UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOSÉ ALDECI DE LIMA SILVA

UMA ABORDAGEM SELECIONADA DE SEQUÊNCIAS RECORRENTES

FORTALEZA – CEARÁ
2017

JOSÉ ALDECI DE LIMA SILVA

UMA ABORDAGEM SELECIONADA DE SEQUÊNCIAS RECORRENTES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração. Matemática

Orientador: Prof. Dr. João Marques Pereira

FORTALEZA – CEARÁ

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Silva, José Aldeci de Lima .
Uma abordagem selecionada de sequências recorrentes [recurso eletrônico] / José Aldeci de Lima Silva. - 2017 .
1 CD-ROM: il.; 4 ¾ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 87 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2017 .
Área de concentração: Matemática.
Orientação: Prof. Dr. João Marques Pereira.

1. Sequências recorrentes. 2. Construção. 3. Problemas. I. Título.

JOSÈ ALDECI DE LIMA SILVA

UMA ABORDAGEM SELECIONADA DE SEQUÊNCIAS RECORRENTES.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Marques Pereira

Aprovada em: 15 de dezembro de 2017

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João Marques Pereira (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará

Prof. Dr. João Montenegro de Miranda
Universidade Estadual do Ceará

Prof. Dr. Guilherme Lincoln Aguiar Ellery
Centro Universitário Estácio

Dedico este trabalho à minha mulher, Ana Santiago, aos meus filhos, Tales e Alan Lucas, à minha mãe, Antônia e, postumamente, ao meu pai, Almir, pelo muito que contribuíram para que eu pudesse chegar até aqui.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para que eu conseguisse cursar o Mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT.

De maneira especial agradeço à minha mulher, Ana, pelo apoio e paciência que me proporcionou nos momentos difíceis que atravessei no decorrer do curso. Meu muito obrigado à coordenação e aos Professores, que nos acompanharam no decorrer do curso.

Ao Professor João Marques Pereira, meu Orientador, pelo acompanhamento e atenção dedicada a este trabalho.

Ao Professor e coordenador do curso, Tiago Caúla, um exemplo de seriedade e dedicação às suas funções. Aos Professores João Montenegro, Claudemir Leandro, Ulisses Parente e Hermínio Borges.

Meu muito obrigado também aos colegas do curso, pois sem a ajuda deles nos grupos de estudos não sei se teria conseguido chegar até aqui.

Agradeço também à CAPES, pelo incentivo financeiro, o qual foi de importância fundamental. Finalmente, mas não com menor ênfase, agradeço ao Professor Guilherme Lincoln Aguiar Ellery, primeiro coordenador do PROFMAT/UECE, pelo muito que contribuiu para a consolidação do PROFMAT na UECE.

“Em 1907, porém, o historiador Moritz Cantor deu uma interpretação mais interessante e mais plausível. Ele viu no problema um precursor de um popular problema da Idade Média e que figura no Liber abaci (1202) de Leonardo Fibonacci. Dentre os muitos problemas dessa obra há o seguinte: “ Há sete senhoras idosas na estrada de Roma. Cada senhora tem sete mulos; cada mulo transporta sete sacos; cada saco contém sete pães; com cada pão há sete facas; para cada faca há sete bainhas. Entre mulheres, mulos, sacos, pães, facas e bainhas, quantos estão na estrada de Roma?”

(Howard Whitley Eves)

RESUMO

Este trabalho tem como tema central sequências recorrentes: São destacadas, em especial, as progressões aritméticas e geométricas, que são sequências numéricas estudadas no Ensino Médio. Destas sequências são evidenciados os seguintes tópicos: definição, construção da fórmula do termo geral, construção da fórmula da soma dos termos e aplicações. Recebe atenção especial o estudo das progressões aritméticas de ordem superior. Assim como as progressões aritméticas e geométricas, sugerimos que outras sequências numéricas podem ser estudadas no Ensino Médio. Problemas como “as progressões aritmético-geométricas”, “os coelhos de Fibonacci”, “a torre de Hanói” e “a pizza de Steiner”, dentre outros, podem, perfeitamente, ser propostos aos alunos e, posteriormente, discutidos em sala de aula. Neste trabalho, foram apresentados problemas cuja resolução recaiu no contexto de progressão aritmética, progressão geométrica ou uma sequência recorrente qualquer. Problemas contextualizados, também são abordados. Vale salientar que algumas situações abordadas escapam do contexto do Ensino Médio.

Palavras-chave: Sequências recorrentes. Construção. Problemas.

ABSTRACT

This research has as its central theme recurrent sequences. Particularly noteworthy are the arithmetic and geometric progressions, which are the numerical sequences taught in the 1st year of high school. From these sequences the following topics are worked out: definition, construction of the general term formula, construction of the sum formula of terms and applications. Special attention is paid to the study of higher order arithmetic progressions. As with arithmetic and geometric progressions, other numerical sequences can be studied in the first year and / or in the second year of high school. Problems such as "arithmetic-geometric progressions", "Fibonacci rabbits", "Hanoi tower" and "Steiner's pizza", among others, may well be proposed to students and later discussed in the classroom. In this work, were solved problems whose resolution fell into arithmetic progression, geometric progression or any recurrent sequence. Contextualized problems are also addressed in this work. It is Worth mentioning that some situations addressed escape the context of High School.

Keywords: Recurring sequences. Construction. Problems**.**

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No Ensino Básico, as sequências numéricas estudadas são essencialmente as progressões, aritméticas e geométricas. Estas sequências são definidas e suas propriedades são estudadas e aplicadas na resolução de alguns problemas. A ideia de estudar sequências recorrentes surgiu como uma ampliação ao estudo das progressões. A importância de estudar as sequências recorrentes reside no fato de que o estudo de tais sequências generaliza, de maneira natural, o estudo das progressões aritméticas e progressões geométricas. Procuramos estender esse estudo, mostrando outras sequências, além das progressões, aritméticas e geométricas. Várias sequências são definidas de forma recursiva, por meio de uma equação, denominada equação de recorrência. Ademais, são apresentados alguns problemas cuja solução recai na resolução de uma equação de recorrência. O objetivo do nosso trabalho é estudar, principalmente, sequências definidas recursivamente.

Na disciplina Matemática Discreta, do primeiro semestre do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), resolvemos alguns problemas envolvendo sequências recorrentes. Dentre estes destacamos, especialmente, o problema dos "coelhos de Fibonacci". Certamente este problema contribuiu decisivamente para a escolha do tema do nosso trabalho de conclusão de curso. A sequência de Fibonacci constitui um capítulo desse trabalho, onde definimos tal sequência, apresentamos a dedução da fórmula que nos permite determinar um termo qualquer dessa sequência e demonstramos algumas proposições relacionadas a tal sequência.

Observamos que os alunos do Ensino Médio, têm certa ojeriza à construção/demonstração de fórmulas, preferindo a aplicação direta das mesmas. Por esta razão, neste trabalho, daremos ênfase especial às demonstrações.

Desejamos atingir, também, o Professor de Matemática, capacitando-o cada vez mais ao ensino das sequências numéricas. Os problemas de nível mais elevado são direcionados especialmente a esses profissionais do magistério.

Desde os primeiros anos de estudo, dedico especial atenção à Matemática. Isto me levou a ministrar aulas de Matemática no ensino médio e a cursar Licenciatura em Matemática depois de graduado em Engenharia Civil.

2 SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

Neste capítulo definimos sequências de números reais e sequências definidas recursivamente. Destacamos particularmente as progressões aritméticas, inclusive as de ordem superior, as progressões geométricas e as progressões aritmético-geométricas. Definimos, também, as equações de recorrência, enfatizando alguns tipos destas e seus respectivos métodos de resolução.

Neste trabalho, consideramos o conjunto $\mathbb{N}$, dos números naturais como sendo

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

2.1 AS SEQUÊNCIAS NO ENSINO MÉDIO

As sequências estudadas pelos alunos no Ensino Médio, são as progressões aritméticas e as progressões geométricas.

2.1.1 Progressões aritméticas

Definição: Uma progressão aritmética é uma sequência numérica, na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao termo anterior, somado com uma constante. Esta constante é chamada razão da progressão.

Por exemplo a sequência (3, 7, 11, 15, 19, 23) é uma progressão aritmética de razão 4.

Fórmula do termo geral de uma progressão aritmética

Em uma progressão aritmética $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cuja razão é igual a r, o n-ésimo termo é dado por $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$.

Provaremos a validade desta fórmula usando indução sobre n.

Para $n = 1$, temos $a_1 = a_1 + (1-1) \cdot r \leftrightarrow a_1 = a_1$, o que é verdadeiro.

Suponhamos que $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ é verdadeiro, para algum $n \in \mathbb{N}, n > 1$.

Mostraremos que $a_{n+1} = a_1 + n \cdot r$ é verdadeiro.

Temos

$$a_{n+1} = a_n + r = a_1 + (n-1) \cdot r + r = a_1 + (n-1+1) \cdot r = a_1 + n \cdot r$$

Pelo Princípio da Indução Matemática, concluímos que $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Relação entre dois termos quaisquer de uma progressão aritmética

Veja que $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \leftrightarrow a_n = a_1 + (k-1) \cdot r + (n-k) \cdot r$.

Como para k$\in \mathbb{N}$, $a_k = a_1 + (k-1) \cdot r$, temos $a_n = a_k + (n-k) \cdot r$, que é a relação entre os termos a_n e a_k

Exemplo:

Com a aplicação das fórmulas acima, podemos obter:

(i) O 75º termo da progressão aritmética (23, 37, 51,...).

Temos

$$a_{75} = 23 + (75-1) \cdot 14 = 23 + 74 \cdot 14 = 23 + 1036 = 1.059.$$

(i i**)** O número de termos da progressão aritmética (8, 15, 22,..., 708).

Temos

$$708 = 8 + (n-1) \cdot 7 \leftrightarrow 700 = (n-1) \cdot 7 \leftrightarrow n - 1 = 100 \leftrightarrow n = 101.$$

Portanto, a progressão aritmética possui 101 termos.

(iii) o número de múltiplos de 9 existentes entre 20 e 1.000.

Os múltiplos de 9 situados entre 20 e 1.000 formam a progressão aritmética (27, 36,..., 999), na qual a_1 = 27, r = 9 e a_n = 999.

Utilizando a fórmula do termo geral da progressão aritmética, obtemos a posição do último termo. Temos

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \leftrightarrow 999 = 27 + (n-1) \cdot 9 \leftrightarrow 972 = (n-1) \cdot 9 \leftrightarrow n - 1 = 108 \leftrightarrow n = 109$. Portanto, existem 109 múltiplos de 9 situados entre 20 e 1.000.

Proposição 1: Em uma progressão aritmética cujos termos são números inteiros e a razão é não nula, ao dividirmos qualquer termo pelo módulo da razão teremos o mesmo resto.

Demonstração

Pela divisão euclidiana de a_1 por $|r|$, temos que $a_1 = |r| \cdot q + R$, com $0 \leq R < |r|$. Pela formula do termo geral de uma progressão aritmética, sabemos que $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$. Segue-se que $a_n = |r| \cdot q + R + (n-1) \cdot r$. Temos dois casos a considerar:

(i) se $r > 0$, então $a_n = r \cdot q + R + (n-1) \cdot r = (n - 1 + q) \cdot |r| + R$, com $R < |r|$. Logo R é o resto da divisão euclidiana de a_n por $|r|$.

(ii) se $r < 0$, então $a_n = |r| \cdot q + R + (n-1) \cdot r = |r| \cdot q + R + (1-n) \cdot |r| = (q + 1 - n) \cdot |r| + R$, com $R < |r|$. Logo, R é o resto da divisão euclidiana de a_n por $|r|$.

Progressão aritmética e função afim

Em uma progressão aritmética $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não constante, isto é, com $r \neq 0$, o termo geral a_n é dado por um polinômio em *n*, de grau 1, pois $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r = r \cdot n + (a_1 - r)$.

Por esse motivo, as progressões aritméticas de razão $r \neq 0$ são chamadas de progressões aritméticas de primeira ordem.

Reciprocamente, se em uma sequência o termo de ordem *n* for um polinômio em *n*, de grau menor do que ou igual a 1, ela será uma progressão aritmética. Portanto, se

$x_n = a \cdot n + b$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética, pois

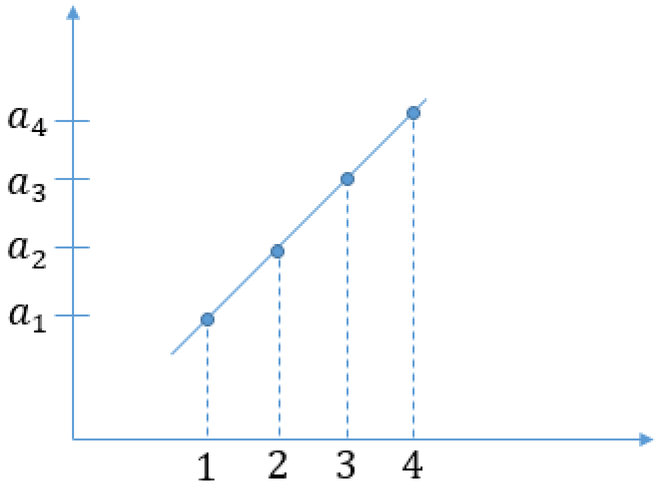
$$x_{n+1} = a \cdot (n+1) + b = a \cdot n + a + b = x_n + a.$$

Logo, $x_{n+1} = x_n + a$. Temos então uma progressão aritmética cuja razão é a e o primeiro termo é $a + b$.

Em uma progressão aritmética, temos que $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$. Assim, a função que associa a cada natural *n* o valor de a_n é simplesmente a restrição aos números naturais da função afim $a(x) = a_1 + r \cdot (x - 1)$.

Portanto, pensando em uma progressão aritmética como uma função que associa a cada número natural *n* o valor a_n, o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos colineares no plano. Em outras palavras, (a_n) é uma progressão aritmética se, e somente se, os pontos do plano que têm coordenadas $(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3)$, etc. estão em linha reta. Veja a figura 1.

Figura 1- progressão aritmética e função afim.



Fonte: Elaborada pelo autor

Proposição 2: Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função afim, definida por $f(x) = ax + b$ e $x_1, x_2, x_3, \dots x_n, \dots$, é uma progressão aritmética de razão r, então os números $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão $a \cdot r$.

Demonstração

Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função afim, definida por $f(x) = ax + b$ e $x_1, x_2, x_3, \dots x_n, \dots$, é uma progressão aritmética de razão r, então $f(x_1) = a \cdot x_1 + b$, $f(x_2) = a \cdot x_2 + b$, $f(x_3) = a \cdot x_3 + b$, ..., $f(x_n) = a \cdot x_n + b$, ... Temos então que

$$f(x_2) - f(x_1) = a \cdot (x_2 - x_1) = a \cdot r$$

$$f(x_3) - f(x_2) = a \cdot (x_3 - x_2) = a \cdot r$$

$$f(x_4) - f(x_3) = a \cdot (x_4 - x_3) = a \cdot r$$

$$\vdots$$

$$f(x_n) - f(x_{n-1}) = a \cdot (x_n - x_{n-1}) = a \cdot r$$

Provaremos a validade desse resultado usando indução sobre n.

Para $n = 2$, temos $f(x_2) - f(x_1) = a \cdot (x_2 - x_1) = a \cdot r$, o que é verdadeiro.

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para os números naturais pertencentes ao conjunto $\{3, 4, \dots, n\}$, com $n \in \mathbb{N}$. Assim, por hipótese, temos

$$f(x_n) - f(x_{n-1}) = a \cdot (x_n - x_{n-1}) = a \cdot r.$$

Devemos provar a validade para $n + 1$.

Temos que

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) = a \cdot (x_{n+1} - x_n) = a \cdot [x_n + r - (x_{n-1} + r)] =$$

$$= a \cdot (x_n - x_{n-1}).$$

Mas, por hipótese, $a \cdot (x_n - x_{n-1}) = f(x_n) - f(x_{n-1}) = a \cdot r$.

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, podemos concluir que

$f(x_n) - f(x_{n-1}) = a \cdot (x_n - x_{n-1}) = a \cdot r$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e, consequentemente, que os números $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética, de razão $a \cdot r$.

Exemplo:

Dada a função afim $f(x) = 4x - 2$, cuja taxa de variação é $a = 4$ e a progressão aritmética (-6, -1, 4, 9, 14, 19, ...), cuja razão é $r = 5$, temos que, de fato, a sequência $(f(-6), f(-1), f(4), f(9), f(14), \dots)$, que é equivalente a (-26, -6, 14, 34, 54, ...) é uma progressão aritmética de razão $r' = 4 \cdot 5 = 20$.

Progressão aritmética e função quadrática

A relação entre as progressões aritméticas e as funções quadráticas é estabelecida na proposição a seguir.

Proposição 3: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ uma progressão aritmética, de razão *r*. Então as diferenças

$f(x_2) - f(x_1)$, $f(x_3) - f(x_2)$, $f(x_4) - f(x_3)$, ..., $f(x_n) - f(x_{n-1})$, ... formam, nesta ordem, uma nova progressão aritmética, cuja razão é igual a $2 \cdot a \cdot r^2$.

Demonstração

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$

e $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ uma progressão aritmética, de razão *r*.

Teremos

$$f(x_2) - f(x_1) = a \cdot (x_2{}^2 - x_1{}^2) + b \cdot (x_2 - x_1) = a \cdot (x_2 - x_1) \cdot (x_2 + x_1) + b \cdot (x_2 - x_1)$$
$$= a \cdot r \cdot (x_2 + x_1) + b \cdot r = A_{1.}$$

$$f(x_3) - f(x_2) = a \cdot (x_3{}^2 - x_2{}^2) + b \cdot (x_3 - x_2) = a \cdot (x_3 - x_2) \cdot (x_3 + x_2) + b \cdot (x_3 - x_2)$$
$$= a \cdot r \cdot (x_3 + x_2) + b \cdot r = A_{2.}$$

$$f(x_4) - f(x_3) = a \cdot (x_4{}^2 - x_3{}^2) + b \cdot (x_4 - x_3) = a \cdot (x_4 - x_3) \cdot (x_4 + x_3) + b \cdot (x_4 - x_3)$$
$$= a \cdot r \cdot (x_4 + x_3) + b \cdot r = A_{3.}$$

$$f(x_5) - f(x_4) = a \cdot (x_5{}^2 - x_4{}^2) + b \cdot (x_5 - x_4) = a \cdot (x_5 - x_4) \cdot (x_5 + x_4) + b \cdot (x_5 - x_4)$$
$$= a \cdot r \cdot (x_5 + x_4) + b \cdot r = A_{4.}$$

$$\vdots$$

$$f(x_n) - f(x_{n-1}) = a \cdot (x_n{}^2 - x_{n-1}{}^2) + b \cdot (x_n - x_{n-1})$$
$$= a \cdot (x_n - x_{n-1}) \cdot (x_n + x_{n-1}) + b \cdot (x_n - x_{n-1})$$
$$= a \cdot r \cdot (x_n + x_{n-1}) + b \cdot r = A_{n-1.}$$

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) = a \cdot (x_{n+1}{}^2 - x_n{}^2) + b \cdot (x_{n+1} - x_n)$$
$$= a \cdot (x_{n+1} - x_n) \cdot (x_{n+1} + x_n) + b \cdot (x_{n+1} - x_n)$$
$$= a \cdot r \cdot (x_{n+1} + x_n) + b \cdot r = A_{n.}$$

Então teremos

$$A_2 - A_1 = a \cdot r \cdot x_3 + a \cdot r \cdot x_2 + b \cdot r - a \cdot r \cdot x_2 - a \cdot r \cdot x_1 - b \cdot r = a \cdot r \cdot (x_3 - x_1)$$
$$= a \cdot r \cdot (2r) = 2 \cdot a \cdot r^2;$$

$$A_3 - A_2 = a \cdot r \cdot x_4 + a \cdot r \cdot x_3 + b \cdot r - a \cdot r \cdot x_3 - a \cdot r \cdot x_2 - b \cdot r = a \cdot r \cdot (x_4 - x_2)$$
$$= a \cdot r \cdot (2r) = 2 \cdot a \cdot r^2$$

$$A_4 - A_3 = a \cdot r \cdot x_5 + a \cdot r \cdot x_4 + b \cdot r - a \cdot r \cdot x_4 - a \cdot r \cdot x_3 - b \cdot r = a \cdot r \cdot (x_5 - x_3)$$
$$= a \cdot r \cdot (2r) = 2 \cdot a \cdot r^2$$

$$\vdots$$

$$A_n - A_{n-1} = a \cdot r \cdot x_{n+1} + a \cdot r \cdot x_n + b \cdot r - a \cdot r \cdot x_n - a \cdot r \cdot x_{n-1} - b \cdot r$$
$$= a \cdot r \cdot (x_{n+1} - x_{n-1}) = a \cdot r \cdot (2r) = 2 \cdot a \cdot r^2.$$

Provaremos a validade desse resultado usando indução sobre *n*.

Para $n = 2$, temos

$$A_2 - A_1 = a \cdot r \cdot x_3 + a \cdot r \cdot x_2 + b \cdot r - a \cdot r \cdot x_2 - a \cdot r \cdot x_1 - b \cdot r = a \cdot r \cdot (x_3 - x_1)$$

$= a \cdot r \cdot (2r) = 2 \cdot a \cdot r^2$, o que é verdadeiro.

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para os números naturais pertencentes ao conjunto $\{3, 4, \ldots, n\}$, com $n \in \mathbb{N}$. Assim, por hipótese, temos

$$A_n - A_{n-1} = a \cdot r \cdot x_{n+1} + a \cdot r \cdot x_n + b \cdot r - a \cdot r \cdot x_n - a \cdot r \cdot x_{n-1} - b \cdot r$$
$$= a \cdot r \cdot (x_{n+1} - x_{n-1}) = a \cdot r \cdot (2r) = 2 \cdot a \cdot r^2.$$

Devemos provar a validade para $n + 1$.

Temos que

$$A_{n+1} - A_n = a \cdot r \cdot x_{n+2} + a \cdot r \cdot x_{n+1} + b \cdot r - a \cdot r \cdot x_{n+1} - a \cdot r \cdot x_n - b \cdot r$$
$$= a \cdot r \cdot (x_{n+2} - x_n) = a \cdot r \cdot [x_{n+1} + r - (x_{n-1} + r)]$$
$$= a \cdot r \cdot (x_{n+1} - x_{n-1}).$$

Mas, por hipótese, $a \cdot r \cdot (x_{n+1} - x_{n-1}) = A_n - A_{n-1} = 2 \cdot a \cdot r^2$.

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, podemos concluir que

$A_n - A_{n-1} = 2 \cdot a \cdot r^2$ é verdadeiro, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e, consequentemente, que as diferenças $f(x_2) - f(x_1)$, $f(x_3) - f(x_2)$, $f(x_4) - f(x_3)$, ..., $f(x_n) - f(x_{n-1})$, ... formam, nesta ordem, uma progressão aritmética, cuja razão é igual a

$2 \cdot a \cdot r^2$.

Exemplo:

Sejam a função quadrática $f(x) = -x^2 + 2x - 2$ e a progressão aritmética (3, 5, 7, 9, 11, 13, ...) de razão 2. De fato, temos que a sequência ($f(5) - f(3)$, $f(7) - f(5)$, $f(9) - f(7)$, ...), dada por $(-12, -20, -28, -36, \dots)$ é uma progressão aritmética de razão

$2 \cdot (-1) \cdot 2^2 = -8$.

Soma dos termos de uma progressão aritmética

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) é considerado o maior matemático do século XIX. E com Arquimedes e Isaac Newton, um dos maiores de todos os tempos.

[...] Há uma história segundo a qual o professor de Carl na escola pública, quando ele tinha dez anos de idade, teria passado à classe, para mantê-la ocupada, a tarefa de somar os números de 1 a 100. Quase que imediatamente Carl colocou sua lousa sobre a escrivaninha do irritado professor. Quando as lousas foram finalmente viradas, o professor surpreso verificou que Carl tinha sido o único a acertar a resposta, 5050, mas sem fazê-la acompanhar de nenhum cálculo. Carl havia mentalmente calculado a soma da progressão aritmética $1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$, observando que $100 + 1 = 101$, $99 + 2 = 101$, $98 + 3 = 101$......50 + 51. Teria então a soma de cinquenta números iguais a 101e isto é igual $50 \cdot 101 = 5.050$. [...]. Este texto foi extraído de Eves (2011, p.519). Com base na idéia de

Gauss, usada para calcular a soma $1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$, demonstra-se a fórmula para calcular a soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética qualquer.

Proposição 4: A soma dos *n* primeiros termos da progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ é dada por

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

Demonstração

Vamos usar indução sobre *n*.

Para $n = 1$, temos

$$S_1 = \frac{(a_1 + a_1) \cdot 1}{2} = a_1,$$

o que é verdadeiro.

Suponhamos que

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

é verdadeiro, para um certo $n \in \mathbb{N}$.

Devemos provar que

$$S_{n+1} = \frac{(a_1 + a_{n+1}) \cdot (n+1)}{2}$$

é verdadeiro.

Temos

$$\begin{aligned} S_{n+1} = S_n + a_{n+1} &= \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} + a_{n+1} = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} + a_1 + n \cdot r \\ &= \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} + \frac{2 \cdot a_1 + 2 \cdot n \cdot r}{2} = \frac{(a_1 + a_n + r) \cdot n + 2 \cdot a_1 + n \cdot r}{2} \\ &= \frac{(a_1 + a_{n+1}) \cdot n + a_1 + n \cdot r + a_1}{2} = \frac{a_1 \cdot n + a_{n+1} \cdot n + a_{n+1} + a_1}{2} \\ &= \frac{a_{n+1} \cdot (n+1) + a_1 \cdot (n+1)}{2} = \frac{(a_1 + a_{n+1}) \cdot (n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Então, podemos concluir que $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplos:

1. Calcule a soma dos múltiplos de 9 situados entre 20 e 1.000.

Solução:

Os múltiplos de 9 no intervalo dado formam a sequência (27, 36, 45,..., 999). Note que a sequência é uma progressão aritmética na qual $a_1 = 27$, $r = 9$ e $a_n = 999$. Substituindo esses valores na fórmula do termo geral, segue-se que $999 = 27 + (n-1) \cdot 9 \rightarrow 972 = (n-1) \cdot 9 \rightarrow n - 1 = 108 \rightarrow n = 109$.

Utilizando a fórmula da soma temos

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \rightarrow S_{109} = \frac{(27 + 999) \cdot 109}{2} = 55.917.$$

Portanto, a soma dos múltiplos de 9, situados entre 20 e 1000, é 55.917.

2. Mostre que, se S_{a_n} e S_{b_n} são as somas dos *n* termos das progressões aritméticas $(a_1, a_2, ..., a_n)$ e $(b_1, b_2, ..., b_n)$, respectivamente, então a progressão aritmética dada por $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$ tem soma $S_n = S_{a_n} + S_{b_n}$.

   Este exemplo foi retirado de Souza (2010, p. 235).

Solução:

Calculando S_n, temos:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n \cdot [(a_1 + b_1) + (a_n + b_n)]}{2} = \frac{n \cdot a_1 + n \cdot b_1 + n \cdot a_n + n \cdot b_n}{2} \\ &= \frac{n \cdot (a_1 + a_n) + n \cdot (b_1 + b_n)}{2} = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} + \frac{n \cdot (b_1 + b_n)}{2} \\ &= S_{a_n} + S_{b_n}. \end{aligned}$$

Portanto, a progressão aritmética $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$ tem soma $S_n = S_{a_n} + S_{b_n}$.

Relação entre a soma dos *n* primeiros termos de um progressão aritmética e polinômio

A soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1) \cdot r] \cdot n}{2} = \frac{r}{2} \cdot n^2 + \left(a_1 - \frac{r}{2}\right) \cdot n$$

Observe que, se $r \neq 0$, S_n é um polinômio do segundo grau em *n*, desprovido de termo independente. Se $r = 0$, $S_n = n \cdot a_1$ é um polinômio de grau menor que 2, sem termo independente.

Reciprocamente, todo polinômio do segundo grau em n, desprovido de termo independente, é o valor da soma dos n primeiros termos de alguma progressão aritmética. Se $p(n) = an^2 + bn$, então $p(n)$ é a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética cujo primeiro termo é igual $a + b$ e a razão é igual a $2 \cdot a$

Exemplos:

1. Seja o polinômio do segundo grau, definido por $p(n) = 4n^2 + 2n$.

Temos que $p(n)$ é o valor da soma dos n primeiros termos da progressão aritmética na qual $r = 2 \cdot 4 = 8$ e $a_1 = 4 + 2 = 6$, ou seja, da progressão aritmética (6, 14, 22, ...). De fato, calculando, por exemplo, a soma dos 10 primeiros termos da progressão, obtemos $S_{10} = 420$, que é igual ao valor de $p(10)$.

2. A soma S_n dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por $S_n = n^2 + n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Determinar essa progressão(retirado de Iezzi (1990, p.8).

Solução:

$S_n = n^2 + n$

para $n = 1$: $S_1 = a_1 \rightarrow a_1 = 1^2 + 1 \rightarrow a_1 = 2$

para $n = 2$: $S_2 = a_1 + a_2 \rightarrow a_1 + a_2 = 2^2 + 2 \rightarrow a_1 + a_2 = 6 \therefore \ a_2 = 4$.

Então, a progressão tem $a_1 = 2$ e $r = 2$, isto é, é a sequência de números pares positivos

$$(2, 4, 6, \dots, 2n, \dots).$$

Progressões aritméticas de ordem superior

Define-se para sequências o operador Δ, chamado de operador diferença, por $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$. Segue da definição que uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética se, e somente se, $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ é constante.

Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência (a_n) na qual as diferenças $(\Delta a_n) = a_{n+1} - a_n$ entre cada termo e o termo anterior, formam uma progressão aritmética não constante.

Exemplo:

A sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem, pois a sequência das diferenças entre cada termo e o termo anterior $(b_n) = (\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n) = (2, 3, 4, 5, 6, \dots)$ é uma progressão aritmética não constante.

Definição: Uma progressão aritmética de ordem k ($k > 2$) é uma sequência na qual as diferenças entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão aritmética de ordem $k - 1$.

Exemplo:

Considere a tabela abaixo. Ela nos mostra uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$, de termo geral $a_n = 2n^3 - 3n$ e suas diferenças (Δa_n), $(\Delta^2 a_n) = (\Delta\Delta a_n)$, $(\Delta^3 a_n) = (\Delta\Delta^2 a_n)$, etc...

n	a_n	Δa_n	$\Delta^2 a_n$	$\Delta^3 a_n$
0	0	-1	12	12
1	-1	11	24	12
2	10	35	36	12
3	45	71	48	12
4	116	119	60	$*$
5	235	179	$*$	
6	414	$*$		
7	$*$			

Verificaremos que $(\Delta^3 a_n)$ é constante e assim $(\Delta^2 a_n)$ será uma progressão aritmética. Então (Δa_n) será uma progressão aritmética de segunda ordem e (a_n) será uma progressão aritmética de terceira ordem. Teremos

$$a_n = 2n^3 - 3n$$

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = 2 \cdot (n+1)^3 - 3 \cdot (n+1) - (2n^3 - 3n) = 6n^2 + 6n - 1,$$

$$\Delta^2 a_n = 6 \cdot (n+1)^2 + 6 \cdot (n+1) - 1 - (6n^2 + 6n - 1) = 12n + 12,$$

$$\Delta^3 a_n = 12 \cdot (n+1) + 12 - (12n + 12) = 12$$

$\Delta^3 a_n$ é constante.

Analisando esse quadro, podemos perceber que a soma de dois elementos lado a lado é igual ao elemento que está embaixo do primeiro desses elementos. Podemos calcular, assim, os elementos que estão assinalados por $*$. Da direita para a esquerda, eles são iguais a $12, 60 + 12 = 72, 179 + 72 = 251$ e $414 + 251 = 665$. Portanto, $a_7 = 2 \cdot 7^3 - 3 \cdot 7$.

Proposição 5: Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência na qual o termo de ordem n é um polinômio em n, do segundo grau, então $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética de segunda ordem. Reciprocamente, se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética de segunda ordem, então a_n é um polinômio do segundo grau em *n*.

Demonstração

Seja $a_n = an^2 + bn + c, a \neq 0$. Temos

$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = a \cdot (n+1)^2 + b \cdot (n+1) + c - (an^2 + bn + c) = (2a)n + (a+b)$,

que é um polinômio do primeiro grau em *n*. Como visto na página 13, (Δa_n) é uma progressão aritmética não estacionária e, consequentemente, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$é uma progressão aritmética de segunda ordem.

Reciprocamente, se (a_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem, $b_n = \Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ é uma progressão aritmética com razão diferente de zero e $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1$

é um polinômio do segundo grau em *n*. Em consequência, a_n também é um polinômio do segundo grau em *n*.

O resultado

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = a_{n+1} - a_1,$$

obtido acima, é conhecido como Teorema Fundamental da Somação. Trata-se de uma técnica bastante eficiente para o cálculo de somas

Teorema 1: A soma das *p*-ésimas potências dos *n* primeiros números inteiros positivos,

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p = \sum_{k=1}^{n} k^p,$$

é um polinômio de grau $p + 1$ em *n*.

Demonstração

Faremos a demonstração, usando indução sobre p. Para $p = 1$, temos

$$1^1 + 2^1 + 3^1 + \cdots + n^1 = \frac{(1\ +\ n)\cdot n}{2}.$$

que é um polinômio de grau 1 + 1 = 2.

Suponhamos agora que

$$\sum_{k=1}^{n} k^p$$

seja um polinômio de grau $p + 1$ em n, para todo $p \in \{1, 2, \dots, s\}$. Devemos provar que essa afirmação é verdadeira para $p = s + 1$, que equivale a mostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} k^{s+1}$$

é um polinômio de grau $s + 2$ em n.

Pelo binômio de Newton, temos que $(k + 1)^{s+2} = k^{s+2} + (s + 2)k^{s+1} + \cdots$. Observe que os termos que não foram escritos explicitamente formam um polinômio de grau s em k. Aplicando somatório em ambos os membros da igualdade, segue-se que

$$\sum_{k=1}^{n}(k + 1)^{s+2} = \sum_{k=1}^{n} k^{s+2} + (s + 2)\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} + F(n),$$

em que $F(n)$ é um polinômio de grau $s + 1$ em n, pela hipótese da indução.

Desenvolvendo os dois primeiros somatórios, obtemos

$$(n + 1)^{s+2} = 1 + (s + 2)\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} + F(n).$$

Então

$$\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} = \frac{(n + 1)^{s+2} - 1 - F(n)}{s + 2},$$

que é um polinômio de grau $s + 2$ em n.

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, podemos concluir que

$$\sum_{k=1}^{n} k^p, \text{com } p \in \mathbb{N} \text{ e } n \in \mathbb{Z}_+^*,$$

é um polinômio de grau $p+1$ em *n*.

Corolário 1.1: Se *F* é um polinômio de grau *p*, então

$$\sum_{k=1}^{n} F(k)$$

é um polinômio de grau $p+1$ em *n*.

Demonstração

Seja $F(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_{p-1} n^{p-1} + a_p n^p$, um polinômio de grau *p*, onde *p* é um inteiro não negativo.

Temos:

$$\sum_{k=1}^{n} F(k) = F(1) + F(2) + F(3) + \cdots + F(n) =$$

$$\begin{aligned} = a_0 + a_1 1 + a_2 1^2 + a_3 1^3 + \cdots + a_{p-1} 1^{p-1} + a_p 1^p + a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + \cdots \\ + a_{p-1} 2^{p-1} + a_p 2^p + a_0 + a_1 3 + a_2 3^2 + a_3 3^3 + \cdots + a_{p-1} 3^{p-1} + a_p 3^p \\ + \cdots + a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 \ldots + a_{p-1} n^{p-1} + a_p n^p = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = n a_0 + (1 + 2 + 3 + \cdots + n) a_1 + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) a_2 \\ + (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) a_3 + \cdots \\ + (1^{p-1} + 2^{p-1} + 3^{p-1} + \cdots + n^{p-1}) a_{p-1} + (1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p) a_p. \end{aligned}$$

Mas, pelo teorema 1, $(1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p)$ é um polinômio de grau $p+1$ em *n*.

Portanto,

$$\sum_{k=1}^{n} F(k)$$

é um polinômio de grau $p+1$ em *n*.

Exemplo:

Podemos calcular a soma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k \cdot (k+3).$$

Solução:

Pelo corolário 1.1, temos que o valor de S_n é um polinômio do terceiro grau em *n*. Então

$$S_n = an^3 + bn^2 + cn + d.$$

Atribuindo a *n* os valores 1, 2, 3 e 4, obtemos as equações

$$\begin{cases} a+b+c+d=4 \\ 8a+\ 4b+2c+d=14 \\ 27a+9b+3c+d=32 \\ 64a+16b+4c+d=60 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema formado por essas equações, obtemos

$$a = \frac{1}{3}, b = 2, c = \frac{5}{3} \text{ e } d = 0.$$

Então,

$$S_n = \frac{1}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{5}{3}n = \frac{n^3 + 6n^2 + 5n}{3} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+5)}{3}.$$

Teorema 2: A sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética de ordem p $(p \geq 2)$, se, e somente se, a_n é um polinômio de grau *p* em *n*.

Demonstração

Faremos a prova, usando indução sobre p. Para $p = 2$, a prova pode ser vista na proposição 5.

Suponhamos a validade do teorema para todo $p \in \{2, 3, \dots, s\}$. Devemos provar a sua validade para $p = s + 1$. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética de ordem $s+1$, $b_n = \Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ é uma progressão aritmética de ordem *s*. Pela hipótese de indução, temos que b_n é um polinômio de grau *s* em *n*.

Portanto,

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = a_{n+1} - a_1$$

é, pelo corolário 1.1, um polinômio de grau $s+1$ em *n*.

Reciprocamente, suponhamos que a_n seja um polinômio de grau $s+1$ em n. Logo, Δa_n é um polinômio de grau s em n, conforme pode-se verificar facilmente. Pela hipótese de indução, $(\Delta a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética de ordem s, ou seja, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética de ordem $s+1$.

As progressões aritméticas e os números primos

Sabemos que existem progressões aritméticas cujos termos são números naturais muito grandes e todos primos. Em Arbieto (2007, p. 9) são destacados os primeiros resultados sobre progressões aritméticas e números primos. Veja também Green (2008, p. 482).

As mais extensas progressões aritméticas conhecidas atualmente formadas exclusivamente por números primos têm 26 termos.

Neste contexto, ressalta o Teorema de Dirichlet.

Teorema 3 (Dirichlet): Em uma progressão aritmética de números naturais, com primeiro termo e razão primos entre si, existem infinitos números primos.

A demonstração desse teorema usa a teoria analítica dos números e pode ser encontrada em Martinez (2011, p. 420). Não está apresentada aqui. No entanto, está registrado um caso particular na proposição seguinte.

Proposição 6: Na progressão aritmética 3, 7, 11, 15, $\ldots 4n+3 \ldots$ existem infinitos números primos.

Demonstração

A demonstração dessa proposição consiste em mostrar que existem infinitos números primos da forma $4n+3$.

Nota-se, inicialmente, que todo número primo ímpar é da forma $4n+1$ ou $4n+3$.

Observa-se, em seguida, que o conjunto $A = \{4n+1; n \in \mathbb{N}\}$ é fechado em relação à multiplicação usual. De fato, dados dois números naturais n e n', temos

$$(4n+1)\cdot(4n'+1) = 4(4nn'+n+n')+1.$$

Supõe-se agora, por absurdo, que haja apenas uma quantidade finita de números primos $3 < p_1 < \cdots < p_k$ da forma $4n+3$. Portanto, o número $a = 4(p_1 p_2 \ldots p_k) + 3$ não é divisível por nenhum dos números primos $3, p_1, \ldots, p_k$ e, consequentemente, sua decomposição em fatores primos só pode conter primos da forma $4n+1$. Logo, a é da forma $4n+1$, o que é uma contradição, pois a é da forma $4n+3$.

Portanto, existem infinitos números primos da forma $4n+3$.

2.1.2 Progressão geométrica

Definição: Uma progressão geométrica é uma sequência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao termo anterior multiplicado por uma constante. Essa constante é chamada razão da progressão.

Então, se a_n é o *n*-ésimo termo da progressão e q é a razão, temos que $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

Por exemplo, a sequência numérica $(1, 2, 4, 8, 16)$ é uma progressão geométrica de razão 2.

Note que $a_2 = a_1 \cdot q$, $a_3 = a_1 \cdot q^2$, $a_4 = a_1 \cdot q^3$. Isto sugere uma expressão para o termo geral de uma progressão geométrica.

Fórmula do termo geral de uma progressão geométrica

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão geométrica cuja razão é igual a q então o *n*-ésimo termo é dado por $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Provaremos a validade desta fórmula usando indução sobre *n*.

Para $n = 1$, temos $a_1 = a_1 \cdot q^{1-1} = a_1 \cdot q^0 = a_1$, o que é verdadeiro.

Suponhamos que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Mostraremos que $a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$. Temos $a_{n+1} = a_n \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^n$, como queríamos demonstrar.

Podemos generalizar a fórmula do termo geral escrevendo $a_n = a_k \cdot q^{n-k}$,

onde a_n e a_k são dois termos quaisquer da progressão.

Veja que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \leftrightarrow a_n = a_1 \cdot q^{k-1} \cdot q^{n-k}$, que é equivalente a

$$a_n = a_k \cdot q^{n-k}.$$

A demonstração desse resultado pode ser feita, de modo análogo ao que fizemos anteriormente, por indução sobre *k*.

Exemplo:

Determinação do número de termos da progressão geométrica $\left(81, 27, 9, \dots, \frac{1}{9}\right)$.

Solução:

$$\text{Temos que } a_1 = 81, q = \frac{27}{81} = \frac{1}{3} \text{ e } a_n = \frac{1}{9}.$$

Aplicando a fórmula do termo geral, obtemos a posição do último termo da progressão geométrica. Logo,

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \leftrightarrow \frac{1}{9} = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{6} \leftrightarrow n = 7.$$

Portanto, a progressão geométrica possui 7 termos.

Fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma progressão geométrica

A soma dos *n* primeiros termos de uma progressão geométrica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de razão $q \neq 1$, é dada por

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}.$$

Demonstração

Seja $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$ (1), a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Multiplicando ambos os membros da igualdade anterior por q, obtemos

$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_{n+1} \qquad (2)$$

Subtraindo, membro a membro, a equação (2) da equação (1), obtemos

$S_n - q \cdot S_n = a_1 - a_{n+1}$.

Isolando S_n, obtemos

$$S_n \cdot (1 - q) = a_1 - a_1 \cdot q^n \leftrightarrow S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}.$$

Observação 1: Em particular, quando a razão da progressão geométrica for igual a 1, todos os termos da progressão serão iguais. Neste caso, temos $S_n = n \cdot a_1$.

Exemplos:

1. Determinação da soma dos termos da progressão geométrica (5, 15, 45, ..., 3.645).

Solução:

$$\text{Temos } que\ a_1 = 5, q = \frac{15}{5} = 3\ e\ a_n = 3.645.$$

Para calcular o valor de n, usaremos a relação $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Substituindo os valores conhecidos, segue-se que

$$3.645 = 5 \cdot 3^{n-1} \leftrightarrow 729 = 3^{n-1} \leftrightarrow 3^6 = 3^{n-1} \leftrightarrow n = 7.$$

Aplicando, agora, a fórmula da soma dos termos, temos

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1-q^n)}{1-q} \leftrightarrow S_7 = \frac{5 \cdot (1 - 3^7)}{1 - 3} = 5.465.$$

2. Eduardo recebeu um e-mail dizendo "Ganhe dinheiro fácil", com a seguinte proposta: ele deveria ser vendedor de uma empresa e recrutar 10 novos vendedores (1º nível), sendo que cada um desses recrutaria mais 10 vendedores (2º nível), e assim sucessivamente. Ao atingir o 10º nível, Eduardo ganharia uma grande quantia em dinheiro. Sabendo que cada vendedor pode ser recrutado uma única vez e que a população mundial é menor que 7 bilhões, é possível que Eduardo ganhe esse dinheiro?

Solução:

Inicialmente, calculamos o número de vendedores recrutados nos primeiros níveis:

- 1º nível: 1x10 = 10 → 10 vendedores (subtotal $S_1 = 10$)
- 2º nível: 10x10 = 100 → 100 vendedores (subtotal $S_2 = 10 + 100 = 110$)
- 3º nível: 100x10 = 1000 → 1.000 vendedores (subtotal $S_3 = 1110$)

Note que a sequência a (10, 100, 1.000, ...) é uma progressão geométrica, tal que $a_1 = 10$ e $q = 10$.

No 10º nível, o total de vendedores recrutados é:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1-q^n)}{1-q} \leftrightarrow S_{10} = \frac{10 \cdot (1 - 10^{10})}{1 - 10} = 11.111.111.110.$$

Assim, no 10º nível, o total de vendedores é maior do que 11 bilhões.

Portanto, não é possível que Eduardo ganhe esse dinheiro, pois a quantidade de vendedores que devem ser recrutados é superior à população mundial.

Série geométrica convergente

Nas progressões geométricas nas quais $|q| < 1$, a soma dos n primeiros termos tem um limite finito quando $n \to \infty$. Tal soma (com infinitas parcelas) é chamada de série geométrica.

$$\text{Como } S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} \text{ e, sendo } |q| < 1, \text{segue} - \text{se que } \lim_{n \to \infty} q^n = 0, \text{e assim}$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1(1 - 0)}{1 - q} \text{ou } \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Exemplos:

1. Determinação do limite da soma $0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \cdots$ quando o número de parcelas é infinito.

Solução:

Primeiramente, observa-se que se trata da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita. Tal soma é igual a $\frac{0{,}3}{1-0{,}1} = \frac{1}{3}$. O resultado é intuitivo, pois somando um número muito grande de termos da progressão, encontraremos, aproximadamente, a dízima periódica

$$0{,}333 \ldots = \frac{1}{3}.$$

2. Determinação do limite da soma

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots.$$

Solução:

Como as parcelas formam, na ordem apresentada, uma série geométrica cuja razão é igual $\frac{1}{3}$, temos

$$S_n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

3. Determinação da fração geratriz da dízima 1,252525...

Solução:

Vamos resolver este exemplo utilizando uma série geométrica. Veja que

$$\begin{aligned} 1{,}252525\ldots &= 1 + 0{,}25 + 0{,}0025 + 0{,}000025 + \cdots \\ &= 1 + \frac{25}{100} + \frac{25}{10.000} + \frac{25}{1.000.000} + \cdots \end{aligned}$$

Como $\left(\frac{25}{100} + \frac{25}{10.000} + \frac{25}{1.000.000} + \cdots\right)$ é uma série geométrica cujas parcelas

são os termos de uma progressão geométrica com $a_1 = \frac{25}{100}$ e $q = \frac{\frac{25}{10.000}}{\frac{25}{100}} = \frac{1}{100}$,

temos que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{25}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{25}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{25}{99}.$$

Portanto,

$$1{,}252525\ldots = 1 + \frac{25}{100} + \frac{25}{10.000} + \frac{25}{1.000.000} + \cdots = 1 + \frac{25}{99} = \frac{124}{99}.$$

Progressão geométrica e função exponencial

Proposição 7: Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = b \cdot a^x$, com $b \neq 0$ e $1 \neq a > 0$ e, além disso, $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ é uma progressão aritmética, cuja razão é igual a *r*, então a sequência $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots)$ é uma progressão geométrica de razão a^r.

Demonstração

Seja $f; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = b \cdot a^x$, com $b \neq 0$ e $1 \neq a > 0$ e $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ uma progressão aritmética, de razão *r*.

Temos que

$$f(x_1) = b \cdot a^{x_1};\ f(x_2) = b \cdot a^{x_2};\ f(x_3) = b \cdot a^{x_3}; \ldots, f(x_n) = b \cdot a^{x_n}; \ldots$$

Segue, que

$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)} = \frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}} = a^{x_2 - x_1} = a^r$$

$$\frac{f(x_3)}{f(x_2)} = \frac{b \cdot a^{x_3}}{b \cdot a^{x_2}} = a^{x_3 - x_2} = a^r$$

$$\frac{f(x_4)}{f(x_3)} = \frac{b \cdot a^{x_4}}{b \cdot a^{x_3}} = a^{x_4 - x_3} = a^r$$

$$\vdots$$

$$\frac{f(x_n)}{f(x_{n-1})} = \frac{b \cdot a^{x_n}}{b \cdot a^{x_{n-1}}} = a^{x_n - x_{n-1}} = a^r$$

Provaremos a validade desse resultado usando indução sobre n.

Para $n = 2$, temos

$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)} = \frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}} = a^{x_2 - x_1} = a^r,$$

o que é verdadeiro.

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para os números naturais pertencentes ao conjunto $\{3,4, \dots, n\}$, com $n \in \mathbb{N}$. Assim, por hipótese, temos

$$\frac{f(x_n)}{f(x_{n-1})} = \frac{b \cdot a^{x_n}}{b \cdot a^{x_{n-1}}} = a^{x_n - x_{n-1}} = a^r.$$

Devemos provar a validade para $n + 1$.

Temos que

$$\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)} = \frac{b \cdot a^{x_{n+1}}}{b \cdot a^{x_n}} = \frac{b \cdot a^{x_n + r}}{b \cdot a^{x_{n-1} + r}} = a^{x_n - x_{n-1}}.$$

Mas, por hipótese,

$$a^{x_n - x_{n-1}} = \frac{f(x_n)}{f(x_{n-1})} = a^r.$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, podemos concluir que $\frac{f(x_n)}{f(x_{n-1})} = a^r$, para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$ e, consequentemente, que a sequência $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots)$ é uma progressão geométrica de razão a^r.

Exemplo:

Sejam a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 5 \cdot 3^x$ e a progressão aritmética (2, 6, 10, 14, 18, 22,...), de razão $r = 4$ temos que a sequência

$$(f(2), f(6), f(10), f(14), f(18), f(22), \dots),$$

que corresponde a $(5 \cdot 3^2, 5 \cdot 3^6, 5 \cdot 3^{10}, 5 \cdot 3^{14}, 5 \cdot 3^{18}, 5 \cdot 3^{22}, \ldots)$ é uma progressão geométrica de razão 3^4.

Progressão Aritmética e função logarítmica

Proposição 8: Se $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = b \cdot \log_a x$**,** com $b \neq 0$ e $1 \neq a > 0$ e, além disso, $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ é uma progressão geométrica, cuja razão é igual a q, então a sequência $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots)$ é uma progressão aritmética de razão $\log_a q^b$**.**

Demonstração

Seja $f; \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = b \cdot \log_a x$, com $b \neq 0$ e $1 \neq a > 0$ e $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ uma progressão geométrica, de razão q.

Temos que

$$f(x_1) = b \cdot \log_a x_1;\ f(x_2) = b \cdot \log_a x_2;\ f(x_3) = b \cdot \log_a x_3;\ \ldots;\ f(x_n) = b \cdot \log_a x_n$$

Segue, que

$$f(x_2) - f(x_1) = b \cdot \log_a x_2 - b \cdot \log_a x_1 = b \cdot \left[\log_a \left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right] = b \cdot \log_a q = \log_a q^b$$

$$f(x_3) - f(x_2) = b \cdot \log_a x_3 - b \cdot \log_a x_2 = b \cdot \left[\log_a \left(\frac{x_3}{x_2}\right)\right] = b \cdot \log_a q = \log_a q^b$$

$$f(x_4) - f(x_3) = b \cdot \log_a x_4 - b \cdot \log_a x_3 = b \cdot \left[\log_a \left(\frac{x_4}{x_3}\right)\right] = b \cdot \log_a q = \log_a q^b$$

$$\vdots$$

$$f(x_n) - f(x_{n-1}) = b \cdot \log_a x_n - b \cdot \log_a x_{n-1} = b \cdot \left[\log_a \left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)\right] = b \cdot \log_a q = \log_a q^b$$

Provaremos a validade desse resultado usando indução sobre n.

Para $n = 2$, temos

$$f(x_2) - f(x_1) = b \cdot \log_a x_2 - b \cdot \log_a x_1 = b \cdot \left[\log_a \left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right] = b \cdot \log_a q = \log_a q^b\,,$$

o que é verdadeiro.

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para os números naturais pertencentes ao conjunto $\{3,4,, \ldots, n\}$, com $n \in \mathbb{N}$. Assim, por hipótese, temos

$$f(x_n) - f(x_{n-1}) = b \cdot \log_a x_n - b \cdot \log_a x_{n-1} = b \cdot \left[\log_a \left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)\right] = b \cdot \log_a q = \log_a q^b$$

Devemos provar a validade para $n+1$.

Temos que

$$f(x_{n+1})-f(x_n)= b\cdot\log_a x_{n+1}-b\cdot\log_a x_n = b\cdot\left[\log_a\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)\right]=b\cdot\left[\log_a\left(\frac{x_nq}{x_{n-1}q}\right)\right]$$
$$=b\cdot\left[\log_a\left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)\right].$$

Mas, por hipótese,

$$b\cdot\left[\log_a\left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)\right]=f(x_n)-f(x_{n-1})=\log_a q^b\,.$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, podemos concluir que

$f(x_n)-f(x_{n-1})=\log_a q^b$, para todo $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ e, consequentemente, que a sequência $(f(x_1),f(x_2),f(x_3),\dots,f(x_n),\dots)$ é uma progressão aritmética de razão $\log_a q^b$**.**

Observação 2: Na proposição 8, se igualarmos as razões da progressão aritmética e da progressão geométrica, teremos:

$\log_a q^b = q \leftrightarrow a^q = q^b \leftrightarrow b=\log_q a^q$.

Substituindo esse valor de b na função $f(x)=b\log_a x$**,** obtemos:

$f(x)=b\cdot\log_a x=\log_q a^q\cdot\log_a x = q\cdot\log_q a\cdot\log_a x = q\cdot\log_q x=\log_q x^q$.

Conclui-se que, se na proposição 8 tivermos $f(x)=\log_q x^q$, então as duas progressões têm a mesma razão.

Exemplos:

1. Sejam a função $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=6\cdot\log_4 x$ e a progressão geométrica $(3,6,12,\dots)$, de razão $q=2$. De fato, temos que a sequência $(f(3),f(6),f(12),\dots)$ que corresponde a $(6\cdot\log_4 3\,,6\cdot\log_4 6\,,6\cdot\log_4 12\,,6\cdot\log_4 24\,,\dots)$, é uma progressão aritmética de razão $r=\log_4 2^6=3$.

2. Sejam a função $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\log_4 x^4$ e a progressão geométrica $(2,8,32,\dots)$, de razão $q=4$. De fato, temos que a sequência $(f(2),f(8),f(32),\dots)$ que corresponde a $(\log_4 2^4\,,\log_4 8^4\,,\log_4 32^4\,,\log_4 128^4\,,\dots)$, é uma progressão aritmética de razão $r=q=4$.

Problemas

1. Um dos investimentos mais utilizados atualmente é a caderneta de poupança. Por lei, os capitais aplicados na poupança são remunerados mensalmente a uma taxa de 0,5% + TR sobre o valor aplicado, em que a TR (Taxa Referencial) é uma taxa básica, controlada pelo Banco Central. Por exemplo, se uma pessoa investiu R$ 100,00, com índice do mês em 0,65%, após um mês será aplicada a seguinte correção:

$$100 \cdot 1{,}0065 = 100{,}65$$

Nesse caso, os R$ 100,00 renderam R$ 0,65 em 1 mês.

Supondo que o índice mensal seja fixo em 0,65%, qual será a quantia obtida ao final de dois anos por um capital de R$ 12.000,00 aplicado na poupança?

Solução:

Inicialmente calculamos a quantia obtida ao final do:

- 1º mês: $12.000 \cdot 1{,}0065 = 12.078{,}00$
- 2º mês: $12.078 \cdot 1{,}0065 = 12.156{,}507$
- 3º mês: $12.156{,}507 \cdot 1{,}0065 = 12.235{,}5243$

A sequência $(12.078;\ 12.156{,}507;\ 12.235{,}5242955;\ \dots)$ é uma progressão geométrica tal que $a_1 = 12.078$ e $q = 1{,}0065$. Desse modo, ao final do 24º mês, teremos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \leftrightarrow a_{24} = 12.078 \cdot 1{,}0065^{24-1} = 14.018{,}84$$

Portanto, a quantia obtida ao final de dois anos será, aproximadamente, R$ 14.018,84.

2. Calcular o valor da soma de *n* parcelas 1 + 11 + 111 + 1111 + ... + 111...11, considerando a última parcela com *n* algarismos iguais a 1.

Solução:

A *k*-ésima parcela da soma vale

$$1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1} = \frac{10^k - 1}{9}.$$

A soma é igual a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{10^k - 1}{9} = \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n} 10^k - \frac{n}{9} = \frac{10}{9} \cdot \left(\frac{10^n - 1}{9}\right) - \frac{n}{9} = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{81}.$$

3. Mostrar que o número 444...488...89, formado por n dígitos iguais a 4, $n-1$ dígitos iguais a 8 e um dígito igual a 9, é um quadrado perfeito. Determinar sua raiz quadrada.

Solução:

$$\begin{aligned}444\ldots488\ldots89 &= 9+8\cdot 10+8\cdot 10^2+8\cdot 10^3+\cdots 8\cdot 10^{n-1}+4\cdot 10^n+4\cdot 10^{n+1}\\ &+4\cdot 10^{n+2}+\cdots+4\cdot 10^{2n-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}444\ldots488\ldots89 &= 9+80\cdot\left(\frac{10^{n-1}-1}{10-1}\right)+4\cdot 10^n\cdot\left(\frac{10^n-1}{10-1}\right)\\ &=\frac{1}{9}\cdot\left(81+\frac{80\cdot 10^n}{10}-80+4\cdot 10^{2n}-4\cdot 10^n\right)\\ &=\frac{1}{9}\cdot(1+\ 8\cdot 10^n-4\cdot 10^n+4\cdot 10^{2n})=\frac{4\cdot 10^{2n}+4\cdot 10^n+1}{9}\\ &=\left(\frac{2\cdot 10^n+1}{3}\right)^2.\end{aligned}$$

Portanto, $444\ldots488\ldots89$ é um quadrado perfeito e sua raiz quadrada é dada por

$$\sqrt{444\ldots488\ldots89}=\sqrt{\left(\frac{2\cdot 10^n+1}{3}\right)^2}=\frac{2\cdot 10^n+1}{3}=666\ldots67\ (n\text{ dígitos}).$$

Agora, usaremos indução sobre n, para provar que, de fato,

$$\frac{2\cdot 10^n+1}{3}=666\ldots67\ (n\text{ dígitos}),$$

para todo $n\in\mathbb{N}$.

$$\text{Para } n=1,\text{temos }\frac{2\cdot 10^n+1}{3}=\frac{2\cdot 10^1+1}{3}=\frac{20+1}{3}=7\ (1\text{ dígito}),$$

mostrando que o resultado é válido.

$$\text{Suponhamos, agora, que}\frac{2\cdot 10^n+1}{3}=666\ldots67(n\text{ dígitos})\text{ , para um certo } n\in\mathbb{N}.$$

$$\text{Devemos provar que }\frac{2\cdot 10^{n+1}+1}{3}=666\ldots6\ (n+1\text{ dígitos})$$

Temos que

$$\frac{2\cdot 10^n+1}{3}=666\ldots67(n\text{ dígitos}).$$

Multiplicando por 10 os dois lados da igualdade, obtemos

$$\frac{2 \cdot 10^n \cdot 10 + 10}{3} = 666 \dots 67 \cdot 10 = 666 \dots 670 \ (n + 1 \text{ dígitos}),$$

que é equivalente a

$$\frac{2 \cdot 10^{n+1} + 10}{3} = 666 \dots 670 \ (n + 1 \text{ dígitos}),$$

que, por sua vez, é quivalente a

$$\frac{2 \cdot 10^{n+1} + 1}{3} + \frac{9}{3} = \frac{2 \cdot 10^{n+1} + 1}{3} + 3 = 666 \dots 670 \ (n + 1 \text{ dígitos}).$$

Logo,

$$\frac{2 \cdot 10^{n+1} + 1}{3} = 666 \dots 670 - 3 = 666 \dots 667 \ (n + 1 \text{ dígitos}).$$

Portanto, pelo princípio da indução matemática, podemos concluir que

$$\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3} = 666 \dots 67 \ (n \text{ dígitos}), \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

2.1.3 Progressão aritmético-geométrica

Definição: Uma progressão aritmético-geométrica é uma sequência de números reais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que a_1 é dado e, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $a_{n+1} = q \cdot a_n + r$, onde q e r são números reais dados, com $q \neq 1$, $q \neq 0$.

Note que se $r = 0$, então a sequência é uma progressão geométrica.

Exemplo:

Seja a progressão aritmético-geométrica em que $a_1 = 4$, $q = 2$ e $r = 3$. Temos, então, que:

$a_2 = 2 \cdot 4 + 3 = 11$

$a_3 = 2 \cdot 11 + 3 = 25$

$a_4 = 2 \cdot 25 + 3 = 53$

$a_5 = 2 \cdot 53 + 3 = 109$

$a_6 = 2 \cdot 109 + 3 = 221$

...

Logo, a progressão aritmético-geométrica é a sequência (4, 11, 25, 53, 109, 221, ...).

Fórmula do termo geral de uma progressão aritmético-geométrica

O termo geral de uma progressão aritmético-geométrica é dado por

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} + r \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Provaremos a validade dessa fórmula usando indução sobre *n*.

A igualdade é válida para $n = 1$, pois

$$a_1 = a_1 \cdot q^{1-1} + r \cdot \frac{q^{1-1} - 1}{q - 1} \leftrightarrow a_1 = a_1 \cdot q^0 + r \cdot \frac{1 - 1}{q - 1} \leftrightarrow a_1 = a_1,$$

o que é verdadeiro.

Suponhamos agora que

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} + r \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1},$$

para um certo $n \in \mathbb{N};\ n > 1$.

Devemos provar que

$$a_{n+1} = a_1 \cdot q^n + r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Temos que

$$a_{n+1} = a_n \cdot q + r = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q + r \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} \cdot q + r = a_1 \cdot q^n + r \cdot \frac{q^n - q}{q - 1} + r$$
$$= a_1 \cdot q^n + r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Pelo princípio da indução matemática, podemos concluir que

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} + r \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmético-geométrica

A soma dos *n* primeiros termo de uma progressão aritmético-geométrica,

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, é dada por

$$S_n = q \cdot r \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{(1-q)^2} - a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{1-q} + r \cdot \frac{n-1}{1-q},$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$.

Provaremos a validade desse resultado, usando indução sobre n.

O resultado é válido para $n = 1$, pois,

$$S_1 = q \cdot r \cdot \frac{q^{1-1} - 1}{(1-q)^2} - a_1 \cdot \frac{q^1 - 1}{1-q} + r \cdot \frac{1-1}{1-q} \leftrightarrow S_1 = -a_1 \cdot \left[-\frac{(1-q)}{1-q}\right] \leftrightarrow S_1 = a_1,$$

o que é verdadeiro.

Suponhamos, agora, que

$$S_n = q \cdot r \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{(1-q)^2} - a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{1-q} + r \cdot \frac{n-1}{1-q},$$

para um certo $n \in \mathbb{N}$.

Devemos provar que

$$S_{n+1} = q \cdot r \cdot \frac{q^n - 1}{(1-q)^2} - a_1 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{1-q} + r \cdot \frac{n}{1-q}$$

Temos :

$$\begin{aligned}
S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = {} & r \cdot \frac{q^n - q}{(1-q)^2} - a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{1-q} + r \cdot \frac{n-1}{1-q} + a_1 \cdot q^n + r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \\
= {} & r \cdot \frac{q^n - q}{(1-q)^2} - a_1 \cdot \left(\frac{q^n - 1}{1-q} - q^n\right) + r \cdot \frac{n}{1-q} - r \cdot \frac{1}{1-q} + r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \\
= {} & r \cdot \frac{q^n - q}{(1-q)^2} - a_1 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{1-q} + r \cdot \frac{n}{1-q} - r \cdot \frac{1}{1-q} + r \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \\
= {} & r \cdot \frac{q^n - q}{(1-q)^2} - a_1 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{1-q} + r \cdot \frac{n}{1-q} - r \cdot \frac{q^n}{1-q} \\
= {} & r \cdot \frac{q^{n+1} - q}{(1-q)^2} - a_1 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{1-q} + r \cdot \frac{n}{1-q} \\
= {} & q \cdot r \cdot \frac{q^n - 1}{(1-q)^2} - a_1 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{1-q} + r \cdot \frac{n}{1-q}.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio da indução matemática, podemos concluir que

$$S_n = q \cdot r \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{(1-q)^2} - a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{1-q} + r \cdot \frac{n-1}{1-q},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.2 SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

As sequências de números reais são definidas e exemplificadas nessa seção. Daremos alguns exemplos, definiremos sequências convergentes e faremos algumas considerações sobre sequência de Cauchy. Em seguida, definimos sequências recorrentes lineares.

2.2.1 Definição

Uma sequência de números reais é uma função $\boldsymbol{x}: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, onde $\mathbb{N} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \dots\}$ é o conjunto dos números naturais e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. O valor de *x* no número *n*, *x*(*n*), é o *n*-ésimo termo da sequência e será denotado por $\boldsymbol{x_n}$ Para designar uma sequência usaremos a notação $(\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente (x_n)

A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para o número real a quando qualquer intervalo aberto com centro no número a contém todos os termos de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, exceto um número finito deles. Formalmente podemos definir: A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para o número real a se, dado $\varepsilon > 0$ existe um número natural *k* tal que se $n > k$ então $|x_n - a| < \varepsilon$.

Exemplos:

$$\text{(i) usando a definição, podemos verificar claramente sequência } x_n = \frac{1}{n} \text{ converge para 0.}$$

$$\text{De fato, dado } \varepsilon > 0, \text{a fim de que tenhamos } |x_n - a| < \varepsilon \text{ basta que } n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

$$\text{Assim, fixado } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n_0 > \frac{1}{\varepsilon}, \text{temos que } n > n_0 \to n > \frac{1}{\varepsilon} \to \frac{1}{n} < \varepsilon \to |x_n - 0| < \varepsilon$$

É possível verificar que:

(ii) A sequência $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ converge!

(iii) A sequência $x_n = 1 + (-1)^n$ não converge.

(iv) A sequência $x_n = 2n - 1, n \in \mathbb{N}$, que é a sequência dos números ímpares, diverge.

O leitor poderá aprofundar o estudo sobre sequências convergentes em Neto (2015, p. 76).

Na observação abaixo, estão registradas algumas propriedades dos números reais que serão usadas posteriormente.

Observação 3. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente quando existe um número real M tal que $x \leq M$ para todo $x \in X$. O conjunto dos números reais possui a seguinte propriedade: Dado $X \subset \mathbb{R}$, não vazio e limitado superiormente, existe um número real a tal que

i) $x \leq a$ para todo $x \in X$ e

ii) Para $\varepsilon > 0$ dado existe $b \in X$ tal que $a - \varepsilon < b$. Nestas condições o número real a é chamado de supremo de X. Podemos portanto afirmar que todo subconjunto de $\mathbb{R}$, não vazio e limitado superiormente, possui um supremo em $\mathbb{R}$. Por isto o conjunto dos números reais com as operações usuais e com a relação de ordem é dito ser um corpo ordenado completo. Decorre da completeza de $\mathbb{R}$ que se uma sequência de números reais $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumpre a condição: dado $\varepsilon > 0$ existe $P \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq P$ então $|x_m - x_n| < \varepsilon$, então a sequência (x_n) é convergente. Tais sequências são chamadas de sequências de Cauchy. Temos então que toda sequência de Cauchy de números reais converge em $\mathbb{R}$.

O leitor poderá aprofundar o estudo sobre sequências de Cauchy em Neto (2015, p. 86).

Algumas sequências gozam da propriedade de que cada termo é determinado em função dos *k* termos anteriores. Tais sequências são chamadas de sequências recorrentes de ordem *k*. Em particular temos as sequências recorrentes lineares, que definiremos agora.

Definição: A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita sequência recorrente linear de ordem *k* (onde *k* é um número inteiro positivo) se existem constantes (reais ou complexas) r_1, r_2, ..., r_k tais que $x_{n+k} = \sum_{j=1}^{k} r_j\, x_{n+k-j} = r_1 x_{n+k-1} + r_2 x_{n+k-2} + \cdots + r_k x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. (1)

2.2.2 Exemplos

(i) Seja a sequência $(\boldsymbol{x_n})$, definida por $\boldsymbol{x_n = 3x_{n-1} + 2x_{n-2}}$. Esta sequência é determinada pelos seus dois primeiros termos. Trata-se de uma sequência recorrente linear de segunda ordem.

(ii) Se $(\boldsymbol{x_n})$ é uma progressão aritmética, temos que $\boldsymbol{x_{n+1} - x_n = r}$.

Então $x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+1} - x_n$ e assim $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$. Logo uma progressão aritmética é uma sequência recorrente linear de segunda ordem.

(iii) Uma progressão geométrica é uma sequência recorrente linear de primeira ordem. Veja que se (x_n) é uma progressão geométrica de razão *q* então $x_{n+1} = qx_n$.

2.3 EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA LINEARES

2.3.1 Definição: A equação (1) é chamada equação de recorrência linear.

Observação 4. Dada uma sequência (x_n), algumas vezes estudamos a sequência obtida pela soma de seus *n* primeiros termos:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Temos que, se (x_n) é uma sequência recorrente linear, (s_n) também o será.

De fato, sendo $s_{n+1} - s_n = x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e se

$$x_{n+k} = \sum_{j=1}^{k} r_j x_{n+k-j},$$

temos

$$x_{n+k+1} = \sum_{j=1}^{k} r_j \cdot x_{n+k+1-j} = \sum_{j=1}^{k} r_j\left(s_{n+k+1-j} - s_{n+k-j}\right).$$

Logo,

$$s_{n+k+1} - s_{n+k} = x_{n+k+1} = \sum_{j=1}^{k} r_j(s_{n+k+1-j} - s_{n+k-j}),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Então

$$s_{n+k+1} = s_{n+k} + x_{n+k+1} = s_{n+k} + \sum_{j=1}^{k} r_j(s_{n+k+1-j} - s_{n+k-j}),$$

Donde

$$s_{n+k+1} = (1 + r_1)s_{n+k} - r_1 s_{n+k-1} + \sum_{j=1}^{k-1} r_{j+1}(s_{n+k-j} - s_{n+k-j-1}) = \sum_{j=1}^{k+1} d_i s_{n+k+1-i},$$

onde $d_1 = 1 + r_1$, $d_i = r_i - r_{i-1}$ para $2 \leq i \leq k$ e $d_{k+1} = -r_k$, para

todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto (S_n) é uma sequência recorrente linear de ordem $k + 1$.

2.3.2 Resolução de uma equação de recorrência linear

Resolver uma equação de recorrência significa procurar uma forma de calcular qualquer termo dessa equação dependendo apenas do valor de n e não precisando calcular todos os antecessores até o valor que se deseja descobrir.

2.3.3 Recorrências Lineares de Primeira Ordem

As recorrências que expressam x_{n+1} em função de x_n são chamadas recorrências de primeira ordem. Elas são ditas lineares quando essa função for polinomial do primeiro grau.

Exemplo:

As recorrências $x_{n+1} = 4x_n + n^2$ e $x_{n+1} = 3nx_n$ são lineares de primeira ordem. A segunda é homogênea, pois não possui termo independente. Por outro lado, a recorrência $x_{n+1} = {x_n}^3$ não é linear, embora seja homogênea.

Resolução de uma recorrência linear homogênea de primeira ordem

Exemplo:

1. Resolver a equação de recorrência $x_{n+1} = x_n + k$, onde k é uma constante e o primeiro termo x_1 é igual a m.

Solução:

Na recorrência dada fazendo $n = 1, 2, 3, \dots, n-1$, e somando membro a membro as $n-1$ igualdades,

$$x_2 = x_1 + k$$

$$x_3 = x_2 + k$$

$$x_4 = x_3 + k$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_{n-1} + k$$

Obtemos

$$x_n = x_1 + k \cdot (n-1)$$

Logo,

$$x_n = m + k \cdot (n-1).$$

2. Resolver a equação de recorrência $x_{n+1} = k \cdot x_n$, onde k é uma constante não nula.

Solução:

Na recorrência dada, fazendo $n = 1, 2, 3, \dots, n-1$, obtemos:

$$x_2 = k \cdot x_1$$

$$x_3 = k \cdot x_2$$

$$x_4 = k \cdot x_3$$

$$\vdots$$

$$x_n = k \cdot x_{n-1}$$

Multiplicando, membro a membro, as igualdades, obtemos $x_n = k^{n-1} \cdot x_1$
Logo, para cada valor de x_1 temos uma solução.

3. Resolver a recorrência $x_{n+1} = 2 \cdot n \cdot x_n$, com $x_1 = 2$.

Solução:

Na recorrência dada, fazendo $n = 1, 2, 3, \dots, n-1$, obtemos:

$$x_2 = 2 \cdot 1 \cdot x_1$$

$$x_3 = 2 \cdot 2 \cdot x_2$$

$$x_4 = 2 \cdot 3 \cdot x_3$$

$$\vdots$$

$$x_n = 2 \cdot (n-1) \cdot x_{n-1}$$

Multiplicando, membro a membro, as igualdades, segue-se que

$$x_n = 2^{n-1} \cdot (n-1)!\, x_1.$$

Como $x_1 = 2$, temos

$$x_n = 2^n \cdot (n-1)!.$$

Resolução de uma recorrência linear não homogênea de primeira ordem

Recorrências da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$

Na recorrência dada, fazendo $n = 1, 2, 3, \dots, n,$ e somando, membro a membro, as $n-1$ igualdades,

$$x_2 = x_1 + f(1)$$

$$x_3 = x_2 + f(2)$$

$$x_4 = x_3 + f(3)$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_{n-1} + f(n-1)$$

Teremos

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Apresentação de alguns exemplos:

1. Resolver $x_{n+1} = x_n + 3^n$, $x_1 = 2$.

Solução:

Temos

$$x_2 = x_1 + 3^1$$

$$x_3 = x_2 + 3^2$$

$$x_4 = x_3 + 3^3$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_{n-1} + 3^{n-1}.$$

Somando, membro a membro, segue-se que

$$x_n = x_1 + (3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1}) = 2 + \frac{3^n - 3}{2} = \frac{1+3^n}{2}.$$

2. Resolver $x_{n+1} = x_n + n, \quad x_1 = 0.$

Solução:

Temos

$$x_2 = x_1 + 1$$

$$x_3 = x_2 + 2$$

$$x_4 = x_3 + 3$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_{n-1} + (n-1).$$

Somando membro a membro, obtemos

$$x_n = x_1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$$

$$= 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

O resultado a seguir mostra que qualquer recorrência linear não homogênea, de primeira ordem pode ser transformada em uma recorrência da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$.

Teorema 4: Se a_n é uma solução não nula da recorrência $x_{n+1} = g(n) \cdot x_n$, então a substituição $x_n = a_n \cdot y_n$ transforma a recorrência

$$x_{n+1} = g(n) \cdot x_n + h(n) \text{ em } y_{n+1} = y_n + h(n) \cdot [g(n) \cdot a_n]^{-1}.$$

Demonstração:

A substituição $x_n = a_n \cdot y_n$ transforma $x_{n+1} = g(n) \cdot x_n + h(n)$ em

$$a_{n+1} \cdot y_{n+1} = g(n) \cdot a_n \cdot y_n + h(n).$$

Mas $a_{n+1} = g(n) \cdot a_n$, pois a_n é solução de $x_{n+1} = g(n) \cdot x_n$.

Portanto, a equação se transforma em

$g(n) \cdot a_n \cdot y_{n+1} = g(n) \cdot a_n \cdot y_n + h(n)$,

ou seja,

$$y_{n+1} = y_n + h(n) \cdot [g(n) \cdot a_n]^{-1}.$$

Apresentação de alguns exemplos:

1. Resolver a recorrência $x_{n+1} = 2x_n + 3$, $x_1 = 4$.

Solução:

Uma solução não nula de $x_{n+1} = 2x_n$ é, por exemplo, $x_n = 2^{n-1}$.

Vamos fazer a substituição $x_n = 2^{n-1} \cdot y_n$. Segue que

$2^n \cdot y_{n+1} = 2^n \cdot y_n + 3$, que é equivalente a

$$y_{n+1} = y_n + \frac{3}{2^n}.$$

Temos, então

$$y_2 = y_1 + \frac{3}{2^1}$$

$$y_3 = y_2 + \frac{3}{2^2}$$

$$y_4 = y_3 + \frac{3}{2^3}$$

$$\vdots$$

$$y_n = y_{n-1} + \frac{3}{2^{n-1}}.$$

Somando, obtemos

$$y_n = y_1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) =$$

$$= y_1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right] =$$

$$= y_1 + \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left[\frac{2^{1-n} - 1}{-2^{-1}}\right] =$$

$$= y_1 - 3 \cdot 2^{1-n} + 3.$$

Como $x_n = 2^{n-1} \cdot y_n$ e $x_1 = 4$, temos $y_1 = 4$ e $y_n = 7 - 3 \cdot 2^{1-n}$.

Portanto,

$$x_n = 7 \cdot 2^{n-1} - 3.$$

2. Resolver $x_{n+1} = 3x_n + 3^n$, $x_1 = 4$.

Solução:

Temos que uma solução não nula de $x_{n+1} = 3 \cdot x_n$ é, por exemplo, $x_n = 3^{n-1}$.

Substituindo x_n por $3^{n-1} \cdot y_n$ na equação original, obtemos

$3^n \cdot y_{n+1} = 3^n \cdot y_n + 3^n$, ou seja, $y_{n+1} = y_n + 1$, que é equivalente a

$y_n = y_1 + (n-1) \cdot 1$.

Como $x_n = 3^{n-1} \cdot y_n$ e $x_1 = 4$, temos $y_1 = 4$ e $y_n = n + 3$.

Portanto,

$$x_n = (n+3) \cdot 3^{n-1}.$$

2.3.4 Recorrências Lineares de Segunda Ordem

Vamos considerar as recorrências lineares de segunda ordem homogêneas, com coeficientes constantes. Essas recorrências são da forma $x_{n+2} + p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n = 0,$ (3).

Com $q \neq 0$, pois se $q = 0$, a recorrência seria de primeira ordem.

Supondo que a equação (3) admita uma solução do tipo $x_n = r^n$, onde r é um parâmetro não nulo. Substituindo em (3) , obtemos $r^{n+2} + p \cdot r^{n+1} + q \cdot r^n = 0.$ Dividindo por r^n, temos

$$r^2 + p \cdot r + q = 0$$

que é a equação característica associada à equação (3).
Apresentamos dois teoremas que nos mostram como encontrar a solução da equação (3).

Teorema 5: Se as raízes de $r^2 + p \cdot r + q = 0$ são r_1 e r_2, então $a_n = t_1 \cdot {r_1}^n + t_2 \cdot {r_2}^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes t_1 e t_2.

Demonstração.

Substituindo $a_n = t_1 \cdot {r_1}^n + t_2 \cdot {r_2}^n$ na recorrência $x_{n+2} + p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n = 0$, obtemos

$t_1 \cdot {r_1}^{n+2} + t_2 \cdot {r_2}^{n+2} + p \cdot t_1 \cdot {r_1}^{n+1} + p \cdot t_2 \cdot {r_2}^{n+1} + q \cdot t_1 \cdot {r_1}^n + q \cdot t_2 \cdot {r_2}^n =$ $t_1 \cdot {r_1}^n \cdot ({r_1}^2 + p \cdot r_1 + q) + t_2 \cdot {r_2}^n \cdot ({r_2}^2 + p \cdot r_2 + q) = t_1 \cdot {r_1}^n \cdot 0 + t_2 \cdot {r_2}^n \cdot 0 = 0.$

Exemplo:

Para a equação $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 4x_n = 0$, a equação característica é $r^2 - 5r + 4 = 0$, que tem como raízes $r_1 = 1$ e $r_2 = 4$. Pelo Teorema 5, temos que todas as sequências da forma $a_n = t_1 \cdot 1^n + t_2 \cdot 4^n$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, são soluções da recorrência.

Teorema 6: Se as raízes de $r^2 + p \cdot r + q = 0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n = 0$ são da forma $a_n = t_1 \cdot {r_1}^n + t_2 \cdot {r_2}^n$, onde t_1 e t_2 são constantes reais.

Demonstração

Vamos considerar x_n uma solução qualquer de

$$x_{n+2} + p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n = 0 \qquad (4).$$

É sempre possível escolher constantes t_1 e t_2 que sejam soluções do sistema

$$\begin{cases} t_1 \cdot r_1 + t_2 \cdot r_2 = x_1 \\ t_1 \cdot {r_1}^2 + t_2 \cdot {r_2}^2 = x_2 \end{cases}, \quad \text{pois det} \begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ {r_1}^2 & {r_2}^2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Este sistema tem sempre solução única, dada por $t_1 = \frac{{r_2}^2 \cdot x_1 - r_2 \cdot x_2}{r_1 \cdot r_2 \cdot (r_2 - r_1)}$ e $t_2 = \frac{r_1 \cdot x_2 - {r_1}^2 \cdot x_1}{r_1 \cdot r_2 \cdot (r_2 - r_1)}$.

Isso é possível, pois $r_1 \neq 0, r_2 \neq 0 \; e \; r_1 \neq r_2$.

Vamos provar que $a_n = t_1 \cdot {r_1}^n + t_2 \cdot {r_2}^n$ para todo n natural. Faremos isso usando indução sobre *n*.

Considerando o teorema 5, a afirmativa vale para $n = 1$ e $n = 2$.

Suponhamos que a afirmativa vale para os números naturais menores do que ou iguais a $n + 1$. Mostraremos a validade para $n + 2$. Substituindo x_n e x_{n+1} em (4), segue-se que

$$x_{n+2} + p \cdot (t_1 \cdot {r_1}^{n+1} + t_2 \cdot {r_2}^{n+1}) + q \cdot (t_1 \cdot {r_1}^n + t_2 \cdot {r_2}^n) = 0.$$

Logo,

$$x_{n+2} = -p \cdot (t_1 \cdot {r_1}^{n+1} + t_2 \cdot {r_2}^{n+1}) - q \cdot (t_1 \cdot {r_1}^n + t_2 \cdot {r_2}^n) =$$

$$-t_1 \cdot {r_1}^n \cdot (p \cdot r_1 + q) - t_2 \cdot {r_2}^n \cdot (p \cdot r_2 + q).$$

Somando e subtraindo $t_1{r_1}^{n+2} + t_2{r_2}^{n+2}$, obtemos

$$x_{n+2} = -t_1 \cdot {r_1}^n \cdot ({r_1}^2 + p \cdot r_1 + q) - t_2 \cdot {r_2}^n \cdot ({r_2}^2 + p \cdot r_2 + q) + t_1 \cdot {r_1}^{n+2} + t_2 \cdot {r_2}^{n+2}.$$

Mas as expressões entre parênteses, por hipótese, são nulas.

Logo,

$$x_{n+2} = t_1 \cdot {r_1}^{n+2} + t_2 \cdot {r_2}^{n+2}.$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, podemos concluir que todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n = 0$ são soluções da forma

$$a_n = t_1 \cdot {r_1}^n + t_2 \cdot {r_2}^n,$$

onde t_1 e t_2 são constantes reais.

Alguns exemplos:

1. Resolver $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 4x_n = 0$. (5)

Solução:

A equação característica $r^2 - 5r + 4 = 0$ tem como raízes 1 e 4. Pelo teorema 6, as soluções da recorrência são as sequências da forma $x_n = t_1 \cdot 1^n + t_2 \cdot 4^n$, onde t_1 e t_2 são constantes arbitrárias.

É importante notar que para os infinitos valores distintos dos pares (t_1, t_2), temos infinitas soluções para a recorrência. Logo, para obter uma solução particular, não basta dar a lei de recorrência. É preciso também fornecer os dois primeiros termos.

Assim, considerando a recorrência (5), se tivermos $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$, podemos encontrar os valores de t_1 e t_2, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} t_1 \cdot 1^1 + t_2 \cdot 4^1 = 2 \\ t_1 \cdot 1^2 + t_2 \cdot 4^2 = 3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} t_1 + 4t_2 = 2 \\ t_1 + 16t_2 = 3 \end{cases}.$$

Resolvendo este sistema, encontramos $t_1 = \frac{5}{3}$ e $t_2 = \frac{1}{12}$.

Portanto, a solução da recorrência $\begin{cases} x_1 = 2, x_2 = 3 \\ x_{n+2} = 5x_{n+1} - 4x_n, n \geq 3 \end{cases}$, é

$$x_n = \frac{5}{3} \cdot 1^n + \frac{1}{12} \cdot 4^n.$$

Quando a equação característica tiver raízes complexas, r_1 e r_2, a solução

$$a_n = t_1 \cdot {r_1}^n + t_2 \cdot {r_2}^n$$

pode ser escrita colocando r_1 e r_2 na forma trigonométrica. Ou seja,

$$r_1 = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta) \text{ e } r_2 = \rho \cdot (\cos\theta - i \cdot \sin\theta).$$

Assim, temos

$${r_1}^n = \rho^n \cdot (\cos n\theta + i \cdot \sin n\theta) \text{ e } {r_2}^n = \rho^n \cdot (\cos n\theta - i \cdot \sin n\theta).$$

Substituindo essas formas em $a_n = t_1 \cdot {r_1}^n + t_2 \cdot {r_2}^n$, segue-se que

$$a_n = t_1 \cdot \rho^n \cdot (\cos n\theta + i \cdot \sin n\theta) + t_2 \cdot \rho^n (\cos n\theta - i \cdot \sin n\theta) =$$

$$= \rho^n \cdot [(t_1 + t_2) \cdot \cos n\theta + i \cdot (t_1 - t_2) \cdot \sin n\theta],$$

onde $t_1 + t_2$ e $i(t_1 - t_2)$ são novas constantes arbitrárias. Fazendo $t_1 + t_2 = {t'}_1$ e $i \cdot (t_1 - t_2) = {t'}_2$, obtemos

$$a_n = \rho^n \cdot ({t'}_1 \cdot \cos n\theta + {t'}_2 \cdot \sin n\theta).$$

2. Resolver a recorrência $x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0$.

Solução:

A recorrência $x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0$ tem equação característica $r^2 - r + 1 = 0$, que tem como raízes

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \text{ e } x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Escrevendo-as na forma trigonométrica, temos que x_1 e x_2 são números complexos de módulo $\rho = 1$ e argumento principal $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$. Logo, temos que

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3} \text{ e } x_2 = \cos\frac{\pi}{3} - i \cdot \sin\frac{\pi}{3}.$$

Portanto, a solução da recorrência é

$$x_n = \rho^n \cdot (t_1 \cdot \cos n\theta + t_2 \cdot \sin n\theta) = t_1 \cdot \cos\frac{n\pi}{3} + t_2 \cdot \sin\frac{n\pi}{3},$$

onde t_1 e t_2 são constantes arbitrárias.

Teorema 7: Se as raízes de $r^2 + p \cdot r + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então,

$$a_n = t_1 \cdot r^n + t_2 \cdot n \cdot r^n$$

é solução da recorrência

$$x_{n+2} + p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n = 0,$$

quaisquer que sejam os valores das constantes t_1 e t_2.

Demonstração

Se as raízes são iguais, então $r = -\frac{p}{2}$.

Substituindo $a_n = t_1 \cdot r^n + t_2 \cdot n \cdot r^n$ na recorrência

$$x_{n+2} + p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n = 0,$$

obtemos

$$t_1 \cdot r^{n+2} + t_2 \cdot (n+2) \cdot r^{n+2} + p \cdot t_1 \cdot r^{n+1} + p \cdot t_2 \cdot (n+1) \cdot r^{n+1} + q \cdot t_1 \cdot r^n +$$

$$q \cdot t_2 \cdot n \cdot r^n =$$

$$t_1 \cdot r^n \cdot (r^2 + p \cdot r + q) + t_2 \cdot n \cdot r^n \cdot (r^2 + p \cdot r + q) + t_2 \cdot r^n \cdot r \cdot (2r + p) =$$

$$t_1 \cdot r^n \cdot 0 + t_2 \cdot n \cdot r^n \cdot 0 + t_2 \cdot r^n \cdot r \cdot 0 = 0.$$

Portanto, $a_n = t_1 \cdot r^n + t_2 \cdot n \cdot r^n$ é solução da recorrência.

Exemplo:

Seja a equação $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0$. Sua equação característica é $r^2 - 6r + 9 = 0$, que tem como raízes $r_1 = r_2 = 3$. Pelo Teorema 7, todas as sequências da forma

$$a_n = t_1 \cdot 3^n + t_2 \cdot n \cdot 3^n,$$

são soluções da recorrência.

Teorema 8: Se as raízes de $r^2 + p \cdot r + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então, todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n = 0$ são da forma $a_n = t_1 \cdot r^n + t_2 \cdot n \cdot r^n$, t_1 e t_2 constantes.

Demonstração

Vamos considerar x_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n = 0$. (5)
É sempre possível escolher constantes t_1 e t_2 que sejam soluções do sistema

$$\begin{cases} t_1 \cdot r + \ t_2 \cdot r = x_1 \\ t_1 \cdot r^2 + t_2 \cdot 2 \cdot r^2 = x_2 \end{cases}$$

Este sistema tem sempre solução única, dada por

$$t_1 = \frac{2 \cdot r \cdot x_1 - x_2}{r^2} \text{ e } t_2 = \frac{x_2 - r \cdot x_1}{r^2}.$$

Isso é possível, pois $r \neq 0$.

Vamos provar que $x_n = t_1 \cdot r^n + t_2 \cdot n \cdot r^n$ para todo *n* natural. Faremos isso usando indução sobre *n*.

A afirmativa vale para $n = 1$ e $n = 2$, já que t_1 e t_2 foram escolhidos de modo que isto ocorra.

Suponhamos que a afirmativa vale para os números naturais menores do que ou iguais a $n + 1$. Mostraremos a validade para $n + 2$. Substituindo x_n e x_{n+1} em (5), segue-se que

$$x_{n+2} + p \cdot (t_1 \cdot r^{n+1} + t_2 \cdot (n+1) \cdot r^{n+1}) + q \cdot (t_1 \cdot r^n + t_2 \cdot n \cdot r^n) = 0.$$

Logo,

$$x_{n+2} = -p \cdot (t_1 \cdot r^{n+1} + t_2 \cdot (n+1) \cdot r^{n+1}) - q \cdot (t_1 \cdot r^n + t_2 \cdot n \cdot r^n)$$

$$= -t_1 \cdot r^n \cdot (p \cdot r + q) - t_2 \cdot n \cdot r^n \cdot (p \cdot r + q) - p \cdot t_2 \cdot r^{n+1}.$$

Somando e subtraindo $t_1 \cdot r^{n+2} + t_2 \cdot (n+2) \cdot r^{n+2}$, obtemos

$$x_{n+2} = -t_1 \cdot r^n \cdot (r^2 + p \cdot r + q) - t_2 \cdot n \cdot r^n \cdot (r^2 + p \cdot r + q) -$$
$$p \cdot t_2 \cdot r^{n+1} - t_2 \cdot 2 \cdot r^{n+2} + t_1 \cdot r^{n+2} + t_2 \cdot (n+2) \cdot r^{n+2}.$$

Mas as expressões entre parênteses, por hipótese, são nulas.

Portanto,

$$
\begin{aligned}
x_{n+2} &= t_1 \cdot r^{n+2} + t_2 \cdot (n+2) \cdot r^{n+2} - p \cdot t_2 \cdot r^{n+1} - t_2 \cdot 2 \cdot r^{n+2} \\
&= t_1 \cdot r^{n+2} + t_2 \cdot (n+2) \cdot r^{n+2} - t_2 \cdot r^{n+1} \cdot (p + 2r) \\
&= t_1 \cdot r^{n+2} + t_2 \cdot (n+2) \cdot r^{n+2} - t_2 \cdot r^{n+1} \cdot \left(p + 2 \cdot \left(-\frac{p}{2}\right)\right) \\
&= t_1 \cdot r^{n+2} + t_2 \cdot (n+2) \cdot r^{n+2} - t_2 \cdot r^{n+1} \cdot 0
\end{aligned}
$$

$= t_1 \cdot r^{n+2} + t_2 \cdot (n+2) \cdot r^{n+2}$, completando a prova por indução.

Exemplo:

Resolver a recorrência $\begin{cases} x_1 = 4, x_2 = 5 \\ x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0 \end{cases}$

Solução:

A recorrência $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$ tem equação característica $r^2 - 2r + 1 = 0$, a qual possui raízes $r_1 = r_2 = 1$.

Logo,

$$x_n = t_1 \cdot 1^n + t_2 \cdot n \cdot 1^n = t_1 + t_2 \cdot n.$$

Para calcular t_1 e t_2, substituímos n, respectivamente, por 1 e 2, obtendo o sistema

$$\begin{cases} t_1 + t_2 \cdot 1 = x_1 \\ t_1 + t_2 \cdot 2 = x_2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = 4 \\ t_1 + 2t_2 = 5 \end{cases}.$$

Resolvendo esse sistema, encontramos $t_1 = 3$ e $t_2 = 1$.

Portanto, a solução da recorrência é $x_n = 3 + n$.

Resolução de uma recorrência linear não homogênea de segunda ordem

Teorema 9: Se a_n é uma solução da equação

$$x_{n+2} + p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n = f(n), \tag{7}$$

então, a substituição $x_n = a_n + y_n$ transforma a equação em

$$y_{n+2} + p \cdot y_{n+1} + q \cdot y_n = 0.$$

Demonstração

Substituindo x_n por $a_n + y_n$ na equação (7), obtemos

$$(a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n) + (y_{n+2} + p \cdot y_{n+1} + q \cdot y_n) = f(n).$$

Como $x_n = a_n$ é solução da equação original, temos que $a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = f(n)$.

Portanto,

$$y_{n+2} + p \cdot y_{n+1} + q \cdot y_n = 0,$$

como queríamos demonstrar.

Pelo teorema que acabamos de demonstrar, a solução de uma recorrência não homogênea de segunda ordem é constituída de duas etapas: a solução da equação homogênea e uma solução particular.

Exemplo:

Resolver a recorrência $x_{n+2} - 7x_{n+1} + 12x_n = 2n + 2^n$.

Solução:

A equação homogênea é $r^2 - 7r + 12 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 3$ e $r_2 = 4$. Assim, a solução da homogênea, isto é, de $x_{n+2} - 7x_{n+1} + 12x_n = 0$, é

$$h_n = t_1 \cdot 3^n + t_2 \cdot 4^n.$$

Tentaremos, agora, obter uma solução particular, t_n, da recorrência $x_{n+2} - 7x_{n+1} + 12x_n = 2n + 2^n$.

Assim, se substituirmos t_n em $x_{n+2} - 7x_{n+1} + 12x_n$, devemos encontrar $2n + 2^n$.

É razoável supor que t_n seja a soma de um polinômio do primeiro grau com uma exponencial de base 2.

Vamos tentar $t_n = A \cdot n + B + C \cdot 2^n$. Substituindo em

$$x_{n+2} - 7x_{n+1} + 12x_n = 2n + 2^n,$$

segue-se que

$$t_{n+2} - 7t_{n+1} + 12t_n = 2n + 2^n$$

$$A \cdot (n+2) + B + C \cdot 2^{n+2} - 7 \cdot (A \cdot (n+1) + B + C \cdot 2^{n+1}) + 12 \cdot (A \cdot n + B + C \cdot 2^n) = 2n + 2^n$$

$$A \cdot n + 2 \cdot A + B + 4 \cdot C \cdot 2^n - 7 \cdot (A \cdot n + A + B + 2 \cdot C \cdot 2^n) + 12 \cdot A \cdot n + 12 \cdot B + 12 \cdot C \cdot 2^n = 2n + 2^n$$

$$6 \cdot A \cdot n + (-5 \cdot A + 6 \cdot B) + 2 \cdot C \cdot 2^n = 2n + 2^n$$

Para que t_n tenha solução, as seguintes igualdades devem ser satisfeitas:

$6A = 2$, $-5A + 6B = 0$ e $2C = 1$.

Resolvendo esse sistema de equações, segue-se que $A = \frac{1}{3}, B = \frac{5}{18}$ e $C = \frac{1}{2}$.

Logo,

$$t_n = \frac{1}{3} \cdot n + \frac{5}{18} + \frac{1}{2} \cdot 2^n = \frac{1}{3} \cdot n + \frac{5}{18} + 2^{n-1}.$$

Portanto, a solução da recorrência é

$$x_n = h_n + t_n.$$

que é equivalente a

$$x_n = t_1 \cdot 3^n + t_2 \cdot 4^n + \frac{1}{3} \cdot n + \frac{5}{18} + 2^{n-1}.$$

3 OS COELHOS DE FIBONACCI

Fibonacci e o século XIII

No início do século XIII, Leonardo Fibonacci se destacou como um talentoso matemático. De acordo com Eves (2011, p. 292), Fibonacci foi o matemático mais talentoso da idade média. Fibonacci teve um grande interesse pela Aritmética. Durante longas viagens ao Egito, à Sicília, à Grécia e à Síria, ele pode entrar em contato direto com os procedimentos matemáticos orientais e árabes. Através desse intercâmbio, Fibonacci ficou inteiramente convencido da superioridade prática dos métodos indo-arábicos de cálculo. Sua mais famosa obra é o *Liber Abaci*, publicado em 1202, e que se tornou mais conhecido através de uma segunda versão, em 1228. O *Liber Abaci* se ocupa da Aritmética e Álgebra elementares e, embora em essência uma pesquisa independente, mostra a influência das álgebras de al-Khowârizmî e Abû Kâmil. O livro ilustra com profusão e defende com energia a notação indo-arábica, muito se devendo a ele pela introdução desses numerais na Europa. Um exemplo muito interessante de equação de recorrência é a sequência conhecida por sequência de Fibonacci. Esta sequência, apresentada por Leonardo Fibonacci adquiriu muita fama devido a suas conexões com áreas das mais variadas na cultura humana. Ela aparece em problemas de Biologia, Arquitetura, Engenharia, Física, Química e muitas outras áreas da ciência. Os coelhos de Fibonacci trata-se do seguinte problema proposto e resolvido por Leonardo Fibonacci em seu livro, Liber Abacci, de 1202: *Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur.*

> Traduzindo: um casal de coelhos recém-nascidos foi posto num lugar cercado. Determinar quantos casais de coelhos ter-se-ão após um ano, supondo que, a cada mês, um casal de coelhos produz outro casal e que um casal começa a procriar dois meses após o seu nascimento.

Leonardo apresenta a seguinte solução:

Mês	número de casais do mês anterior	número de casais recem-nascidos	total
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º	5	3	8
7º	8	5	13
8º	13	8	21
9º	21	13	34
10º	34	21	55
11º	55	34	89
12º	89	55	144

Portanto, o número de casais de coelhos num determinado mês é igual ao número total de casais do mês anterior acrescido do número de casais nascidos no mês em curso, que é igual ao número total de casais do mês anterior ao anterior.

Se denotarmos o número de coelhos existentes no n-ésimo mês por F_n, temos, então, que

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_1 = F_2 = 1.$$

Tais relações definem por recorrência, uma sequência de números naturais, chamada de sequência de Fibonacci, cujos elementos, chamados de números de Fibonacci, possuem propriedades aritméticas notáveis que ainda hoje são objeto de investigação.

Definimos a sequência de Fibonacci como sendo a sequência F_n que satisfaz a seguinte equação de recorrência:

$$F_1 = 1;$$

$$F_2 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ se } n \geq 3.$$

3.1 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E SUAS PROPOSIÇÕES

Como visto no capítulo 2, uma recorrência do tipo

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad (1)$$

só permite determinar o elemento F_n se conhecermos os elementos anteriores F_{n-1} e F_{n-2} que, para serem calculados, necessitam do conhecimento dos dois elementos anteriores, etc. Fica, portanto, univocamente definida a sequência quando são dados F_1 e F_2. A sequência de Fibonacci corresponde à recorrência (1), onde F_1=$F_2 = 1$.

Quando é dada uma recorrência, um problema importante é determinar uma fórmula para o termo geral da sequência sem recorrer aos termos anteriores. No caso da sequência de Fibonacci, existe uma fórmula chamada fórmula de Binet, que apresentamos a seguir.

Proposição 9 (fórmula de Binet): Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$Fn = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Demonstração

Usando o Teorema 6, vamos resolver a recorrência $\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$

A equação característica $r^2 - r - 1 = 0$ tem como raízes

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

Pelo Teorema 6, as soluções da recorrência são as sequências da forma $F_n = t_1 \cdot {r_1}^n + t_2 \cdot {r_2}^n$, onde t_1 e t_2 são constantes arbitrárias.

Assim, como $F_1 = F_2 = 1$, podemos encontrar os valores de t_1 e t_2, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} F_1 = t_1 \cdot {r_1}^1 + t_2 \cdot {r_2}^1 \\ F_2 = t_1 \cdot {r_1}^2 + t_2 \cdot {r_2}^2 \end{cases},$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} t_1 \cdot r_1 + t_2 \cdot r_2 = 1 & (i) \\ t_1 \cdot {r_1}^2 + t_2 \cdot {r_2}^2 = 1 & (ii) \end{cases}.$$

Isolando t_1 na equação (i), obtemos

$$t_1 = \frac{1 - t_2 \cdot r_2}{r_1} \quad (iii).$$

Como r_1 e r_2 são raízes de $r^2 - r - 1 = 0$, segue-se que

$$r_1{}^2 = r_1 + 1 \text{ e } r_2{}^2 = r_2 + 1.$$

Substituindo os valores de $r_1{}^2$ e $r_2{}^2$ na equação (ii), obtemos

$$t_1 \cdot (r_1 + 1) + t_2 \cdot (r_2 + 1) = 1 \quad (iv)$$

Substituindo (iii) em (iv), segue-se que

$$\left(\frac{1 - t_2 \cdot r_2}{r_1}\right) \cdot (r_1 + 1) + t_2 \cdot (r_2 + 1) = 1$$

$$\leftrightarrow \frac{r_1 + 1 - t_2 \cdot r_1 \cdot r_2 - t_2 \cdot r_2 + t_2 \cdot r_1 \cdot r_2 + t_2 \cdot r_1}{r_1} = 1$$

$$\leftrightarrow r_1 + 1 - t_2 \cdot r_2 + t_2 \cdot r_1 = r_1$$

$$\leftrightarrow t_2 \cdot (r_1 - r_2) = -1$$

$$\leftrightarrow t_2 = \frac{-1}{r_1 - r_2}.$$

Portanto,

$$t_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

Substituindo o valor de t_2 na equação (iii), obtemos

$$t_1 = \frac{1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)}{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}\right)}{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{\left(\sqrt{5} + 1\right)}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\left(\sqrt{5} + 1\right)}.$$

Portanto,

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Substituindo os devidos valores na equação $F_n = t_1 r_1{}^n + t_2 r_2{}^n$, obtemos

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Portanto,

$$Fn = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, como queríamos demonstrar.

É notável que seja necessário recorrer a fórmulas envolvendo números irracionais para representar os elementos da sequência de Fibonacci que são números naturais.

Os números de Fibonacci guardam inúmeras relações entre si, dentre as quais destacaremos algumas, a seguir.

A fim de evitar ter que fazer restrições sobre os índices nas fórmulas envolvendo números de Fibonacci, convencionamos que $F_0 = 0$.

Proposição 10: Para todo par de números naturais *n* e *m*, temos que

$$F_{n+m} = F_n \cdot F_{m+1} + F_{n-1} \cdot F_m.$$

Demonstração

Faremos a demonstração fixando *n* e usando indução completa sobre *m*.

Para $m = 1$, temos

$F_{n+1} = F_n \cdot F_2 + F_{n-1} \cdot F_1 = F_n + F_{n-1}$, o que é verdadeiro, pois $F_1 = F_2 = 1$.

Suponhamos agora o resultado válido para todos os índices menores do que ou iguais a um certo número natural *m*. Temos então que

$$F_{n+m} = F_n \cdot F_{m+1} + F_{n-1} \cdot F_m \quad (i)$$

$$F_{n+m-1} = F_n \cdot F_m + F_{n-1} \cdot F_{m-1} \quad (ii)$$

Somando membro a membro as igualdades (i) e (ii) e utilizando a definição da sequência de Fibonacci temos

$$\begin{aligned} F_{n+m+1} = F_{n+m} + F_{n+m-1} &= F_n \cdot (F_{m+1} + F_m) + F_{n-1} \cdot (F_m + F_{m-1}) \\ &= F_n \cdot F_{m+2} + F_{n-1} \cdot F_{m+1}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Portanto,

$$F_{n+m} = F_n \cdot F_{m+1} + F_{n-1} \cdot F_m, \text{ para todo } n, m \in \mathbb{N}.$$

O resultado a seguir, devido a Euclides, é de grande importância e será utilizado na demonstração da próxima proposição.

Lema 1 (Euclides): Sejam $a, b, n \in \mathbb{Z}$. Se existe $mdc(a, b - n \cdot a)$, então $mdc(a, b)$ existe e

$$mdc(a, b) = mdc(a, b - n \cdot a).$$

Demonstração

Seja $d = mdc(a, b - n \cdot a)$. Temos que $d|a$ e $d|(b - n \cdot a)$. Logo, d divide $b = b - n \cdot a + n \cdot a$ e, consequentemente, d é um divisor comum de a e b. Suponha agora que c seja um divisor comum de a e b. Logo, c é um divisor comum de a e $b - n \cdot a$. Logo, $c|d$ e, portanto, $d = mdc(a, b)$.

Proposição 11: Dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci são coprimos.

Demonstração

Usaremos indução sobre n, para provar que $mdc(F_{n+1}, F_n) = 1$. Para $n = 1$, temos que $mdc(F_2, F_1) = mdc(1,1) = 1$, o que é verdadeiro.

Suponhamos que o resultado seja válido para n, isto é, que $mdc(F_{n+1}, F_n) = 1$.

Devemos provar que $mdc(F_{n+2}, F_{n+1}) = 1$.

Pelo lema 1, temos que

$$mdc(F_{n+2}, F_{n+1}) = mdc(F_{n+2} - F_{n+1}, F_{n+1}) = mdc(F_n, F_{n+1}) = 1.$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, podemos concluir que $mdc(F_n, F_{n+1}) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 12: Dada uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ de números naturais tal que $a_0 = 0$ e para todo $m \geq n$, $mdc(a_m, a_n) = mdc(a_n, a_r)$, onde r é o resto da divisão de m por n, então tem-se que

$$mdc(a_m, a_n) = a_{mdc(m,n)}.$$

Demonstração

Vamos considerar $r_1, r_2, \dots r_s \neq 0$ e $r_{s+1} = 0$ os restos parciais quando aplicamos o Algoritmo de Euclides ao par m, n; logo, $r_s = mdc(m, n)$. Portanto, pela propriedade da sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$,

$$mdc(a_m, a_n) = mdc\left(a_n, a_{r_1}\right) = \cdots mdc\left(a_{r_s}, a_{r_{s+1}}\right) = mdc\left(a_{r_s}, a_0\right) = mdc\left(a_{r_s}, 0\right) = a_{r_s} =$$

$= a_{mdc(m,n)}$, como queríamos demonstrar.

Proposição 13: Se $m, n \in \mathbb{N}$ são tais que $m|n$, então, $F_m|F_n$.

Demonstração:

Escreveremos $n = m \cdot k$ e faremos a demonstração usando indução sobre *k*.

Para *k* = 1, temos $n = m \cdot 1 = m$. Logo, $F_n = F_m$ e, consequentemente, $F_m|F_n$.

Suponha, agora, o resultado válido para algum valor de *k*; isto é, $F_m|F_{mk}$.

Pela proposição 10, temos que

$$F_{m\cdot(k+1)} = F_{m\cdot k+m} = F_{m\cdot k-1}F_m + F_{m\cdot k}F_{m+1}.$$

Como $F_m|F_{m\cdot k-1}F_m$ e, por hipótese de indução, $F_m|F_{m\cdot\cdot k}F_{m+1}$, segue-se que F_m divide $F_{m\cdot(k+1)}$.

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, podemos concluir que $F_m|F_n$.

Enunciamos a seguir o Teorema de Bézout, com sua respectiva demonstração. Esse teorema é utilizado em algumas demonstrações do nosso trabalho. Antes, porém, mostraremos um resultado que será utilizado na demonstração do referido teorema.

Proposição 14: Sejam a, b e c números inteiros. Então,

(i) se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$;

(ii) se $a|b$ e $a|c$, então $a|(b+c)$ e $a|(b-c)$;

(iii) se a e b são positivos e $a|b$, então 0$< a \leq b$;

(iv) se $a|b$ e $b|a$, então $a = b$ ou $a = -b$.

Esta proposição foi retirada de Oliveira (2019, p. 91).

Demonstração

(i) Se $a|b$ e $b|c$, então existem inteiros q_1 e q_2 tais que $b = a \cdot q_1$ e $c = b \cdot q_{2.}$

Substituindo o valor de *b* na segunda igualdade, segue-se que

$$c = a \cdot q_1 \cdot q_2, \text{ com } q_1 \cdot q_2 \in \mathbb{Z},$$

Portanto, $a|c$, como querímos demonstrar.

(ii) Se $a|b$ e $a|c$, então valem as igualdades $b = a \cdot q_1$, $q_1 \in \mathbb{Z}$ e $c = a \cdot q_{2,}$ $q_2 \in \mathbb{Z}$.

Somando e subraindo ambos os lados das duas igualdades anteriores, obtemos, respectivamente,

$$b + c = a \cdot (q_1 + q_2),\ (q_1 + q_2) \in \mathbb{Z} \text{ e } b - c = a(q_1 - q_2),\ (q_1 - q_2) \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, $a|(b+c)$ e $a|(b-c)$, como queríamos demonstrar.

(iii) Se $a|b$, sendo ambos positivos, então $a = b \cdot q$, com $q \geq 1$.

Como *a* é positivo, multiplicando por *a* ambos os lados da desigualdade anterior, temos que

$$b = a \cdot q \geq a > 0.$$

Portanto, $0 < a \leq b$, como queríamos demonstrar.

(iv) Se $a|b$ e $b|a$, então $|a|$ divide $|b|$ e $|b|$ divide $|a|$.
Logo, pelo item (iii), temos que $|a| \leq |b|$ e $|b| \leq |a|$, ou seja,

$$|a| \leq |b| \leq |a|.$$

Portanto, $|a| = |b|$ e, consequentemente, $a = b$ ou $a = -b$, como queríamos demonstrar.

Teorema 10 (Bézout): Se $d = mdc(a, b)$ então existem números inteiros x_0 e y_0 tais que $d = mdc(a, b) = ax_0 + by_0$.

Demonstração

Seja a combinação linear $ax + by$, com $x, y \in \mathbb{Z}$. O conjunto de inteiros, denotado por

$$C_{a,b} = \{ax + by; x, y \in \mathbb{Z}\},$$

contém números inteiros positivos e negativos. Fazendo $x = y = 0$, percebemos que $0 \in C_{a,b}$ também contém o zero.

Pelo princípio da boa ordenação, podemos escolher x_0 e y_0 tais que $\delta = ax_0 + by_0$ seja o menor número inteiro positivo contido no conjunto $C_{a,b}$.

Provaremos que $\delta|a$ e $\delta|b$. Provaremos que $\delta|a$ e o outro caso segue analogamente. Para isto, usaremos o método de redução ao absurdo, ou seja, vamos supor que δ não divide a e obteremos uma contradição.

Pela divisão euclidiana, se δ não divide a existem inteiros q e r tais que $a = \delta q + r$ com $0 < r < \delta$. Portanto,

$$r = a - \delta \cdot q = a - q \cdot (ax_0 + by_0) = a \cdot (1 - qx_0) + b \cdot (-qy_0).$$

Logo, r está no conjunto $C_{a,b}$, o que contradiz a hipótese de δ ser o menor elemento positivo contido em $C_{a,b}$. Portanto $\delta|a$. De maneira análoga prova-se que $\delta|b$.

Provaremos, agora, que $\delta = d$. Com efeito, desde que $d = mdc(a, b)$, podemos escrever $a = d \cdot a_1$, $b = db_1$ e

$$\delta = ax_0 + by_0 = d \cdot (a_1x_0 + b_1y_0).$$

Logo $d|\delta$ e, pela Proposição 14(iii), concluímos que $d \leq \delta$. Mas $d < \delta$ é impossível pois $d = mdc(a, b)$. Portanto, $d = \delta = ax_0 + by_0$, como queríamos demonstrar.

Proposição 15

Ou dois itens desta proposição foram retirados de Hefez (2014, p. 99).
(i) Se $mdc(a, b) = 1$, $a|c$ e $b|c$, então $ab|c$.

Demonstração

Se $mdc(a, b) = 1$, então, pelo Teorema de Bézout existem inteiros m e n tais que

$$ma + nb = 1. \tag{1}$$

Se $a|c$ e $b|c$, então existem inteiros k e q tais que $c = a \cdot k$ e $c = b \cdot q$.

Multiplicando ambos os lados da igualdade (1) por c, temos que

$$c = c \cdot m \cdot a + c \cdot n \cdot b.$$

Substituindo, no segundo membro da última igualdade, c por $b \cdot q$ no primeiro termo e por $a \cdot k$ no segundo termo segue-se que

$$c = b \cdot q \cdot m \cdot a + a \cdot k \cdot n \cdot b = a \cdot b \cdot (q \cdot m + k \cdot n)$$

e, portanto, $a \cdot b|c$, como queríamos demonstrar.

(ii) Se $mdc(a, b) = 1$, então $mdc(ca, b) = mdc(c, b)$.

Demonstração

Se $mdc(a, b) = 1$, então, pelo Teorema de Bézout existem inteiros m e n tais que

$$m \cdot a + n \cdot b = 1. \tag{1}$$

Considerando $d_1 = mdc(c \cdot a, b)$ e $d_2 = mdc(c, b)$, existem inteiros k, q, k' e q', tais que

$$c \cdot a = k \cdot d_1, b = q \cdot d_1, c = k' \cdot d_2 \text{ e } b = q' \cdot d_2.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade (1) por c, temos que

$$c = c \cdot m \cdot a + c \cdot n \cdot b.$$

Substituindo, na igualdade anterior, $c \cdot a$ por $k \cdot d_1$ e b por $q \cdot d_1$, segue-se que

$$c = kd_1m + cqd_1n = d_1 \cdot (k \cdot m + c \cdot q \cdot n) \text{ e, portanto, } d_1|c.$$

Como $d_1|b$ e $d_1|c$, segue-se que $d_1|mdc(b, c)$, ou seja, $d_1|d_2$.

Multiplicando ambos os lados da igualdade (1) por c, temos que

$$c = c \cdot m \cdot a + c \cdot n \cdot b.$$

Substituindo, no segundo membro da igualdade anterior, c por $k' \cdot d_2$ e b por $q' \cdot d_2$, segue-se que

$$c = k' \cdot d_2 \cdot m \cdot a + c \cdot n \cdot q' \cdot d_2 = d_2 \cdot (k' \cdot m \cdot a + c \cdot n \cdot q') \text{ e, portanto, } d_2|c.$$

Como $d_2|b$ e $d_2|c$, segue-se que $d_2|mdc(b, c)$, ou seja, $d_2|d_1$.

Assim, $d_1|d_2$ e $d_2|d_1$, ou seja, $d_1 = d_2$.

Com isso, fica provado que

$$mdc(ca, b) = mdc(c, b) = 1,$$

se $mdc(a,b) = 1$, como queríamos.

Proposição 16: Seja $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência de Fibonacci; então,

$$mdc(F_m, F_n) = F_{mdc(m,n)}.$$

Demonstração

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Suponha que $m \geq n$. Pela divisão euclidiana de m por n, temos que $m = n \cdot q + r$. Portanto, pela proposição 10, temos

$$F_m = F_{n\cdot q+r} = F_{n\cdot q-1}F_r + F_{n\cdot q}F_{r+1}.$$

Como, pela Proposição 13, $F_n | F_{nq}$, pelo Lema 1, temos que

$$\begin{aligned} mdc(F_m, F_n) &= mdc\left(F_{n\cdot q-1} \cdot F_r + F_{n\cdot\cdot q} \cdot F_{r+1}, F_n\right) \\ &= mdc\left(F_{n\cdot q-1} \cdot F_r, F_n\right). \qquad (1) \end{aligned}$$

Como, pela Proposição 11, $mdc\left(F_{n\cdot q-1}, F_{n\cdot q}\right) = 1$, segue-se que $mdc\left(F_{n\cdot q-1}, F_n\right) = 1$ (veja proposição 15 (ii)) e, consequentemente, de (1) e da Proposição 15 (i), segue-se que

$$mdc(F_m, F_n) = mdc(F_n, F_r).$$

Portanto, pela Proposição 12, temos que

$$mdc(F_m, F_n) = F_{mdc(m,n)},$$

como queríamos demonstrar.

Corolário 16.1: Sejam $m \geq n > 2$. Na sequência de Fibonacci, temos que F_n divide F_m se, e somente se, n divide m.

Demonstração

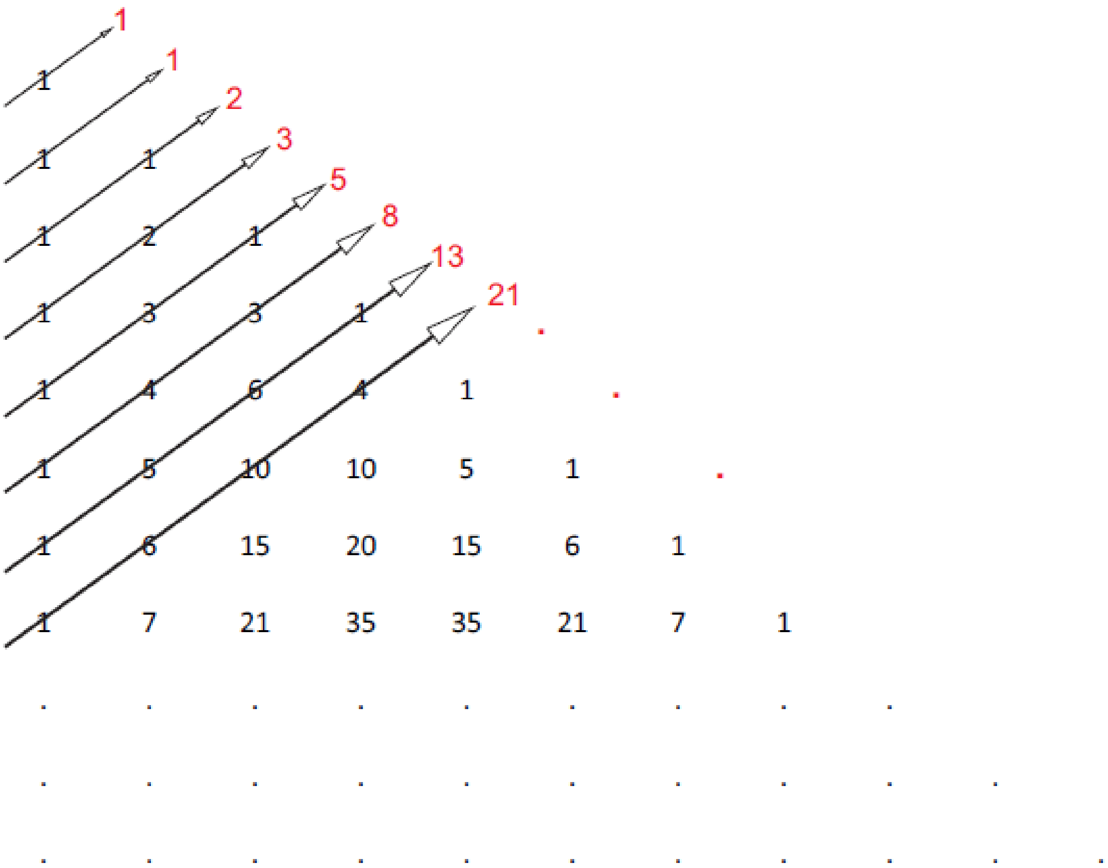
Temos que a condição F_n divide F_m é equivalente a $F_n = mdc(F_n, F_m) = F_{mdc(n,m)}$. Para $n > 2$, não há outro termo na sequência de Fibonacci igual a F_n, o que equivale a dizer que $n = mdc(m,n)$, e, consequentemente, a $n|m$.

3.2 O TRIÂNGULO DE PASCAL E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

O triângulo de Pascal apresenta algumas características que encantam os matemáticos. Em primeiro lugar, nele convivem em harmonia números e formas geométricas. Ele é repleto de simetrias e é possível construí-lo usando uma de suas propriedades, chamada relação de Stifel. Veremos agora como este triângulo de números se relaciona com a sequência de Fibonacci.

As somas dos números dispostos nas diagonais do triângulo de Pascal formam, precisamente, a sequência de Fibonacci, como podemos ver no diagrama a seguir.

Figura 2 – Relação entre o triângulo de Pascal e a sequência de Fibonacci.



Fonte: Elaborada pelo autor

Este fato foi notado pelo próprio Fibonacci quando estudava o triângulo de Pascal, que então era conhecido como o triângulo chinês.

Este resultado será provado por meio da proposição a seguir.

Proposição 17

Seja F_n n-ésimo termo da sequência de Fibonacci. Para todo número $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, temos

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots = F_{n+1}, \text{ onde na soma interpretamos}$$

$$\binom{m}{k} = 0 \ se \ k > m.$$

Demonstração

Para provar esse resultado, usaremos indução sobre *n*.

Para $n = 0$, temos $F_{n+1} = F_{0+1} = F_1 = 1 = \binom{n}{0} = \binom{0}{0}$.

Suponhamos, agora, que o resultado seja válido para todos os naturais menores do que ou iguais a $n - 1$, isto é,

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \binom{n-4}{3} + \cdots = F_n.$$

Mostraremos que o resultado vale para *n*, isto é,

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots = F_{n+1}.$$

Temos que

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \binom{n-4}{3} + \binom{n-5}{4} + \cdots$$

$$+ \binom{n-2}{0} + \binom{n-3}{1} + \binom{n-4}{2} + \binom{n-5}{3} + \binom{n-6}{4} + \cdots =$$

$$\binom{n-1}{0} + \left[\binom{n-2}{0} + \binom{n-2}{1}\right] + \left[\binom{n-3}{1} + \binom{n-3}{2}\right] + \left[\binom{n-4}{2} + \binom{n-4}{3}\right] + \left[\binom{n-5}{3} + \binom{n-5}{4}\right] + \cdots =$$

$$= \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \binom{n-4}{4} + \cdots$$

Observe que

$$\binom{n-1}{0} = \binom{n}{0},$$

para $n > 1$. Temos então que

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots = F_{n+1},$$

para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3.2.1 Aplicações

1. Considere $(F_n)_{n\geq 1}$ a sequência de Fibonacci. Prove que:

a) $F_{n+3} < 5F_n$ para todo $n \geq 3$(adaptado de Barbosa (2016, p. 54)).

b) $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

Solução:

a) Como a sequência de Fibonacci é crescente e $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$, temos

$F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+1} + F_n + F_{n+1} = 2F_{n+1} + F_n = 2 \cdot (F_n + F_{n-1}) + F_n = 3F_n + 2F_{n-1} < 3F_n + 2F_n = 5F_n$.

Portanto, $F_{n+3} < 5F_n$ para todo $n \geq 3$.

b) Usaremos indução sobre n. A desigualdade é válida para $n = 1$, pois,

$$F_1 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^1.$$

Suponhamos que a desigualdade seja verdadeira para $n \in \{1, 2,3, \dots, n\}$. Devemos mostrar que

$$F_{n+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}.$$

De fato,

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} < \frac{7}{4} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} = \left(1 + \frac{7}{4}\right) \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1}.$$

Como

$$\left(1 + \frac{7}{4}\right) < \left(\frac{7}{4}\right)^2,$$

segue-se que

$$F_{n+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1}.$$

Portanto,

$$F_{n+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1},$$

como queríamos demonstrar.

2. Sejam F_n e F_{n+1} dois termos da sequência de Fibonacci. então existem dois números inteiros *a* e *b* tais que $a \cdot F_n + b \cdot F_{n+1} = 1$.

   Solução:

   Como F_n e F_{n+1} são primos entre si, o resultado segue pelo teorema de Bezout (teorema 12)

3. Seja F_n o *n*-ésimo termo da sequência de Fibonacci. Prove que $F_{n+3} - F_{n-3} = 4F_n$, para todo $n \geq 5$.

Solução:

Faremos a prova por indução sobre *n*. Para $n = 5$, temos $F_8 - F_2 = 4F_5 \leftrightarrow 21 - 1 = 4 \cdot 5$, o que é verdadeiro.

Suponhamos, agora, que $F_{n+3} - F_{n-3} = 4F_n$, para algum natural $n > 5$. Devemos provar que $F_{n+4} - F_{n-2} = 4F_{n+1}$.

Temos que

$$F_{n+4} - F_{n-2} = F_{n+3} + F_{n+2} - F_{n-3} - F_{n-4} = F_{n+3} - F_{n-3} + F_{n+2} - F_{n-4}.$$

Como, por hipótese de indução, temos que

$F_{n+3} - F_{n-3} = 4F_n$, segue-se que

$$\begin{aligned}
F_{n+4} - F_{n-2} &= 4F_n + F_{n+1} + F_n - F_{n-4} \\
&= 5F_n + F_{n+1} - (F_{n-2} - F_{n-3}) \\
&= 5F_n + F_{n+1} - F_{n-2} + F_{n-3} \\
&= 5F_n + F_{n+1} - F_{n-2} + F_{n-1} - F_{n-2} \\
&= 5F_n + F_{n+1} - (F_n - F_{n-1}) + F_{n-1} - (F_n - F_{n-1}) \\
&= 3F_n + F_{n+1} + 3F_{n-1} \\
&= 3F_n + F_{n+1} + 3 \cdot (F_n - F_{n-2}) \\
&= 6F_n + F_{n+1} - 3 \cdot (F_n - F_{n-1}) \\
&= 6F_n + F_{n+1} - 3F_n + 3F_{n-1} \\
&= 3F_n + F_{n+1} + 3 \cdot (F_{n+1} - F_n) \\
&= 3F_n + 4F_{n+1} - 3F_n.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$F_{n+4} - F_{n-2} = 4F_{n+1},$$

como queríamos demonstrar.

3.3 RECORRÊNCIAS DO TIPO $x_n = a \cdot x_{n-1} + b \cdot x_{n-2},\ n \geq 2$.

Observe que a sequência de Fibonacci é do tipo $x_n = a \cdot x_{n-1} + b \cdot x_{n-2}, n \geq 2$, em que $x_1 = x_2 = 1, a = 1$ e $b = 1$. Apresentamos dois outros problemas cuja resolução recai nesse tipo de recorrência.

3.3.1 O problema das *n* lâmpadas

Consideremos, inicialmente, o seguinte problema: Quatro lâmpadas podem estar ligadas ou desligadas. De quantos modos podemos dispô-las, de forma alinhadas, sabendo que não pode haver duas lâmpadas adjacentes ligadas simultaneamente?

Este problema é enunciado e resolvido pelo Professor Morgado, de saudosa memória, em uma vídeo aula, na internet. O leitor poderá acessá-la no link https://www.youtube.com/watch?v=Ioy3e9G-7kk

Solução:

As possíveis configurações, são:

{ D D D D (As 4 lâmpadas estão desligadas)

$$\begin{cases} L \quad D \quad D \quad D \\ D \quad L \quad D \quad D \\ D \quad D \quad L \quad D \\ D \quad D \quad D \quad L \end{cases} \text{(1 lâmpada está ligada e 3 lâmpadas estão desligadas)}$$

$$\begin{cases} L \quad D \quad L \quad D \\ L \quad D \quad D \quad L \\ D \quad L \quad D \quad L \end{cases} \text{(2 lâmpadas estão ligadas e 2 lâmpadas estão desligadas)}$$

Teremos, portanto, oito configurações possíveis.

Se, em vez de quatro lâmpadas, tivéssemos *n* lâmpadas, como seria a solução?

Nesse caso, chamando de a_n a solução do problema para *n* lâmpadas.

Considerando *n* lâmpadas, temos que a primeira lâmpada pode estar desligada ou ligada:

se a primeira lâmpada estiver desligada, teremos a_{n-1} possibilidades para as $n - 1$ lâmpadas restantes;

se a primeira lâmpada estiver ligada, a segunda lâmpada, obrigatoriamente, deverá estar desligada. Nesse caso, teremos a_{n-2} possibilidades para as $n - 2$ lâmpadas restantes.

D __ __ __ __ ... __ (*n* lâmpadas, com a primeira lâmpada desligada. Teremos a_{n-1} soluções).

L D__ __ __ __ ... __ (*n* lâmpadas, com a primeira lâmpada ligada e a segunda lâmpada, obrigatoriamente, desligada. Teremos a_{n-2} soluções).

O número de soluções para *n* lâmpadas, a_n é a soma dos resultados quando se considera a primeira lâmpada desligada (a_{n-1}) com o resultado que se obtém, considerando a primeira lâmpada ligada (a_{n-2}), isto é, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Assim, teremos a solução dada pela recorrência

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Particularmente, no caso de dez lâmpadas, podemos fazer progressivamente:

$a_1 = 2$ (pois, considerando uma lâmpada $(n = 1)$, temos 2 possibilidades, pois ela pode estar desligada ou ligada)

$a_2 = 3$ (pois, considerando duas lâmpadas $(n = 2)$, temos 3 possibilidades (DD, DL e LD)

$a_3 = a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5.$

$a_4 = a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8$ (como já havíamos encontrado inicialmente).

$a_5 = a_4 + a_3 = 8 + 5 = 1.$

$a_6 = a_5 + a_4 = 13 + 8 = 21.$

$a_7 = a_6 + a_5 = 21 + 13 = 34.$

$a_8 = a_7 + a_6 = 34 + 21 = 55.$

$a_9 = a_8 + a_7 = 55 + 34 = 89.$

$a_{10} = a_9 + a_8 = 89 + 55 = 144.$

Portanto, considerando 10 lâmpadas, teremos 144 configurações possíveis.

Para o caso de *n* lâmpadas, é suficiente resolver a recorrência de segunda ordem

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, com $a_1 = 2$ e $a_2 = 3$.

Escrevendo os termos dessa sequência, obtemos $(2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \ldots)$.

Observe que a fórmula de recorrência dessa sequência é a mesma da sequência de Fibonacci, a qual já estudamos anteriormente.

Proposição 18: Para todo $n \in \mathbb{N}$, e $n \geq 3$, para a sequência $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, com $a_1 = 2$ e $a_2 = 3$, tem-se que

$$a_n = \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)^n + \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)^n$$

Demonstração

Usando o Teorema 6, vamos resolver a recorrência $\begin{cases} a_1 = 2, a_2 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$

A equação característica $r^2 - r - 1 = 0$ tem como raízes

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Pelo Teorema 6, as soluções da recorrência são as sequências da forma

$$a_n = t_1 \cdot {r_1}^n + t_2 \cdot {r_2}^n,$$

onde t_1 e t_2 são constantes arbitrárias.

Assim, como $a_1 = 2$ e $a_2 = 3$, podemos encontrar os valores de t_1 e t_2, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} a_1 = t_1 \cdot {r_1}^1 + t_2 \cdot {r_2}^1 \\ a_2 = t_1 \cdot {r_1}^2 + t_2 \cdot {r_2}^2 \end{cases},$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} t_1 \cdot r_1 + t_2 \cdot r_2 = 2 & (i) \\ t_1 \cdot {r_1}^2 + t_2 \cdot {r_2}^2 = 3 & (ii) \end{cases}.$$

Isolando t_1 na equação (i), obtemos

$$t_1 = \frac{2 - t_2 \cdot r_2}{r_1} \quad (iii).$$

Como r_1 e r_2 são raízes de $r^2 - r - 1 = 0$, segue-se que

$${r_1}^2 = r_1 + 1 \text{ e } {r_2}^2 = r_2 + 1.$$

Substituindo os valores de ${r_1}^2$ e ${r_2}^2$ na equação (ii), obtemos

$$t_1 \cdot (r_1 + 1) + t_2 \cdot (r_2 + 1) = 3 \quad (iv)$$

Substituindo (iii) em (iv), segue-se que

$$\left(\frac{2 - t_2 \cdot r_2}{r_1}\right) \cdot (r_1 + 1) + t_2 \cdot (r_2 + 1) = 3$$

$$\leftrightarrow \frac{2 \cdot r_1 + 2 - t_2 \cdot r_1 \cdot r_2 - t_2 \cdot r_2 + t_2 \cdot r_1 \cdot r_2 + t_2 \cdot r_1}{r_1} = 3$$

$$\leftrightarrow 2 \cdot r_1 + 2 - t_2 \cdot r_2 + t_2 \cdot r_1 = 3 \cdot r_1$$

$$\leftrightarrow t_2 \cdot (r_1 - r_2) = r_1 - 2$$

$$\leftrightarrow t_2 = \frac{r_1 - 2}{r_1 - r_2}$$

$$\leftrightarrow t_2 = \frac{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 2}{\sqrt{5}}$$

$$\leftrightarrow t_2 = \frac{\frac{1 + \sqrt{5} - 4}{2}}{\sqrt{5}}$$

$$\leftrightarrow t_2 = \frac{\sqrt{5} - 3}{2\sqrt{5}}.$$

Portanto, racionalizando o denominador, temos

$$t_2 = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}.$$

Substituindo o valor de t_2 na equação (iii), obtemos

$$t_1 = \frac{2 - t_2 \cdot r_2}{r_1}$$

$$t_1 = \frac{2 - \left(\frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

$$\leftrightarrow t_1 = \frac{2 - \frac{5 - 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 15}{20}}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

$$\leftrightarrow t_1 = \frac{2 - \frac{20 - 8\sqrt{5}}{20}}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

$$\leftrightarrow t_1 = \frac{\frac{20 + 8\sqrt{5}}{20}}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

$$\leftrightarrow t_1 = \left(\frac{20 + 8\sqrt{5}}{20}\right) \cdot \left(\frac{2}{1 + \sqrt{5}}\right)$$

$$\leftrightarrow t_1 = \frac{20 + 8\sqrt{5}}{10 \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right)}.$$

Portanto, racionalizando o denominador, temos

$$t_1 = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}.$$

Substituindo os devidos valores na equação $a_n = t_1 {r_1}^n + t_2 {r_2}^n$, obtemos

$$a_n = \left(\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{\mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)^n + \left(\frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{\mathbf{1} - \sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, como queríamos demonstrar.

3.3.2 Problema (Texto PROFMAT)

O seguinte problema foi retirado da plataforma moodle PROFMAT:

Quantas são as sequências de 10 termos pertencentes a $\{0, 1, 2\}$ que não têm dois termos consecutivos iguais a 0?

Solução:

Seja x_n o número de sequências com n termos respeitando as condições do enunciado. Vamos contar separadamente as sequências, de acordo com o seu termo inicial.

Termo inicial

<u>1</u> $(n-1)$ termos → o nº dessas sequências começando por 1 é x_{n-1};

<u>2</u> $(n-1)$ termos → o nº dessas sequências começando por 2 é x_{n-1};

<u>0</u> (2º termo 1) → $(n-2)$ termos → o nº dessas sequências começando por 0 é x_{n-2};

<u>0</u> (2º termo 2) →$(n-2)$ termos → o nº dessas sequências começando por 0 é x_{n-2}.

Logo, teremos a recorrência

$x_n = 2x_{n-1} + 2x_{n-2}, n \geq 3$

Veja que:

$x_1 = 3$ (sequências com 1 termo respeitando as condições do enunciado: $\underline{0}$ $\underline{1}$ $\underline{2}$).

$x_2 = 8$ (sequências com 2 termos respeitando as condições do enunciado: $\underline{0\,1}$ $\underline{0\,2}$ $\underline{1\,0}$ $\underline{1\,1}$ $\underline{1\,2}$ $\underline{2\,0}$ $\underline{2\,1}$ $\underline{2\,2}$).

Para os demais termos, temos:

$$x_3 = 2x_2 + 2x_1 = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 3 = 22$$
$$x_4 = 2x_3 + 2x_2 = 2 \cdot 22 + 2 \cdot 8 = 60$$
$$x_5 = 2x_4 + 2x_3 = 2 \cdot 60 + 2 \cdot 22 = 164$$
$$x_6 = 2x_5 + 2x_4 = 2 \cdot 164 + 2 \cdot 60 = 448$$
$$x_7 = 2x_6 + 2x_5 = 2 \cdot 448 + 2 \cdot 164 = 1.224$$
$$x_8 = 2x_7 + 2x_6 = 2 \cdot 1.224 + 2 \cdot 448 = 3.344$$
$$x_9 = 2x_8 + 2x_7 = 2 \cdot 3.344 + 2 \cdot 1.224 = 9.136$$
$$x_{10} = 2x_9 + 2x_8 = 2 \cdot 9.136 + 2 \cdot 3.344 = 24.960$$

Portanto, a resposta do problema consiste em 24.960 sequências.

Em Lima (2006, p. 75), esse problema é proposto considerando sequências de n termos.

Generalização para sequências de *n* termos

Seja o problema:

Quantas são as sequências de n termos, todos pertencentes a $\{0, 1, 2\}$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a 0(zero)?

Solução:

Devemos resolver a recorrência

$x_n = 2x_{n-1} + 2x_{n-2}$, para $n \geq 3$, com $x_1 = 3$ e $x_2 = 8$.

Trata-se de uma recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes inteiros. Sua equação característica é

$$r^2 = 2r + 2 \leftrightarrow r^2 - 2r - 2 = 0.$$

Resolvendo esta equação do segundo grau, encontramos como raízes

$$r_1 = 1 + \sqrt{3} \text{ e } r_2 = 1 - \sqrt{3}.$$

Pelo Teorema 8, as soluções da recorrência são as sequências da forma

$$x_n = t_1 \cdot {r_1}^n + t_2 \cdot {r_2}^n,$$

onde t_1 e t_2 são constantes arbitrárias.

Assim, como $x_1 = 3$ e $x_2 = 8$, podemos encontrar os valores de t_1 e t_2, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x_1 = t_1 \cdot {r_1}^1 + t_2 \cdot {r_2}^1 \\ x_2 = t_1 \cdot {r_1}^2 + t_2 \cdot {r_2}^2 \end{cases},$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} t_1 \cdot r_1 + t_2 \cdot r_2 = 3 \quad (i) \\ t_1 \cdot {r_1}^2 + t_2 \cdot {r_2}^2 = 8 \quad (ii) \end{cases}.$$

Isolando t_1 na equação (i), obtemos

$$t_1 = \frac{3 - t_2 \cdot r_2}{r_1} \quad (iii).$$

Como r_1 e r_2 são raízes de $r^2 - 2r - 2 = 0$, segue-se que

$${r_1}^2 = 2r_1 + 2 \text{ e } {r_2}^2 = 2r_2 + 2.$$

Substituindo os valores de ${r_1}^2$ e ${r_2}^2$ na equação (ii), obtemos

$$t_1 \cdot (2r_1 + 2) + t_2 \cdot (2r_2 + 2) = 8 \quad (iv)$$

Substituindo (iii) em (iv), segue-se que

$$\left(\frac{3 - t_2 r_2}{r_1}\right) \cdot (2r_1 + 2) + t_2 \cdot (2r_2 + 2) = 8$$

$$\leftrightarrow \frac{6r_1 + 6 - 2 \cdot t_2 \cdot r_1 \cdot r_2 - 2 \cdot t_2 \cdot r_2 + 2 \cdot t_2 \cdot r_1 \cdot r_2 + 2 \cdot t_2 \cdot r_1}{r_1} = 8$$

$$\leftrightarrow 6r_1 + 6 - 2 \cdot t_2 \cdot r_2 + 2 \cdot t_2 \cdot r_1 = 8r_1$$

$$\leftrightarrow t_2 2(r_1 - r_2) = 2r_1 - 6$$

$$\leftrightarrow t_2 = \frac{2r_1 - 6}{2 \cdot (r_1 - r_2)}$$

$$\leftrightarrow t_2 = \frac{2\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)-6}{2\cdot 2\sqrt{3}}$$

$$\leftrightarrow t_2 = \frac{2\sqrt{3}-4}{4\sqrt{3}}.$$

Racionalizando o denominador, obtemos

$$t_2 = \frac{3-2\sqrt{3}}{6}.$$

Substituindo o valor de t_2 na equação (iii), obtemos

$$t_1 = \frac{3-\left(\frac{3-2\sqrt{3}}{6}\right)\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)}{1+\sqrt{3}} = \frac{3-\frac{3-3\sqrt{3}-2\sqrt{3}+6}{6}}{1+\sqrt{3}} = \left(\frac{9+5\sqrt{3}}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{\left(1+\sqrt{3}\right)}\right).$$

Racionalizando o denominador, obtemos

$$t_1 = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}.$$

Substituindo os devidos valores na equação $x_n = t_1 \cdot {r_1}^n + t_2 \cdot {r_2}^n$, obtemos

$$x_n = \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{6}\right)\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \left(\frac{3-2\sqrt{3}}{6}\right)\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.4 APLICAÇÕES LÚDICAS

3.4.1 A pizza de Steiner

A pizza de Steiner trata de um problema que consiste em determinar o número máximo de regiões em que *n* retas dividem o plano.

Solução:

Nº de cortes (retas)	**Nº máximo de regiões**
1	2 = 1 + 1
2	4 = 1 + 1 + 2
3	7 = 1 + 1 + 2 + 3
4	11 = 1 + 1 + 2 + 3 + 4
...	
n	$R_n = 1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = 1 + \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Justificativa:

A partir da segunda reta traçada, o número de pontos de interseção das retas é igual ao número de retas já existentes. Assim, ao traçar a $(n+1)$-ésima reta, teremos n pontos de interseção. Além disso, essa $(n+1)$-ésima reta terá $n+1$ segmentos determinados sobre si própria. Temos também que $n+1$ regiões são subdivididas e que $n+1$ regiões adicionais são criadas.

Logo, ao se acrescentar a reta de ordem $n+1$ R_n aumenta de $n+1$.

Temos, assim, a recorrência

$$\begin{cases} R_1 = 2 \\ R_{n+1} = R_n + (n+1), \quad n \geq 1 \end{cases}, \text{ cuja solução é}$$

$$R_n = 1 + \frac{n \cdot (n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}.$$

Podemos provar esse resultado fazendo indução sobre *n*.

O resultado vale para $n = 1$, pois,

$$R_1 = 1 + \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1 + 1 = 2.$$

Suponhamos, agora, que para algum valor de $n \in \mathbb{N}$, tenhamos

$$R_n = 1 + \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Temos, então, que

$$R_{n+1} = R_n + (n+1) = 1 + \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} + 1.$$

Portanto, pelo princípio da indução matemática temos que

$$R_n = 1 + \frac{n \cdot (n+1)}{2},$$

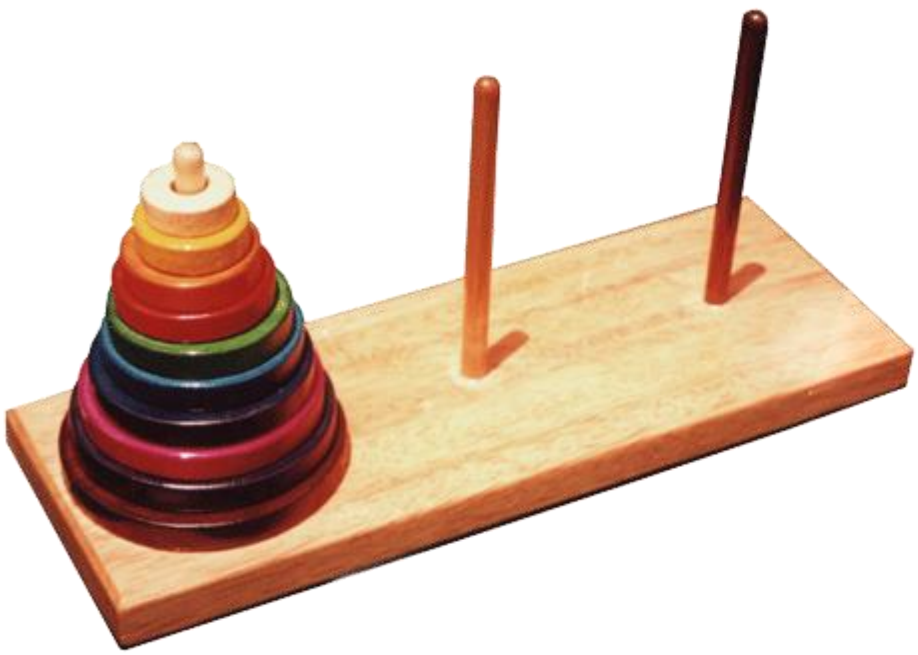
para todo $n \in \mathbb{N}$.

O nome do problema é uma homenagem a Jacob Steiner (1796-1863), proeminente geômetra que deu a solução desse problema em 1826.

3.4.2 A torre de Hanói

Este jogo é composto de n discos de diâmetros distintos com um furo no seu centro e uma base onde estão fincadas três hastes. Numa das hastes estão enfiados os discos de modo que nenhum disco esteja sobre um outro de diâmetro menor (figura abaixo).

Figura 3 – Torre de Hanói



Fonte: Elaborada pelo autor

O jogo consiste em transferir a pilha de discos para uma outra haste, deslocando um disco de cada vez, de modo que, a cada passo, seja observada a regra de que nenhum disco esteja acima de um de raio menor.

As perguntas naturais que surgem são as seguintes:

1. O jogo tem solução para cada $n \in \mathbb{N}$?

2. Caso afirmativo, qual é o número mínimo j_n de movimentos para resolver o problema com *n* discos?

Usando indução matemática, vamos ver que a resposta à primeira pergunta é afirmativa qualquer que seja o valor de *n*. Em seguida, deduziremos uma fórmula que nos fornecerá o número j_n.

De fato, usando indução sobre *n*, temos que para $n = 1$, obviamente, o jogo tem solução.

Suponhamos, agora, que o jogo tenha solução para *n* discos.

Devemos provar que o jogo tem solução para $n + 1$ discos.

Para ver isso, inicialmente resolvemos o problema para os *n* discos superiores da pilha, transferindo-os para uma das hastes livre (isto é possível, pois, por hipótese de indução, o problema com n discos tem solução).

Em seguida, transferimos o disco que restou na pilha original (o maior dos discos) para a haste vazia. Feito isso, resolvemos novamente o problema para os *n* discos que estão juntos, transferindo-os para a haste que contém o maior dos discos.

Isso mostra que o problema com $n + 1$ discos possui solução e, portanto, pelo princípio da indução matemática, o jogo tem solução para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para determinar uma fórmula para j_n, veja que, para resolver o problema para $n + 1$ discos com o menor número de passos, temos, necessariamente, que passar duas vezes pela solução mínima do problema com *n* discos. Temos, então, que

$$j_{n+1} = 2 \cdot j_n + 1, j_1 = 1$$

$$j_2 = 2 \cdot j_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3 = 2^2 - 1$$

$$j_3 = 2 \cdot j_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7 = 2^3 - 1$$

$$j_4 = 2 \cdot j_3 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15 = 2^4 - 1$$

$$j_5 = 2 \cdot j_4 + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31 = 2^5 - 1$$

$$j_6 = 2 \cdot j_5 + 1 = 2 \cdot 31 + 1 = 63 = 2^6 - 1$$

Obtemos, assim, uma progressão aritmético-geométrica (j_n) cujo termo geral é, como visto em 2.1.3, dado por

$$j_n = j_1 q^{n-1} + r\frac{q^{n-1} - 1}{q\ -\ 1},$$

em que, $j_1 = 1, q = 2$ e $r = 1$.

Daí, segue-se que

$$j_n = 1 \cdot 2^{n-1} + 1 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1.$$

Portanto,

$$j_n = 2^n - 1.$$

Esse resultado pode ser provado por indução sobre n.

Para $n = 1$, temos $j_1 = 2^1 - 1 = 1$, o que mostra que o resultado é válido.

Suponhamos, agora, que $j_n = 2^n - 1$, para um certo $n \in \mathbb{N}$.

Devemos provar que $j_{n+1} = 2^{n+1} - 1$.

Temos que

$$j_{n+1} = 2 \cdot j_n + 1 = 2 \cdot (2^n - 1) + 1 = j_n = 2^{n+1} - 2 + 1 = j_n = 2^{n+1} - 1.$$

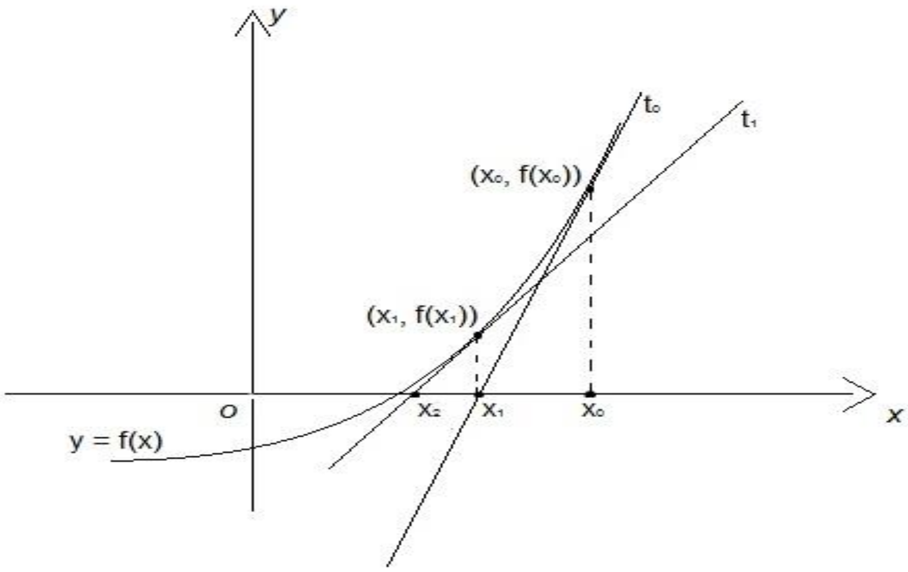
Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, podemos concluir que $j_n = 2^n - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Esse jogo foi idealizado e publicado pelo matemático francês Edouard Lucas, em 1882.

3.5 MÉTODO DE NEWTON PARA OBTER VALORES APROXIMADOS DE UMA RAIZ DA EQUAÇÃO $f(x) = 0$.

Dada uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, as soluções da equação $f(x) = 0$ são chamadas de raízes ou zeros da função *f*. Se *f* for uma função polinomial com grau menor do que cinco, existem fórmulas para o cálculo dos seus zeros. Para as funções polinomiais de grau três ou quatro, as fórmulas são bastante complicadas e por isto pouco usadas. No entanto, existem métodos numéricos que nos permitem obter valores aproximados das soluções de equações do tipo $f(x) = 0$. O chamado método de Newton, idealizado por Isaac Newton no século dezessete, é um deles e será apresentado agora.

Consideraremos a função *f* como sendo derivável e $f'(x) \neq 0$, para *x* próximo da raiz a ser considerada. Na figura 4, representamos um esboço do gráfico de $y = f(x)$. Se o número real *r* é uma raiz da equação $f(x) = 0$, *r* é o ponto em que o gráfico de *f* intersecta o eixo 0*x*. Para obter uma aproximação de *r*, escolhemos um número x_0 razoavelmente próximo do raiz *r*. Se t_0 é a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto $(x_0, f(x_0))$, t_0 intersecta o eixo 0*x* no ponto x_1. O número x_1 representa uma segunda aproximação de *r*. Repetindo o processo com a reta t_1, tangente ao gráfico de f no ponto $(x_1, f(x_1))$, encontramos o ponto x_2, que é a interseção da reta t_1 com o eixo $0x$. O número x_2 representa uma terceira aproximação de r. A figura 4, representa o processo acima descrito. Os números $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$, estão cada vez mais próximos do número r. Encerramos o cálculo quando obtivermos uma aproximação previamente estipulada.

Figura 4 - Como a inclinação da tangente é $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$, segue-se que $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.



Fonte: Elaborada pelo autor

Uma equação de t_0 é $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Nesta equação fazendo $x = x_1$ e $y = 0$, teremos $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, se $f'(x_0) \neq 0$.

Com esse valor de x_1, uma equação de t_1 é $y - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$. Fazendo $x = x_2$ e $y = 0$, teremos $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, se $f'(x_1) \neq 0$.

Prosseguindo dessa forma, obtemos os valores para $x_3, x_4, \dots x_n, \dots$ A expressão para x_{n+1}, em termos de x_n será então $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, se $f'(x_n) \neq 0$.

Mosraremos agora que a sequência acima, quando converge, seu limite é a raiz r de $f(x) = 0$. Antes, porém, faremos algumas considerações teóricas.

Definição: Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio e $f: X \to \mathbb{R}$ uma função dada. Dizemos que $x_0 \in X$ é ponto fixo de *f* se $f(x_0) = x_0$.

Definição: Uma função $f: X \to \mathbb{R}$ chama-se uma contração quando existe uma constante *k*, $0 < k < 1$ tal que $|f(x) - f(y)| < k \cdot |x - y|$ para quaisquer *x* e *y* em *X*.

Teorema 11: Se $X \subset \mathbb{R}$ é um intervalo fechado então toda contração $f: X \to \mathbb{R}$ possui um único ponto fixo. Mais precisamente, fixando qualquer $x_0 \in X$, a sequência definida por $x_{n+1} = f(x_n)$ converge para o único ponto *a* em *X* tal que $f(a) = a$.

Demonstração

Considerando a observação 3, feita na página 40, é suficiente mostrar que a sequência (x_n) é de Cauchy. Para isto, seja $\varepsilon > 0$ dado e *k* a constante que define a contração *f*. Como $0 < k < 1$, existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{|x_1 - x_0| k^n}{1-k} < \varepsilon$, para quaisquer $n > c$. Além disto verifica-se que $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Decorre disto que se $m > n > c$,

$$|x_m - x_n| = \left| \sum_{i=n}^{m-1} (x_{i+1} - x_i) \right|$$

$$\leq \sum_{i=n}^{m-1} |x_{i+1} - x_i| \leq \sum_{i=n}^{m-1} |x_1 - x_0| \cdot k^i \leq |x_1 - x_0| \cdot \sum_{i=n}^{\infty} k^i = \frac{|x_1 - x_0| \cdot k^n}{1 - k} < \varepsilon.$$

Logo a sequência $x_{n+1} = f(x_n)$ é de Cauchy e portanto converge para algum $a \in X$. Fazendo $n \to \infty$ em $x_{n+1} = f(x_n)$ teremos $a = f(a)$.

Consideremos agora a função $g: [r - u, r + u] \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, onde *f* é duas vezes derivável, $f'(x) \neq 0$ e $f''(x)$ contínua. Mostraremos que g é uma contração e, portanto, pelo teorema acima, a sequência $x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge para o único ponto fixo de g, isto é, existe um único *a* tal que $g(a) = a$. Decorre disto que $f(a) = 0$. Para concluir, resta mostrar que g é uma contração.

Sendo $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, derivando obtemos $g'(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{f'(x)^2}$. Como r é uma raiz de *f*, $f(r) = 0$ e assim $g'(r) = 0$. Como g' é contínua, existe um intervalo fechado *I*, centrado em

r, tal que $|g'(x)| < \frac{1}{2}$ para todo $x \in I$. Se $x, y \in I$, pelo teorema do valor médio $g(x) - g(y) = g'(v)(x - y)$.

Segue então que $|g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$. Então g é uma contração.

As aproximações $x_1, x_2, \ldots$ são obtidas a partir da primeira aproximação x_0, usando as equações das retas tangentes. A reta tangente t_0 no ponto $(x_0, f(x_0))$ tem uma inclinação de $f'(x_0)$. Assim, uma equação de t_0 é

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

x_1 é o ponto de intersecção de t_0 com o eixo $0x$. Assim, substituindo as coordenadas desse ponto na equação acima, segue-se que

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

se $f'(x_0) \neq 0$.

Com esse valor de x_1, uma equação de t_1 é

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

Então, na equação acima, expressando $x = x_2$ e $y = 0$, teremos

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, se $f'(x_1) \neq 0$.

Prosseguindo dessa forma, obtemos a fórmula geral para a aproximação x_{n+1}, em termos da aproximação precedente x_n:

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, se $f'(x_n) \neq 0$.

Assim, o método de Newton para o cálculo de aproximações das raízes de f garante que, sob certas condições e mediante uma escolha apropriada $x_0 \in \mathbb{R}$ a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$, definida por

$a_1 = x_0$ e $a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ (1) para $n \geq 1$ ($f(a_n) \neq 0$), converge para uma raiz de f.

Mostraremos que a_{n+1} é o ponto em que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $\big(a_n, f(a_n)\big)$ intersecta o eixo das abscissas.

De fato, temos que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $\big(a_n, f(a_n)\big)$ tem equação $y - f(a_n) = f'(a_n)(x - x_n)$. Fazendo $y = 0$ nesta equação, segue-se que

$$0 - f(a_n) = f'(a_n)(x - a_n)$$

$$x - a_n = -\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

$$x = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

Comparando esse valor de x com a relação (1), temos que $x = a_{n+1}$, como queríamos demonstrar.

Um caso particular do método de Newton já era conhecido pelos babilônios, que calculavam a raiz quadrada de um número positivo a (ou seja, uma raiz da equação $x^2 - a = 0$) tomando um valor inicial x_1 e, a partir dele, construir as aproximações $x_1, x_2, \dots, x_n$ ... de $\sqrt{a}$ pela fórmula iterativa

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Para mostrar esse fato, vamos considerar a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$, definida por $a_1 = 1$ e, para $k \in \mathbb{Z}$, com $k \geq 1$,

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{a}{a_k}\right)$$

converge para $\sqrt{a}$, com $a > 0$.

Fazendo $f(x) = x^2 - a$, temos que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

se $f'(x_n) \neq 0$.

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{{x_n}^2 - a}{2x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Daí, segue-se que

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{a}{a_k}\right).$$

Exemplos

1. Mostraremos agora como é eficiente o método de Newton para achar raízes reais de uma equação algébrica. Para isso, consideremos a equação $p(x) = 0$ onde $p(x) = x^5 - 5x^2 + 1$. Então $p'(x) = 5x^4 - 10x$. Começamos observando que $p(1) = -3$ é negativo enquanto que $p(2) = 13$ é positivo, logo deve haver uma raiz real de p entre 1 e 2. Para achar essa raiz, tomamos $x_0 = 2$ como ponto de partida. Obtemos sucessivamente

$$x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)} = 2 - \frac{13}{60} = 1{,}783.$$

$$x_2 = x_1 - \frac{p(x_1)}{p'(x_1)} = 1{,}783 - \frac{3{,}124}{32{,}703} = 1{,}687.$$

$$x_3 = x_2 - \frac{p(x_2)}{p'^{(x_2)}} = 1{,}687 - \frac{0{,}434}{23{,}627} = 1{,}667.$$

Poderíamos prosseguir as aproximações, mas não há necessidade, pois 1,668 é uma excelente aproximação para a raiz procurada. Uma aproximação melhor para a raiz procurada seria 1,667977989, tão próxima do valor que obtivemos que não compensa o esforço de prosseguir o cálculo. De um modo geral, no método de Newton, cada aproximação obtida tem o dobro de dígitos exatos da aproximação anterior.

2. Usaremos agora a fórmula $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ para calcular a raiz quadrada aproximada de 2. A partir de um valor inicial (por exemplo $x_1 = 1$), a passagem de uma aproximação (x_n) para a próxima se dá por meio dessa fórmula. Ou seja, a sequência de aproximações sucessivas é definida recursivamente por
   - $x_1 = 1$;
   - $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $a = 2$, os primeiros termos da sequência são

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = 1{,}5$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{a}{x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(1{,}5 + \frac{2}{1{,}5}\right) = 1{,}41666\ldots$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{a}{x_3}\right) = \frac{1}{2}\left(1{,}41666\ldots + \frac{2}{1{,}41666\ldots}\right) = 1{,}414215686\ldots$$

Note que x_4 dá o valor correto de $\sqrt{2}$ com 5 casas decimais.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, aprofundamos o estudo sobre as progressões aritméticas e as progressões geométricas. Estudamos as progressões aritméticas de ordem superior, assunto praticamente não explorado no ensino básico. Demonstramos os principais resultados sobre estes temas. Para tanto usamos com frequência o Princípio da Indução Matemática. Alguns problemas foram enunciados e resolvidos. As progressões aritmético-geométricas também mereceram um destaque especial. Para estas obtivemos a fórmula do termo geral e a da soma dos seus n primeiros termos.

Estudamos de um modo geral as sequências recorrentes, com destaque para os métodos de resolução de equações de recorrência lineares, de primeira e de segunda ordem, homogêneas e não homogêneas. Alguns teoremas e proposições foram enunciados e demonstrados. Alguns exemplos/aplicações foram apresentados e resolvidos. Dentre os resultados apresentados merece destaque o teorema 6 na página 49. Este teorema é uma ferramenta poderosíssima para resolução de alguns problemas de sequências recorrentes. Ele foi utilizado para obter a fórmula do termo geral da sequência de Fibonacci (fórmula de Binet). O teorema 6 possibilitou, também, a resolução do problema das n lâmpadas, apresentado na página 71. Ainda usando o teorema 6, generalizamos o problema do texto PROFMAT, apresentado na página 75.

O problema dos coelhos de Fibonacci foi muito explorado em nosso trabalho. A sequência de Fibonacci foi minuciosamente estudada, com a apresentação de várias proposições, seguidas de suas respectivas demonstrações. Um resultado interessante é a relação entre o triângulo de Pascal e a sequência de Fibonacci, apresentada na página 66.Vale salientar o uso de alguns resultados, da Teoria dos Números e da Análise, na resolução de alguns problemas que se seguiram à sequência de Fibonacci. Dentre estes resultados, destacamos o Lema 1 (Euclides), na página 61 e o Teorema 10 (Bézout), na página 64. Merecem destaque também as aplicações lúdicas, como a pizza de Steiner e a torre de Hanói, nas páginas 78 e 80, respectivamente. Finalizamos o nosso trabalho apresentando o método de Newton para calcular raízes de funções deriváveis, página 82. Definimos contração e enunciamos o teorema do ponto fixo, seguido de sua respectiva demonstração.

Observamos que, por mais que estudemos um tópico matemático, no que tange, principalmente às aplicações, sempre haverá a possibilidade de aparecerem novos problemas interessantes, cuja resolução exige um maior aprofundamento no estudo de tal tópico permitindo o surgimento de novas técnicas de resolução.

Esperamos que a leitura do presente trabalho possa, de algum modo, despertar o interesse, de alunos e professores estudiosos de Matemática, no maravilhoso mundo das sequências recorrentes.

REFERÊNCIAS

ARBIETO, A.; MATHEUS, C.; MOREIRA, C. G.. Aspectos Ergódicos da Teoria dos Números. In: COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA, 26., 2007. [S.l.]. **Anais...** [S.l.]: IMPA, 2007.

BARBOSA, R.; FEITOSA, S. **OBMEP:** Banco de Questões 2016. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Trad. de Hygino H. Domingues. 5.ed Campinas, SP: Unicamp, 2011.

GREEN, B.; TAO, T. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. **Annals of Mathematics,** v. 167, n. 2, p. 481-548, 2008.

IEZZI, G. et al. **Matemática**: ciência e aplicações. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

_______. **Matemática**: 2ª série, 2º grau. 8. ed. rev. São Paulo: Atual, 1990.

HEFEZ, A. **Aritmética.** Rio de Janeiro: SBM, 2014.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A matemática no ensino médio.** 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MARTINEZ, F. B. et al. **Teoria dos Números:** um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro. 2. ed. [S.l.]: Impa, 2011.

MUNIZ NETO, A. C. **Fundamentos de Cálculo.** Rio de janeiro: SBM, 2015.

OLIVEIRA, K.I. M.; FERNANDEZ, A. J. C. **Iniciação à Matemática:** um curso com problemas e soluções. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

SOUZA, J.R. de. **Novo olhar:** matemática. São Paulo: FTD, 2010. (Coleção novo olhar).