Mestrado Profissional em Matemática

PROFMAT

UFSJ

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI

UMA ABORDAGEM SOBRE CÁLCULO DE ÁREAS COM BASE NA DECOMPOSIÇÃO DE FIGURAS

ROBSON RESENDE DE MIRANDA

São João del-Rei, MG - 2017

Robson Resende de Miranda

UMA ABORDAGEM SOBRE CÁLCULO DE ÁREAS COM BASE NA DECOMPOSIÇÃO DE FIGURAS.

Dissertação apresentada ao Programa PROFMAT da UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Francinildo Nobre Ferreira.

São João del-Rei, MG - 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Divisão de Biblioteca (DIBIB)
e Núcleo de Tecnologia da Informação (NTINF) da UFSJ,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M671a

MIRANDA, Robson Resende de.
UMA ABORDAGEM SOBRE CÁLCULO DE ÁREAS COM BASE NA DECOMPOSIÇÃO DE FIGURAS / Robson Resende de MIRANDA ; orientador Francinildo Nobre Ferreira. -- São João del-Rei, 2017.
139 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) -- Universidade Federal de São João del-Rei, 2017.

1. Geometria. 2. Cálculo de Área. 3. Decomposição. 4. Equivalência. 5. Equicomposição. I. Ferreira, Francinildo Nobre , orient. II. Título.

ROBSON RESENDE DE MIRANDA

UMA ABORDAGEM SOBRE CÁLCULO DE ÁREAS COM BASE NA DECOMPOSIÇÃO DE FIGURAS

Esta dissertação foi aprovada para obtenção do título de Mestre em Matemática pela UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei e pelo programa PROFMAT em 01 de dezembro de 2017.

Banca examinadora:

____

Orientador: Prof. Dr. Francinildo Nobre Ferreira
Universidade Federal de São João del-Rei

____

Prof. Dr. Ronaldo Ribeiro Alves
Universidade Federal de São João del-Rei

____

Prof. Dr. Sandro Rodrigues Mazorche
Universidade Federal de Juiz de Fora

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

A memória de minha mãe, que com toda simplicidade,

sempre me apontou o caminho,

mesmo quando eu não queria ver.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por todas as bênçãos que em meus 40 anos de vida me proporcionou, algumas delas resultaram neste trabalho.

Ao professor Francinildo por seu entusiasmo nas aulas, por me guiar nesta experiência e por toda a parceria e empenho na concretização deste trabalho.

A Vicente e Rose, meus entes queridos, que durante esses quase três anos de curso, foram minha injeção de ânimo e serenidade.

A todo corpo docente do PROFMAT do *Campus Santo Antônio* da UFSJ pela acolhida, pela organização, e por não fazerem do curso algo mais difícil do que ele já é.

Um agradecimento especial, a professora Marianna, cujo acompanhamento durante o curso foi um pilar de equilíbrio para a turma.

Aos companheiros de curso com os quais a convivência foi inspiradora. Obrigado a todos por dividirem comigo a paixão por essa disciplina e as dificuldades na sua prática.

Um agradecimento especial a Andréa, Danila, Eliane, Expedito e PH, pelo companheirismo, dedicação e cumplicidade durante todo o curso. Vocês foram anjos sem os quais eu não chegaria até aqui.

Aos meus alunos de todas as épocas, conteúdos e escolas, a quem devo o fato de ainda me motivar por esta profissão.

RESUMO

O processo de decomposição de figuras para o cálculo de área é um procedimento importante na compreensão do conceito de área. Sua origem remota a antiguidade, e está ligada a divisão de terras pelos egípcios e mesopotâmicos. Historicamente, a decomposição relaciona-se a diversos métodos de aproximação, inclusive a origem do cálculo Integral. Dois termos importantes dentro deste estudo são equivalência e equicomposição, cuja sinonímia vai ser estabelecida no teorema de Bolyai-Gerwein. Uma prática para o ensino de área deve valorizar diversos aspectos, além das fórmulas. Nesse sentido a proposta do trabalho também é apresentar além de aspectos teóricos, atividades práticas para que o professor do Ensino Fundamental, a utilize, em sala de aula. Há também o passo a passo de diversos procedimentos de construção geométrica e de demonstrações que se relacionam com o assunto.

Palavras-chave: Geometria: Cálculo de área, decomposição, equivalência, equicomposição, teorema de Bolyai-Gerwein, construções geométricas, teorema de Pitágoras, atividades para o ensino de área, demonstrações; Ensino de geometria: abordagens diversificadas, história da geometria.

ABSTRACT

The process of decomposition of figures for area calculation is an important procedure in understanding the concept of area. Its remote origin is antiquity, and is linked to division of land by the Egyptians and Mesopotamians. Historically, the decomposition is related to several methods of approximation, including the origin of the Integral calculation. Two important terms within this study are equivalence and equicomposition, whose synonymy will be established in the Bolyai-Gerwein theorem. A practice for the teaching of area must value several aspects, besides the formulas. In this sense, the proposal of the work is also to present in addition to theoretical aspects, practical activities for the elementary school teacher to use in the classroom. There is also the step-by-step of various procedures of geometric construction and demonstrations that relate to the subject.

Keywords: Geometry: Area calculation, decomposition, equivalence, equicomposition, Bolyai-Gerwein theorem, geometric constructions, Pythagorean theorem, area teaching activities, demonstrations; Teaching geometry: diversified approaches, history of geometry.

1. Introdução

O ponto de partida para este trabalho surgiu nas diversas vezes em que durante a minha prática em sala de aula pude constatar a dificuldade de alunos tanto do ensino fundamental, quanto do ensino médio, em enxergar possíveis decomposições de uma figura. Para mim, era decepcionante que a grande maioria dos alunos não demostrassem iniciativa em exercícios que demandassem dessa construção que eu considerava uma habilidade simples e óbvia.

Um problema típico que envolve essa habilidade de decompor figuras geométricas é o cálculo de área de polígonos. Conceituar de maneira eficaz área implica em reconhecer que o todo é a soma de partes, conceito fundamental para se estabelecer uma unidade de área e equivalência de regiões.

Neste trabalho trataremos de decomposições de figuras geométricas planas em triângulos e quadriláteros para cálculo de áreas. Esse processo teve sua origem ainda na antiguidade, sendo provável que tenha sido o grande impulsionador no desenvolvimento da geometria euclidiana.

Embora os Parâmetros Curriculares Nacionais priorizem o conceito de área enquanto medida de superfície, destacam a necessidade de compreensão dos mecanismos de composição e decomposição de figuras para uma real compreensão do conceito de superfície. No terceiro ciclo recomenda-se, por exemplo, que em vez de fórmulas, o cálculo de área deve ser feito prioritariamente, por estimativa usando-se a decomposição da região em figuras de áreas conhecidas (quadrados, triângulos, retângulos).

De acordo com a versão final da Base Nacional Comum Curricular que foi entregue em abril de 2017 ao Conselho Nacional de Educação:

> Assim, a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume e nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam “fazer a quadratura de uma figura”). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 2º grau. (BNCC, 2017, p.228)

Dado o volume de informações presentes, o texto terá em seu corpo cinco capítulos. No primeiro, apresentarei um resumo da construção histórica do conceito de área. No segundo será apresentado um conceito para área e uma abordagem típica para o conteúdo no ensino fundamental, trabalhando a apresentação e dedução de fórmulas por meio de decomposição e composição. No capítulo 3, o foco serão as palavras equivalência e equicomposição, seus significados, implicações e o modo como se relacionam através do teorema de Bolyai-Gerwein. O próximo capítulo fará uma breve explanação sobre a pedagogia do ensino de áreas e apresentará propostas de atividades para o ensino de área, sem a aplicação direta de fórmulas. O capítulo final apresenta demonstrações do teorema de Pitágoras como aplicações diretas sobre o tema equivalência de áreas, outras deduções de fórmulas e alguns exemplos de aplicações de decomposição, como o método da Exaustão e o método infinitesimal.

Ao optar por essa divisão, buscou-se criar uma lógica que favorecesse a aplicação deste trabalho pelo professor no Ensino Fundamental. Como os cinco capítulos tem aproximadamente o mesmo número de páginas, uma forma instigante de utilizar esse texto seria dividir o mesmo segundo os capítulos para apresentações em grupo.

As figuras que ilustram esse trabalho foram criadas com o uso do programa GEOGEBRA. Pela variedade das mesmas percebe-se que o contato do professor de matemática com tal programa é muito enriquecedor na pedagogia escolar, já que o mesmo permite desde construções geométricas até a criação de curvas que são gráficos de funções.

2. Breve história da Geometria com foco no estudo de áreas

O objetivo deste capítulo é visitar a história da matemática no que diz respeito ao surgimento e evolução do cálculo de área. Para tanto, descreve-se como as civilizações egípcias e mesopotâmicas encaravam esse processo; visita-se os diversos filósofos gregos que foram responsáveis pela criação, evolução e normatização dos processos para cálculos de áreas; menciona-se a importância dos árabes para a preservação da geometria grega durante a idade média; e descreve-se um pouco da vida e obra dos pensadores matemáticos responsáveis pelo surgimento do Cálculo e da Geometria Analítica, devido às relações dessas novas disciplinas com o cálculo de área.

2.1 A geometria empírica dos egípcios e babilônicos

Segundo historiadores, o grande impulso para o surgimento da geometria foram problemas empíricos relacionados às atividades agrícolas e de engenharia. A própria palavra geometria, aponta neste sentido, uma vez que "geometrein" no grego significa "medir terras", pois "geo" = terra, "metrein" = medir.

A noção de distância provavelmente foi um dos primeiros conceitos geométricos a ser desenvolvido. A necessidade de delimitar terras levou à noção de figuras geométricas simples, tais como retângulos, quadrados e triângulos. Por ser uma das primeiras civilizações que nos legaram registros, admite-se que a Geometria surgiu às margens do rio Nilo, diante da necessidade de medir, redistribuir e repartir terras daquela sociedade. Escritos de Heródoto (c.485 - 420 a.C.) fortalecem essa hipótese.

> Sesóstris... repartiu o solo do Egito entre seus habitantes... Se o rio levava qualquer parte do lote do homem... o rei mandava pessoas para examinar, e determinar por medida a extensão exata da perda... Por esse costume, eu creio, é que a geometria veio a ser conhecida no Egito, de onde passou para Grécia. (BOYER, 1998, p.6 apud Heródoto)

Dos registros das civilizações antigas que chegaram até nós constata-se que os egípcios e os povos da mesopotâmia tinham uma geometria prática bastante desenvolvida. A escrita em tábuas de argila cozida dos babilônios e a conservação dos papiros e pedras pelo clima seco do Egito permitiram que esses registros chegassem até o nosso dia. O mesmo ao que se saiba, não aconteceu em outras civilizações mais antigas.

Duas fontes consagradas que permitem as conclusões anteriores são o Papiro de Rhind, que remonta a 1650 a.C., e apresenta dados sobre trigonometria, aritmética, equações, área e volume; e o Papiro de Moscou, que foi escrito por volta de 1850 a.C., e apresenta problemas de natureza geométrica e algébrica.

2.2 Os primeiros geômetras gregos e suas escolas

A civilização grega desenvolveu uma geometria que é a fundamentação daquela que se conhece hoje, um saber que não era puramente empírico. Curiosamente, as fontes primárias dos geômetras gregos se perderam e o que chegou até os dias de hoje são relatos que datam de vários séculos após os originais terem sido escritos.

> Os gregos insistiram em que os fatos geométricos deviam ser estabelecidos, não por procedimentos empíricos, mas por raciocínios dedutivos; as verdades geométricas deviam ser obtidas no gabinete de estudos, e não no laboratório. Em suma, os gregos transformaram a geometria empírica, ou cientifica dos egípcios e babilônios antigos no que poderíamos chamar de geometria “sistemática” ou “demonstrativa”. (EVES, 1992. p.7)

Segundo historiadores, o primeiro grego a se dedicar a um estudo de geometria usando um raciocínio dedutivo, foi Tales (c. 624-546 a.C.), natural de Mileto. Ele visitou o Egito e teve contato com a prática geométrica daquele país, e ao retornar, quis provar por raciocínios lógicos aquilo que havia constatado na prática. Foi o fundador de uma escola de pensamento, filosófico, a Escola Jônica (também chamada Ioniana ou Hilozoísta).

> Ocorre, com Tales, uma mudança de perspectiva no estudo da geometria. A geometria e a aritmética até então praticadas na Mesopotâmia e no Egito tinham caráter prático e se limitavam a aplicar procedimentos numéricos para resolver problemas específicos, sem maiores preocupações com a estrutura intelectual ou com os princípios filosóficos da matemática envolvida. A tradição clássica atribui a Tales de Mileto a primeira ação no sentido de organizar a geometria como estudo abstrato e dedutivo. (MOL, 2013, p. 32)

Um outro grego que se destacou foi Pitágoras(c.570-495 a.C.), natural de Samos (ilha próxima a Mileto). Provavelmente foi discípulo da Escola Jônica, e possivelmente também visitou o Egito e a Babilônia. Ele fundou na região da Crotona, uma irmandade religiosa, filosófica e cientifica chamada Escola Pitagórica que rapidamente suplantou a Escola Jônica. Em meio a cerimônias e ritos cabalísticos, dividiram o conhecimento de seu interesse em quatro grandes áreas do saber: aritmética, música, geometria e astronomia. Entre os feitos importantes de Pitágoras, para além do Teorema que leva seu nome, temos os primeiros passos na construção de uma Teoria dos Números e a descoberta da incomensurabilidade.

Um discípulo de Pitágoras, Hipócrates (c. 470 – 410 a.C.) natural de Quios, foi o primeiro a tentar, uma apresentação lógica da geometria sob a forma de uma única cadeia de proposições baseada em algumas definições e suposições iniciais. Com ele começou uma sequência de trabalhos, de vários geômetras, que tiveram um relativo sucesso, e que culminaram na obra "Os Elementos", escrito por Euclides de Alexandria no século III a.C..

2.3 Euclides e "Os elementos"

"Os Elementos" de Euclides pode ser considerado o primeiro livro didático da história. Segundo Boyer (1998, p.72), não era simplesmente um compêndio de todo conhecimento geométrico produzido até então, mas um texto introdutório cobrindo toda matemática elementar: a Teoria dos números, a geometria plana e espacial e a álgebra geométrica grega. Constitui-se de 465 proposições divididas em 13 volumes. Os seis primeiros são sobre geometria elementar, os três seguintes sobre Teoria dos números, O livro X sobre incomensurabilidade, e os três últimos sobre geometria espacial.

Embora não seja o único trabalho de Euclides, Os Elementos é sem dúvida o mais importante. A obra representa o auge do discurso lógico desenvolvido pelos matemáticos gregos. Esse discurso em sua constituição costuma ser precedido de um conjunto de explanações e definições que objetivam o seu entendimento; em seguida, apresenta-se um conjunto de informações iniciais, chamadas axiomas e/ou postulados, sobre os quais é construído o raciocínio. Estas informações devem ser escolhidas de maneira que sua veracidade possa ser facilmente aceitável pelo leitor. Essa é a axiomática material, que constitui por si mesma a principal contribuição dos gregos antigos à matemática e em especial à geometria.

> Em um sistema desse tipo, hoje denominado axiomático, a escolha das proposições primeiras, ou postulados, devia atender três exigências principais: consistência (a partir delas não se poderiam deduzir logicamente proposições contraditórias), completude (entre quaisquer duas proposições contraditórias formuladas nos termos do sistema, uma pode ser corretamente demonstrada) e independência (nenhum postulado pode ser demonstrado a partir dos demais). (BENJAMIM, 2011, p.3)

2.4 A noção de área para os gregos

No Livro I de Os Elementos, Euclides expressa a ideia de área, associando a mesma a igualdade entre figuras. Isto pode ser verificado no seguinte enunciado:

PROP. XXXVI. TEOR.: Os paralelogramos, que estão postos sobre bases iguais, e entre as mesmas paralelas, são iguais.

PROP. XXXVII. TEOR.: Os triângulos, que estão postos sobre a mesma base, e entre as mesmas paralelas, são iguais.

Esta noção de equivalência de figuras é o principal instrumento de trabalho dos geômetras gregos para o cálculo de áreas. Segundo Ávila (2001, p 2), enquanto nos dias de hoje trabalhar com área resume-se a memorizar fórmulas do tipo: a área de um triângulo é metade do produto de sua base pela altura; para os gregos, a área de um triângulo é metade da área do paralelogramo que se obtém pela junção de dois triângulos iguais ao triângulo dado, que por sua vez é igual a área de um retângulo de mesma base e altura, e assim por diante.

Até Euclides (c. 300 a.C.) muito já se havia produzido sobre geometria. Além dos pitagóricos, outras escolas como a Escola Eleia de Parmênides (c. 530 - 460 a.C.) e a Academia de Platão (c. 427 - 347 a.C.) dedicaram-se a geometria e desenvolveram ideias importantes para a consolidação da mesma. Três problemas parecem ter sido os principais impulsionadores desse desenvolvimento: a trissecção de um ângulo; a duplicação do cubo e a quadratura do círculo.

> Esses problemas viriam a desafiar os matemáticos por mais de dois milênios, a ponto de a expressão “quadratura do círculo” ter se tornado sinônimo de problema impossível de ser resolvido. Demonstrações para a impossibilidade de resolver esses problemas seriam produzidas apenas no século XIX. (MOL; 2013. p 38)

2.5 Eudoxo e o método da Exaustão

Um dos grandes nomes que pertenceu a academia de Platão foi o de Eudoxo (c. 408-355 a.C.) de Cnidus. Aluno e colaborador de Platão ele logo se destacou como maior matemático e astrônomo de seu tempo. Tamanha a importância de seu trabalho que dois volumes de “Os elementos” de Euclides tratam de ideias desenvolvidas por ele: o Livro V, trata de sua teoria das Proporções; e o Livro XII, trata do cálculo de áreas e volumes pelo Método da Exaustão proposto por ele, que consiste em buscar por aproximações sucessivas a área a ser medida, por falta ou por excesso, a partir da área de figuras conhecidas.

Vale lembrar que era uma prática entre os gregos não focar no aspecto puramente algébrico da geometria. Assim, criavam atalhos geométricos usando conceitos que permitissem driblar aquilo que ainda não conheciam. Eudoxo criou um atalho deste tipo em sua demonstração de que “a área de dois círculos estão em proporção igual aos quadrados dos seus diâmetros”. Neste caso, ele driblou a existência dos números incomensuráveis que tornava impossível a criação de uma unidade de medida satisfatória, utilizando o conceito de área. Segundo Guedes (2013, p 31), o método utilizado por Eudoxo para provar sua afirmação foi inscrever nos dois círculos diferentes polígonos regulares com mesmo número de lados, cuja razão das áreas fosse conhecida.

2.6 Arquimedes e o método da Exaustão

Posteriormente a Euclides, viveu Arquimedes (c. 287-212 a.C.). Nascido em Siracusa na Sicília, filho de astrônomo, e membro da aristocracia, sempre esteve em contato com diferentes conhecimentos. Estudou em Alexandria, com os discípulos de Euclides e acumulou conhecimentos em geometria, engenharia, mecânica e astronomia. Ao voltar para casa tinha status de sábio e sua fama correu o mundo antigo.

> Arquimedes tornou-se, julgo eu, uma imagem popular do homem sábio, mais ou menos como aconteceu com Einstein em nossa época, e muitas histórias de distração estão ligadas ao seu nome. (AABOE, 2013, p.93)

Arquimedes foi um escritor e inventor muito prolífico tendo enveredado não só pela matemática, mas também pela Física. Seus trabalhos não são compilações de predecessores, mas criações altamente originais. Cerca de dez tratados matemáticos sobreviveram até nós, mas há indícios de outros. Segundo EVES, (1992, p. 10) o volume de textos e a qualidade dos mesmos levam os historiadores a rotular Arquimedes como o maior matemático da antiguidade.

> Não é possível encontrar em toda a geometria problemas mais difíceis e complicados, ou explicações mais simples e lúcidas. Alguns atribuem isso à sua genialidade; enquanto outros acham que foram produzidos por esforço e trabalho incríveis, embora aparentemente sejam resultados fáceis e obtidos sem esforço. (AABOE, 2013, p. 89 apud Plutarco)

Em geometria, Arquimedes lidou com várias questões relacionadas a área de figuras: ele desenvolveu procedimentos para calcular às áreas de figuras planas curvilíneas como círculo e segmento de parábola[1;] ele também desenvolveu as fórmulas corretas para as áreas da superfície esférica e da calota esférica, além do volume da esfera e do segmento esférico[2] de uma base. Além disso, um dos trabalhos mais notáveis do mesmo foi o método dos perímetros[3] para encontrar um valor aproximado para π. Seu resultado, um número entre as frações 223/71 e 22/7, resulta em 3,14 em uma aproximação com 2 casas decimais.

Outro feito importante foi a construção da Espiral de Arquimedes, procedimento que lhe permitiu uma aproximação para a retificação da circunferência[4.] Já em seu tratado “Sobre Conóides e Esferóides”, Arquimedes estudou os sólidos de revolução gerados por curvas como hipérboles, parábolas e elípses. Em resumo, dois mil anos antes do desenvolvimento do cálculo integral Arquimedes já demonstrava domínio sobre o mesmo.

> Para achar áreas e volumes, o versátil Arquimedes usou sua própria versão primitiva do cálculo integral, que, de alguma maneira, é muito semelhante, quanto ao espírito, ao cálculo atual. Numa carta a Eratóstenes, Arquimedes expôs seu “método da alavanca” para descobrir fórmulas de áreas e volumes. Mas, quando publicava provas para essas fórmulas, ele utilizava o método de exaustão para se ajustar aos padrões de rigor da época (ALVARENGA, 2006 apud BOYER)

Devido a utilização do método da Exaustão em várias de suas obras, Arquimedes acabou tendo seu nome associado a ele, mesmo dando todo o crédito de sua criação a Eudoxo. Eis o enunciado do axioma de Arquimedes: Dadas duas grandezas que tem uma razão (isto é, nenhuma delas sendo zero), pode-se achar um múltiplo de qualquer delas que seja maior que a outra. Partindo deste axioma, por uma “reductio ad absurdum”, era possível construir o seguinte raciocínio descrito em EVES (2004, p.419): Se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não

---

1 Segmento de Parábola: segmento cujas extremidades são pontos distintos de uma parábola.
2 Segmento Esférico: é cada um dos sólidos obtidos ao se cortar uma esfera por um plano.
3 Método dos Perímetros: conhecido também como método clássico para cálculo do π, consiste em calcular os perímetros dos polígonos regulares inscritos e circunscritos em uma mesma circunferência de raio unitário, aproximando assim o comprimento da circunferência da medida do limite perímetro dos perímetros.
4 Retificação da circunferência: procedimento geométrico que pretende transformar a circunferência em um segmento de reta com medida igual ao comprimento da circunferência, usando apenas régua e compasso.

menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.

Outros trabalhos são relacionados a Arquimedes, embora tenham se perdido durante a história. Entre eles está a fórmula para cálculo da área de um triângulo a partir das medidas de seus lados, que acabou sendo atribuída a Heron (c.10 – 70 d.C.) de Alexandria. Outro, que também chegou até nossos dias, incompleto, é o Stomachion[5].

2.7 Os últimos grandes geômetras gregos

Um outro célebre geômetra grego foi o astrônomo Apolônio (c. 262-194 a.C.) natural de Perga. Sua principal obra foi Secções Cônicas, um estudo completo a respeito das curvas que superou a todos os anteriores nesse assunto.

Depois de Apolônio vieram outros geômetras como Héron de Alexandria (c.75 d.C.), Menelau (c.100 d.C.), Claudio Ptolomeu (c. 85 – 165 d.C.) e Papus (c.320 d.C.). Todos eles tiveram seus nomes gravados na História da Matemática em pequemos trabalhos, mas é a Papus que devemos os maiores agradecimentos. Foi graças a sua obra “Coleção”, que é um guia sobre os trabalhos que o antecederam, que muito do que foi produzido naquele período anterior, chegou até nos.

2.8 O período de transição

Segundo Boyer (1998), como todas as ciências, durante a Idade Média não houve significativo conhecimento produzido na Europa. Foram os árabes e hindus que preservaram grande parte daquilo que havia nos tratados e estudos gregos. Embora apreciassem os trabalhos gregos, os árabes tinham duas ressalvas com

---

5 Stomachion: espécie de quebra cabeças atribuído a Arquimedes, que consiste em um quadrado dividido em 14 peças, das quais todas tem área comensurável com o quadrado original. Estudos sugerem que o Stomachion era um problema de probabilidade para Arquimedes que buscava responder quantas figuras distintas era possível formar com aquelas peças.

relação aos mesmos: o rigor do método e o descarte do aspecto empírico dos estudos. Exatamente por isso, eles não deram continuidade ao desenvolvimento de argumentos geométricos, mas fizeram da álgebra e da aritmética os seus principais interesses.

Um destaque isolado de produção de conhecimento geométrico desse período é o trabalho de Brahmagupta (c. 598 - 668 d.C.) astrônomo e matemático sobre quadriláteros cíclicos (inscritíveis).

Segundo EVES (1992), no século XI que os clássicos gregos da matemática retornaram a Europa, através de traduções latinas feitas por eruditos cristãos que se deslocavam até centros de ensino mulçumanos, através da abertura das relações comerciais da Europa Ocidental com o mundo árabe.

Durante os séculos XII e XIII foram fundadas as primeiras universidades europeias: Bolonha (1088), Oxford (1096), Salamanca (1134), Paris (1150), Cambridge (1209), Montpellier (1220) e Pádova (1222), entre outras. As universidades eram, segundo a própria origem de seu nome, comunidades de professores e estudiosos, e exatamente por isso, tiveram grande importância na retomada dos estudos em geometria pelos europeus.

O século XIV foi marcado por conflitos e problemas, e improdutivo com relação à matemática. Já o século XV testemunhou uma confluência de mudanças e descobertas, como a invenção da imprensa e as grandes navegações, e também, a tradução de vários tratados gregos para o latim, que favoreceu e impulsionou toda uma nova arrancada na construção de conhecimentos: era o Renascimento que começava.

2.9 Kepler e o método infinitesimal

Johannes Kepler (1571-1630), foi um célebre astrônomo e matemático alemão, sendo uma das figuras-chave do renascimento cientifico. Nascido em família humilde, tornou-se professor por necessidade, queria ser matemático, mas a astronomia estava no seu caminho. A certa altura da vida, depois de já ter publicado seu primeiro trabalho Mysterium Cosmographicum Kepler foi convidado por Tycho Brahe (1546-1601) para ajudá-lo em seu projeto de construção de novo modelo planetário. Após a morte de Brahe, depois de vários anos de trabalho, Kepler conseguiu graças a precisão daqueles dados criar um novo modelo para as orbitas astronômicas.

O modelo criado por Kepler estabelece o seguinte: I. Os planetas descrevem orbitas elípticas em torno do Sol, estando o mesmo ocupando um de seus focos; II. O raio vetor que une o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais. Para a sua segunda afirmação Kepler propôs um método bastante engenhoso e simples, que ficou conhecido como método infinitesimal para o cálculo de áreas. Cada região da elipse é subdivida em triângulos com bases muito pequenas cuja altura é a distância até o foco. Com isso, ele dava os primeiros passos a caminho do cálculo.

Kepler interessou-se bastante por cônicas e criou varias inovações neste sentido. Uma delas foi o princípio da continuidade que lhe permitiu deduzir que a parábola tem dois focos, mas um deles está no infinito. Outra invenção de Kepler foi um método para avaliar volumes de sólidos, de forma similar ao seu estudo sobre áreas. Neste sentido, o principal avanço em relação a Arquimedes foi que o método infinitesimal dispensa a dupla “reductio ad absurdum.”

2.10 Galileu e seu discípulo Cavalieri

Galileu Galilei (1564-1642) foi um expoente do renascimento cientifico. Seus tratados envolvem filosofia, física, astronomia e matemática. Seus trabalhos em Física influenciaram Newton em sua mecânica. Entre suas invenções relacionadas a matemática está uma balança hidrostática, uma espécie de compasso geométrico que lhe permitia medir ângulos e áreas.

Devido a sua pluralidade, a impressão que se tem sobre a matemática de Galileu era de que ela não estava 100% desenvolvida. De acordo com Boyer (1998,p.224) “Galileu se assemelhava a Dürer no fato de ambos observarem rapidamente o aparecimento de curvas novas, mas nenhum dos dois tinha suficiente preparo matemático para analisá-las”.

Uma das preocupações matemáticas para Galileu era o infinito, sobretudo o infinitamente grande e o infinitamente pequeno. Ainda segundo Boyer (1998,p.224-226), em “Os dois principais Sistemas”(1632) ele coloca três personagens para discutir sobre os sistemas de Ptolomeu e Copérnico: Salviati (um estudioso bem informado cientificamente), Sagredo (um leigo inteligente) e Simplicius (um aristotélico obtuso). Durante a discussão, do infinito em geometria, Salviati levou Simplicius ao infinito em aritmética, sugerindo assim que houvesse uma correspondência entre todos os inteiros e os quadrados perfeitos. Mas nesse ponto Galileu esbarrou na propriedade fundamental dos conjuntos infinitos de que parte dele pode equivaler ao conjunto todo.

Foi Boaventura Cavalieri (1598-1647), sacerdote jesuata e discípulo de Galileu quem ao esbarrar com a mesma dificuldade que Galileu, conseguiu melhor defini-la e contorná-la em seu trabalho sobre a área como segmentos indivisíveis, exposto na sua obra “Geometria indivisibilibus continuorum” (1635). Em uma carta para Galileu ele afirma:

> Quanto a mim, não me arrisquei a dizer que o contínuo seja composto por indivisíveis, mas mostrei que a proporção existente entre os contínuos, não difere da existente entre o amontoado de indivisíveis (desde que sejam tomados paralelos, quando falamos de linhas retas e de superfícies planas, as quais são os indivisíveis particulares que considerei). (PINTO, 2008, p.49 apud CAVALIERI).

Neste tratado, Cavalieri consegue dar embasamento ao cálculo infinitesimal proposto por Kepler. Uma outra comparação inevitável é com o raciocínio de "O método de Arquimedes', que até então estava perdido.

Sobre o método de Cavalieri, Boyer (1998,p226) afirma que não havia nenhum processo de aproximação continua, nem omissão de termo, pois ele usava uma estrita correspondência um a um dos elementos em duas configurações. Nenhum elemento era descartado, qualquer que fosse a dimensão. Tal método ainda frequenta os livros de geometria espacial como "o teorema de Cavalieri" de seguinte enunciado: "Se dois sólidos têm alturas iguais, e se secções feitas por planos paralelos às bases e a distancias iguais dessas estão sempre numa dada razão, então os volumes dos sólidos estão também nessa razão".

2.11 Descartes e "*A Geometria*"

Segundo Mol (2013),

> A Renascença, em quase todos os campos do conhecimento, caracterizou-se pela retomada da tradição clássica grega. No entanto, a matemática no período renascentista foi marcada pelo desenvolvimento da álgebra, representando uma continuidade com respeito à tradição medieval árabe e europeia.

Do início da Renascença italiana até o francês René Descartes (1596-1650) vários foram os estudiosos que se enveredaram pela matemática. A maioria deles, contudo ao contrário dos gregos que recorriam a geometria para resolver os mais diferentes assuntos, usavam a álgebra como método, sobretudo devido a herança árabe, embora ainda não houvesse uma formalização para tanto.

Essa formalização acontece quando Descartes publica em 1637, em um dos três apêndices de seu Discurso do Método, o texto intitulado de A Geometria. A primeira parte desse texto trata de como os cálculos de aritmética se relacionam com as operações de geometria; a segunda parte, trata de como a multiplicação, a divisão, e a extração de raízes quadradas podem ser efetuadas geometricamente.

Segundo Boyer (1998, p. 233) em seu Discurso do Método, do qual A geometria é apêndice, Descartes já discute os méritos relativos da álgebra e da geometria, sem, contudo, mostrar parcialidade por nenhuma delas. De um lado ele acusa a geometria de usar, pesadamente, diagramas que fatigam a imaginação desnecessariamente; do outro, ele acusa a álgebra de ser uma arte confusa e obscura que embaraça a mente. O objetivo de seu método, portanto era duplo: primeiro, libertar a geometria de diagramas; segundo, dar novo significado às operações de álgebra por meio de interpretação geométrica.

Na prática, a obra de Descartes trouxe para a geometria muita flexibilidade, pois diante de um problema geométrico era possível construir equações que poderiam ser solucionadas por álgebra. Já para Álgebra, ele trouxe além da representação geométrica, uma notação bem semelhante a que temos hoje.

Assim é a Descartes que devemos as expressões para o cálculo de área que temos hoje, não pela sua descoberta, mas por que foi graças a sua metodologia de transformação de geometria em álgebra, que se é possível escrevê-las.

Contudo, segundo Mol (2013) não existem elementos suficientes em “A geometria” para que se reconheça a geometria analítica: Descartes não trabalha sistematicamente com sistema de coordenadas retangulares, fórmulas para distâncias, inclinações e ângulos de retas.

A principal relação entre Descartes e a geometria analítica pode ser observada no parágrafo abaixo que é a base para o conceito de pares ordenados.

> Se queremos resolver qualquer problema, primeiramente supomos que a solução já está efetuada e damos nomes a todas as linhas que parecem necessárias para construí-la. Tanto para as que são desconhecidas como para as que são conhecidas. Em seguida, sem fazer distinção entre linhas conhecidas e desconhecidas, devemos percorrer a dificuldade da maneira mais natural possível, mostrando as relações entre essas linhas, até que seja possível expressar uma única quantidade de dois modos. A isto chamamos uma Equação, uma vez que os termos de uma dessas duas expressões são iguais aos termos da outra. (ROQUE, 2012, p. 254)

2.12 Fermat e as suas contribuições

Contemporâneo de Descartes, Pierre de Fermat (1601-1665) foi um advogado e politico francês da cidade de Toulouse. A matemática era seu hobby, nunca tendo atuado profissionalmente na mesma por isso era conhecido como o “Príncipe dos Amadores”. Interessava-se pelos problemas clássicos enquanto passatempo e seus trabalhos só chegaram até nós devido a intervenção do Pe. Marin Mersenne (1588-1648), entusiasta de matemática que se correspondia com as principais mentes de sua época e ajudava na divulgação de seus trabalhos.

> Mersenne viajou pela França e pelo exterior divulgando as últimas descobertas. Em suas viagens ele tentou se encontrar com Pierre de Fermat e acabou se tornando o último contato de Fermat com outros matemáticos. A influência de Mersenne sobre o Príncipe dos Amadores deve ter sido significativa, e sempre que estava impossibilitado de viajar, o padre mantinha sua amizade com Fermat e os outros escrevendo muito. Depois da morte de Mersenne, seu quarto foi encontrado atulhado de cartas enviadas por 78 correspondentes diferentes. (SINGH, 2014, p. 43-44)

Fermat e Descartes trabalhando independentemente construíram as bases da chamada Geometria Analítica. Fermat chegou a conclusões muito parecidas às de Descartes, em que definia como tratar de lugares geométricos de forma algébrica, como visto no seu trabalho intitulado “Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos”, que tinha por objetivo reconstruir o trabalho perdido de Apolônio, baseado no que restara sobre ele no texto de “A Coleção de Pappus”. Segundo EVES (1998, p. 238) o princípio fundamental da geometria analítica expresso por Fermat é que “Sempre que numa equação final encontram-se duas quantidades incógnitas, temos um lugar, e a extremidade de uma delas descrevendo uma linha, reta ou curva".

Além da contribuição de Fermat ao surgimento da Geometria Analítica que compreende em um novo método de se tratar a geometria, ele também se interessou pelo problema clássico de quadratura da hipérbole[6] e da parábola[7], e

---

6 Quadratura da hipérbole: problema clássico que consiste em obter um quadrado com mesma área que uma região delimitada por uma hipérbole e uma assíntota (ou eixo).

também deixou sua contribuição. Apolônio já havia tratado disso com sucesso em suas “Seções Cônicas”, mas o método que Fermat desenvolveu se baseava na divisão da área sob a curva em retângulos e não em triângulos como os seus predecessores, e graças a isso ele construiu uma equação que na prática só poderia ser obtida por integração, utilizado álgebra simples e o significado de progressão geométrica.

Outros trabalhos de Fermat foi a contribuição para a teoria dos números com o Pequeno Teorema de Fermat; um método para encontrar máximo e mínimo de parábolas; um método para encontrar tangentes a curvas; e o problema de teoria dos números que levantou mais discussões durante a idade moderna e contemporânea: conhecido como “Último ou Grande teorema de Fermat” [8]

2.13 A invenção do cálculo diferencial e integral

Conforme já foi comentado, até meados do século XVII, vários foram os matemáticos que desenvolveram trabalhos calculando área através de aproximações infinitesimais. Faltava uma unificação e sistematização desses conhecimentos da mesma forma que Euclides havia feito com a geometria grega 2000 anos antes. Curiosamente, foram dois os matemáticos, Newton e Leibniz, que trabalhando independentemente tiveram essa ideia.

Isaac Newton (1642-1727) foi um físico e matemático inglês, estudou e lecionou em Cambridge. Entre os seus feitos estão a elaboração de um conjunto de leis para o movimento, um estudo sobre gravitação universal, um estudo sobre a

---

7 Quadratura da parábola: problema clássico que consiste em obter um quadrado de mesma área que a região limitada por uma parábola cortada por uma reta.
8 É impossível para um cubo ser escrito como a soma de dois cubos ou uma quarta potência ser escrita como uma soma de dois números elevados a quatro, ou, em geral, para qualquer número que seja elevado a uma potência maior do que dois ser escrito como a soma de duas potências semelhantes.

natureza das cores, e vários tratados sobre filosofia e teologia. Na matemática Newton se destaca pelo desenvolvimento do cálculo que descreveu em três concepções distintas: uma concepção infinitesimal, o método das fluxões e o método das primeiras e últimas razões. Também escreveu sobre as potências das séries binomiais criando o teorema que leva o seu nome.

Já Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) foi um filósofo, jurista e matemático alemão. Além do cálculo, desenvolveu outras importantes contribuições para a matemática como a criação de um sistema binário de numeração; a generalização do teorema binominal para expressões do tipo $(x + y + z)^n$; o primeiro referencial ocidental aos determinantes; o uso da palavra função com o significado que conhecemos hoje; e várias propriedades sobre números complexos. Também foi responsável por uma teoria sobre o movimento baseada em energia e um dos primeiros a falar de relatividade.

O seguinte comparativo pode ser feito entre as duas origens do cálculo: Os cálculos de Newton e Leibniz começam por caminhos distintos. Newton estuda curvas e Leibniz sequências. O trabalho de Newton tem fortes ligações com termos naturais, usados por ele para descrever o movimento, e ele buscou definir o infinitamente pequeno como uma grandeza física, no caso o tempo. Já Leibniz, não definiu o infinitamente pequeno tomando um atalho, que é uma comparação entre 2 segmentos de reta que satisfaziam uma proporção, $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{t}$ e tomando por definição, $dy = \frac{y}{t}\,dx$. Só que nenhum dos dois explicou muito bem estes conceitos em sua primeira edição.

O trabalho de Newton não teve muita rigidez quanto às notações, o que atrapalhou sua compreensão e introduziu termos que podem causar estranheza como fluxões (diferenciais) e fluentes (integrais). Já Leibniz adotou um simbolismo padrão para seus estudos, em que d indicava as quantidades infinitamente pequenas (as diferenciais), e $\int$ para a soma de tais quantidades ou para a soma do produto de uma ordenada pela quantidade infinitamente pequena ($\int y.dx$). Caracterizou, assim, o símbolo $\int$ para a quadratura de curvas (as integrais).

> Newton era fundamentalmente um geômetra, Leibniz era fundamentalmente um algebrista e havia boas e profundas razões para isso. Para Newton a geometria, ou o cálculo como ele o desenvolveu, era a tentativa matemática para descrever as leis da natureza. Interessava-se pela física em sentido lato e a física tinha lugar no mundo da geometria. Se se queria perceber como as coisas funcionavam pensava-se em termos do mundo físico, pensava-se em termos de figuras geométricas. Quando desenvolveu o cálculo qui-lo tão próximo quanto possível do contexto físico que estava por trás. Usou, pois argumentos geométricos porque assim se mantinha próximo ao significado. Por seu lado, Leibniz tinha a intenção, a ambiciosa intenção de formalizar toda a matemática, tornando-a uma grande máquina algébrica. (ATIYAH, 2002, p 14-15)

Na prática, os dois definem duas operações, as diferenciais e as integrais, com uma propriedade muito importante, de ser uma o inverso da outra, que é conhecida como o “Teorema Fundamental do Cálculo”.

Este resultado revolucionou o cálculo de área uma vez que integrar é calcular a área sob uma curva. O desenvolvimento do conceito de função, e a noção de limite, foram fundamentais para que o cálculo diferencial e integral tomasse a forma atual. À medida que esses conceitos foram desenvolvidos, o cálculo passou a ter um caráter algébrico maior que geométrico.

Matemáticos como Johann Bernoulli (1667 - 1748) e Daniel Bernoulli (1700 - 1782), Brook Taylor (1685 – 1731), Leonhard Euler (1707 - 1783), Colin Maclaurin (1698 - 1746), Joseph Louis Lagrange (1736 -1813), Pierre-Simon de Laplace (1749 - 1827), Adrien-Marie Legendre (1752 - 1833), Joseph Fourier (1768 - 1830), Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857) e Bernhard Riemann (1826 - 1866) foram fundamentais para que se construísse a teoria de cálculo que temos hoje.

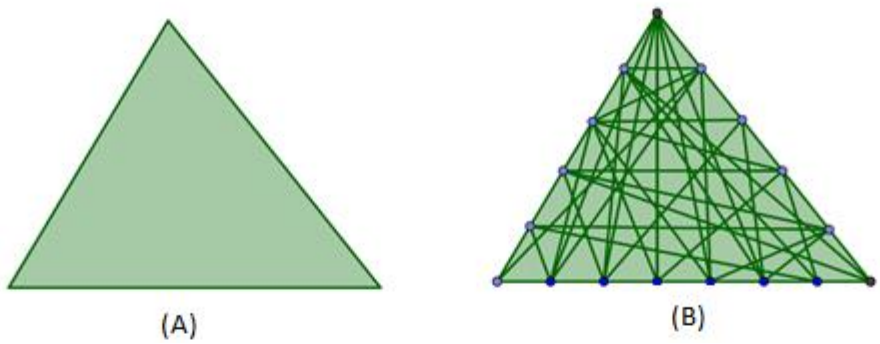
3. Uma abordagem para o ensino de área

Neste capítulo constrói-se um conceito de área a partir de regiões triangulares e em seguida cria-se uma sequência didática para a dedução e apresentação das principais fórmulas para o cálculo de área dos principais polígonos A ideia deste capítulo é apresentar uma visualização via decomposição de polígonos em triângulos e retângulos, para as expressões do cálculo de áreas. Isto não esgota o conteúdo, sendo uma proposta de abordagem para o Ensino Fundamental. Nos capítulos 4 e 5 complementaremos as ideias aqui tratadas.

3.1 A construção de um conceito para área

A fim de conceituar área, Barbosa (2012, p.175) define região triangular, como o conjunto de pontos do plano formado por todos os segmentos cujas extremidades estão sobre os lados de um triângulo. A Figura 1(B) apresenta alguns desses segmentos. O triângulo é a fronteira da região triangular, Figura 1(A). Os pontos da região que não pertencem a fronteira formam o interior da região.

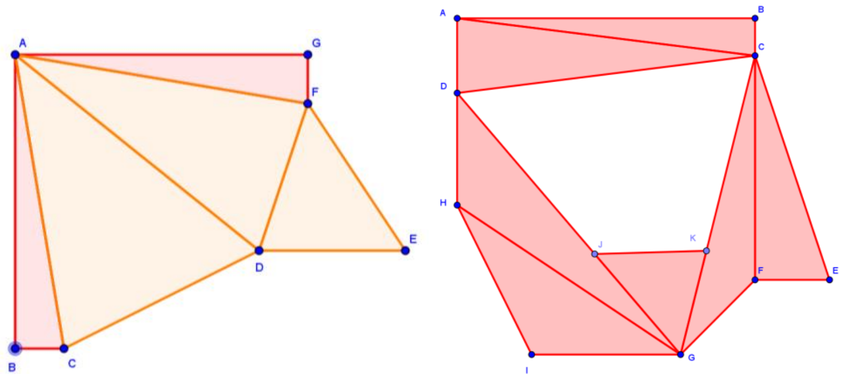
Figura 1 - Região triangular



(Fonte: Robson Resende de Miranda)

Com esta definição, o autor prossegue definindo região poligonal como a união de um número finito de regiões triangulares que duas a duas não tenham pontos interiores em comum. Um ponto será interior a região poligonal se houver uma região triangular contida na região poligonal que possua este ponto em seu interior. A fronteira da região poligonal é constituída por pontos da região que não pertencem ao seu interior. Na figura 2 temos dois exemplos de regiões poligonais decompostas em regiões triangulares.

Figura 2 - Regiões poligonais



(Fonte: Robson Resende de Miranda)

A partir destas definições, o autor constrói os seguintes axiomas para definir área:

- A toda região poligonal corresponde um número positivo, o qual é chamado área da região.
- Se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais que duas a duas não tenham pontos interiores em comum, então sua área é a soma das áreas daquelas regiões.
- Regiões triangulares limitadas por triângulos congruentes tem áreas iguais

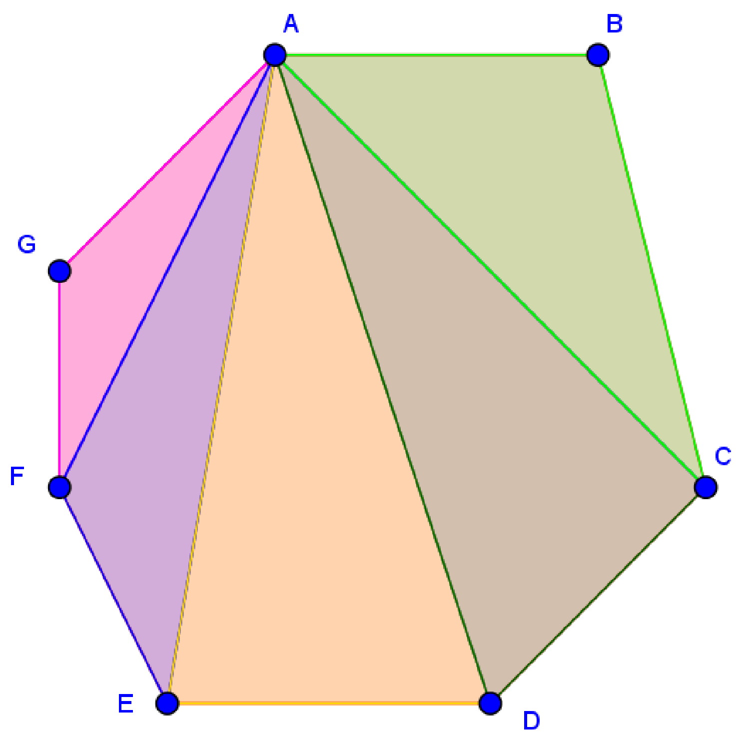
Nestes três axiomas estão contidas as principais ideias que devem ser destacadas sobre o conceito de área:

- Área é uma medida (número) que pode ser obtida por cálculo para toda região poligonal.
- Para se calcular uma área podemos decompor uma região poligonal em regiões menores cuja área se conheça. A área da região será a soma das áreas menores.

- Caso uma região poligonal tenha por fronteira um polígono convexo podemos nos referir a sua área como sendo á área do polígono. Nesse caso, triângulos congruentes tem a mesma área, e esta ideia contém o princípio de equivalência[9].

Um exemplo de decomposição em triângulos é que todo polígono convexo[10] pode ser decomposto em $n-2$ triângulos traçando-se todas as diagonais[11] de um mesmo vértice, como na Figura 3.

Figura 3 - Polígono convexo de 7 lados decomposto em 5 triângulos



(Fonte: Robson Resende de Miranda)

[9] Equivalência é a propriedade de duas figuras distintas possuírem a mesma área.
[10] Um polígono é convexo quando toda reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais $(n-2)$ vértices num mesmo semiplano dos dois que ela determina.
[11] Diagonal de um polígono é um segmento cujas extremidades são vértices não consecutivos do polígono.

3.2 Uma sequência para apresentação das fórmulas para o cálculo de área de alguns polígonos

Embora não deva se restringir ao trabalho com fórmulas, o ensino de área deve abordá-las, uma vez que o aluno deve entender que geralmente a área é uma medida obtida não por dados diretos, mas por cálculos. Compreender a maneira como estes cálculos são feitos proporciona ao aluno a consolidação da ideia de medida. A sequência apresentada a seguir é bem comum e para torná-la mais atrativa buscou-se apresentar mais que uma forma de demonstrar cada fórmula através de decomposição e equivalência.

3.2.1 Área de um retângulo e a natureza multiplicativa dos arranjos retangulares

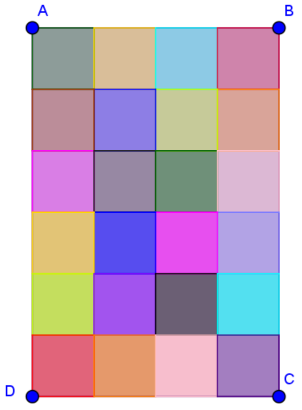
Quando, a fim de se realizar uma contagem, organizamos os elementos em linhas e colunas, de tal forma que toda linha e toda coluna, cada uma dentro de sua espécie, tenham a mesma quantidade de elementos, estamos fazendo um arranjo retangular.

Se preenchermos completamente um retângulo com quadrados unitários[12] dispostos em linhas e colunas, o total de quadradinhos do retângulo será exatamente a área deste, e pode ser calculado multiplicando-se o número de quadrinhos de cada coluna pelo número de quadrinhos de cada linha, como ilustrado na Figura 4, Para contagem multiplicamos o número de quadrados por linha (4) pelo número de quadrados por coluna (6) resultando em 24 quadradinhos

Os gregos já dominavam essa relação e provavelmente ela foi a primeira fórmula desenvolvida para área, sendo usada na dedução de outras.

[12] Quadrado unitário é aquele cujo lado mede uma unidade.

Figura 4 - Arranjo retangular de quadradinhos



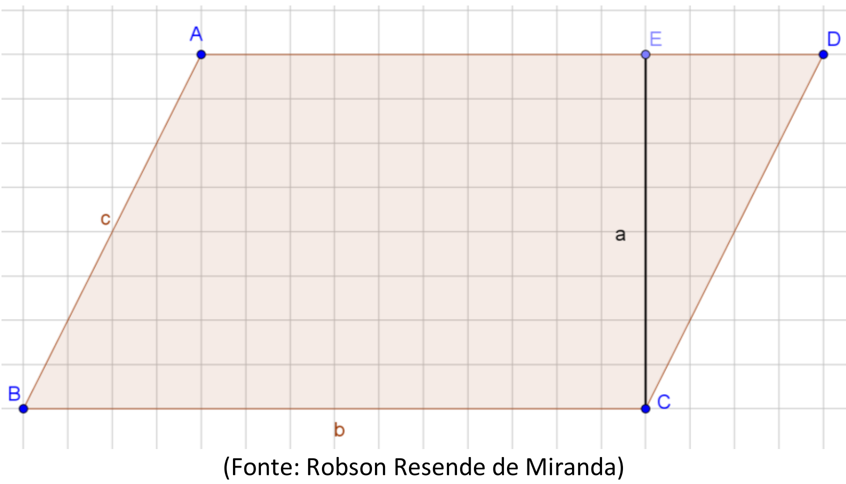
(Fonte: Robson Resende de Miranda)

3.2.2 Área de um paralelogramo

A área do paralelogramo pode ser demonstrada usualmente por equivalência a partir da área do retângulo da seguinte forma:

Considere um paralelogramo ABCD com lados medindo b e c, e cuja distância entre as bases AD e BC seja a, como na Figura 5

Figura 5 - Paralelogramo de lados medindo b e c e altura medindo a

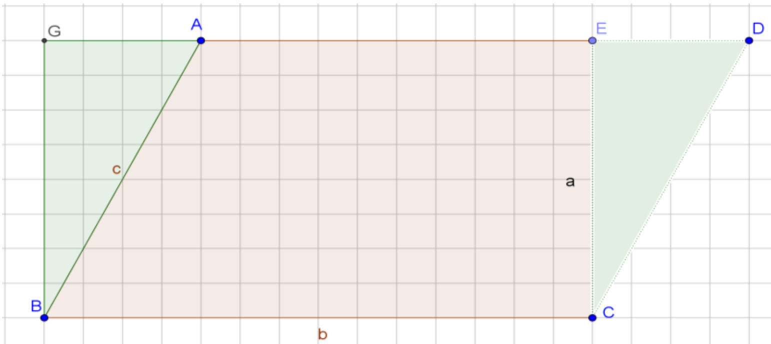


(Fonte: Robson Resende de Miranda)

Recortando o triângulo DEC a direita do paralelogramo e colocando a esquerda como na Figura 6, transforma-se o paralelogramo em um retângulo equivalente de dimensões a e b. Portanto, a medida da área A do paralelogramo é a medida da base multiplicada pela medida da altura. Ou seja,

$$A = a.b.$$

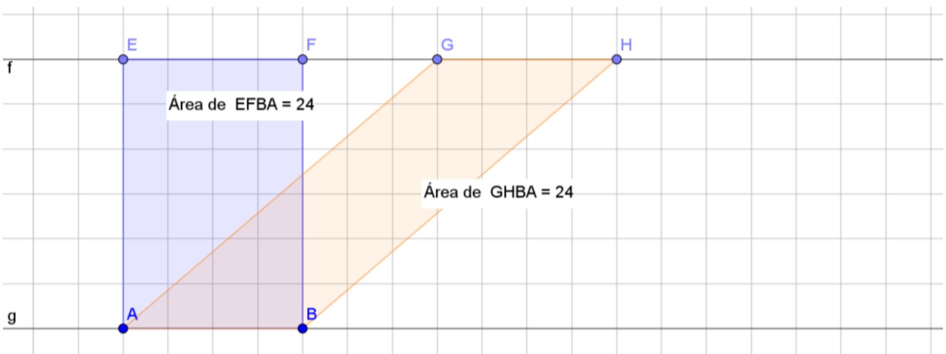
FIGURA 6 - Retângulo GBCE equivalente ao paralelogramo ABCD



(Fonte: Robson Resende de Miranda)

Na Figura 7, o paralelogramo ABHG e retângulo ABFE têm mesma área, por terem a mesma base e a mesma altura. Essa é a proposição XXVII do Livro I de Euclides.

Figura 7 - Paralelogramo e retângulo equivalentes.



(Fonte: Robson Resende de Miranda)

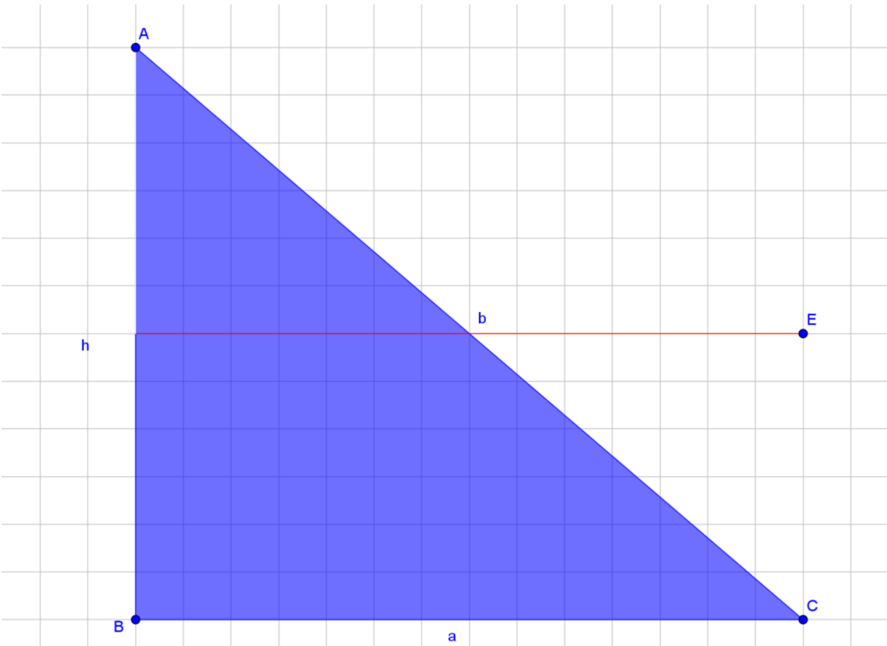
3.2.3 Área de um triângulo retângulo

Para encontrar a expressão para o cálculo da área de um triângulo retângulo de base medindo a e altura medindo h pode-se dividir o triângulo retângulo usando uma linha paralela a um dos catetos que corte a hipotenusa e outro cateto em seu ponto médio, Figura 8. Origina-se assim um triângulo na parte superior e um trapézio na parte inferior que quando reorganizados, Figura 9, darão origem a um retângulo de base de medida a e altura $\frac{\mathrm{h}}{2}$.

Logo, a área A do triangulo retângulo é igual a área desse retângulo, ou seja

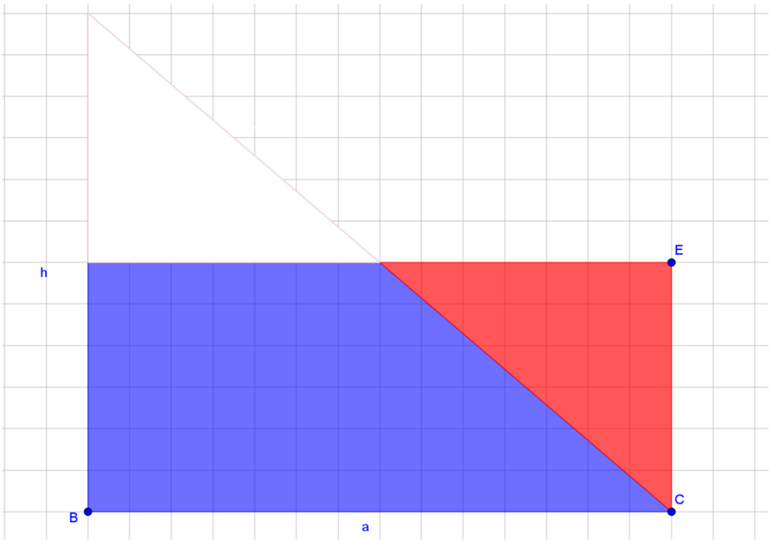
$$A = \frac{a.h}{2}$$

Figura 8 – Decomposição de um triângulo retângulo qualquer



(Fonte: Robson Resende de Miranda)

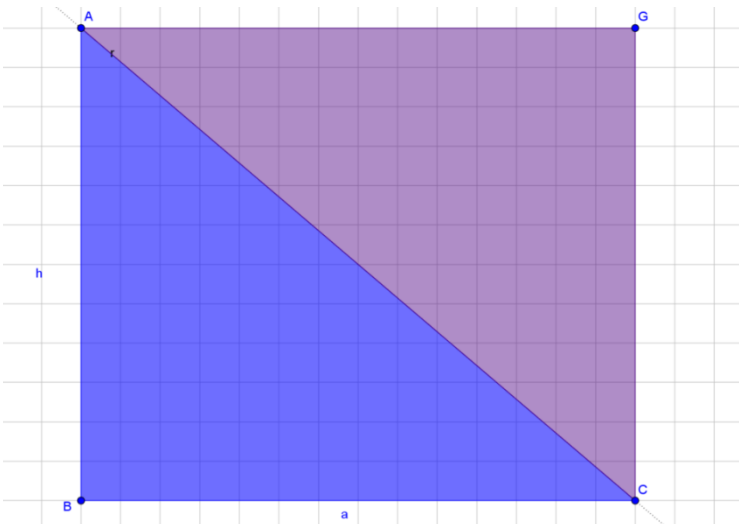
Figura 9 – Composição de um retângulo com peças do triângulo retângulo



(Fonte: Robson Resende de Miranda)

Outra forma de se pensar sobre a área de um triângulo retângulo, é construir um outro triângulo, congruente ao primeiro que encaixe no primeiro pela hipotenusa originando um retângulo de base de medida a altura medindo h . Como a área desse dois triângulos resulta em $a\,.\,h$ que é área do retângulo ABCG, Figura 10, a área de um dos triângulos mede $\frac{a.h}{2}$.

Figura 10 - Retângulo formado por dois triângulos congruentes



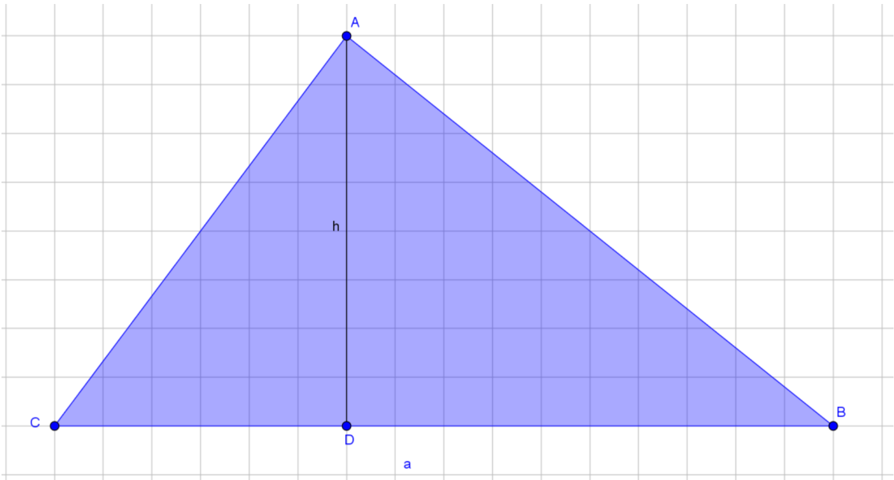
(Fonte: Robson Resende de Miranda)

3.2.4 A área de um triângulo qualquer

A expressão para o cálculo da área de um triângulo qualquer de base medindo a e altura medindo h, Figura 11, pode ser demonstrada de forma similar a de um triângulo retângulo. Pode-se dividir o triângulo usando uma reta paralela a uma de suas bases que intercepte os outros dois lados e o segmento da altura, em seus pontos médios, Desta forma, obtém-se quatro peças que ao serem reorganizadas resultam em um retângulo de base de medida a e altura $\frac{h}{2}$, Figura 12. Portanto á expressão para o cálculo da área A do triângulo é:

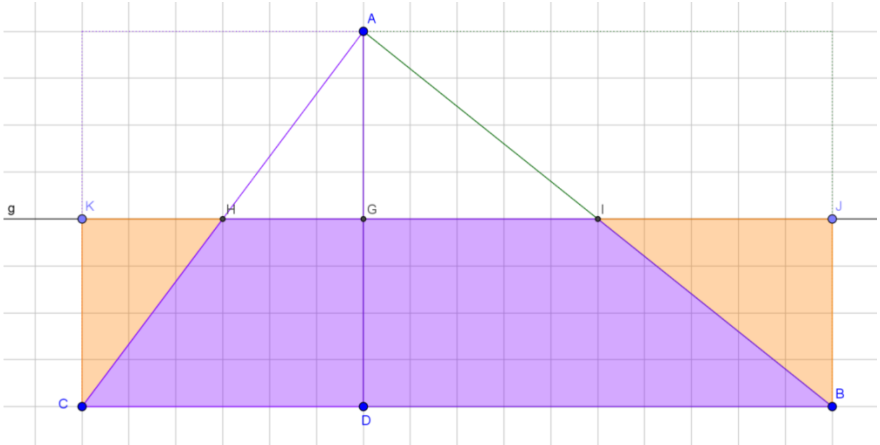
$$A = \frac{a.h}{2}$$

Figura 11 -Triângulo qualquer ABC



(Fonte: Robson Resende de Miranda)

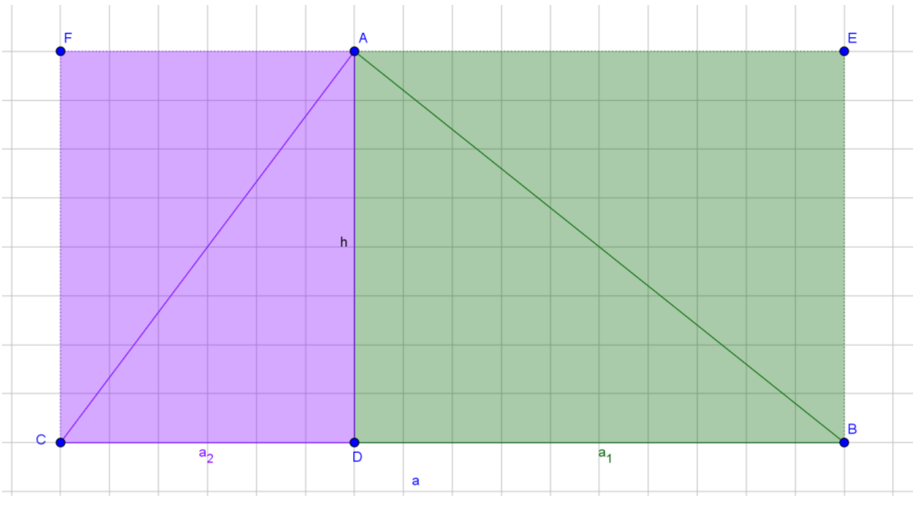
Figura 12 - Triângulo ABC decomposto e suas peças transformadas em retângulo



(Fonte: Robson Resende de Miranda)

Outra forma de se chegar a essa conclusão é por exemplo, dividir o triângulo ABC na altura relativa ao vértice A obtendo-se dois triângulos retângulos. Daí é só completar cada um destes triângulos retângulos com um triângulo congruente a eles em posição invertida, resultando assim um retângulo cuja área é o dobro da área do triângulo original, Figura 13.

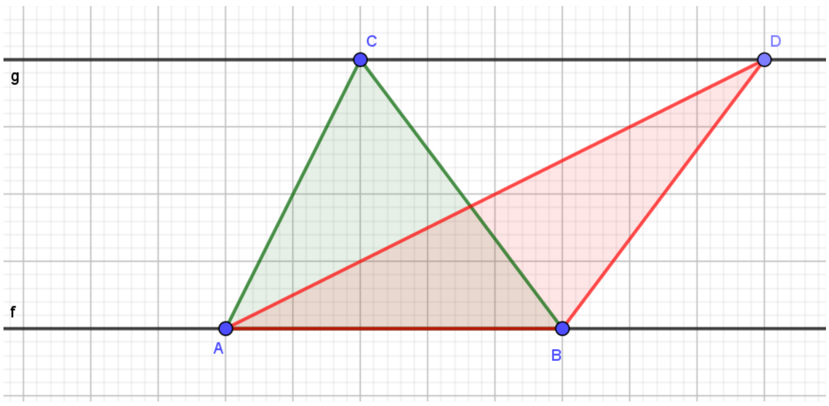
Figura 13 - Composição e decomposição de um triângulo ABC



(Fonte: Robson Resende de Miranda)

O fato de que a área de um triângulo pode ser calculada a partir da medida da base e da medida da altura, permite calcular a área de qualquer outro triângulo mantendo a base e deslizando um dos seus vértices por paralela a base oposta a este vértice. Nesse caso, figura 14, os dois triângulos tem a mesma área, pois tem a mesma base e a mesma altura.

Figura 14 - Triângulos de mesma área devido ao vértice deslocado



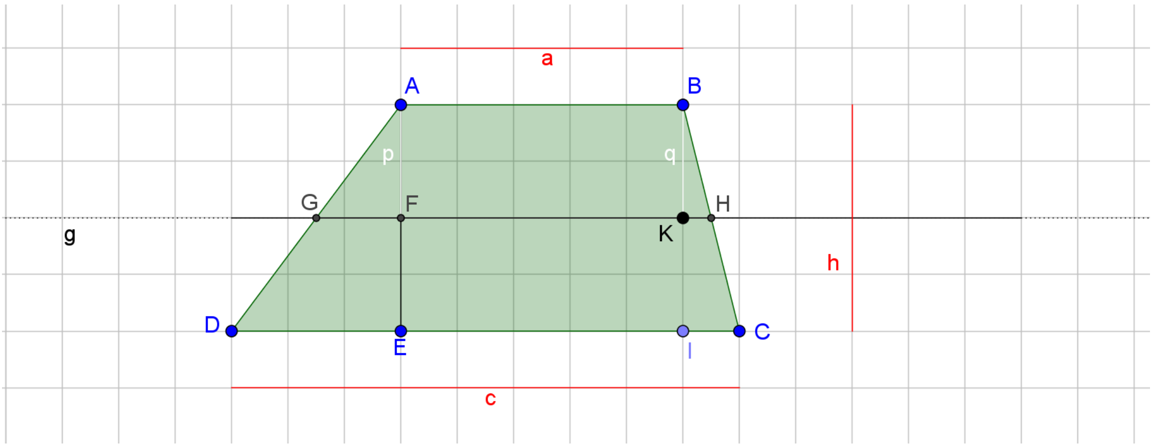
(Fonte: Robson Resende de Miranda)

3.2.5 Área de um trapézio

Dado um trapézio ABCD de altura medindo h, e bases AB e DC medindo a e c, conforme Figura 14, se pelo ponto médio de qualquer lado concorrente as bases traça-se uma paralela as mesmas e recorta-se esse trapézio nesta paralela e nas alturas que tocam os vértices da base menor obtém-se os polígonos a seguir: 2 retângulos ABKF e FKIE, de bases medindo a e altura medindo $\frac{h}{2}$; 2 triângulos AFG e BHI e 2 trapézios DEFG e CHKI que se completam dando origem a dois outros retângulos DEFJ e CLKI com altura $\frac{h}{2}$. Quando colocados um ao lado do outro, Figura 16, os quatros retângulos originam um retângulo maior com base medindo $(a + c)$ e altura $\frac{h}{2}$. Assim a área A do trapézio pode ser obtida pela expressão:

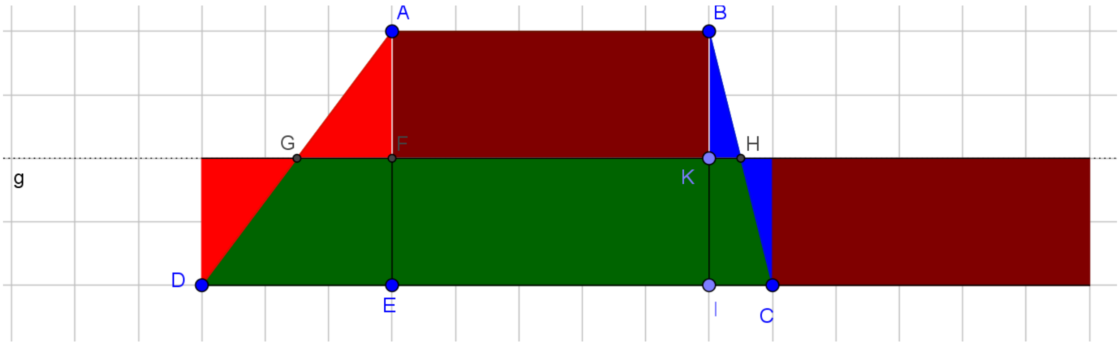
$$A = \frac{(a+c)h}{2}$$

Figura 15 - Decomposição do trapézio ABCD



(Fonte: Robson Resende de Miranda)

Figura 16 - Composição de retângulo com as peças do trapézio



(Fonte: Robson Resende de Miranda)

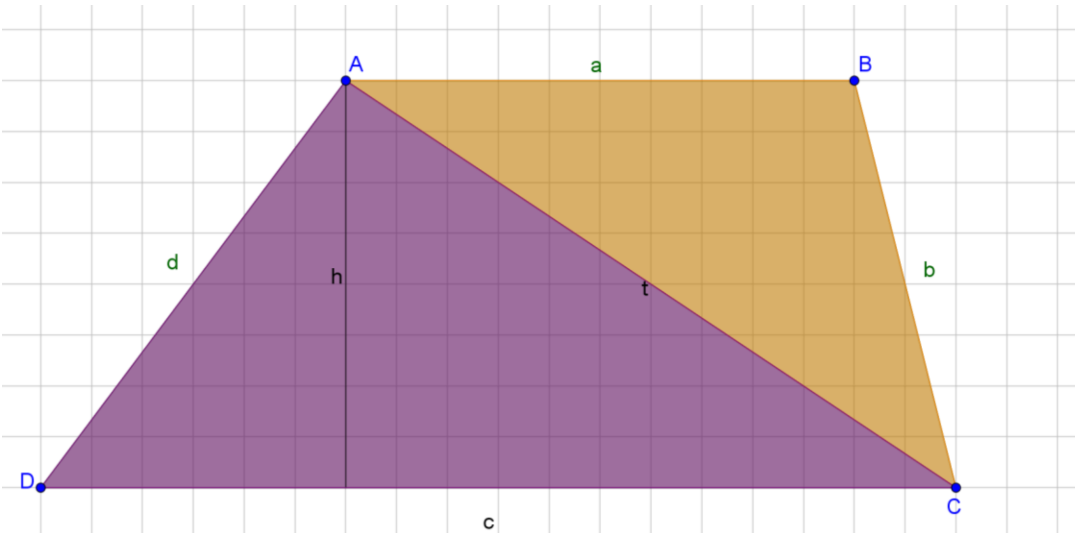
Uma outra forma de se chegar a essa conclusão, talvez de maneira mais simples é dividir o trapézio ABCD em 2 triângulos ABC e ACD usando a diagonal saindo vértice A, conforme figura 17. Estes 2 triângulos tem bases AB, medindo a e base CD medindo c e ambos com a mesma altura medindo h. Como a área de um triângulo é metade do produto da medida da base pela medida da altura temos que a área A desse trapézio

$$A = \frac{ah}{2} + \frac{ch}{2}$$

Ou seja,

$$A = \frac{(a+c)h}{2}$$

Figura 17- Outra decomposição do trapézio ABCD



(Fonte: Robson Resende de Miranda)

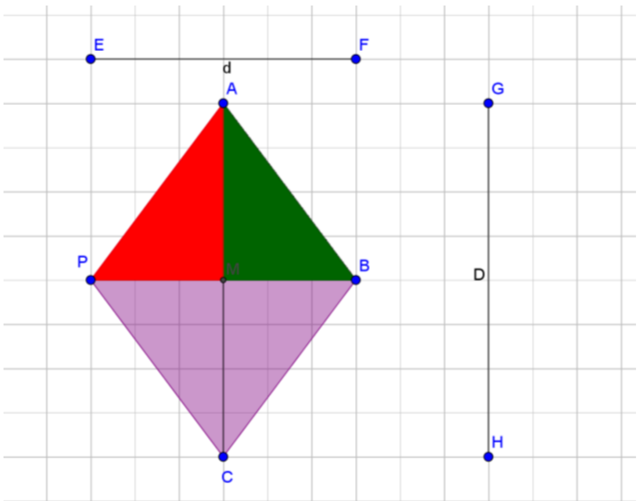
A expressão da área do trapézio sugere ainda uma outra dedução: se a é a medida da base maior e c é a medida da base menor, a expressão $\frac{a+c}{2}$, é a base média do trapézio, ou seja, um segmento cuja medida é a media entre as bases. Assim, a área do trapézio pode ser obtida como “o produto de sua base média, pela altura”

3.2.6 Área de um losango

Para se chegar a uma expressão para o cálculo da área de um losango ABCP, pode-se recortar este losango nas diagonais AC medindo D e BP medindo d, Figura 18, obtendo-se quatro triângulos retângulos congruentes que ao serem realocados formam um retângulo cuja medida da base é d e a medida da altura é $\frac{D}{2}$, conforme Figura 19. Assim a medida A da área do losango pode ser expressa por

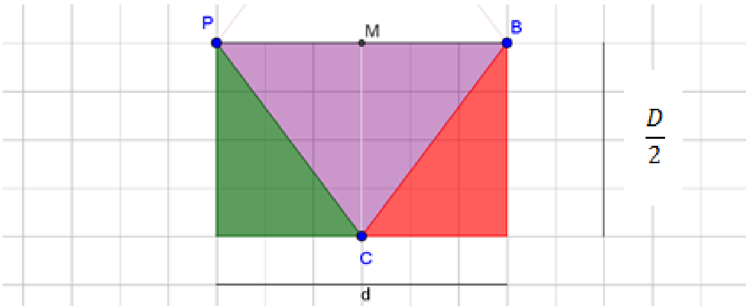
$$A = \frac{D.d}{2}$$

Figura 18 - Losango ABCP decomposto



(Fonte: Robson Resende de Miranda)

Figura 19 - Composição com as peças do losango ABCP

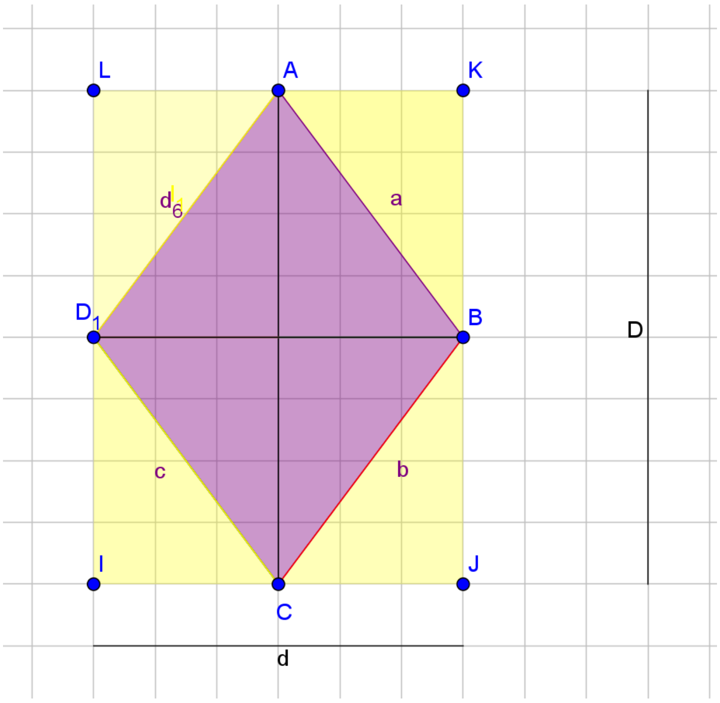


(Fonte: Robson Resende de Miranda)

Um outro modo de se chegar a essa expressão para o cálculo da área do losango, é completar o losango ABCD com 4 triângulos retângulos congruentes aos 4 triângulos originados da divisão das diagonais, conforme figura 20. Ao proceder desta forma, estamos formando uma área que é o dobro da área original, e que correspondem a uma região retangular, de área dada por $D.d$. Como o losango corresponde a metade dessa área, sua área A pode ser expressa:

$$A = \frac{D.d}{2}$$

Figura 20 - Construção de retângulo com lados medindo D e d

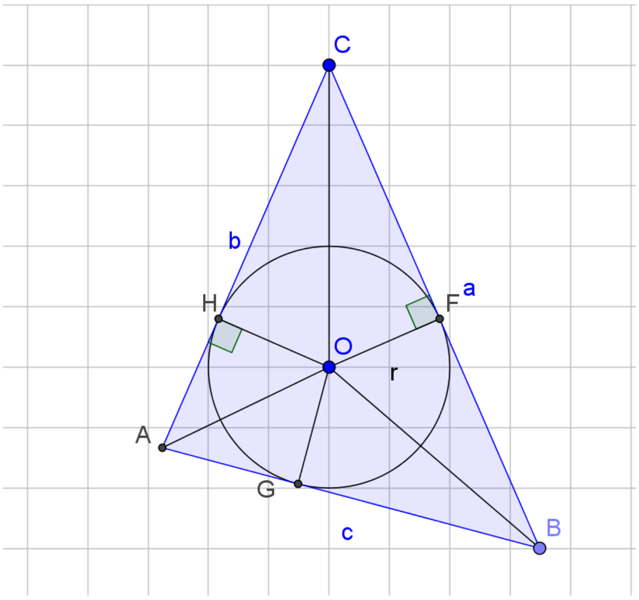


(Fonte: Robson Resende de Miranda)

3.2.7 Cálculo da área de um triângulo a partir da circunferência nele inscrito[13]

Ao inscrever uma circunferência de centro O em um triângulo ABC tem-se 3 pontos de tangência, F, H e G , conforme Figura 21. Nessa situação a distância do centro O aos pontos de tangência são segmentos de mesma medida r. O triângulo ABC fica então decomposto em 3 triângulos AOB , AOC e BOC, conforme Figura 22.

Figura 21 - Triângulo ABC circunscrito a uma circunferência



(Fonte: Robson Resende de Miranda)

Esses triângulos têm bases medindo respectivamente a, b e c altura medindo r.

Assim, a área A do triângulo ABC pode ser expressa como:

$$A = \frac{a.r}{2} + \frac{b.r}{2} + \frac{c.r}{2}$$

que é equivalente a:

[13] Circunferência inscrita: é a circunferência interna ao polígono que toca todos os lados do polígono em um único ponto.

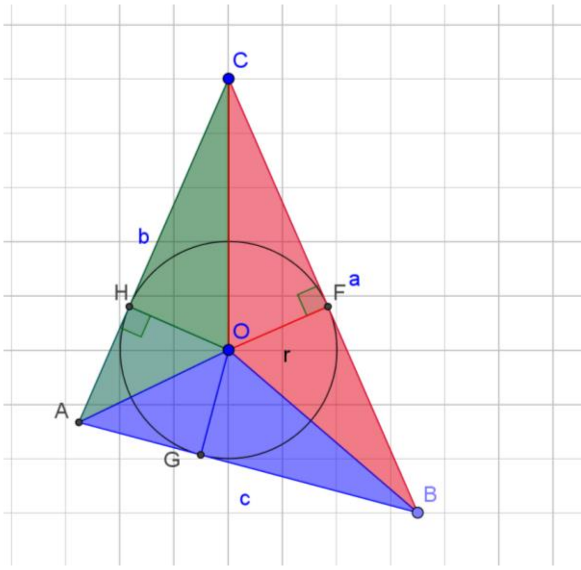
$$A = \frac{(a+b+c).r}{2}$$

Considerando p o semiperímetro do triângulo ABC

Obtém-se então que:

$$A = p.r$$

Figura 22 - Decomposição do triângulo ABC em três triângulos de mesma altura



(Fonte: Robson Resende de Miranda)

3.2.8 Área de um polígono regular qualquer

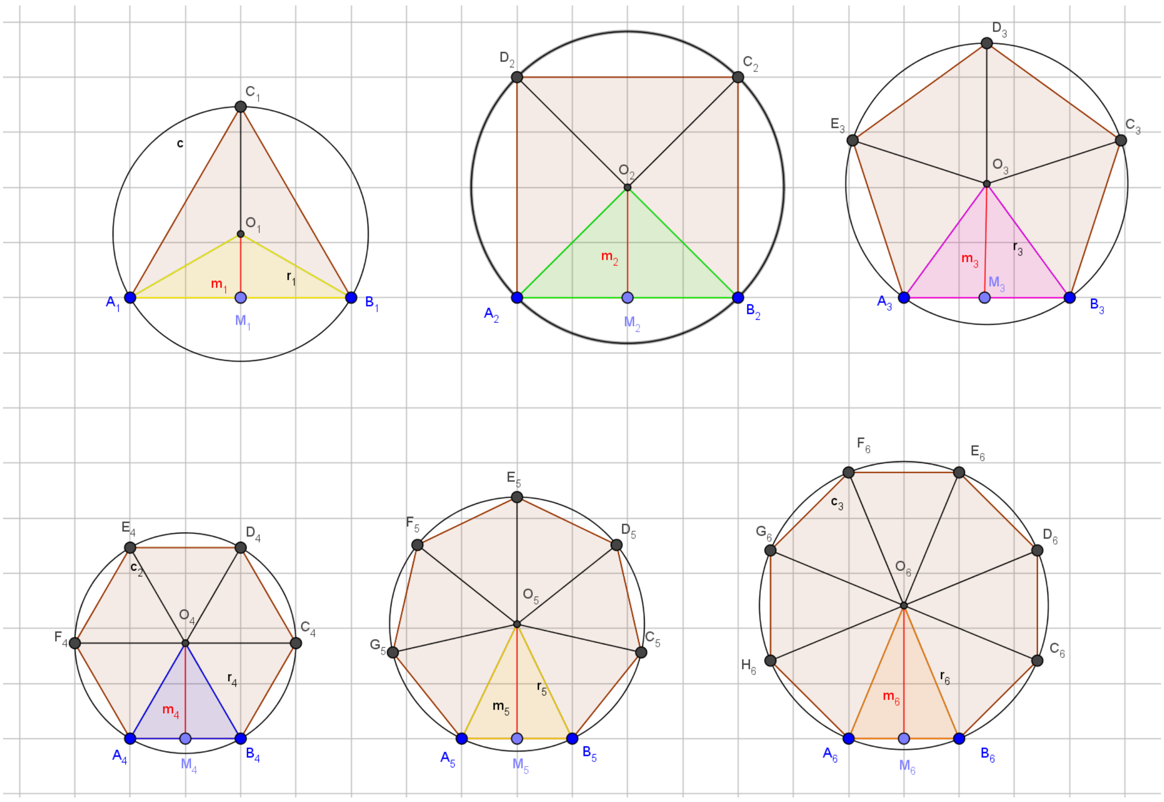
Todo polígono regular[14] de n lados pode ser inscrito[15] em um círculo e decomposto em n triângulos congruentes, traçando-se os segmentos que unem o vértice ao centro da circunferência circunscrita. A altura de todos esses triângulos corresponde ao que chamamos de apótema[16] do polígono. Assim, a área de um polígono regular pode ser descrita como a área de n triângulos, de base medindo ℓ

[14] Polígono regular: polígono cujos lados tem todos a mesma medida, assim como os ângulos.
[15] Polígono inscrito: aquele cujos vértices são todos pontos de uma mesma circunferência.
[16] O apótema é a menor distância do centro ao lado do polígono

e altura medindo m, em que ℓ é a medida do lado do polígono regular e m a medida do apótema. A área então será: $A = \frac{n\,\ell\,m}{2}$. Como $n.\ell$ é o perímetro do polígono regular e $\frac{n.\ell}{2}$ é semiperímetro, tem-se que $A = pm$ em que p é o semiperímetro e m é o apótema do polígono.

Na figura 23, têm-se alguns polígonos regulares inscritos no círculo, com seus apótemas.

Figura 23 - Polígonos regulares inscritos em uma circunferência de raio r



(Fonte: Robson Resende de Miranda)

4. Figuras equivalentes e figuras equicompostas

Neste capítulo discutem-se os conceitos de figuras equivalentes e figuras equicompostas, muito importantes no processo de decomposição para cálculo de área. Embora a definição em DOLCE e POMPEU (2005, p.301a 302) trate de equivalência e equicomposição enquanto conceitos sinônimos, por razões etimológicas e históricas cada conceito será estudado separadamente. Após lançar luz sobre a origem e significado de cada um, e provar alguns procedimentos e proposições ligados aos mesmos, o teorema de Bolyai-Gerwien será usado, para justificar o uso destes conceitos enquanto sinônimos, utilizada pelos autores supracitados. Serão feitas também algumas afirmações sobre propriedades de figuras equivalentes.

4.1 Figuras equivalentes

De acordo com o Dicionário Etimológico da Língua Portuguesa a palavra equivalência vem do Latim AEQUIVALENS, “de mesmo poder, com a mesma capacidade”, formada por AEQUUS, “igual”, mais VALENS, particípio presente de VALERE, “ser forte”.

Segundo RODRIGUES (2000):

> Não é só a etimologia do termo que remete a essa noção de igualdade. O conceito de equivalência em matemática também se liga ao ser o mesmo em relação a, no mínimo um parâmetro (volume, área, número de elementos etc.) Mas como apontam Broeck (1978) e Hermans (1991), esse uso do termo implica também simetria, reversibilidade e possibilidade de intercâmbio entre os elementos.

A equivalência é um princípio básico que os gregos utilizavam em sua geometria. Todas as relações que hoje conhecemos por meio de fórmulas eram transmitidas pelos gregos através de relações de equivalência, entre as quais, equivalência aplicada à áreas. Inclusive, nos “Elementos de Euclides” os cinco axiomas iniciais relacionam-se ao conceito de equivalência. São eles:

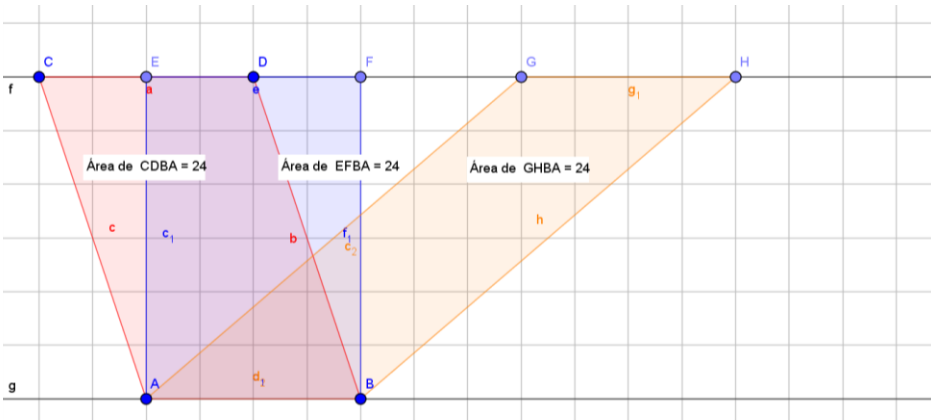
1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais entre si.
2. Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais.
3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.
5. O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

De modo mais específico, serão as proposições XXXVI e XXXVII do livro I de Os elementos que irão indicar um procedimento a se seguir para se poder utilizar a equivalência a figuras de mesma área.

No capítulo anterior, para demonstrar a fórmula para o cálculo de área do paralelogramo, concluiu-se que paralelogramos que tem a mesma base e mesma altura relativa esta base tem a mesma área. Esse é um exemplo de equivalência que foi tratado por Euclides na proposição XXXVI.

Na Figura 24, os paralelogramos ABCD, ABFE e ABHG têm a mesma base AB e mesma altura relativa a esta base, por isso, têm a mesma área. Deste fato, constroem-se de um retângulo equivalente a um paralelogramo, ou vice-versa.

Figura 24 - Equivalência de paralelogramos

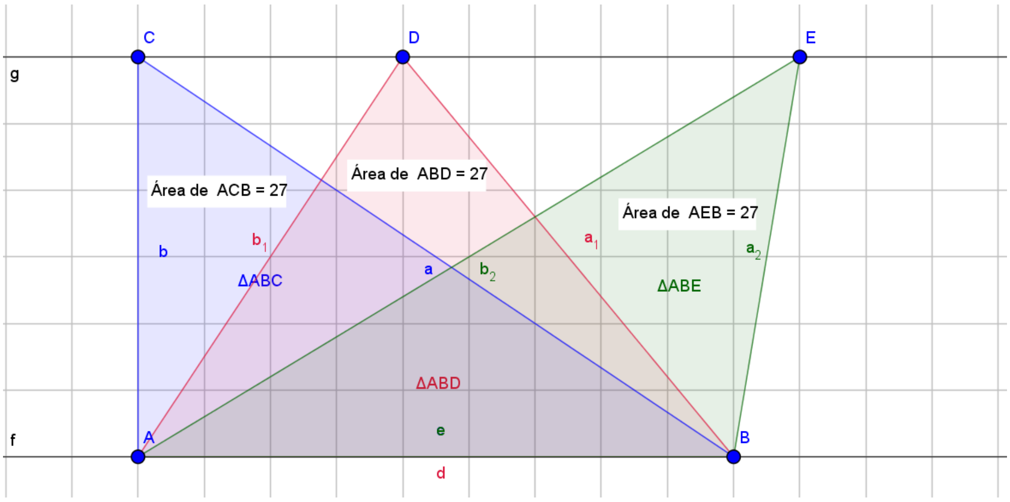


(Fonte: Robson Resende e Miranda)

No capítulo 2, também vimos que triângulos que têm a mesma base e mesma altura têm a mesma área. Essa é a Proposição XXXVII dos Elementos de Euclides. Assim, tem-se outro exemplo de equivalência aplicado a triângulos.

Na figura 25, os triângulos ABC, ABD e ABE tem a mesma base AB e mesma altura relativa a essa base, portanto, têm a mesma área. E são exemplos de figuras equivalentes.

Figura 25 - Equivalência de Triângulos



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

Conforme FACCO (2003) admitem-se como figuras equivalentes aquelas que têm a mesma área.

Os gregos utilizavam a equivalência de figuras para desenvolver vários procedimentos de construção geométrica. Um exemplo disto é o problema da quadratura do círculo, um dos problemas clássicos sem solução, que perdurou até o século XX, que consiste em construir um quadrado com mesma área que um círculo, usando apenas régua e compasso.

A seguir apresentam-se alguns problemas de construção usando régua e compasso, por meio dos quais é possível transformar uma figura em outra equivalente a primeira, ou seja, de mesma área. Vale ressaltar que estes procedimentos são praticamente ausentes nos livros didáticos do ensino fundamental, sendo uma fonte importante para compreensão do conceito de área, e da sua evolução ao longo da história.

Problema 1: **Construir um triângulo equivalente a um polígono**

Uma solução para esse problema já era conhecida pelos Pitagóricos, e consiste em transformar o polígono sucessivas vezes, em outro polígono, diminuindo-o em um lado a cada transformação. Cada transformação se baseia na propriedade vista anteriormente, que afirma que ao manter a base fixa de um triângulo, e deslocar o vértice oposto a essa base em uma reta paralela a ela, a área do triângulo não se altera.

O problema anterior sempre tem solução e é uma consequência do teorema presente em DOLCE e POMPEU (2005, p.306): Dado um polígono convexo com n lados $(\mathrm{n} \geq 3)$, existe um polígono convexo com $(\mathrm{n}-1)$ lados que lhe é equivalente.

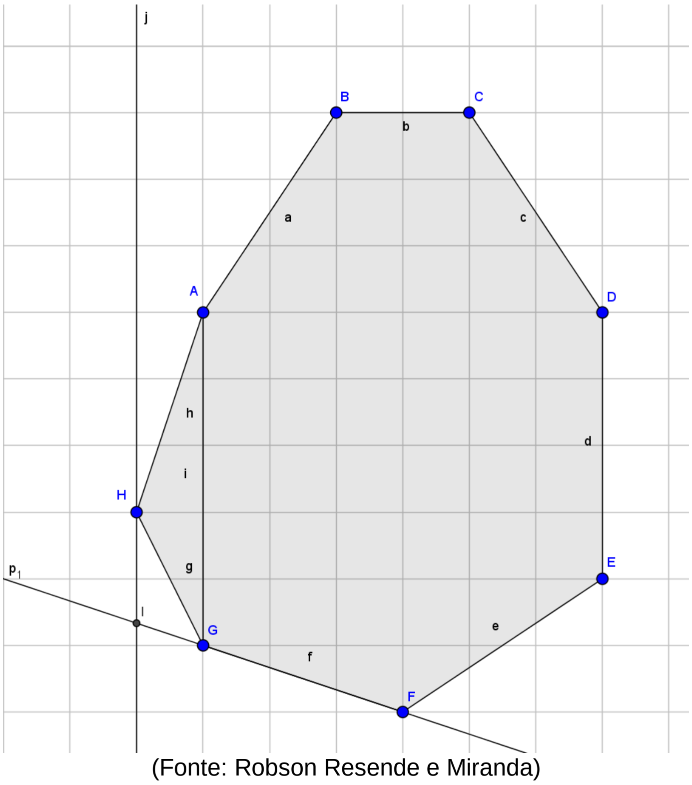
Para uma demonstração deste resultado, siga as etapas abaixo:

- Escolha um vértice a ser transportado e trace a diagonal do polígono mais próxima a ele, obtendo assim um triângulo em que ele é um dos vértices;
- Construa passando pelo vértice escolhido uma paralela à diagonal desenhada.
- Desloque o vértice pela paralela até encontrar o prolongamento de um dos lados consecutivos ao lado que será eliminado, quando isto acontecer um dos vértices irá desaparecer, pois passará a pertencer ao interior do lado.
- Com o desaparecimento de um vértice, o número de lados do polígono irá diminuir, em um lado.

Um exemplo desta construção pode ser observado no polígono ABCDEFGH da Figura 26. Neste caso, buscando-se eliminar o vértice H traçou-se a diagonal AG entre vértices adjacentes a H. Em seguida construiu-se a reta j paralela a AG. Dando prosseguimento, deslocou-se o vértice H por j até encontrar o prolongamento de FG no ponto I. Unindo-se o vértice A ao ponto I, obtém-se um novo polígono, o heptágono ABCDEFI que é equivalente ao octógono original, uma vez que o triângulo AGH tem mesma área que o triângulo AGI, e o restante da região poligonal se manteve inalterado, Figura 27.

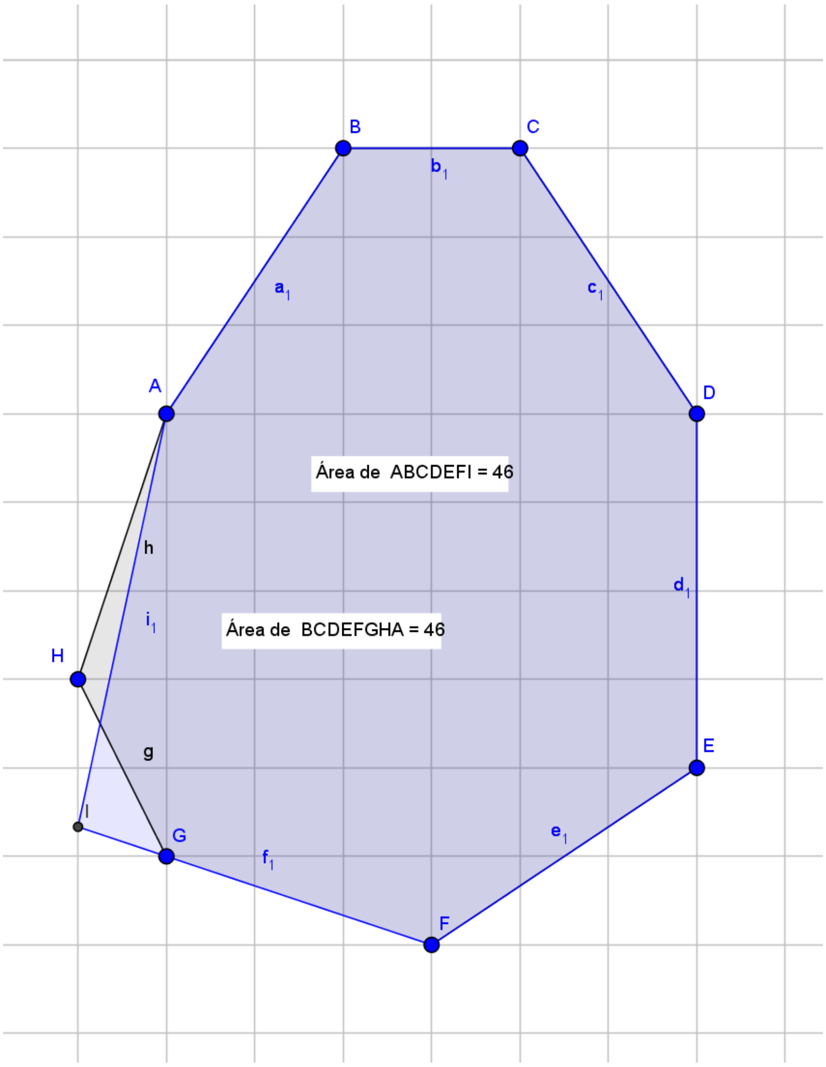
Repetindo-se esse procedimento a fim de eliminar outros 4 vértices sucessivamente é possível transformar o heptágono ABCDEFI no triângulo ABM, Figura 28. Nesta figura o heptágono ABCDEFI, o hexágono ABCDEJ, o pentágono ABCDK, o quadrilátero ABCL e o triângulo ABM são figuras equivalentes.

Figura 26 - Transformação do octógono em heptágono



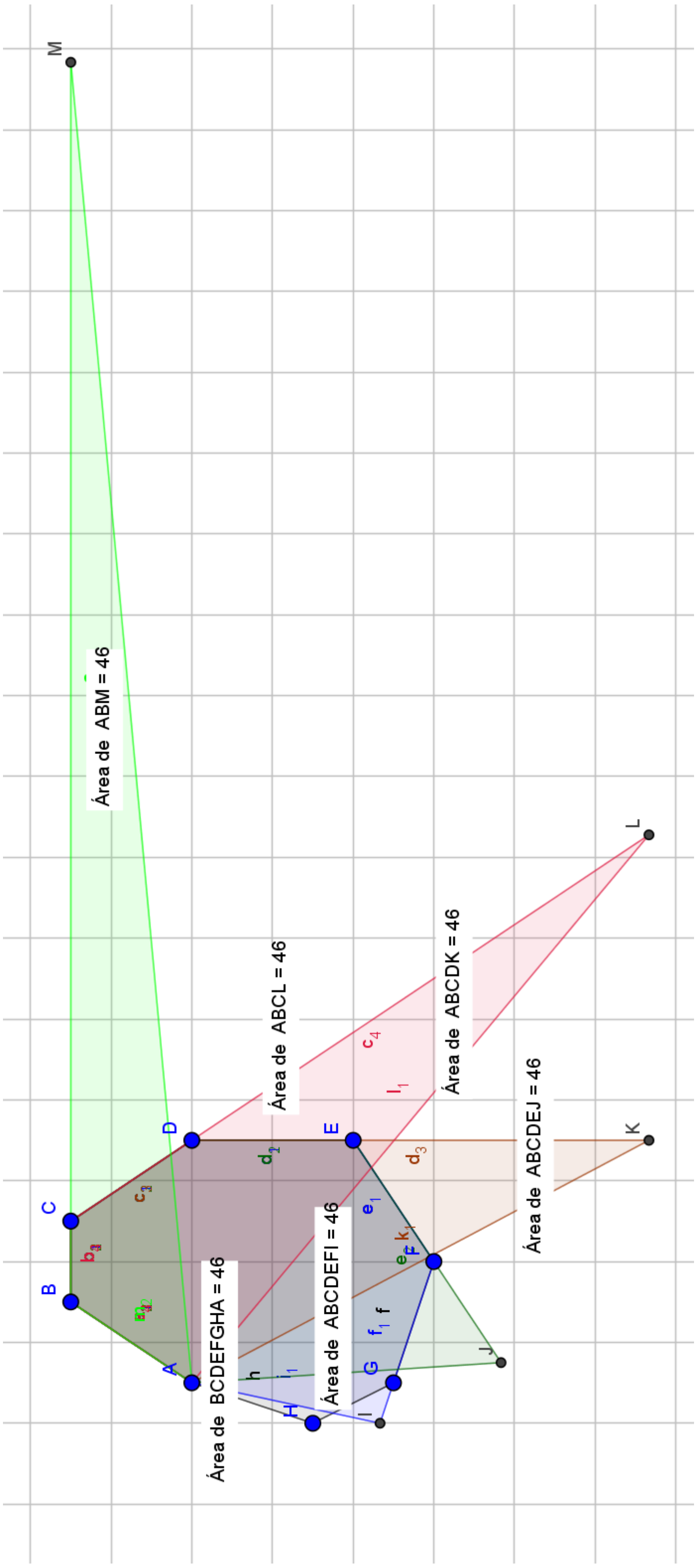
(Fonte: Robson Resende e Miranda)

Figura 27 - Octógono ABCDEFGH e heptágono ABCDEFI com mesma área



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

Figura 28 - Sequência de polígonos com um vértice a menos que o anterior



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

Este procedimento pode ser aplicado tanto em polígonos convexos quanto em polígonos côncavos. Uma aplicação interessante do procedimento é transformar um polígono côncavo de n lados em um polígono convexo de $n - x$ lados.

Também é possível reverter o procedimento, e construir um polígono com um determinado número de lados a partir de um polígono com um número de lados menor. Por exemplo, é possível construir um quadrilátero de mesma área a partir de um triângulo.

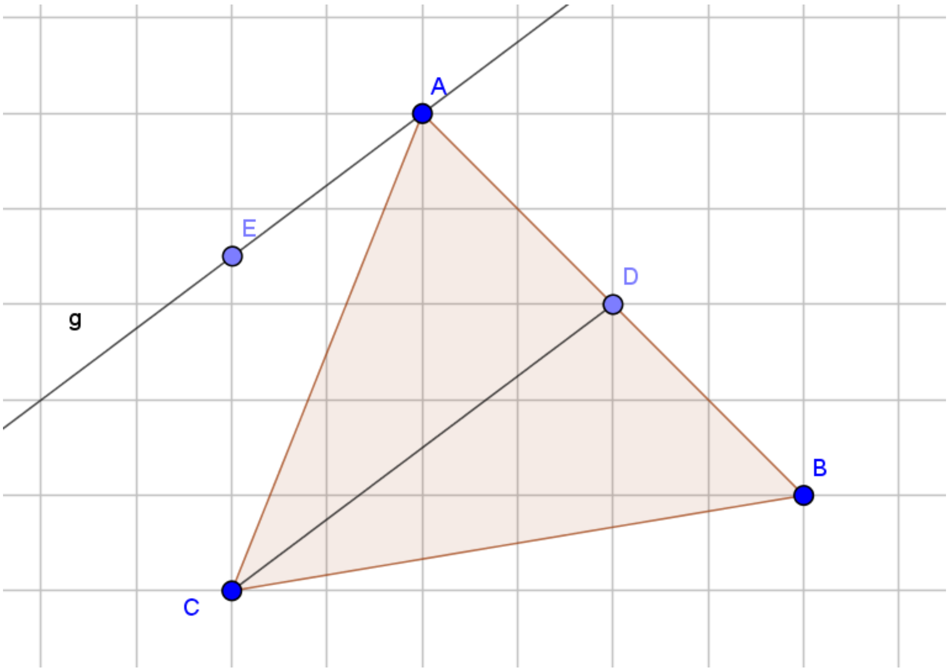
Neste caso, a sequência para a construção de um polígono com um número maior de lados pode seguir as etapas abaixo:

- Sobre um lado qualquer do polígono determine um ponto;
- Determine o segmento que une um dos vértices (que não estão no lado sobre o qual o ponto escolhido se assenta) a ele.
- Determine a reta que passa por um dos vértices do lado escolhido e é paralela ao segmento definido;
- Escolha um ponto qualquer desta reta como um novo vértice para o polígono.
- O polígono resultante terá um lado a mais que o polígono original.

Repetindo-se o procedimento acima, consegue-se construir um polígono com um número de lados qualquer maior que o original de mesma área que o primeiro.

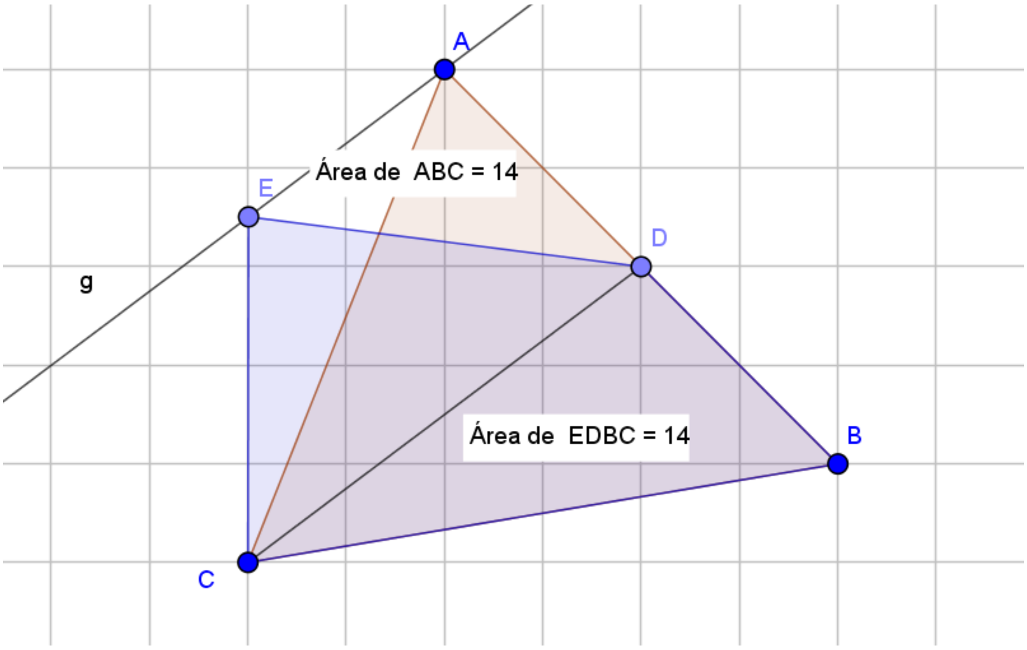
Como um exemplo desta construção podemos a partir de um triângulo ABC, construir um quadrilátero BCED, Figura 29. Para isso, o procedimento é o seguinte: escolhe-se um ponto arbitrário D sobre o lado AB do triângulo ABC. Traça-se então o segmento CD unindo-se o vértice ao lado AB ao ponto criado. Traça-se então a reta g paralela ao segmento CD e que passa pelo vértice A. Em seguida, define-se nesta reta o ponto E. Desta forma, como observado na Figura 30, o triângulo original ABC e o quadrilátero BCED serão equivalentes, pois os triângulos CED tem a mesma área CAD.

Figura 29 - Transformação de triângulo em quadrilátero equivalente



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

Figura 30 - Triângulo ABC e quadrilátero BCED com mesma área



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

Problema 2 **– Transformar um triângulo em um quadrado equivalente**

Este também era um problema de construção geométrica que já figurava nos Elementos de Euclides, conhecido como quadratura do triângulo, que consiste em transformar um triângulo qualquer em um quadrado equivalente.

Para esse procedimento, deve-se considerar um triângulo de base medindo b e altura medindo h, a partir do qual se deseja construir um quadrado de lado medindo ℓ que tenha a mesma área que o triângulo. Algebricamente, tomando-se as expressões para as áreas das duas figuras é possível escrever a igualdade:

$$\ell^2 = \frac{bh}{2}$$

Essa igualdade implica que ℓ é a expressão:

$$\ell = \sqrt{\frac{b.h}{2}}$$

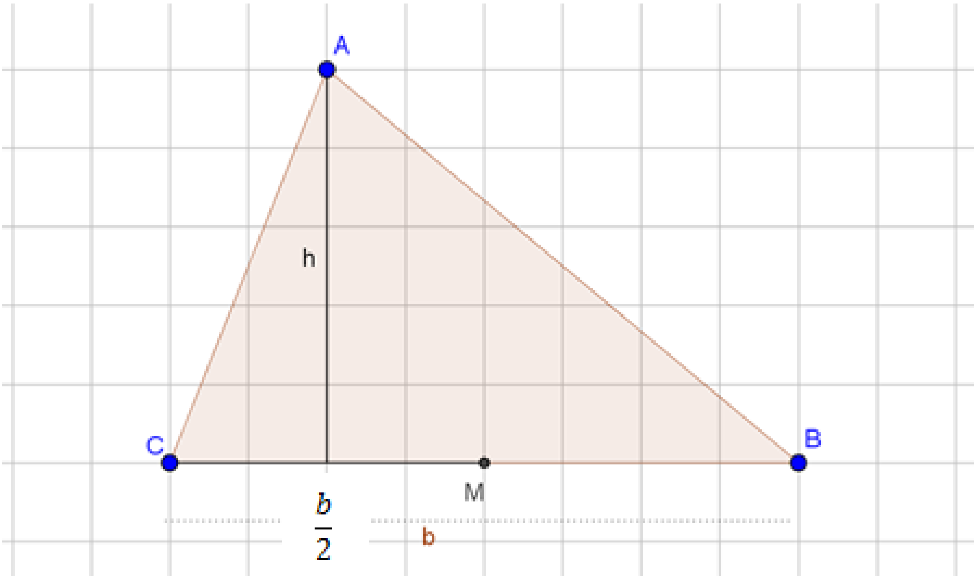
A expressão de ℓ pode ser entendida como a média geométrica entre os números h e $\frac{\mathrm{b}}{2}$. Para determinar a medida ℓ pode-se usar a relação métrica no triângulo retângulo que afirma que “o quadrado da altura referente à hipotenusa é o produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa”. Basta que se considere um triângulo retângulo em que a altura relativa a hipotenusa tenha medida ℓ e que as projeções sobre a hipotenusa tenham medida h e $\frac{\mathrm{b}}{2}$. Nesse caso, a hipotenusa do triângulo retângulo a ser construído é $\mathrm{h} + \frac{\mathrm{b}}{2}$. Obtendo-se a medida de ℓ é possível construir o quadrado equivalente que se busca como resposta.

A sequência de procedimentos para esta construção é a seguinte:

- Considere um triângulo ABC, como o da Figura 31,de base medindo b e altura medindo h,

- Encontre o ponto médio do segmento da base, determinando assim o segmento CM medindo $\frac{b}{2}$.

Figura 31 - Triângulo ABC com altura medindo h e base medindo b

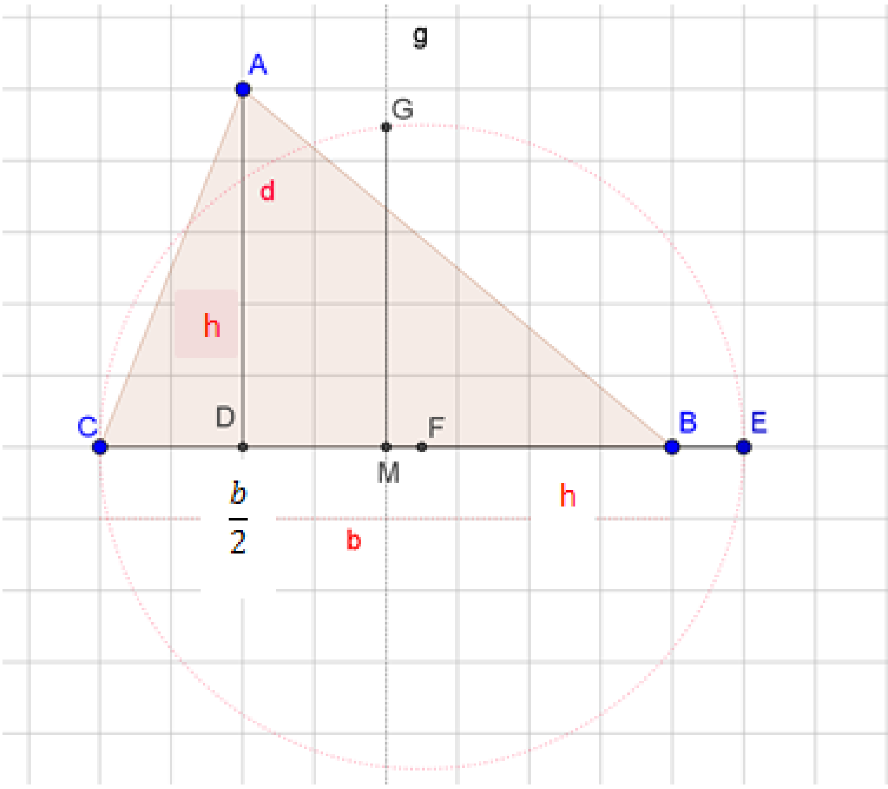


(Fonte: Robson Resende e Miranda)

- Cria-se um segmento CE de medida $h + \frac{b}{2}$.
- Traça-se a circunferência de diâmetro CE . O ponto F, médio de CE é o centro da circunferência.

Na Figura 32, o segmento CE é o segmento construído. O ponto F é o ponto médio de CE e o centro da circunferência d.

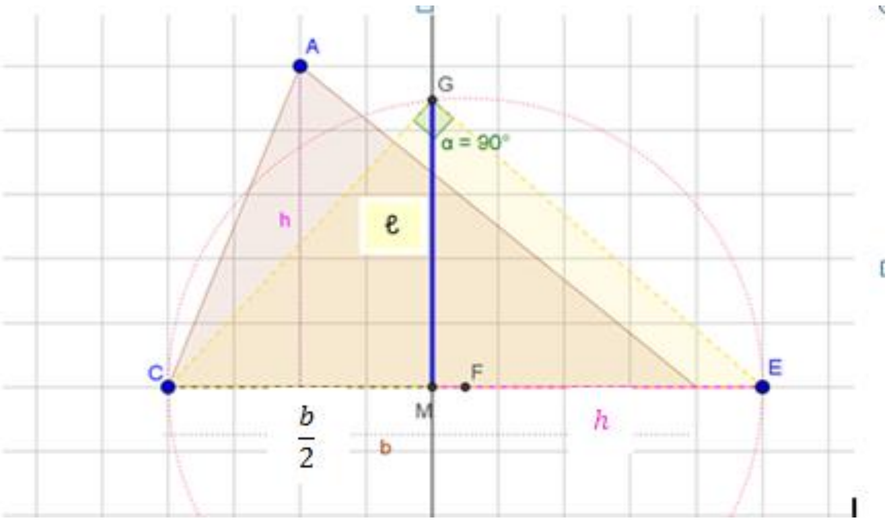
Figura 32 - Segmento CE de dimensões $u + h$, cujo centro F é o centro da circunferência



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

- Traçando-se uma reta g perpendicular ao diâmetro passando pelo ponto M, encontra-se o ponto G no seu encontro com a circunferência.
- O triângulo CGE é um triângulo retângulo inscrito na circunferência d, conforme a Figura 33. O segmento GM tem medida ℓ que é altura do triângulo retângulo.

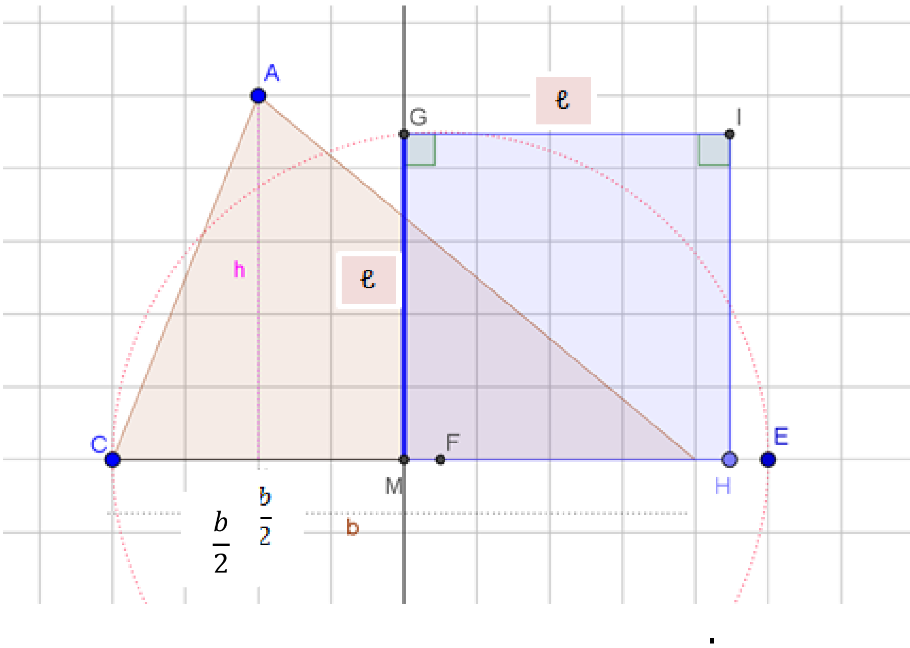
Figura 33 - Construção do triângulo CGB retângulo em G e sua altura medindo ℓ



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

- Agora se constrói um quadrado com lado de medida ℓ. Este quadrado é equivalente ao triângulo original, figura 34.

Figura 34 - Quadrado GIHM de lado medindo ℓ equivalente ao triângulo

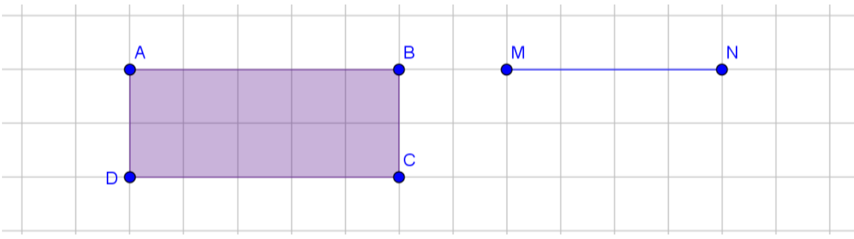


(Fonte: Robson Resende e Miranda)

Problema 3 **- Dado um retângulo construir outro retângulo equivalente a ele, tendo a medida de um dos lados fixada.**

Para ilustrar tal construção considere um retângulo ABCD e um segmento $\overline{MN}$ com medida fixa que será o lado do novo retângulo, conforme Figura 35.

Figura 35 – Transformação do retângulo ABCD em outro em que um dos lados tenha medida MN



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

O problema consiste em achar a quarta proporcional $\overline{NP}$, pois se conhece três medidas e espera-se obter uma quarta com as quais é possível montar uma proporção a partir da igualdade das áreas.

Para construir o segmento $\overline{NP}$ um procedimento possível é o seguinte:

- Trace duas semirretas com origem em O: $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$.

Na semirreta $\overrightarrow{OX}$ considere a partir do vértice O os segmentos $\overline{OS}$ de mesma medida que $\overline{MN}$ seguido do segmento $\overline{ST}$ de mesma medida que $\overline{AB}$. Na semirreta $\overrightarrow{OY}$, a partir de O considere o segmento $\overline{OR}$ de mesma medida que $\overline{BC}$.

- Pelos pontos R e S trace a reta r e pelo ponto T trace uma reta paralela s, que intercepta $\overrightarrow{OY}$ em U. Assim, segmento $\overline{RU}$ obtido, tem medida $\overline{NP}$ sendo o segmento procurado, conforme Figura 36.

Pois pelo Teorema de Tales onde:

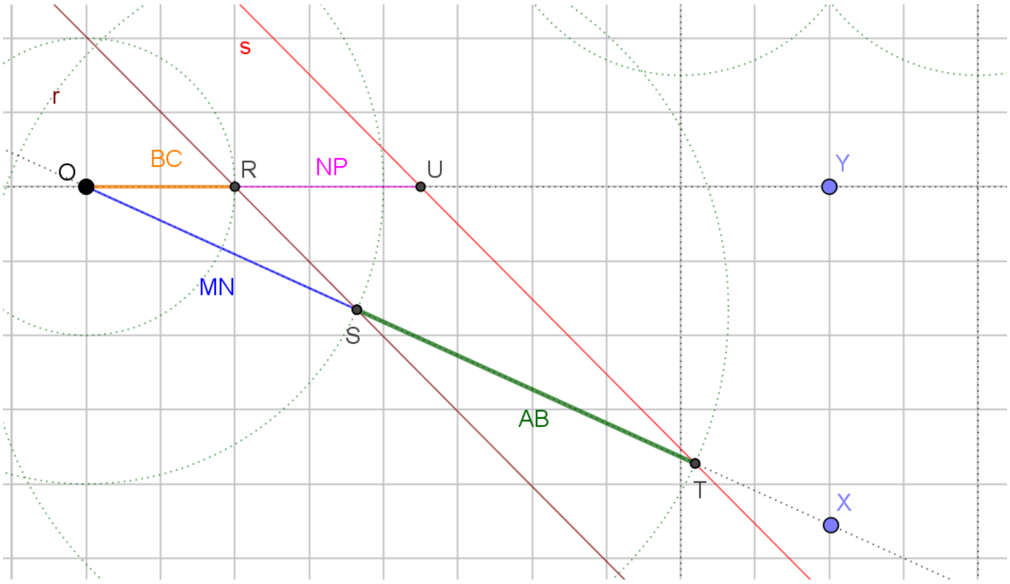
$$\frac{\overline{MN}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{RU}}$$

Dessa igualdade de razões vêm o produto:

$$\overline{AB}.\overline{BC} = \overline{MN}.\overline{NP}$$

que representa a igualdade de áreas.

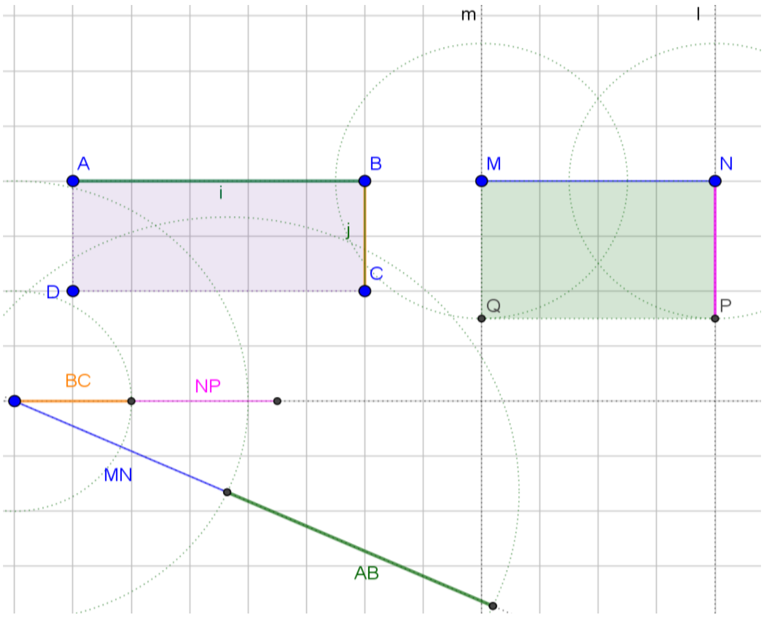
Figura 36 - Obtenção do segmento NP



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

- Em seguida a obtenção da medida de $\overline{NP}$, conforme procedimento anterior; faz-se a translação desse segmento para as retas perpendiculares a $\overline{MN}$ que passam por M e por N a fim de se obter os pontos Q e P respectivamente, que definem junto com M e N o novo retângulo, Figura 37.

Figura 37 - Construção do retângulo MNPQ a partir do segmento MN e NP obtido



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

4.2 Figuras equicompostas

BOLTIANSKI (1996) define que duas figuras são equicompostas (ou equidecomponíveis) se é possível decompor uma das figuras num número finito de partes, e, por meio do rearranjo dessas partes, compor a outra figura.

A equicomposição já era conhecida na antiguidade e um exemplo desse conhecimento é o quebra cabeças do tipo tangram chamado Stomachion, sobre o qual nos referimos no Capítulo 2.

O método da divisão (ou decomposição) que é nosso objetivo discutir neste trabalho se baseia nas propriedades das figuras equicompostas que já eram conhecidas por Euclides há 2300 anos. O método em si, consiste em decompor uma figura em um número finito de partes, e rearranjar estas partes formando uma figura cuja área seja conhecida. Vários exemplos de decomposições foram vistas no Capítulo 2 na obtenção das fórmulas do paralelogramo, do triângulo e do trapézio.

O fato que dois polígonos equicompostos são equivalentes já era conhecido na antiguidade. A reciproca dessa afirmação, contudo, também é verdadeira, mas só foi provada no século XIX.

As demonstrações de que polígonos equivalentes são equicompostos são creditadas a Farkas Wolfgang Bolyai (Hungria, 1775-1856), Phillip Gerwien (Alemanhã) e William Wallace (Escócia, 1768-1843). Segundo KAGOIKI (2001) estes três matemáticos trabalharam independentemente, e este autor, ainda afirma que Farkas, propôs a questão e chegou ao resultado em 1832, enquanto Phillip, matemático alemão amador, teria chegado na resposta em 1833, e mais tarde, descobriu-se que Wallace teria provado a questão em 1807. Isso explica o fato do teorema também ser conhecido como Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwein.

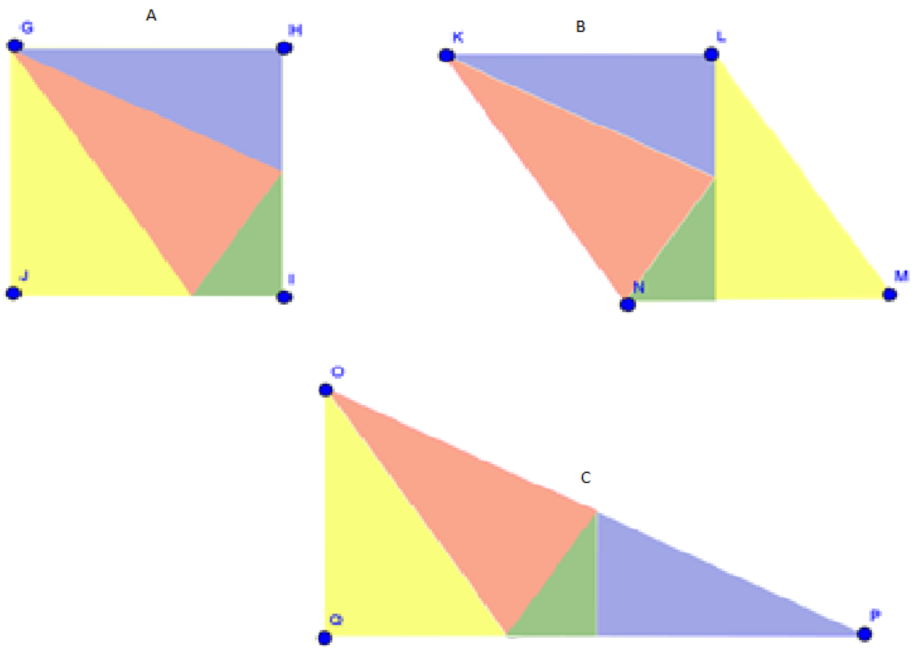
A fim demonstrar esse teorema, recorre-se a alguns lemas que serão tratados na sequência:

Lema 1-**Transitividade da equicomposição**

Se uma figura A é equicomposta com a figura B e a figura B é equicomposta com a figura C, então a figura A é equicomposta com a figura C A descrição desta propriedade é imediata.

Na Figura 38, têm-se um exemplo de três polígonos equicompostos que são os quadriláteros GHIJ e KLMN e o triângulo OPQ, com as quatro peças comuns destacadas em cores diferentes.

Figura 38 - Quadrado, paralelogramo e triângulo equicompostos pelas mesmas peças

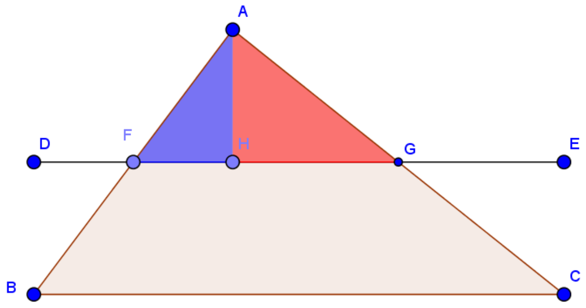


(Fonte: Robson Resende e Miranda)

Lema 2 - **Todo triângulo é equicomposto com algum retângulo.**

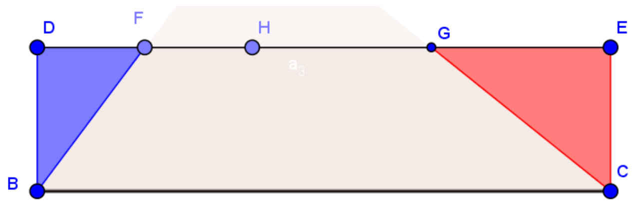
Para descrever essa equicomposição, considere um triângulo ABC e corte esse triângulo segundo uma reta paralela a base BC que passe pelos pontos médios F e G, dos lados AB e AC, respectivamente. Em seguida recorta-se o triângulo AFG em sua altura AH relativa a base FG, obtendo-se dois triângulos retângulos AHF e AHG, Figura 39. Estes triângulos podem ser rotacionados e encaixados nas posições BDF e CEG, respectivamente, obtendo assim o retângulo BDEC, Figura 40.

Figura 39 - Equicomposição de três peças: o triângulo ABC



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

Figura 40 - Equicomposição de três peças : o retângulo BCED



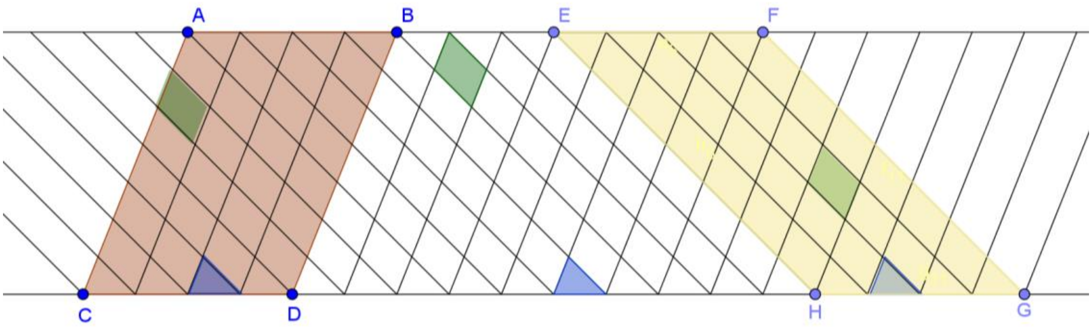
(Fonte: Robson Resende e Miranda)

Lema 3 - **Se dois paralelogramos tem áreas iguais e têm uma lado com mesma medida, então são equicompostos.**

Um procedimento para a construção desta equicomposição consiste em criar uma malha a partir de retas que sejam paralelas respectivamente aos lados dos paralelogramos que não sejam a base traçadas após dividir o lado de mesma medida no mesmo número de partes. A união das extremidades desses segmentos produz uma malha formado por triângulos e quadriláteros cuja contagem resulta na equicomposição.

Um exemplo dessa construção pode ser observado nos paralelogramos ABDC e EFGH, na figura 41. Nela foi criada uma malha traçando-se as paralelas aos lados AC e FG, respectivamente dos paralelogramos Observa–se que ambos contém exatamente a mesma composição se a expressarmos em termos de quadriláteros verdes e triângulos azuis. Os dois contém 8 triângulos azuis e 24 quadriláteros verdes. Assim conclui-se que são equicompostos.

Figura 41 - Malha constituída por paralelogramos provando que ABDC e EFGH são equicompostos pelas mesmas peças

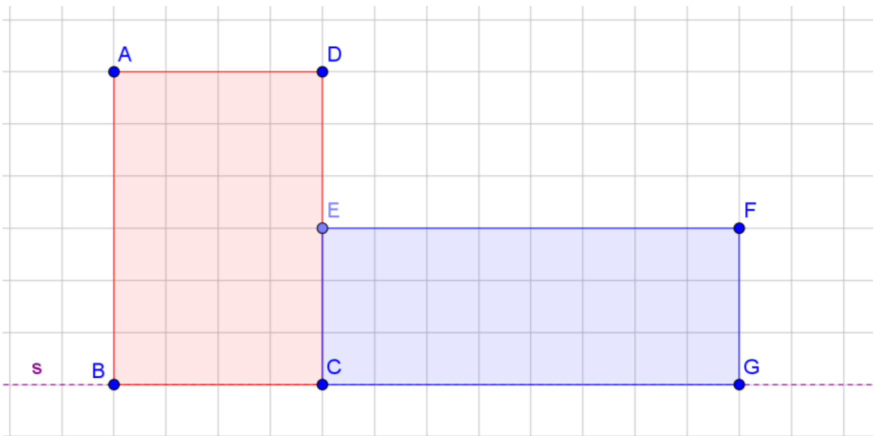


(Fonte: Robson Resende e Miranda)

Lema 4 - **Dois retângulos que têm áreas iguais são equicompostos.**

Um procedimento para a construção desta equicomposição é considerar os retângulos ABCD e ECGF com áreas iguais, e o vértice C em comum, com lados consecutivos em uma mesma reta *s*, Figura 42. Em seguida, as próximas etapas são:

Figura 42 - Retângulos equivalentes para se demonstrar equicomposição

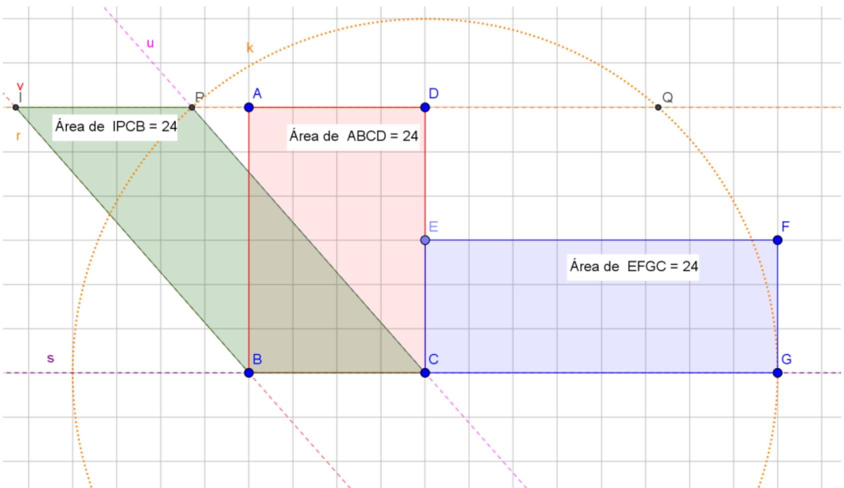


(Fonte: Robson Resende e Miranda)

- Cria-se uma circunferência k, com centro em C, cujo raio é a medida do maior lado entre os dois retângulos, na construção, o raio é a medida do segmento $\overline{CG}$.
- A seguir, traça-se uma reta r contendo a base AD do outro retângulo. Essa reta encontra a circunferência k em dois pontos: P e Q.
- A partir do ponto P e do centro C trace a reta u concorrente ao lado AB do retângulo.
- Trace a reta v paralela a reta u passando pelo vértice B do retângulo, interceptando a reta r no ponto I. Obtém-se assim o paralelogramo IPCB, Figura 43.

Como IPCB e ABCD são equivalentes e tem uma base comum BC, pelo Lema 3, eles são equicompostos. De forma semelhante, como a medida CP é a mesma medida CG, e IPCB e EFGC são equivalentes, é possível, pelo Lema 3 afirmar que IPCB e EFGC são equicompostos. Pelo Lema 1, se ABCD e EFCG são equicompostos a um mesmo paralelogramo, eles são equicompostos entre si. Assim, dois retângulos de mesma área serão sempre equicompostos.

Figura 43 - Paralelogramo IPCB equicomposto aos retângulos ABCD e EFGC



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

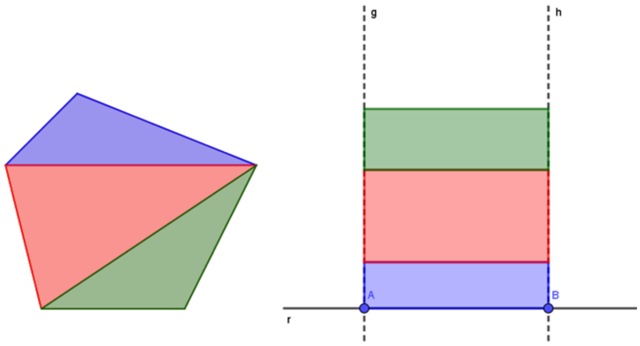
Lema 5 - **Todo polígono é equicomposto com algum retângulo**

O procedimento para essa equicomposição pode ser feito seguindo as etapas.

- Considere um polígono de n lados $A_1A_2 \dots A_n$
- Traçando-se do vértice A_1 todas as diagonais, obteremos $n-2$ triângulos denominados T_1, T_2,...,T_{n-2}.
- Cada triângulo T_i, pelo Lema 2, é equicomposto a um retângulo R_i, para $i = 1, \dots, n-2$. Há, portanto, $n-2$ retângulos equicomposto respectivamente, aos $n-2$ triângulos.
- Pelo Problema 3, constrói-se $n-2$ retângulos com uma mesma medida AB para um dos lados, denominados R'_i, para $i = 1, \dots, n-2$. Logo, têm-se $n-2$ retângulos R'_i tendo AB como medida de lado.
- Traça-se uma reta r, definindo sobre a mesma o segmento $\overline{AB}$. Constrói-se duas retas perpendiculares ao segmento $\overline{AB}$, uma pelo ponto A e outra pelo ponto B
- Dispõe-se os $n-2$ retângulos entre essas duas retas perpendiculares, um sobre o outro, sem que haja sobreposição.
- Dessa forma obtém-se um retângulo equicomposto ao polígono original.

Como um exemplo desta construção, têm-se na Figura 44, um pentágono que é equivalente a um retângulo. O pentágono original pode ser decomposto em 3 triângulos. Cada um deles pode é equivalente a um retângulo (Lema 3). Os retângulos podem ser rearranjados em uma mesma base dando origem a um retângulo maior que é equivalente ao pentágono original.

Figura 44 - Pentágono equicomposto a um retângulo



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

Teorema de Bolyai-Gerwien: "DOIS POLÍGONOS QUE TEM ÁREAS IGUAIS SÃO EQUICOMPOSTOS."

Para descrever esta equicomposição pode se proceder da seguinte forma.

Considere dois polígonos com área iguais, pelo Lema 5, cada um deles pode ser equicomposto a um retângulo. Portanto esses dois retângulos tem a mesma área. Pelo lema 4 esses retângulos são equicompostos. Logo, pelo Lema 1, dois polígonos quaisquer, com uma mesma área, são equicompostos.

No teorema de Bolyai-Gerwien, o termo "polígono" não significa necessariamente uma parte do plano limitada por uma única linha poligonal fechada. O teorema continua válido para figura mais complexas, limitadas por várias linhas poligonais fechadas.

A partir do teorema de Bolyai-Gerwien pode-se concluir que equivalência implica equicomposição, como equicomposição implica em equivalência, é muito comum encontrar os dois conceitos como sinônimos. Como por exemplo, na definição proposta por DOLCE e POMPEU (2005, p.301-02) que foi citada no início do capitulo.

5. HABILIDADES ENVOLVIDAS NO CÁLCULO DE ÁREA E ATIVIDADES PRÁTICAS PARA SE TRABALHAR COM ELAS EM SALA DE AULA

Neste capítulo apresentam-se diferentes habilidades que o conceito de área demanda e aspectos pedagógicos relacionadas a apropriação e compreensão das mesmas. Em seguida, apresentam-se algumas sugestões de atividades para que o professor trabalhe estas atividades em sala de aula, diversificando sua pratica e reforçando aspectos fundamentais deste conceito.

5.1 Habilidades envolvidas no conceito de área

Alguns aspectos do processo de ensino de área:

- É uma concepção que permite comparar duas superfícies (figuras);
- É um número positivo que quantifica o espaço ocupado por uma figura.
- É um número resultante de um cálculo envolvendo medidas;
- É o resultado do somatório de todas as pequenas partes que constituem um todo.

A cada uma dessas características relaciona-se uma parte importante do conceito de área. Uma real aprendizagem desse tema deve envolver de forma efetiva os seguintes aspectos:

- Equivalência de figuras
- Área enquanto grandeza.
- Área enquanto medida.
- Unidade de medida.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais estabelecem a importância desses enfoques já que listam habilidades referentes a cada um deles entre aquelas que devem ser trabalhadas no ensino fundamental, e ainda salientam:

> ... o trabalho com áreas deve apoiar-se em procedimentos que favoreçam a compreensão das noções envolvidas, como obter a área pela composição e decomposição de figuras cuja área eles já sabem calcular (recortes e sobreposição de figuras) por procedimentos de contagem (papel quadriculado, ladrilhamento), por estimativas e aproximações.(BRASIL, 1998, p.131)

Caçador (2012) propõe 8 habilidades que os alunos deveriam desenvolver a fim de efetivamente aprenderem o conceito de área.

1. Comparar figuras por transitividade;
2. Relacionar números a medidas;
3. Associar área a uma superfície limitada por uma figura;
4. Compreender uma figura enquanto composta por partes menores;
5. Padronizar uma figura para sua utilização enquanto unidade de área;
6. Compreender que o todo é a soma das partes;
7. Compreender sobre estruturação espacial e disposição retangulares no cálculo de área.
8. Compreender que se uma área for dividida e suas partes reagrupadas, a sua medida se conserva.

A estas habilidades, ainda poderíamos citar uma outra, mencionada inclusive nos PCNs (Brasil,1998): a distinção entre os conceitos de área e perímetro.

A primeira habilidade é o conceito de área sendo usado para dar significado a si próprio. Você calcula área, pois assim como o perímetro, com ela é possível comparar figuras.

> ...alguns procedimentos didáticos que explicitem tais distinções e, por outro lado, antecedam a construção da medida de área pela comparação de superfícies com procedimentos não numéricos, podem ser experimentados visando a superação das dificuldades de aprendizado do conceito de área (LIMA, 1998 apud Brito, 2003; p. 32).

Em seguida, o processo de ensino-aprendizagem deve focar no fato de que a área é uma medida e tratar de como obtê-la na prática, e associar que esta medida se refere a uma superfície. Neste processo o trabalho com material concreto é fundamental a fim de que os alunos desenvolvam uma aprendizagem efetiva.

A quarta, a quinta e a sexta habilidades relacionam-se a compreensão de que toda figura pode ser decomposta em figuras menores, e que a área é justamente a soma das áreas das partes.

Enquanto isso, a sétima habilidade refere-se a compreensão de que o cálculo de área de um retângulo envolve o produto de duas dimensões. Para que se chegue a esta compreensão a natureza do princípio multiplicativo das disposições retangulares deve ser mencionada e fixada.

A oitava habilidade se refere a compreensão da equivalência de figuras e da equicomposição das mesmas. Caçador (2012) ainda destaca que uma excelente forma de se trabalhar essa habilidade é com quebra cabeças do tipo tangram.

A habilidade seguinte se refere a uma necessidade que se verifica bastante entre os alunos do Ensino Fundamental: muitos não sabem diferenciar área de perímetro, e isto deve ser um objetivo continuo no ensino desse conteúdo.

> - As situações de aprendizagem devem voltar-se para situações de comparações que permitam a compreensão do conceito de perímetro, enquanto grandeza;
> - As situações iniciais de comparações devem ser entre linhas abertas, para evitar possíveis dificuldades nas sobreposições;
> - As situações devem permitir a distinção entre os conceitos de contorno e perímetro (BARBOSA, 2002, p. 33).

Acredita-se que a introdução de fórmulas muito precocemente no aprendizado de áreas sem um trabalho significativo no sentido de desenvolver as habilidades acima pode ser um dos motivos da dificuldade dos alunos na aprendizagem deste conteúdo, e de outros relacionados ao mesmo.

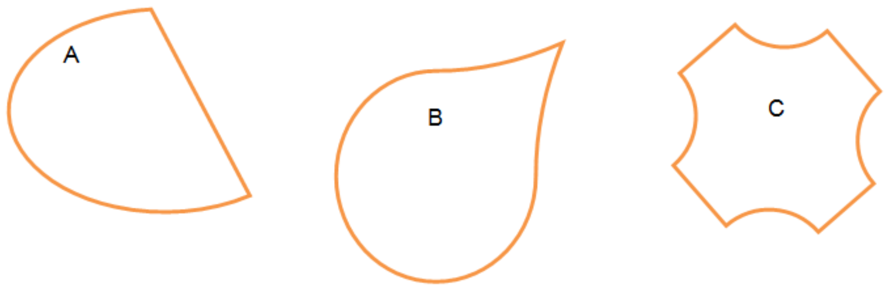
5.2 Atividades

As atividades reunidas a seguir, pretendem apontar um caminho para uma abordagem para o ensino de áreas no Ensino Fundamental. Esse caminho trabalha o conceito de área principalmente sob uma visão geométrica, introduzindo a abordagem algébrica gradativamente.

Atividade 1

Utilize os artifícios citados abaixo para comparar as áreas das seguintes regiões limitadas pelas curvas, Figura 45:

Figura 45 - Atividade 1 : Regiões



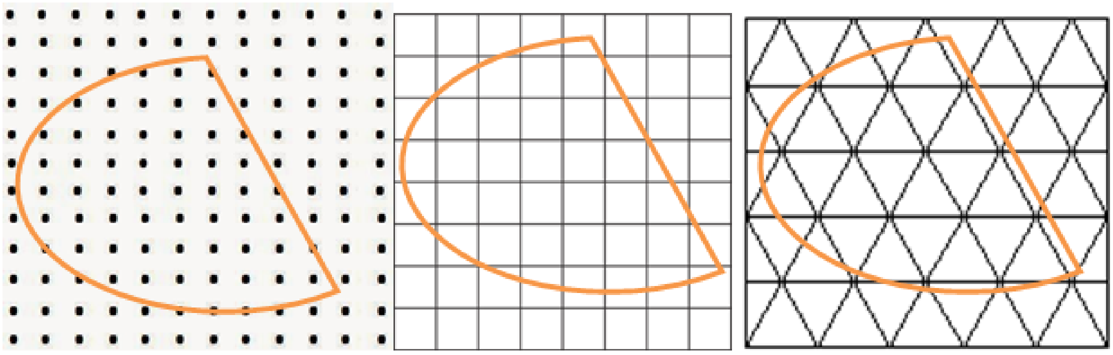
(Fonte: Robson Resende de Miranda – Ferramenta: Microsoft Word)

Artifício 1: Transporte a curva para uma malha pontilhada passando o lápis por cima do contorno da curva sobre a malha. Em seguida conte os pontos que estão no interior da curva e os que estão na fronteira da mesma. Faça então uma estimativa para área.

Artificio 2 - Crie uma malha com polígonos de um mesmo tipo e use esses polígonos para estimar a área de cada figura. A figura 46 traz um exemplo desse tipo de artifício.

Exemplo:

Figura 46 - Atividade 1: Exemplos de Malhas



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

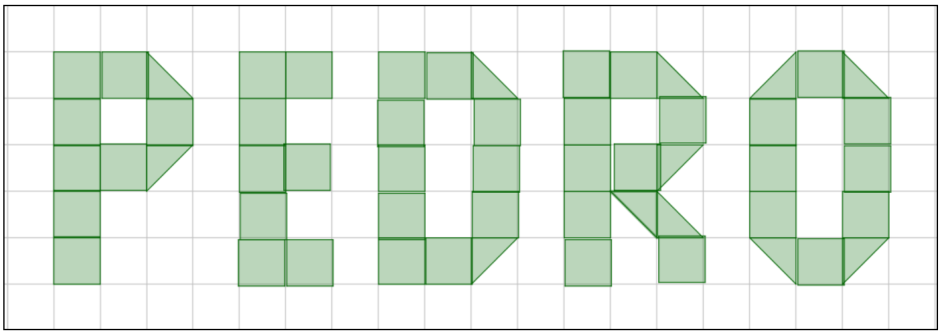
Observação:

Inspirada em uma atividade do fascículo de Áreas e volumes (SMOOTHEY, 1997, p.8-10), a atividade consiste em criar estratégias para se estimar a área de figuras aplicando as mesmas malhas e pontos. O objetivo é perceber que área é uma grandeza que pode ser comparada. A atividade pode ser aplicada em dupla, ou grupos de discussão e pode ainda servir de ponte ao aprendizado de técnicas e a discussão de materiais. Podem-se usar diferentes malhas para mostrar que uma mesma área pode ser expressa em diferentes unidades. Essa atividade é um experimento matemático. E pode-se acrescentar novas figuras ou novas malhas para dar continuidade a mesma. A atividade é indicada para introdução (ou reforço) a este conteúdo no 6º ano do Ensino Fundamental.

Atividade 2

Pedro deseja escrever seu nome no fundo de uma piscina usando ladrilhos coloridos, conforme a figura a seguir:

Figura 47 - Atividade 2: ladrilhos da piscina.



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

Note que a única divisão que está sendo feita nos ladrilhos é na diagonal.

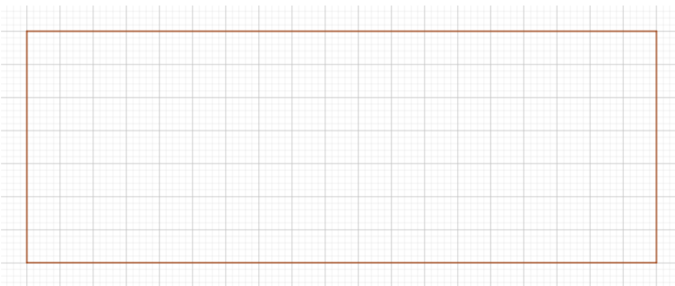
Pede-se:

a) A área de cada letra do nome de Pedro. Considere cada ladrilho como sendo 1x1.

b) Qual deve ser a área total da piscina para que o nome de Pedro possa ser escrito conforme o modelo acima? (Respeitando-se o espaço de um quadradinho das laterais).

c) Alice, irmã de Pedro, gostou tanto que deseja fazer em sua piscina o mesmo. Construa na malha a seguir o nome de Alice tal que o A tenha área de 11 quadradinhos, o L tenha área de 7 quadradinhos, o I tenha área de 5 quadradinhos, o C tenha área de 8 quadradinhos e o E tenha área de 9 quadradinhos. Respeite o espaço de um quadradinho das laterais.

Figura 48- Atividade 1: malha



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

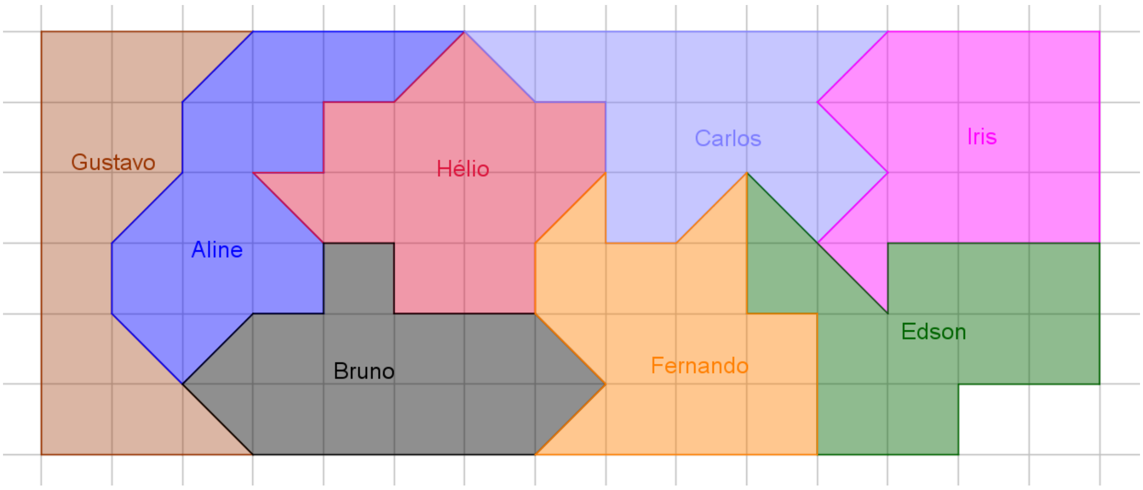
Observação:

Esta atividade apresenta de maneira contextualizada a área do retângulo e o princípio multiplicativo que dá origem a expressão dessa área. É uma atividade importante, pois nela o aluno acaba relacionando a superfície a um número, criando a noção de área enquanto medida. Por seu caráter lúdico e criativo a atividade é indicada ao 6º e 7º Ano do Ensino Fundamental.

Atividade 3

Seu Tião teve 8 filhos. Na hora de distribuir a área de sua fazenda entre os filhos ele fez a distribuição conforme o quadro abaixo:

Figura 49 - Atividade 3: divisão do terreno



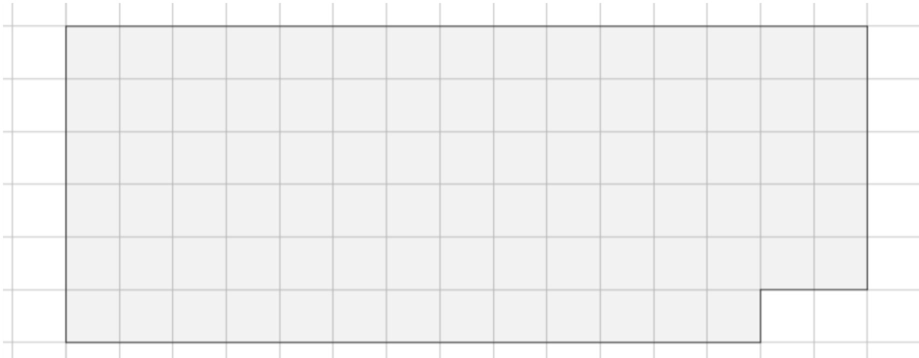
(Fonte: Robson Resende e Miranda)

Considere um quadradinho como 1 unidade de área e responda:

a) Qual a área de cada terreno?

b) É possível dividir o mesmo terreno de outra maneira mantendo a mesma área para cada filho? Faça no quadro abaixo uma outra divisão.

Figura 50 - Atividade 3: malha



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

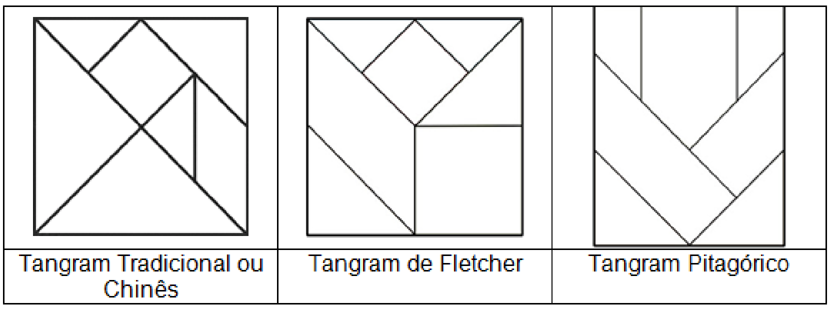
Observação:

O objetivo desta atividade é trabalhar o conceito de equicomposição uma vez que todas as figuras têm a mesma área. A letra b também trabalha a criatividade provocando uma discussão sobre o mesmo tema que consolida a aprendizagem. A atividade é interessante para alunos do 6º ao 8º ano do Ensino Fundamental. No 8º Ano, ela pode anteceder, por exemplo, a dedução das fórmulas para cálculo de área por decomposição.

Atividade 4

Tangram é um quebra cabeças geométrico. Você separa as peças e usando as mesmas constrói novas imagens. Existem vários tipos de tangram. Na figura 50, há três exemplos de tangram, todos com sete peças.

Figura 51 - Atividade 4: Diferentes Tangram

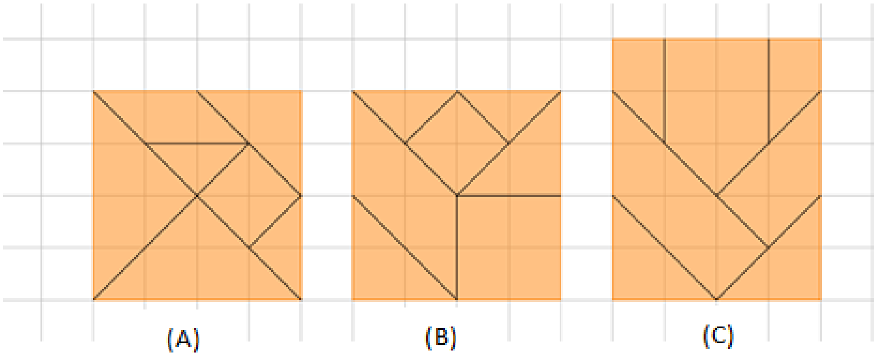


(Fonte: Robson Resende e Miranda)

O diagrama abaixo te permite encontrar a área de cada peça dos tangrans citados em função de um quadrado unitário.

a) Decomponha o tangram, numere suas peças e calcule as suas respectivas áreas preenchendo a tabela abaixo:

Figura 52 - Atividade 4: decomposição dos Tangram



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

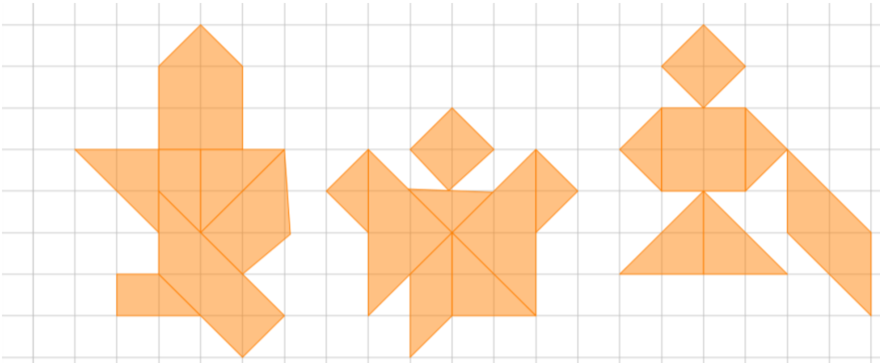
Tangram Clássico (a)		Tangram de Fletcher (b)		Tangram Pitagórico (c)	
Peça	Área	Peça	Área	Peça	Área

b) Quais são os polígonos que aparecem nos tangrans?

c) Existe algum polígono que aparece nos três?

d) Ainda com relação aos tangram anteriores, identifique com qual deles foi feito cada uma das seguintes figuras.

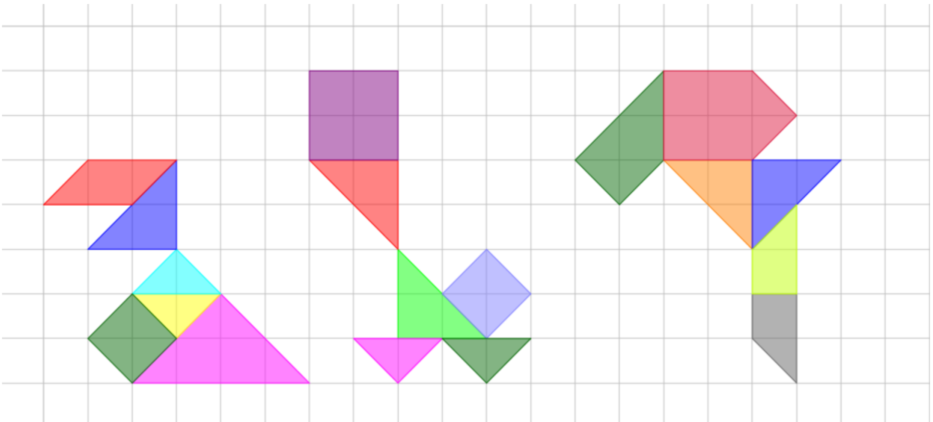
Figura 53 - Atividade 4: montagem do Tangram



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

e) Usando os tangrans da Figura 51, foi construído os desenhos da Figura 54, excluindo-se uma peça de cada um. Calcule a área de cada desenho?

Figura 54 - Atividade 4: Tangram incompleto



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

f) Descreva uma forma para se chegar a área das figuras acima que não seja "contar quadradinhos".

____

____

____

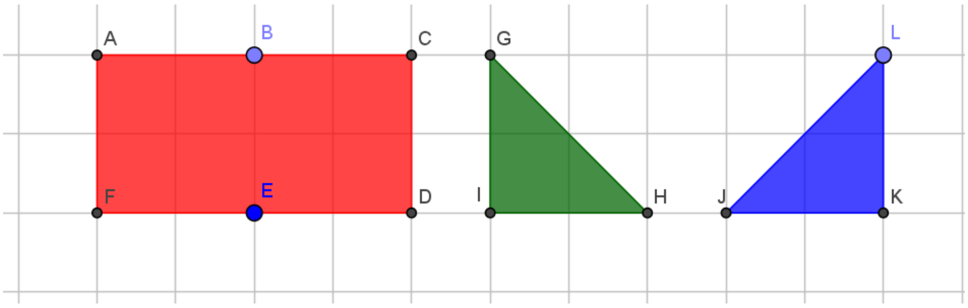
Observação:

Por ser uma excelente forma de se trabalhar equicomposição, Tangram é muito mencionado nos estudos sobre área. Contudo, o trabalho com esse quebra-cabeças em sala de aula, costuma se fixar apenas ao objetivo estético de montar figuras, diminuindo o objetivo matemático secundário de vislumbrar a equicomposição. A fim de um melhor aproveitamento explorando os aspectos matemáticos no Tangram a estratégia foi trabalhar não com um, mas com 3 diferentes tangrans e compará-los. O objetivo da atividade, que pode ser aplicada em pequenos grupos como um estudo dirigido é identificar polígonos, reconhecer que o todo é a soma das partes, e consolidar que figuras equicomponíveis tem a mesma área. A letra f, em que o aluno deve descrever uma outra forma para se chegar a área das figuras sem utilizar contagem é um lembrete de que há mais coisas para se aprender sobre área além de fazer contagem. Por seu caráter lúdico a atividade é indicada para os alunos do 6º e 7º ano do Ensino Fundamental.

Atividade 5

Abaixo são dadas 3 figuras. Note que o retângulo tem lados 2 u e 4 u e cada triângulo tem dois de seus lados medindo 2 u. Você deve unir os triângulos ao retângulo formando novas figuras. Para isso você pode unir os lados de medida 2 u do triângulo aos lados de medida 2 u do retângulo, ou aos segmentos de medida 2 u que surgem quando se divide os lados de medida 4 em seu ponto médio.

Figura 55 - Atividade 5: figuras para encaixar



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

Desenhe 5 figuras distintas que podem ser formadas conforme a regra acima. Você consegue classificar todas elas de acordo com o número de lados? Qual é a área de todas elas?

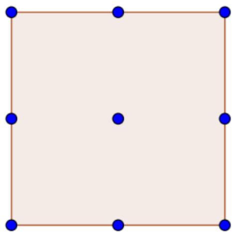
Observação:

Embora se espere que o aluno perceba a equicomposição entre as figuras que está formando, o objetivo maior desta atividade é identificar as figuras criadas de acordo com o número de lados. Recomenda-se a atividade para o 6º Ano do Ensino Fundamental para introduzir o nome dos polígonos.

Atividade 6

Dado o quadrado com nove pontos indicados, Figura 55, desenhe 6 possíveis triângulos distintos que podem ser obtidos, tendo por vértices três desses nove pontos. Depois indique quais você espera, que tenham mesma área.

Figura 56 - Atividade 6: quadrado de 9 pontos



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

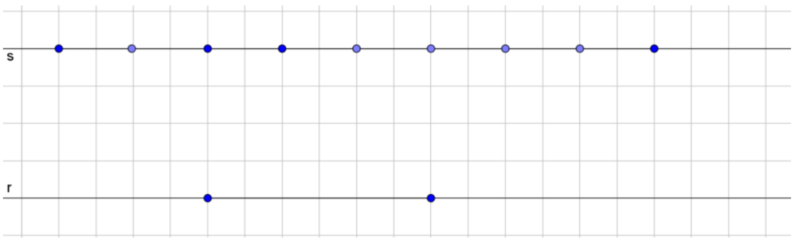
Observação:

Esta atividade visa trabalhar a criatividade do aluno na construção de triângulos. A noção de que a área do triângulo é a metade do produto da base pela altura pode ser desenvolvida durante a realização desta atividade. A atividade pode se aplicada no 6º ano antecipando a apresentação da fórmula para cálculo da área do triângulo, e mostrando que triângulos de mesma base e mesma altura têm áreas iguais.

Atividade 7

São dadas duas retas paralelas r e s. Em r marcou-se dois pontos e em s, nove, Figura 57.

Figura 57 - Atividade 7: pontos em paralelas



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

a) Quantos triângulos são possíveis de desenhar tendo por vértice os dois pontos de r e o terceiro ponto escolhido em s?

b) A área desses triângulos tem algo em comum? Sugestão: encontre as medidas da base e da altura de cada um deles.

c) Se você escolhesse 2 pontos quaisquer de s e um ponto de r para serem possíveis vértices de um triângulo, quantos triângulos você consegue construir?

d) Observe que os pontos em s estão distribuídos com uma mesma regularidade (2 unidades de distância um do outro). Quantos triângulos com áreas distintas você pode obter, tomando-se 2 pontos de s e um ponto de r?

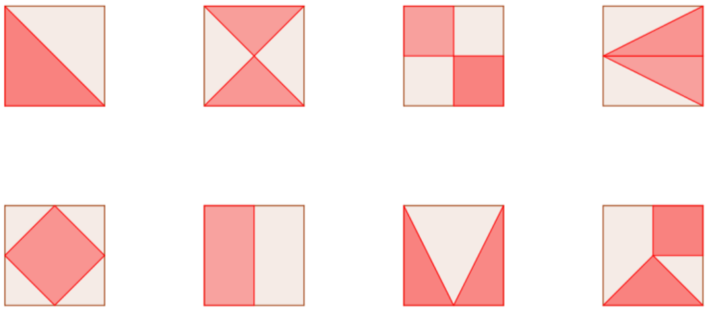
Observação:

A atividade foi criada para que o aluno verifique a conservação da área do triângulo quando se mantém a base e altura, deslocando-se o terceiro vértice sobre uma reta paralela a base. Envolve uma noção de contagem cuja resolução espera-se, que estimule os alunos ao raciocínio. Indica-se a aplicação do mesmo no 8º ano do Ensino Fundamental.

Atividade 8

Observando os quadrados a seguir, descubra a relação entre a área em vermelho e a área do quadrado.

Figura 58 - Atividade 8: possíveis metades para o quadrado



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

Observação:

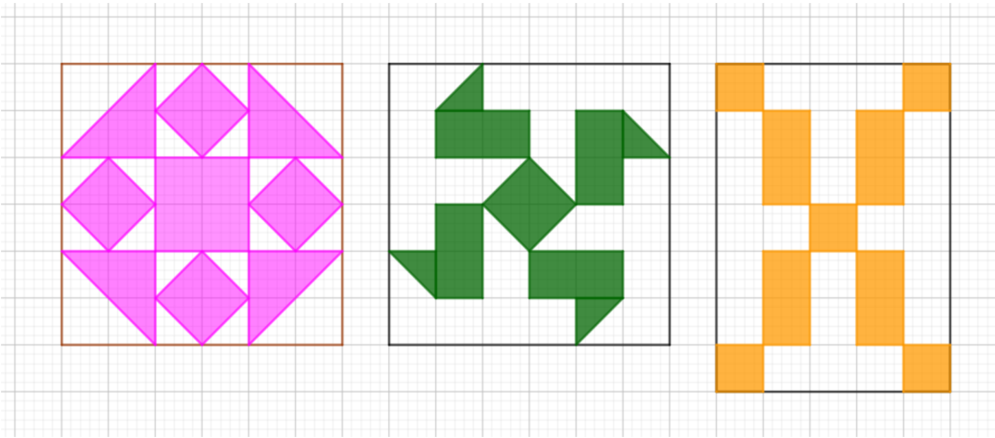
Esta atividade complementa a atividade 6 e abre caminho para a atividade 9. O que se pretende é chamar a atenção do aluno para diferentes formas de se dividir uma região construindo figuras equivalentes. Intuitivamente a atividade visa despertar interesse em desconstruir e reconstruir figuras. O exercício foi inspirado em um problema de múltipla escolha da OBMEP. O mesmo é indicado para alunos do 6º e 7º Ano do Ensino Fundamental.

Atividade 9

Mosaico é um trabalho decorativo, praticado desde os tempos antigos. Muitos deles são considerados grandes obras de arte.

Na figura 58, são dadas alguns mosaicos com figuras geométricas.

Figura 59 - Atividade 9: exemplos de mosaicos

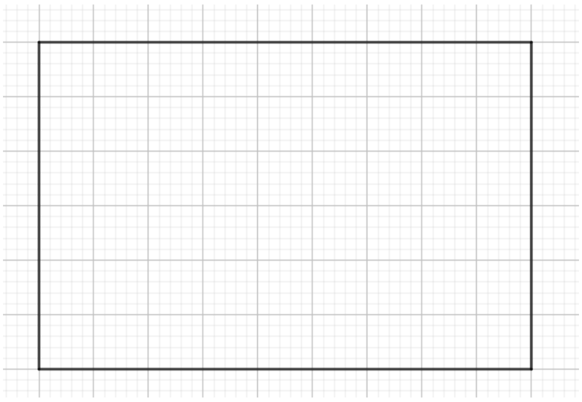


(Fonte: Robson Resende e Miranda)

a) Em cada um dos mosaicos ache uma razão entre a área colorida e a área total do quadrilátero.

b) Crie abaixo um mosaico em que a relação entre a área colorida e a área em branco seja 1:1.

Figura 60 - Atividade 9: malha para criação de mosaico



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

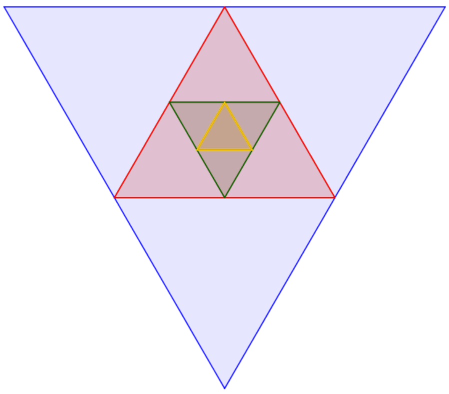
Observação:

A construção de mosaico é uma atividade lúdico-pedagógica que trabalha regularidade e organização. Ela permite que o aluno encontre uma relação entre a quantidade de quadradinhos coloridos e não coloridos, ou destes com a região total, e desenvolva assim um raciocínio sobre razão e proporção. Sugere-se essa atividade para os 6º e 7º anos do Ensino Fundamental.

Atividade 10

Na figura abaixo temos 4 triângulos equiláteros: o maior desenhado em azul, dentro dele o vermelho, dentro do vermelho um verde, e dentro do verde um amarelo.. O menor deles, que está desenhado de amarelo tem área 1 unidade. Encontre a área do maior triângulo que está desenhado em azul.

Figura 61 - Atividade 10: unidade triangular



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

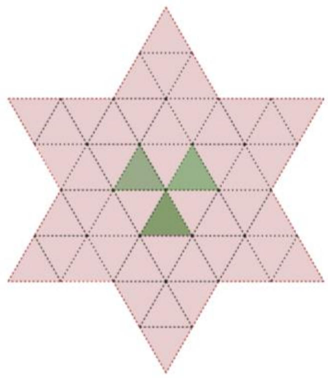
Observação:

O objetivo desta atividade é determinar a área tomando por unidade de área um triângulo e não um quadrado como é feito usualmente. Durante a realização da mesma o aluno tem que dividir os triângulos maiores a fim de se obter os triângulos menores e ao fazer isso ele utiliza a noção de paralelismo. É indicado para o 8º Ano e para o 9º ano do Ensino Fundamental.

Atividade 11

A área total da estrela da Figura 61 é 96 u^2 Encontre a medida da área da figura colorida em verde no interior da estrela.

Figura 62 - Atividade 11: estrela de triângulos



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

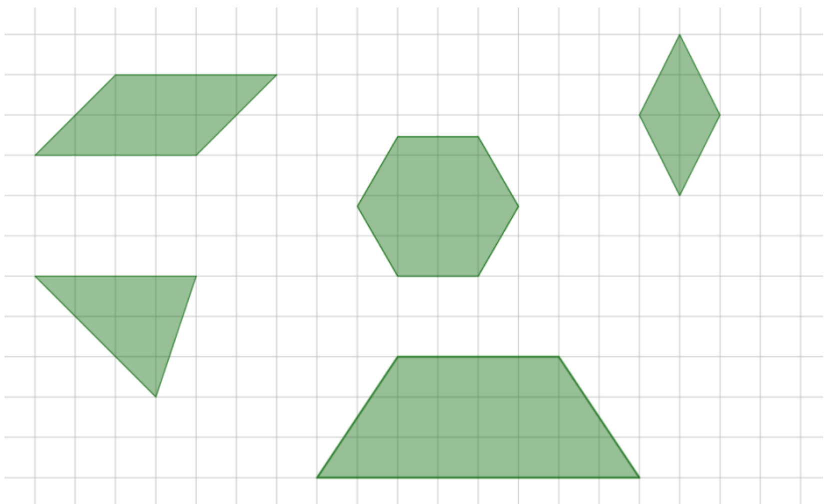
Observação:

O objetivo desta atividade é se chegar a uma unidade de área triangular, a partir do conhecimento da área do todo. É um exercício complementar ao anterior a fim de desenvolver e consolidar a ideia de área enquanto medida. É indicado para os 7º e 8º anos do Ensino Fundamental.

Atividade 12

Em cada polígono da figura 63 faça a decomposição que se pede:

Figura 63 - Atividade 13: Polígonos para divisão em partes iguais



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

a) O paralelogramo em 4 partes de mesma área
b) O hexágono em 6 partes de mesma área
c) O triângulo em 4 partes de mesma área.
d) O losango em 8 partes de mesma área
e) O trapézio em 12 partes de mesma área.

Observação:

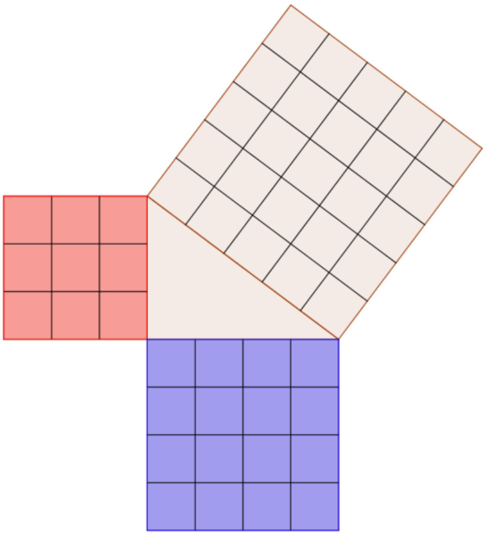
Pretende-se na presente atividade estimular a criatividade do aluno na decomposição de figuras e trabalhar algumas ideias chave como a divisão em triângulos a partir de um mesmo vértice, mantendo a altura e tendo bases de mesmo tamanho. Também trabalha com a divisão por meio da diagonal de um retângulo ou paralelogramo, mostrando que as áreas nesse caso são iguais. É indicado para o 8º Ano do Ensino Fundamental.

Atividade 13

Na figura a seguir encontra-se um triângulo retângulo[17] de lados medindo 3, 4 e 5 com quadrados tendo como lados os catetos e a hipotenusa. Qual é a relação de equivalência de área que podemos estabelecer nesta construção? Esse teorema é um dos mais famosos teoremas da matemática, chamado “teorema de Pitágoras”.

[17] Em um triângulo retângulo o maior lado é denominado hipotenusa e os outros dois catetos.

Figura 64 - Atividade 14: Teorema de Pitágoras



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

____
____
____
____

Observação:

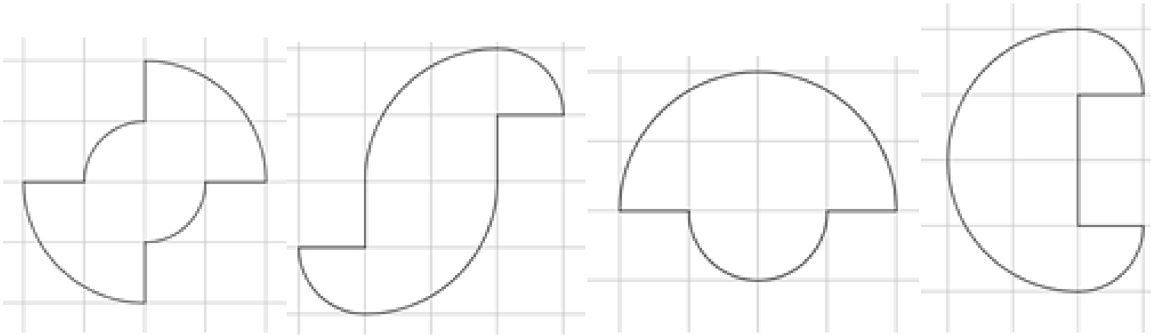
No próximo capítulo deste trabalho retorna-se a esse teorema com outras formas de demonstração para o mesmo via decomposição. É indicado para os 8º e 9º anos do Ensino Fundamental.

Atividade 14

A seguir têm-se quatro regiões[18] de mesma área. Para comprovar você pode decompor cada uma delas em 4 partes (setores circulares) e verificar que essas 4 partes são iguais em todas as figuras.

[18] Regiões curvas: regiões em limitadas por linhas que não são segmentos de reta, como o círculo, por exemplo.

Figura 65 - Atividade 15: Decomposição em setores circulares



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

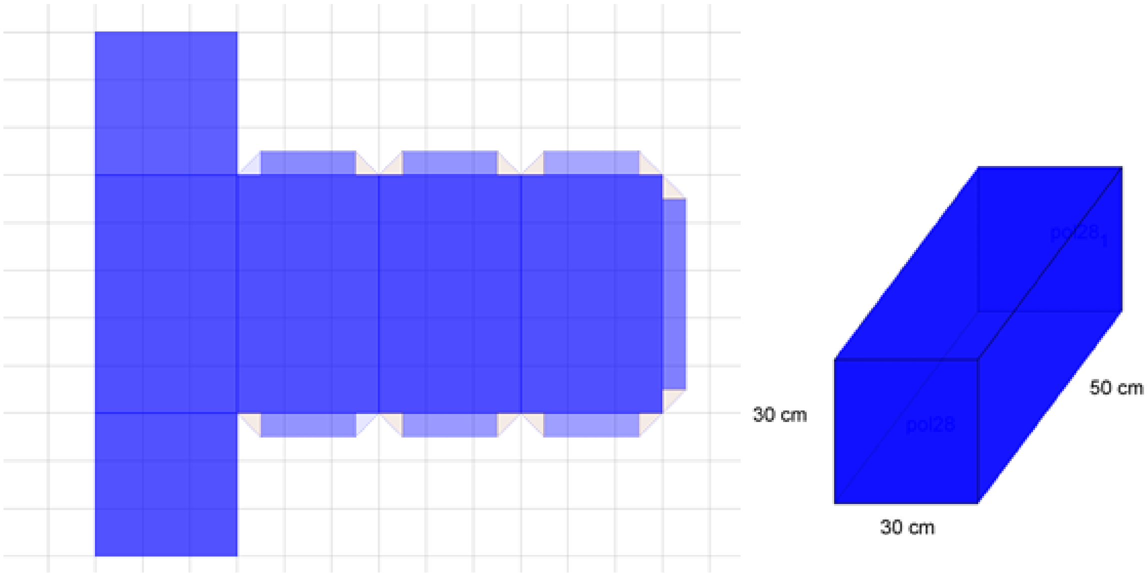
Observação:

O problema em questão trabalha com composição e decomposição de áreas de setores circulares. A solução deste problema é dividir as figuras em quartos de círculo. Se julgar conveniente, faça a construção das figuras em moldes de cartolina para recortar e montar. É indicado para o 9º ano do Ensino Fundamental.

Atividade 15

A figura 66 é a planificação de uma caixa cuja altura e largura são 30 cm cada e o comprimento é 50 cm. Sabendo que a margem para colar tem 5 cm de largura e 10 cm a menos que o lado que ela se apoia, calcule a área de cartolina necessária para se fazer esta caixa.

Figura 66 - Atividade 16: Planificação espacial



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

Observação:

Esta atividade consiste em um problema de natureza cotidiana envolvendo área, que é calcular quanto de papelão se usa para fazer uma caixa. Aqui já se trabalha com unidade de medida de comprimento e de área definidas. É um problema de decomposição relativamente simples, uma vez que as áreas são retangulares, mas importante, pois introduz a visualização espacial para o aluno. É indicado para os alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental.

6. APLICAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA DE ÁREA

Este capítulo complementa os temas abordados nos capítulos anteriores, exemplificando-os, e tratando-os de uma maneira mais minuciosa. Trata-se de um capítulo de aplicações e demonstrações usando equivalência de área e decomposição de figuras. Inicialmente são apresentadas diversas demonstrações para o teorema de Pitágoras a partir de equivalência de áreas. A seguir são trabalhadas algumas outras fórmulas cuja dedução envolve equivalência e o conhecimento de relações métricas no triângulo retângulo. Por fim, estão presentes também aplicações de cálculo de área em regiões de contorno curvo.

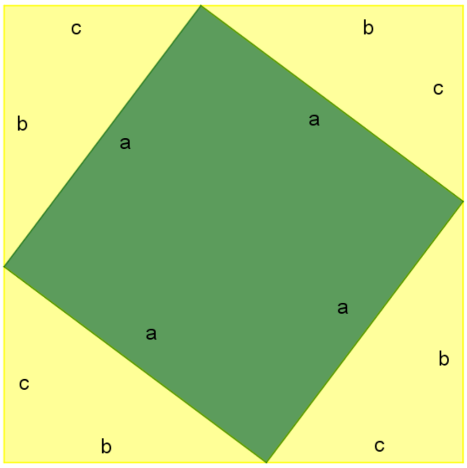
6.1 O Teorema de Pitágoras e equivalência de áreas

O teorema de Pitágoras é um exemplo que pode ser utilizado na aplicação de equivalência de áreas. Compreender o teorema para além de sua forma algébrica é uma forma de estimular os alunos a pensarem geometricamente. Há vários raciocínios geométricos pelos quais se demonstra este teorema. A seguir apresentam-se alguns deles.

6.1.1 Demonstração clássica (demonstração hindu)

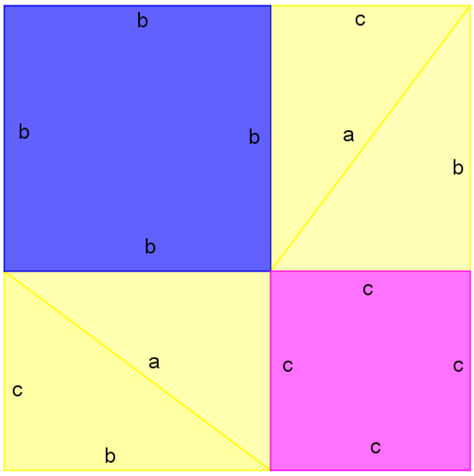
Nesta demonstração, partindo-se de 4 triângulos retângulos iguais de catetos medindo b e c, e hipotenusa medindo a faz-se duas construções. Na primeira dispõem-se os triângulos de modo a formar um quadrado interno cuja medida do lado é a, juntamente com um quadrado externo cuja medida dos lados é $b + c$, Figura 67. Na Figura 68 com os mesmos 4 triângulos retângulos formam-se 2 retângulos de dimensões b e c que unidos a dois quadrados cujos lados são b e c formam um quadrado externo igual ao da primeira figura com lado medindo $b + c$. Como os quadrados externos são iguais, e as peças triangulares também, a área do quadrado interno da figura 67 tem de ser igual a soma das áreas dos quadrados da Figura 68, ou seja $a^2 = b^2 + c^2$. Portanto a área do quadrado de lado medindo a é igual a soma das áreas dos quadrados de lados medindo b e c.

Figura 67 - Demonstração clássica (hindu): quadrado da hipotenusa



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

Figura 68 - Demonstração clássica (hindu): quadrado dos catetos



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

6.1.2 Demonstração de Perigal

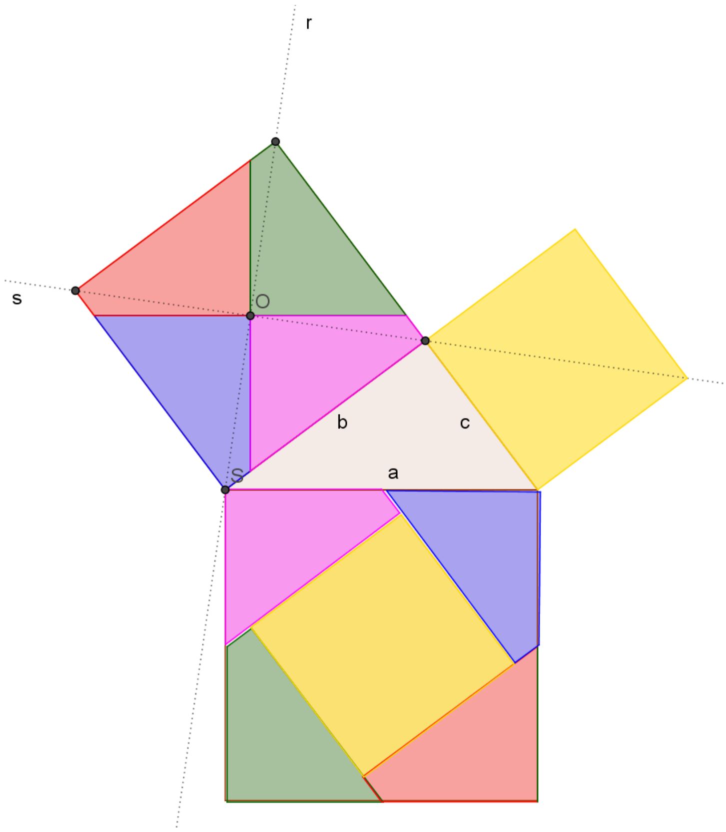
Uma outra demonstração do teorema, que envolve decomposição e equivalência é chamada de demonstração da dissecção das áreas, é atribuída ao livreiro londrino Henry Perigal (1801-1898).

O procedimento para esta demonstração é o seguinte:

- Toma-se um triângulo retângulo e constroí-se três quadrados tendo como medida cada um dos lados do triângulo.
- Traça-se as diagonais do quadrado tendo como lado maior dos catetos, essas diagonais se encontram em um ponto O que é o centro deste quadrado.
- Traça-se duas retas passando por este centro: uma deve ser paralela a hipotenusa e a outra perpendicular .
- Desta forma decompoe-se o quadrado apoiado neste cateto em 4 quadrilateros iguais.
- Com essas quatro peças e o quadrado tendo como lado o menor cateto pode-se compor o quadrado que tem como lado a hipotenusa, Figura 69.

Observe que nessa construção não é necessário rotacionar as peças. Elas se encaixam apenas deslocando-as.

Figura 69 - Demonstração de Perigal



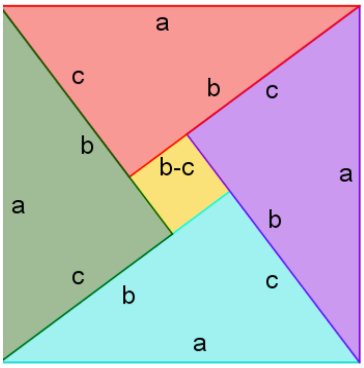
(Fonte: Robson Resende e Miranda)

6.1.3. Demonstração de Bhaskara

Uma outra demonstração é atribuída ao matemático hindu Bhaskara do século XII. O Procedimento para essa demonstração é o seguinte:

- Considere quatro triângulos retângulos com catetos medindo b e c, sendo $b > c$, e hipotenusa medindo a. Considere também um quadrado de lado medindo a.
- Disponha os quatro triângulos retângulos no interior do quadrado tendo a hipotenusa apoiada sobre os lados do quadrado. Observe que no centro deste quadrado forma-se um quadradinho de lado $b - c$, Figura 70.

Figura 70 - Demonstração de Bhaskara – composição do quadrado original



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

- Neste ponto já é possível demonstrar algebricamente que o quadrado externo de lado medindo a foi decomposto em quatro triângulos retângulos de lado b e c , e um quadradinho de lado $b - c$. Basta para isso observe que a area do quadrado maior é a soma da área dos 4 triângulos retângulos acrescida da área do quadradinho.

Ou seja,

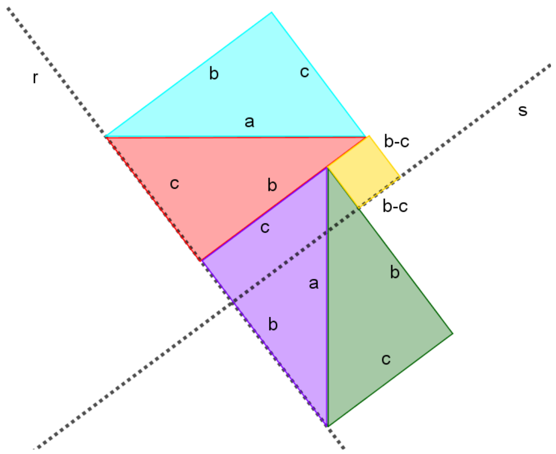
$$a^2 = 4.\frac{b.c}{2} + (b - c)^2$$

que ao ser desenvolvida resulta na expressão

$$a^2 = b^2 + c^2$$

- Geometricamente, pode-se chegar a igualdade tomando-se os triângulos 2 a 2 e construindo com eles dois retângulos que devem ser dispostos um ao lado do outro, em uma mesma reta r, sendo o apoio de um o lado de medida c e o apoio do outro o lado de medida b**.** O quadradinho de lado medindo $b - c$, deve ser apoiado no espaço “em L” que se forma na união dos dois retângulos, Figura 71.

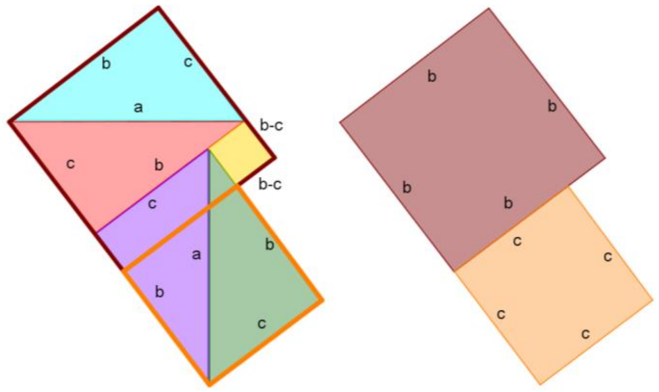
Figura 71- Demonstração de Bhaskara - nova composição



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

- A seguir, decompõe-se novamente a figura, utilizando para isso, a reta perpendicular a r que contem o lado do quadradinho que não está apoiado sobre o retângulo, Figura 72. Ao fazer isso, originam-se dois quadrados cujos lados medem respectivamente, b e c.
- Assim, como o quadrado original de lado medindo a foi decomposto em dois quadrados menores de medidas b e c, demonstrou-se o teorema de Pitágoras.

Figura 72 - Demonstração de Bhaskara – decomposição final



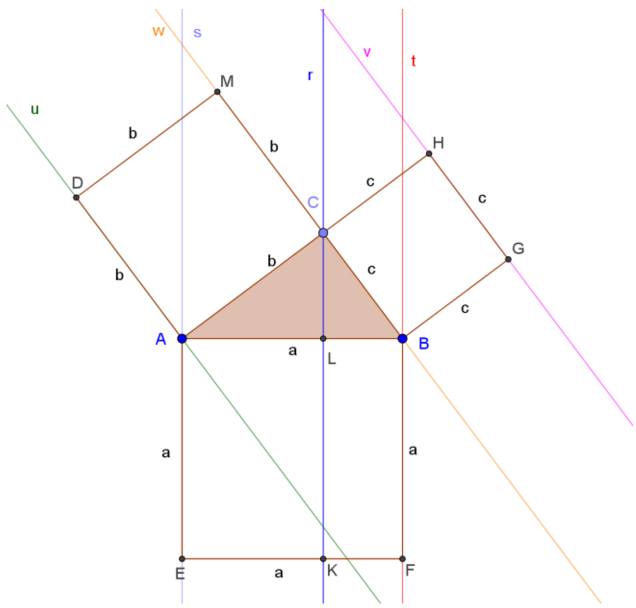
(Fonte: Robson Resende e Miranda)

6.1.4 Demonstração de Euclides

A demonstração de Euclides está presente no Livro I de “Os Elementos”. Para a construção da mesma, o procedimento é o seguinte:

- Cria-se um triângulo retângulo ABC de catetos medindo b e c, e hipotenusa medindo a. Sobre os lados desse triângulo constroem-se quadrados ABFE com lado medindo a, ACMD com lado medindo b e BCHG com lado medindo c.
- Traça-se a reta r que contém a altura relativa a hipotenusa do triângulo ABC. Determina-se também a reta w contendo o menor cateto do triângulo ABC.
- Na sequência constroem-se as retas s, t, u e v, sendo s e t paralelas a r, contendo respectivamente os lados $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$ do quadrado maior; e u e v, retas paralelas a w, contendo respectivamente o lado $\overline{AD}$ do quadrado médio e o lado $\overline{GH}$ do menor quadrado. Figura 73.

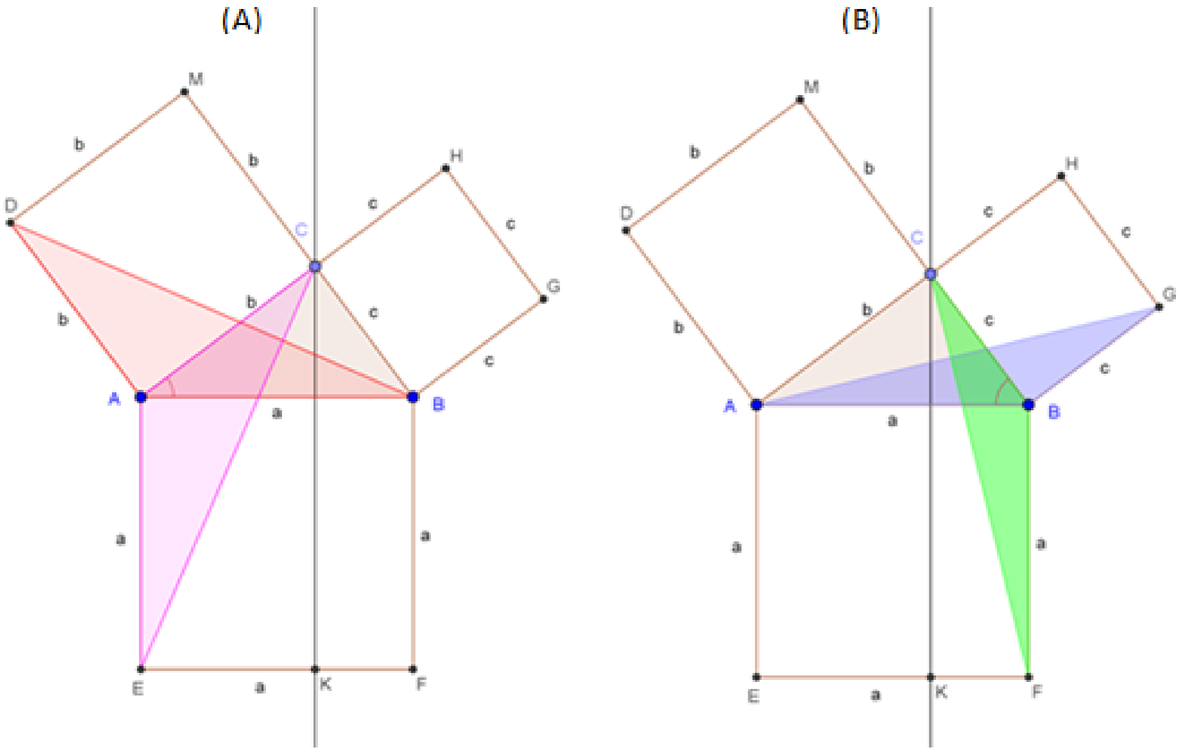
Figura 73 - Demonstração de Euclides - triângulo originando os quadrados e retas



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

- Destacando-se os triângulos CAE e DAB na construção verifica-se que os mesmos são congruentes pelo caso LAL, pois ambos tem lados medindo a e b e o ângulo entre esses lados medindo $90° + \alpha$, Figura 74 (A). De mesmo modo, ABG e FBC também serão congruentes, Figura 74 (B).

Figura 74 - Demonstração de Euclides: triângulos congruentes



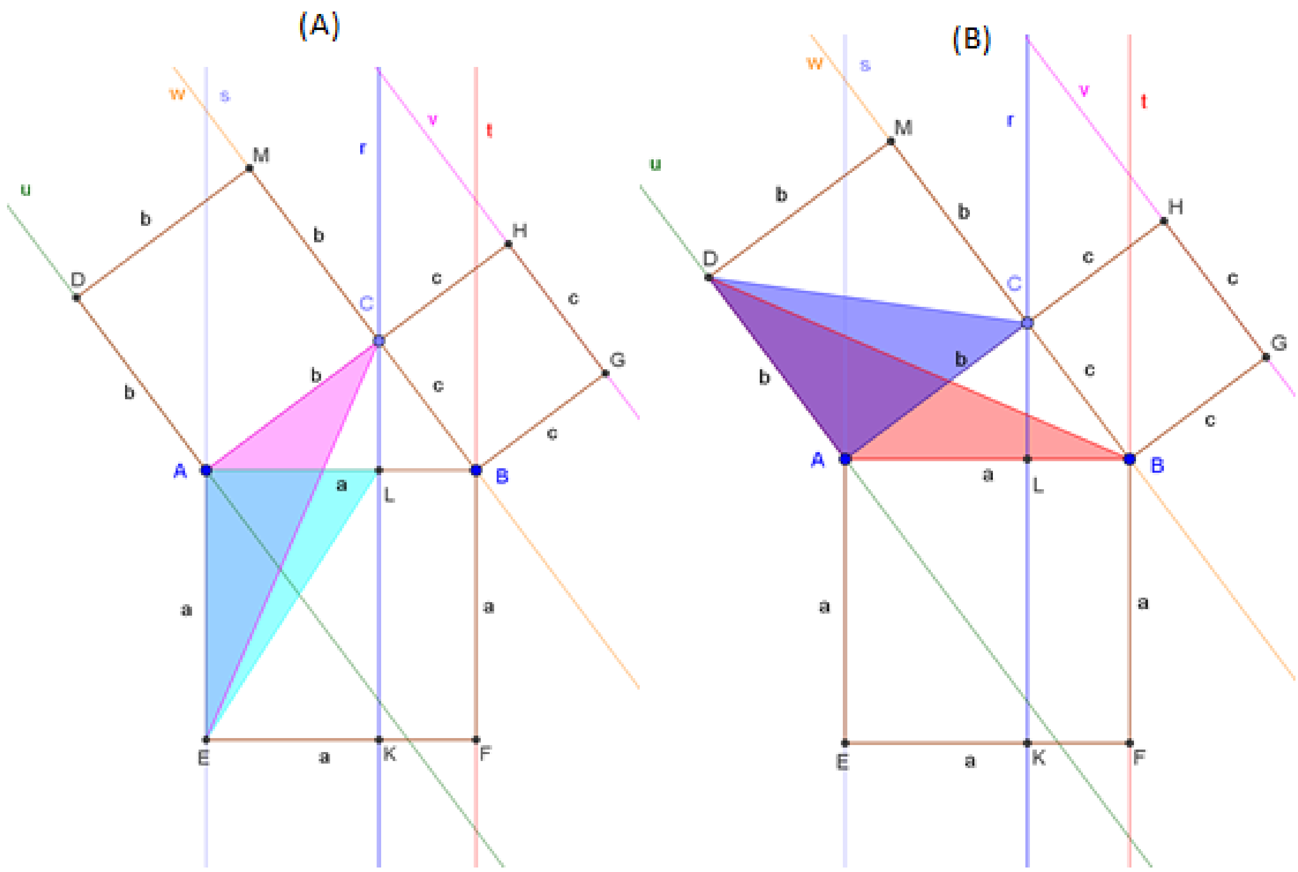
(Fonte: Robson Resende e Miranda)

- Se comparamos os triângulos CAE e LAE são equivalentes, pois tem a mesma base $\overline{AE}$ e a mesma altura $\overline{AL}$, Figura 75 A. Como $\overline{EL}$ é a diagonal do retângulo, então a área de ALKE é o dobro da área de CAE.

- De forma semelhante, comparando os triângulos ADB e ADC eles também são equivalentes, pois tem a mesma base $\overline{AD}$ e a mesma altura $\overline{AC}$, Figura 75 (B). Como $\overline{CD}$ é a diagonal do quadrado , então á area de ADMC é o dobro da área de DAB.

- Como CAE e DAB são congruentes, ALKE e ADMC são equivalentes.

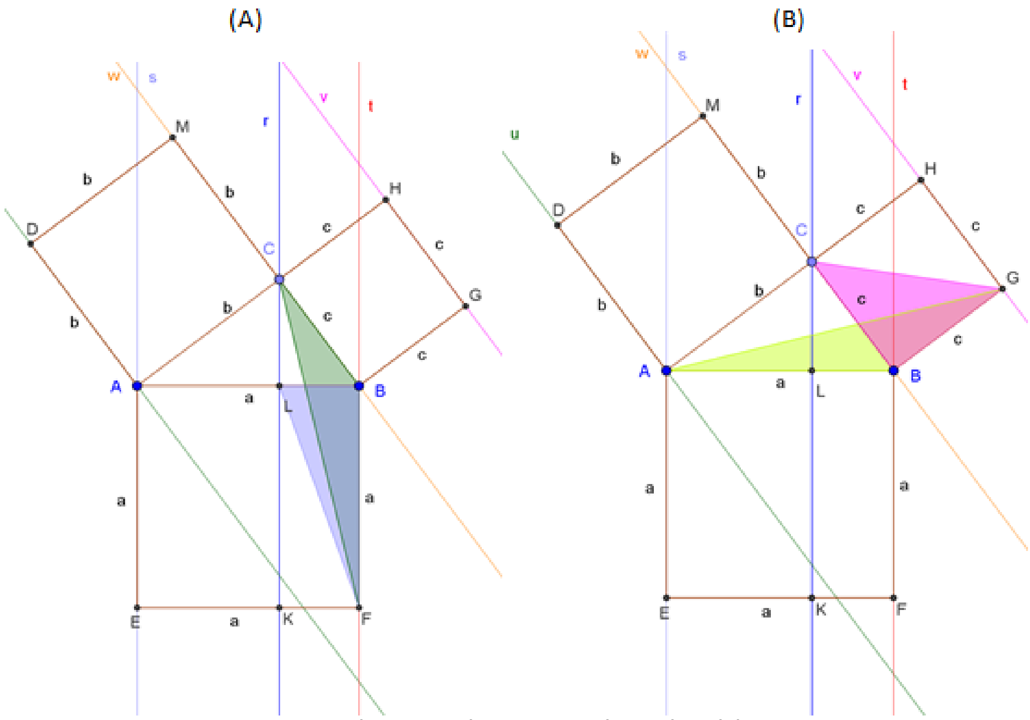
Figura 75 - Demonstração de Euclides: equivalência de triângulos à esquerda



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

- Analogamente a este procedimento compara-se FBC e ABG, triângulos congruentes. FBL é equivalente a FBC Figura 76 (A), e CBG é equivalente a ABG Figura 76 (B). Assim BLKF têm o dobro da área de FBC e é equivalente a BCHG que tem o dobro de área de ABL .

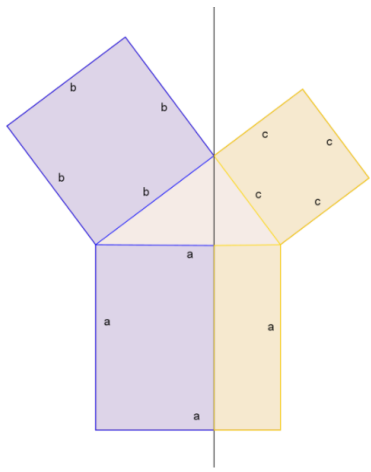
Figura 76 - Demonstração de Euclides - equivalência de triângulos a direita



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

- Como a esquerda ou a direita de r os quadrados e retângulos são equivalentes, o quadrado maior é equivalente a soma dos dois quadrados menores, o que comprova o teorema de Pitágoras.

Figura 77 - Demonstração de Euclides: resumo



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

6.2 Algumas outras fórmulas importantes no cálculo de área

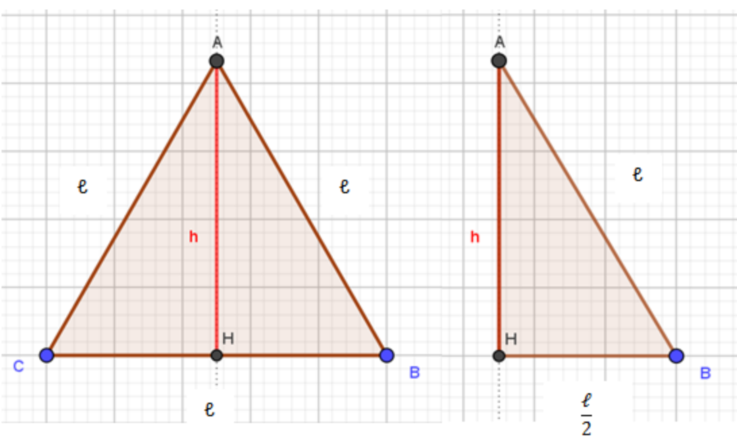
O teorema de Pitágoras permitiu que se expressasse a medida de um dos lados do triângulo retângulo em função das medidas dos outros dois. Isso tornou possível a criação de algumas fórmulas preciosas dentro da geometria. É o caso das fórmulas para o cálculo da área de um triângulo equilátero e a partir daí, a fórmula para cálculo de área de um hexágono regular.

6.2.1 Área de um triângulo equilátero

No Capítulo 3, foi visto que a área de um triângulo pode ser expressa como sendo a metade do produto entre a medida da base e a medida da altura relativa a essa base. Um triângulo equilátero tem todos os lados de mesma medida, e os segmentos de altura, medianas e bissetrizes são congruentes. Assim, dado um triângulo equilátero ABC, pode-se decompor o mesmo, em dois triângulos retângulos a partir do segmento da altura (que é também a mediana e a bissetriz), Figura 74. Ao aplicar o Teorema de Pitágoras a um dos triângulos retângulos, consegue-se obter uma expressão da altura de medida h (um dos catetos) em função da medida ℓ da hipotenusa e $\frac{\ell}{2}$ do outro cateto, Figura74. Essa expressão é:

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}.$$

Figura 78 - Decomposição para dedução de uma expressão para altura do triângulo equilátero



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

Agora, considerando-se o triângulo equilátero original em que a base mede ℓ e a altura mede $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$, obtém-se como expressão para a área A do triângulo equilátero de lado medindo ℓ a expressão:

$$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

6.2.2 Área de um hexágono regular

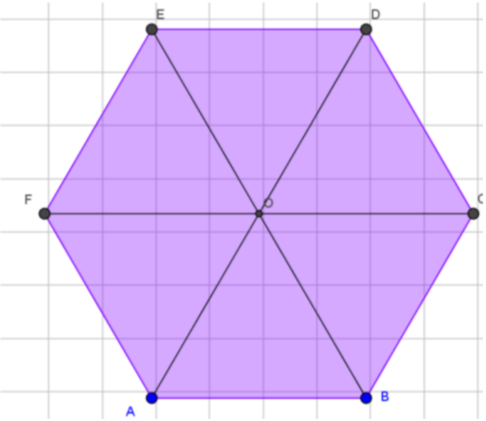
Para calcular a área A de um hexágono regular de lado de medida ℓ decompomos o mesmo em 6 triângulos equiláteros de lado de medida ℓ, Figura 78. Como a área do triângulo equilátero pode ser expressa por

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4},$$

portanto, a área do hexágono é seis vezes esse valor, ou seja,

$$A = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}.$$

Figura 79 - Decomposição de um hexágono regular



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

6.3 Aplicações envolvendo áreas

Nos próximos tópicos aborda-se o círculo e figuras curvas com o objetivo de se calcular via decomposição a área das mesmas. O primeiro tópico consiste numa exemplificação do método da exaustão para o cálculo do valor de π através da aproximação de polígonos regulares. A seguir, faz-se a dedução de uma expressão para o cálculo da área do círculo aplicando-se o método infinitesimal. Por fim, apresenta-se de forma simplificada a decomposição presente na compreensão do processo de Integração, importante nas disciplinas de Cálculo dos cursos da área de Exatas do Ensino Superior.

6.3.1 Cálculo de π usando aproximações para o comprimento da circunferência por Perímetro de polígonos regulares

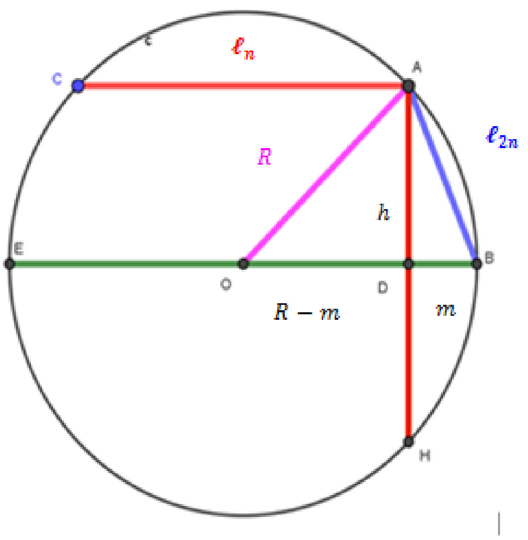
O método da Exaustão criado pelos gregos consistia em comparar uma circunferência a uma sucessão de polígonos regulares com áreas conhecidas inscritos na mesma, a fim de se chegar a uma aproximação para a área da circunferência. Essa ideia, de comparar o círculo a polígonos regulares permitiu o desenvolvimento de diversos procedimentos de cálculo, inclusive o tratado a seguir.

Pode-se obter uma aproximação para π utilizando o perímetro de polígonos regulares de lados medindo ℓ_{n} inscritos em uma circunferência. Quando o número n de lados de um polígono for suficientemente grande, o perímetro do polígono $\mathrm{n}.\ell_{\mathrm{n}}$ será muito próximo do comprimento da circunferência.

Pode-se comparar um polígono regular de n lados, cada um deles medindo ℓ_{n}, a um outro polígono regular com $2\mathrm{n}$ lados, cada lado medindo $\ell_{2\mathrm{n}}$. Dessa comparação é possível obter uma relação entre a medida de $\ell_{2\mathrm{n}}$ e a medida de ℓ_{n}.

Na figura 79, considere que o segmento $\overline{\mathrm{AC}}$ é o lado de um polígono regular de n lados inscrito na circunferência c, e tem por medida ℓ_{n}. Já o segmento $\overline{\mathrm{AB}}$, é o lado de um polígono regular com $2\mathrm{n}$ lados inscrito na mesma circunferência c, e com medida de lado $\ell_{2\mathrm{n}}$.

Figura 80 - Lados ℓ_n e ℓ_{2n} inscritos em uma mesma circunferência



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

Observando a figura é possível concluir que:

O segmento $\overline{AD}$, representado na figura por h equivale a metade de ℓ_n.

$$h = \frac{\ell_n}{2} \text{ , (I)}$$

- Os triângulos ADB e ADO são retângulos em D. Aplicando o teorema de Pitágoras a ambos temos:

  Do triângulo ADB:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2$$

  Que é equivalente a

$$\ell_{2n}{}^2 = h^2 + m^2$$

De onde obtém-se a expressão:

$$h^2 = \ell_{2n}{}^2 - m^2, \text{ (II)}$$

Do triângulo ADO:

$$\overline{AO}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DO}^2$$

Que é equivalente a

$$R^2 = h^2 + (R - m)^2 \text{(III)}$$

Desenvolvendo o quadrado tem-se que:

$$R^2 = h^2 + R^2 - 2Rm + m^2, \text{ (IV)}$$

Substituindo a equação II em IV obtém-se:

$$R^2 = \ell_{2n}{}^2 - m^2 + R^2 - 2Rm + m^2,$$

Que resulta na expressão de m:

$$m = \frac{\ell_{2n}{}^2}{2R}, \text{ (V)}$$

Substituindo as variáveis h e m, conforme as equações I e V, na equação III, obtém-se a expressão:

$$(R - \frac{\ell_{2n}^2}{2R})^2 = R^2 - (\frac{\ell_n}{2})^2$$

Que é equivalente a:

$$R^2 - \ell_{2n}{}^2 + \frac{\ell_{2n}{}^4}{4R^2} = R^2 - \frac{\ell_n{}^2}{4}$$

Que simplificada resulta em:

$$\ell_{2n}{}^4 - 4R^2\ell_{2n}{}^2 = -R^2\ell_n{}^2$$

Adicionando $4R^4$ a ambos os membros a fim de se transformar o primeiro membro em um trinômio quadrado perfeito obtém-se:

$$({\ell_{2n}}^2 - 2R^2)^2 = 4R^4 - \ R^2{\ell_n}^2$$

Que é equivalente a:

$$({\ell_{2n}}^2 - 2R^2)^2 = \ R^2(4R^2 - {\ell_n}^2)$$

Que também pode ser escrita na forma:

$${\ell_{2n}}^2 - 2R^2 = \ \sqrt{R^2(4R^2 - {\ell_n}^2)}$$

Que resulta em:

$${\ell_{2n}}^2 = 2R^2 + \ \sqrt{R^2(4R^2 - {\ell_n}^2)}$$

Que também pode ser expressa por:

$$\ell_{2n} = \ \sqrt{2R^2 + R\sqrt{4R^2 - {\ell_n}^2}}.$$

Como um exemplo dessa relação, considere-se agora um quadrado tendo lado medindo ℓ_4 inscrito em um círculo de raio R. Usando o teorema de Pitágoras, a medida ℓ_4 do lado do quadrado pode ser escrito em função do raio R como sendo $\ell_4 = \mathrm{R}\sqrt{2}$. Usando a expressão encontrada anteriormente a medida ℓ_8 do lado de um octógono regular pode ser obtida pela expressão

$$\ell_8 = \ \sqrt{2R^2 + R\ \sqrt{4R^2 - (R\ \sqrt{2})^2}}\ .$$

Que é equivalente a:

$$\ell_8 = R\ \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

De modo análogo, a partir da medida de ℓ_8 encontra-se uma expressão para ℓ_{16} ,ℓ_{32} ,ℓ_{64} , etc. Observe que o resultado obtido é sempre uma expressão em função do raio.

Como o perímetro do polígono regular de n lados de medida ℓ_n é $n \,.\, \ell_n$, com as expressões obtidas para ℓ_n em função do raio, é possível obter uma expressão para o perímetro desse polígono regular em função do raio.

Como o valor de π pode ser definido como o comprimento da circunferência dividido pelo seu diâmetro, e esse comprimento pode ser aproximado pelos perímetros dos polígonos regulares inscritos nesse círculo, quanto mais lados tiver o polígono, mais próximo será o valor de π.

Na tabela a seguir, adaptada de BARBOSA (2004) estão expressos: a medida do lado do polígono regular, do perímetro desse polígono e uma aproximação do valor de π em função do número de lados do polígono e do raio do círculo.

n	ℓn	n.ℓn	Valor de π
4	1,41421 R	5,6568 R	2,8284
8	0,76537 R	6,1229 R	3,0614
16	0,39018 R	6,2428 R	3,1214
32	0,19603 R	6,2730 R	3,1365
64	0,09814 R	6,2806 R	3,1403
128	0,04908 R	6,2825 R	3,1412
256	0,02454 R	6,2830 R	3,1415
512	0,01227 R	6,2831 R	3,1415

6.3.2 Área de um círculo pelo método infinitesimal

De modo análogo a aproximação que foi feita para o comprimento do círculo via perímetros de polígonos regulares, a área de um círculo também pode ser obtida, de maneira intuitiva, por aproximação das áreas de polígonos regulares. Divide-se esse círculo em n triângulos isósceles iguais tendo como um dos vértices o centro da circunferência e os outros dois, pontos pertencentes a mesma. Nessa decomposição, para valores de n muito grandes a altura dos triângulos aproxima-se do raio da circunferência enquanto a soma das bases dos triângulos aproxima-se do comprimento da circunferência.

Pode-se imaginar um número muito grande de triângulos formando uma "aproximação da decomposição" do círculo, cada qual tendo por base um "infinitésimo[19]" da circunferência, e por altura o raio. Uma outra "composição " possível para os "triângulos" resultantes do círculo, é a formação de um paralelogramo em que a base é a metade da soma dos infinitésimos, que equivale a metade da comprimento da circunferência e tendo como altura o raio.

Daí uma expressão para área do círculo é:

$$A = \frac{2\pi R \,.\, R}{2}$$

Ou seja:

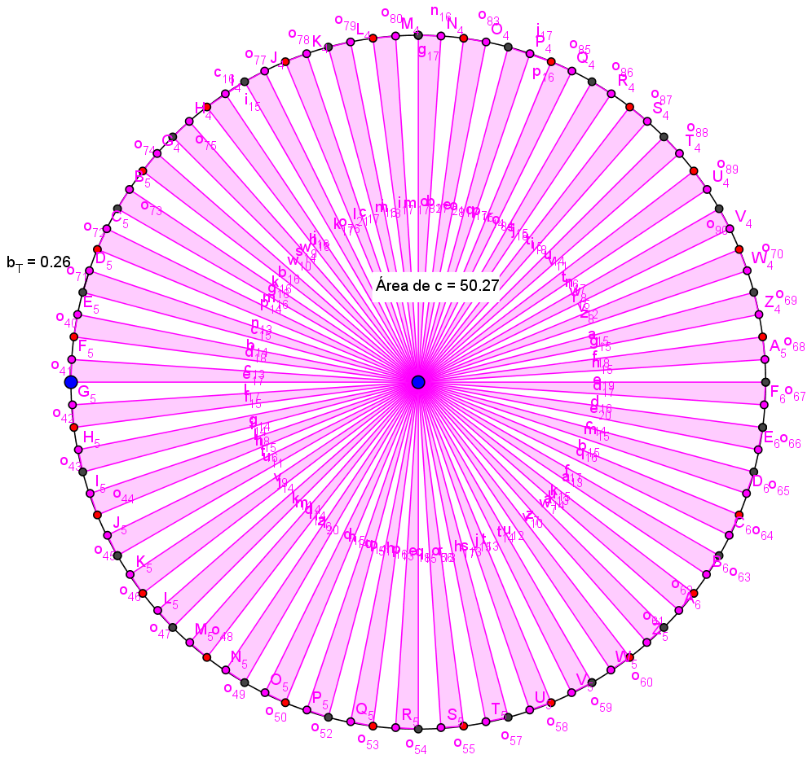
$$A = \pi R^2.$$

Na figura 80, apresenta-se uma "decomposição" da circunferência em 48 triângulos isósceles que ao serem encaixados, compõem um paralelogramo de "altura" R e "base" igual a metade do comprimento da circunferência, Figura 81.

---

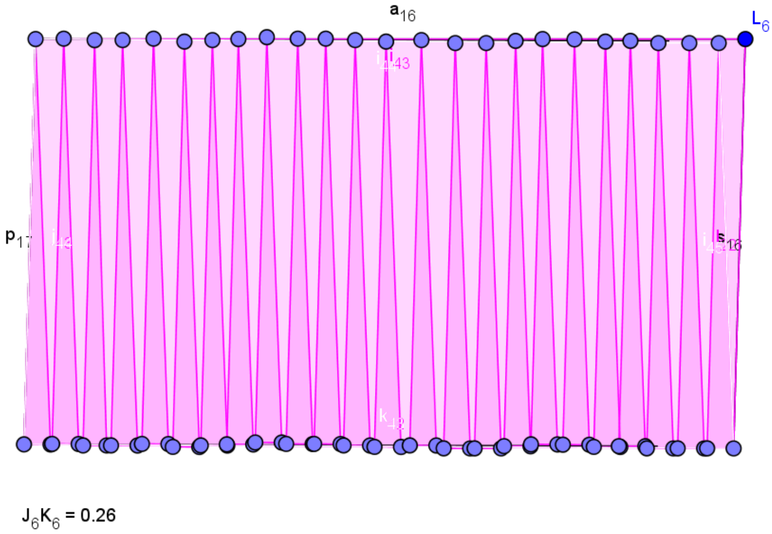
[19] Infinitésimo é uma medida tão pequena quanto se consiga imaginar.

Figura 81 - Círculo dividido em n regiões "triangulares" iguais



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

Figura 82 – Retângulo aproximado formado pelo rearranjo dos setores do círculo

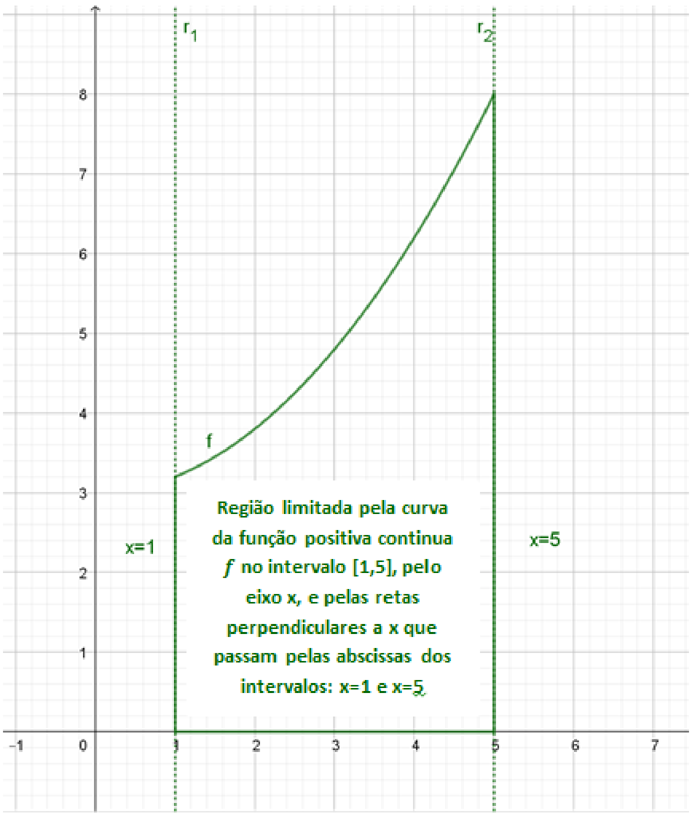


(Fonte: Robson Resende e Miranda)

6.3.3 Aproximação da área de uma região S

O procedimento para o cálculo da área de uma região S delimitada pelo gráfico de uma função f não negativa, cujo gráfico não tem interrupção; pelo eixo x (das abscissas) e por duas retas $x = a$ e $x = b$, Figura 82, segue a mesma ideia intuitiva das decomposições tratadas na seção anterior:

Figura 83 - Limites da região S

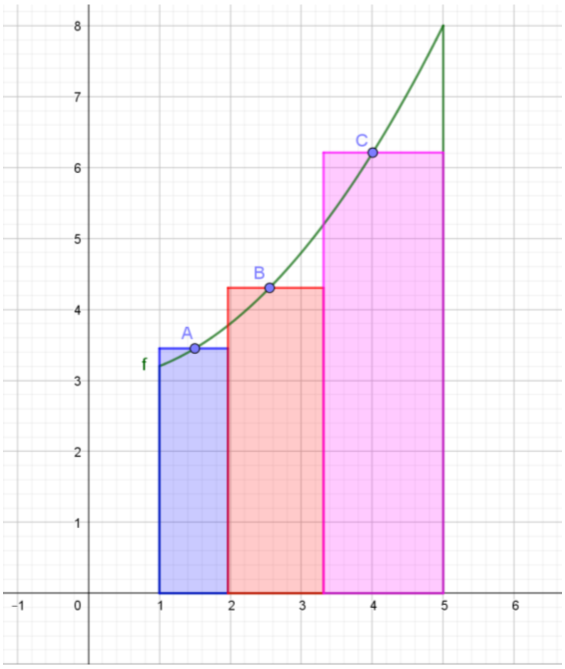


(Fonte: Robson Resende e Miranda)

- Particiona-se o intervalo fechado $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ com i variando de 1 a n , sendo $x_0 = a$ e $x_n = b$.
- Em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ escolhe-se um número arbitrário c_i.

- Aproxima-se a área da região definida por n retângulos, que terão por base o comprimento do subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e por altura o $f(c_i)$, Figura 83.

Figura 84 - Aproximação com 3 subintervalos da área S



(Fonte: Robson Resende e Miranda)

- Um valor aproximado para a área da região S é

$$S_n = f(c_1).\Delta x_1 + f(c_2).\Delta x_2 + \cdots f(c_n).\Delta x_n = \sum_{i=0}^{n} f(x_i).\Delta x_i$$

Que é conhecida como “Soma de Riemann” da função $\mathrm{f(x)}$. À medida que os intervalos se tornem infinitamente pequenos mais próximos do valor da área vai estar a soma.

A partir deste procedimento chega-se ao conceito de Integral de uma função, fundamental na disciplina de Cálculo no Ensino Superior, nos cursos de Engenharia, Física, Química, Biologia, Matemática e outros na área de Exatas.

7. Considerações Finais

A escolha de um tema dentro da área de Geometria como objeto de estudo deste trabalho se deve aos aspectos de visualização ligados a esta disciplina, e também, a existência de um “preconceito” para com a mesma entre os professores da Educação Básica, haja vista que muitas vezes os conteúdos de Geometria acabam sendo ensinados apenas no último bimestre. O objetivo primordial é despertar no professor de matemática e nos alunos que folhearem este trabalho o interesse pelos conceitos, construções, decomposições e demais fatores que compõem os capítulos.

É claro que não é possível esgotar todo o assunto relacionado a decomposição de figuras para o cálculo de área, mas buscou-se demonstrar com o texto a diversidade de aspectos que podem ser abordados em sala de aula para a real compreensão do assunto. De aspectos históricos a apresentação de conceitos, de construções geométricas a aspectos didáticos relacionados a pedagogia sobre o ensino de área, da abordagem tradicional, que prioriza as fórmulas, a uma abordagem visual construtiva. Este trabalho pretende, em seu objetivo maior, incentivar o docente a múltiplas abordagens sobre o assunto em sua sala de aula.

Esta pesquisa proporcionou-me um crescimento em diversos aspectos, como o domínio da ferramenta GEOGEBRA, com o qual foram construídos praticamente todos os desenhos aqui presentes; o interesse em construções geométricas com régua e compasso; e uma bagagem histórico-conceitual bastante significativa.

Espero que a leitura deste trabalho possa esclarecer dúvidas, e apontar caminhos para uma prática pedagógica sobre o assunto que seja menos algébrica e mais geométrica, com menos fórmulas e mais decomposições, proporcionando de fato uma aprendizagem relevante sobre o tema.

8. Referências

AABOE, Asger – *Episódios da História Antiga da Matemática*. Trad. João Bosco Pitombeira. 3ª. Edição. Rio de Janeiro: SBM; 2013.

ALVARENGA, Mário Lopes – *O método da exaustão e sua contribuição para o desenvolvimento do conhecimento matemático.* Curso de matemática, Universidade Católica de Brasília. Disponível em: http://www.ucb.br/sites/100/103/tcc/12006/maurolopesalvarenga.pdf

ANDRADE, Doherty; ROCHA, Tania Marli – *Áreas: das Noções Intuitivas ao Teorema de Pick. Disponível em:* http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_tania_marli_rocha.pdf

ARAUJO, Lise Canário de – Cálculo de Áreas: Um Meio Atrativo para o Enriquecimento do Ensino da Matemática. Salvador, 2013. Dissertação de Mestrado – UFBA.

ATIYAH, Sir Michael Francis – *A matemática do Século XX* . Trad. F.J. Craveiro de Carvalho. Gazeta de Matemática: Janeiro de 2002. Disponível em: http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=45

ÁVILA, Geraldo – *Euclides, Geometria e Fundamentos*. Revista do Professor de Matemática, 45. Rio de janeiro: SBM; 2001.disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/veiculos_de_comunicacao/RPM/RPM45/RPM45_01.PDF

BALLEJO, **Clarissa Coragem** – *Aprendizagem de Conceitos de Área e Perímetro com o GEOGEBRA no 6º Ano do Ensino Fundamental.* Porto Alegre, 2015. Dissertação de Mestrado - PUC/RS.

BARBOSA, João Lucas Marques – *Geometria Euclidiana Plana.* 11ª ed.rio de Janeiro: SBM; 2012.

BARBOSA, **João Paulo Carneiro**; **GALVÃO**, **Mateus de Souza**; **SANTOS**, **Leliane Araújo dos** – *Método da Redução ao Absurdo no Livro I do Elementos de Euclides.* – XII Encontro Nacional de Educação Matemática- Educação Matemática na Contemporaneidade: Desafios e Possibilidades. São Paulo, 13 a 16 de julho de 2016. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/7002_3030_ID.pdf

BARBOSA, Pedro Ribeiro – *Efeitos de uma sequência de atividades relativas aos conceitos de comprimento e perímetro no Ensino fundamental.* Recife, 2002. Dissertação de Mestrado – UFPE.

BATISTA, **Fernando da Silva** - *Um Estudo Sobre Área de Triângulos e Polígonos Convexos e Não-Convexos*. Campina Grande, 2014. Dissertação de Mestrado - UFCG/PB.

BENJAMIN, César – *Euclides e a Geometria.* Folha de São Paulo: 1 de Agosto de 2010, Caderno Ilustríssima**.** Disponível em: http://www1.folha.uol.com.br/fsp/ilustrissima/il0108201001.htm

BOLTIANSKI, V.G. - *Figuras Equivalentes e Eqüicompostas*. Trad. **HARIKI, Seiji**. São Paulo: Atual; Moscou: Editora MIR, 1996. – (Coleção Matemática: Aprendendo e Ensinando).

BOYER, Carl B., revisão **MERZBACH**, Uta C.. - *História da Matemática* / trad. Elza F. Gomide. São Paulo. Ed. Edgard Blücher Ltda. 1998 - 1ªreimpressão

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática.* Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular: A Educação é a Base.* Brasília: MEC, 2017.

BRITO, Alexsandra Félix - *Um estudo sobre a influência do uso dos materiais manipulativos na construção do conceito de comprimento como grandeza no 2º ciclo do Ensino Fundamental*. Recife, 2003. Dissertação de Mestrado – UFPE.

CAÇADOR, Sílvia Baptista – O desenvolvimento do Conceito de Área: Um Estudo com Alunos do 3º Ano de Escolaridade. Lisboa, 2012. Dissertação de Mestrado – Instituto Politécnico de Lisboa/Escola Superior de Educação.

CARVALHO, João Pitombeira de – *Equivalência e Aplicação de Áreas na Matemática Grega* – Centro Técnico-Científico, Departamento de Matemática, PUC – RJ. Disponível em http://www.mat.ufg.br/bienal/2006/mini/pitombeira.pdf

COLONESE, Paulo Henrique – *Catálogo de Materiais Didáticos do Laboratório de Construção do Saber Matemático.* Vassouras, 2014. Dissertação de Mestrado – Universidade Severino Sombra.

COSTA, Jésu Márcio Azevedo a – *Cálculo Diferencial e Integral como Ferramenta para Cálculo de Áreas das Figuras Planas no Ensino Médio*. Macapá, 2016. Dissertação de Mestrado – UFAP.

CHIUMMO, Ana – *O Conceito de Áreas de Figuras Planas: Uma Capacitação para Professores do Ensino Fundamental.* São Paulo, 1998. Dissertação de Mestrado – PUC/SP.

DIAS, Vandenberg Gouveia – *Quadratura: da Antiguidade à Atualidade*. -Campina Grande, 2014. Dissertação de Mestrado –UFCG.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau – *Fundamentos de Matemática Elementar*. - 8ª ed.- São Paulo: Atual, 2005.

DUARTE, Jorge Henrique – Análise de Situações Didáticas para Construção do Conceito de Área como Grandeza no Ensino Fundamental. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife, 2004. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/01/CC17227801420.pdf

EVES, **Howard** – *História da Geometria* / trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. – (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula; v. 3).

FACCO, Sonia Regina; ALMOULOUD, Saddo Ag – *Uma Abordagem do Ensino-Aprendizagem do Conceito de Área.* Recife, 2004. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/07/CC00192772880.pdf

FACCO, Sonia Regina – *Conceito de Área: Uma Proposta de Ensino Aprendizagem.* São Paulo, 2003. Dissertação de Mestrado –PUC/SP.

FERREIRA, Lúcia de Fátima Durão – *A Construção do Conceito de Área e da Relação entre Área e Perímetro no 3º Ciclo do Ensino Fundamental: Estudos sob a Ótica dos Campos Conceituais*. Recife, 2010. Dissertação de Mestrado – UFPE.

FONTES, **Hélio Carvalho d'Oliveira** – *No Passado da Matemática*. Rio de Janeiro: Fundação Getúlio Vargas, Instituto de Documentação, 1969.

GALLETTI, Agda Jéssica de Freitas; PARREIRA, Gabriela Aparecida; SILVA, Francisca Priscila Ferreira – *Geometria Lúdica: Descobrindo a Área de Figuras Planas*. Brasília: VI Encontro Brasiliense de Educação Matemática, 2014. Disponível em: http://www.viebrem.sbemdf.com/wp-content/uploads/2014/09/gemetria-ludica_MC01908994177.pdf

GAI, Samara Melo; RAMOS, Rita de Cássia de Souza Soares – *Atividades que Ajudam no Entendimento e Compreensão dos Conceitos de áreas com Figuras Geométricas, Abordadas de Maneiras Diferentes.* XX Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul. Bagé, 2014. Disponível em: https://eventos.unipampa.edu.br/eremat/files/2014/12/MC_GAI_03193180017.pdf

GUEDES, Aurílio da Silva – *Evolução no Cálculo de Áreas de Figuras Planas: De Arquimedes a Newton*. João Pessoa, 2013. Dissertação de Mestrado –UFPB.

HENRIQUES, Marcílio Dias – Um Estudo Sobre a Produção de Significados de Estudantes do Ensino Fundamental para Área e Perímetro. Juiz de Fora, 2011. Dissertação de Mestrado – UFJF.

IMENES, Luiz Márcio– *Geometria das Dobraduras.* São Paulo: Scipione, 2000. – (Coleção Vivendo a Matemática).

IMENES, Luiz Márcio; JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo – *Geometria.* São Paulo: Atual, 1992. – (Coleção Pra que Serve Matemática).

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo – *Geometria dos Mosaicos*. São Paulo: Scipione, 2000. – (Coleção Vivendo a Matemática).

JACOB, Francisco Carlos – *Uma Construção do Conceito de Área para Figuras Planas.* Viçosa, 2015. Dissertação de Mestrado – UFV.

KAGOIKI, Franco Yukio – *Figuras Eqüicomponíveis*. Florianopólis, 2001. TCC de Licenciatura em Matemática – UFSC.

KICH, Deise Tatiane; LENZI, Giovana da Silva – *Área e Perímetro de Figuras Planas: Explorando Construções Dinâmicas com GEOGEBRA*. Curso de Especialização em Matemática, Mídia Digital e Didática para Educação Básica: 2015 – UFRGS. Disponível em: http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/134122

KOVACEC, **Alexander** – *Comparar Áreas sem Cálculo: O Teorema de Bolyai-Gerwein.* – Sociedade Portuguesa de Matemática - Gazeta de Matemática: nº 167 Julho de 2012. Seção: Canto Délfico. P.10. Disponível em: http://gazeta.spm.pt/fichaartigo?id=366

KUROKAWA, Cecilia Yumi – Áreas e Volumes de Eudoxo e Arquimedes a Cavalieri e o Cálculo Diferencial Integral. Campinas, 2015. Dissertação de Mestrado – UNICAMP

LAMEIRAS, Sandy Gomes – *Os Conceitos de Área e de Perímetro: Contribuições do Uso do GEOPLANO e da Tecnologia Dinâmica.* Setúbal, 2016. Dissertação de Mestrado – Instituto Politécnico de Setúbal.

LIMA, Francisco do Nascimento – *Estudo Sobre o Cálculo de Áreas e Volumes utilizando o Método de Exaustão e o Princípio de Cavalieri.* João Pessoa, 2013. Dissertação de Mestrado – UFPB.

MACHADO, Nilson José – *Atividades de Geometria.* São Paulo: Atual, 1996. – (Coleção Matemática: Aprendendo e Ensinando).

MACHADO, Nilson José – Polígonos, Centopeias e Outros Bichos. São Paulo: Scipione, 2000. – (Coleção Vivendo a Matemática).

MACHADO, P.F. – *Fundamentos de Geometria Plana*. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2012.

MOL, Rogério S.. *Introdução à História da Matemática*. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

MOHNSAM, Julio Cesar – *As contribuições de Arquimedes para o Cálculo de Áreas.* Rio Grande, 2014. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal Rio Grande.

MOREIRA, **Marli Duffles Donato** – *Revisitando Euclides para o Ensino de Áreas: Uma Proposta para as Licenciaturas.* Rio de Janeiro, 2010. Dissertação de Mestrado -UFRJ/RJ .

MUNIZ NETO, **Antônio Caminha** – *Geometria.* 2013 - 1ª edição – Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

PESSOA, Gracivane; PEREIRA, José Alexandre de A.; ROCHA, Cristiane de Arimatéa; SILVA FILHO, José Menezes da – Uma Discussão sobre o Ensino de Área e Perímetro no ensino fundamental. Laboratório de Ensino de Matemática - UFPE. Disponível em: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri2014/modulo2/rocha_et_al_area%20e%20perimetro_minicurso.pdf

PIMENTEL, Jailson – *O Ensino de Geometria por Meio de Construções Geométricas*. Vitória, 2013. Dissertação de Mestrado – UFES.

PINTO, Aníbal – *A teoria dos indivisíveis: uma contribuição do Padre Bonaventura Cavalieri*. São Paulo, 2008.Dissertação de Mestrado – PUC - SP.

PONTES, Julio Silva de – *Avaliação de Diferentes Tecnologias Aplicadas ao Ensino de Geometria.* Rio de Janeiro, 2014. Dissertação de Mestrado – IMPA.

RODRIGUES, **Ivana do Monte** – *Área de Figuras Planas e Teorema de Pick: Uma Abordagem Diferenciada para Alunos do 6º Ano do Ensino Fundamental.* Manaus, 2014 Dissertação de Mestrado –UFAM.

RODRIGUES, Cristina Carneiro – *Tradução e Diferença*. 2000. – São Paulo: Editora UNESP.

RODRIGUES, Luzia Coelho – *Tangram: Um Recurso Proposto Para o Ensino dos Conceitos de Área e Fração no 7º Ano do Ensino Fundamental.* Juazeiro, 2016. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Vale do São Francisco.

ROSA, **Carlos Augusto de Proença** - *História da Ciência Volume I: Da Antiguidade ao Renascimento Cientifico*. Brasília, 2012. Fundação Alexandre de Gusmão. 2ª Edição. 476 p.

ROQUE, Tatiana - *História da Matemática: Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

ROZENDO, Karolyne Cerqueira Costa – *Aprofundando o Estudo de Áreas* Juiz de Fora, 2013. Dissertação de Mestrado – UFJF.

SANTANA, Walenska Maysa Gomes de – *O uso de Recursos Didáticos no Ensino do Conceito de Área: Uma Análise de Livros Didáticos Para as Séries Finais do Ensino Fundamental.* Recife, 2006. Dissertação de Mestrado – UFPE.

SANTOS, Almir Rogério Silva; VIGLIONI, Humberto Henrique de Barros *Geometria Euclidiana Plana. São Cristovão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2011.*

SANTOS, José Roberto Timote – *Resolvendo Problemas de Matemática Utilizando Áreas de Figuras Geométricas.* Ilhéus, 2017. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual de Santa Cruz.

SANTOS, Laceni Miranda Souza dos – *Cálculo de Áreas na Vida e na Escola: Possíveis Diferenças Conceituais*. São Cristovão, 2010. Dissertação de Mestrado – UFSE.

SANTOS, Marconi Coelho dos – *Teorema de Pitágoras: Suas Diversas Demonstrações*. Campina Grande, 2011. Dissertação de Mestrado – UEPB.

SANTOS, Marilene Rosa dos; SANTOS, Marcelo Câmara dos – *O Conceito de Área de Figura Geométrica Plana em Livros Didáticos de Matemática do 6º Ano do Ensino Fundamental: Um Olhar sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático*. VII CIBEM. Montevideo, 2013. Disponível em: http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/1090.pdf

SILVA, **Daniel de Jesus** – *Atividades Investigativas Via História da Matemática: Reflexões sobre o Desenvolvimento da Atividade "Ressignificando o Cálculo de Áreas"*. – 10 Encontro Internacional de Formação de Professores. 2016. V.09, n.1. Disponível em https://eventos.set.edu.br/index.php/enfope/article/view/2092

SILVA, Daniel de Jesus – *A Utilização da História da Matemática em Atividades Investigativas: Estudo de Áreas de Regiões Planas Regulares e Irregulares.* Vitória da Conquista, 2016. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Sudoeste da Bahia

SILVA, Erenilson Francisco da – *Cálculo de Área e Perímetro das Principais Figuras Planas: Discutindo a Adequação de Exercícios e Problemas para o GEOGEBRA*. Pitimbu, 2013. Dissertação de Mestrado – UFPB.

SILVA, José Valério Gomes da – *Análise da Abordagem de Comprimento, Perímetro e Área em Livros Didáticos de Matemática do 6º Ano do ensino Fundamental sob a Ótica da Teoria Antropológica do Didático*. Recife, 2011. Dissertação de Mestrado – UFPE.

SINGH, **Simon** - *O último teorema de FERMAT* / trad. De Jorge Luiz Calife – Rio de Janeiro: Edições BestBolso, 2014.

SMOOTHEY, Marion – *Atividades e Jogos com Áreas e Volumes.* Trad. QUADROS, Sérgio**.** São Paulo: Scipione, 1997. (Coleção Investigação Matemática)

SMOOTHEY, Marion – *Atividades e Jogos com Círculos.* Trad. e Rev. BROLEZZI, Antônio Carlos. São Paulo: Scipione, 1998. (Coleção Investigação Matemática)

SMOOTHEY, Marion – *Atividades e Jogos com Formas.* Trad. e Rev. BROLEZZI, Antônio Carlos. São Paulo: Scipione, 1998. (Coleção Investigação Matemática)

SMOOTHEY, Marion – *Atividades e Jogos com Triângulos.* Trad. QUADROS, Sérgio**.** São Paulo: Scipione, 1997. (Coleção Investigação Matemática)

SOUZA, Gilsimar Francisco de- *Resolução de Problemas Envolvendo Cálculo de Áreas de Figuras Planas Via Polígonos Equidecomponíveis.* Catalão, 2016. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Goiás (Regional Catalão).

THOMÉ, Rafael Ferraz – *O Cálculo da Área do Círculo com o Auxílio do Software GEOGEBRA*. São Carlos: 2016. Dissertação de Mestrado – UFSCar.

WAGNER, Eduardo – *Construções Geométricas. /Eduardo Wagner com a colaboração de José Paulo Q. Carneiro.* – 6ª ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2007. 145p. (Coleção do Professor de matemática; 9)

WAGNER, Eduardo – *Teorema de Pitágoras e Áreas*. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 86 p.(Programa de Iniciação Cientifica da OBMEP, vol.3)

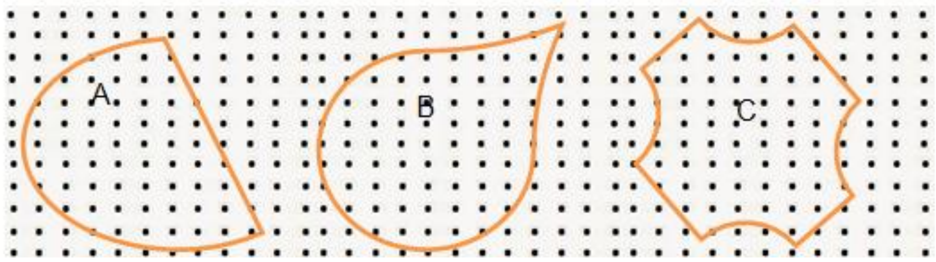
Outras leituras

Blogs de Geometria Dinâmica do Professor Marco Antônio Manetta último acesso em 01 de novembro de 2017.

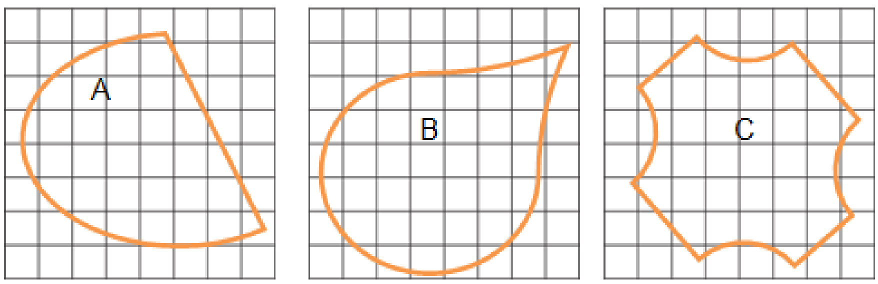
- http://caca-tesouro.blogspot.com.br/ http://como-resolve.blogspot.com.br/
- http://www.dinamatica.com.br/
- http://descritiva.blogspot.com.br/
- http://compassoeregua.blogspot.com.br/#1
- http://regua-e-compasso.blogspot.com.br/

Anexo 1: Resoluções das atividades do capítulo 5

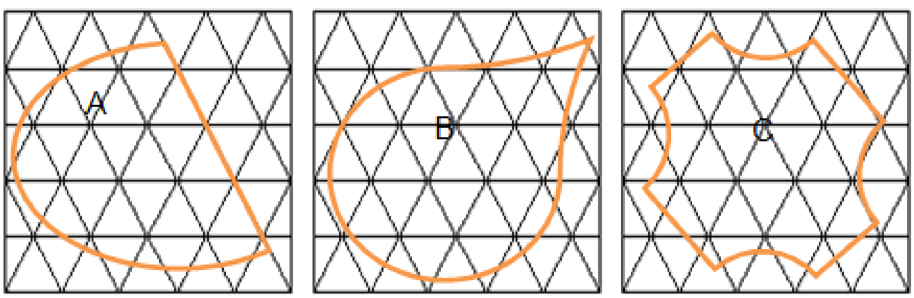
Atividade 1.



A curva A tem 53 pontos em seu interior e sua fronteira passa por 10 pontos, assim uma estimativa de sua área poderia ser 58. A curva B tem 58 pontos em seu interior e sua fronteira passa por 14 pontos, assim uma estimativa para sua área é 65. Já a curva C tem 52 pontos em seu interior 14 pontos, logo uma estimativa para sua área é 59.

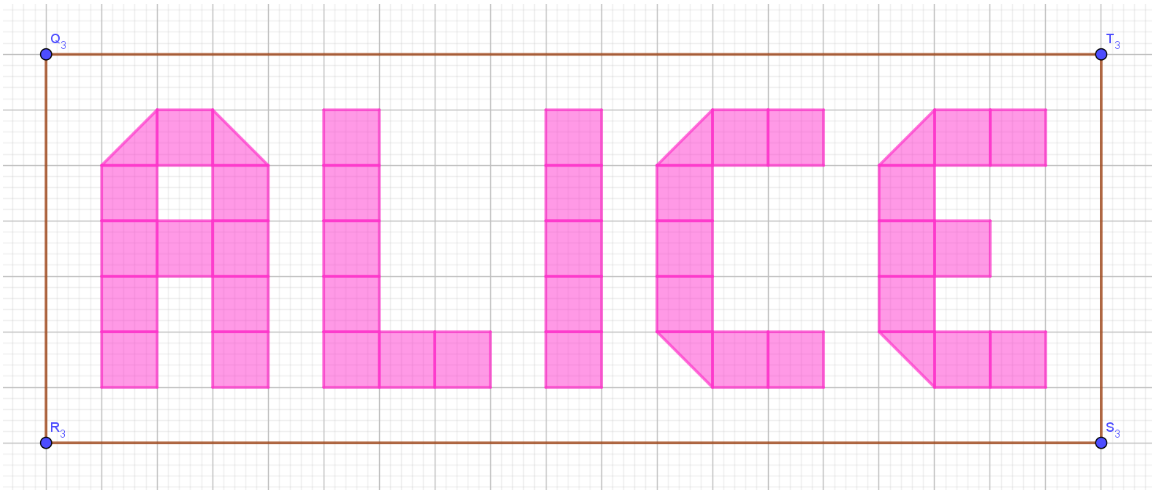


Pode-se estimar que A ocupa 30 quadradinhos; já B ocupa 34 quadradinhos e C ocupa 32 quadradinhos.

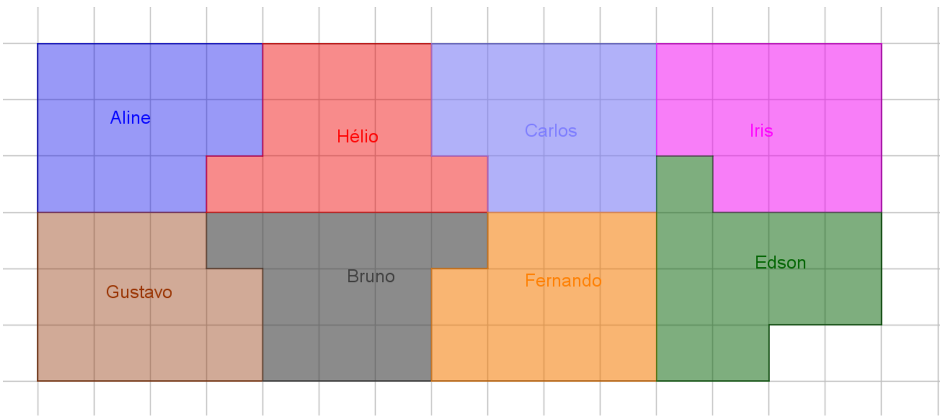


Na malha triangular estima-se que a região A ocupe 23 triângulos, a região B ocupa 27 triângulos e a região C ocupa 24 triângulos.

Atividade 2: a) O “P” t:em área 9, o “E” tem área 8, o “D” tem área 11, o “R” tem área 11 e o “O” tem área 10. **b**) A piscina de Pedro tem dimensões 20x7, logo sua área é 140 quadradinhos. Uma possível resposta para a construção do item c) é a seguinte:



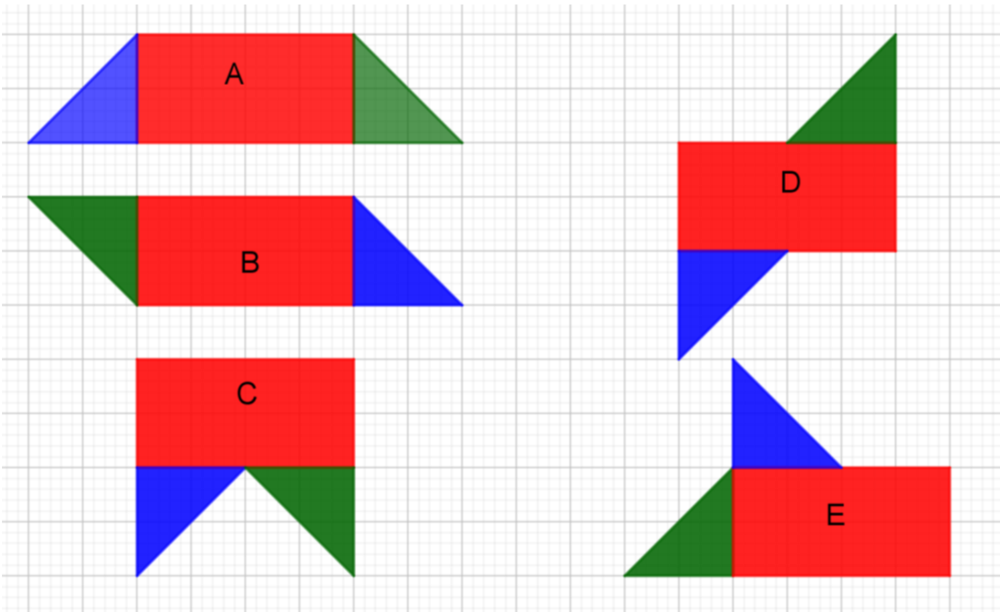
Atividade 3: a) cada terreno tem área de 11 unidades; b) uma das várias possíveis soluções para este item está representado no desenho a seguir:



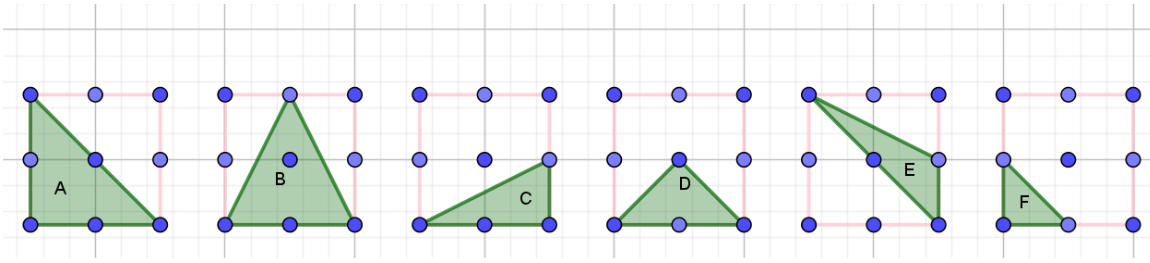
Atividade 4: a) A decomposição dos tangram pode ser feita conforme a tabela a seguir; **b)** O tangram clássico é constituído por triângulos, um quadrado e paralelogramo; o tangram de Fletcher também é constituído por triângulo, quadrados e paralelogramo; o tangram pitagórico é constituído por triângulos, trapézios e pentágonos. **c)** em todos os tangram existe um triângulo de área 2. **d)** A primeira figura foi criada com as peças do tangram pitagórico, a segunda figura foi criada com as peças do tangram clássico e a terceira figura foi criada com as peças do tangram de Fletcher. **e)** A primeira figura foi construída com peças do tangram clássico em que se perdeu, um triângulo de área 4; a área dela é 12. A segunda figura foi construída a partir de um tangram de Fletcher, em que se perdeu o paralelogramo de área 4; a área dela é 12. A terceira figura foi construída a partir do tangram pitagórico, em que se perdeu o trapézio de área 5; a área da figura é 15. f) Uma forma de se chegar a área da figura no item anterior sem contar os quadradinhos é subtrair da área total de cada tangram a área da peça ausente. Assim na primeira figura e na segunda figura faz-se 16 – 4 =12 e na terceira figura faz-se 20 – 5 =15

Tangram Clássico		Tangram de Fletcher		Tangram Pitagórico	
Peça	Área	Peça	Área	Peça	Área
Triângulo 1	1	Triangulo 1	1	Triângulo 1	2
Triângulo 2	1	Triângulo 2	1	Triângulo 2	2
Triângulo 3	2	Triângulo 3	2	Trapézio 1	1,5
Triângulo 4	4	Triângulo 4	2	Trapézio 2	1,5
Triângulo 5	4	Quadrado1	2	Trapézio 3	3
Quadrado	2	Quadrado 2	4	Trapézio 4	5
Paralelogramo	2	Paralelogramo	4	Pentágono	5

Atividade 5: Uma possível resposta para essa atividade são as 5 figuras abaixo em que: a figura A é um trapézio, a figura B é um paralelogramo, a figura C é um pentágono, as figuras D e E são hexágonos. Todos com área 12.



Atividade 6: Uma possível resposta para a questão é a seguinte:



Em que A e B tem a mesma área que é metade do quadrado, assim como C, D e E, também tem a mesma área, um quarto do quadrado.

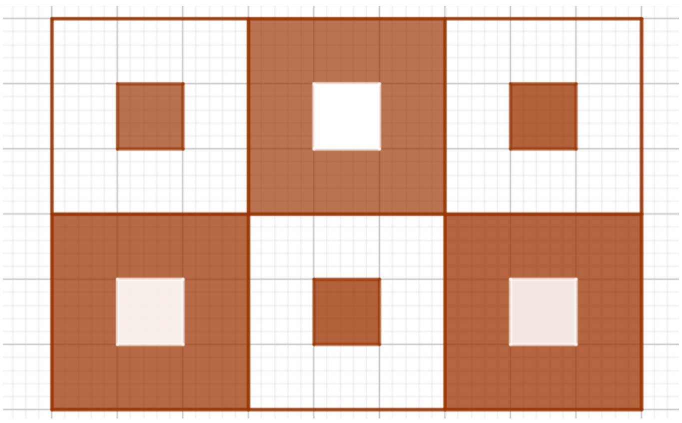
Atividade 7: a) É possível construir 9 triângulos. b) todos os triângulos tem a mesma área 12 (pois todos tem a mesma base 6 e a mesma altura 4). c) Há $C_{9,2}.C_{2,1} = 144$

$$\text{pois, } C_{9,2} = \frac{9!}{2!(9-2)!} = 72 \text{ e } C_{2,1} = \frac{2!}{1!(2-1)!} = 2$$

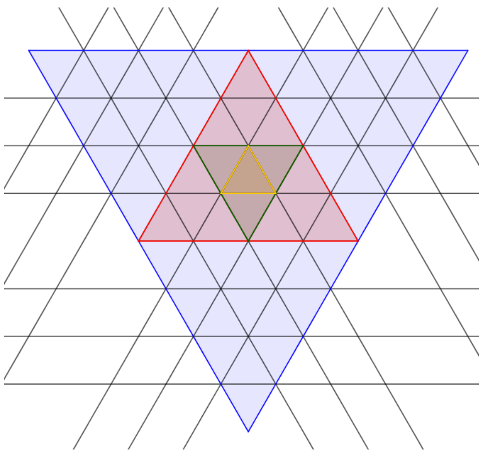
possíveis triângulos. d) Podem ser criados triângulos com 8 possíveis áreas: 4 u, 8 u, 16 u, 32 u, 64 u, 128 u, 256 u e 512 u.

Atividade 8: Todas as áreas em vermelho correspondem a metade da área do quadrado original.

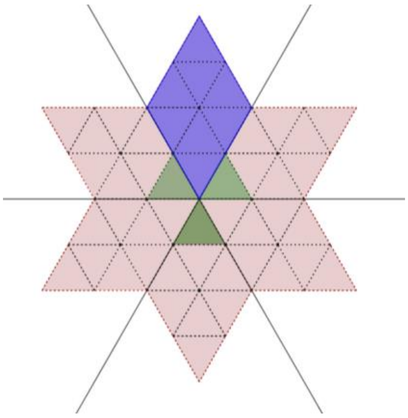
Atividade 9: a) No primeiro mosaico estão coloridas 20 quadradinhos dos 36 totais, logo a razão é de 5 : 9. No segundo mosaico estão coloridos 12 quadradinhos dos 36, logo a razão é de 1 : 3. No terceiro, foram coloridos 13 quadradinhos dos 35 totais, nesse caso a razão é 13: 35. b) Um exemplo da construção que se pede é dado na figura a seguir:



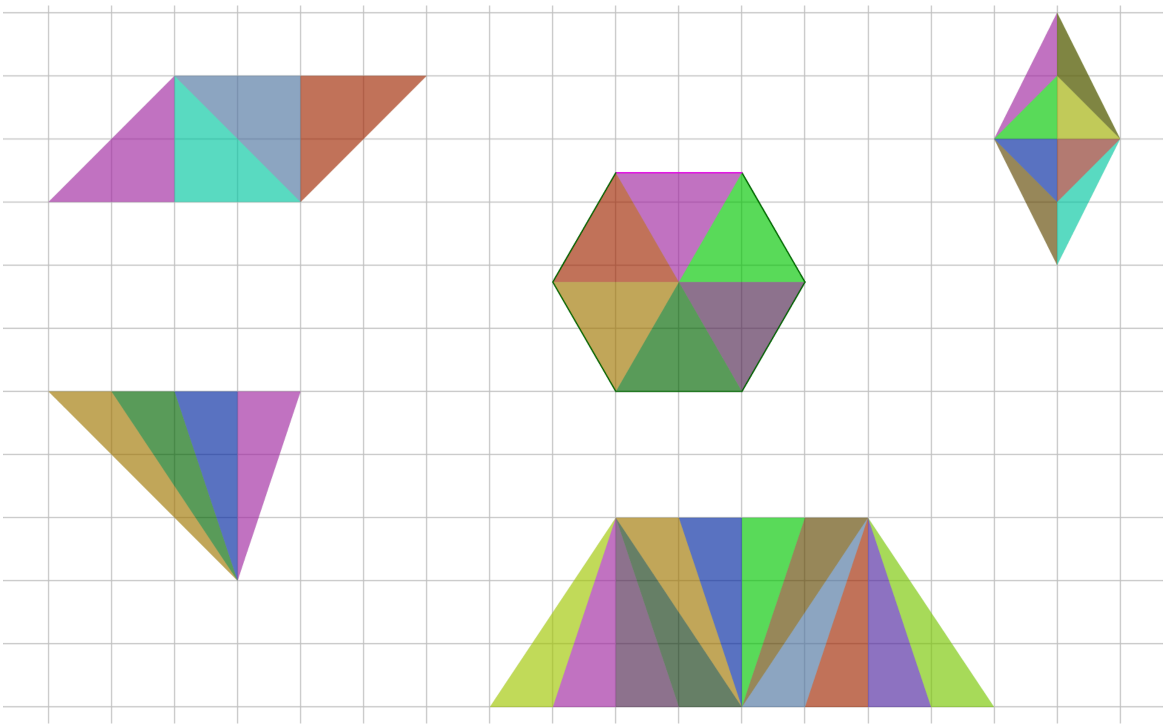
Atividade 10: A área do triângulo maior é 64 conforme pode ser observado na figura a seguir construída com paralelismo de retas.



Atividade 11: Pode-se decompor a estrela em 6 peças de 8 triângulos (destacada em roxo). Assim o total de triângulos na estrela é 48. Como a área total é 96, a área de cada triângulo é 2. Assim, a área em verde é 6.

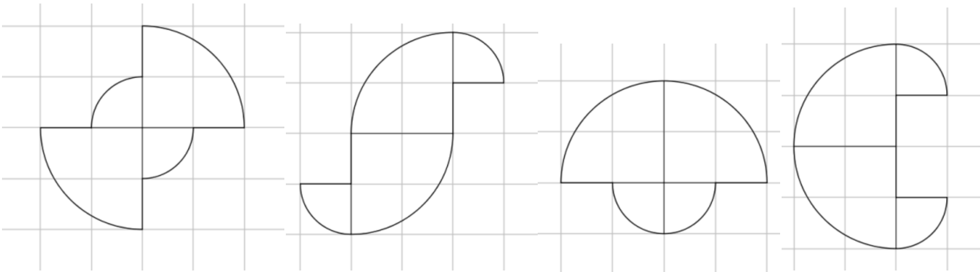


Atividade 12: A figura a seguir apresenta uma solução para as decomposições que se pedem.



Atividade 13: A relação de equivalência é o próprio teorema de Pitágoras que diz que a área do quadrado que setendo como lado a hipotenusa equivale a soma das áreas dos quadrados que se apoiam sobre os catetos.

Atividade 14



Atividade 15: A decomposição origina 2 quadrados de lado 30 cm cuja área é 900 cm^2; origina também 4 retângulos de lados 30 cm e 50 cm, com uma área de 1500 cm^2; para colagem há 6 retângulos de 20cm por 5cm (100cm^2 de área cada) e 1 retângulo de 40cm por 5cm (200 cm^2 de área). Somando a área de todas as peças totalizam 8600 cm^2.