UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Leandro André Barrada Benedito

Uma proposta para o ensino de funções com base em algumas definições históricas

Rio de Janeiro

2017

Leandro André Barrada Benedito

Uma proposta para o ensino de funções com base em algumas definições históricas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Aline Caetano da Silva Bernardes

Doutora em Engenharia de Sistemas e Computação - UFRJ

Rio de Janeiro

2017

Leandro André Barrada Benedito

Uma proposta para o ensino de funções com base em algumas definições históricas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovada em _____/_____/2017

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dra. Aline Caetano da Silva Bernardes – Orientadora (UNIRIO)

____

Prof. Dr. Gladson Octaviano Antunes (UNIRIO)

____

Prof. Me. Marcello Santos Amadeo (UNIRIO)

____

Prof. Dr. Vinicius Mendes Couto Pereira (INFES/UFF)

Dedico este trabalho à minha família, que sempre que possível me deu apoio para seguir em frente; aos meus amigos conquistados no mestrado, por tudo que passamos juntos e principalmente à minha esposa, por ter me dado todo o suporte, auxílio e incentivo para que eu pudesse me dedicar às disciplinas.

“As matemáticas têm invenções sutilíssimas e servirão de muito, não apenas para satisfazer os curiosos como para tornar mais fáceis todas as artes e diminuir os trabalhos dos homens.”

René Descartes

Agradecimentos

A Deus, por dar saúde e paz para mim e a para minha família, me permitindo concluir o mestrado com mais tranquilidade.

A minha esposa Fernanda Barrada, meu grande amor, que me ajudou sempre em todos os momentos, não me deixando desanimar e me incentivando muito.

Aos meus filhos, Gustavo e Luísa, que são minhas inspirações para nunca parar de evoluir como profissional, buscando sempre superar meus limites.

A minha orientadora Aline Bernardes, pela grande ajuda e imensa paciência durante todo o período de conclusão do trabalho.

Ao meu amigo Rafael Costa, que me ajudou em diversos momentos complicados durante o curso.

A minha família, como minha mãe Sandra Barrada, minha sogra Miriam Teixeira e meu sogro Nerival, por sempre acreditarem em mim.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

Apresentamos neste trabalho uma proposta de ensino sobre funções, baseada em alguns momentos do desenvolvimento histórico do conceito de função. O referencial teórico é inspirado no trabalho desenvolvido por Tinne Hoff Kjeldsen e Pernille Hviid Petersen (KJELDSEN & PETERSEN, 2012), que concilia a história da matemática com o ensino de matemática, a partir da perspectiva discursiva proposta por Anna Sfard (2008). A teoria de Sfard se refere em ver a matemática como uma forma de comunicação ou como um tipo de discurso conduzido por dois tipos de regras: regras no nível do objeto e regras metadiscursivas, ou seja, as metarregras. As metarregras têm impacto na forma como os objetos matemáticos são definidos e utilizados. Com base nestes referenciais teóricos, escolhemos os momentos históricos a serem explorados na proposta e elaboramos três roteiros de ensino. Realizamos um estudo de campo com estudantes do terceiro ano do ensino médio, com o objetivo de investigarmos o impacto de uma experiência com fontes históricas governadas por diferentes metarregras na aprendizagem de função dos alunos. O principal resultado do estudo foi a desconstrução da ideia de função como expressão algébrica: ao final do estudo, os participantes passaram a admitir relações não expressas por expressões algébricas como funções. Além disso, alguns passaram a variar as representações de funções - entre a forma de expressão algébrica, a representação gráfica e a representação por diagramas de Venn.

Palavras-chave: Função, História da matemática, História da matemática no ensino, Metarregras.

Abstract

We present in this work a proposal of teaching about functions, based on some moments of the historical development of the function. The theoretical framework is inspired by the work developed by Tinne Hoff Kjeldsen and Pernille Hviid Petersen (KJELDSEN & PETERSEN, 2012), who reconciled the history of mathematics with the teaching of mathematics, from a discursive perspective as proposed by Anna Sfard (2008). Sfard's theory refers to seeing mathematics as a form of communication or as a kind of discourse driven by two kinds of rules: object-level rules and metadiscursive rules, that is, metarules. The metarules have an impact on how mathematical objects are defined and used. Based on these references, we chose the historical moments to be explored in the proposal and we elaborated a teaching material organized in three parts. We conducted a field study with high school students, in order to investigate the impact of an experience with historical sources governed by different metarules in the students' learning of function. The main result of the study was the deconstruction of the idea of function as an algebraic expression: at the end of the study, the participants began to recognize as functions relationships not expressed by algebraic expressions. In addition, some participants varied the representation of functions - ranging from algebraic expression, graphing, and Venn diagrams.

Keywords: Function, History of mathematics, History of mathematics in education, Metarules

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Função é um conceito muito importante na matemática e em outras ciências, desempenhando um papel essencial na Matemática, pois ela é utilizada para descrever relações entre conjuntos, regularidades, analogias e usada também para construção de modelos de fenômenos naturais e sociais. Desse modo, o tema funções é importante em muitas áreas do conhecimento.

Palis (2013) diz que as funções foram criadas para estudar diversos fenômenos, podendo ser matemáticos, do cotidiano, físicos, biológicos, econômicos e outros, sendo assim a função vai muito além da matemática. A função é usada hoje em dia, para ajudar a interpretar situações do cotidiano, uma estatística ou um gráfico.

.Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio apresentam a importância de trabalhar o conceito de função:

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. (PCN, 2014, p.122)

São trabalhadas noções de correspondência já no sexto ano do Ensino Fundamental, mas o primeiro contato com as funções, na maioria das escolas, ocorre no nono ano do Ensino Fundamental. Neste momento, são apresentadas as primeiras noções de função, sendo trabalhadas as funções Afins e Quadráticas. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental apresentam o tema funções como conteúdo, sendo abordado nos anos finais do Ensino Fundamental e de modo mais formal no ensino médio, como descrito abaixo:

> Esse encaminhamento dado à Álgebra, a partir da generalização de padrões, bem como o estudo da variação de grandezas possibilita a exploração da noção de função nos terceiro e quarto ciclos. Entretanto, a abordagem formal desse conceito deverá ser objeto de estudo do ensino médio. (PCN,1998, p. 51)

Pela Base Nacional Curricular Comum (BNCC), a função deve ser trabalhada nos anos finais do Ensino Fundamental, especificamente no nono ano, sendo que as *Funções são* abordadas, a partir das "*representações numéricas, algébricas e gráficas"*, esperando alcançar as seguintes habilidades:

> Compreender as funções como relações de dependência unívocas entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis. (BCNN, 2017, p. 269)

No Ensino Médio, função é um tema abordado em todos os anos, sendo abordado de forma mais intensa no primeiro ano, pois vemos nos relatórios do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) que os livros didáticos dedicam muitas páginas ao tema.

Os autores que consultamos tinham uma abordagem sobre a definição de função, voltada para uma visão conjuntista, como por exemplo:

> "Dados dois conjuntos não vazios, A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento x ϵ A a um único elemento y ϵ B." (Dante, 2014)
>
> "Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento x ϵ A a um único elemento y ϵ B recebe o nome de função de A em B" (Iezzi et all, 2013)

Os autores consultados se dedicam em especial a trabalhar com as funções definidas por fórmulas.

Muitos estudantes não entendem o que seria realmente uma função e enxergam a função basicamente como uma expressão algébrica, uma regra ou uma fórmula que relaciona elementos de dois conjuntos. Isso possivelmente decorre do ensino de funções, que enfatiza bastante a ideia de função associada a uma expressão algébrica. Basta observar que grande parte do currículo dedicado ao estudo das funções se dedica aos tipos de funções: função afim, quadrática, exponencial, logarítmica, modular, trigonométrica e outras. E os tipos de funções são diferenciados pela expressão algébrica, mais do que por suas propriedades.

Segundo Palis (2013) muitos alunos acreditam que todas as funções podem ser definidas por uma fórmula algébrica e essa concepção é acompanhada da dificuldade em diferenciar variável de incógnita, função de equação, e da construção de domínio de uma função como sendo um tipo de exercício no qual se "resolvem" denominadores e condições de existência de funções.

Percebemos uma diferença na abordagem de função entre o PCN que se refere à função com uma relação entre grandezas, não se referindo a variáveis, com ênfase em modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos, levando a uma ideia de algo estático, enquanto o BNCC se refere a função como relação de dependência unívocas entre duas variáveis, para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis, sem que tenham uma lei específica.

Enxergar a função como uma fórmula algébrica é bastante restritivo, pois qualquer tipo de função que não estiver expressa por uma expressão analítica ou por uma fórmula, poderá não ser reconhecida como função pelos estudantes. Uma observação interessante é que, historicamente, a concepção de função como uma expressão algébrica ou analítica é muito parecida com a de Euler em 1748, expressa na sua primeira definição para função.

Apesar das origens do conceito levarem a sua associação com a representação em forma de expressão algébrica, o conceito de função mudou muito ao decorrer do tempo, pois até mesmo Euler em 1755 modificou a sua definição. Contudo, foi a partir de Dirichlet em 1837 que a definição de função abandonou a necessidade de uma expressão algébrica. Mais tarde, Bourbaki em 1939 definiu função com uma característica conjuntista e sem a necessidade de uma expressão algébrica.

Um grande motivador para esse trabalho foi também a ausência da história da matemática no ensino básico, onde os estudantes são apresentados aos conceitos sem saber de onde eles vieram como foram desenvolvidos e por que eles surgiram, ou seja, qual foi a necessidade do homem em criar ou modificar um determinado conceito.

É importante enxergar a matemática como uma construção humana, descobrir que os conceitos matemáticos podem ter sido diferentes do modo como são apresentados no ensino, ou seja, as definições podem mudar. Assim, é preciso descontruir a visão da matemática como um produto pronto e acabado. A história pode contribuir neste sentido e também para promover um ensino mais problematizado.

Segundo Roque e Giraldo (2014) a história da matemática nós permite recuperar o ambiente problemático, onde os objetos matemáticos foram definidos, os métodos criados e onde foram demonstrados os seus teoremas, mostrando que a matemática se relaciona de forma concreta com os seus problemas e a partir do estudo dos problemas da história matemática, podemos fornecer o lado concreto das atividades e com isso não precisamos necessariamente, levar as atividades para um lado mais cotidiano como pegar um taxi ou interpretar um gráfico num jornal.

Neste trabalho, apresentamos uma proposta de ensino sobre funções, baseada em alguns momentos do desenvolvimento histórico desse conceito. Os referenciais teóricos e metodológicos foram inspirados pelo trabalho desenvolvido por Tinne Hoff Kjeldsen e Pernille Hviid Petersen (KJELDSEN & PETERSEN, 2012), que articula a história da matemática com o ensino de matemática, a partir da *teoria da matemática como um discurso* proposta por Anna Sfard (2008).

Sfard (2008) diz que a matemática é vista como uma forma bem definida de comunicação ou como um tipo de discurso conduzido por dois tipos de regras: regras no nível do objeto - que são as definições matemáticas, as propriedades dos objetos matemáticos - e regras metadiscursivas (metarregras) - que dizem respeito às ações daqueles que produzem o discurso, ou seja, como os matemáticos definem e demonstram, ou como um professor de matemática convence os alunos sobre a consistência de uma definição, sobre a validade de uma propriedade etc.

As metarregras influenciam o modo como os matemáticos veem e lidam com os seus objetos, tendo impacto na forma como os objetos matemáticos são definidos e utilizados.As metarregras têm um caráter contingente, ou seja, são regras desenvolvidas ao decorrer do tempo e mudam ao modo que os homens acharem necessário mudar com o passar do tempo, e a história da matemática nos permite explorar essas mudanças, mostrando quais os motivos levaram as mudanças e como elas ocorreram.

O referencial teórico utilizado contribuiu para selecionar os momentos históricos que seriam explorados em nossa proposta de ensino, bem como as definições históricas que seriam exploradas por meio de atividades de cunho matemático e de cunho histórico.

O trabalho tem como objetivo investigar o impacto de uma experiência com fontes históricas governadas por diferentes metarregras na aprendizagem de função dos alunos. Esperamos assim que a proposta aqui apresentada leve os estudantes a refletirem sobre o que é uma função e sobre o que é o domínio de uma função. Além disso, esperamos também que a experiência possa descontruir a ideia de função como uma expressão algébrica ou fórmula, levando os estudantes a perceberem que em tal expressão é sequer necessária para decidir se uma relação entre grandezas ou entre elementos de dois conjuntos é uma função.

Este trabalho se insere em uma linha de pesquisa na educação matemática, que investiga as consequências na utilização da história da matemática na aprendizagem de conceitos matemáticos.

A nossa proposta de trabalho foi desenvolvida a partir de três momentos históricos. A proposta conta com atividades que exploram a primeira definição de função introduzida por Euler, a segunda definição de função de Euler e a definição introduzida por Dirichlet.

As atividades foram aplicadas com estudantes do terceiro ano do ensino médio de uma escola particular de Nilópolis, no estado do Rio de Janeiro, em cinco encontros.

O texto está dividido em quatro capítulos, onde apresentaremos abaixo a descrição de cada capítulo.

No Capítulo 1, apresentamos um recorte do desenvolvimento histórico do conceito de função ao decorrer da história, partindo das contribuições de Galileu, Descartes, Fermat, Newton e Leibniz. Temos as primeiras contribuições de Euler para o desenvolvimento do conceito de função e a primeira definição de Euler de 1748, que trazia a ideia de uma função como uma única expressão analítica, seguido pelo estudo das cordas vibrantes por D'Alembert e Euler, as discussões sobre continuidade das funções e a segunda definição de Euler de 1755, que trazia a ideia de uma função sendo uma ou mais expressões. Temos também as contribuições de Fourier com o estudo da propagação do calor e com a ideia de uma função a partir de séries trigonométricas em um determinado intervalo e as contribuições de Dirichlet com a ideia de arbitrariedade na definição de função sem a necessidade de uma expressão analítica e finalizamos com a definição moderna e conjuntista de Bourbaki. Para este recorte, nossas principais referências foram Tatiana Roque (2012), Jesper Lutzen (2008) e Israel Kleiner (1989).

No Capítulo 2, apresentamos os referenciais teóricos do nosso trabalho, começando pela perspectiva da matemática como um discurso, "*theory of thinking as communicating*", introduzida pela pesquisadora Anna Sfard (SFARD, 2008), depois pelo artigo *"History and the Learning of Mathematics: Detecting Students Meta-discurve Rules"* das dinamarquesas Tinne Hoff Kjeldsen e Pernille Hviid Petersen (KJELDSEN & PETERSEN, 2012), com uma proposta de estudo das funções com uma perspectiva histórica, seguido pelo trabalho de Beste Güçler, "*Making implicit metalevel rules of the discourse on function explicit topics of reflection in the classroom to foster student learning"* (Guçler, 2015).

No Capítulo 3, apresentamos os aspectos metodológicos do trabalho, o material elaborado e aplicado. Além disso, descrevemos como o estudo de campo foi organizado.

No Capítulo 4, apresentamos o questionário diagnóstico com os objetivos de cada questão, as atividades de cada um dos três roteiros aplicados nos encontros os objetivos de cada questão e o questionário final fazendo a comparação com as respostas de algumas questões do questionário diagnóstico e ao final apresentamos os resultados do estudo.

E por últimos temos as considerações finais, onde expomos as nossas conclusões sobre os resultados com os comentários sobre o desenvolvimento do estudo, sugestões para um melhor desenvolvimento do trabalho e sugestões para explorar as metarregras.

Capítulo 1: Parte histórica: alguns momentos do desenvolvimento do conceito de função

Neste capítulo abordaremos fatos históricos sobre o desenvolvimento dos conceitos de função, onde falaremos sobre os fatores que impulsionaram o surgimento da noção de função desde Galileu com os estudos sobre a trajetória de projéteis e a queda livre, Descartes e Fermat com o desenvolvimento da geometria analítica, a partir dos estudos sobre curvas e suas tangentes e o surgimento do cálculo com Newton e Leibniz.

Euler foi o primeiro a se dedicar ao estudo da função, seguido por Fourier, sendo redefinido por Dirichlet e finalizando com a definição conjuntista de Borbaki, tendo como nossas principais referências Tatiana Roque, Jesper Lutzen e Israel Kleiner.

Demos mais ênfase aos conceitos de Euler e Dirichlet, pois utilizaremos as suas definições de função no experimento realizado no nosso trabalho.

1.1: Fatores que impulsionaram o surgimento da noção da função antes das primeiras definições

Dentre os fatores que impulsionaram o surgimento da noção de função, destaca-se o estudo da variação. Roque (2012, p.369) aponta que a variação foi um componente fundamental para o desenvolvimento da noção de função. Hoje, as funções são expressas em termos chamados de variáveis.

A noção de variação foi introduzida formalmente no século XIX e dois aspectos fundamentais para o surgimento dessa noção foram, o surgimento da física matemática e a representação simbólica de uma quantidade desconhecida.

Um fator que foi uma força impulsionadora para a introdução da ideia de função foi a noção de trajetória. Roque (2012) diz que no século XVI, Tartaglia publicou sua *Nova scientia*. A nova ciência mencionada nessa obra é a balística, que apresenta o estudo da artilharia em longas distâncias e demanda a análise da trajetória de projéteis. Os escritos e traduções de Tartaglia influenciaram muitos matemáticos, que estudavam os movimentos e um em especial foi Galileu.

Em 1638, Galileu publicou uma obra intitulada *Discursos e demonstrações matemáticas sobre duas novas ciências*, com discussões sobre movimentos acelerados, sobre as leis que regem o movimento de projéteis e seus estudos sobre queda livre e movimentos de projéteis, tais estudos tinham uma relação direta com as artes da guerra.

Roque (2012) diz que Galileu não se importava em saber por que um corpo cai, mas sim como ele cai. As descrições e os argumentos eram feitos de forma geométrica. Para o estudo da queda livre, por exemplo, precisava-se saber como as grandezas variavam umas em relação às outras, que era expresso por meio de proporções matemáticas para relacionar as grandezas que eram representadas geometricamente. Essas representações geométricas eram feitas através de diagramas, como por exemplo, o diagrama (figura 1.1) para representar os movimentos de queda livre:

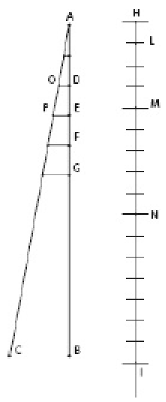


Figura 1.1 (ROQUE, 2012, p.311)

Galileu demonstrou geometricamente a lei da queda livre (h = $\frac{g}{2}$ t^2), onde se tem a altura relacionada com o tempo e dependente da gravidade, uma aceleração igual para todos os corpos, uma lei utilizada até hoje. Tira-se daí que todos os corpos em queda livre, quando se despreza a resistência do ar, caem ao mesmo tempo, não importando a sua massa. Roque (2012) mostra de que forma a matemática foi usada para se entender como os corpos adquirem velocidade e de que maneira essa grandeza pode ser associada a outras variáveis que participam do movimento, entre elas o espaço e o tempo.

O estudo da variação através de leis matemáticas tornou-se possível graças ao desenvolvimento da física pós-Galileu a partir do século XVI, com a ideia de uma variação em função do tempo. Nesse caso, podemos notar algo semelhante à noção de função, já que existia uma associação entre duas grandezas que variam expressas por uma proporção geométrica. Além disso, os diagramas foram muito importantes nas demonstrações de Galileu, de natureza geométrica. Na época da publicação de *Discursos e demonstrações* *matemáticas sobre duas novas ciências*, a *Geometria* de Descartes já havia sido escrita e Galileu não conhecia esse trabalho de Descartes (Roque 2012).

Sabe-se que uma função pode ser vista como uma relação entre duas grandezas que variam. Segundo Roque (2012), Descartes acreditava que essa relação devia ser algébrica, uma vez que para ele uma grandeza física não deveria ser associada ao tempo, ou seja, movimentos que geram uma relação de tipo funcional deveriam ser de natureza geométrica e não física. Galileu não concordava com isso, pois ele desejava entender o movimento físico, como por exemplo, o espaço em relação ao tempo, ou seja, um corpo que se movimenta em função do tempo. Ele buscava a lei que descrevia o deslocamento em função do tempo, hoje conhecida por meio das funções horárias, as quais descrevem a variação das posições a cada instante de tempo.

Roque (2012) diz que, no século XVII, as ideias de Descartes sobre o estudo das relações entre variáveis começaram a ter destaques. Para ele, as deduções lógicas, que passam de uma proposição a outra, devem ser substituídas por relações entre coisas quantificáveis, traduzidas por equações, ou seja, por igualdades entre quantidades. Descartes acreditava que as demonstrações matemáticas não poderiam ter só o papel de provar que algo é verdadeiro, mas deveriam também esclarecer a natureza do problema e propor métodos de resolução mais diretos. Sendo assim começaram a ter uma nova visão sobre os objetos geométricos já que poderiam ajudar nas resoluções de problemas e como as trajetórias de projéteis são curvas, a análise das curvas geométricas levou ao surgimento de uma nova geometria, com um cunho mais algébrico nas primeiras décadas do século XVII, tendo as cônicas como um dos incentivadores para essa nova geometria.

Para estudar as curvas, Descartes utilizou o sistema de coordenadas, com objetivo permitir o estudo das curvas utilizando retas, método usado pelos gregos, onde eles utilizavam proporções para determinar as propriedades de uma curva e ao traduzir os problemas geométricos para linguagem algébrica, expressa por meio de uma equação.

Descartes queria reduzir os problemas geométricos a uma ou mais equações, introduzindo um sistema de coordenadas para representar equações indeterminadas, que são equações com duas variáveis. O sistema de coordenadas foi fundamental para o projeto *cartesiano,* motivado pelo seguinte problema:

Problema de Pappus

Encontrar o lugar geométrico de um ponto tal que, se segmentos de reta são desenhados desde esse ponto até três ou quatro retas dadas em ângulos determinados, o produto de dois desses segmentos deve ser proporcional ao produto dos outros dois (se há quatro retas) ou ao quadrado do terceiro (se há três retas).(ROQUE, 2012, p.326)

Em um caso geral, o Pappus demonstrou que a solução deve ser uma cônica e Descartes, inspirado em Pappus, começou a considerar quatro retas (figura 1.2) para resolver os problemas geométricos, como por exemplo:

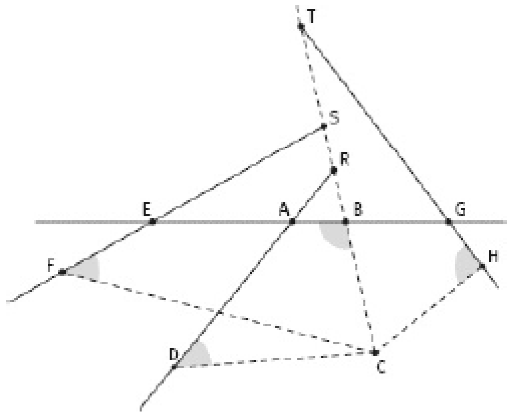


Figura 1.2 (ROQUE, 2012, p.327)

Segundo Roque (2012), a utilização de um sistema de coordenadas, foi fundamental para o surgimento da geometria analítica, que está ligado a um problema indeterminado, ou seja, com duas quantidades desconhecidas. Uma grande diferença entre equações determinadas (com uma incógnita) e as indeterminadas (com duas ou mais incógnitas) é que não se encontra nunca apenas um valor para uma quantidade desconhecida e sim uma infinidade de valores que "variam" de acordo com os valores de outra quantidade. Descartes afirmava que a equação de uma curva, era do tipo de duas variáveis, concluindo assim que, se tomarmos infinitos valores para x, encontraremos também infinitos valores para y. *S*endo assim, grandezas indeterminadas podem ser determinadas a partir da atribuição de valores à outra grandeza indeterminada, por meio de um número finito de operações algébricas. De acordo com Roque, introduz-se pela primeira vez e de forma muito clara, a ideia de que uma equação em x e y pode representar uma dependência entre duas quantidades variáveis, de modo que se possam calcular os valores de uma delas a partir dos valores da outra.

Paralelamente, o francês Pierre de Fermat desenvolveu um projeto semelhante ao de Descartes. Ambos não tinham conhecimento do trabalho um do outro. Fermat escreveu *Introduction des lieux plans et solides* (Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos), quase que ao mesmo tempo que o Discurso do Método de Descartes. Ambos traziam técnicas muito semelhantes para trabalhar com problemas geométricos de modo algébrico, fazendo uso de equações indeterminadas.

Essa nova geometria, desenvolvida no século XVII, envolvendo novas técnicas para o estudo de curvas, foi determinante para o estudo das tangentes. Descartes desenvolveu um método algébrico para determinar a tangente a uma curva em um determinado ponto. Tal método iniciava por intersectar uma circunferência à curva original do problema. Já Fermat desenvolveu outro método, que relacionava retas a cônicas estabelecidas por correspondência de lugares geométricos, através de equações indeterminadas, ou seja, quando duas quantidades desconhecidas eram encontradas, se definia o lugar geométrico onde se descrevia uma linha, reta ou curva.

Os métodos analíticos desenvolvidos por Descartes e Fermat motivaram o estudo das séries infinitas, as quais estão na base das primeiras definições de função no século XVIII, como veremos mais adiante.

Por outro lado, nos problemas da geometria analítica, o dado era sempre uma curva. Por exemplo, no problema de determinar a tangente e a quadratura, partia-se de uma curva dada. Após a criação do cálculo infinitesimal por Newton e Leibniz, o qual não entraremos em detalhes aqui, a noção de função é suscitada no problema inverso da tangente. Em tal problema, tratado por Leibniz (Roque & Carvalho, 2012, p. 299), dada uma reta, desejava-se determinar as curvas que têm esta reta como tangente. Desse modo, a curva passa a ser a solução do problema. Essa inversão acarreta uma transformação importante na Matemática: a substituição de seu objeto principal, que deixa de ser um número ou uma grandeza geométrica. Sendo assim a incógnita do problema passa a ser uma curva ou uma lei da variação e essa transformação é mencionada em uma passagem pelo matemático francês Jacques Hadamard:

> “O ser matemático, em uma palavra, deixou de ser o número e passou a ser a lei de variação, a função. A Matemática não foi apenas enriquecida por novos métodos, mas foi transformada em seu objeto.” (Roque & Carvalho, 2012, p. 300)

1.2: Euler e as primeiras definições de função

Segundo Kleiner (1998), a disputa entre duas ideias esteve presente no desenvolvimento do conceito de função: a geométrica, expressa na forma de uma curva, e a algébrica, expressa por uma fórmula. A forma algébrica podia envolver um número finito de termos ou um número infinito de termos, a chamada expressão analítica. Depois outro elemento entraria no contexto de função, definindo-a como uma correspondência, ou seja, como uma ideia de entrada-saída. Com o decorrer do tempo, a perspectiva geométrica de função é aos pouco sendo deixada de lado.

Vários matemáticos, entre eles Newton e Leibniz, utilizavam as séries infinitas para estudar curvas em meados do século XVII. A partir daí, a relação entre as variáveis podia ser dada por uma série de potências infinita. Existia uma restrição cartesiana às curvas algébricas, ou seja, somente curvas representadas por equações algébricas, mas Leibniz propôs introduzir as curvas “transcendentes”, representadas por séries, onde nessa situação, as curvas passaram a serem expressas por séries infinitas (ROQUE, 2012). Então no século XVIII, essas séries se tornaram o meio mais geral para se estudar relações entre variáveis e sua ampla utilização está na base das primeiras definições de função associada à expressão analítica.

Até então, não havia um termo geral para expressar as quantidades arbitrárias, que dependem de outra quantidade variável, assim uma definição de função foi expressa pela primeira vez em uma correspondência entre Leibniz e Johann Bernoulli, no final do século XVIII. Bernoulli já utilizava o termo função ao relacionar indiretamente as “quantidades formadas a partir de quantidades indeterminadas e constantes” (ROQUE, 2012, p. 373). Essa é a mesma ideia que temos quando associamos uma função a sua expressão analítica, por exemplo, à expressão $f(x) = x + 1$, onde, x é uma quantidade indeterminada, a suposta variável, e 1 uma constante.

De acordo com Kleiner (1989) na primeira metade do século XVIII, análise que era um conjunto de métodos para resolver problemas sobre curvas, como encontrar tangentes a curvas, áreas sob curvas, comprimentos de curvas e tinha um fundo geométrico, começou a deixar suas origens de lado mudando o conceito de variável, usado inicialmente em objetos geométricos, pelo conceito de função como uma fórmula algébrica. Essa ideia foi introduzida por Leonard Euler, pupilo de Johann Bernoulli, a partir de sua obra intitulada *Analysin Infinitorum,* publicada em 1748. Nela, ele cita que: *"Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de um modo qualquer dessa quantidade e de números, ou de quantidades constantes"* (ROQUE, 2012, p. 374).

Na definição acima, percebemos que Euler não explica o que seria uma "expressão analítica composta de um modo qualquer", assim como Roque (2012), vimos que ele enumerou as quatro operações algébricas, raízes, exponenciais, logaritmos, funções trigonométricas, buscando definir de forma precisa do que seria uma expressão analítica, onde nesta mesma obra Euler publicou também que: *"Uma quantidade variável compreende todos os números nela que são racionais, transcendentes e irracionais. Não devemos excluir nem mesmo o zero e os números imaginários"* (ROQUE, 2012, p. 374).

Euler pretendia expandir ao máximo a análise usando a ferramenta algébrica. Ele pretendia unificar a matemática com base na álgebra, que não era encarada somente como uma linguagem para representar objetos matemáticos. Essa concepção transformou o cálculo infinitesimal no estudo algébrico de séries, que Roque (2012) a designa como "análise algebrizada".

No Século XVIII, um problema físico sobre cordas vibrantes, teve grande importância para desenvolvimento do conceito de função. Esse problema se tratava de uma corda elástica com extremidades fixas em *0* e *l*, que é deformada em algum ponto inicial e então liberada para vibrar. O problema consistia em estudar as vibrações infinitamente pequenas de uma corda presa por suas extremidades, o que requeria determinar a função que descreve a forma da corda no tempo t.

Esse problema gerou um grande debate de ideias entres alguns matemáticos da época, sendo Euler e D'Alembert os principais protagonistas dessa discursão. Kleiner diz que para entender esse debate sobre o problema das cordas vibrantes, devemos mencionar primeiro que se acreditava na época que "*se duas expressões analíticas concordam em um intervalo, elas concordam em toda parte*" (KLEINER, 1989, p. 285). Este não era um pressuposto natural, tendo que os tipos de funções consideradas na época, representadas por uma única expressão analítica.

D'Alembert resolveu o problema da corda vibrante, em 1747, mostrando que o movimento da corda é governado por uma equação diferencial parcial e concluindo que sua solução pode ser representada pela soma de duas funções arbitrárias nas variáveis x e t: $\varphi(x+at)$ e $\varphi(x-at)$. Ele afirmava que mesmo que as condições iniciais da corda sejam muito diferentes, elas deveriam ser representadas sempre por uma expressão analítica, ou seja, por uma equação algébrica ou uma série de potências.

Euler escreveu, em 1748, um artigo sobre o problema das cordas vibrantes, dizendo que concordava com D'Alembert sobre a solução, mas não com sua interpretação (ROQUE, 2012). Para Euler a solução de d'Alembert não era a "mais geral", como D'Alembert alegava, pois Euler alegava que a forma inicial da corda pode ser dada por várias expressões analíticas em subintervalos diferentes de (0, l), como arcos circulares de diferentes raios em diferentes partes de (0, l), ou por uma curva desenhada mão livre (Figura 1.3).

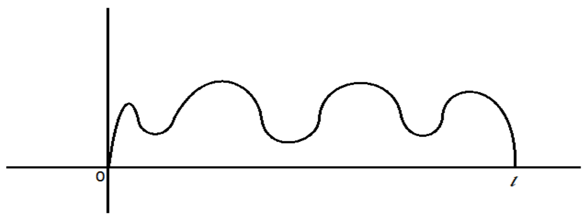


Figura 1.3(curva desenhada mão livre)

O debate entre Euler e D'Alembert sobre a corda vibrante foi uma discussão baseada em duas atitudes muito diferentes em relação à matemática. Segundo Lutzen (2008), D'Alembert valorizava muito o rigor e queria limitar radicalmente o alcance de sua própria descoberta matemática. Euler pensava diferente e defendia que a matemática devia ser feita de forma mais geral possível, sendo suficiente para lidar com todas as situações da física, e ele estava disposto a estender seu próprio conceito de função e usar argumentos um tanto questionáveis para época.

Essa discussão também envolveu Daniel Bernoulli, filho de Johann Bernoulli. Segundo Roque (2012), Daniel Bernoulli sugeriu que a forma inicial da corda devia ser arbitrária. Sabia-se da teoria musical, que os sons musicais, gerados pelas vibrações de uma corda, são compostos de frequências fundamentais e de harmônicos. Assim essas vibrações podem ser expressas como somas de funções trigonométricas, que são periódicas. A partir dessa relação, Daniel Bernoulli afirmou que a posição inicial de uma corda vibrante podia ser representada por uma série infinita de termos trigonométricos, que é tão geral quanto uma série de potências.

Segundo Lutzen (2008), tanto Euler como d'Alembert discordavam da solução de Bernoulli, pois para eles, uma vez que a série de senos converge, ele deve convergir em todos os lugares, mas uma função "arbitrária" era estranha e periódica, o que para eles era absurdo. Bernoulli rebateu criticando as soluções de d'Alembert e de Euler, dizendo que elas não tinham nada a ver com cordas vibrantes. Essa discursão ainda durou alguns anos, tendo ainda a participação de Lagrange.

D'Alembert deixou o conceito de função limitar os possíveis valores iniciais, enquanto Euler deixou a variedade de valores iniciais, estender o conceito de função. Vemos assim, que o problema físico em questão, motivando Euler a estender o conceito de função. Essas discussões influenciaram muito o desenvolvimento do conceito de função. Suas principais consequências foram as inclusões de:

(A) Funções definidas por partes, por expressões analíticas em intervalos diferentes, como por exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

(B) Funções desenhadas à mão livre e possivelmente não dadas por qualquer combinação de expressões analíticas.

Em 1755, na obra *Institutiones calculi differentialis,* Euler formula uma nova definição de função que não se identifica à expressão analítica, conforme citado abaixo:

> Se certas quantidades dependem de outras quantidades de maneira que se as outras mudam essas quantidades também mudam, então temos o hábito de chamar essas quantidades de funções dessas últimas. Essa denominação é bastante extensa e contém nela mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Consequentemente, se x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x, de qualquer maneira, ou que são determinadas por x, são chamadas funções de x. (ROQUE, 2012, p. 378)

Para Euler, funções com uma única expressão analítica em toda a sua extensão era considerada contínua, mas caso o contrário, funções com mais de uma expressão analítica, em diferentes intervalos, eram consideradas funções “descontínuas”, ou seja, a continuidade da função dependia da invariabilidade da expressão analítica que determinava a curva. (ROQUE, 2012)

Segundo Roque (2012), Euler mostrou na sua definição de descontinuidade, a importância da fórmula na definição de função no século XVIII. Hoje em dia, a noção de função contínua relaciona-se ao fato de o gráfico ter um ponto de descontinuidade ou não em um determinado intervalo.

O problema das cordas vibrantes, não chegou a ser apresentado em livros-textos até o final do século XVIII e as discursões sobre o conceito de função não tiveram muitas repercussões, permanecendo confinado a tratados acadêmicos. Só mais tarde, as definições mais gerais surgiriam.

1.3: Definições de função no século XIX: Fourier e Dirichlet

No início do século XIX, ainda se discutia muito sobre os conceitos de função e sobre o de continuidade, onde as funções contínuas de Euler eram definidas como "funções analíticas", pois ele considerava as funções como expressões analíticas e a busca para explicar as principais propriedades desse tipo de função aumentaria as opções do que poderia ser considerado na matemática como função. Destacamos nesta seção, um momento do desenvolvimento histórico do conceito de função, onde esta noção foi estudada a partir de outro problema físico, conhecido como o problema da propagação do calor, investigado pelo matemático e físico Jean-Baptiste Joseph Fourier, dentre outros.

Segundo Kleiner (1989), os trabalhos sobre a propagação de calor segundo revolucionaram o conceito de função, dando início a sua redefinição. Em 1822, Fourier teve o seu principal resultado, um teorema dizendo que qualquer função f(x) definida sobre (-l, l) é representável sobre este intervalo por uma série trigonométrica de senos e cosenos:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \right).$$

Essa solução considerava apenas um intervalo, ou seja, Roque diz que Fourier definiu uma função somente em um intervalo e isso fugia da definição do século XVIII, relacionada à expressão analitica. Euler e Lagrange recoheciam apenas certas funções e mesmo assim

Fourier, dizia que o teorema era válido para todas as funções, sendo dada ao termo “função” uma interpretação mais geral.

As séries de Fourier eram vista com desconfiança, pois contrariava os conceitos de função da época e segundo Roque (2012), ele dizia que uma segunda representação para uma função quebra a identificação da função com a expressão analítica. Se a função admite uma segunda representação, ela é algo a mais do que a sua representação.

Fourier então publicou na obra *Théorie analytique de la chaleur*, uma definição mais geral do termo “Função”, dizendo que:

> Em geral, a função f_x representa uma sucessão de valores ou ordenadas, cada uma das quais é arbitrária. Uma infinidade de valores sendo dada à abscissa x há um número igual de ordenadas Todos têm valores numéricos reais, positivos ou negativos ou nulos. Não supomos que essas ordenadas f_x estejam sujeitas a uma lei comum; Eles se sucedem de qualquer maneira, e cada um deles é dado como se fosse uma única quantidade (ROQUE, 2012, p. 395).

Na definição acima podemos perceber que Fourier diz que para cada x so existe um correspondente f_x, o que leva a ideia de dependencia entre as variáveis, sendo que esses valores não estavam sujeitos a uma lei comum, ou seja, não precisam de uma ou mais expressões analiticas para definilas, podendo está dentro de um intervalo, o que até então não era aceito pela comunidade matemática da época.

Kleiner diz que Fourier precisou convencer a comunidade matemática da época sobre a validade de seu teorema e para isso, Fourier teve que satisfazer algumas reivindicações tendo que mostrar que:

I. Os coeficientes da série de Fourier podem ser calculados para qualquer f (x);
II. Qualquer função f (x) pode ser representada por sua série de Fourier em (-l, l).

Segundo Kleiner (1989), seu trabalho teve um impacto fundamental sobre a evolução do conceito de função, então ele:

• Acabou com o artigo de fé defendido pelos matemáticos do século XVIII, já que num artigo de fé não se pode provar demonstrativamente, ficando claro agora que duas funções dadas por diferentes expressões analíticas podem concordar com um intervalo sem concordar necessariamente fora do intervalo.

• Mostrou que o conceito de descontinuidade de Euler era falho, pois algumas das funções descontínuas de Euler mostraram-se representáveis por uma série de Fourier - uma expressão analítica - e eram assim contínuas no sentido de Euler.

• Deu ênfase renovada às expressões analíticas, ou seja, elevou à expressão analítica (algébrica) de uma função a com sua representação geométrica (como uma curva).

E tudo isso levou a uma reavaliação do conceito de função, e segundo Roque (2012), um matemático chamado Lejeune-Dirichlet, que foi um grande crítico e teórico que influenciou vários matemáticos do século XIX, com uma formar de desenvolver prova matemática mais rigorosa para época. Dirichlet havia participado do círculo de Fourier, que era secretário-geral da Academia de Ciências e desenvolveu os estudos de Fourier sobre função, querendo dar mais consistência a definição de Fourier, mostrando que as suas séries convergiam.

Mas para mostrar que as séries de Fourier convergiam, era necessário expandir a noção de função, pois uma das propriedades gerais da função era que a função tinha que ser dada através de uma ou várias expressões analíticas e Dirichlet queria estudar um tipo de função que não pudesse ser escrita como uma expressão analítica, não pudesse ser representada por séries de potências e que não é contínua em nenhum ponto, ou seja, uma função diferente de tudo que se conhecia com função.

Segundo Kleiner (1989), Dirichlet vê a função como uma correspondência arbitrária, o que era muito diferente da noção de função da época, como expressões analíticas ou curvas. Essa ideia de Dirichlet fica bem clara na função apresentada em um artigo escrito de 1829 sobre a série de Fourier.

$$\varphi(x) = \begin{cases} c & \text{for} \quad x \in \mathbb{Q} \\ d & \text{for} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Só que para essa função pudesse ser vista como uma função, o conceito teria que ser estendido como uma relação arbitrária entre variáveis numéricas.

Então no artigo de 1829 mencionado acima, Dirichlet discute problemas relacionados à continuidade das funções estudadas por Cauchy e Fourier, dizendo que:

> Sejam *a* e *b* dois números fixos e *x* uma quantidade variável que recebe sucessivamente todos os valores entre *a* e *b*. Se a cada *x* corresponde um único *y*, finito, de maneira que, quando *x* se move continuamente no intervalo entre *a* e *b*, y = *f(x)* também varia progressivamente, então *y* é dita uma função contínua de *x* nesse intervalo. Para isso, não é obrigatório, em absoluto, nem que *y* dependa de *x* de acordo com uma mesma e única lei, nem mesmo que seja representada por uma relação expressa por meio de operações matemáticas. (Roque, 2012, p. 458)

Conseguimos ver nessa definição, que dadas duas quantidades variáveis *x* e *y*, para que *y* seja uma função de *x* não é preciso existir uma expressão algébrica relacionando a variável y a *x*, mas para cada x deve existir apenas um valor de $y = f(x)$, para que y seja uma função bem determinada. Essa condição de que para cada *x* tenhamos somente um valor para *y* de Dirichlet é independente da noção de conjunto e também está presente na definição atual e relacionada a conjuntos. Sendo assim, a função vista como uma relação entre duas variáveis permitiu que Dirichlet enunciasse condições para que a função fosse representada a partir de séries de Fourier, em um intervalo $(-l, l)$, como por exemplo:

• Ser bem-definida, ou seja, cada um dos valores da ordenada ser determinado univocamente pelo valor da abscissa;

• Ter um número finito de descontinuidades no intervalo $(-l, l)$.

Dirichlet utilizava o termo "funções arbitrárias", para se referir à necessidade de ir além da ideia da função ser expressa por uma ou mais expressões analíticas, pois o importante naquele momento era afirmar a generalidade como forma de questionar as definições apresentadas até aquele momento.

A nova função de Dirichlet, permitiu o desenvolvimento de novas propriedades e classes de função a partir de novos problemas, como as funções unívocas, contínuas, descontínuas em pontos isolados, diferenciáveis e outras, sendo que tudo isso não tinha como ser representado de forma analítica, então as função não eram mais estudadas a partir de expressões analíticas.

Esse novo conceito não foi aceito de imediato e segundo Roque (2012) ele só se tornou popular depois de publicado por H. Hankel em 1870, sendo que Riemann e Dedekind também utilizaram essa ideia de abstrata de função.

Como a função de Dirichlet, dependia do modo como os racionais e irracionais estavam distribuídos sobre o eixo das abscissas, ou seja, sobre a reta numérica, segundo Roque (2012), pesquisas sobre convergência a partir dos estudos das séries de Fourier, também se desenvolveram a partir da distribuição dos pontos sobre uma reta.

Roque (2012) afirma que partir de 1870, Cantor tendo como base o problema das séries de Fourier e vendo que quando a série trigonométrica representa uma função, ela é única, mostrou que isso acontece quando a série é convergente para todos os valores de x, concluindo que a unicidade também pode ser verificada quando a série trigonométrica deixa de ser convergente, ou seja, a função deixa de ser representada somente em um número finito de pontos e passar a ser representada por um número infinito de pontos, desde que estivessem distribuídos sobre a reta de um modo específico.

Para estudar essa distribuição dos pontos, era necessária uma representação dos números reais, mais detalhada e com mais rigor iniciando a conceitualização dos números reais. Nesta mesma época Dedekind já vinha refletindo sobre os números reais e sobre a necessidade de estudá-los mais a fundo, não iremos entrar em detalhes no desenvolvimento dos conjuntos numéricos, mas os estudos de Cantor e Dedekind foram muito importantes para a conceitualização da teoria dos conjuntos.

Segundo Roque (2012), teoria dos conjuntos teve um papel central na organização da matemática moderna sendo uma das peças chave para desenvolvimento da análise matemática, tendo ainda o infinito sendo introduzido por Cantor na matemática no final do século XIX, sendo assim considerado por muitos como o pai da moderna teoria dos conjuntos.

1.4: Século XX: A definição bourbakista de função

Roque (2012, p.473) diz que, *"a imagem de que a matemática é um saber axiomatizado baseado nas noções de conjunto e estrutura foi popularizada por Nicolas Bourbaki",* através da publicação de seus É*léments des mathématiques: les structures fondamentales de l'analyse*

(Elementos de matemática: as estruturas fundamentais da análise), que se iniciou a partir de 1939. “Bourbaki” não é uma pessoa e sim um grupo de matemáticos franceses dos anos 1930, que usavam esse pseudônimo para assinar os livros publicados por esse grupo, os quais se destinavam a servir de referência para estudantes, professores e pesquisadores. Eles viam cada ramo da matemática como uma investigação sobre estruturas próprias, tendo como principal ferramenta o método axiomático, contribuindo assim para organização das subdisciplinas da matemática. Destacamos aqui a definição de função, apresentada por Bourbaki, utilizando a teoria dos conjuntos como base.

Definição bourbakista de função:

> Sejam E e F dois conjuntos, que podem ser distintos ou não. Uma relação entre um elemento variável x de E e um elemento variável y de F é dita uma *relação funcional* se, para todo x pertencente a E, existe um único y pertencente a F que possui a relação dada com x. Damos o nome *função* à operação que associa, desse modo, a todo elemento x pertencente a E, o elemento y pertencente a F que possui a relação dada com x; y será dito o valor da função no elemento x. (Roque, 2012, p. 474)

Logo depois a definição será reformulada e a passará a ser definida como um subconjunto do produto cartesiano dos dois conjuntos $E \times F$, ou seja, a função é um conjunto de pares ordenados.

As novas noções de funções são muito diferentes das anteriores, tendo uma abordagem totalmente conjuntista, que elimina todas as ideias originais associadas à variação e passam a ter como ideias centrais dessa nova definição, conjuntos e variáveis. Roque (2012) afirma que ainda podemos definir variável usando a noção de conjunto, mas ao invés de ser entendida como uma quantidade indeterminada que varia e a variável passa a ser um elemento de um conjunto numérico.

Hoje a definição padrão de função, aprenda na escola e nos livros didáticos, segue o padrão bourbakista e Roque (2012) diz que esse padrão dificulta o entendimento dos exemplos de função que são efetivamente estudados, sendo difícil harmonizarmos a ideia dinâmica de função como variações de variáveis, que aparece em situações físicas, com a ideia mais estática, como a correspondência entre elementos de dois conjuntos.

Podemos ver que hoje em dia os livros didáticos definem a função com o padrão bourbakista, como por exemplo:

> “Dados dois conjuntos não vazios, A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento x ϵ A a um único elemento y ϵ B.” (Dante, 2014)
>
> “Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento x ϵ A a um único elemento y ϵ B recebe o nome de função de A em B” (Iezzi et all, 2013)

Segundo Roque (2012), “na história da física, a função serviu para estudar a variação, ou a mudança, a partir de uma escolha de variáveis relevantes em um certo fenômeno”, ou seja, fora do contexto histórico, a definição de função e as funções não perdem sua característica de relações entre variáveis quaisquer, sendo assim podemos ver que as ideias de Bourbaki são importantes dentro e fora da matemática.

Em relação à história do ensino de matemática o Movimento da Matemática Moderna, iniciada nos meados da década de 1950, que tinha o objetivo de mudar a matemática escolar da educação básica, aproximando a matemática acadêmica desenvolvida na universidade. Segundo Kilpatrick (2012) os bourbakistas influenciaram esse movimento, pois eles buscavam generalizar, formalizar e unificar toda a matemática pura, com uma liguagem de conjuntos, mapeamentos, grupos, espaços vetoriais.

Esse Movimento da Matemática Moderna influenciou a matemática ensinada nas escolas no Brasil, pois segundo Ogliari (2014) às visitas dos integrantes dos Bourbaki, entre os anos de 1955 e 1962, durante a realização de quatro Congressos Nacionais de Ensino da Matemática, realizados em Salvador (1955), Porto Alegre (1957), Rio de Janeiro (1962) e Belém (1967), tiveram como pauta a modernização do ensino de matemática no ensino secundário, dando início a introdução da linguagem da Matemática Moderna, destinada aos alunos da escola secundária.

Vimos que ao decorrer da história sobre o desenvolvimento do conceito de função, ela teve diversas definições, como uma expressão analítica, como a chamada função arbitrária, sempre procurando satisfazer os problemas de cada época, fazendo com que fosse preciso fazer uma revisão as definições existentes, até chegarmos na definição atual.

Capítulo 2: Fundamentação Teórica

Neste capítulo abordaremos os principais referenciais teóricos que serviram como base na construção e no desenvolvimento do nosso trabalho. O artigo das dinamarquesas Tinne Hoff Kjeldsen e Pernille Hviid Petersen (KJELDSEN & PETERSEN, 2012), com uma proposta de estudo das funções com uma perspectiva histórica, foi nossa principal inspiração.

Kjeldsen (2011) apresentou um quadro teórico e metodológico para elaborar sequências didáticas com perspectiva histórica, ou seja, ela explica como fazer o *design* de roteiros de ensino a serem usados no ensino de algum tópico matemático, usando história da matemática. Para isso, Kjeldsen baseia-se na perspectiva da matemática como um discurso - "*theory of thinking as communicating*", introduzida pela pesquisadora Anna Sfard (SFARD, 2008).

Nas próximas seções, falaremos sobre a perspectiva da matemática como um discurso, descrevendo os principais conceitos desta teoria que serão usados neste trabalho. Apresentaremos o experimento realizado por Kjeldsen e Petersen (2012) para o estudo das funções em uma turma equivalente ao Ensino Médio brasileiro, baseado na teoria mencionada e usando história da matemática. Apresentaremos ainda o trabalho de Beste Güçler (2016), também sobre o estudo de funções, baseado na teoria citada acima.

2.1 A perspectiva da matemática como um discurso.

A aprendizagem, na perspectiva de Sfard (2008), parte da ideia de participação, onde o aprendiz é um participante, considerado principiante, no qual ele participa de atividades coletivas. A partir dessa ideia, Sfard (2008) ressignifica as noções de comunicação e de pensamento.

A comunicação é um tipo de atividade coletiva padronizada, que acontece por meio de ações e reações, de modo repetitivo e intencional, entre os indivíduos que estão tentando se comunicar. Quando perguntamos a hora para alguém, esperamos alguns tipos de resposta: que pode ser a hora naquele instante ou que a pessoa está sem relógio, temos aí um exemplo de ação e reação.

O pensamento pode ser entendido como uma comunicação interna com você mesmo; não precisa ser ouvido, visto, ou até mesmo expresso por palavras. Bernardes (2016, p. 13) diz que colocar o pensamento como uma forma de comunicação, possibilita transpor a ideia de que o pensamento precede a comunicação e possibilita olhar para os processos cognitivos e de comunicação interpessoal como diferentes manifestações do mesmo fenômeno.

Visando destacar a unidade entre processos cognitivos e processos de comunicação interpessoal, Sfard (2008, p. 83) cunhou o termo "*commognition*", que é a *c*ombinação entre as palavras *communicational* e *cognition*. Utilizaremos daqui em diante os termos "comognição" como tradução para "*commognition*" e "comognitivo" para *commognitive,* assim como Bernardes (2016). Desta forma, o termo "comognição", é a união das palavras comunicação e cognição.

Situações envolvendo diferentes tipos de comunicação, dentro de um determinado contexto, são chamadas de discurso. A exposição de ideias sobre a matemática é vista como um tipo de discurso, assim como as ideias sobre a história, a física e a química também são tipos de discurso.

A matemática se distingue de outros discursos devido ao uso de palavras, do recurso a mediadores visuais, das narrativas endossadas e à realização de rotinas próprias. Sfard (2008) propõe distinguir a matemática dos outros discursos por meio dessas características externas ou visíveis, ao invés de se basear em seus objetos, que são inseparáveis do próprio discurso. Os objetos matemáticos são os próprios objetos do discurso como, por exemplo, os números, as funções, as formas geométricas, que são vistos como "construtos discursivos", sendo assim, parte do próprio discurso. As quatro propriedades citadas acima são consideradas críticas para decidir se um determinado exemplo de discurso pode ser considerado matemático e são caracterizadas na seguinte forma (SFARD, 2008, p. 133):

- **Uso da palavra** – Palavras que se referem a matemática e fazem parte do discurso matemático, como "três", "equação", "função", "poliedros", "quadrados";
- **Mediadores visuais** - Símbolos criados para permitir a comunicação, ajudando a organizar e fixar o discurso matemático, como a notação algébrica (xy, ≡), operadores aritméticos (+, ÷, { }, [ ], √, ≤, ≠, =), gráficos, notações geométricas(ΔABC, //, ⊥), notações de conjuntos (∪,∩, ∅) e outros.
- **Rotinas** - Padrões repetitivos que podem ser notados no discurso e caracterizam o discurso matemático, como: resolver um problema, definir ou provar algum conceito matemático, entre outros.

- **Narrativas** - Sequências de expressões verbais ou enunciados, que são utilizados para descrever objetos, relações entre objetos ou processos pelos quais os objetos foram desenvolvidos. As narrativas podem ser aceitas como verdadeiras pela comunidade matemática, isto é, endossadas; ou rejeitadas. Como exemplo de narrativas, temos teoremas, definições, axiomas.

Além das características acima sobre a matemática como um discurso, as atividades matemáticas coletivas padronizadas, têm seus padrões descritos como resultado de processos governados por dois tipos de regras: as **regras do nível do objeto** e as **regras metadiscursivas**, também chamadas de **metarregras**.

As regras do nível de objeto *"são narrativas sobre regularidades no comportamento dos objetos do discurso"* (SFARD, 2008, p. 201, nossa tradução). Bernades (2016) diz que na matemática, as regras do nível do objeto dizem respeito às propriedades dos objetos matemáticos. Por exemplo, na geometria euclidiana, temos que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180º. Na álgebra, temos que ab = ba, onde a e b são números reais.

As metarregras são relacionadas às ações dos discursantes, à forma com a qual o conteúdo do discurso é interpretado por eles, estando, normalmente, implícitas no discurso. Elas manifestam-se quando decidimos se uma determinada afirmação pode ser considerada como uma definição ou se uma demonstração pode ser considerada correta. As metarregras incluem normas, valores, objetivos de uma comunidade e podem ser empregadas para determinar padrões relacionados a diferentes atividades (BERNARDES, 2016).

As metarregras são mais complexas que as regras do nível de objeto, pois, enquanto as regras do nível do objeto referem-se ao comportamento dos objetos matemáticos, as metarregras dizem respeito à ação dos discursantes ao tentar produzir as narrativas do nível do objeto.

Segundo Bernardes (2016), a distinção entre os dois tipos de regra não é absoluta e dependendo do discurso, as suas metarregras podem se tornar regras do nível do objeto em outro discurso, como por exemplo, a narrativa "a ordem dos fatores não altera o produto", muito utilizada na aritmética, é vista como uma metarregra da aritmética, mas na álgebra ela se transforma em uma regra do nível do objeto quando dizemos que "ab = ba", em que a e b são números reais.

As metarregras costumam ser tácitas, ou seja, elas são construções implícitas no conteúdo do discurso, não sendo expressas de modo formal e como elas são implícitas, são difíceis de serem percebidas no discurso. Daí a importância de promover situações no ensino em que as metarregras sejam explicitadas.

As metarregras são convenções desenvolvidas ao decorrer do tempo, de forma natural, apresentando também uma variabilidade, onde as regras metadiscursivas são estruturas que mudam constantemente, mudando ao modo que os homens acharem necessário mudar com o passar do tempo, tendo assim um aspecto de inevitabilidade, como a mudança do conceito de função na matemática entre os séculos XVII e XVIII, sendo assim também contingentes. Portanto, quando alguém se apoia em uma demonstração, é o mesmo que aceitar o resultado como um costume ou um fato natural da nossa história.

Podemos afirmar que aprender matemática é o mesmo que alterar o seu discurso, sendo assim, Sfard separa o processo de aprendizagem em dois níveis diferentes: um no nível do objeto (*object-level learning*) e o outro no nível meta (*metalevel learning*). A aprendizagem no nível do objeto tem como base o desenvolvimento do vocabulário, de novas rotinas e na produção de novas narrativas, como aprender novas palavras - por exemplo: prismas, função e suas definições, propriedades. Já aprendizagem no nível meta, está relacionada mudanças nas metarregras do discurso, como reconhecer uma função de uma nova maneira.

Ambos os tipos de aprendizagem são importantes para que um indivíduo faça parte de um discurso, no nosso caso, para que os estudantes aprendam matemática. Dado que as metarregras são implícitas no discurso, aprender ou modificar suas próprias metarregras é mais difícil. Assim, a aprendizagem no nível meta é um desafio para a Educação Matemática.

Espera-se, segundo a abordagem comognitiva, que a aprendizagem no nível meta se desenvolva a partir do contato do aprendiz com um novo discurso, que contenha metarregras diferentes daquelas que o estudante se baseava. Tal situação é chamada de **conflito comognitivo**, sendo descrito como um fenômeno que ocorre quando narrativas aparentemente conflitantes se originam a partir de diferentes discursos, que diferem no uso das palavras, nas regras de substancialização etc. (Sfard 2008, p. 256).

Um exemplo de aprendizagem a partir de um conflito comognitivo, é o trabalho desenvolvido pelos professores holandeses Pierre Van Hiele e sua esposa Dina Van Hiele-Geldof sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico, conhecido como modelo de Van

Hiele. Esse casal desenvolveu a construção do pensamento geométrico, dividido em cinco níveis de compreensão: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor. De um nível para o outro, as metarregras são diferentes, como por exemplo, no nível da análise o aluno consegue analisar as figuras a partir de seus componentes, reconhecendo a partir de sua forma, por exemplo, reconhecer um quadrado ou um retângulo. Já no nível dedução informal, o aluno consegue perceber as suas propriedades e que podem decorrer de outra, como por exemplo, o aluno deve ser capaz de reconhecer que todo quadrado é um retângulo, mas nem todo retângulo é um quadrado, pois o quadrado possui todas as propriedades de um retângulo, porém retângulos não possuem todas as propriedades do quadrado. Assim conseguimos perceber que o discurso muda de um nível para o outro, já que as rotinas de reconhecimento e caracterização das figuras mudam.

Essa mudança na forma de enxergar os quadrados e os retângulos surge de situações de conflitos cognitivos o que é uma indicação de aprendizagem no nível meta, pois os quadrados e retângulos deixaram de ser reconhecidos por sua forma geométrica e passaram a ser vistas como figuras com suas próprias propriedades.

O conceito de conflito comognitivo é fundamental na teoria de Sfard, pois é uma fonte indispensável para a aprendizagem no nível meta. Sfard (2007) defende que a aprendizagem comognitiva tem como princípio que o pensamento é uma forma de comunicação e que aprender matemática é o mesmo que modificar e ampliar o discurso. Isso requer mudanças nas metarregras. Tais mudanças são estimuladas por conflitos comognitivos, que acontecem quando diferentes interlocutores estão agindo de acordo com diferentes regras meta-discursivas.

Na próxima seção, explicaremos a relação entre a teoria de Sfard e a história da matemática, conforme utilizada por Kjeldsen e Petersen (2012).

2.2 História da matemática e as (meta) regras do discurso por Tinne Hoff Kjeldsen.

Kjeldsen (2012), baseando-se na teoria de Sfard (2008), diz que a história da matemática pode ajudar a criar situações, em que as metarregras podem ser transformadas em objetos explícitos de reflexão e aprendizagem de conceitos matemáticos. Os estudantes podem ser expostos a diferentes fontes históricas e perceber que diferentes metarregras moldaram o desenvolvimento histórico da matemática. Situações de ensino podem ser planejadas de modo que os estudantes experimentem conflitos comognitos, uma vez que as metarregras que governaram o discurso de uma determinada fonte histórica são distintas das metarregras atuais. O contraste com diferentes metarregras pode ajudar os estudantes a perceberem e explicitarem as suas próprias metarregras.

O artigo *"History and the Learning of Mathematics: Detecting Students Meta-discurve Rules"* de Kjeldsen e Petersen (2012) apresenta a implementação e os resultados de um estudo de campo, realizado no contexto de uma dissertação de mestrado com o título *"History of the Concept of Function with Learning of Mathematic: Detecting student's meta-discursive rules"* (PERTERSEN, 2011).

O estudo piloto foi realizado em uma turma dinamarquesa, equivalente a uma turma do Ensino Médio brasileiro, com dezessete alunos, entre dezessete e dezoito anos de idade. Os alunos estudaram momentos históricos sobre as funções, a partir de livros e extratos de fontes primárias, e discutiram sobre o desenvolvimento do conceito de função.

Foram utilizadas fontes históricas originais de Euler de 1748 e de 1755, e Dirichlet de 1837, e também fontes secundárias, com o objetivo de levar os participantes a refletirem sobre as regras metadiscursivas relacionadas ao conceito de função.

O desenvolvimento do conceito de função por Euler, o debate sobre cordas vibrantes no século XVIII, as mudanças na organização da educação matemática após a revolução francesa e o desenvolvimento do conceito de função por Dirichlet no século XIX, foram os focos históricos.

As pesquisadoras enunciaram duas metarregras, cujas ideias costumam ser discutidas em livros de história da matemática mais atualizados:

- A validade geral da análise: que se refere à norma de que os resultados, técnicas e declarações da análise devem ser geralmente válidos.
- A generalidade da variável: refere-se à ideia de que cada variável da função pode assumir qualquer número, seja ele real ou imaginário.

As metarregras acima influenciaram as formulações das definições de função por Euler. O mesmo não ocorre com Dirichlet, que como vimos na parte histórica (Seção 1.3), possuía uma perspectiva diferente ao lidar com as demonstrações e restringia a variação da variável independente x a um intervalo de números reais.

Kjeldsen e Petersen tinham como objetivos do estudo, que os participantes se tornassem cientes de que existem diferentes metarregras na matemática e que a partir dos dados históricos conseguissem desenvolver uma consciência histórica, bem como refletir sobre as mudanças das regras metadiscursivas ao longo dos momentos históricos estudados.

O experimento teve duração de treze encontros de cinquenta minutos cada e foi organizado em duas partes de acordo com a estrutura de matriz descrita em Kjeldsen (2011). Na primeira parte, os alunos foram divididos em quatro grupos. Cada grupo trabalhou em um aspecto particular do tema, guiado por uma folha de cálculo que foi concebido de acordo com diferentes metas de aprendizagem. Os alunos trabalharam nos grupos as seguintes lições:

- Grupo Base 1: definições históricas de uma função
- Grupo Base 2: O debate da corda vibrante
- Grupo Base 3: Euler, Dirichlet e da sociedade em que viviam
- Grupo Base 4: O conceito moderno de uma função

Cada grupo base escreveu um relatório para completar as tarefas formuladas em sua planilha. Grupos 1, 2 e 3 trabalharam com a história do conceito de uma função a partir de diferentes perspectivas e o grupo 4 trabalhou o conceito moderno de função.

Os grupos foram reorganizados distribuindo cada um deles, onde eles realizaram tarefas seguidas de um questionário sobre os conceitos históricos.

Ao final do experimento, Kjeldsen e Petersen perceberam que os alunos: desenvolveram uma consciência histórica acerca do conceito de função; as regras metadiscursivas sobre funções externadas por alguns alunos entravam em conflito com as aceitas pela matemática atual, houve mudanças nas metarregras de alguns alunos, independentes de estarem certas ou erradas.

2.3 Os estudos de Beste Güçler com as definições históricas de função.

O trabalho de Beste Güçler, "*Making implicit metalevel rules of the discourse on function explicit topics of reflection in the classroom to foster student learning"* (Güçler, 2015), foi um estudo realizado com estudantes universitários, tendo como fundamentação teórica o quadro comognitivo de Sfard (2008). O objetivo central foi explorar as metarregras dos participantes sobre os conceitos de Cálculo, durante 13 semanas. Mesmo que os conceitos de função não fossem objetivo central, o experimento explorou as discussões sobre funções nas três primeiras semanas.

Foram realizadas tarefas para que os participantes tivessem contato com metarregras diferentes, relativas ao conceito de função, com o objetivo de levá-los a explicitar suas próprias metarregras, permitindo assim que eles pudessem refletir sobre os conceitos aceitos pelos matemáticos e as suas próprias convicções iniciais.

Güçler tinha como objetivo trabalhar com as definições de função. As atividades iniciam por levar os participantes a refletirem coletivamente sobre as suas próprias definições. Somente depois entraram em cena as definições de função de Euler (1748 e 1755), de Dirichlet (1837) e Bourbaki (1939). O referencial histórico da pesquisadora foi Kleiner (1989). Em seguida, foram exploradas duas definições atuais estudadas por eles em livros didáticos.

Güçler destaca as metarregras que influenciaram as definições de Euler, Dirichlet e Bourbaki, mas não deixa claro em que se baseou para identificar e descrever as metarregras.

A tabela abaixo indica quais as metarregras que Güçler utilizou em seu trabalho:

Tabela 1 (Metarregras utilizadas por Güçler)

Euler – 1ª definição (1748)	Metarregras que pressupõem regularidade e continuidade levam Euler a identificar o conceito de função à noção de expressão analítica: "*Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica [...]*". (1748)

Euler – 2ª definição (1755)	Metarregras que pressupõem mudança e variação levam Euler a reinterpretar uma função por meio de uma dependência entre quantidades: "*Se certas quantidades dependem de outras quantidades de maneira que se as outras mudam essas quantidades também mudam*". (1755)
Dirichlet (1837)	Metarregras que conferem um status de arbitrariedade ao conceito de função levam Dirichlet a interpretar uma função como uma correspondência entre variáveis: "*é irrelevante em que forma essa correspondência é estabelecida.*"
Bourbaki (1939)	Metarregras relacionadas ao movimento dinâmico (variação, direção, aproximação) foram substituídas por "static terms using only real numbers" (Lakoff & Núñez, 2000, p. 308 apud Guçler, 2015, p. 387). Guçler faz referência ao período em que a Matemática passou a ser vista como um saber axiomatizado. A definição de função apresentada por Bourbaki enfatiza a ideia de relação entre elementos de dois conjuntos.

Após a apresentação das definições, os alunos foram questionados pelo professor sobre o que eles entenderam em relação às definições trabalhadas, provocando uma reflexão e um confronto entre as metarregras que eles possuíam anteriormente e as novas metarregras apresentadas. Ao final das perguntas, Güçler pôde perceber que houve mudança das metarregras em alguns alunos em relação às anteriores, mesmo assim, eles mostraram dificuldades sobre o assunto.

2.4 Contribuições do referencial teórico para o trabalho.

O referencial teórico e metodológico de Kjeldsen e Petersen (2012) traz a proposta de usar fontes históricas para revelar as diferentes metarregras, que moldaram práticas matemáticas do passado. A ideia é utilizar fontes históricas para elaborar atividades, que levem os estudantes a refletirem sobre metarregras, tanto as do passado, quanto as suas próprias.

Como a história é uma fonte de discursos influenciados por metarregras diferentes das atuais, seu uso é bastante promissor para planejar situações de conflitos comognitivos. O contraste entre as metarregras implícitas nas fontes históricas e as atuais pode levar os estudantes a perceberem e explicitarem suas próprias metarregras. Tal contraste se revela por meio das diferentes concepções sobre os objetos matemáticos, das diferentes definições, do modo distinto que as ferramentas matemáticas são empregadas, entre outros.

A proposta desses pesquisadores, baseada na teoria de Sfard (2008), contribuiu para a escolha dos momentos históricos e das definições de função a serem utilizadas para planejar as atividades da nossa proposta. Neste estudo, trabalhamos com os participantes as definições do conceito de função de Euler (primeira e segunda definição) e a definição de Dirichet.

Não fizemos uma análise em fontes primárias para identificar metarregras relacionadas a funções. Algumas daquelas descritas por Kjeldsen e Petersen e por Güçler em seus trabalhos foram exploradas em nossas atividades. Inspiramo-nos principalmente nas atividades apresentadas por Kjeldsen e Petersen para confrontar as diferentes metarregras, que influenciaram a formulação das definições de função de Euler e de Dirichlet, com as dos participantes do estudo.

Dentre as metarregras enunciadas por Kjeldsen e Petersen, exploramos nas atividades a generalidade da variável, que influenciou as definições de Euler. Dentre as que foram enunciadas por Guçler, buscamos explorar as metarregras relacionadas à regularidade e continuidade por meio da ideia de que Euler identificava o conceito de função a sua expressão analítica; exploramos também as metarregras relacionados a movimento e variação por meio da interpretação de Euler de função como uma dependência entre quantidades. Exploramos ainda as metarregras que conferem um status de arbitrariedade ao conceito de função, por meio da definição de Dirichlet.

Capítulo 3: Proposta de ensino de funções com uma abordagem histórica e o estudo de campo da pesquisa

Neste capítulo serão apresentados os aspectos metodológicos, o material elaborado e aplicado com quinze participantes de uma escola da rede particular de ensino, localizada na cidade de Nilópolis. Descreveremos ainda como o estudo de campo foi organizado.

3.1 Aspectos Metodológicos

A opção em fazer um estudo de campo e implementar a proposta que será aqui apresentada, deve-se ao objetivo de investigar o impacto de uma proposta de ensino com perspectiva histórica na aprendizagem de função dos participantes.

O referencial teórico mencionado no capitulo anterior, orientou a escolha de dois momentos históricos, bem como a elaboração das atividades dos roteiros aplicados. Os momentos históricos foram eleitos por se tratarem de discursos moldados por metarregras distintas entre si e distintas daquelas que moldam o discurso atual sobre funções no ensino básico. Por exemplo, Euler se orientava pelas metarregras: a generalidade da variável (KJELDSEN & PETERSEN, 2012) e aquelas relacionadas à regularidade e continuidade (GUÇLER, 2015) - que influenciou a identificação do objeto função a sua expressão analítica. Já Fourier e Dirichlet não se baseavam nas mesmas metarregras, como por exemplo, na definição de Dirichlet tinha como base à arbitrariedade, que o levou a interpretar uma função como uma correspondência entre quantidades. É importante ressaltar que o termo metarregra não foi mencionado para os participantes nos encontros, mas foi utilizado como um conceito de pesquisa.

O material apresentado contém atividades de natureza histórica e de natureza matemática que, juntamente com questionários, geraram dados para a pesquisa.

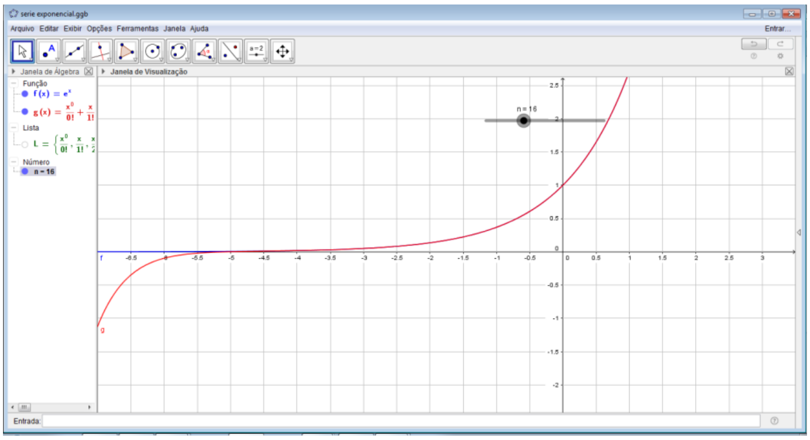
Um questionário inicial, que foi dividido em duas partes e aplicado separadamente, teve na primeira parte (Apêndice I) questões com a finalidade de fazer um diagnóstico do grupo de participantes, buscando acessar o que os participantes entendiam por função, por domínio, por imagem, dentre outros conceitos relacionados ao tópico função. Na segunda parte (Apêndice II) as questões tiveram o objetivo de verificar a capacidade dos participantes em resolver questões sobre como identificar e determinar domínio, imagem e contradomínio de funções e em identificar funções sem a influência das questões do primeiro questionário.

Além do questionário inicial, no último encontro foi aplicado outro questionário também dividido em duas partes. A primeira parte teve como objetivo obter um *feedback* dos alunos sobre a participação deles no estudo de campo, bem como sobre a experiência de conhecer o desenvolvimento histórico de um conceito matemático, o que foi totalmente novo para o grupo de participantes do estudo. Como os materiais enfatizaram diferentes definições de função, perguntamos também sobre a importância das definições matemáticas. Na segunda parte, repetimos algumas perguntas que foram realizadas no primeiro encontro a fim de compararmos o que se alterou em relação ao conhecimento dos estudantes sobre função, domínio e imagem.

3.2 Material elaborado

O material foi dividido em três roteiros, contendo uma parte histórica, seguido de listas de atividades, algumas de cunho matemático e outras de cunho histórico, com o objetivo de explorar algumas metarregras que influenciaram os discursos dos matemáticos citados nos roteiros, ligados à noção de função (veja Seção 2.4).

O primeiro roteiro (Apêndice III) tem como momento histórico as primeiras contribuições de Euler para o desenvolvimento do conceito de função. O roteiro começa por abordar de forma resumida alguns dos antecedentes da noção de função (conforme Seção 1.1). Em seguida, apresentamos a primeira definição de Euler (1748). Nesse roteiro, falamos sobre séries com os participantes, através do geogebra (Figura 2.1) mostramos como podemos aproximar uma função por uma série e o que significava isso, ou seja, mostramos que a soma da série é uma função de x, cujo domínio é o conjunto de todos os x para os quais a série converge.



(Figura 2.1) Série exponencial no Geogebra

As atividades desse roteiro foram elaboradas com o objetivo de explorar a ideia de função como uma expressão analítica, como por exemplo: *"1) Qual a principal ideia na qual a definição de função de Euler se baseia?"* e a ideia da generalidade da variável, como por exemplo: *"3) Explique que princípio está por trás da definição de* ***variável*** *de Euler".*

O segundo roteiro (Apêndice IV) continua o momento histórico do primeiro, abordando: o estudo das cordas vibrantes por D'Alembert e Euler, as discussões sobre continuidade das funções e a segunda definição de Euler (1755). As desse roteiro foram elaboradas com o objetivo de explorar a ideia de função com mais de uma expressão analítica, como por exemplo: *"1. Compare a 1ª definição de Euler (1748) apresentada anteriormente, com a segunda definição de Euler que acabamos de ver (1755) e descreva a(s) diferença(s)."* e da continuidade da função a partir da noção de Euler e da atual, comparando gráficos, tendo também a verificação sobre a presença da generalidade da variável, como por exemplo*: "2. Discuta se o princípio da generalidade da variável se aplica a 2ª definição de Euler".*

O terceiro roteiro (Apêndice V) tem como momento histórico as contribuições de Fourier com o estudo da propagação do calor e com a ideia de uma função a partir de séries trigonométricas em um determinado intervalo e as contribuições de Dirichlet com a ideia de arbitrariedade na definição de função, descontruindo as definições anteriores que traziam as ideias de função com uma ou mais expressões analíticas e da generalidade de variável. As atividades desse roteiro foram elaboradas com o objetivo de explorar a ideia de função de correspondência arbitrária, sem a necessidade de uma expressão analítica, como por exemplo:

“3) *Analise a definição de função de Dirichlet e discuta se este matemático identifica a noção de função à ideia de expressão analítica”* e a ideia de restrição das variáveis, como por exemplo: *“1) Analise a definição de função de Dirichlet e diga se este matemático baseiou-se no Princípio da generalidade da variável, assim como Euler”* .

3.3 Parte Experimental

A pesquisa contou com um estudo de campo realizado com quinze participantes da Abeu Colégios - Nilópolis, organizado em cinco encontros. Todos os encontros foram conduzidos pelo pesquisador. A escolha da escola foi feita por ela ser também um centro universitário que incentiva a realização de trabalhos de pesquisas acadêmicas e por que os participantes do trabalho de campo foram alunos do pesquisador nas duas séries iniciais do ensino médio. Os estudantes em questão foram convidados a participar do estudo como voluntários.

No primeiro encontro apresentamos a proposta do trabalho que seria realizado e também aplicamos um questionário diagnóstico, que foi dividido em duas partes (como foi explicado na seção anterior), com o objetivo de sabermos o que os participantes compreendiam sobre função.

Cada encontro, a partir do segundo, foi organizado em duas partes: o primeiro momento contava com uma apresentação da parte histórica, com dados biográficos dos matemáticos envolvidos, com o contexto matemático e social no qual o conceito de função foi se modificando, a partir de textos, apresentação de *Power Point*, gráficos no Geogebra e ao final da apresentação discutíamos sobre as ideias apresentadas. O segundo momento contava com a realização das atividades, nesse momento os participantes eram divididos em grupos para discutir as atividades. Inicialmente, os participantes faziam as atividades sem a interferência do pesquisador.

O segundo encontro contou com a presença de nove participantes. Nele foram discutidos alguns fatores que impulsionaram o surgimento do conceito de função e foi apresentada a primeira definição de Euler. Tal definição tinha como ideia central a presença de uma expressão analítica. Inspirados no trabalho de (KJELDSEN & PETERSEN, 2012), exploramos nas atividades propostas a metarregra relacionada ao *princípio da generalidade* *da variável*, bem como a identificação da noção de função a sua expressão analítica. Neste encontro, os participantes se indentificaram muito com a definição apresentada e não tiveram problemas para entender a noção de continuidade, tando a de Euler, quanto a noção atual, que foi trabalhado de forma intuitiva, a partir da análise gráfica.

O terceiro encontro contou com a presença de oito participantes. Nesse encontro discutimos sobre a segunda definição de Euler, que passou a admitir que uma função pudesse ser expressa por mais de uma expressão analítica, a interpretação de função como uma dependência entre quantidades (mudança e variação) e o conceito de continuidade da função. As atividades aplicadas tinham como objetivo relacionar essas novas noções de função com a primeira definição de Euler e relacionar a noção de continuidade de Euler com o conceito de continuidade na matemática atual.

O quarto encontro contou com a presença de oito participantes, nesse encontro foram apresentadas as definições de função de Fourier e Dirichlet.

A definição de Fourier contrariava a definição de Euler, pois para Fourier defendia a ideia uma função a partir de séries trigonométricas em um determinado intervalo o que para Euler não poderia acontecer e a definição de Dirichlet derrubava a necessidade de exprimir a função por meio de uma ou mais expressões analíticas, dando lugar à ideia de arbitrariedade, ou seja, poderia ser uma correspondência qualquer, desde que a variável “x” tivesse um único correspondente “y”, deixando de lado também a ideia de generalidade da variável, bem como o conceito de continuidade de Euler.

O último encontro contou com a presença de quatro participantes, onde foi perguntado através de um questionário, o que o trabalho realizado agregou para eles em relação a conteúdo e então fizemos uma recapitulação dos conceitos apresentados durantes os encontros e trouxemos também a definição atual que eles aprenderam.

Após isso eles responderam algumas perguntas sobre o conteúdo sendo que algumas foram feitas no início do trabalho, para verificarmos se houve mudanças após as apresentações e discussões.

O número de participantes reduziu consideravelmente do primeiro para o segundo encontro (de 15 para 8), talvez por eles serem voluntários e sem nenhuma obrigação. Além disso, alguns fatores externos impossibilitaram a assiduidade de alguns participantes nos encontros. A proximidade do último encontro com o recesso escolar acabou desanimando mais alguns participantes. Os que compareceram ao último encontro (4 participantes), faziam parte do mesmo grupo e participaram efetivamente de todos os encontros, nos propiciando resultados interessantes que serviram como referência para o resultado final do trabalho.

Capítulo 4: Resultados da Pesquisa

Neste capítulo apresentaremos o questionário diagnóstico, as atividades de cada um dos três roteiros aplicados nos encontros e o questionário final.

As atividades dos roteiros e os questionários serão apresentados com os objetivos de cada questão, como por exemplo, na atividade do primeiro encontro dos conceitos históricos (Apêndice III):

1) Qual a principal ideia na qual a definição de função de Euler se baseia?

Objetivo: Esperávamos que os participantes percebessem que na definição de Euler ideia central da noção de função como Euler uma (única) expressão analítica.

Em questões mais objetivas, apresentaremos as respostas, como por exemplo, na segunda parte do questionário diagnóstico (Apêndice II):

4) Verifique se os itens abaixo são exemplos de função. Justifique sua conclusão.

a) $y^2 = x + 1$ ***R:*** *(Não é função, pois pela expressão teríamos dois valores de y para um único valor de x)*

Em alguns casos as respostas e os objetivos, como por exemplo, na segunda parte do questionário diagnóstico (Apêndice II):

2) Determine o conjunto domínio das funções abaixo:

a) f(x) = $\frac{x+1}{x-1}$ *(Resposta: D= { x∈* ***IR*** */ x ≠ 1})*

b) g(x) = $\frac{4x-1}{3}$ *(Resposta: D= IR)*

Objetivo: Verificar se os participantes sabiam determinar o domínio de uma função.

Faremos referência aos participantes por meio de um codinome, escolhido por nós, sendo que cada participante será representado por uma letra maiúscula do alfabeto, como por exemplo, *"Aluno A"*, para preservarmos a identidade de cada participante.

Nos questionários e nas atividades, analisamos as respostas dos participantes com base nos objetivos estabelecidos ou nas respostas esperadas (quando for o caso), apresentando as respostas de alguns participantes para ilustrar nossa interpretação.

4.1 Resultados

Questionário Diagnóstico 1ª PARTE

1) Qual a definição de função?

Objetivo: Verificar se os participantes se recordavam da definição de função e que ideias eles associavam ao conceito de função, por exemplo, se pensam que função é uma expressão algébrica ou uma correspondência entre dois conjuntos, entre outros.

Nas respostas analisadas, as principais ideias que surgiram foram a de função: como uma relação entre variáveis, como uma "expressão numérica", definida por uma equação e relacionada à representação gráfica. Por vezes, algumas respostas indicam mais de uma das ideias mencionadas.

Função como uma expressão analítica associada com a representação gráfica, temos:

"É uma expressão numérica que serve para determinar localizações no plano cartesiano". (Aluno B)

"Uma expressão numérica para obtenção de gráficos x (linha), y (vertical)".(Aluno D)

Relação entre variáveis:

"Relação de variáveis a partir de uma equação." (Aluno F)

Função associada com a ideia de relação entre variáveis:

"Relação estabelecida entre duas variáveis". (Aluno E).

Correspondência entre os elementos de dois conjuntos:

"É uma função que liga um domínio ao contradomínio de forma que algum elemento do domínio não ligue a dois do contradomínio". (Aluno C)

2) Apresente três exemplos de função.

Objetivo: Verificar quais representações os participantes associavam ao conceito de função.

Nas quinze respostas analisadas tivemos que a maioria dos participantes (dez) apresentou os três exemplos por meio de expressões analíticas, incluindo funções afim, quadrática, exponencial e racional, como por exemplo:

Aluno C:

$f(x) = x^2+8$ $\quad$ $f(x) = 3^x$ $\quad$ $f(x)= 2x-1$

Desses quinze participantes, dois deles apresentaram uma equação como, por exemplo:

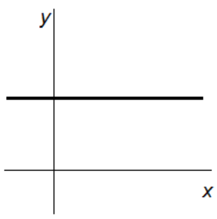
Aluno B:

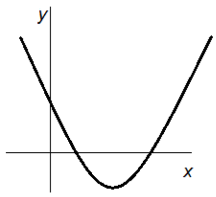
$y= mx+h$ $\quad$ $S= \frac{D}{2}$ $\quad$ $ax+by+c= 0$

Desses quinze participantes, dois deles apresentaram representações gráficas como exemplo:

Aluno D:

$f(x) = ax+m$





3) Explique o que é o domínio, a imagem e o contradomínio de uma função.

Objetivo: Verificar se os participantes se lembravam dos conceitos de domínio, imagem e contradomínio.

Nas respostas analisadas tivemos:

- DOMÍNIO – Respostas que indicavam o domínio como um conjunto de saída, por exemplo: "*representado por todos os elementos do conjunto A.*" (Aluno A)

  Ou fazendo referência à variável x:

  "Domínio: valores de x." (Aluno F)

  "Domínio = x" (Aluno D)

- CONTRADOMÍNIO - Respostas que indicavam o contradomínio como um conjunto de chegada, por exemplo:

  "Contradomínio: ponto que chega (x)". (Aluno C)

  "Contradomínio é o ponto aonde o domínio chega". (Aluno E)

  Ou fazendo referência à variável y:

  "Contradomínio: conjunto do y". (Aluno F)

- IMAGEM - Respostas que indicavam a imagem como um conjunto resultado, por exemplo:

  "Imagem: valor de y". (Aluno F)

  "Imagem: f (x)". (Aluno D)

Ou fazendo referência aos elementos do contradomínio associados a algum elemento do domínio.

"Imagem: representada pelos elementos do contradomínio (conjunto B) que possuem correspondência com o domínio (conjunto A)." (Aluno A)

4) Você conhece alguma coisa sobre a história do conceito de função (como surgiu? Por que surgiu?)? Em caso afirmativo, fale um pouco sobre isso.

Objetivo: Verificar se os participantes sabiam alguma coisa sobre o desenvolvimento histórico do conceito de função.

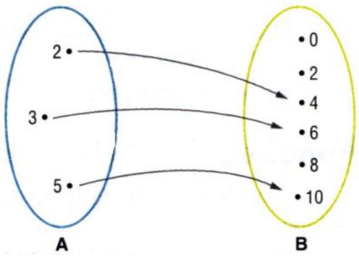
Essa questão mostra que os participantes não têm conhecimento ou se têm, é pouco, sobre a origem daquilo que eles estudam e que não tiveram contato com a história da matemática, houve um participante que disse ter relação com a física, mas não explica como era essa relação.

"Sim, tem relação com física". **(**Aluno A)

O resultado obtido com a questão 2, em que a maioria dos exemplos apresentados basearam-se na expressão analítica da função, foi condizente com as nossas expectativas de que a representação de função registrada com mais força entre os alunos é a expressão analítica ou algébrica de uma função. Essa ocorrência é relatada por alguns pesquisadores, por exemplo, Palis (2013) menciona que muitos alunos acreditam que todas as funções podem ser definidas por uma fórmula algébrica.

Questionário Diagnóstico 2ª PARTE

1) O diagrama de flechas abaixo representa uma função f de A em B. Determine:



a) Domínio de f *(Resposta: Conjunto A = {2, 3, 4})*

b) Contradomínio de f *(Resposta: Conjunto B = {0, 2, 4, 6, 8, 10})*

c) Imagem de f *(Resposta: Conjunto {4, 6, 10})*

Objetivo: Verificar se os estudantes sabiam identificar o domínio, o contradomínio e a imagem de uma função, representada por um diagrama de flechas, que é comum nos livros didáticos.

Nas respostas analisadas, observamos que nenhum aluno mostrou dificuldade em identificar o domínio da função f, a menos de imprecisões na notação. A maioria apresentou sua resposta, escrevendo os elementos sem notação de conjunto, como por exemplo:

"a) 2, 3, 5" *(Aluno C)*, que identificou os elementos do domínio, mas representou de forma errada.

Com relação ao contradomínio, alguns participantes identificaram os elementos corretamente, mas com imprecisões na notação:

"b) 0, 2, 4, 6, 8, 10" (Aluno A) que identificou os elementos, mas não representou corretamente.

Outros participantes confundiram esse conjunto com a imagem da função, como por exemplo:

"b) 4, 6 e 10" (Aluno D) que confundiu o conjunto contradomínio com o conjunto imagem.

No item c), tivemos dois participantes que apresentaram como imagem da função a lei de formação.

"c) f (x) = 2x" (Aluno A e Aluno C)

Os demais alunos representaram corretamente.

2) Determine o conjunto domínio das funções abaixo:
a) f(x) = $\frac{x+1}{x-1}$ *(Resposta: D= { x∈ **IR** / x ≠ 1})*
b) g(x) = $\frac{4x-1}{3}$ *(Resposta: D= IR)*
Objetivo: Verificar se os participantes sabiam determinar o domínio de uma função.

Nas respostas analisadas tivemos que:

Os participantes conseguiram determinar com facilidade os elementos do conjunto domínio, mas com imprecisões nas notações, principalmente no item a).

No item a), o número 1 não poderia pertencer ao domínio, mas muitos tiveram dificuldades de se expressar matematicamente. Já no item b) eles não apresentaram maiores dificuldades.

"a) Diferente de 1"; "b) Real" (Aluno A)

"a) x pertence a IR, mas $x \neq 1$"; "b) IR" (Aluno C)

"a) Real – {+1}"; "b) Real" (Aluno B)

3) Por que é importante conhecer o domínio de uma função?

Objetivo: Verificar se os participantes sabiam o papel do domínio em uma função, ou seja, que o conjunto domínio determina os valores da variável independente para os quais a função está definida.

Nas respostas analisadas, observamos que mesmo os participantes que conseguiram determinar os domínios dos itens anteriores, não apresentaram uma resposta apropriada sobre o significado do domínio e a importância de conhecer esse conjunto. Os participantes sabiam que o domínio de uma função tem relação com a variável independente x, mas pareciam não saber por que é necessário determinar o domínio de uma função. Tivemos respostas relacionadas à construção do gráfico e a valores de x e y.

"Para conseguir montar um gráfico x, y." (Aluno D).

"Para saber os valores de x." (Aluno C).

"Para identificar a sua imagem." (Aluno A).

Notamos que as respostas acima refletem procedimentos.

4 Verifique se os itens abaixo são exemplos de função. Justifique sua conclusão.

Objetivo: Verificar se os participantes conseguem reconhecer quais dos itens abaixo, são funções, justificando suas respostas.

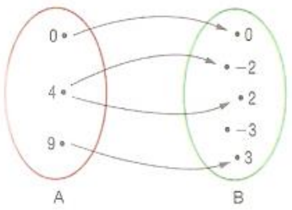
a) $y^2=x+1$

R: *Não é função de y em relação a x, pois pela expressão teríamos dois valores de y para um único valor de x.*

Muitos participantes consideraram a expressão acima como função, só pelo fato de apresentar duas variáveis, como por exemplo:

"a) Sim, pois tem duas variáveis." (Aluno F)

Tivemos neste item somente dois acertos, mas os participantes não justificaram as suas respostas.



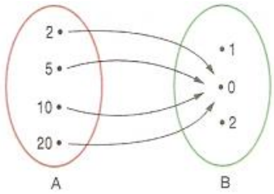
b)

R: *Não é função de A em B, pois o 4 ∈ A, está ligado a dois elementos de B.*

Neste item tivemos um único aluno que errou ao identificar o diagrama acima como função e não justificou o porquê, mas os demais disseram que não era uma função, como por exemplo:

"b) Não, saem duas setas do 4."(Aluno A)

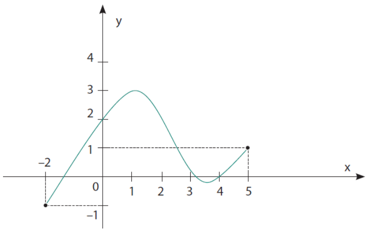
"b) Não, pois o quatro (4) tem duas ligações." (Aluno F)



c)

R: *É função.*

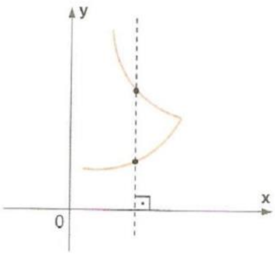
Neste item todos acertaram sem problemas



d)

R: *É função.*

Neste item todos acertaram sem problemas.



e)

R: *Não é função, pois há dois valores de y para um valor de x.*

Neste item todos os participantes acertaram, trazendo em suas justificativas a ideia de retorno no gráfico e de que há dois valores de y para um único x.

"e) Não, o gráfico volta." (Aluno A)

"e) Não, pois tem dois y para um x." (Aluno C)

f) f associa a cada número natural o n-ésimo número primo (ex: f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 5 e assim por diante).

R: *É função, pois para cada n natural, há um único primo n.*

Nossa intensão com este item foi trazer um exemplo de função que não estivesse expressa por meio de uma expressão analítica.

Neste item tivemos três acertos, onde os participantes erraram justificaram as suas respostas, dizendo que não era função por falta de uma expressão algébrica, como por exemplo:

"f) Não, pois não tem equação." (Aluno C)

"f) Não, não tem equação." (Aluno F)

Os participantes que acertaram este item não apresentaram justificativa para as suas respostas.

g)	$\mathbf{3x^2 - 12x + 25 = 7}$
R: Não é função, pois é uma equação do 2º grau e só tem a incógnita x, que não é variável.	

Muitos participantes erraram justificado que era função por ter uma equação, o que indica uma confusão entre os objetos equação e função:

"g) Sim, pois é uma equação." (Aluno F)

Os participantes que acertaram este item e apresentaram justificativas, disseram que era uma equação.

"g) Não, pois é uma equação." (Aluno C)

Observamos em algumas respostas acima alguns dos problemas que Palis (2013) aponta sobre o ensino de funções, como a confusão entre função e equação e entre variável e incógnita.

A imagem de uma função como uma expressão algébrica é tão forte que, ao se deparar com um exemplo de função que não possui uma expressão, alguns estudantes usam esse critério para concluir que não se trata de uma função, como foi o caso no item f) da questão 4.

Atividades do 1º Encontro

As atividades desse roteiro foram elaboradas com o objetivo de explorar a ideia de função como uma expressão analítica.

1) Qual a principal ideia na qual a definição de função de Euler se baseia?

Objetivo: Esperávamos que os participantes percebessem que na definição de Euler se baseava na noção de função como uma (única) expressão analítica.

Nas respostas analisadas, todos conseguiram identificar a ideia central da definição de Euler, com a função sendo uma única expressão analítica, como por exemplo:

"Ele se baseava na expressão analítica, pois só pode ter <u>*uma*</u> *expressão analítica."* (Aluno E).

"Expressão analítica. Apenas uma expressão analítica." (Aluno C).

"A principal ideia dele foi expressão analítica e só pode ter uma expressão."(Aluno D).

2) Verifique quais dos itens abaixo são funções de acordo com a definição de Euler:

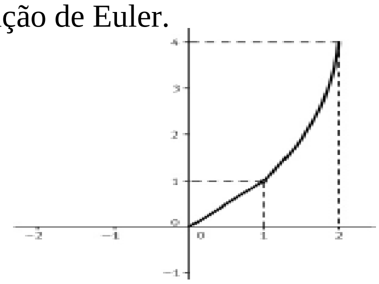
a) f (x) = sen x + cos x

R: Sim, é uma função a partir da primeira definição de Euler.

b) g(x) = $\sum_{n=o}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + ...;$

R: Sim, é uma função a partir da primeira definição de Euler.

c) h (x) = $\begin{cases} x, & se\ 0 \le x \le 1 \\ x^2, & se\ 1 < x < 2 \end{cases}$



R: Não é uma função a partir da primeira definição de Euler.

Objetivo: Reconhecer funções a partir da primeira definição de Euler.

As respostas analisadas foram positivas, pois todos conseguiram identificar quais dos itens acima seriam considerados função a partir da primeira definição de Euler. Por exemplo, o Aluno A respondeu:

a) *"Sim. Apresenta uma expressão analítica."*

b) *"Sim. Apresenta uma expressão analítica infinita de adição."*

c) *“Não. Apresenta duas expressões logo, para Euler, não pode ser considerada uma função.”.*

3) Explique que princípio está por trás da definição de variável de Euler.

Objetivo: Reconhecer que Euler se baseava no “princípio da generalidade da variável”, isto é, uma variável poderia assumir números positivos, negativos, irracionais e até imaginários. Além disso, os valores de x para os quais a função não estava definida eram ignorados.

Nas respostas analisadas, percebemos que os participantes se preocuparam com o conjunto numérico ao qual os valores poderiam pertencer, não percebendo a falta de restrição que o princípio da generalidade da variável se referia. Os participantes apontaram a ideia do princípio da generalidade da variável, sendo:

“Tem que ser qualquer número, negativos, imaginários, inteiros, fracionários e etc.” (Aluno A).

“Pode ser qualquer valor numérico.” (Aluno G).

“Pode ser qualquer número real ou até mesmo imaginário.” (Aluno B).

4) O princípio acima (questão três) é aceito nos dias de hoje?

Objetivo: Esperávamos que os participantes percebessem que para definirmos uma função, precisamos explicitar o seu domínio.

Nas respostas analisadas, todos os participantes sinalizaram acreditar que o “princípio da generalidade da variável” ainda é aceito nos dias de hoje. Eles não associaram o conceito de domínio à questão. Conforme relatado no item anterior, eles relacionaram o princípio da generalidade da variável ao conjunto numérico ao qual os valores poderiam pertencer. Em outras palavras, para os participantes da pesquisa, pode-se substituir qualquer valor numérico em x e obter qualquer valor numérico em y, como por exemplo:

“Sim. Porque pode ser atribuído qualquer valor a x e y.” (Aluno A).

“Sim, porque x e y pode ser qualquer número real.” (Aluno F).

"Sim, porque usamos qualquer valor numérico no x e no y." (Aluno G).

Sabemos que os participantes já haviam estudado números complexos e mesmo assim eles ignoraram os complexos nas respostas deles. As funções estudadas sempre são de IR em IR, salvo restrições no domínio.

5. Abaixo está a definição de função que você aprendeu. Compare essa definição de função com a definição de Euler. Cite pelo menos uma semelhança. Cite pelo menos uma diferença.

"Sejam A e B conjuntos diferentes do vazio. Uma relação f de A em B é função se, e somente se, todo elemento de A estiver associado através de f a um único elemento de B".

(Dante,2014)

Objetivo: Esperávamos que os participantes apontassem como semelhança a ideia de função como uma expressão analítica, apesar de isso não estar explícito na definição estudada por eles. Em relação às diferenças, esperávamos que os participantes destacassem os conjuntos que aparecem na definição atual e que não apareciam na definição de Euler. Além disso, a definição atual explicita condições para que uma dada relação seja função, o que não aparecia na definição de Euler.

Para nossa surpresa, ao contrário do que esperávamos, os participantes apontaram a ideia de função como uma (única) expressão analítica como a diferença entre as duas definições, talvez pelo fato de a definição apresentada a eles não destacar a representação algébrica $y = f(x)$.

A semelhança apontada nas respostas de todos os participantes foi a presença de duas variáveis, o que foi uma surpresa, pois Euler não indicou nada sobre a quantidade de variáveis em uma função tinha que ter.

Podemos ver essas duas situações nos seguintes respostas

"Semelhança é que há duas variáveis. Diferença é que para Euler é necessário existir apenas uma expressão para existir uma função." (Aluno A)

"A diferença é que a definição de Euler precisa de uma expressão e a de hoje não e as duas falam sobre ter duas variáveis." (Aluno F)

“A semelhança é que pode ter duas variáveis. E a diferença é que para Euler, só é função se existisse apenas uma expressão.” (Aluno D)

“A relação entre duas variáveis é a semelhança e a diferença é que na definição atual não tem nada falando ter uma expressão.” (Aluno G)

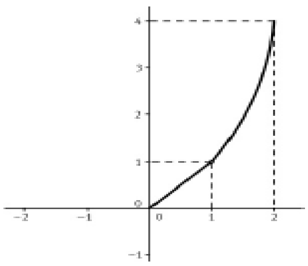
6) Quais dos itens, são funções de acordo com a definição que foi apresentado em seu material didático?

a) f (x) = sen x + cos x, $\forall$ x $\in$ R

R: Sim, é uma função.

b) g(x) = $\sum_{n=o}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots..; \quad |x| < 1;$,

R: Sim, é uma função.



c) h (x) = $\begin{cases} \boldsymbol{x}, \ \boldsymbol{se}\ \mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{1} \\ x^2, \ se \ 1 < x < 2 \end{cases}$

R: Sim, é uma função.

Objetivo: Esperávamos que os participantes conseguissem identificar quais dos itens abaixo são considerados como uma função, segundo a definição atual.

Nas respostas analisadas vimos que todos os participantes responderam corretamente aos três itens, ou seja, todos conseguiram identificar quais dos itens acima são considerados função a partir da definição atual.

Ao reconhecer o item c) como função pela definição atual, reforça que os participantes entenderam que para Euler a função tem que ser expressa por uma única expressão analítica, mas pela definição atual de função, ela pode ser definida por mais de uma expressão analítica em intervalos diferentes.

Atividades 2º Encontro

As atividades desse roteiro foram elaboradas com o objetivo de explorar a ideia de função com mais de uma expressão analítica.

1) Compare a primeira definição de Euler (1748) apresentada anteriormente, com a segunda definição de Euler que acabamos de ver (1755) e descreva a(s) diferença(s).

Objetivo: Esperávamos que os participantes percebessem que na segunda definição Euler passou a considerar que uma função poderia ser representada por mais de uma expressão analítica e também a ideia de dependência entre variáveis.

Nesse item os participantes não tiveram dificuldades em perceber que, pela segunda definição Euler, a função poderia ser representada por mais de uma expressão analítica, o que na primeira definição de Euler não acontecia. Mas, eles não sinalizaram nas respostas o surgimento da ideia de dependência entre variáveis, que não estava presente na primeira definição de Euler.

"Na primeira, Euler defendia que só podia ser uma expressão analítica. Na definição, ele concordou que poderia ser por novas expressões analíticas." (Aluno A).

"Na primeira, Euler defendia que só poderia existir uma expressão analítica, já na segunda graças a D'Alembert, Euler passou a admitir mais expressões." (Aluno B).

"Na primeira definição de Euler, a função poderia ser representada por uma única expressão analítica, na segunda definição ele diz onde que pode ser representada por mais de uma expressão analítica." (Aluno C).

2) Discuta se o princípio da generalidade da variável se aplica a segunda definição de função de Euler.

Objetivo: Perceber que admitir funções definidas por mais de uma expressão analítica entra em contradição com o princípio da generalidade da variável. Uma vez que cada expressão é definida em um intervalo, x não pode assumir mais qualquer valor.

Os participantes não perceberam que o princípio da generalidade não se aplica a segunda definição, pelo fato de Euler admitir que as funções poderiam ser definidas por mais de uma expressão analítica. Cada expressão analítica é definida em um intervalo específico. Assim para cada expressão, x só pode assumir os valores do intervalo em que a expressão foi definida.

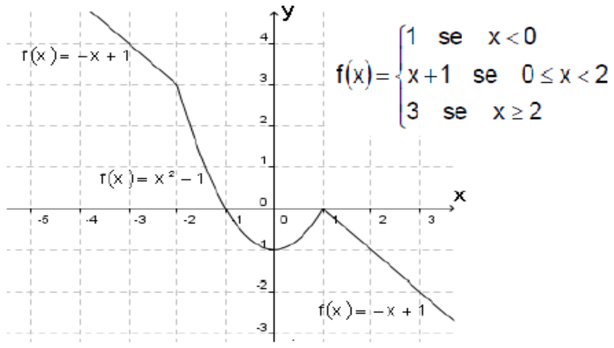
"Na segunda definição não exclui o valor, pode ser qualquer valor numérico, mas um depende do outro." (Aluno A).

"Pode ser qualquer valor desde que um dependa do outro." (Aluno E).

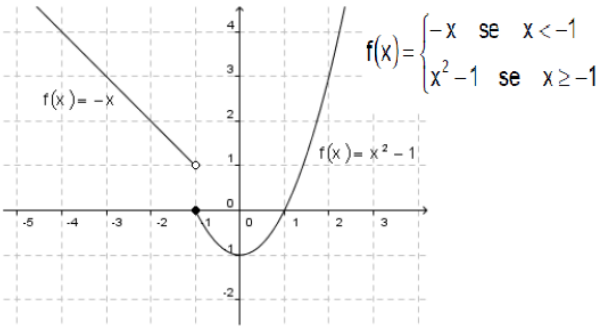
"Os valores são dependentes um do outro, mas podem ser qualquer valor numérico." (Aluno C).

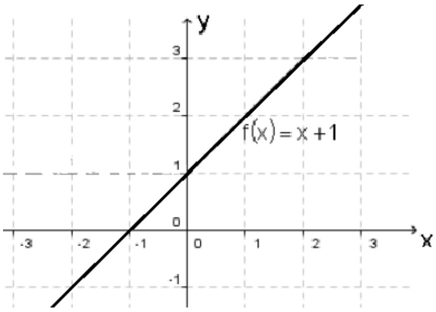
Por outro lado, os participantes destacaram nas respostas a ideia de dependência entre variáveis, o que não ocorreu nas respostas da questão anterior.

Considerem os gráficos abaixo para responder as questões três e quatro.



(I)

(II) 

(III) 

3) Dos gráficos acima diga quais seriam uma função pela:

a) Primeira definição de função de Euler;

Objetivo: Esperávamos que os participantes identificassem as funções pela primeira definição de Euler, sendo aquelas que tivessem uma única expressão analítica.

Resposta: Somente o terceiro gráfico representa uma função, pela primeira definição de Euler.

b) Segunda definição de função de Euler.

Objetivo: Esperávamos que os participantes identificassem as funções pela segunda definição de Euler, sendo aquelas que tivessem uma ou mais expressões analíticas.

Resposta: Todos os gráficos representam uma função, pela segunda definição de Euler.

No item a) as respostas de todos os participantes foram corretas, todos souberam sem dificuldades identificar quais seriam funções em relação à primeira definição de função de Euler, ou seja, todos responderam que o terceiro item é função, de acordo com a primeira definição de Euler.

No item b) as respostas de todos os participantes foram corretas, todos souberam sem dificuldades, identificar quais seriam funções em relação à segunda definição de função de Euler, ou seja, todos responderam que as três são funções pela a segunda definição de Euler.

4) Dos gráficos acima, diga quais seriam funções contínuas:

a) Segundo a noção de continuidade de Euler;

Objetivo: Esperávamos que os participantes reconhessem como função contínua aquela que apresentasse uma única expressão analítica, de acordo com a definição de Euler.

Resposta: Somente o terceiro gráfico representa uma função contínua, pela noção de continuidade de Euler.

b) Segundo o conceito de continuidade atual.

Objetivo: Esperávamos que os participantes identificassem as funções contínuas como aquelas que não apresentam pontos de descontinuidade em seu gráfico.

Resposta: O primeiro e o terceiro gráfico representam uma função contínua, pela noção de continuidade de atual.

Vale lembrar que o conceito moderno de continuidade foi trabalhado de forma intuitiva, por meio de alguns gráficos dados como exemplos. Não foi apresentada aos participantes uma definição formal de continuidade. Pontos de descontinuidade foram abordados como "saltos" ou "interrupções" no gráfico.

No item a) as respostas de todos os participantes foram corretas, todos souberam identificar, sem dificuldades quais funções seriam contínuas em relação ao conceito de continuidade de Euler, sendo assim, todos responderam que a terceira função era contínua.

No item b) as respostas de todos os participantes foram corretas, todos souberam sem dificuldades, identificar quais funções seriam contínuas em relação ao conceito de continuidade atual, ou seja, todos responderam que a primeira função e a terceira função são contínuas.

Atividades do 3º Encontro

As atividades desse roteiro foram elaboradas com o objetivo de explorar a ideia de função como correspondência arbitrária, sem a necessidade de uma expressão analítica.

1) Analise a definição de função de Dirichlet e diga se este matemático baseou-se no princípio da generalidade da variável, assim como Euler.

Objetivo: Esperávamos que os participantes enxergassem que Dirichlet não se baseou no Princípio da Generalidade, pois ele restringia a variável independente x em um intervalo, desde que a variável independente x estivesse relacionado com uma única variável dependente y.

Os participantes não perceberam a presença do intervalo na definição de Dirichlet, restringindo os valores que a variável independente x poderia assumir, a números reais, como nas respostas abaixo:

"Sim, pois ele diz que pode ser qualquer número." (Aluno A).

"Sim, porque Dirichlet considerava que as vaiáveis poderiam ser qualquer número." (Aluno B).

"Não sei o que é esse princípio, mas ele diz que a variável pode ser qualquer número e eles estão ligados um com o outro." (Aluno C).

Somente um participante citou a existência de um intervalo, o que indicaria de alguma forma uma restrição da variável x, dando a entender que Dirichlet não considerava o principio da generalidade da variável.

"Não, porque os valores de x e y, não respeitam uma só lei em todo o intervalo e fala sobre valores dentro de um intervalo a, b." (Aluno G).

2) Analise a definição de função de Dirichlet e discuta se este matemático identifica a noção de função à ideia de expressão analítica.

Objetivo: Esperávamos que os participantes enxergassem que a ideia central de Dirichlet em relação a uma função, era a correspondência arbitrária entre variáveis numéricas, sendo que cada valor de x, deve corresponder a um único valor de y = f(x), sem a necessidade de uma expressão analítica.

Os participantes entenderam a ideia central da definição de Dirichlet, que consistia em uma correspondência arbitrária, sem a necessidade de uma expressão analítica. Alguns tocaram na ideia de correspondência entre quantidades numéricas e alguns mencionaram a condição de que cada x deve corresponder a um único y, com nas respostas abaixo:

“Ele diz que para ser função, a relação entre x e y não precisa de uma expressão.” (Aluno A).

“Ele falou que para ser uma função, uma variável x tem que esta ligada a uma única variável y, sem precisar de uma expressão para ser função.” (Aluno C).

“Que uma função pode ter mais de uma lei e elas não precisam ser expressões algébricas.” (Aluno G).

3) Compare a definição de Dirichlet com as definições de Euler. Cite pelo menos três diferenças.

Objetivo: Esperávamos que os participantes percebessem que Dirichlet não identificava uma função a partir de uma expressão analítica, restringia valores de x a um intervalo, explicita que cada valor de x está associado a um único valor de y. Já Euler na sua primeira definição diz que a função é uma expressão analítica e não restinge a variável x a um intervalo. Na segunda definição, Euler passa a aceitar uma função com mais de uma expressão analítica, mas não abandona a necessidade da expressão analítica

Todos os participantes perceberam que Dirichlet não utilizava as ideias de Euler para identificar uma função e também não se orientava pelo princípio da generalidade da variável, mas quando eles se referiram as definições de Euler, não expecificaram qual definição eles estavam se referindo. Nós tivemos que identificar a qual eles se referiram.

“Euler dizia que para ser uma função tinha que ter uma expressão e Dirichlet dizia que não precisava ter.” (Aluno A).

Na resposta acima, acreditamos que o participante estava se referindo a primeira definição de função de Euler, mas ele não indica nenhuma referência a segunda definição de Euler.

"Euler fala que a função tem que ter uma ou mais expressões e Dirichlet fala que pode ser qualquer relação, com ou sem expressões". (Aluno C).

Na resposta acima, acreditamos que o participante estava se referindo a segunda definição de função de Euler, mas ele não indica nenhuma referência a primeira definição de Euler.

"Euler definiu a função a partir de uma ou mais expressões e Dirichlet definiu a função como uma relação qualquer, sem precisar de uma expressão e ainda fala sobre intervalos." (Aluno G).

Na resposta acima, acreditamos que o participante estava se referindo a segunda definição de função de Euler, mas ele não indica nenhuma referência a primeira definição de Euler.

Possivelmente, o enunciado da questão não ficou claro o suficiente para os participantes, já que alguns basearam-se na primeira definição de função de Euler e outros basearam-se na segunda. Além disso, a questão proposta ficou repetitiva, já que as questões 1 e 2 exploram diferenças entre as definições. Queríamos que os participantes percebessem que além de explicitar uma condição para que a relação entre x e y seja uma função (que a cada x deve corresponder um único y), a definição de Dirichlet explicita a restrição da variação de x a um intervalo. Assim, esperávamos que os participantes refletissem sobre a noção de domínio surgindo nas definições históricas de função.

Vimos então que a questão poderia ter expecificado qual das definições de Euler estavamos nos referindo, ou seja, se era a primeira definição, a segunda definição ou as duas definições, então sugerimos que em um outro estudo de campo utilizando esse material, poderiamos usa a seguinte questão:

3) Compare a definição de Dirichlet com a primeira e a segunda definição de Euler. Cite pelo menos três diferenças.

4) Compare a definição de função de Dirichlet com a definição que você aprendeu no seu material didático. Cite pelo menos uma semelhança e uma diferença.

Objetivo: Esperávamos que os participantes notassem que definição de Dirichlet não utiliza a ideia de conjuntos assim como a atual e nas duas definições, mas elas não citam a necessidade de uma ou mais expressões analíticas, dando a ideia de arbitrariedade, desde que a variável independente x tenha uma única ligação com a variável dependente y. A grande diferença é a presença da ideia de relações entre elementos de dois conjuntos presente na definição atual, aprendida pelos participantes.

Nas respostas analisadas vimos que a maioria dos participantes percebeu a falta da presença dos conjuntos na definição de Dirchlet, pois na definição atual que eles aprenderam encerra a ideia de correspondência entre elementos de dois conjuntos.

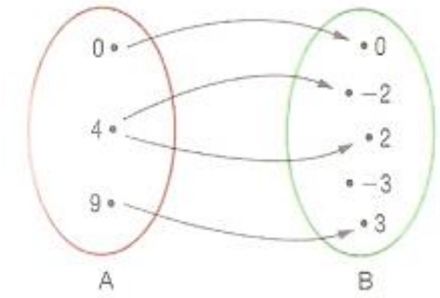
"As duas são bem parecidas, mas a de Dirichlet não fala que x e y pertencem a algum conjunto." (Aluno A).

"As duas falam que tem só um y para cada x e a que aprendemos fala sobre conjuntos e o de Dirichlet não fala." (Aluno C).

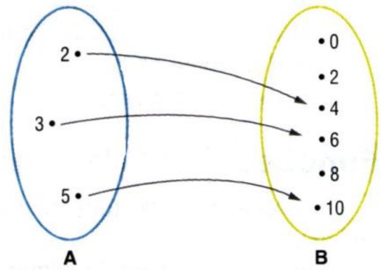
"A que aprendemos fala sobre x e y pertencerem a conjuntos e Dirichlet não tem nada de conjuntos e as duas falam que x se relaciona com um único y." (Aluno G).

5) Considere os exemplos de relações abaixo e diga quais são funções de acordo com a definição de Dirichlet e quais são funções de acordo com a primeira definição de Euler (1748). Justifique as suas respostas.

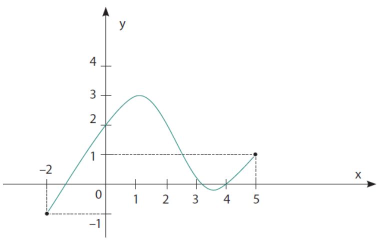
Objetivo: Esperávamos que os participantes percebessem as diferenças entre a primeira definição de Euler, que diz que a função é uma expressão analítica, e a definição de Dirichlet não identificava uma função a partir de uma expressão analítica.

a) 

R: *Não é função para Dirichlet, pois existem dois elementos de B {-2, 2} – associados a um elemento de A {4}. Não é função para Euler, pois não tem expressão analítica.*

b) 

R: *É função para Dirichlet, pois cada elemento do conjunto A está associado a um único elemento do conjunto B. Não é função para Euler, pois não tem expressão analítica.*

c) 

R: *É função para Dirichlet, pois cada x está associado a um único y. Não é função para Euler, pois não tem expressão analítica.*

d) f associa a cada número natural o n-ésimo número primo [ex: f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 5 e assim por diante].

R: *É função para Dirichlet, pois cada número natural corresponde a um único número primo (o n-ésimo). Não é função para Euler, pois não tem expressão analítica.*

e) $\mathbf{3x^2 - 12x + 25 = 7}$

R: *Não é função para Dirichlet e não é função para Euler, pois é uma equação do segundo grau.*

Os participantes conseguiram identificar o que era uma função, a partir da definição de Dirichlet, tendo uma ressalva para alguns participantes nas funções pela definição de Euler, pela presença da expressão algébrica apresentada no item a). Como a primeira definição de Euler não explicitava como deveria ser a expressão analítica, eles responderam de forma diferentes.

"a) Só para Euler, pois é uma expressão." (Aluno D).

"a) Não é função, por causa do y^2." (Aluno C).

Um participante confundiu no último item, pois a equação foi interpretada como uma expressão analítica, mas os demais responderam corretamente que era uma equação.

"f) É para Euler, é uma expressão." (Aluno D).

Alguns participantes identificaram nos itens b) e f) não eram funções para nenhum dos dois, como por exemplo, nas respostas abaixo temos que:

"b)Não é função, pois x está ligado a dois y diferentes." (Aluno G).

"f) Não é para Euler e Dirichlet, pois é uma função do 2º grau." (Aluno E).

Atividades do Encontro Final

A atividade do último encontro foi dividida em dois questionários. O primeiro questionário teve como objetivo obter um *feedback* dos alunos sobre a experiência de conhecer momentos do desenvolvimento histórico de um conceito matemático. Aproveitamos também para saber se os alunos perceberam o papel das definições na matemática. No segundo questionário, procuramos averiguar se houve mudanças no conhecimento dos participantes, em relação ao conteúdo de funções, tendo como base o primeiro questionário.

1. De que maneira conhecer um pouco sobre o desenvolvimento do conceito de função e algumas definições dadas a este conceito anteriormente, contribuiu para o seu entendimento sobre função?

Objetivo: Verificar se conhecer momentos do desenvolvimento do conceito de função alterou o entendimento dos participantes sobre funções.

As respostas do grupo analisado foram:

Aluno A: "*Me ajudou a entender como interpretar as funções e identificá-las de uma forma mais fácil".*

Aluno B: *"Contribuiu no sentido de aprofundamento acerca de função, de tal forma que ao observar questões de função, identifico a real necessidade e importância da mesma no estudo matemático".*

Aluno F: *"Graças a esse trabalho, pude compreender de forma mais didática e de um modo que fixe mais na minha mente os conceitos de função".*

Aluno C: *"Contribuiu bastante, o suficiente para eu compreender mais sobre função e também me proporcionou mais conhecimento, que futuramente poderá me ajudar".*

Os participantes disseram que a abordagem do desenvolvimento dos conceitos de função, ao decorrer do tempo, os auxiliaram a terem uma visão mais ampla sobre as funções, facilitando no entendimento sobre função.

2. Deixe o seu *feedback* sobre a experiência de conhecer um pouco sobre história da matemática, mais especificamente sobre o desenvolvimento do conceito de função. Diga o que você mais gostou, o que você não gostou, o que achou mais interessante e etc.

Objetivo: Obter um feedback dos participantes sobre os encontros, sobre o material, sobre a experiência como um todo.

As respostas do grupo analisado foram:

Aluno A: *"Achei interessante sobre como identificar uma função, os tipos de função e a historia sobre um matemático aproveitar o conceito de outro para criar um novo conceito".*

Aluno C: *"Não tenho comentários ruins a questão do conceito de função. O que mais me chamou atenção foi o fato de que considerar o y variável dependente com os seus valores fixos dependendo dos valores proporcionados à variável independente de x".*

Aluno B: *"Aprender acerca da história da função, somou positivamente em diversos aspectos, dentre estes pode se destacar principalmente: as curiosidades aprendidas, como sobre as mudanças nas definições de funções e como várias coisas interferiram nestas mudanças, ao decorrer do projeto nada me desagradou".*

Aluno F: *"Adorei saber que a matemática que hoje aprendemos nem sempre foi assim, até chegar ao conceito que usamos hoje, muitos estudos foram feitos".*

Percebemos elementos interessantes nos alunos B e F. Ambos perceberam que os conceitos sofrem mudanças ao longo do tempo. Uma imagem comum da Matemática é de uma ciência pronta, acabada e atemporal (não muda).

3. Após descobrir que a definição do conceito de função foi modificada ao longo do desenvolvimento desse conceito, diga qual o papel de uma definição matemática (para que servem as definições em matemática?)

Objetivo: Verificar se as abordagens históricas os ajudaram no entendimento sobre conceitos e definições.

As respostas do grupo analisado foram:

Aluno A: "*Servem para nos ajudar a entender qual a finalidade dos estudos matemáticos".*

Aluno B: *"Servem não só para demonstrar de onde surgiram tais cálculos e (ou) fórmulas, mas também para demostrar a serventia da tal matéria".*

Aluno F: *"Sempre tive a matemática como a vilã da minha vida acadêmica, mas tendo uma visão panorâmica, a matemática esta presente no nosso dia a dia, em questões básicas como consultar a hora, então logo, matemática é de sumo importância, pro nosso conhecimento e também pro nosso cotidiano".*

Aluno C: *"A matemática sempre está presente no nosso dia a dia. Além dela nos proporcionar cálculos básicos, como por exemplo, calcular quanto iremos receber de troco após uma compra. Outras matérias também necessitam de cálculos para demostrarem a existência de alguns fenômenos, ou seja, é vantajoso possuir sempre um conhecimento a mais da matemática".*

Pelas respostas acreditamos que os participantes não entenderam a pergunta, pois eles fugiram totalmente ao que foi perguntado e nenhum deles abordou a questão se abordagens históricas ajudariam no entendimento sobre conceitos e definições. Ficamos um pouco decepcionados pois um dos objetivos desse trabalho era que a abordagem histórica fosse reconhecida com um bom veículo para o melhor entendimento sobre conceitos e definições

Questionário Final

AGORA VAMOS VER O QUE VOCÊ ASSIMILOU SOBRE FUNÇÃO.

Nesta parte vamos comparar as respostas de algumas questões dos participantes que compareceram no encontro final (4 participantes), com as respostas do questionário diagnóstico (inicial), com o objetivo de verificarmos se alguma coisa se alterou em relação ao conhecimento dos estudantes sobre função, domínio e imagem.

1) Como você define o que é um "domínio" e o que é uma "imagem"?

Abaixo temos duas tabelas comparando as respostas do questionário diagnóstico, apresentado no primeiro encontro, com as respostas do questionário final.

Tabela 2 (Comparação entre as respostas sobre Domínio)

Participantes	*Antes*	*Depois*
Aluno A	*Representado por todos os elementos do conjunto A.*	*O domínio serve para definirmos quais valores poderemos usar.*
Aluno B	*Ponto de onde sai à função (x).*	*O domínio é o x*
Aluno F	*Valores de x.*	*Domínio são os valores que podem ser usados no x.*
Aluno C	*Ponto de x da função (x).*	*Domínio é o valor de x.*

Tabela 3 (Comparação entre as respostas sobre Imagem)

Participantes	***Antes***	***Depois***
Aluno A	*Elementos do contradomínio (conjunto B) que possuem correspondência com o domínio (conjunto A).*	*A imagem serve para sabermos quais são os resultados.*
Aluno B	*f (x).*	*A imagem é o y.*
Aluno F	*Valor de y*	*Imagem são os valores de y = f(x), que são os resultados.*
Aluno C	*f (x).*	*Imagem é o valor de y.*

A principal mudança que notamos foi que dois participantes passaram a justificar mais suas respostas, como podemos ver nas respostas dos alunos A e F.

2) Por que "domínio" e "imagem" são tão importantes para o estudo das funções? Você pode encontrar exemplos em que é útil conhecer o domínio e a imagem de uma função? (Cite exemplos em que é útil conhecer o domínio e a imagem de uma função)

Nas respostas analisadas, notamos que os participantes passaram a trazer mais conteúdo em suas argumentações, mostrando exemplos com mais facilidades e descrevendo melhor o que eles entendem sobre domínio e imagem, como por exemplo:

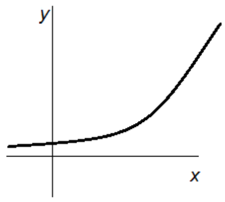
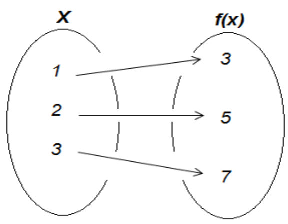
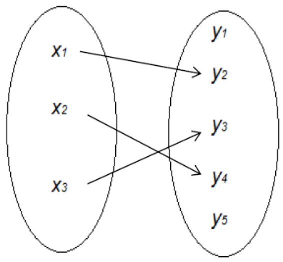
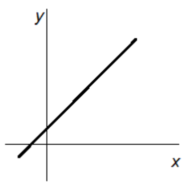
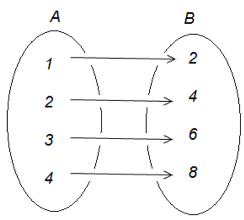
"São importantes porque determinam os valores de x e y. Ex: $f(x) = x + 1$, o x (domínio) pode ser qualquer número, que teremos um resultado em y (imagem), mas em $f(x) = \frac{1}{x}$, o x (domínio), não pode ser zero." (Aluno A).

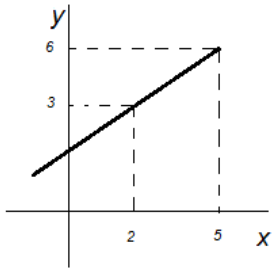
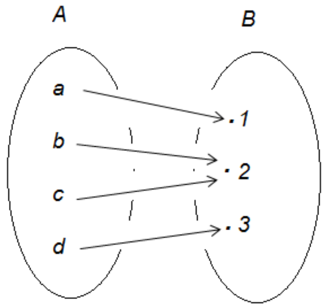
"Como dito antes, o domínio é o valor de x e imagem é o valor de y e servem para sabermos quais os números podemos usar e quais iremos achar, como por exemplo: $f(x) = x^2 + 1$, o domínio pode ser qualquer número mas a imagem será sempre positiva" (Aluno C).

3) Apresente três exemplos de função de acordo com a definição atual que foi apresentada à você.

Nas respostas analisadas vimos que os participantes variaram mais a representação, entre gráficos, diagramas e as expressões analíticas, em relação ao início do estudo.

Tabela 4 (Comparação entre os exemplos dados pelos participantes)

Alunos	***Antes***	***Depois***
Aluno A	$f(x) = x^2 + 6$ $f(x) = 3^x$ $f(x) = 2x - 1$	  *f(x) = x +1*
Aluno B	y= mx+h $S=\frac{D}{2}$ ax+by+c= 0	*Uma relação de x com y, tal que x é igual a y.*  *e* $f(x) = x^2 - 5$
Aluno F	$y= 2^x$ $F(x)= x^2+2$ 	*x e y, onde y é o dobro de x;*  *f(x) = 2x +3*

Aluno C	$f(x) = x^2 + 8$ $f(x) = 3^x$ $f(x) = 2x - 1$	  *f(x) = x +3*

Como podemos notar na tabela 3 acima, os participantes passaram a trazer representações gráficas e na forma de diagrama nos exemplos de funções. Acreditamos que tanto as definições históricas – separando o conceito de função da noção de expressão analítica - como a variedade de representações utilizadas nas atividades tenham influenciado tal mudança nos alunos, a qual vemos como positiva.

4) Verifique se os itens abaixo são exemplos de função. Justifique sua conclusão.

Nas respostas analisadas, observamos que os participantes fizeram as verificações corretamente. Percebemos também que eles justificaram suas respostas, o que não aconteceu com muita frequência na primeira análise.

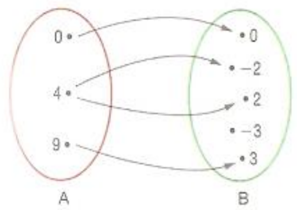
Disponibilizamos as respostas de cada item em tabelas, fazendo uma comparação entre as respostas anteriores e a atual para melhor mostrarmos as mudanças dos participantes.

a) $\mathbf{y^2=x+1}$

Tabela 5 (Comparação entre as respostas dadas pelos participantes)

Participantes	***Antes***	***Depois***
Aluno A	*Não*	*Não é função, pois tem dois valores de y para um x*
Aluno B	*Sim*	*Não é função.*
Aluno F	*Sim*	*Não é função (y^2).*
Aluno C	*Não é uma função.*	*Não é função, por causa do y^2.*

Neste item, observamos não só que houve mudança nas respostas, como também eles justificaram as suas respostas, o que mostra uma evolução na forma de ver uma função e em se expressar de forma matemática. Eles justificaram que o item acima não é função de y em relação a x, pelo fato da expressão não satisfazer à definição atual, tendo dois valores de y correspondentes a um único valor de x.

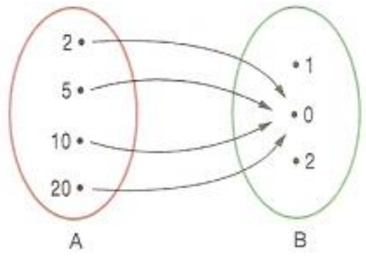


b)

Tabela 6 (Comparação entre as respostas dadas pelos participantes)

Participantes	***Antes***	***Depois***
Aluno A	*Não, saem duas setas do 4.*	*Não é função, tem duas ligações do 4 com o outro conjunto.*
Aluno B	*Sim*	*Não é função, 4 ligado com dois números.*
Aluno F	*Não, pois o quatro (4) tem duas ligações.*	*Não é função,* pois o quatro (4) tem duas ligações.
Aluno C	*Não é uma função.*	*Não é função, o 4 está ligado a dois números.*

Neste item, conseguimos observar como no item anterior, que não só houve mudança nas respostas, como eles também justificaram as suas respostas ao relevar que o item não é função, pelo fato da expressão acima não satisfazer à definição atual tendo dois valores de y correspondentes a um único valor de x.

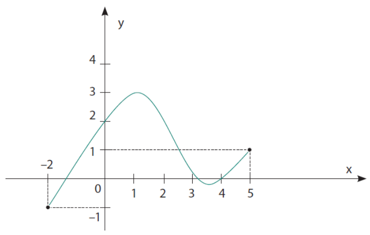


c)

Tabela 7 (Comparação entre as respostas dadas pelos participantes)

Participantes	***Antes***	***Depois***
Aluno A	*Sim.*	*É função.*
Aluno B	*Sim.*	*Sim.*
Aluno F	*Sim.*	Sim
Aluno C	*Sim é uma função.*	*É uma função*

Como no primeiro questionário, todos acertaram a verificação.

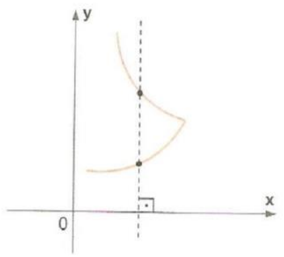


d)

Tabela 8 (Comparação entre as respostas dadas pelos participantes)

Participantes	*Antes*	*Depois*
Aluno A	*Sim*	*É função*
Aluno B	*Sim*	*Sim*
Aluno F	*Sim*	*Sim*
Aluno C	*Sim é uma função*	*É uma função*

Como no primeiro questionário, todos acertaram a verificação.



e)

Tabela 9 (Comparação entre as respostas dadas pelos participantes)

Participantes	*Antes*	*Depois*
Aluno A	*Não, o gráfico volta.*	*Não, o gráfico volta.*
Aluno B	*Não*	*Não, x ligado a dois y.*
Aluno F	*Não*	Não
Aluno C	*Não, pois tem dois y para um x.*	*Não, tem dois y para um x.*

Como no primeiro questionário, todos acertaram a verificação, com as mesmas justificativas, mas percebemos que teve participante que inicialmente não justificou e que nessa análise conseguiu justificar.

f) f associa a cada número natural o n-ésimo número primo (ex: f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 5 e assim por diante).

Tabela 10 (Comparação entre as respostas dadas pelos participantes)

Participantes	*Antes*	*Depois*
Aluno A	*Não*	*É função.*
Aluno B	*Não*	*Sim.*
Aluno F	*Não, pois não tem equação.*	Sim, mesmo não tendo equação.
Aluno C	*Não, pois não tem equação.*	*É uma função.*

Os participantes mudaram totalmente suas respostas, passando a considerar uma relação entre números naturais, sem uma expressão para defini-la como uma função.

g) $3x^2 – 12x + 25 = 7$

Tabela 11 (Comparação entre as respostas dadas pelos participantes)

Participantes	*Antes*	*Depois*
Aluno A	*Não, é uma equação.*	*Não, é uma equação.*
Aluno B	*Não*	*Não, não tem y.*
Aluno F	*Sim, pois é uma equação.*	*Não é função e sim uma equação.*
Aluno C	*Não, pois é uma equação.*	*Não, não tem o y e é uma equação.*

Neste item, percebemos que alguns alunos que acreditavam que as expressões analíticas das leis de formação das funções podiam ser equações, mudaram sua visão e passaram a perceber que são coisas diferentes. Acreditamos que não dê para afirmar que eles passaram a entender a diferença entre incógnita e variável, mas alguns participantes observaram a falta de uma segunda variável correspondente a variável y.

4.2 Discussão sobre os resultados obtidos.

Os participantes presentes no último encontro não trouxeram muitas informações sobre a parte histórica apresentada (por exemplo, sobre o problema das cordas vibrantes que influenciou Euler a mudar a definição de função, sobre a diferença entre como Euler e Dirichlet concebiam as quantidades variáveis, entre outros). Dois elementos interessantes foram apontados pelos participantes B e F ao dar seu feedback sobre a participação no estudo, mencionando que o conceito de função sofreu mudanças ao longo do tempo e que nem sempre foi do modo como eles aprenderam: "*Adorei saber que a matemática que hoje aprendemos nem sempre foi assim*" (Aluno F, Questionário final). Isso sinaliza que esses participantes perceberam, por meio do caso particular das funções, que a matemática não é uma ciência pronta e acabada.

Em relação ao conteúdo, percebemos algumas mudanças. Além dos participantes terem apresentado respostas corretas a várias questões que eles haviam errado no questionário diagnóstico, alguns passaram a justificar mais as suas respostas. Outra coisa que percebemos foi a variação das representações de função. Enquanto que no questionário diagnóstico, a maioria apresentou exemplos de funções por meio da expressão algébrica, no questionário final, mais gráficos e diagramas de Venn apareceram entre os exemplos. Além disso, os participantes presentes no último encontro reconheceram como função a relação "*f associa a cada número natural o n-ésimo número primo (ex: f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 5 e assim por diante.",* que muitos erraram no questionário diagnóstico. Acreditamos que refletir sobre a definição de função de Dirichlet, que prescindia da expressão analítica para definir uma função, tenha descontruído um pouco a imagem de função como uma expressão analítica.

Percebemos também que eles tiveram dificuldades em entender a importância das variáveis nas definições, mesmo sabendo identificar e determinar o domínio de uma função, eles não enxergaram que para as definições de Euler o domínio não importava, enquanto na de Dirichlet era umas das condições para se definir a função.

No geral os participantes que acreditavam inicialmente que as funções seriam representadas por expressões algébricas, conseguiram abandonar essa ideia e passaram a enxergar a função como uma correspondência entre variáveis, onde uma primeira variável teria uma correspondência única com uma segunda variável.

5 - Considerações Finais

No trabalho de campo, apresentamos fatos históricos em três encontros, para que os participantes refletissem sobre as definições governadas por diferentes metarregras, desenvolvidas ao decorrer do tempo. Não foi comentado nada sobre o que seriam as metarregras aos participantes.

A partir de um questionário diagnóstico, vimos que os participantes, em sua maioria, indicaram acreditar que a função era uma expressão algébrica, o que se assemelhava com a primeira definição de função de Euler de 1748.

Então, com essa informação, apresentamos fatos históricos sobre o desenvolvimento do conceito de função e aplicamos atividades, em busca de conflitar essas metarregras já existentes com as demais metarregras presentes nas outras definições.

O trabalho desenvolvido teve como objetivo investigar o impacto de fontes históricas governadas por diferentes metarregras na aprendizagem de função. Esperamos que essa proposta de ensino leve os participantes a refletirem sobre o que é uma função e sobre o que é o domínio de uma função.

Esperamos também que essa experiência possa ajudar a descontruir a ideia de função como uma expressão algébrica ou fórmula, fazendo com que os participantes percebam que para ser uma função, não é preciso a existência de expressão analítica ou uma fórmula.

O que o estudo, que proporcionou o conhecimento de alguns momentos do desenvolvimento histórico do conceito de função, acrescentou aos participantes?

Observamos que as reflexões sobre os diferentes conceitos históricos de função influenciaram alguns participantes que apresentaram algumas mudanças. Os participantes que estiveram presentes até o final do estudo de campo, apresentaram respostas corretas a várias questões que eles haviam errado no questionário diagnóstico, tendo participantes que passaram a justificar melhor as suas respostas, apresentando também uma variação maior na forma de representar uma função, pois vimos que no questionário diagnóstico, a maioria dos participantes, apresentou exemplos de funções por meio da expressão algébrica e no questionário final apresentaram exemplos com gráficos e diagramas de Venn.

Percebemos que a definição de Dirichlet de 1837 criou alguns obstáculos para os alunos, pois essa definição apresentava uma ideia sobre o que é uma função diferente da que eles acreditavam ser correta, ou seja, metarregras da definição de Dirichlet eram diferentes das metarregras aceitas pelos participantes até aquele momento, gerando assim o que chamamos de conflito comognitivo.

Percebemos que os participantes passaram a aceitar função que não possuía uma expressão analítica ou uma fórmula, o que pode sugerir alguma mudança em suas metarregras iniciais, mesmo que o estudo não nos forneça provas de que as metarregras desses alunos mudaram, pois as metarregras são implícitas e difíceis de serem identificadas, sendo necessário um estudo mais específico para detecta-las.

Tínhamos maiores expectativas sobre o fato de que refletir sobre diferentes definições históricas de um conceito, pudesse influenciar o entendimento dos participantes de que as definições têm um papel importante na matemática, pois os participantes não retiveram muito sobre os aspectos históricos, eles não trouxeram muito sobre os aspectos históricos nas respostas das atividades e no questionário final. Acreditamos que isso tenha ocorrido pelo fato das questões das atividades estarem direcionadas a definições e as comparações entre elas. Talvez seja o caso de conduzir uma discussão sobre isso numa próxima oportunidade e aplicar atividades estimulem discussões sobre os aspectos históricos, como por exemplo:

“O que levou Euler a mudar a definição de função?”

Esperávamos que os momentos históricos contribuíssem para que os participantes percebessem a importância e o papel do domínio na definição de uma função, mas isso não aconteceu. Poderíamos ter aplicado atividades mais diretas sobre domínio, como por exemplo:

“Qual a relação da generalidade da variável com o domínio de uma função?”

Sentimos a falta de perguntar aos participantes no questionário final *“O que é função?”*, para verificarmos que eles definiriam de forma diferente. Numa próxima oportunidade de aplicar as atividades aqui propostas, poderíamos acrescentar essa questão no questionário final.

Um dos objetivos do TCC era investigar reflexões dos participantes do estudo sobre metarregras, tanto as históricas como as próprias metarregras dos participantes sobre funções. No entanto, não foi possível realizar esta parte da investigação no tempo disponível para conduzir a pesquisa do TCC. Tal investigação requereria uma análise dos áudios das discussões dos participantes enquanto faziam as atividades. Uma possível continuação da pesquisa seria fazer uma análise dos áudios a fim de investigar reflexões sobre metarregras. Isso, inspirado no trabalho da Kjeldsen, que defende que como as metarregras são estabelecidas ao longo do tempo e mudam ao decorrer do tempo, então a história, como fonte de discursos governados por diferentes metarregras, tem o potencial de revelar metarregras que são implícitas no discurso.

Concluímos então que a história ajuda a problematizar o estudo de funções, mostrando aos participantes que os conceitos matemáticos podem sofrer mudanças, ajudando a mudar a imagem da matemática como uma ciência estática, pronta e acabada. Sobre o conteúdo de funções, particularmente, desconstruir a ideia de função como expressão algébrica ou fórmula foi um ganho, sendo assim, a abordagem histórica na aprendizagem de funções pode auxiliar os alunos a desenvolver uma visão mais ampla sobre as funções, sendo possível que os alunos abandonem algumas metarregras que os dificultavam no entendimento sobre função.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2ª versão. Brasília: MEC, 2015. Disponível em : < *http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/pdf/4.2_BNCC-Final_MA.pdf* >. Acesso em 19 nov. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais** - terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental - Matemática. Brasília: MEC, 1998. Disponível em:

< *http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf*>. Acesso em 17 nov. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais** - Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 1999. Disponível em:

< *http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf*>. Acesso em 17 nov. 2017.

BARROSO, J. M. **Conexões com a Matemática**. v.1.- 2.ed.- são Paulo: Moderna, 2013.

BERNARDES, A. **História e Ensino de Matrizes: Promovendo Reflexões Sobre o Discurso Matemático**. (Tese doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2016.

BERNARDES, A.; ROQUE, T. **Refletcting on meta-discursive rules through episodes from the history of matrices**. Proceedings ESU7. [S.l.: s.n.], 2014.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações.** Ensino Médio. v.3.- 2.ed.- São Paulo: Ática, 2013.

GUCLER, B. **Making Implicit Metalevel Rules of the Discourse on Function Explicit Topics of Reflection in the Classroom to Foster Student Learning**. Educational Studies in Mathematics, v.91, n.3 p 375-393 Mar 2016.

IEZZI, G. DOLCE,O. DEGENSZAJN, D. PÉRIGO, R. ALMEIDA, N. DE. **Matemática: Ciência e Aplicações**. Ensino Médio. v.1.- 8.ed.- São Paulo: Saraiva, 2014.

IEZZI, G. DOLCE, O. DEGENSZAJN, D. PÉRIGO, R. **Matemática Volume Único**. 6. ed. São Paulo: Atual, 2015.

KILPATRICK, J**. The new math as an international phenomenon**. ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 44, p. 563–571, 2012.

KJELDSEN, T. H. PERTERSEN, P. H. **History and the Learning of Mathematics: Detecting Students Meta-discurve Rules**. IMFUFA, Dept. of Science, Systems, and Models, Roskilde University. 12th International Congress on Mathematical Education, 2012.

KLEINER, I. **Evolution of the Function Concept: A Brief Survey**. The College Mathematics Journal, , Volume 20, Number 4, p. 282–300, September 1989.

LAKOFF, G.; NÙÑEZ, E. **Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being**. New York: Basic Books, 2000.

LUTZEN, J. **Between Rigor and Applications Developments in the Concept of Function in Mathematical Analysis**, The Cambridge History of Science, The Modern Physical and Mathematical Science, volume 5, p. 468-488, 2008.

OGLIARI, L. N. **O conteúdo de funções na escola: Rastros dos movimentos de reforma nos livros didáticos de matemática do ensino fundamental**. (Tese de Doutorado) - Faculdade de Educação, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2014.

PALIS, G. L. R. **Atividades que podem propiciar o desenvolvimento do raciocínio funcional no alunado do ensino médio e universitário inicial**. Revista eletrônica da SBM. nº 1, v.1, 2013.

PAIVA, M. **Matemática: Paiva**. v.1.- 2.ed.- São Paulo: Moderna, 2013.

PERTERSEN, P. H. **Potentielle vindinger ved inddragelse af matematikhistorie i matematikundervisningen.** Matematikspeciale-Roskilde Universitet, April 2011.

ROQUE, T. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, T. GIRALDO, V. **O Saber do Professor de Matemática: Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna. cap. 1, p. 19–22, 2014.

ROQUE, T. PITOMBEIRA, J. B. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SFARD, A. **When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint**. *The Journal of the Learning Sciences*, v. 16(4), p. 567–615, 2007.

SFARD, A. **Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.** New York: Cambridge University Press, 2008.

Apêndice I

<u>Questionário Diagnóstico</u>

1ª PARTE

1. Qual a definição de função?

2. Apresente 3 exemplos de função.

3. Explique o que é o domínio, imagem e contradomínio de uma função.

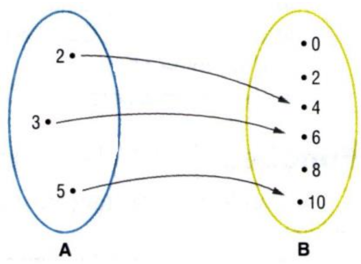
4. Você conhece alguma coisa sobre a história do conceito de função (como surgiu? Por que surgiu?)? Em caso afirmativo, fale um pouco sobre isso.

Apêndice II

Questionário Diagnóstico

2ª PARTE

1. O diagrama de flechas abaixo representa uma função f de A em B. Determine:



a) Domínio de f

b) Contradomínio de f

c) Imagem de f

2. Determine o conjunto domínio das funções abaixo:

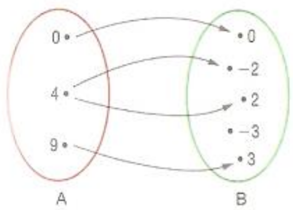
a) f(x) = $\frac{x+1}{x-1}$

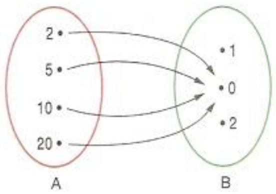
b) g(x) = $\frac{4x-1}{3}$

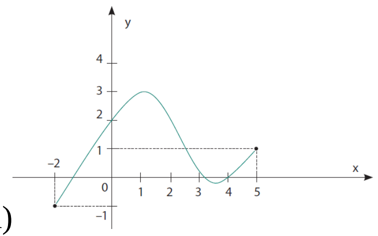
3. Por que é importante conhecer o domínio de uma função?

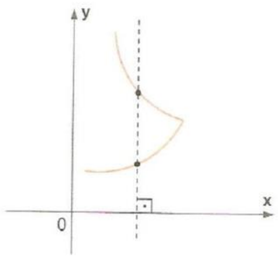
4. Verifique se os itens abaixo são exemplos de função. Justifique sua conclusão.

a) $y^2=x+1$ R:

b)  R:

c)  R:

d)  R:

e)  R:

f) f associa a cada número natural o n-ésimo número primo (ex: f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 5 e assim por diante).

R:

g) $3x^2 – 12x + 25 = 7$

R:

Apêndice III

Abordagem Histórica dos Conceitos de Função

1º Encontro

Fatores que impulsionaram o desenvolvimento da noção de função

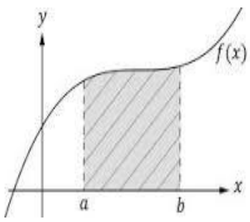
Quando falamos sobre a origem do conceito de função, a conversa é levada às curvas e aos gráficos que as representam e suas expressões analíticas, sendo também muito discutida, a ideia de relação entre grandezas.

No século XVII, Descartes e Fermat realizaram grandes inovações associadas às curvas, a equações algébricas e ao uso de um sistema de coordenadas para relacionar as variáveis envolvidas naquelas equações, relações essas estabelecidas entre as incógnitas, através de um lugar geométrico, o que conhecemos hoje como expressão algébrica de uma função.

Galileu no século XVII desenvolveu estudos sobre movimentos acelerados e as leis que regem o movimento de projéteis e os estudos de queda livre que tinha uma relação direta com a relação entre duas grandezas (deslocamento e tempo).

A busca da tangente para problemas relacionados a estudo de movimentos também foi um dos fatores importantes que influenciaram o surgimento das funções, já que as tangentes de uma trajetória permitem determinar a direção de um projétil.

No final do século XII surge uma área da matemática chamada análise que estuda métodos de se obter tangentes em curvas e áreas delimitadas por curvas, que utilizavam séries infinitas de potências para estudar essas curvas, surgindo no início do século XVIII as primeiras ideias sobre funções, mas a falta um termo geral para indicar quantidades quaisquer que dependessem de outras quantidades variáveis, motivou a busca por uma definição para expressar uma correspondência.



Então, no início do século XVIII, Bernoulli define em um artigo apresentado à Academia de Ciências de Paris, dizendo que:

"Chamamos função de uma grandeza variável uma quantidade composta, de um modo qualquer desta grandeza variável e de constantes."

Bernoulli não levou adiante e não diz nada sobre como se constrói uma função.

Primeira definição de função de Leonhard Euler

Um aluno de Bernoulli, chamado Leonhard Euler, nascido na Basiléia, Suíça em 1707 e viveu até 1783; que além de matemático era também astrônomo, físico, engenheiro e químico, publicou em *Introduction in analysin infinitorum* (Introdução à análise infinita), editada em 1748, uma definição de função querendo reorganizar uma área da matemática chamada de análise, que fala sobre áreas delimitadas por uma curva, utilizando as séries como ferramenta. Euler situa a função como a noção central da matemática e propõe a seguinte definição:

"Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer maneira a partir dessa quantidade variável e números ou quantidades constantes". (1748)

Euler já havia definido anteriormente um constante como uma quantidade definida que possui sempre um mesmo e único valor, e uma variável como uma quantidade indeterminada que pode ter qualquer valor.

Euler não define o que ele entende por "expressão analítica", embora forneça muitos exemplos. Um pouco antes, na mesma obra, ele já havia definido uma constante como uma quantidade definida que possui sempre um mesmo e único valor e uma variável sendo uma quantidade indeterminada que pode possuir qualquer valor:

"Uma quantidade variável compreende todos os números nela mesma, tanto positivos quanto negativos, inteiros e fracionários, os que são racionais, transcendentes e irracionais. Não devemos excluir nem mesmo o zero e os números imaginários".

Na definição de função de Euler, não é explicado o que significa dizer que a função é "uma expressão analítica composta de um modo qualquer" dessas quantidades constantes e variáveis, sendo que a expressão analítica citada pode ser formada pela aplicação de finitas ou infinitas operações algébricas de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.

Outras funções que também são consideradas são as exponenciais do logaritmo e das funções trigonométricas, funções essas que podem ser mais bem compreendidas com o auxílio da expansão em séries infinitas de potências ou por combinações de operações algébricas repetidas em um número finito ou infinito de vezes.

Ou seja, Euler buscava definir de modo preciso o que é uma "expressão analítica", enumerando as operações por meio das quais ela poderia ser obtida.

Atividades do 1º encontro.

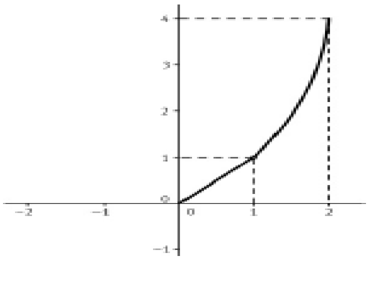
Questão 1 Qual a principal ideia na qual a definição de função de Euler se baseia?

Questão 2 Verifique quais dos itens abaixo são funções de acordo com a definição de Euler:

a) f (x) = sen x + cos x

b) g(x) = $\sum_{n=o}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots..;$

c) h (x) = $\begin{cases} x, & se\ 0 \leq x \leq 1 \\ x^2, & se\ 1 < x < 2 \end{cases}$



Questão 3 Explique que princípio esta por trás da definição de <u>variável</u> de Euler.

Questão 4 O princípio acima (Questão 3) é aceito nos dias de hoje?

Questão 5 Abaixo está a definição de função que você aprendeu. Compare essa definição de função com a definição de Euler. Cite pelo menos uma semelhança. Cite pelo menos uma diferença.

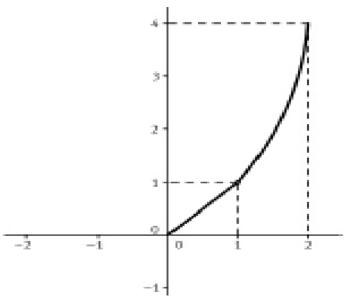
"Sejam A e B conjuntos diferentes do vazio. Uma relação f de A em B é função se, e somente se, todo elemento de A estiver associado através de f a um único elemento de B".

Questão 6 Os itens da questão 2, são funções de acordo com a definição que foi apresentado em seu material didático?

a) f (x) = sen x + cos x, $\forall$ x $\in$ R

b) g(x) =

$$\sum_{n=o}^{\infty} x^n = 1 + \mathrm{x} + \mathrm{x}^2 + \mathrm{x}^3 + \ldots..; \quad |\mathrm{x}| < 1;,$$



c) h(x) = $\begin{cases} x, \ se\ 0 \leq x \leq 1 \\ \mathrm{x}^2, \ se\ 1 < x < 2 \end{cases}$

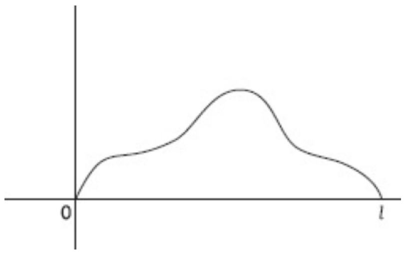
Apêndice IV

Abordagem Histórica dos Conceitos de Função

<u>2º Encontro</u>

O problema das cordas vibrantes e a 2ª definição de função de Euler

No Século XVIII, um problema físico sobre cordas vibrantes, teve grande importância para desenvolvimento do conceito da função. Esse problema se tratava de uma corda elástica com extremidades fixas em *0* e *l*, que é deformada em algum ponto inicial e então liberada para vibrar, ou seja, um problema que estuda as vibrações infinitamente pequenas de uma corda presa por suas extremidades, mas o maior problema era determinar a função que descreve a forma da corda no tempo t.



Esse problema gerou um grande debate de ideias entres alguns matemáticos da época, sendo Euler e D'Alembert os principais protagonistas dessa discursão. Kleiner (1989) diz que para entender esse debate sobre o problema das cordas vibrantes, devemos mencionar primeiro se acreditava na época que "*se duas expressões analíticas coicidem em um intervalo, elas coicidem em toda parte*". Tendo que os tipos de funções consideradas na época, eram representadas por uma expressão analítica.

D'Alembert em 1747, resolveu o problema da corda vibrante, dizendo que mesmo que as condições iniciais da corda sejam muito diferentes, elas deveriam ser representadas sempre por uma expressão analítica, ou seja, por uma equação algébrica ou uma série de potências.

Euler concordava com D'Alembert, ele até escreveu em 1748, um artigo sobre o problema das cordas vibrantes, dizendo que concordava com D'Alembert sobre a solução, mas ele não concordava com sua interpretação. Para Euler a solução de d'Alembert não era a "mais geral", como o D'Alembert alegava, pois Euler alegava que a forma inicial da corda pode ser dada por várias expressões analíticas em subintervalos diferentes de (0, l), como arcos circulares de diferentes raios em diferentes intervalos de mesmo comprimento ou por uma curva desenhada mão livre.

O debate entre Euler e d'Alembert sobre a corda vibratória foi uma discussão baseada em duas atitudes muito diferentes em relação à matemática, onde D'Alembert valorizava muito o rigor e queria limitar radicalmente o alcance de sua própria descoberta matemática. Euler pensava diferente e defendia que a matemática devia ser feita de forma mais geral possível, sendo suficiente para lidar com todas as situações da física, e ele estava disposto a estender seu próprio conceito de função e usar argumentos um tanto questionáveis para época em questão.

Essa discussão ainda durou alguns anos, D'Alembert deixou o conceito de função limitar os possíveis valores iniciais, enquanto Euler deixou a variedade de valores iniciais estender o conceito de função. Vemos, assim, que essa extensão do conceito de função foi imposta a Euler pelo problema físico em questão. Essas discurções influenciaram muito para desenvolvimento do conceito de função e suas principais consequências para esse conceito, foram as inclusões de:

(A) Funções definidas por mais de uma expressão analítica em intervalos diferentes, como por exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

(B) Funções desenhadas à mão livre e possivelmente não dadas por qualquer combinação de expressões analíticas.

Sendo assim Euler definiu 1755, que:

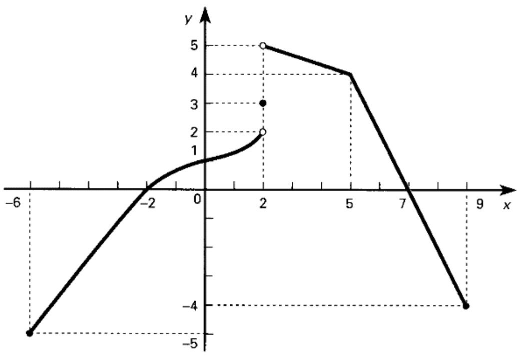
Se certas quantidades dependem de outras quantidades de maneira que se as outras mudam essas quantidades também mudam, então temos o hábito de chamar essas quantidades de funções dessas últimas. Essa denominação é bastante extensa e contém nela mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Consequentemente, se x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x, de qualquer maneira, ou que são determinadas por x, são chamadas funções de x.

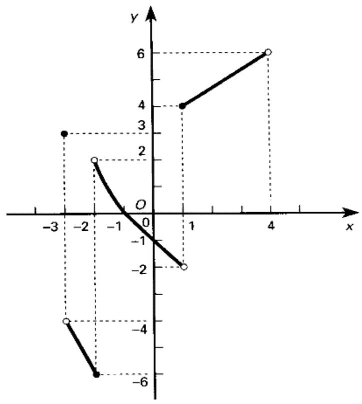
E como essas funções são de origem física, para Euler, funções com mais de uma expressão analítica, eram consideradas como funções “descontínuas”.

Em meados do século XIX, Cauchy forneceu um exemplo contestando a definição de continuidade de Euler, mostrando que uma função representada por uma única expressão analítica pode ser descontínua. Cauchy mostrou que $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$, pode ser representado pela única equação $y = \sqrt{x^2}$, para $-\infty < x < +\infty$.

A continuidade de Euler era uma noção muito distinta da que conhecemos, pois para ele a função para ser contínua, teria que ser representada por uma única expressão analítica em todo o domínio dos valores da variável e era descontínua se fosse necessário mudar a expressão analítica.

Hoje em dia, a noção de descontinuidade é bastante diferente. Uma função é descontínua se apresenta pontos de descontinuidade como nos exemplos abaixo:





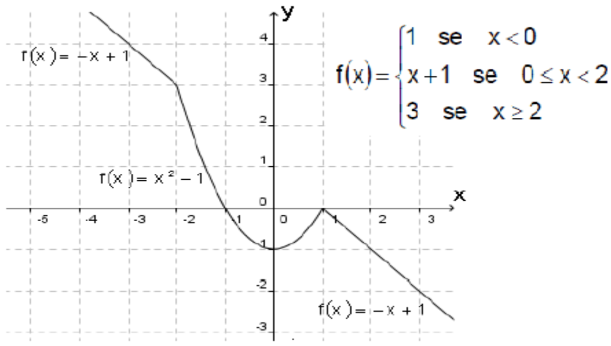
<u>Atividades do 2º Encontro</u>

Questão 1 Compare a 1ª definição de Euler (1748) apresentada anteriormente, com a 2ª definição de Euler que acabamos de ver (1755) e descreva a(s) diferença(s).

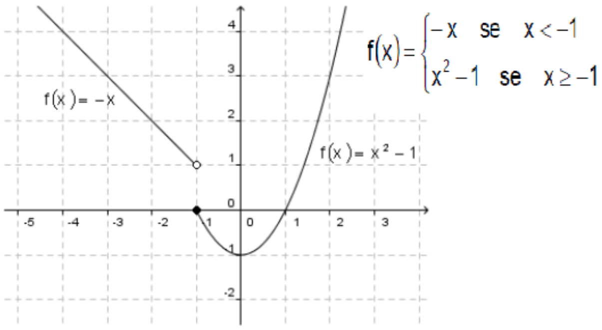
Questão 2 Discuta se o princípio da generalidade da variável se aplica a segunda definição de função de Euler.

Considerem os gráficos abaixo para responder as questões 2 e 3

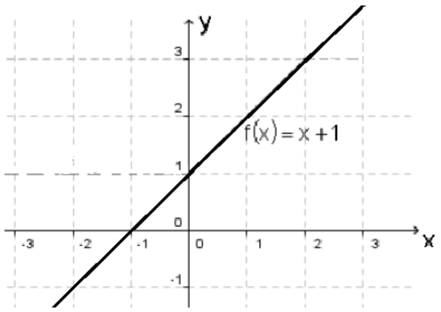
(I)



(II)



(III)



Questão 3 Dos gráficos acima diga quais seriam uma função pela:

a) 1ª definição de função de Euler;

b) 2ª definição de função de Euler.

Questão 4 Dos gráficos acima diga quais seriam funções contínuas:

a) Segundo a noção de continuidade de Euler;

b) Segundo o conceito de continuidade atual.

Apêndice V

3º Encontro

Novas Definições

No início do século XIX, ainda se discutia muito sobre os conceitos de função e sobre o de continuidade, onde as funções contínuas de Euler eram definidas como "funções analíticas", pois ele considerava as funções como expressões analíticas e a busca para explicar as principais propriedades desse tipo de função aumentaria as opções do que poderia ser considerado na matemática como função.

Destacamos neste encontro, o momento histórico do conceito de função, onde a noção de Euler foi abandonada, a partir do problema físico, conhecido como o problema da propagação do calor, investigado pelo matemático e físico Jean-Baptiste Joseph Fourier, gerando uma nova noção sobre o conceito de função e mais tarde redefinida por j. Dirichet.

O problema da propagação do calor foi estudado por Fourier, um matemático e físico, nascido em 1768 na França, que em seu estudo sobre propagação de calor, dizia que quando o calor é desigualmente distribuído em diferentes pontos da massa sólida, ele tende a se colocar em equilíbrio e passa lentamente das partes mais quentes às menos quentes, como se estivesse em um tubo que atravessa perpendicularmente as curvas de mesma temperatura sobre a superfície sólida.

Esse trabalho sobre a propagação de calor revolucionou o conceito de função, dando início à redefinição do conceito de função, sendo que em 1822 ele teve o seu principal resultado, que foi um teorema que dizia que qualquer função f(x) definida sobre (-l, l) é representável sobre este intervalo por uma série de senos e cosenos:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Essa solução considerava apenas um intervalo, ou seja, Fourier definiu uma função somente em um intervalo, o que foi inovador para a definição de função. No entanto, os resultados de Fourier não foram bem recebidos, pois Fourier defendia que qualquer função podia ser representada por uma série trigonométrica.

Fourier definiu uma função somente em um intervalo e isso fugia da definição do século XVIII, relacionada a expressão analitica. Euler e Lagrange recoheciam apenas certas funções e mesmo assim Fourier, dizia que o teorema era válido para todas as funções, sendo dada ao termo “função” uma interpretação mais geral, dizendo que:

Em geral, a função f_x representa uma sucessão de valores ou ordenadas, cada uma das quais é arbitrária. Uma infinidade de valores sendo dada à abscissa x, há um número igual de ordenadas. Todos têm valores numéricos reais, positivos ou negativos ou nulos. Não supomos que essas ordenadas f_x estejam sujeitas a uma lei comum; Eles se sucedem de qualquer maneira, e cada um deles é dado como se fosse uma única quantidade.

Na definição acima podemos perceber que Fourier diz que para cada x so existe um correspondente f_x , o que leva a ideia de dependencia entre as variáveis, sendo que esses valores não estavam sujeitos a uma lei comum, ou seja, não precisam de uma ou mais expressões analiticas para definilas, podendo está dentro de um intervalo, o que até então não era aceito pela comunidade matemática da época.

Fourier precisou convencer a comunidade matemática da época sobre a validade de seu teorema e para isso, Fourier teve que satisfazer algumas reenvindicações, tendo que mostrar que:

III. *Os coeficientes da série de Fourier podem ser calculados para qualquer f (x);*
IV. *Qualquer função f (x) pode ser representada por sua série de Fourier em* (-l, l).

Esse teorema de Fourier teve um impacto fundamental para o desenvolvimento do conceito de função, como:

• *Acabou com o artigo de fé defendido pelos matemáticos do século XVIII. (Assim, ficou claro agora que duas funções dadas por diferentes expressões analíticas podem coincidir em um intervalo sem necessariamente coincidir fora do intervalo).*

• *Afirmou que qualquer função pode ser representada por uma série trigonométrica, ou seja, uma função pode ter duas representações. Isso leva a pensar que a função é algo a mais do que a sua expressão analítica.*

Um matemático chamado Dirichlet, daria continuidade aos trabalhos de Fourier. Lejeune-Dirichlet, matemático alemão, nascido em 1805, foi exemplo em exibir o espírito crítico e teórico que caracterizou o século XIX e com uma noção de rigor para a matemática diferenciada dos matemáticos anteriores, influenciou outros matemáticos da época na Alemanha. Dirichlet havia participado do círculo de Fourier, que era secretário-geral da

Academia de Ciências e desenvolveu os estudos de Fourier sobre função, buscando dar mais consistência aos trabalhos de Fourier.

Mas para isso era necessário rever a noção de função, pois uma das propriedades gerais era que a função tinha que ser dada através de uma ou várias expressões analíticas. Dirichlet passou então a formular exemplos de funções que desafiavam as concepções de até então sobre este conceito. O exemplo abaixo foi apresentado em um artigo publicado em 1829 sobre a série de Fourier

$$\varphi(x) = \begin{cases} c & \text{for} \quad x \in \mathbb{Q} \\ d & \text{for} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

De acordo com Dirichlet, a função acima não podia ser escrita como uma ou mais expressões analíticas, não podia ser representada por uma série de Fourier e era descontínua em todos os pontos.

O exemplo dado por Dirichlet só poderia ser considerado como uma função se o conceito fosse entendido como uma relação arbitrária entre variáveis numéricas.

Ele reafirma suas ideias em uma definição apresentada em um artigo de 1837, no contexto de uma discussão sobre problemas relacionados à continuidade de funções, dizendo que:

> Sejam *a* e *b* dois números fixos e *x* uma quantidade variável que recebe sucessivamente todos os valores entre *a* e *b*. Se a cada *x* corresponde um único *y*, finito, de maneira que, quando *x* se move continuamente no intervalo entre *a* e *b*, y = *f(x)* também varia progressivamente, então *y* é dita uma função contínua de *x* nesse intervalo. **Para isso, não é obrigatório, em absoluto, nem que *y* dependa de *x* de acordo com uma mesma e única lei, nem mesmo que seja representada por uma relação expressa por meio de operações matemáticas.**

.

Conseguimos ver nessa definição de Dirichlet, assim como a definição de Fourier, que dadas duas quantidades variáveis *x* e *y*, para que *y* seja uma função de *x* não é preciso existir uma expressão algébrica relacionando a variável a *x, tendo ainda que* apenas um valor de *y* = *f*(*x*) para cada *x,* para que y seja função bem determinada. Essa condição de que para cada *x* tenhamos somente um valor para *y* nas definições de Fourier e de Dirichlet, é independente da noção de conjunto e também está presente na definição atual baseada na ideia de correspondência entre elementos de dois conjuntos.

ATIVIDADES DO 3º ENCONTRO

Questão 1 Analise a definição de função de Dirichlet e diga se este matemático baseiou-se no Princípio da generalidade da variável, assim como Euler.

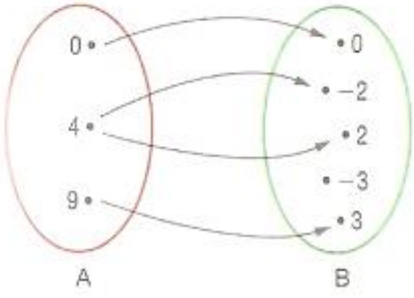
Questão 2 Analise a definição de função de Dirichlet e discuta se este matemático identifica a noção de função à ideia de expressão analítica.

Questão 3 Compare a definição de Dirichlet com as definições de Euler. Cite pelo menos três diferenças.

Questão 4 Compare a definição de função de Dirichlet com a definição que você aprendeu no seu material didático. Cite pelo menos uma semelhança e uma diferença.

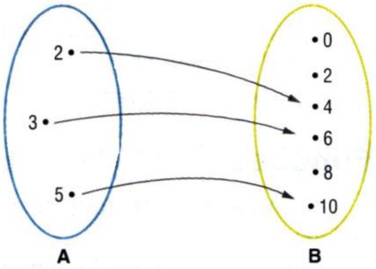
Questão 5 Considere os exemplos de relações abaixo e diga quais são funções de acordo com a definição de Dirichlet e quais são funções de acordo com a primeira definição de Euler (1748). Justifique as suas respostas.

a)



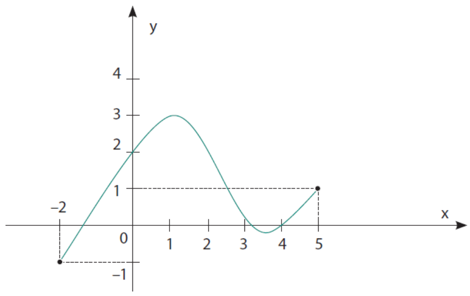
Resposta:

b)



Resposta:

c)



Resposta:

d) f associa a cada número natural o n-ésimo número primo [ex: $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 5$ e assim por diante].

Resposta:

e) $3x^2 - 12x + 25 = 7$

Resposta:

Apêndice VI

Encontro Final

No material abaixo você tem algumas definições de função apresentadas durante o trabalho e a definição atual, estudada por vocês.

Euler 1ª Definição (1748)

"Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer maneira a partir dessa quantidade variável e números ou quantidades constantes".

Definição de variável

"Uma quantidade variável compreende todos os números nela mesma, tanto positivos quanto negativos, inteiros e fracionários, os que são racionais, transcendentes e irracionais. Não devemos excluir nem mesmo o zero e os números imaginários".

Euler 2ª Definição (1755)

"*Se certas quantidades dependem de outras quantidades de maneira que se as outras mudam essas quantidades também mudam, então temos o hábito de chamar essas quantidades de funções dessas últimas. Essa denominação é bastante extensa e contém nela mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Consequentemente, se x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x, de qualquer maneira, ou que são determinadas por x, são chamadas funções de x".*

Fourier (Definição de Função)

"Em geral, a função f_x representa uma sucessão de valores ou ordenadas, cada uma das quais é arbitrária. Uma infinidade de valores sendo dada à abscissa x, há um número igual de ordenadas. Todos têm valores numéricos reais, positivos ou negativos ou nulos. Não supomos

que essas ordenadas f_x estejam sujeitas a uma lei comum; Eles se sucedem de qualquer maneira, e cada um deles é dado como se fosse uma única quantidade".

Dirichlet (Definição de Função)

Y é uma função de uma variável x, definida no intervalo a < x < b, se a cada valor da variável x nesse intervalo corresponde um valor definido da variável y. Além disso, é irrelevante em que forma essa correspondência é estabelecida.

Dirichlet (Continuidade)

"Sejam a e b dois números fixos e x uma quantidade variável que recebe sucessivamente todos os valores entre a e b. Se a cada x corresponde um único y, finito, de maneira que, quando x se move continuamente no intervalo entre a e b, y = f(x) também varia progressivamente, então y é dita uma função contínua de x nesse intervalo. Para isso, não é obrigatório, em absoluto, nem que y dependa de x de acordo com uma mesma e única lei, nem mesmo que seja representada por uma relação expressa por meio de operações matemáticas".

Definição atual que foi apresentada

"Sejam A e B conjuntos diferentes do vazio. Uma relação f de A em B é função se, e somente se, todo elemento de A estiver associado através de f a um único elemento de B".(Dante, 2014)

Através de uma comparação, análise e avaliação entre as definições, responda as questões abaixo:

1. De que maneira conhecer um pouco sobre o desenvolvimento do conceito de função e algumas definições dadas a este conceito anteriormente contribuiu para o seu entendimento sobre função?

2. Deixe o seu *feedback* sobre a experiência de conhecer um pouco sobre história da matemática, mais especificamente sobre o desenvolvimento do conceito de função. Diga o que você gostou, o que você não gostou, o que achou mais interessante etc.

3. Após descobrir que a definição do conceito de função foi modificada ao longo do desenvolvimento desse conceito, diga qual o papel de uma definição matemática (para que servem as definições em matemática?)

Apêndice VII

<u>Questionário Final</u>

AGORA VAMOS VER O QUE VOCÊ ASSIMILOU SOBRE FUNÇÃO.

1. Apresente três exemplos de função de acordo com a definição atual que foi apresentada a você.

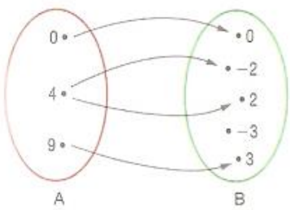
2. Como você define o que é um "domínio" e o que é uma "imagem"?

3. Por que o "domínio" e "imagem" são tão importantes para o estudo das funções? Você pode encontrar exemplos em que é útil conhecer o domínio e a imagem de uma função? (Cite exemplos em que é útil conhecer o domínio e a imagem de uma função)

4. Verifique se os itens abaixo são exemplos de função. Justifique sua conclusão.

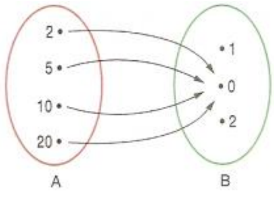
a) $y^2=x+1$

Resposta:



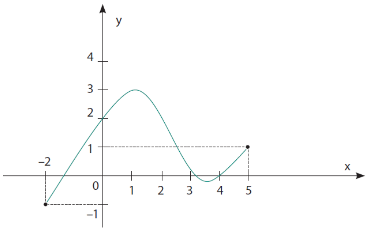
b)

Resposta:

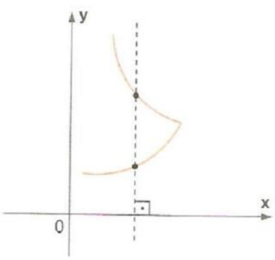


c)

Resposta:

d) 

Resposta:

e) 

Resposta:

f) f associa a cada número natural o n-ésimo número primo (ex: f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 5 e assim por diante).

Resposta:

g) $3x^2 – 12x + 25 = 7$

Resposta: