Quantas saladas diferentes podem ser feitas?</p>	

17		18	
O professor de Português do 9º ano está desenvolvendo na turma 901 a competição Soletrando. Sabendo que essa turma tem 18 alunos, quantas são as possibilidades de campeão e vice-campeão?		Ana, Beto, Caio, Davi e Eliana estão passeando na praça. Ao avistarem um banco que possui quatro lugares resolvem sentar-se. De quantos modos diferentes, em relação à ordem, os cinco amigos podem se sentar?	
19		20	
Artur, Pedro, Lana, Roberta e Wiliam integram o clube de Matemática da escola. Dois deles devem ser escolhidos para representar a escola em um campeonato regional. De quantas formas essa escolha pode ser feita?		Para ir até a casa de sua tia, Carla precisa utilizar dois meios de transporte. Para a primeira parte do trajeto ela tem a opção de ir de metrô, táxi ou ônibus. Já, para a segunda parte as opções são trem ou mototáxi. De quantas maneiras diferentes Carla pode chegar até a casa de sua tia?	
21		22	
Na lanchonete "Sabor é Mais" são vendidos 7 tipos de lanches, 5 tipos de sucos e 3 tipos de doces. De quantos modos diferentes uma pessoa pode comprar um lanche, um suco e um doce?		Um baralho comum possui 52 cartas. Paulo retira duas cartas desse baralho sem reposição. Quantas são as sequências de resultados possíveis?	
23		24	
Para um campeonato de futebol da escola de Bruno oito times foram formados. Quantos jogos serão realizados sabendo que é um campeonato de dois turnos?		Dezoito atletas participam de um campeonato de natação. Quantas são as possibilidades de resultados para o pódio (1º, 2º e 3º lugares)?	

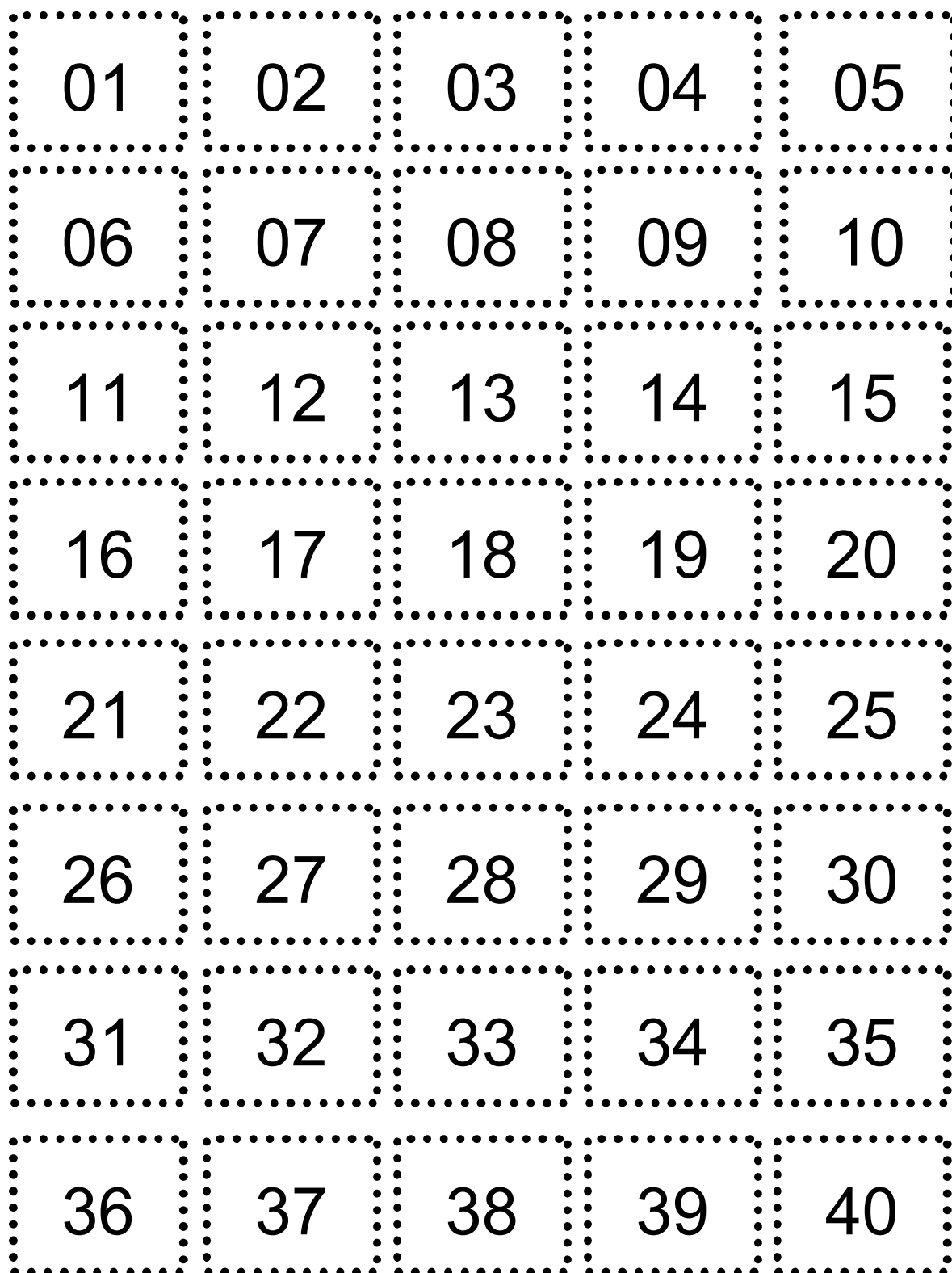
25		26	
<p>Rafael deve pintar a figura abaixo usando uma cor para cada paralelogramo. Ele possui quatro lápis de cor nas cores roxo, vermelho, marrom e preto. De quantas maneiras Rafael poderá pintar a figura?</p> 		<p>Uma urna contém 10 bolas numeradas de 1 a 10. Duas bolas são retiradas ao acaso sem reposição. Quantos são os resultados possíveis para a extração?</p>	
27		28	
<p>Uma artesã que fabrica laços de cabelo utiliza cetim, pérolas e strass em seus laços. Ela aceita encomendas de laços de cetim nas cores rosa, branco, vermelho e azul, pérolas também nas cores rosa, branco, vermelho e azul, strass prata ou dourado. Quantas são as possibilidades de escolha para uma pessoa que deseja encomendar um desses laços?</p>		<p>Na sorveteria "Que Sabor" há 5 tipos de milk-shake: morango, baunilha, doce de leite, chocolate e paçoca. Eles são servidos em embalagens de 3 tamanhos: pequeno, médio e grande. De quantas maneiras possíveis uma pessoa pode comprar um milk-shake nessa sorveteria?</p>	
29		30	
<p>A cantina da escola de Beto fornece uma batida de fruta muito gostosa. Os sabores de fruta que podem ser escolhidos são: abacaxi, manga, goiaba, banana, morango, maçã, amora e maracujá, que podem ser batidas com leite integral ou leite desnatado. De quantas formas uma pessoa pode pedir uma batida escolhendo uma fruta e um tipo de leite?</p>		<p>Uma urna contém 12 bolas numeradas de 1 a 12. Três bolas são retiradas ao acaso com reposição. Quantos são os resultados possíveis para a extração?</p>	
31		32	
<p>Renata está brincando de lançar moedas. A menina joga a moeda para o alto e anota o resultado da face que cai virada para cima, se é cara ou se é coroa. Caso Renata jogue três vezes a sua moeda, quantas são as sequências diferentes de faces que ela poderá obter?</p>		<p>Jaime precisa pintar uma bandeira que possui 6 listras sem repetir as cores. Ele dispõe das cores: amarelo, azul, verde, vermelho, lilás, preto, cinza e rosa. De quantas maneiras diferentes Jaime pode realizar a pintura?</p>	

33		34	
<p>Cinco pessoas devem formar uma fila para aguardar o atendimento no banco, De quantas formas essa fila pode ser organizada?</p>		<p>Um turista pretende visitar duas capitais da Região Sudeste. Sabendo que Rio de Janeiro, São Paulo, Minas Gerais e Espírito Santo são as capitais da Região Sudeste, de quantas formas ele pode fazer sua visita?</p>	
35		36	
<p>Para assistir a um filme, Tales precisa escolher a cadeira em que pretende sentar-se. A sala de cinema possui 15 fileiras e 12 colunas. De quantas maneiras diferentes Tales pode escolher o seu assento?</p>		<p>Uma comissão composta por 11 pessoas precisa eleger um representante e um vice De quantas formas essa escolha pode ser feita?</p>	
37		38	
<p>Um clube de xadrez tem 5 meninos e 6 meninas. Deve ser escolhido um menino e uma menina para participarem de um torneio. De quantas formas essa escolha pode ser feita?</p>		<p>Um confeitaria produz bolos de pote que podem ser escolhidos dentre as opções de 3 tipos de massas diferentes e 12 sabores de recheio. Um cliente que deseja comprar um bolo de pote terá quantas opções de bolos de pote diferentes para escolher?</p>	
39		40	
<p>Para uma peça de teatro o diretor precisa realizar uma seleção para escolher os atores para casal principal. Para a seleção foram inscritos 9 homens e 12 mulheres. Quantos casais poderão ser formados?</p>		<p>Uma senha bancária é composta por seis algarismos, podendo haver repetição. Mariana deve escolher sua senha bancária e para isso ela quer utilizar apenas os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9. Quantas senhas diferentes Mariana poderá formar com esses algarismos?</p>	

Fichas com as respostas

Questão 1 Resposta: 28	Questão 2 Resposta: 40	Questão 3 Resposta: 54	Questão 4 Resposta: 300	Questão 5 Resposta: 42
Questão 6 Resposta: 210	Questão 7 Resposta: 240	Questão 8 Resposta:1024	Questão 9 Resposta: 120	Questão 10 Resposta: 36
Questão 11 Resposta: 6	Questão 12 Resposta: 625	Questão 13 Resposta: 24	Questão 14 Resposta: 30	Questão 15 Resposta: 24
Questão 16 Resposta: 21	Questão 17 Resposta: 306	Questão 18 Resposta: 120	Questão 19 Resposta: 10	Questão 20 Resposta: 6
Questão 21 Resposta: 105	Questão 22 Resposta:2652	Questão 23 Resposta: 56	Questão 24 Resposta:4896	Questão 25 Resposta: 24
Questão 26 Resposta: 90	Questão 27 Resposta: 32	Questão 28 Resposta: 15	Questão 29 Resposta: 16	Questão 30 Resposta:1728
Questão 31 Resposta: 8	Questão 32 Resposta: 20160	Questão 33 Resposta: 120	Questão 34 Resposta: 12	Questão 35 Resposta: 180
Questão 36 Resposta:110	Questão 37 Resposta: 30	Questão 38 Resposta: 36	Questão 39 Resposta: 108	Questão 40 Resposta: 15625

E.7 Fichas Numeradas



E.8 Peões para o Jogo Trilhando com a Combinatória

- Dobre o pino ao meio, depois dobre as perninhas para fora, passe cola e para finalizar abra as patinhas.

