UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JONATHAN ARAÚJO BARBOSA

TEORIA DOS NÚMEROS: ALGUNS RESULTADOS E CURIOSIDADES

FORTALEZA – CEARÁ
2017

JONATHAN ARAÚJO BARBOSA

TEORIA DOS NÚMEROS: ALGUNS RESULTADOS E CURIOSIDADES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração. Matemática

Orientador: Prof. Dr. João Montenegro de Miranda

FORTALEZA – CEARÁ

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Barbosa, Jonathan Araújo .
Teoria dos números: alguns resultados e curiosidades [recurso eletrônico] / Jonathan Araújo Barbosa. - 2017 .
1 CD-ROM: il.; 4 ¾ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 97 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2017 .
Área de concentração: Matemática.
Orientação: Prof. Dr. João Montenegro de Miranda.

1. Teoria dos Números. 2. Números triangulares. 3. Progressões. I. Título.

JONATHAN ARAÚJO BARBOSA

TEORIA DOS NÚMEROS: ALGUNS RESULTADOS E CURIOSIDADES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração. Matemática

Aprovada em: 20 de dezembro de 2017

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João Montenegro de Miranda (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará

Prof. Dr. João Marques Pereira
Universidade Estadual do Ceará

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará

Dedico este trabalho a Deus e à minha família, em especial aos meus pais, pois a eles devo tudo que conquistei até aqui.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem ele eu não teria chegado até aqui. À minha família, pelo incansável apoio à minha formação e por ressaltar a cada dia a importância do estudo.

Aos nobres colegas da turma do PROFMAT, pela persistência e amizade, pelas incansáveis horas gastas nos grupos de estudos, pela partilha honesta e sincera do conhecimento.

Aos ilustres professores com os quais ao longo desses dois anos e meio tive o prazer de conviver, seja durante as aulas ou mesmo nas conversas informais, que muito contribuíram para enriquecer-me culturalmente.

Agradeço em especial ao meu orientador professor Dr. João Montenegro de Miranda, pela paciência e pelas sugestões que ajudaram a tornar melhor este trabalho.

De antemão, agradeço àqueles que tiverem coragem e tempo suficientes para ler as próximas páginas.

“Crescer infinitamente em conhecimento e duas vezes mais em humildade.”

“Uma equação não significa nada para mim a não ser que expresse um pensamento de Deus.”

(Srinivasa Ramanujan)

RESUMO

Este trabalho constitui-se em um conjunto de apontamentos relacionados com alguns tópicos da Teoria dos Números. Inicialmente, expõe-se o conceito de divisibilidade e alguns dos critérios de divisibilidade mais utilizados no âmbito escolar. Antes de findado este tema introduzimos o conceito de congruência e provamos através dessa ferramenta o critério de divisibilidade por 11. Posteriormente, definimos os números quadrados perfeitos, explicitando algumas propriedades. Definimos também os ternos pitagóricos e, como não poderia ser diferente, explanamos sobre o máximo divisor comum de dois inteiros não ambos nulos. Outro pilar deste trabalho é o Teorema Fundamental da Aritmética, em consequência do qual foram obtidos resultados de suma importância para seu desenvolvimento. Procuramos intercalar os conceitos, teoremas e proposições com suas respectivas aplicações na resolução de problemas, com vistas a tornar o trabalho mais inteligível e de agradável leitura. Dentre outros relevantes mecanismos abordados é possível citar o Algoritmo de Euclides. Por fim, chegamos aos números triangulares, tópico que consideramos um dos mais ricos. Com sucesso, obtivemos uma expressão para os números triangulares que são também quadrados perfeitos. Dentre outros resultados, podemos enumerar as interessantes relações existentes entre progressões geométricas e os triangulares, bem como as obtidas entre os números triangulares e as progressões aritméticas.

Palavras-chave: Teoria dos Números. Números triangulares. Progressões.

ABSTRACT

This work is constituted in a set of notes related with a few topics of number theory. Initially, we expose the concept of divisibility and some of the most utilized criterions of divisibility in basic school. Before ending this theme was introduced the concept of congruence and a proof of divisibility by eleven , across this tool. Subsequently, we define the square numbers, explaining a few properties. It's defined also the Pythagorean suits and, as this could not be different, talked about the greater common divisor of two integers not both null. Another pillar of this work is the Fundamental Theorem of Arithmetic, in consequence of that were obtained results of major importance to this development . We searched intercalate concepts, theorems and propositions with the respective aplications in the solving of problems, in order to make this work more intelligible and pleasant reading. Among others relevant approached mechanisms is possible to cite the Euclidean Algorithm. At last, we came to triangular numbers, matter that we consider one of the most rich. With success, was achieved an expression to triangular numbers that are too perfect square numbers. Between other earnings, we can enumerate interesting relationships among geometric progressions and triangular numbers, as well as the ones received between triangular numbers and arithmetic progressions.

Keywords: Number Theory. Triangular numbers. Progressions.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As operações básicas apresentadas no contexto matemático são há muito tempo conhecidas e é inegável a importância de sua utilização. Dentre elas destaca-se uma ferramenta denominada divisão euclidiana, fazendo referência ao matemático Euclides, membro da escola platônica e considerado Pai da Geometria. Embora em seu âmbito sejam considerados apenas os números inteiros, sua aplicabilidade na solução de problemas matemáticos cotidianos, ou mesmo questões mais abstratas, não se torna restrita. Este trabalho oferece uma série de consequências da utilização deste conceito, acompanhada a exposição, quando conveniente, pelo uso intercalado de teoremas, proposições e utilização na solução de problemas.

Dessa forma, o texto aqui exposto tem como objetivo principal apresentar inicialmente o conceito de divisão euclidiana, suas principais consequências e inter-relações com outros objetos conceituais mais sofisticados, ressaltando a beleza sem par contida em uma parte simbólica da Teoria dos Números. Quanto aos objetivos específicos, o texto aqui exposto tem por meta servir como referência bibliográfica para os professores da Educação Básica, contribuindo assim para a melhoria de suas formações. Destacam-se as justificativas e exemplificações dadas referentes aos critérios de divisibilidade, um tópico atraente da matemática básica, de constante função na resolução de questões do dia a dia escolar. Isto posto, o desenvolvimento aqui apresentado contém, entre outros fundamentos, um conjunto de resultados inerentes aos quadrados perfeitos, presentes no estudo dos triângulos pitagóricos. Faz-se então uma ligação perspicaz entre álgebra e geometria, dois ramos da Matemática que por muito tempo foram tratados de forma isolada.

Para o bom entendimento desse resumo faz-se necessária a leitura de alguns textos deixados como referência, bem como a intimidade com alguns axiomas referentes às operações matemáticas e particularidades do sistema decimal de numeração, embora faça-se aqui a apresentação de muitos dos objetos em pauta.

Não seria justo deixar de mencionar que esse texto em sua íntegra é fruto das inquietações de seu autor. Da vontade de produzir algo que, se não é novo, então que tenha pelo menos as suas visões, contidas nas pesquisas realizadas e nas horas gastas com o objetivo de desenvolver um trabalho diferente, não ligado a apenas um tópico da Teoria dos Números. Deriva também da dificuldade do autor em sintetizar as ideias em um único tópico, fato esse que talvez seja um ponto positivo, pois tais inquietações e dificuldades geraram o interesse por pesquisar fatos ainda por este desconhecidos. Muitos destes fatos referem-se aos números triangulares. Sobre isso não é pretensioso afirmar que muito até aqui foi aprendido, através de estudos pessoais, por meio de pesquisas na internet e em livros mais raros.

1.1 CONTEXTO HISTÓRICO

A Teoria dos Números compreende o estudo dos números inteiros e suas propriedades. Diz-se ser de autoria do matemático Leopold Kronecker a máxima de que “Deus criou os números naturais e o resto é obra da humanidade”. Contudo, os inteiros positivos representam, sem sombra de dúvida, a primeira criação matemática humana, e é difícil imaginar a humanidade destituída desta habilidade fundamental.

Embora os números naturais constituam, em um certo sentido, o sistema matemático mais elementar, o estudo de suas propriedades tem exercido grande fascínio na mente humana desde as mais remotas épocas da antiguidade, desafiando inúmeras gerações de matemáticos e leigos, que apreciam os seus enunciados simples e intrigantes, cujas demonstrações estão além de qualquer simplicidade.

Dentre os tesouros do antigo Egito se encontra o papiro Rhind descrevendo a matemática praticada no Egito há aproximadamente 2000 anos a.C.. Registros históricos mostram que os sumérios desenvolveram algum tipo de aritmética pois, por volta de 3500 a.C., possuíam um calendário e, por volta de 2500 a.C., desenvolveram um sistema numérico utilizando o número 60 como base. Os babilônios seguiram essa tradição e se tornaram exímios calculistas; tábuas de barro da Babilônia, datando de 2000 a.C., foram encontradas com elaboradas tabelas matemáticas. Ao final do terceiro milênio a.C. tábuas cuneiformes da Mesopotâmia mostravam que a Aritmética já era bastante sofisticada.

Os números foram utilizados nas transações comerciais por mais de 2000 anos até que se pensasse em estudá-los de forma sistemática. A primeira abordagem científica ao estudo dos números inteiros, isto é, a verdadeira origem da teoria dos números, é geralmente atribuída aos gregos. Por volta de 600 a.C. Pitágoras e seus discípulos fizeram vários estudos interessantes. Eles foram os primeiros a classificar os inteiros de várias maneiras: números pares, ímpares, primos, etc.

Na verdade não são exatamente os números naturais que exercem fascínio estético, místico e prático, mas as relações que eles estabelecem entre si. É dentro dessas relações profundas e sutis que se encontra a beleza, encanto e fascínio que os números exercem através das gerações.

A teoria dos números é a área da matemática cujo objetivo é descobrir e estabelecer as relações profundas e sutis que números de tipos diferentes guardam entre si. Por exemplo, considere os quadrados dos números naturais 1, 4, 9, 16, 25,... . Se tomarmos a soma de dois quadrados, eventualmente obteremos como resultado um outro quadrado. O exemplo mais famoso é $3^2 + 4^2 = 5^2$, mas existem outros exemplos: $6^2 + 8^2 = 10^2$, $5^2 + 12^2 = 13^2$, entre uma infinidade. As trinas de números inteiros x, y e z tais que $x^2 + y^2 = z^2$ são chamadas ternos pitagóricos. Porém, ocorre que $2^2 + 5^2 = 29$, que não é um quadrado. Daí, surgem questionamentos como “Existem infinitos ternos pitagóricos?" e “Caso existam, é possível encontrar uma fórmula que os generalize?". Estas são algumas dentre tantas outras questões que a Teoria dos Números busca investigar e responder. Considerada a Rainha da Matemática, a teoria dos números é povoada por uma variedade enorme de objetos, dentre tais objetos estão os números primos, quadrados, perfeitos, de Fermat e de Mersenne. Vale citar também as equações diofantinas, em especial as equações de Pell e muitos outros conceitos de fundamental beleza e aplicabilidade.

“A matemática é a rainha das ciências e a teoria dos números é a rainha da matemática."

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

2 DA DIVISÃO EUCLIDIANA AO MÁXIMO DIVISOR COMUM

Iniciamos este capítulo expondo o conceito de divisibilidade e suas aplicações na obtenção de alguns critérios comumente usados. Destacamos alguns fatos de fundamental importância, chegando ao conceito de congruência, onde apresentamos algumas propriedades que não demonstramos, mas que são de fácil obtenção e cujas demonstrações ficarão como exercício para o leitor. Findamos o capítulo enunciando o Princípio das Casas de Pombo e realizando uma pequena aplicação desta poderosa ferramenta.

2.1 DIVISIBILIDADE

Definição 2.1.1: Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Diz-se que a divide b e denota-se $a \mid b$ se existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot c$. Caso contrário $a \nmid b$. Diz - se também que a é um divisor, ou um fator de b. Mais ainda, diz - se que b é um múltiplo de a, ou que b é divisível por a. Por exemplo:

$2 | 6$ pois $6 = 2 \cdot 3$

$4 | 0$ pois $0 = 4 \cdot 0$

$2 | 2$ pois $2 = 2 \cdot 1$

Proposição 2.1.1: Sejam $a, b, c, d, k \in \mathbb{Z}$. São válidas as seguintes afirmações:

i) $1|a$, $a|a$ e $a|0$.

ii) $0|a \Leftrightarrow a = 0$

iii) $a|b \Leftrightarrow |a|\,|\,|b|$

iv) Se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$.

v) Se $a|b$ e $c|d$, então $ac|bd$.

vi) Se $a|b$, então $a|bk$.

Prova:

i) De imediato tem-se que $a = 1 \cdot a,\ a = a \cdot 1$ e $0 = a \cdot 0$

ii) $(\rightarrow)$

Se $0|a$ então existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 0 \cdot c\ \therefore a = 0$

$(\leftarrow)$

A recíproca também é satisfeita, pois no item i) mostrou -se que $0|0$

iii) $(\rightarrow)$

Se $a|b$ então $\exists\ c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot c\ \therefore\ |b| = |a \cdot c| = |a| \cdot |c|$.

Como $c \in \mathbb{Z}$ tem-se que $|c| \in \mathbb{Z}$, portanto $|a|\ |\ |b|$.

$(\leftarrow)$

Se $|a|\ |\ |b|$ então $\exists\ m \in \mathbb{Z}_+$ tal que $|b| = |a| \cdot m$. Pondo $m = |p|$, com $p \in \mathbb{Z}$, segue que $|b| = |a| \cdot |p| = |a \cdot p| \therefore b = a \cdot p$ ou $b = -(a \cdot p) = a \cdot (-p)$. Portanto $a|b$.

iv) Se $a|b$ e $b|c$ então $\exists\ m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $b = a \cdot m$ e $c = b \cdot n$. Substituindo b nesta última vem:
$c = (a \cdot m) \cdot n = a \cdot (m \cdot n)$. Como m e n são inteiros $m \cdot n$ também o é, e portanto $a|c$.

v) Se $a|b$ e $c|d$ então $\exists\ m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $b = a \cdot m$ e $d = c \cdot n\ \therefore bd = (a \cdot m) \cdot (c \cdot n) = (ac) \cdot (mn) \therefore ac|bd$.

vi) Se $a|b$ então $\exists\ m \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot m\ \therefore bk = a \cdot (mk) \therefore a|bk$. ■

Nas provas feitas até aqui se supõe que o leitor tenha intimidade com o fato de que o produto de dois números inteiros resulta em um inteiro.

Proposição 2.1.2: Sejam $a, b_1, b_2, \cdots, b_n$ inteiros quaisquer tais que $a|b_j$, $\forall\ 1 \leq j \leq n-1$. Se, $a|b_1 \pm b_2 \pm \cdots \pm b_{n-1} \pm b_n$ então $a|b_n$.

Prova:

Por hipótese $\exists\ c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}, k \in \mathbb{Z}$ tais que $b_1 = a \cdot c_1, b_2 = a \cdot c_2, \dots \dots, b_{n-1} = a \cdot c_{n-1}$ e $b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \cdots \pm b_{n-1} \pm b_n = a \cdot k$. Daí $ac_1 \pm ac_2 \pm \cdots \pm ac_{n-1} \pm b_n = a \cdot k \therefore ac_1 \pm ac_2 \pm \cdots \pm ac_{n-1} - ak = \pm b_n \therefore b_n = a \cdot (\pm c_1 \pm c_2 \pm \cdots \pm c_{n-1} \pm k)$. Portanto, $a|b_n$.

■

2.2 ALGUNS CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Para o que segue será utilizada a expansão de um número natural qualquer no sistema decimal. Assim, seja $M = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$. Sabe-se que $M = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$, onde $0 \leq a_i \leq 9$, $\forall\ 0 \leq i \leq n$.

Divisibilidade por 2

$2|M \iff 2|a_0$.

Prova:

$2|M \iff 2|a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$. Como $2|10^k, \forall\ k \in \mathbb{N}$, segue-se que $2|a_n \cdot 10^n, a_{n-1} \cdot 10^{n-1}, \dots, a_1 \cdot 10 \therefore 2|a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10$ e pela proposição anterior , $2|a_0$. Assim, $2|M \iff 2|a_0$.

Exemplo: O número 10.000.342.444.476 é divisível por 2.

Divisibilidade por 3

$3|M \Leftrightarrow 3|a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$.

Prova: $3|M \Leftrightarrow 3|a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 =$

$a_n \cdot 10^n - a_n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} - a_{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 - a_1 + (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0)$

$= a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \cdots + a_1(10 - 1) + (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0)$.

Utilizando indução sobre j é possível provar sem dificuldade que

$3|(10^j - 1), \forall\, j \in \mathbb{Z}_+$, o que implica que $3|a_j \cdot (10^j - 1), \forall\, j \in \mathbb{Z}_+$. Novamente pela proposição 2.1.2

$3|a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$. Portanto, $3|M \Leftrightarrow 3|a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$

Exemplo: O número 123.321 é divisível por 3 pois $3|1 + 2 + 3 + 3 + 2 + 1 = 12$.

Divisibilidade por 4

$4|M \Leftrightarrow 4|a_1 a_0$.

Prova: $4|M \Leftrightarrow 4|a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$. Como $4|100$ é correto afirmar que $4|10^k, \forall\, k \geq 2$, já que tais potências de 10 são múltiplos de 100. Segue-se que $4|M \Leftrightarrow 4|a_1 \cdot 10 + a_0 \Leftrightarrow 4|a_1 a_0$.

Exemplo: O número 5.678.766.543.345.716 é divisível por 4 pois $4|16$.

Divisibilidade por 5

$5|M \Leftrightarrow a_0 = 0\ ou\ 5$.

Prova: $5|M \Leftrightarrow 5|a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$. Como $5|10$, tem-se que $5|10^k, \forall\, k \in \mathbb{N}$, já que tais potências são múltiplos de 10 . Portanto $5|M \Leftrightarrow 5|a_0 \Leftrightarrow a_0 = 0\ ou\ 5$.

Exemplo: O número 111.111.115 é divisível por 5 pois $a_0 = 5$.

Divisibilidade por 6

$6|M \Leftrightarrow 6|4 \cdot (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1) + a_0$.

Prova: Antes de demonstrarmos este critério provaremos, utilizando a primeira forma do Princípio de Indução Finita, o seguinte: $6|10^k - 4, \forall\, k \in \mathbb{N}$.

i) A propriedade é válida para $k = 1$ pois $k = 1 \Longrightarrow 10^k - 4 = 10^1 - 4 = 10 - 4 = 6$ e $6|6$.

ii) Suponha que $6|10^k - 4$, para algum $k \in \mathbb{N}$.

iii) Devemos verificar se $6|10^{k+1} - 4$. Ora, a hipótese de indução nos diz que $\exists\, m \in \mathbb{Z}$ tal que $10^k - 4 = 6 \cdot m$, ou seja, $10^k = 6 \cdot m + 4 \therefore 10^{k+1} = 60 \cdot m + 40 \therefore 10^{k+1} - 4 = 60 \cdot m + 36 = 6 \cdot (10 \cdot m + 6) \therefore 6|10^{k+1} - 4$.

Prossigamos com a prova do critério:

$6|M \Leftrightarrow 6|a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 \Leftrightarrow$

$6|a_n \cdot 10^n - 4 \cdot a_n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} - 4 \cdot a_{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 - 4 \cdot a_1 + (4 \cdot a_n + 4 \cdot a_{n-1} + \cdots + 4 \cdot a_1 + a_0) \Leftrightarrow 6|a_n \cdot (10^n - 4) + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 4) + \cdots + a_1(10 - 4) + (4a_n + 4a_{n-1} + \cdots + 4a_1 + a_0)$. Como ficou provado acima que $6|10^k - 4, \forall\, k \in \mathbb{N}$, segue-se que $6|M \Leftrightarrow 6|4 \cdot (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1) + a_0$.

Exemplo: O número 3.020.544 é divisível por 6 pois $6 \mid 4 \cdot (3 + 0 + 2 + 0 + 5 + 4) + 4 = 60$.

Divisibilidade por 7

Proposição 2.2.1 Sejam $a, b, c, r \in \mathbb{N}$ tais que $a = 10 \cdot c + r$ e $b = c - 2 \cdot r$. Então $7|a \Leftrightarrow 7|b$.

Prova:

$(\longrightarrow)$ $7|a \Longrightarrow 7|10 \cdot c + r \therefore 7|(10 \cdot c + r) \cdot (-2) = -20 \cdot c - 2 \cdot r = 21 \cdot (-c) + (c - 2 \cdot r)$. Como $7|21 \cdot (-c)$, resta que $7|c - 2 \cdot r \therefore 7|b$.

$(\longleftarrow)$ $7|b \Longrightarrow 7|c - 2 \cdot r \therefore 7|(c - 2 \cdot r) \cdot 10 = 10 \cdot c - 20 \cdot r = 21 \cdot (-r) + (10 \cdot c + r)$. Analogamente, como $7|21 \cdot (-r)$, resta que $7|10 \cdot c + r \therefore 7|a$.

■

Critério: O número $M = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ é divisível por 7 se, e somente se, o número $a_n a_{n-1} \dots a_1 - 2 \cdot a_0$ é múltiplo de 7.

Justificativa: Voltando à proposição 2.2.1, pondo $c = a_n a_{n-1} \dots a_1$ e $r = a_0$ tem-se $a = 10 \cdot c + r = 10 \cdot (a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_1) + a_0 = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 = M$ e $b = c - 2 \cdot r = a_n a_{n-1} \dots a_1 - 2 \cdot a_0$. Portanto, $7|M \Leftrightarrow 7|a_n a_{n-1} \dots a_1 - 2 \cdot a_0$.

Exemplo: O número 1519 é divisível por 7, pois

$151 - 2 \cdot 9 = 151 - 18 = 133$

$13 - 2 \cdot 3 = 13 - 6 = 7$ e $7|7$.

Divisibilidade por 8

$8|M \Leftrightarrow 8|a_2 a_1 a_0$.

Prova: $8|M \Leftrightarrow 8|a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$. Como qualquer múltiplo de 1000 é divisível por 8, ou seja, $8|10^k, \forall\, k \geq 3$, segue-se que

$8|\, a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_3 \cdot 10^3$, logo $8|M \Leftrightarrow 8|a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 = a_2 a_1 a_0$.

Exemplo: O número 3.876.240 é divisível por 8, pois $8|240$.

Divisibilidade por 9

$9|M \Leftrightarrow 9|a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$.

Prova: Sabe-se que, $\forall\, k \in \mathbb{N}, 10^k - 1 = (9+1)^k - 1 = \binom{k}{0} \cdot 9^k + \binom{k}{1} 9^{k-1} + \cdots + \binom{k}{k-1} \cdot 9 \therefore 9|10^k - 1$. Ocorre que $9|M \Leftrightarrow 9|a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 \Leftrightarrow 9|a_n \cdot 10^n - a_n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} - a_{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 - a_1 + (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0) = a_n \cdot (10^n - 1) + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + \cdots + a_1 \cdot (10 - 1) + (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0)$

É fácil provar por indução que $9|10^j - 1, \forall\, j \in \mathbb{Z}_+$. Assim, resta que $9|M \Leftrightarrow 9|a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$.

Exemplo: O número 12.345.678 é divisível por 9, pois $9|1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$.

Divisibilidade por 10

$10|M \Leftrightarrow a_0 = 0$.

Prova: É fácil notar que $M = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 = 10 \cdot (a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_1) + a_0$. Logo, $10|M \Leftrightarrow 10|a_0 \therefore a_0 = 0$.

Exemplo: O número 1.234.560 é divisível por 10.

Definição 2.2.1: Dado $x \in \mathbb{R}$, denomina-se parte inteira de x o número $\lfloor x \rfloor = max\{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\}$.

Isto também significa que $\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1$.

Assim, por exemplo, $\lfloor \sqrt{5} \rfloor = 2$.

Proposição 2.2.2: (Divisão euclidiana): Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, existem únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que $a = bq + r$, com $0 \leq r < |b|$. Além disso, se $b > 0$, então $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ e $r = a - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor b$. Os números q e r são denominados, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de a por b.

Prova:

Existência:

Se $b > 0$, tome q o maior inteiro tal que $bq \leq a$. Logo, $bq \leq a < b(q + 1) \therefore 0 \leq a - bq < b$. Assim, basta definir $r = a - bq$. Além disso, como $b > 0$, segue-se que $\frac{0}{b} \leq \frac{a-bq}{b} < \frac{b}{b} \therefore 0 \leq \frac{a}{b} - q < 1 \therefore \left\lfloor \frac{a}{b} - q \right\rfloor = 0 \therefore \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor - \lfloor q \rfloor = 0 \therefore q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$.

Se $b < 0$ então $-b > 0$, logo existem q, r inteiros tais que $a = (-b)q + r$, com $0 \leq r < -b$. Daí, $a = b(-q) + r$, com $0 \leq r < -b = |b|$.

Unicidade:

Suponha que existam inteiros q_1, r_1, q_2, r_2 tais que $a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$, onde $0 \leq r_1, r_2 < |b|$. Tem-se que $|r_1 - r_2| < |b|$ e $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$. Se $q_1 \neq q_2$ então $|q_1 - q_2| \geq 1 \therefore |b| \leq |b| \cdot |q_1 - q_2| = |b(q_1 - q_2)| = |r_2 - r_1| < |b|$, que é uma contradição. Portanto, $q_1 = q_2$, o que implica $r_1 = r_2$. ■

2.3 CONGRUÊNCIAS

Definição 2.3.1: Sejam a e b dois inteiros quaisquer e m um inteiro positivo maior do que 1. Diz-se que a é congruente a b módulo m, e denota-se $a \equiv b(mod\, m)$, se $m|(a - b)$.

Proposição 2.3.1: Dados a e b dois inteiros quaisquer e m um inteiro positivo maior do que 1, tem-se que $a \equiv b(mod\, m)$ se, e somente se, a e b deixam o mesmo resto quando divididos por m.

Prova: Pela simplicidade do argumento, inicialmente disponibiliza-se a prova de que se a e b deixam o mesmo resto quando divididos por m, então $a \equiv b(mod\, m)$. Ora, por hipótese existem q_1, q_2 e r inteiros tais que $a = mq_1 + r$ e $b = mq_2 + r$, com $0 \leq r < m$. Daí, $a - b = m(q_1 - q_2) \therefore m|a - b \therefore a \equiv b(mod\, m)$. Agora, suponha que existam inteiros q_1, q_2, r_1 e r_2 tais que $a = mq_1 + r_1$ e $b = mq_2 + r_2$, com $0 \leq r_1, r_2 < m$. Como $m|a - b = m(q_1 - q_2) + r_1 - r_2$, segue que $m|r_1 - r_2 \therefore m|\,|r_1 - r_2|$. Porém, $0 \leq |r_1 - r_2| < m$, assim a única alternativa é $|r_1 - r_2| = 0 \therefore r_1 = r_2$. ■

Proposição 2.3.2: Dados a, b, c e d inteiros quaisquer e m um inteiro positivo maior do que 1, são válidos os seguintes resultados:

i) $a \equiv b(mod\, m) \Leftrightarrow b \equiv a\,(mod\, m)$

ii) $a \equiv b(mod\, m) \Leftrightarrow a^n \equiv b^n(mod\, m), \forall\, n \in \mathbb{Z}_+$

iii) $a \equiv b(mod\, m) \Leftrightarrow ac \equiv bc(mod\, m)$

iv) $a \equiv b(mod\, m)\; e\; b \equiv c(mod\, m) \Rightarrow a \equiv c(mod\, m)$

v) $a \equiv b(mod\ m)\ e\ c \equiv d(mod\ m) \Rightarrow \begin{cases} a + c \equiv b + d(mod\ m) \\ a - c \equiv b - d(mod\ m) \end{cases}$

vi) $a \equiv b(mod\ m)\ e\ c \equiv d(mod\ m) \Rightarrow a \cdot c \equiv b \cdot d(mod\ m)$

Critério de Divisibilidade por 11

$11|M = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 \Leftrightarrow 11|a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^{n-1}a_{n-1} + (-1)^n a_n$

Prova: Como $10 \equiv -1(mod\ 11)$, segue do item ii da proposição 2.3.2 que $10^k \equiv (-1)^k(mod\ 11), \forall\ k \in \mathbb{Z}_+$, logo:

$$10^k \equiv \begin{cases} 1, se\ k\ par \\ -1, se\ k\ ímpar \end{cases}$$

Chega-se ao seguinte sistema de congruências:

$$\begin{cases} a_0 \equiv a_0(mod\ 11) \\ 10a_1 \equiv -a_1(mod\ 11) \\ \vdots \\ a_{n-1}10^{n-1} \equiv (-1)^{n-1}a_{n-1}(mod\ 11) \\ a_n 10^n \equiv (-1)^n a_n(mod\ 11) \end{cases}$$

Resta que $a_0 + a_1 \cdot 10 + \cdots + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_n \cdot 10^n \equiv a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot a_{n-1} + (-1)^n \cdot a_n(mod\ 11) \therefore M \equiv a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot a_{n-1} + (-1)^n \cdot a_n(mod\ 11)$, portanto, $11|M = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 \Leftrightarrow 11|a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^{n-1}a_{n-1} + (-1)^n a_n$.

Assim, por exemplo, o número 1914 é divisível por 11, pois $11|a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 4 - 1 + 9 - 1 = 11$.

Problema: Um inteiro positivo é um palíndromo se a sua representação decimal é igual quando lida da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita. Demonstre que todo palíndromo com um número par de dígitos é divisível por 11.

Solução: Seja $N = a_0a_1 \dots a_na_n \dots a_1a_0$. Tal número é um palíndromo e possui $2n+2$ dígitos. Tem-se que $N = a_0 \cdot 10^{2n+1} + a_1 \cdot 10^{2n} + \cdots + a_n \cdot 10^{n+1} + a_n \cdot 10^n + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$, logo, pelo critério acima, $11|N \Leftrightarrow 11|a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^n \cdot a_n + (-1)^{n+1} \cdot a_n + \cdots + (-1)^{2n} \cdot a_1 + (-1)^{2n+1} \cdot a_0 = [(-1)^0 + (-1)^{2n+1-0}] \cdot a_0 + [(-1)^1 + (-1)^{2n+1-1}] \cdot a_1 + \cdots + [(-1)^n + (-1)^{2n+1-n}] \cdot a_n = \sum_{i=0}^{n}\left[(-1)^i + (-1)^{2i+1-i}\right] \cdot a_i$. Ocorre que $(-1)^{2n+1-i} = \frac{(-1)^{2n+1}}{(-1)^i} = \frac{-1}{[(-1)^{-1}]^i} = \frac{-1}{(-1)^{-i}} = (-1) \cdot (-1)^i = (-1)^{i+1}$. Como os números i e $i+1$ possuem paridades distintas, $(-1)^i + (-1)^{i+1} = 0, \forall\, 0 \leq i \leq n$. Portanto, $11|N \Leftrightarrow 11|0$ e como é verdade que $11|0$, finalmente conclui-se que $11|N$. A título de ilustração, este resultado garante que o número 1.234.554.321 é um múltiplo de 11.

2.4 QUADRADOS PERFEITOS

Definição 2.4.1: Um inteiro positivo m é denominado um quadrado perfeito, ou simplesmente um quadrado, se $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $m = n^2$.

Proposição 2.4.1: Nenhum número da forma $4k+2$, com $k \in \mathbb{Z}$, é um quadrado.

Prova: Seja x um inteiro qualquer. Sabe-se, da divisão Euclidiana, que $\exists\, m, r \in \mathbb{Z}$ tais que $x = 2 \cdot m + r$, com $0 \leq r < 2$. Daí, $x^2 = (2 \cdot m + r)^2 = 4 \cdot m^2 + 4 \cdot m \cdot r + r^2 = 4 \cdot (m^2 + mr) + r^2$. Como $r = 0$ ou 1, segue-se que $x^2 = 4 \cdot k$ ou

$x^2 = 4 \cdot k + 1$.

■

Proposição 2.4.2: A soma dos quadrados de dois inteiros ímpares não pode ser um quadrado.

Prova: Sejam a e b tais inteiros. Se a e b são ímpares, então $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}$ tais que $a = 2 \cdot p + 1$ e $b = 2 \cdot q + 1$. Com isso, $a^2 + b^2 = (2 \cdot p + 1)^2 + (2 \cdot q + 1)^2 = 4(p^2 + q^2 + p + q) + 2$, logo, pela proposição 2.4.1, $a^2 + b^2$ não é um quadrado.

■

Proposição 2.4.3: Todo quadrado é da forma $5k$ ou $5k \pm 1$.

Prova: Sejam $x, q, r \in \mathbb{Z}$ tais que $x = 5 \cdot q + r$, com $0 \leq r \leq 4$. Tem-se que $x^2 = 5m + r^2$, de onde resulta $r = 0, 1, 4, 9$ *ou* 16. Como $4 = 5 - 1$, $9 = 10 - 1$ e $16 = 15 + 1$, resta que todo quadrado é da forma $5k$ ou $5k \pm 1$. ■

Aplicação: (UNIAO SOVIÉTICA) Seja $n > 3$ um inteiro. Mostre que o número

$1! + 2! + 3! + \cdots + n!$ nunca é um quadrado perfeito.

Solução: Se $n = 4$ então $1! + 2! + 3! + 4! = 33$, que não é um quadrado. Se $n \geq 5$ então $1! + 2! + 3! + \cdots + n! = 1! + 2! + 3! + 4! + 5k$, com $k \in \mathbb{Z}$, ou seja,

$1! + 2! + 3! + \cdots + n! = 5k + 33 = 5(k + 6) + 3$, dai, $1! + 2! + 3! + \cdots + n!$ não é quadrado.

2.5 TERNOS PITAGÓRICOS

Definição 2.5.1: Um terno (x, y, z) de inteiros positivos tais que $x^2 + y^2 = z^2$ é denominado um terno Pitagórico. Tal nome provém do fato de que x, y e z determinam, nessas condições, um triângulo retângulo de catetos x e y e hipotenusa z .

Proposição 2.5.1: Se o terno (x, y, z) é Pitagórico, então x e y não podem ser ambos ímpares, além disso, pelo menos um dentre x, y e z é um múltiplo de 5.

Prova: A proposição 2.4.2 garante que a soma dos quadrados de dois inteiros ímpares não pode ser um quadrado, e como deve ser $x^2 + y^2 = z^2$, resta que x e y não podem ser ambos ímpares. Para a segunda parte, suponha que x, y e z não são múltiplos de 5. Logo, $x^2 = 5k + 1$ e $y^2 = 5k' + 1$, ou $x^2 = 5k - 1$ e $y^2 = 5k' - 1$. Daí, $z^2 = x^2 + y^2 = 5(k + k') \pm 2$, o que contradiz a **proposição 2.4.3**. ■

2.6 O MÁXIMO DIVISOR COMUM (MDC)

Definição 2.6.1: Sejam a e b dois inteiros, não ambos nulos. Denomina-se o máximo divisor comum de a e b, denotado por (a, b), o maior inteiro que divide a e b.

Por exemplo: (4, 6) = 2, (15, 25) = 5, (3, 7) = 1. Caso seja $(a,\ b) = 1$, diz-se que a e b são primos entre si, ou coprimos.

Teorema 2.6.1: (Bézout): Se x e y são inteiros não ambos nulos e $d = (x,\ y)$, então existem m, n inteiros tais que $mx + ny = d$.

Demonstração: Considere o conjunto $C = \{ax + by; a, b \in \mathbb{Z}\}$ de todos os inteiros positivos que são combinações lineares de x e y. Como a e b são inteiros quaisquer, fazendo $a = x$ e $b = y$ tem-se que $ax + by = x^2 + y^2 > 0$. Com isso é possível garantir que C é não vazio, logo, pelo Princípio da Boa Ordenação, tal conjunto possui um menor elemento k, ou seja, $\exists\, u, v \in \mathbb{Z}\,; k = ux + vy$ e $k \leq j, \forall j \in C$. Por hipótese, $d|x$ e $d|y$, portanto, $d|ux$ e $d|vy$, logo $d|ux + vy = k \therefore d \leq k$. Porém, não pode ser $d < k$, pois k é o menor elemento de C. Resta então que $k = d$. Portanto, pondo $u = m$ e $v = n$ fica provado que $d = (x,\ y) \Longrightarrow \exists\, m, n \in \mathbb{Z}\,; mx + ny = d$.

■

Definição 2.6.2: Um número inteiro $p > 1$ é denominado um número primo se seus únicos divisores positivos são 1 e p. Se $p > 1$ não é primo diz-se que p é composto.

2.6.1 Algumas propriedades do MDC

M1) Se $(a,\ b) = 1$, $a|c$ e $b|c$, então $ab|c$.

Prova: Pelo teorema 2.6.1, $(a, b) = 1 \Longrightarrow \exists\, m, n \in \mathbb{Z}\,; ma + nb = 1$. Como $a|c$ e $b|c$, $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}$; $c = ap$ e $c = bq$, logo $ma + nb = 1 \Longrightarrow mac + nbc = c \therefore mabq + nbap = c \therefore ab(mq + np) = c \therefore ab|c$. ■

M2) Se $(a,\ b) = 1$ e $a|bc$, então $a|c$.

Prova: $(a,\ b) = 1 \Longrightarrow \exists\ m, n\ \in \mathbb{Z};\ ma + nb = 1$. Como $a|bc$, segue-se que $\exists\ k\ \in \mathbb{Z}$ tal que $bc = ak$. Logo, $ma + nb = 1 \Longrightarrow mac + nbc = c \therefore mac + nak = c \therefore a(mc + nk) = c \therefore a|c$. ■

M3) Se p é primo e $p \nmid a$, então $(a,\ p) = 1$.

Prova: Seja $d = (a,\ p)$, logo $d|a$ e $d|p$. Como p é primo, $d = 1$ ou $d = p$, porém $p \nmid a$, portanto $d = 1$. ■

M4) Se p é primo e $p|ab$, então $p|a$ ou $p|b$.

Prova: Suponha que $p \nmid a$. Pela propriedade M3, $(a,\ p) = 1$ e como $p|ab$, segue da propriedade M2 que $p|b$. Ao supor que $p \nmid b$ conclui-se, analogamente, que $p|a$. ■

Proposição 2.6.1: Todo quadrado é da forma $3k$ ou $3k + 1$.

Prova: Seja x um inteiro qualquer. Sabe-se que $\exists\ m, r\ \in \mathbb{Z}$ tais que $x = 3 \cdot m + r$. Como $r = 0{,}1$ ou 2, tem-se que $r^2 = 0, 1$ ou $4 = 3 + 1$. Portanto, x^2 é da forma $3k$ ou $3k + 1$.
■

Proposição 2.6.2: Se (x, y, z) é um terno Pitagórico, então $6|xy$.

Prova: Como $x^2 + y^2 = z^2$ os quadrados x^2 e y^2 não podem ser ambos da forma $3k + 1$, pois isso acarreta $z^2 = 3k' + 2$, o que contradiz a proposição 2.6.1. Assim, $3|x^2$ ou $3|y^2$. Como 3 é primo, segue-se que $3|x$ ou $3|y$. Além disso, já se sabe que x e y não podem ser ímpares simultaneamente, logo, $2|x$ ou $2|y$. Sem prejuízo, suponha que $2|x$ e $3|x$. Como $(2,\ 3) = 1$, segue da propriedade M1 que $2 \cdot 3|x \therefore 6|x \therefore 6|xy$. Se $2|x$ e $3|y$, do item v da proposição 2.1.1, segue-se que $2 \cdot 3|x \cdot y \therefore 6|xy$. Nos demais casos chega-se ao mesmo resultado.
■

Lema 2.6.1: (EUCLIDES): Todo inteiro $n > 1$ pode ser expresso como o produto de um número finito de primos, não necessariamente distintos.

Prova: Utiliza-se indução sobre n.

i) Se $n = 2$, como 2 é primo e $\prod_{i=1}^{1} a_i := a_1$, isto é, o produto de uma única parcela é por definição a própria parcela, o resultado é válido.

ii) Suponha que todo inteiro n tal que $2 \leq n \leq m - 1$ pode ser expresso como o produto de um número finito de primos.

iii) É preciso verificar se o mesmo ocorre para m. Se m é primo, não há nada a provar. Se m é composto, então $\exists\, a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $m = ab$, com $1 < a, b < m$. Assim, pela hipótese de indução, $\exists\, r, t \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_t$ primos, tais que $a = p_1 \dots p_r$ e $b = q_1 \dots q_t$. Logo, $m = ab = (p_1 \dots p_r) \cdot (q_1 \dots q_t)$, ou seja, m também é o produto de um número finito de primos. ■

Teorema 2.6.2: (Teorema Fundamental da Aritmética): Todo inteiro $n > 1$ pode ser escrito como o produto de potências de primos distintos. Ademais, tal decomposição de n é única, a menos de uma reordenação de fatores, ou seja:

Se $n = {p_1}^{\alpha_1} \dots {p_r}^{\alpha_r} = {q_1}^{\beta_1} \dots {q_t}^{\beta_t}$, onde $p_1 < \cdots < p_r$ e $q_1 < \cdots < q_t$ são números primos e $\alpha_i, \beta_j \geq 1$ são inteiros, então $r = t$ e, para $1 \leq i \leq r$, $p_i = q_i$ e $\alpha_i = \beta_i$.

Mais detalhadamente, isto significa que os primos que figuram na decomposição de n são os mesmos, suas quantidades de fatores não se alteram, no máximo ocorrem apenas permutações das potências de primos já obtidas.

Por exemplo, $67.500 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4 = 3^3 \cdot 5^4 \cdot 2^2$.

Demonstração: Como no lema 2.6.1 os primos que aparecem na decomposição de n não são necessariamente distintos, ao agrupar primos iguais tem-se que todo inteiro $n > 1$ pode ser escrito na forma $n = {p_1}^{\alpha_1} \dots {p_r}^{\alpha_r}$, onde $p_1, \dots, p_r$ são primos dois a dois distintos e $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}$. Assim, fica estabelecida a existência da representação. Passemos à prova da unicidade. Suponha que o inteiro $n > 1$ admite duas decomposições como no enunciado. Como $p_1 | n$, tem-se que $p_1 | {q_1}^{\beta_1} \cdot \dots \cdot {q_t}^{\beta_t}$. Além disso, o fato de p_1 ser primo implica que p_1 divide algum ${q_j}^{\beta_j}$, com $1 \leq j \leq t$. Novamente, a primalidade de p_1 garante que $p_1 | q_j$, para algum $1 \leq j \leq t$. Como cada q_j também é primo, resta que $p_1 = q_j$. Por outro lado, $q_1|n$, logo $q_1|p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_r^{\alpha_r}$. Da primalidade de q_1 segue que $q_1|p_i$, para algum $1 \leq i \leq r$. Como cada p_i é primo, a única opção é $q_1 = p_i$. Assim, $p_1 = q_j \geq q_1 \therefore\ p_1 \geq q_1$. Além disso, $q_1 = p_i \geq p_1 \therefore q_1 \geq p_1$. Logo, tem-se que $p_1 = q_1$. Agora cabe provar que $\alpha_1 = \beta_1$. Se $\alpha_1 < \beta_1$, então $p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_r^{\alpha_r} = p_1^{\beta_1 - \alpha_1} q_2^{\beta_2} \cdot ... \cdot q_t^{\beta_t} \therefore p_1|p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_r^{\alpha_r}$, já que $\beta_1 - \alpha_1 > 0$. Porém, isso é uma contradição, pois obriga que exista $2 \geq i \geq r$ tal que $p_1 = p_i$. Analogamente é possível concluir que não pode ser $\alpha_1 > \beta_1$, portanto $\alpha_1 = \beta_1$. Consequentemente, $p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_r^{\alpha_r} = q_2^{\beta_2} \cdot ... \cdot q_t^{\beta_t}$. Repetindo o mesmo processo um número finito de vezes conclui-se que $p_2 = q_2$ e $\alpha_2 = \beta_2$, $p_3 = q_3$ e $\alpha_3 = \beta_3$, etc. Finalmente, se $r < t$, então $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_r^{\alpha_r} = q_1^{\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot q_r^{\alpha_r} \cdot q_{r+1}^{\beta_{r+1}} \cdot ... \cdot q_t^{\beta_t} \therefore 1 = q_{r+1}^{\beta_{r+1}} \cdot ... \cdot q_t^{\beta_t}$, o que é um absurdo. Se $r > t$ a contradição é análoga. Portanto, $r = t$ e fica provado o teorema. ■

Tal forma de representar um inteiro $n > 1$ denomina-se a sua fatoração ou decomposição canônica em fatores primos. Uma consequência interessante desse fato é a obtenção de uma fórmula para o cálculo da quantidade de divisores positivos de um inteiro $n > 0$. Em símbolos, se $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_r^{\alpha_r}$ é a fatoração de n e D é o conjunto dos divisores positivos de n, então $\#D = (\alpha_1 + 1) \cdot ... \cdot (\alpha_r + 1)$. Para provar isto basta observar que a maior potência de p_1 capaz de dividir n é $p_1^{\alpha_1}$, assim, se m é um divisor positivo de n, então na decomposição em fatores primos deste divisor as únicas opções de expoentes de p_1 são $0, 1, ..., \alpha_1$, totalizando $\alpha_1 + 1$ escolhas possíveis. O raciocínio é o mesmo para os demais primos que aqui figuram, logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, $(\alpha_1 + 1) \cdot ... \cdot (\alpha_r + 1)$ é o total de divisores positivos de n. Por exemplo, se $n = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ então n possui $(2 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 12$ divisores positivos.

Proposição 2.6.3: Se a e b são tais que $(a,\ b) = 1$ e ab é um quadrado, então a e b são quadrados.

Prova: Seja $c \in \mathbb{N}$ tal que $ab = c^2$. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, existem $p_1, \dots, p_r$ primos distintos dois a dois, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ naturais tais que

$c = {p_1}^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot {p_r}^{\alpha_r} \therefore c^2 = {p_1}^{2\alpha_1} \cdot \dots \cdot {p_r}^{2\alpha_r}$. Considere o primo p_1. Como $(a,\ b) = 1$ segue-se que p_1 não pode ser um divisor comum de a e b. Mais precisamente, o primo p_1 figura apenas na fatoração de a, ou apenas na fatoração de b. Sem prejuízo, suponha que $p_1 | a$. Logo, todos os fatores p_1 que aparecem na decomposição canônica de c^2 são herdados de a. Como tal quantidade é par, conclui-se que a possui uma quantidade par de fatores p_1 em sua decomposição canônica. Novamente, sem prejuízo algum, suponha que $p_2, \dots, p_m$ com $1 < m < r$ sejam todos os outros primos que constam na fatoração de a. Seguindo o mesmo raciocínio tem-se que a possui uma quantidade par de cada um destes primos em sua decomposição, portanto, $\exists\ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m \in \mathbb{N}$ tais que $a = {p_1}^{2\gamma_1} \cdot {p_2}^{2\gamma_2} \cdot \dots \cdot {p_m}^{2\gamma_m} = ({p_1}^{\gamma_1} \cdot {p_2}^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot {p_m}^{\gamma_m})^2$, ou seja, a é um quadrado. Assim, resta que $p_{m+1}, \dots, p_r$ são todos os primos que figuram na fatoração de b e cada um deles consta uma quantidade par de vezes na decomposição de c^2, portanto b é um quadrado. ■

PROBLEMA: Sejam $x \in A = \{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$ e $(xx,\ xxx, xxxx, \dots)$ uma sequência infinita em que todos os termos são números cujos dígitos são todos iguais a x. Mostre que nenhum número nesta sequência é um quadrado.

Solução: Observe que $xx = x \cdot 11$, $xxx = x \cdot 111$, $xxxx = x \cdot 1111$ e assim por diante, ou seja, cada número desta sequência é igual ao produto de x por um número formado apenas por $1's$. Seja $m = 111 \dots 111$, com n dígitos, um destes tais números. Logo, $m = 111 \dots 100 + 11$ e como qualquer número cujos algarismos das unidades e das dezenas são ambos iguais a zero é divisível por 4, segue-se que $\exists\ a \in \mathbb{Z}$ tal que $111 \dots 100 = 4 \cdot a$. Com isso, $m = 4 \cdot a + 11 = 4(a + 2) + 3$ e é sabido que um quadrado não pode ser da forma $4k + 3$. Para os casos $x = 2{,}4{,}6\ ou\ 8$ é fácil verificar que $(x, 111 \dots 111) = 1$ pois os números da sequência $(11{,}111{,}1111, \dots)$ são todos ímpares, daí não apresentam fatores iguais a 2 em suas decomposições. Obviamente, tem-se que $(x, 111 \dots 111) = 1$ também no caso $x = 1$. Por fim, no caso $x = 5$ são cumpridas as hipóteses da propriedade M3. Portanto, como $(x, 111 \dots 111) = 1, \forall\, x\ \in A$, e nenhum número da forma $111 \dots 111$ é um quadrado, a proposição 2.6.3 garante que não existe quadrado na sequência $(xx, xxx, xxxx, xxxxx, \dots)$.

É pertinente que a curiosidade o leve a perguntar: existe quadrado na sequência $(xx, xxx, xxxx, \dots)$ nos casos em que $x \in \{3{,}7{,}9\}$? A resposta é não, mas antes de justificá-la, passemos à

Proposição 2.6.4: O quadrado de um número ímpar só pode deixar resto 1 na divisão por 8.

Prova: Seja $a\ \in\ \mathbb{Z}$ um inteiro ímpar. Logo, $\exists\, p\ \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2p + 1 \therefore a^2 = 4p \cdot (p+1) + 1$. Como p e $p + 1$ são inteiros consecutivos, o produto $p \cdot (p+1)$ é par, isto é, $\exists\, k\ \in\ \mathbb{Z}$ tal que $p \cdot (p+1) = 2k$. Portanto, $a^2 = 4 \cdot 2k + 1 = 8k + 1$. ■

Para a sequência $(99, 999, 9999, 99999, \dots)$ tem-se que $99 =\ 3^2 \cdot 11$, $999 = 8 \cdot 124 + 7$ e os demais termos são da forma $99 \dots 99 = 99 \dots 9000 + 999 = 8 \cdot k + 7$.

Portanto, tais fatos agregados à proposição 2.6.4 garantem que na sequência $(99, 999, 9999, 99999, \dots)$ nenhum termo é um quadrado perfeito.

Na sequência $(33, 333, 3333, 33333, \dots)$ tem-se $33 = 30 + 3, 333 = 330 + 3$, $3333 = 3330 + 3$ e assim por diante. Logo cada termo desta é da forma $5k + 3$, portanto, na sequência $(33, 333,\ 3333, 33333, \dots)$ nenhum número é um quadrado.

Por último, para a sequência $(77, 777, 7777, 77777, \dots)$ tem-se $77 = 75 + 2, 777 = 775 + 2, 7777 = 7775 + 2$ e assim por diante. Logo cada termo desta é da forma $5k + 2$, portanto, nenhum número pertencente a $(77, 777, 7777, 77777, \dots)$ é um quadrado.

Vale salientar que as sequências $(33, 333,\ 3333, 33333, \dots), (77, 777,$ $7777, 77777, \dots)$, e $(99, 999,\ 9999, \dots)$ tiveram de ser consideradas à parte devido ao fato de que para os casos $x = 3{,}7$ ou 9 a igualdade $(x, 111 \dots 111) = 1$ não é válida para todos os números da forma $111 \dots 111$. Na realidade, existe uma quantidade infinita de números na sequência $(11, 111, 1111, \dots)$ que são divisíveis por 3, por 7 ou por 9. O critério de divisibilidade por 3 leva à conclusão de que, para que um número da forma $111 \dots 111$ seja múltiplo de 3, basta que a quantidade de $1's$ em sua representação no sistema decimal seja divisível por 3.

A conclusão é análoga para o número 9. Finalmente, tem-se que o critério de divisibilidade por 7 é uma ferramenta inviável para concluir que existem infinitos múltiplos de 7 formados apenas por dígitos iguais a 1. Para provar a veracidade desse argumento aconselha-se fazer uso de outra ferramenta, que por vezes confirma sua importância na resolução de questões mais complicadas, denominada Princípio das Casas de Pombo (PCP), cujo enunciado é o seguinte:

Se $n + 1$ pombos são colocados em n casas (gaiolas), então pelo menos uma casa contém, pelo menos, dois pombos.

Em outras palavras, se $mk + 1$ objetos são colocados em m gavetas, então pelo menos uma gaveta é ocupada por $k + 1$ objetos. O PCP é comumente chamado Princípio das gavetas e também conhecido como Princípio de Dirichlet.

Afirmação: Existem infinitos múltiplos de 7 formados apenas por dígitos iguais a 1.

Justificativa: Sabe-se, da divisão euclidiana, que os possíveis restos da divisão de um inteiro qualquer por 7 são 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Considere a sequência (11, 111, 1111,...). Como o número de objetos (números pertencentes à sequência) é infinitamente maior do que o número de gavetas (restos), pelo PCP pode-se afirmar que existe uma gaveta que contém inúmeros objetos, ou seja, existem infinitos pares de termos distintos, pertencentes à sequência dada, que deixam o mesmo resto quando divididos por 7. Sejam $\alpha = 111 \dots 111$, com p dígitos e $\beta = 11 \dots 11$, com q dígitos, $p > q$, dois números de um desses pares. Pelo exposto até aqui, $\exists\ a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $\alpha = 7a + r$ e $\beta = 7b + r$, onde $r \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$. Portanto

$$\alpha - \beta = 111 \ldots 111 - 11 \ldots 11 = 7(a-b) \therefore 7(a-b) = \underbrace{1 \ldots 1\underbrace{0 \ldots 0}_{\text{q zeros}}}_{\text{p algarismos}} = (11 \ldots 11) \cdot 10^q$$

Como $(7, 10^q) = 1$, segue-se que $7 \nmid 10^q$, logo $7 | 11 \ldots 1$.

3 UM TESTE DE PRIMALIDADE E MAIS ALGUNS RESULTADOS

A esta altura já definimos os números quadrados perfeitos, os ternos pitagóricos, o máximo divisor comum e o que são números primos. Apresentamos o Teorema Fundamental da Aritmética e fizemos algumas aplicações. Falaremos agora sobre o crivo de Eratóstenes e provaremos a infinitude dos números primos. Ao voltar aos ternos pitagóricos iremos obter uma generalização para tais objetos e, entre outras coisas, vamos discorrer sobre o Algoritmo de Euclides, introduziremos os números triangulares, caracterizando-os e explanando sobre alguns aspectos interessantes referentes a este tópico. Findaremos esta parte com os números perfeitos.

3.1 O CRIVO DE ERATÓSTENES

Teorema 3.1.1: Se $n > 1$ é um inteiro composto, então n possui um divisor p primo tal que $p \leq \sqrt{n}$.

Demonstração: Como n é um número composto, existem naturais a e b tais que $n = ab$ com $1 < a \leq b$. Seja p um divisor primo de a, Logo, $p \leq a \therefore p^2 \leq a^2 \leq ab = n \therefore p \leq \sqrt{n}$. ■

Aplicação: Prove que 311 é primo.

Solução: Suponha que 311 é composto. Pelo teorema acima, 311 possui um divisor primo p tal que $p \leq \sqrt{311}$. Ocorre que $17 < \sqrt{311} < 18$, logo, deve ser $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$, porém, nenhum destes números é divisor de 311. Portanto, 311 é primo.

O teste aqui utilizado denomina-se Crivo de Eratóstenes, em referência a Eratóstenes de Cirene.

Teorema 3.1.2: Existem infinitos números primos.

Demonstração: Suponha, por contradição, que $X = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ é o conjunto de todos os primos. Considere o número $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$ tal número é maior do que qualquer elemento de X, ou seja, $n \notin X$ daí n é composto, isto é, deve existir $p_i \in X$ com $1 \leq i \leq n$ tal que $p_i | n = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$ .Contudo, isso implica que $p_i | 1$, o que é absurdo. ■

O próximo resultado estabelece um padrão para quase todos os números primos.

Proposição 3.1.1: Todo primo maior do que 3 é da forma $6k + 1$ ou $6k - 1$.

Prova: Seja $p > 3$ um primo. Como p não pode ser um múltiplo de 3, da divisão Euclidiana segue que $p = 3q + 1$ ou $p = 3q + 2$ onde q é natural. Se $p = 3q + 1$ então q não pode ser ímpar, pois isso implica que p seja um múltiplo de 2. Segue-se que $\exists\ k \in \mathbb{Z}$ tal que $q = 2k$, logo, $p = 3(2k) + 1 = 6k + 1$. Se $p = 3q + 2$ então q deve ser ímpar, pois do contrário p seria par, logo, $\exists\ j \in \mathbb{Z}$ tal que $q = 2j + 1$ e $p = 3q + 2 = 3(2j + 1) + 2 = 6j + 5 = 6j + 6 - 1 = 6 \cdot (j + 1) - 1 = 6k - 1$. ■

Aplicação: Se p e q são primos tais que $p, q\ \geq 5$,mostre que $24|\ p^2 - q^2$.

Solução: Como p e q são primos maiores do que 3, segue que existem inteiros m e n tais que $p = 6m \pm 1$ e $q = 6n \pm 1$. Com isso, $p^2 - 1 = 12m(3m \pm 1)$. Se m é par então $24|12m$. Se m é ímpar $3m \pm 1$ é par, daí $24|12(3m \pm 1)$. Logo, $24|p^2 - 1$ e analogamente, $24|q^2 - 1$, de onde segue que $24|(p^2 - 1) - (q^2 - 1) = p^2 - q^2$.

3.2 VOLTANDO AOS TERNOS PITAGÓRICOS

Seja (x, y, z) um terno pitagórico. Se $(x, y) = (x, z) = (y, z) = 1$, diz - se que (x, y, z) é um terno pitagórico primitivo.

Proposição 3.2.1: Se (x, y, z) é um terno pitagórico primitivo, então $\frac{z+x}{2}$ e $\frac{z-x}{2}$ são quadrados.

Prova: Inicialmente, note que x e y não podem ser ambos pares, pois $(x,y)=1$. Assim suponha que x é ímpar. Como $z^2=x^2+y^2$, segue-se que $z^2-x^2=y^2 \Longrightarrow \frac{z^2-x^2}{4}=\frac{y^2}{4} \therefore \left(\frac{z+x}{2}\right)\cdot\left(\frac{z-x}{2}\right)=\left(\frac{y}{2}\right)^2$. Sabe-se que x e y não podem possuir a mesma paridade, logo, y é par e $\frac{y}{2}$ é um número natural. Portanto o produto $\left(\frac{z+x}{2}\right)\cdot\left(\frac{z-x}{2}\right)$ é um quadrado perfeito. Além disso, os números $\left(\frac{z+x}{2}\right)$ e $\left(\frac{z-x}{2}\right)$ são ambos naturais pois x e y possuem mesma paridade. Agora, seja $d=\left(\frac{z+x}{2},\frac{z-x}{2}\right)$. Tem-se que $d|\frac{z}{2}+\frac{x}{2}$ e $d\left|\frac{z}{2}-\frac{x}{2} \therefore d\right|\left(\frac{z}{2}+\frac{x}{2}\right)+\left(\frac{z}{2}-\frac{x}{2}\right)=z$ e $d\left|\left(\frac{z}{2}+\frac{x}{2}\right)-\left(\frac{z}{2}-\frac{x}{2}\right)=x \therefore d\right|(x,z)=1 \therefore d=1$

Isto significa que $\frac{z+x}{2}$ e $\frac{z-x}{2}$ são coprimos e como o produto de tais números é um quadrado, pode-se concluir que cada um deles é um quadrado perfeito. ■

Provada a proposição, sejam $m,n \in \mathbb{Z}$ tais que $\frac{z+x}{2}=m^2$ e $\frac{z-x}{2}=n^2$. Tem-se então o sistema $\begin{cases} z+x=2m^2 \\ z-x=2n^2 \end{cases}$. Obtém-se então $z=m^2+n^2$ e $x=m^2-n^2$. Com isso é possível determinar y em função de m e n, pois tais relações implicam que $y^2=z^2-x^2=(m^2+n^2)^2-(m^2-n^2)^2=m^4+2n^2m^2+n^4-m^4+2m^2n^2-n^4=4m^2n^2=(2mn)^2 \therefore y=2mn$. É importante notar que, analogamente, a proposição é válida para os números $\frac{z+y}{2}$ e $\frac{z-y}{2}$, caso suponha-se que y é ímpar. Ao prosseguir, chega-se à conclusão de que $\left(\frac{z+y}{2},\frac{z-y}{2}\right)=1$, portanto estes são quadrados, logo, $\frac{z+x}{2}=m^2$ e $\frac{z-x}{2}=n^2$, $z=m^2+n^2$, $y=m^2-n^2$ e $x=\sqrt{z^2-y^2}=\sqrt{(z+y)\cdot(z-y)}=\sqrt{(2mn)^2}=2mn$, com m e n naturais e $m>n$.

Além disso, $\left(\frac{z+y}{2}, \frac{z-y}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow (m^2, n^2) = 1 \Leftrightarrow (m, n)^2 = 1 \Leftrightarrow$ $(m, n) = 1$, isto é, m e n são relativamente primos. Vale ainda informar que m e n possuem paridades distintas, caso contrário, x, y e z seriam pares, contrariando $(x, y) = (x, z) = (y, z) = 1$. No mais, os ternos pitagóricos primitivos geram todos os ternos pitagóricos.

Proposição 3.2.2: Se (a, b, c) é um terno pitagórico primitivo, então (da, db, dc), onde $d > 0$, é um terno pitagórico.

Prova: De fato, $a^2 + b^2 = c^2 \Longrightarrow d^2a^2 + d^2b^2 = d^2c^2 \Longrightarrow (da)^2 + (db)^2 = (dc)^2$.

Por hipótese, (a, b, c) é primitivo, logo, existem naturais m, n $m > n$, coprimos e de paridades distintas tais que $(a, b, c) = (m^2 - n^2,\ 2mn\ , m^2 + n^2)$ ou $(a, b, c) = (2mn,\ m^2 - n^2,\ m^2 + n^2)$. Assim, $(da, db, dc) = \left((m^2 - n^2)d, 2mnd,\ (m^2 + n^2)d\right)$ ou $(da, db, dc) = (2mnd,\ (m^2 - n^2)d, (\ m^2 + n^2)d)$. Fica então provada a seguinte

Proposição 3.2.3: As soluções naturais da equação pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$ expressam-se de modo único, a menos da ordem de x e y, como $x = (m^2 - n^2)d, y = 2mnd$ e $z = (m^2 + n^2)d$, onde $m, n, d \in \mathbb{N}, m > n, (m, n) = 1$ e m e n não possuem a mesma paridade.

Feitas as devidas observações, para obter todas as soluções em $\mathbb{Z}$ da equação pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$, basta desconsiderar a condição, $m > n$ e declarar d um inteiro qualquer.

Problema: Encontre todos os triângulos retângulos com lados inteiros e um cateto igual a 30.

Solução: Inicialmente, tem-se $2mnd = 30 \therefore m \cdot n \cdot d = 15$, com $(m, n) = 1$. Como deve ser $m > n$, os casos possíveis constam na tabela abaixo.

m	n	d	$(m^2 - n^2)d$
5	1	3	72
5	3	1	16
3	1	5	40
15	1	1	224

Obviamente, ao trocar a ordem de x e y no terno pitagórico (x, y, z) obtém-se o mesmo triângulo. Portanto, $(30\ ,72, 78); (30, 16, 34); (30, 40, 50)\ e\ (30, 224, 226)$ representam todos os triângulos retângulos de lados inteiros e um cateto igual a 30.

Problema: Em relação aos triângulos pitagóricos, responda:

a) existe algum triângulo retângulo com lados inteiros e perímetro igual a uma potência de 2 ?

b) dados p um número primo e k um natural, existe algum triângulo retângulo com lados inteiros e perímetro igual a $2p^k$?

Solução:

a) Suponha que exista um terno pitagórico (x, y, z) tal que $x + y + z = 2^k$, com k natural e maior que 1. Não há prejuízo em considerar (x, y, z) primitivo, pois caso seja possível a soma $x + y + z$ ser expressa por uma potência de 2, para obter um novo triângulo retângulo cujo perímetro é uma potência de 2, basta multiplicar a soma $x + y + z$ por outro número da forma 2^j , onde $j \in \mathbb{N}$. Pelos resultados obtidos anteriormente, sabe-se que devem existir naturais m e n, com $m > n$, $(m, n) = 1$ e $m + n$ ímpar, tais que $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$ e $z = m^2 + n^2$. Assim, é preciso que seja $m^2 - n^2 + 2mn + m^2 + n^2 = 2^k \therefore m^2 + mn = 2^{k-1} \therefore m(m + n) = 2^{k-1}$. Esta última igualdade informa que $m + n$ e m devem ser potências de 2, o que é uma contradição, pois $(m, n) = 1 \Longrightarrow (m, m + n) = 1$. Portanto, não existe triângulo retângulo com lados inteiros e perímetro igual a uma potência de 2.

b) Para este item o raciocínio é análogo, pois ao supor a existência de tal triângulo obtém-se $m \cdot (m + n) = p^k$ e como $(m, m + n) = 1, m + n$ e m não podem ser potências de p.

3.3 BLOCOS DE EULER

Definição 3.3.1: Um paralelepípedo reto retângulo é denominado um bloco de Euler se as medidas de suas arestas e também as medidas das diagonais das faces são números inteiros.

Proposição 3.3.1: Se um bloco com medidas a, b e c é de Euler, então um bloco com medidas bc, ab e ac é um bloco de Euler.

Prova: Por hipótese a, b, c , $\sqrt{a^2+b^2}, \sqrt{a^2+c^2}, \sqrt{b^2+c^2}$ são todos naturais. Logo, tem-se que

$bc,\ ab,\ ac,\ \sqrt{(bc)^2+(ab)^2} = \sqrt{b^2(c^2+a^2)} = b\sqrt{a^2+c^2},\ \sqrt{(bc)^2+(ac)^2} = \sqrt{c^2(b^2+a^2)} = c\sqrt{a^2+b^2}$ e $\sqrt{(ac)^2+(ab)^2} = \sqrt{a^2(c^2+b^2)} = a\sqrt{b^2+c^2}$ também são todos inteiros positivos. Portanto, um bloco com medidas $bc, ab,$ e ac é um bloco de Euler.

■

Em (MOREIRA, 2012), página 193, o leitor encontrará mais sobre blocos de Euler.

3.4 O ALGORITMO DE EUCLIDES

Até o presente momento sabe-se que o mdc de dois números dados pode ser escrito como combinação linear de tais números. O processo que será aqui detalhado é uma forma de obter tal combinação. Antes disso, vale expor o seguinte resultado:

Lema 3.4.1: Sejam $a, b, n \in \mathbb{Z}$. Tem-se que $(a, b) = (a, b - na)$.

Prova: Sejam $d = (a, b)$ e $c = (a, b - na)$. Como $d|a$ e $d|b$, segue-se que $d|na$ e $d|b \ \therefore\ d|a \text{ e } d|b - na \ \therefore\ d|(a,\ b - na) = c \ \therefore\ d \leq c$. Por outro lado, $c|a$ e $c|b - na$, daí $c|an$ e $c|b - na \ \therefore\ c|an + b - na = b$ e $c|a \ \therefore\ c|(a, b) = d \ \therefore\ c \leq d$. Resta então que $d = c$, isto é, $(a, b) = (a, b - na)$.

■

Este resultado tem papel importante na obtenção de um procedimento para determinação do máximo divisor comum de dois inteiros. Consideremos assim, a e b dois inteiros positivos. Se $b|a$ então $(a, b) = b$. Caso contrário, a divisão euclidiana garante que existem $q_1, r_1 \in \mathbb{Z}$, com $0 < r_1 < b$ tais que $a = bq_1 + r_1$. Daí, $(a, b) = (a - bq_1, b) = (r_1, b)$. Se $r_1|b$ então $(a, b) = (r_1, b) = r_1$. Caso contrário, $\exists\, q_2, r_2 \in \mathbb{Z}$, com $0 < r_2 < r_1$, tais que $b = q_2r_1 + r_2$. Logo, $(a, b) = (r_1, b) =$

$(r_1, b - q_2 r_1) = (r_1, r_2)$. Se $r_2 | r_1$ então $(a, b) = r_2$. Senão, $\exists\, q_3, r_3 \in \mathbb{Z}$, com $0 < r_3 < r_2$, tais que $r_1 = q_3 r_2 + r_3$. De onde segue que $(a, b) = (r_1, r_2) = (r_2, r_1 - q_3 r_2) = (r_2, r_3)$. Se $r_3 | r_2$ então $(a, b) = (r_2, r_3) = r_3$. Do contrário, obtém-se um novo quociente e um novo resto e o processo se repete. Após executar uma quantidade finita de $k + 1$ passos, obtém-se $r_{k-1} = r_k q_{k+1} + 0$, ou seja,$(a, b) = (r_{k-1}, r_k) = r_k$. A quantidade de passos executados é realmente finita, pois como $b > r_1 > r_2 > r_3 > \cdots \geq 0$, ou seja, a sequência $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é decrescente e constituída por inteiros positivos, com exceção do último, o Princípio da Boa Ordenação garante que existe um natural k tal que r_k é o último resto não nulo que figura no algoritmo, isto é, r_k é o menor elemento não nulo da sequência. Tal resto é o máximo divisor comum de a e b.

O teorema de Bézout garante que é possível escrever o máximo divisor comum de dois inteiros como combinação linear desses dois inteiros. O algoritmo de Euclides, por sua vez, permite determinar que números participam da combinação. Como exemplo, vamos obter o mdc de 12 e 17.

	1	2	2	2
17	12	5	2	1
5	2	1	0	

De acordo com as operações acima, $17 = 1 \cdot 12 + 5;\ 12 = 2 \cdot 5 + 2;\ 5 = 2 \cdot 2 + 1$, logo, $1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2 \cdot (12 - 2 \cdot 5) = 5 - 2 \cdot 12 + 4 \cdot 5 = 5 \cdot 5 - 2 \cdot 12 = 5 \cdot (17 - 1 \cdot 12) - 2 \cdot 12 = 17 \cdot 5 - 12 \cdot 7 \ \therefore 12 \cdot (-7) + 17 \cdot 5 = 1$.

Problema: A quantia de 26 reais deve ser paga utilizando-se apenas notas de 2 e de 5 reais, sem que sobre troco. Também não é permitido que se utilize notas de apenas um tipo. Como o pagamento pode ser feito?

Solução: Sejam X = número de notas de 2 reais, Y = número de notas de 5 reais. Deve-se ter então $2X + 5Y = 26$. Como $(2,\ 5) = 1$, existe uma combinação linear de tais números que resulta igual a 1. Sem dificuldade pode-se escrever $2(-2) + 5(1) = 1$, de onde segue que $2(-2 \cdot 26) + 5(1 \cdot 26) = 26 \ \therefore 2(-52) + 5(26) = 26$. Pondo $x_0 = -52$ e $y_0 = 26$, a última igualdade torna-se $2(x_0) + 5(y_0) = 26$, ou seja, o par (x_0, y_0) é uma solução inteira da equação $2X + 5Y = 26$. Se (x, y) é outro par de soluções, segue-se que $2x + 5y = 2x_0 + 5y_0 = 26 \therefore 2(x - x_0) = 5(y_0 - y)$. Como $5 \nmid 2$ e $(2,\ 5) = 1$, resta que $5|x - x_0 \therefore \exists\, t \in \mathbb{Z}$ tal que $x - x_0 = 5t \therefore x = x_0 + 5t = -52 + 5t$. Conclui-se também que $2 \cdot 5t = 5(y_0 - y) \therefore y_0 - y = 2t \therefore y = y_0 - 2t = 26 - 2t$. Portanto, todas as soluções da equação $2X + 5Y = 26$ são os pares $(-52 + 5t, 26 - 2t)$, com $t \in \mathbb{Z}$. A quantidade de cédulas de cada tipo não pode ser nula, assim, t deve satisfazer o seguinte sistema:

$\begin{cases} -52 + 5t > 0 \\ 26 - 2t > 0 \end{cases}$. Da primeira inequação resulta $t > 10{,}4$ e da segunda vem $t < 13$.

Como t é inteiro, $t = 11$ ou $t = 12$. Se $t = 11$ então $\mathrm{x} = -52 + 55 = 3$ e $\mathrm{y} = 26 - 22 = 4$. Se $t = 12$ então $\mathrm{x} = -52 + 60 = 8$ e $\mathrm{y} = 26 - 24 = 2$. Resposta: O pagamento pode ser feito utilizando-se 3 notas de 2 reais e 4 notas de 5 reais ou com 8 notas de 2 reais e 2 notas de 5 reais.

A equação $2X + 5Y = 26$ enquadra-se num tipo especial denominado equação diofantina linear, em referência a Diofanto de Alexandria. Nas próximas linhas, mostrar-se-á que é possível obter a solução geral de uma equação deste tipo, desde que o máximo divisor comum de seus coeficientes divida o número presente do outro lado da igualdade. É o que nos diz a seguinte

Proposição 3.4.1: A equação diofantina $aX + bY = c$ possui solução se, e somente se,$(a,\ b)|c$.

Prova: Seja (x, y) um par de soluções da equação. Seja $d = (a,\ b)$. Como $d|a$ e $d|b$, segue-se que $\mathrm{d} \mid \mathrm{ax}$ e $\mathrm{d} \mid \mathrm{by} \therefore \mathrm{d} \mid \mathrm{ax} + \mathrm{by} = \mathrm{c}$. Reciprocamente, se $\mathrm{d} \mid \mathrm{c}$ então existe $\mathrm{k} \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathrm{c} = \mathrm{dk}$. Como $\mathrm{d} = (\mathrm{a},\ \mathrm{b})$, existem m e n inteiros tais que $\mathrm{am} + \mathrm{bn} = \mathrm{d} \therefore \mathrm{a(mk)} + \mathrm{b(nk)} = \mathrm{dk} = \mathrm{c}$, logo, $\mathrm{x} = \mathrm{mk}$ e $\mathrm{y} = \mathrm{nk}$ são soluções da equação. ■

Com base nesse resultado é possível afirmar, por exemplo, que a reta de equação $2\mathrm{x} + 6\mathrm{y} = 7$ não possui pontos com coordenadas inteiras, já que $(2, 6) = 2 \nmid 7$. Na realidade, dizer que $(a,\ b)|c$ equivale a dizer que a equação $aX + bY = c$ possui infinitas soluções inteiras. Provaremos a seguir que se $d = (a,\ b)|c$ e (x_0, y_0) é um par de soluções inteiras dessa equação, então as fórmulas $x = x_0 + \frac{b}{d}t$ e $y = y_0 - \frac{a}{d}t$, com t $\in \mathbb{Z}$, fornecem todas as suas soluções inteiras.

Proposição 3.4.2: Seja $d = (a,\ b)$. Se $d \mid c$ e (x_0, y_0) é um par de soluções inteiras da equação $aX + bY = c$, então $x = x_0 + \frac{b}{d}t$ e $y = y_0 - \frac{a}{d}t$, com t $\in \mathbb{Z}$, representam todas as suas soluções inteiras.

Prova: Com efeito, sejam $(x_0, y_0)\ e\ (x, y)$ soluções de $aX + bY = c$. Segue-se que $ax + by = ax_0 + by_0 = c \therefore \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y = \frac{a}{d}x_0 + \frac{b}{d}y_0 = \frac{c}{d}$. Ponhamos $\frac{a}{d} = u$ e $\frac{b}{d} = v$. Tem-se então que $ux + vy = ux_0 + vy_0 \therefore u(x - x_0) = v(y_0 - y) \therefore v \mid u(x - x_0)$. Como $(u,\ v) = \left(\frac{a}{d},\ \frac{b}{d}\right) = 1$, resta que $v \mid x - x_0$, logo, exite t $\in \mathbb{Z}$ tal que $x - x_0 = vt \therefore x = x_0 + vt$. Substituindo $x - x_0 = vt$ em $u(x - x_0) = v(y_0 - y)$ obtém-se $uvt = v(y_0 - y) \therefore y = y_0 - ut$. Portanto, ficam estabelecidas as fórmulas do enunciado. De forma direta é fácil verificar que tais fórmulas são soluções da equação. ■

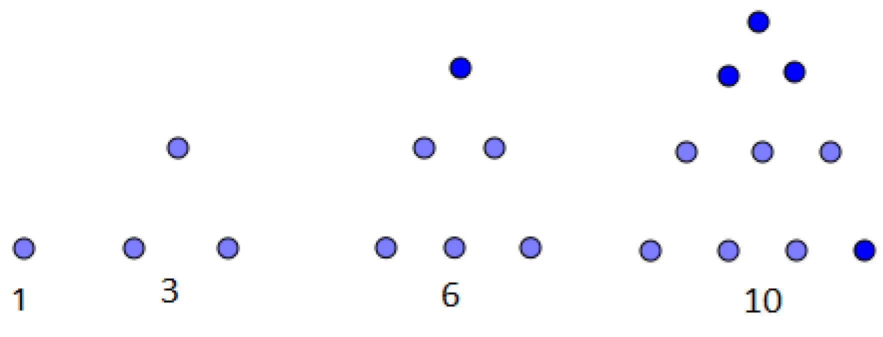
Problema: Sejam $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas progressões aritméticas infinitas e não constantes, cujos termos são inteiros positivos. Prove que existem infinitos naturais que são termos de ambas as sequências se, e somente se, o máximo divisor comum de suas razões dividir a diferença entre seus termos iniciais.

Solução: Sejam a_1 e b_1 os termos iniciais das progressões e r e p suas respectivas razões. Tem-se que $\mathrm{a}_n = a_1 + (\mathrm{n} - 1)\mathrm{r}$ e $\mathrm{b}_n = b_1 + (\mathrm{n} - 1)\mathrm{p}, \forall\ \mathrm{n} \in \mathbb{N}$. Seja c um dos infinitos naturais que figuram em ambas as sequências. Logo, existem naturais *m* e *n* tais que $c = a_{m+1} = a_1 + mr = b_{n+1} = b_1 + np$. Com isso $rm + p(-n) = b_1 - a_1$, ou seja, como os termos comuns são infinitos, a equação $rx + py = b_1 - a_1$ admite infinitas soluções naturais (x, y). Portanto, da proposição 3.4.1 segue que $(r, p) \mid b_1 - a_1$. Reciprocamente, se $(r, p) \mid b_1 - a_1$ então $\exists\ k \in \mathbb{Z}$ tal que $b_1 - a_1 = (r, p)\ k$. Como existem $u, v \in \mathbb{Z}$ tais que $(r,\ p) = ur + vp$, segue que $b_1 - a_1 = (ur + vp)k \therefore b_1 - a_1 = urk + vpk \therefore a_1 + (uk)r = b_1 +$

$(-vk)p$. Esta última igualdade garante que as progressões possuem infinitos termos comuns. A fim de aprofundar mais os conhecimentos recomenda-se ler (HEFEZ, 2014), página 101.

3.5 PITÁGORAS E OS NÚMEROS FIGURADOS

Pitágoras e seus seguidores eram atentos às formas geométricas e buscavam constantemente associa-las aos problemas matemáticos, mesmo quando tais questões não expunham tratar-se de medir segmentos ou áreas. Como nessa época ainda era costume realizar contagens através de pedrinhas ou marcas de pontos feitas na areia, estes procedimentos aguçavam os olhares dos pitagóricos e os faziam pensar nas maneiras de dispor os objetos. Das observações colhidas surgiram os números figurados, que constituem-se basicamente por inteiros sequenciados com uma propriedade comum de cunho explicitamente geométrico. Assim, por exemplo, pode-se dizer que $1, 3, 6, 10, \ldots$ são números triangulares, pois ao considerar um ponto como representante da unidade é possível formar triângulos associados a cada um dos números desta sequência, como mostra o esquema abaixo:



Dessa forma, os quatro primeiros números triangulares são $T_1 = 1,\ T_2 = 1 + 2,$ $T_3 = 1 + 2 + 3$ e $T_4 = 1 + 2 + 3 + 4$, o que motiva a seguinte

Definição 3.5.1: Seja n um número natural. O *n*-ésimo número triangular é o número $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Para $n = 0$ tem-se $T_0 = 0$.

Problema: Prove que o quadrado de qualquer número ímpar, múltiplo de 3, é a diferença entre dois números triangulares.

Solução: Se $x = 3k$, com k inteiro ímpar, então $x^2 = 9k^2$. Suponha que existam T_m e T_p números triangulares tais que $T_m - T_p = 9K^2$. Logo, $\frac{m(m+1)}{2} - \frac{p(p+1)}{2} = \frac{m^2-p^2+m-p}{2} = \frac{(m-p)\cdot(m+p+1)}{2} = 9k^2 \therefore (m-p)\cdot(m+p+1) = 18k^2$. Nessas condições, façamos valer o sistema $\begin{cases} m - p = 3k \\ m + p + 1 = 6k \end{cases}$, cujos valores que o satisfazem são $\mathrm{m} = \frac{9\mathrm{k}-1}{2}$ e $\mathrm{p} = \frac{3\mathrm{k}-1}{2}$, ou seja $\mathrm{m} = \frac{3\mathrm{x}-1}{2}$, e $\mathrm{p} = \frac{\mathrm{x}-1}{2}$. É imediato notar que tais números são inteiros, pois x é ímpar. Além disso, para tais valores tem-se que $T_m - T_p = \frac{\left(\frac{3\mathrm{x}-1}{2}\right)\left(\frac{3\mathrm{x}-1}{2}+1\right)}{2} - \frac{\left(\frac{\mathrm{x}-1}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{x}-1}{2}+1\right)}{2} = \frac{(3x)^2-1}{8} - \frac{x^2-1}{8} = x^2$ e os números T_m e T_p são de fato inteiros, pois $x\ ímpar \Rightarrow (3x)^2 \equiv 1\ (mod\ 8)\ e\ x^2 \equiv 1\ (mod\ 8)$. Portanto, fica provado que qualquer ímpar, múltiplo de 3, pode ser escrito como diferença entre dois números triangulares.

3.6 CARACTERIZAÇÃO DOS NÚMEROS TRIANGULARES

Proposição 3.6.1: n é um número triangular se, e somente se, $8n + 1$ é um quadrado perfeito.

Prova: Se n é um número triangular então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n = T_m = \frac{m(m+1)}{2}$, logo, $8n + 1 = 8T_m + 1 = \frac{8m(m+1)}{2} + 1 = 4m^2 + 4m + 1 = (2m+1)^2$, que é um quadrado perfeito. Reciprocamente, se $8n + 1$ é um quadrado, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $8n + 1 = m^2$, de onde segue que $\frac{m^2-1}{8} = \frac{(\frac{m-1}{2})\cdot(\frac{m+1}{2})}{2} =$

$\frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)\left(\frac{m-1}{2}+1\right)}{2}$. Como $m^2 = 2(4n) + 1$ segue-se que m deve ser ímpar, portanto, $\frac{m-1}{2}$ é inteiro e n é triangular. ■

Aplicação: $1 + 9 + \cdots + 9^m$ é um número triangular, $\forall\, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Prova: Seja $n = 1 + 9 + \cdots + 9^m$. Como $1 + 9 + \cdots + 9^m$ representa a soma dos $m + 1$ primeiros termos de uma progressão geométrica de razão 9, tem-se que $1 + 9 + \cdots + 9^m = \frac{9^{m+1}-1}{8}$, daí, $8n + 1 = 8 \cdot \left(\frac{9^{m+1}-1}{8}\right) + 1 = 9^{m+1} = (3^{m+1})^2$ é um quadrado, portanto, n é triangular.

Proposição 3.6.2: A soma de dois números triangulares consecutivos é um quadrado perfeito.

Prova: Sejam T_m, T_{m+1} dois números triangulares consecutivos quaisquer. Tem-se que $T_m + T_{m+1} = \frac{m(m+1)}{2} + \frac{(m+1)(m+2)}{2} = \frac{m^2+m+m^2+3m+2}{2} = \frac{2m^2+4m+2}{2} = m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2$.

■

Também é válido o seguinte resultado:

Proposição 3.6.3: O quadrado de qualquer número inteiro positivo, maior do que 1, pode ser escrito como soma de dois números triangulares consecutivos.

Prova: Seja m um inteiro maior do que 1. Tem-se que $T_{m-1} + T_m = \frac{(m-1)m}{2} + \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m}{2} \cdot (m - 1 + m + 1) = m^2 \therefore m^2 = T_{m-1} + T_m$

■

Proposição 3.6.4: O dobro do produto de dois números triangulares consecutivos é um número triangular.

Prova: Sejam T_{m-1} e T_m dois triangulares consecutivos. Tem-se que $2 \cdot T_{m-1} \cdot T_m = 2 \cdot \frac{(m-1)m}{2} \cdot \frac{m(m+1)}{2} = \frac{(m^2-1) \cdot m^2}{2} = T_{m^2-1}$.

■

Como exemplo, para $m = 10$ tem-se que $4950 = 2 \cdot T_9 \cdot T_{10} = T_{10^2-1} = T_{99}$.

Proposição 3.6.5: A diferença dos quadrados de dois números triangulares consecutivos é o cubo de um inteiro maior do que 1. Reciprocamente, o cubo de um inteiro maior do que 1 é a diferença dos quadrados de dois números triangulares consecutivos.

Prova: Sejam T_m, T_{m+1} dois números triangulares consecutivos quaisquer. Tem-se que $T_{m+1}{}^2 - T_m{}^2 = (T_{m+1} + T_m) \cdot (T_{m+1} - T_m) = (m+1)^2 \cdot (m+1) = (m+1)^3$.

Para provar a recíproca basta tomar as igualdades anteriores em seu sentido inverso.

■

Proposição 3.6.6: A soma dos quadrados de dois números triangulares consecutivos é um número triangular.

Prova: Sejam T_m, T_{m+1} dois números triangulares consecutivos quaisquer. Tem-se que $T_m{}^2 + T_{m+1}{}^2 = \left(\frac{m \cdot (m+1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{(m+1) \cdot (m+2)}{2}\right)^2 = \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 \cdot (m^2 + m^2 + 4m + 4) = \frac{(m+1)^2(m^2+2m+2)}{2} = \frac{(m+1)^2((m+1)^2+1)}{2} = T_{(m+1)^2}$. ■

3.7 NÚMEROS PERFEITOS

Definição 3.7.1: Sejam n um número natural e $S(n)$ a soma de seus divisores positivos. O número n é dito perfeito se $S(n) = 2 \cdot n$, ou seja, n é perfeito se é equivalente à soma de seus divisores naturais distintos do mesmo. Por exemplo,

$6 = 1 + 2 + 3$, ou ainda, $12 = S(6) = 1 + 2 + 3 + 6$, portanto, 6 é um número perfeito.

Como consequência desta definição, $S(n) = n + 1$ se, e somente se, n é um número primo. De fato, n é primo se, e somente se, seus únicos divisores positivos são 1 e ele mesmo, o que equivale à igualdade $S(n) = n + 1$.

Proposição 3.7.1: Seja $n = {p_1}^{\alpha_1} \dots {p_r}^{\alpha_r}$ a decomposição de n em fatores primos.

Então, $S(n) = \frac{{p_1}^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \dots \cdot \frac{{p_r}^{\alpha_r+1}-1}{p_r-1}$.

Prova: Antes de provar este resultado, façamos a seguinte exemplificação:

Se $n = 36$, então $n = 2^2 \cdot 3^2$. Consideremos o produto $(1 + 2 + 2^2) \cdot (1 + 3 + 3^2) = 2^0 3^0 + 2^0 3^1 + 2^0 3^2 + 2^1 3^0 + 2^1 3^1 + 2^1 3^2 + 2^2 3^0 + 2^2 3^1 + 2^2 3^2$. Constata-se que este desenvolvimento representa a soma de todos os divisores positivos de 36. Agora, passemos à demonstração.

Analogamente ao exposto no exemplo, tem-se que

$(1 + p_1 + \dots + {p_1}^{\alpha_1}) \cdot \dots \cdot (1 + p_r + \dots + {p_r}^{\alpha_r}) = \sum {p_1}^{\beta_1} \cdot \dots \cdot {p_r}^{\beta_r}$, onde $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, para $i = 0,1, \dots, r$. Ao efetuar todos os produtos contidos no lado esquerdo da igualdade acima, são realizadas todas as combinações que garantem divisores positivos de n. Observa-se também que antes de realizar estas operações, os r fatores do produto inicial constituem-se em somas finitas de progressões geométricas, portanto, resta que $S(n) = \frac{{p_1}^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \dots \cdot \frac{{p_r}^{\alpha_r+1}-1}{p_r-1}$. ■

Proposição 3.7.2: Se m e n são naturais tais que $(m,n)=1$, então $S(mn)=S(m)\cdot S(n)$.

Prova: Como m e n são relativamente primos, não existe um primo p tal que p seja um divisor comum de m e n . Mais precisamente, existem $p_1,\ldots,p_r,q_1,\ldots,q_t$ primos, todos distintos, $\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\ldots,\beta_t \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ tais que $m=p_1^{\alpha_1}\ldots p_r^{\alpha_r}$ e $n=q_1^{\beta_1}\ldots q_t^{\beta_t}$, logo, $mn=p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{\alpha_r}\cdot q_1^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot q_t^{\beta_t}$ e da proposição anterior segue que $S(mn)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_r^{\alpha_r+1}-1}{p_r-1}\cdot\frac{q_1^{\beta_1+1}-1}{q_1-1}\cdot\ldots\cdot\frac{q_t^{\beta_t+1}-1}{q_t-1}=S(m)\cdot S(n)$. ■

4 ALGUNS NOMES ILUSTRES, CONGRUÊNCIAS E SOMATÓRIOS ENVOLVENDO TRIANGULARES

Nas próximas linhas definiremos os primos de Mersenne, provaremos por indução alguns padrões interessantes referentes aos números triangulares. Faremos uso também de certas propriedades das congruências aplicadas a somas destes números. Em seguida, discursaremos sobre os números de Fermat, somatórios e identidades triangulares. Como fechamento provaremos algumas proposições relativas à paridade dos triangulares.

4.1 PRIMOS DE MERSENNE

Marin Mersenne [1588-1648] foi um padre francês dedicado à teoria musical e também à matemática, dentre outras áreas. Na Teoria dos Números, destacou-se por seu trabalho constituido na tentativa de determinar uma fórmula que representasse todos os números primos. Embora tenha falhado em seu intento, seus estudos relativos aos números da forma $2^n - 1$ têm importância significativa na investigação de números primos com grande quantidade de dígitos. Existe também uma relação com os números perfeitos, que será aqui explorada.

Definição 4.1.1: Os números de Mersenne são os números da forma $M_n = 2^n - 1$, onde n é natural. Se M_p é primo, para algum primo p, então M_p é dito um primo de Mersenne.

Nem todos os números de Mersenne são primos. Como exemplo tem-se que $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ e $M_{23} = 2^{23} - 1 = 8.388.607 = 47 \cdot 178.481$ são compostos.

Proposição 4.1.1: Sejam a e p números naturais maiores do que 1. Se $a^p - 1$ é primo, então a = 2 e p é primo.

Prova: Suponha, por absurdo, que a > 2. Segue-se que a – 1 > 1 e sabe-se também que $a-1|a^n-1, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Em particular, $a-1|a^p-1$, o que é uma contradição, pois por hipótese a^p-1 é primo. Portanto, a = 2. Agora suponha que p é composto. Nesse caso, existem $r,s>1\; tais\, que\;\; p=rs$, de onde segue $a^p-1=2^{rs}-1=(2^r)^s-1\;\therefore\; 2^r-1|a^p-1\;\therefore a^p-1$ não é primo, o que é uma contradição. Portanto, p é primo. ■

Os números de Mersenne têm importante papel na caracterização dos números perfeitos
pares. O próximo resultado é devido a dois grandes expoentes da Matemática.

Teorema 4.1.1 (Euclides-Euler): Um número natural n é um número perfeito par se, e somente se, $n=2^{p-1}(2^p-1)$, onde 2^p-1 é um primo de Mersenne.

Demonstração: Suponha que n é perfeito e par. Seja 2^{p-1} a maior potência de 2 que divide n. Logo, p > 1 e $n=2^{p-1}\cdot b, com\; b\; ímpar$. Consequentemente $(2^{p-1},b)=1$ e $S(n)=S(2^{p-1}\cdot b)=S(2^{p-1})\cdot S(b)=\frac{2^{p-1+1}-1}{2-1}\cdot S(b)=(2^p-1)\cdot S(b)$. Por hipótese, n é perfeito, logo $S(n)=2n\;\therefore\;(2^p-1)\cdot S(b)=2\cdot 2^{p-1}\cdot b\;\therefore\;(2^p-1)\cdot S(b)=2^p\cdot b$. Como $(2^p,2^p-1)=1$, resta que $2^p-1|b$, logo, existe um natural c tal que $b=c(2^p-1)$. Além disso, c < b, pois caso fosse c = b teríamos p = 1. Isto posto, a igualdade $(2^p-1)\cdot S(b)=2^p\cdot b$ torna-se $(2^p-1)\cdot S(b)=2^p\cdot c\cdot(2^p-1)\therefore S(b)=c\cdot 2^p$. Como $b=c\cdot(2^p-1)\Rightarrow b=c\cdot 2^p-c$, tem-se que $b+c=c\cdot 2^p\therefore S(b)=b+c$. A igualdade $b+c=c\cdot 2^p$ ainda informa que $c|b+c$, logo $c|b$. Afirmamos que em tais condições c = 1. Do contrário, se $c\neq 1$ então $S(b)\geq 1+c+b$, já que 1, c e b são todos distintos. Porém, como $S(b)=b+c$, restaria $b+c\geq b+c+1\therefore 0\geq 1$, o que é absurdo. Portanto, c = 1. Conclui-se então que $S(b)=b+1$, logo, b é primo, ou seja, $b=c\cdot(2^p-1)=2^p-1$ é primo, de onde segue que p também é um número primo. Finalmente, $n=2^{p-1}\cdot b=2^{p-1}(2^p-1)$, onde 2^p-1 é um primo de Mersenne.

Reciprocamente, se $n=2^{p-1}(2^p-1)$, com 2^p-1 primo, então $S(n)=S\big(2^{p-1}\cdot(2^p-1)\big)$. Como 2^p-1 é primo, $S(2^p-1)=2^p-1+1=2^p$. Além disso, $2^{p-1}\; e\; 2^p-1$ são relativamente primos, de onde segue que $S(n)=S(2^{p-1})\cdot$

$S(2^p-1)=\frac{2^{p-1+1}-1}{2-1}\cdot 2^p=(2^p-1)2^p=2\cdot 2^{p-1}(2^p-1)=2n$, portanto, n é um número perfeito par. ■

Proposição 4.1.2: Todo número perfeito par é triangular.

Prova: Basta observar que se $n=2^{p-1}(2^p-1)$, com 2^p-1 primo, então $n=\frac{(2^p-1)\cdot 2^p}{2}$. ■

Problema: Prove que todo número da forma $M_{4n+1}-M_{2n}-1, n\in\mathbb{N},$ é o produto de um quadrado por um triangular.

Solução: Por definição, $M_{4n+1}-M_{2n}-1=2^{4n+1}-1-(2^{2n}-1)-1=2^{4n+1}-1-2^{2n}+1-1$. Ocorre que $2^2\equiv 1\ (mod\ 3)$ de onde segue $2^{2n}\equiv 1\ (mod\ 3), \forall\ n\ \in\mathbb{N}$. Em outras palavras, isto significa que o número $\frac{2^{2n}-1}{3}$ é um inteiro, para todo natural n. Assim, seja $\frac{2^{2n}-1}{3}=N$. Tem-se então que $2^{2n}-1=3N \therefore\ 2^{2n}=3N+1 \therefore 2^{4n}=(3N+1)^2 \therefore 2^{4n+1}=2(3N+1)^2$. Com isso, $M_{4n+1}-M_{2n}-1=2(3N+1)^2-3N-1-1=18N^2+12N+2-3N-2=18N^2+9N=9N(2N+1)=9\cdot\frac{2N(2N+1)}{2}=3^2\cdot T_{2N}$.

Em particular, para n = 504 tem-se que $M_{2017}-M_{1008}-1=3^2\cdot T_k\,, onde\ k=\frac{2^{1009}-2}{3}$.

Proposição 4.1.3: Existem infinitos números de Mersenne M_k tais que $M_k + 1$ é a diferença entre um quadrado e um número triangular.

Prova: Sejam n um natural qualquer, $a = 2^{n+1} + 2^n + 1$ e $b = 2^{n+2} + 1$. Tem-se que $a^2 - \frac{b(b+1)}{2} = (2^{n+1} + 2^n + 1)^2 - \frac{(2^{n+2}+1)(2^{n+2}+2)}{2} = 2^{2n+2} + 2 \cdot 2^{n+1} \cdot (2^n + 1) + (2^n + 1)^2 - (2^{n+2} + 1) \cdot (2^{n+1} + 1) = 2^{2n+2} + 2^{2n+2} + 2^{n+2} + 2^{2n} + 2^{n+1} + 1 - 2^{2n+3} - 2^{n+2} - 2^{n+1} - 1 = 2^{2n} = 2^{2n} - 1 + 1 = M_{2n} + 1 = M_k + 1, onde\ k = 2n.$ ■

Em particular, para n = 3 tem-se a = 25 e b = 33, o que implica $a^2 - \frac{b(b+1)}{2} = 25^2 - \frac{33 \times 34}{2} = 625 - 33 \times 17 = 625 - 561 = 64 = M_6 + 1.$

Esta última proposição é na verdade um exercício que se encontra em (DEZA, 2015), página 405. Lá o leitor encontrará muitos exercícios e informações interessantes sobre números de Mersenne e figurados, dentre outros.

Um fato interessante ocorre com os números triangulares T_m cujo índice m pertence à sequência $(6, 66, 666, \cdots)$. Observa-se que $T_6 = 21$, $T_{66} = 33 \cdot 67 = 2211$, $T_{666} = 333 \cdot 667 = 222111$. Com base nesse padrão provaremos a seguinte

Proposição 4.1.4: Existem infinitos números triangulares formados apenas por algarismos 1 e 2.

Prova: Façamos a prova por indução sobre o número n de dígitos do índice $66 \cdots 6$. Para facilitar o desenvolvimento da prova utilizaremos a notação $(aa \cdots a)_n$ para representar um número com n algarismos a, o símbolo $(aa \cdots a)_x(bb \cdots b)_y$ para representar o número com $x + y$ dígitos $(aa \cdots abb \cdots b)_{x+y}$ e por fim a notação $(a(bb \cdots b)_m cc)_n$ para representar um número com n dígitos, sendo m deles iguais a b. Se n = 1 tem-se $T_m = T_6 = 21$. Suponha que $T_{(66\cdots6)_n} = (22 \cdots 211 \cdots 1)_{2n}$, $para\ algum\ natural\ n$. Entenda-se que este possui a mesma quantidade de dígitos 1 e 2. Assim, a hipótese de indução nos diz que $\frac{(66\cdots6)_n\cdot(66\cdots7)_n}{2} = (33\cdots3)_n \cdot (66\cdots7)_n = (22\cdots211\cdots1)_{2n}$.

Devemos verificar se $T_{(66\cdots6)_{n+1}} = (22\cdots211\cdots1)_{2n+2}$. Tem-se que $T_{(66\cdots66)_{n+1}} = \frac{(66\cdots66)_{n+1}\cdot(66\cdots67)_{n+1}}{2} =$ $(33\cdots33)_{n+1} \cdot (66\cdots67)_{n+1} = [(33\cdots30)_{n+1} + 3] \cdot [(66\cdots7)_n \cdot 10 - 3] = (33\cdots3)_n \cdot 10 \cdot (66\cdots7)_n \cdot 10 - (33\cdots3)_n \cdot 10 \cdot 3 + 3 \cdot (66\cdots7)_n - 9 = 100 \cdot (22\cdots211\cdots1)_{2n} - 30 \cdot (33\cdots3)_n + 30 \cdot (66\cdots7)_n - 9 = (22\cdots211\cdots100)_{2n+2} + [(66\cdots67)_n - (33\cdots33)_n] \cdot 30 - 9 = (22\cdots211\cdots100)_{2n+2} + (33\cdots34)_n \cdot 30 - 9 = (22\cdots211\cdots100)_{2n+2} + (100\cdots020)_{n+2} - 9 =$ $(22\cdots211\cdots100)_{2n+2} + (100\cdots011)_{n+2} =$ $(22\cdots2)_n(11\cdots100)_{n+2} + (1(00\cdots0)_{n-1}11)_{n+2} =$ $(22\cdots2)_n(21\cdots11)_{n+2} = (22\cdots2)_{n+1}(1\cdots11)_{n+1} =$ $(22\cdots211\cdots1)_{2n+2}$. ■

Outro padrão pode ser observado ao tomar os índices m pertencentes à sequência $(33, 333, \cdots)$. Tem-se que $T_{33} = 561,\ T_{333} = 55611,\ T_{3333} = 5556111$. Com isso, provaremos o seguinte resultado:

Proposição 4.1.5: Existem infinitos números triangulares nos quais figuram apenas os algarismos 1, 5 e 6.

Prova: Utilizaremos novamente indução sobre o número n de dígitos, agora do índice $33\cdots3$. Se n = 2 tem-se $T_m = T_{33} = 561$. A notação $(aa\cdots a)_n$ representará um número com n algarismos a, o símbolo $(aa\cdots a)_x c(bb\cdots b)_y$ representará o número com $x + y + 1$ dígitos $(aa\cdots acbb\cdots b)_{x+y+1}$ e por fim a notação $(a(bb\cdots b)_m cc)_n$ representará um número com n dígitos, sendo m deles iguais a b. Suponha que $T_{(33\cdots3)_n} = ((5\cdots5)_{n-1}6(1\cdots1)_{n-1})_{2n-1}$, ou seja, suponha que $\frac{(33\cdots3)_n\cdot(33\cdots4)_n}{2} = ((5\cdots5)_{n-1}6(1\cdots1)_{n-1})_{2n-1}$, para algum natural n. Devemos verificar se $T_{(33\cdots3)_{n+1}} = ((5\cdots5)_n6(1\cdots1)_n)_{2n+1}$. A hipótese de indução nos diz que $\frac{(33\cdots3)_n\cdot(33\cdots4)_n}{2} = ((5\cdots5)_{n-1}6(1\cdots1)_{n-1})_{2n-1}$, ou seja, $(33\cdots3)_n\cdot(1(6\cdots6)_{n-2}7)_n = ((5\cdots5)_{n-1}6(1\cdots1)_{n-1})_{2n-1}$. Tem-se $T_{(33\cdots3)_{n+1}} = \frac{(33\cdots33)_{n+1}\cdot(33\cdots34)_{n+1}}{2} = (33\cdots33)_{n+1}\cdot(1(6\cdots6)_{n-1}7)_{n+1}$. Como $(1(6\cdots6)_{n-1}7)_{n+1} - (1(6\cdots6)_{n-2}7)_n = 15\cdot10^{n-1}$, isto é, $(1(6\cdots6)_{n-1}7)_{n+1} = (1(6\cdots6)_{n-2}7)_n + 15\cdot10^{n-1}$ e $(33\cdots33)_{n+1} = 10\cdot(33\cdots3)_n + 3$, segue-se que $T_{(33\cdots3)_{n+1}} = [10\cdot(33\cdots3)_n + 3]\times[(1(6\cdots6)_{n-2}7)_n + 15\cdot10^{n-1}] = 10\cdot(33\cdots3)_n\cdot(1(6\cdots6)_{n-2}7)_n + 10\cdot(33\cdots3)_n\cdot 15\cdot10^{n-1} + 3\cdot(1(6\cdots6)_{n-2}7)_n + 3\cdot15\cdot10^{n-1} = 10\cdot((5\cdots5)_{n-1}6(1\cdots1)_{n-1})_{2n-1} + (33\cdots3)_n\cdot15\cdot10^n + 3\cdot(1(6\cdots6)_{n-2}7)_n + 45\cdot10^{n-1} = ((5\cdots5)_{n-1}6(1\cdots1)_{n-1}0)_{2n} + (99\cdots9)_n\cdot5\cdot10^n + 3\cdot(1(6\cdots6)_{n-2}7)_n + 45\cdot10^{n-1}$. Ocorre que $(99\cdots9)_n\cdot5\cdot10^n = (4(99\cdots9)_{n-1}5)_{n+1}\cdot10^n = (4(99\cdots9)_{n-1}5(00\cdots0)_n)_{2n+1}$ e $3\cdot(1(6\cdots6)_{n-2}7)_n = (5(00\cdots0)_{n-2}1)_n$, de onde segue que $T_{(33\cdots3)_{n+1}} = ((5\cdots5)_{n-1}6(1\cdots1)_{n-1}0)_{2n} + (4(99\cdots9)_{n-1}5(00\cdots0)_n)_{2n+1} + (5(0\cdots0)_{n-2}1)_n + (45(0\cdots0)_{n-1})_{n+1} =$

$[(4(99\cdots 9)_{n-1}5(00\cdots 0)_n)_{2n+1} +$

$((5\cdots 5)_{n-1}6(1\cdots 1)_{n-1}0)_{2n}] + [(45(0\cdots 0)_{n-1})_{n+1} +$

$(5(0\cdots 0)_{n-2}1)_n] =$

$((5\cdots 5)_n(1\cdots 1)_n0)_{2n+1} + (5(0\cdots 0)_{n-1}1)_{n+1} =$

$((5\cdots 5)_n6(1\cdots 1)_n)_{2n+1}$. ■

Aplicação: Seja n um número natural maior do que ou igual a 2. Mostre que o número $44\cdots 488\cdots 89$, que possui n algarismos 4 e $n-1$ algarismos 8 é um quadrado perfeito.

Solução: Decorre imediatamente da **proposição 4.1.5** e da **proposição 3.6.1** que $8\cdot T_{(33\cdots 3)_n} + 1 = ((44\cdots 4)_n(88\cdots 8)_{n-1}9)_{2n}$ é um quadrado perfeito.

Proposição 4.1.6: Se T é um número triangular, então $9\mathrm{T}+1$ também é triangular.

Prova: Seja n um natural tal que $\mathrm{T}=\frac{\mathrm{n(n+1)}}{2}$. Tem-se então que $9T+1 = 9\frac{n(n+1)}{2}+1=\frac{9n^2+9n+2}{2}$, de onde surge$8\cdot(9T+1)+1 = 8\left(\frac{9n^2+9n+2}{2}\right)+1 = 4(9n^2+9n+2)+1 = 36n^2+36n+8+1 = 36n^2+36n+9 = 9(4n^2+4n+1) = 3^2\cdot(2n+1)^2 = (6n+3)^2$, que é um quadrado perfeito. Portanto, $9\mathrm{T}+1$ é triangular. ■

Como consequência disso tem-se, por exemplo, que $9\cdot 222111+1 = 1.999.000$ é triangular, bem como $9\cdot 22221111+1 = 199.990.000$. Em geral, todo número da forma $(1(99\cdots 9)_n(00\cdots 0)_n)_{2n+1}$ é triangular. Ao observar a sequência de triangulares $(561, 55611, \cdots)$ e realizar algumas operações conclui-se que $9\cdot 561+1 = 5050$; $9\cdot 55611+1 = 500500$; $9\cdot 5556111+1 = 50005000$, etc, são triangulares. De modo geral, todo número da forma

$(5(00\cdots0)_n5(00\cdots0)_n)_{2n+2}, com\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, é triangular. De forma mais precisa, tem-se válida a seguinte

Proposição 4.1.7: $9\mathrm{T_n} + 1 = \mathrm{T_{3n+1}}, \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Prova: $\mathrm{T_{3n+1}} = \frac{(3\mathrm{n}+1)(3\mathrm{n}+2)}{2} = \frac{9n^2+6n+3n+2}{2} = \frac{9n^2+9n+2}{2} = 9\frac{n(n+1)}{2} + 1 = 9\mathrm{T_n} + 1, \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. ■

Em termos de congruências isto significa que $T_{3n+1} \equiv 1\ (mod\ 9), \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Com isso, é possível afirmar, por exemplo, que $T_1 + T_4 + T_7 + \cdots + T_{55} \equiv 19\ (mod\ 9)$. Para tanto, basta notar que a quantidade de triangulares presentes na congruência é a mesma quantidade de termos da PA $(1, 4, 7, \cdots, 55)$. Como cada triangular é congruente a 1, módulo 9, as somas membro a membro garantem a veracidade da congruência. Prosseguindo, ao notar que $19 \equiv 1\ (mod\ 9)$ e aplicar a propriedade transitiva, tem-se que $T_1 + T_4 + T_7 + \cdots + T_{55} \equiv 1\ (mod\ 9)$. Exagerando um pouco mais obtém-se $(T_1 + T_4 + T_7 + \cdots + T_{55})^{2017} \equiv 1^{2017}\ (mod\ 9) \therefore (T_1 + T_4 + T_7 + \cdots + T_{55})^{2017} \equiv 1\ (mod\ 9)$.

Aplicação: Prove que $(T_1 + T_4 + T_7 + \cdots + T_{3n-2})^m \equiv n^m\ (mod\ 9), \forall\, n, m \in \mathbb{N}$. Em seguida, utilize isso para mostrar que $(T_1 + T_4 + T_7 + \cdots + T_{2017})^{2017} \equiv 7\ (mod\ 9)$.

Solução: Seja k a quantidade de termos da PA $(1, 4, 7, \cdots, 3n-2)$. Logo, $3n - 2 = 1 + (k-1)3 \therefore 3n - 2 = 3k - 2 \therefore 3n = 3k \therefore k = n$, de onde segue que $T_1 + T_4 + T_7 + \cdots + T_{3n-2} \equiv n \times 1\ (mod\ 9) \therefore T_1 + T_4 + T_7 + \cdots + T_{3n-2} \equiv n\ (mod\ 9) \therefore (T_1 + T_4 + T_7 + \cdots + T_{3n-2})^m \equiv n^m\ (mod\ 9), \forall\, n, m \in \mathbb{N}$. Tomando n = 673 e m = 2017, tem-se $(T_1 + T_4 + T_7 + \cdots + T_{2017})^{2017} \equiv 673^{2017}\ (mod\ 9)$. Como $673 \equiv -2\ (mod\ 9)$, segue-se que $673^{2017} \equiv (-2)^{2017}\ (mod\ 9) \therefore 673^{2017} \equiv -2^{2017}\ (mod\ 9)$. Ora, $2^3 \equiv -1\ (mod\ 9) \therefore$

$(2^3)^{672} \equiv (-1)^{672} (mod\ 9) \therefore 2^{2016} \equiv 1\ (mod\ 9) \therefore -2^{2017} \equiv -2\ (mod\ 9) \therefore$ $-2^{2017} \equiv 7\ (mod\ 9)$. Portanto, $(T_1 + T_4 + T_7 + \cdots + T_{2017})^{2017} \equiv 7\ (mod\ 9)$.

4.2 NÚMEROS DE FERMAT

Definição 4.2.1: Um número de Fermat é um número da forma $F_n = 2^{2^n} + 1$, com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Proposição 4.2.1: Se $n \geq 2$ então o dígito das unidades de F_n é 7.

Prova: Se $n \geq 2$ então 2^n é divisível por 4, logo, existe um natural k tal que $2^n = 4k$, de onde obtém-se $F_n = 2^{2^n} + 1 = 2^{4k} + 1 = (2^4)^k + 1 = 16^k + 1$. Como $16 \equiv 1\ (mod\ 5)$, tem-se que $16^k \equiv 1^k\ (mod\ 5) \therefore 16^k \equiv 1\ (mod\ 5) \therefore$ $16^k + 1 \equiv 2\ (mod\ 5) \therefore F_n \equiv 2\ (mod\ 5)$. Assim, o último algarismo de F_n só pode ser 2 ou 7, porém, F_n é ímpar, portanto, o algarismo das unidades de F_n é 7, $\forall\ n \geq 2$. ■

Proposição 4.2.2: O único número de Fermat triangular é $F_0 = 3$.

Prova: Ora, sabe-se que $F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$ não é triangular. Para o caso $n \geq 2$ o resultado acima garante que o algarismo das unidades de $8F_n + 1$ é 7, que não pode ser o último algarismo de um quadrado perfeito. ■

4.3 SOMATÓRIOS E ALGUMAS IDENTIDADES ENVOLVENDO TRIANGULARES

Proposição 4.3.1: $T_{n+k} = T_n + T_k + nk, \forall\ n, k \in \mathbb{N}$.

Prova: Para quaisquer naturais n, k tem-se que $T_n + T_k + nk = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} + nk = \frac{n^2+2nk+k^2+n+k}{2} = \frac{(n+k)^2+(n+k)}{2} = \frac{(n+k)(n+k+1)}{2} = T_{n+k}$. ■

Na identidade acima, tomando $n = m$ e $k = m - 1$, onde m é um natural qualquer, tem-se que $T_{2m-1} = (T_m + T_{m-1}) + m(m-1) = 2m^2 - m$, de onde segue que $T_1 = 2 \cdot 1^2 - 1$; $T_3 = 2 \cdot 2^2 - 2$; $T_5 = 2 \cdot 3^2 - 3; \cdots; T_{2r-1} = 2r^2 - r$. Assim, $T_1 + T_3 + T_5 + \cdots + T_{2r-1} = 2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + r^2) - (1 + 2 + 3 + \cdots + r) = \frac{2r(r+1)(2r+1)}{6} - \frac{r(r+1)}{2} = \frac{r(r+1)(4r+2-3)}{6} = \frac{r(r+1)(4r-1)}{6} \therefore \sum_{i=1}^{r} T_{2i-1} = \frac{r(r+1)(4r-1)}{6}$.

Aplicação: Calcule o valor da soma $T_1 + T_3 + \cdots + T_{2017}$.

Solução: Tem-se que $T_1 + T_3 + \cdots + T_{2017} = T_1 + T_3 + \cdots + T_{2\cdot 1009-1} = \frac{1009\cdot 1010\cdot 4035}{6} = \frac{1009\cdot 505\cdot 4035}{3} = 1009 \cdot 505 \cdot 1345 = 685.338.025$.

Voltando à igualdade $T_{n+k} = T_n + T_k + nk$ é possível observar que $T_{1+2} = T_1 + T_2 + 1 \cdot 2$; $T_{2+3} = T_2 + T_3 + 2 \cdot 3; \cdots$; $T_{m-1+m} = T_{m-1} + T_m + (m-1) \cdot m$, de onde segue que $T_3 + T_5 + \cdots + T_{2m-1} = (2^2 + 3^2 + \cdots + m^2) + (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (m-1) \cdot m) \therefore T_1 + T_3 + \cdots + T_{2m-1} = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + m^2) + \sum_{i=1}^{m-1} i(i+1) \therefore \sum_{i=1}^{m-1} i(i+1) = \frac{m(m+1)(4m-1)}{6} - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} = \frac{m(m+1)(4m-1-2m-1)}{6} = \frac{m(m+1)(2m-2)}{6} = \frac{m(m+1)(m-1)}{3} = \frac{m(m^2-1)}{3}$.

Aplicação: Determine o valor de $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + 2016 \cdot 2017$.

Solução: Tem-se que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + 2016 \cdot 2017 = \sum_{i=1}^{2017-1} i(i + 1) = \frac{2017(2017^2-1)}{3} = \frac{2017 \cdot 2018 \cdot 2016}{3} = 2017 \cdot 2018 \cdot 672 = 2.735.245.632$.

Proposição 4.3.2: $T_1 + T_2 + \cdots + T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Prova: Sabe-se que $T_{k-1} + T_k = k^2$, qualquer que seja o natural k. Logo, $T_0 + T_1 = 1^2;\ T_1 + T_2 = 2^2;\ T_2 + T_3 = 3^2; \cdots; T_{n-1} + T_n = n^2$. Somando tais igualdades membro a membro, obtém-se $T_0 + 2T_1 + 2T_2 + \cdots + 2T_{n-1} + T_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \therefore 2T_1 + 2T_2 + \cdots + 2T_{n-1} + 2T_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{2n+1}{3} + 1\right] = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{2n+4}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \therefore T_1 + T_2 + \cdots + T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. ■

Aplicação 1: Qual o algarismo das unidades do número $T_1 + T_2 + \cdots + T_{100}$?

Solução: Do resultado acima segue-se que $T_1 + T_2 + \cdots + T_{100} = \frac{100 \times 101 \times 102}{6} = 100 \times 101 \times 17 = 171.700$. Portanto, o algarismo é zero.

Aplicação 2: Mostre que $T_1 + T_2 + \cdots + T_{2017}$ é divisível por 673.

Solução: Sabe-se que $T_1 + T_2 + \cdots + T_{2017} = \frac{2017 \times 2018 \times 2019}{6} = 2017 \times 1009 \times 673$. Portanto, $673 | T_1 + T_2 + \cdots + T_{2017}$.

Aplicação 3: Calcule o valor da soma $T_{50} + T_{51} + \cdots + T_{100}$.

Solução: $T_{50} + T_{51} + \cdots + T_{100} = (T_1 + T_2 + \cdots + T_{100}) - (T_1 + T_2 + \cdots + T_{49}) = 171.700 - 20.825 = 150.875.$

Proposição 4.3.3: Todo número triangular pode ser expresso como soma de um quadrado com o dobro de outro triangular. Mais precisamente, $T_{2k-1} = k^2 + 2T_{k-1}$ e $T_{2k} = 2T_k + k^2, \forall\, k \in \mathbb{N}$.

Prova: Tem-se que $k^2 + 2T_{k-1} = k^2 + 2\frac{(k-1)(k-1+1)}{2} = k^2 + (k-1)k = 2k^2 - k = \frac{4k^2-2k}{2} = \frac{(2k-1)2k}{2} = T_{2k-1} \therefore T_{2k-1} = k^2 + 2T_{k-1}$. Para a segunda parte verifica-se que $2T_k + k^2 = 2\frac{k(k+1)}{2} + k^2 = k^2 + k + k^2 = 2k^2 + k = \frac{4k^2+2k}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = T_{2k} \therefore T_{2k} = 2T_k + k^2$, qualquer que seja o natural k. ■

Proposição 4.3.4: $\sum_{i=1}^{n} T_{2i} = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Prova: Como $T_{2k} = 2T_k + k^2, \forall\, k \in \mathbb{N}$, segue-se que $T_2 = 2T_1 + 1^2$; $T_4 = 2T_2 + 2^2$; $T_6 = 2T_3 + 3^2; \cdots;$ $T_{2n} = 2T_n + n^2$. Somando membro a membro obtém-se $T_2 + T_4 + T_6 + \cdots + T_{2n} = 2(T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_n) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \therefore$
$\sum_{i=1}^{n} T_{2i} = \frac{2n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+4+2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$. ■

Aplicação: Determine o valor da soma $T_2 + T_4 + T_6 + \cdots + T_{100}$.

Solução: Tem-se que $T_2 + T_4 + T_6 + \cdots + T_{100} = \sum_{i=1}^{50} T_{2i} = \frac{50 \cdot 51 \cdot 205}{6} = 25 \times 17 \times 205 = 87.125.$

Proposição 4.3.5: $T_{mk} = m^2 T_k - kT_{m-1}, \forall\, m, k \in \mathbb{N}$.

Prova: Para quaisquer m, k naturais tem-se que $m^2 T_k - kT_{m-1} = \frac{m^2 k(k+1)}{2} - \frac{k(m-1)(m-1+1)}{2} = \frac{m^2k^2+m^2k-km^2+km}{2} = \frac{(mk)^2+mk}{2} = \frac{mk(mk+1)}{2} = T_{mk}$. ■

Agora, tomando $k = 3$ na identidade provada tem-se que $T_{3m} = m^2 T_3 - 3T_{m-1}$, ou seja, $T_{3m} = 6m^2 - 3T_{m-1}, \forall\, m \in \mathbb{N}$, de onde segue que $T_3 = 6 \cdot 1^2 - 3T_0$; $T_6 = 6 \cdot 2^2 - 3T_1$; $T_9 = 6 \cdot 3^2 - 3T_2$; $\cdots$; $T_{3n} = 6 \cdot n^2 - 3T_{n-1}$, logo, $T_3 + T_6 + T_9 + \cdots + T_{3n} = 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - 3(T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_{n-1}) = \frac{6n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{3(n-1)n(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(12n+6-3n+3)}{6} = \frac{n(n+1)(9n+9)}{6} = \frac{9n(n+1)^2}{6} = \frac{3n(n+1)^2}{2}$, ou ainda, $\sum_{i=1}^{n} T_{3i} = 3(n+1)T_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Aplicação: Mostre que $T_3 + T_6 + T_9 + \cdots + T_{60}$ é divisível por 21 e calcule o valor desta soma.

Solução: Tem-se que $T_3 + T_6 + T_9 + \cdots + T_{60} = \sum_{i=1}^{20} T_{3i} = 3(20+1)T_{20} = 3 \times 21 \times T_{20} \therefore 21 | T_3 + T_6 + T_9 + \cdots + T_{60}$. O valor da soma é $3 \times 21 \times \frac{20 \times 21}{2} = 3 \times 10 \times 21^2 = 30 \times 441 = 13.230.$

Em geral, tem-se a seguinte

Proposição 4.3.6: Se k é um inteiro positivo então $\sum_{i=1}^{n} T_{ki} = \frac{kn(n+1)(2kn+k+3)}{12}$.

Prova: Por definição, $T_{ki} = \frac{ki(ki+1)}{2} = \frac{k^2i^2}{2} + \frac{ki}{2}$, logo, $\sum_{i=1}^{n} T_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k^2i^2}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{ki}{2} = \frac{k^2}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{k}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i = \frac{k^2}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{k}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{kn(n+1)}{4} \cdot \left[\frac{k(2n+1)}{3} + 1\right] = \frac{kn(n+1)(2kn+k+3)}{12}$. ■

Aplicação: Calcule o valor da soma $T_5 + T_{10} + \cdots + T_{100}$.

Solução: Tomando k = 5 tem-se que $\sum_{i=1}^{n} T_{5i} = \frac{5n(n+1)(10n+8)}{12} = \frac{5n(n+1)(5n+4)}{6}$, de onde resulta $T_5 + T_{10} + \cdots + T_{100} = \sum_{i=1}^{20} T_{5i} = \frac{5 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 104}{6} = 36.400$.

Proposição 4.3.7: $\sum_{n=0}^{m} T_{3n+1} = \frac{(m+1)(3m^2+6m+2)}{2}, \forall\, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Prova: Da igualdade $T_{3n+1} = 9T_n + 1$ já previamente estabelecida, segue que $\sum_{n=0}^{m} T_{3n+1} = \sum_{n=0}^{m}(9T_n + 1) = 9\sum_{n=0}^{m} T_n + \sum_{n=0}^{m} 1 = 9\frac{m(m+1)(m+2)}{6} + (m+1) \cdot 1 = (m+1) \cdot \left[\frac{3m(m+2)}{2} + 1\right] = \frac{(m+1)(3m^2+6m+2)}{2}, \forall\, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. ■

Assim, tem-se $T_1 + T_4 + \cdots + T_{3 \cdot 18+1} = T_1 + T_4 + \cdots + T_{55} = \frac{19\left(3 \cdot 18^2+6 \cdot 18+2\right)}{2} = 19 \times (3 \cdot 9 \cdot 18 + 6 \cdot 9 + 1) = 19 \cdot 541 = 10.279$ e como $10.279 \equiv 1\ (mod\ 9)$, confirmamos novamente que $(T_1 + T_4 + \cdots + T_{55})^{2017} \equiv 1\ (mod\ 9)$.

Proposição 4.3.8:

$$T_{1^2} + T_{2^2} + \cdots + T_{n^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n+4\right)}{60}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Prova:

Tem-se que $T_{1^2} + T_{2^2} + \cdots + T_{n^2} = \frac{1^2(1^2+1)}{2} + \frac{2^2(2^2+1)}{2} + \cdots + \frac{n^2(n^2+1)}{2} = \frac{1^4+1^2+2^4+2^2+\cdots+n^4+n^2}{2} = \frac{(1^2+2^2+\cdots+n^2)+(1^4+2^4+\cdots+n^4)}{2} = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}}{2} = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\left[1+\frac{3n^2+3n-1}{5}\right]}{2} = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+4)}{30}}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+4)}{60}$. Equivalentemente, $\sum_{i=1}^{n} T_{i^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+4)}{60}, \forall\, n \in \mathbb{N}$. ■

Aplicação: Calcule o valor da soma $T_{1^2} + T_{2^2} + \cdots + T_{10^2}$.

Solução: Tem-se que $T_{1^2} + T_{2^2} + \cdots + T_{10^2} = \sum_{i=1}^{10} T_{i^2} = \frac{10\times11\times21\times334}{60} = 77 \times 167 = 12.859$.

Proposição 4.3.9: $n^3 + T_{n^2} = 2{T_n}^2, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Prova: Qualquer que seja o natural n, tem-se que $n^3 + T_{n^2} = n^3 + \frac{n^2(n^2+1)}{2} = \frac{2n^3+n^2(n^2+1)}{2} = \frac{n^2(2n+n^2+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{2} = 2\,\frac{n^2(n+1)^2}{4} = 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 2{T_n}^2$. ■

Proposição 4.3.10: $\sum_{i=1}^{n} {T_i}^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n^2+6n+1)}{60}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Prova: Da identidade provada na proposição anterior segue-se que $1^3 + T_{1^2} = 2{T_1}^2; 2^3 + T_{2^2} = 2{T_2}^2; \cdots; n^3 + T_{n^2} = 2{T_n}^2$. Somando estas igualdades membro a membro tem-se $(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) + (T_{1^2} + T_{2^2} + \cdots + T_{n^2}) = 2({T_1}^2 + {T_2}^2 + \cdots + {T_n}^2) \therefore 2\sum_{i=1}^{n} {T_i}^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+4)}{60} = \frac{n(n+1)}{4}\left[n(n+1) + \frac{(2n+1)(3n^2+3n+4)}{15}\right] = \frac{n(n+1)}{4}\left[\frac{15n^2+15n+6n^3+6n^2+8n+3n^2+3n+4}{15}\right] = \frac{n(n+1)}{4}\left[\frac{6n^3+24n^2+26n+4}{15}\right] = \frac{n(n+1)(3n^3+12n^2+13n+2)}{30} = \frac{n(n+1)(n+2)(3n^2+6n+1)}{30} \therefore \sum_{i=1}^{n} {T_i}^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n^2+6n+1)}{60}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

■

Aplicação: Calcule o valor da soma ${T_1}^2 + {T_2}^2 + \cdots + {T_{10}}^2$.

Solução: Tem-se ${T_1}^2 + {T_2}^2 + \cdots + {T_{10}}^2 = \sum_{i=1}^{10} {T_i}^2 = \frac{10\times 11\times 12\times 361}{60} = 11 \times 2 \times 361 = 22 \times 361 = 7.942$.

Na igualdade $T_k = \frac{k^2+k}{2}$, pondo $k = T_n$, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $T_{T_n} = \frac{{T_n}^2+T_n}{2}$, de onde surge $\sum_{n=1}^{m} T_{T_n} = \frac{1}{2} \cdot \left[\sum_{n=1}^{m} {T_n}^2 + \sum_{n=1}^{m} T_n\right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{m(m+1)(m+2)(3m^2+6m+1)}{60} + \frac{m(m+1)(m+2)}{6}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{m(m+1)(m+2)}{6}\left(\frac{3m^2+6m+11}{10}\right)\right] = \frac{m(m+1)(m+2)(3m^2+6m+11)}{120} \therefore$

$\sum_{n=1}^{m} T_{T_n} = \frac{m(m+1)(m+2)(3m^2+6m+11)}{120}$, qualquer que seja o natural m.

Aplicação: Calcule o valor da soma $T_{T_1} + T_{T_2} + \cdots + T_{T_{10}}$.

Solução: Do resultado acima segue-se $T_{T_1} + T_{T_2} + \cdots + T_{T_{10}} = \frac{10\times 11\times 12\times 371}{120} = 11 \times 371 = 4.081$.

Proposição 4.3.11: $\sum_{n=1}^{m} T_{T_n - 1} = \frac{(m-1)m(m+1)(m+2)(m+3)}{40}, \forall\, m \in \mathbb{N}$.

Prova: Vamos considerar verdadeira, para todo natural n, a igualdade $T_{T_n} = T_{T_n - 1} + T_n$,que será provada posteriormente. Dessa identidade, segue-se que $\sum_{n=1}^{m} T_{T_n - 1} = \sum_{n=1}^{m} T_{T_n} - \sum_{n=1}^{m} T_n = \frac{m(m+1)(m+2)\left(3m^2+6m+11\right)}{120} - \frac{m(m+1)(m+2)}{6} = \frac{m(m+1)(m+2)}{6} \cdot \left[\frac{3m^2+6m+11}{20} - 1\right] = \frac{m(m+1)(m+2)}{6} \cdot \left[\frac{3m^2+6m-9}{20}\right] = \frac{m(m+1)(m+2)(m^2+2m-3)}{40} = \frac{(m-1)m(m+1)(m+2)(m+3)}{40}$. ■

Aplicação: Calcule o valor da soma $T_{T_1 - 1} + T_{T_2 - 1} + \cdots + T_{T_{30} - 1}$.

Solução: Tem-se que $T_{T_1 - 1} + T_{T_2 - 1} + \cdots + T_{T_{30} - 1} = \sum_{n=1}^{30} T_{T_n - 1} = \frac{29\cdot 30\cdot 31\cdot 32\cdot 33}{40} = 712.008$.

Proposição 4.3.12: $\sum_{n=1}^{m} nT_n = \frac{m(m+1)(m+2)(3m+1)}{24}, \forall\, m \in \mathbb{N}$.

Prova: Sabe-se que $nT_n = \frac{n(n+1)n}{2} = \frac{n^3+n^2}{2}, \forall\, n \in \mathbb{N}$, de onde surge $\sum_{n=1}^{m} nT_n = \frac{1}{2} \cdot \left[\sum_{n=1}^{m} n^3 + \sum_{n=1}^{m} n^2\right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{m^2(m+1)^2}{4} + \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}\right] = \frac{m^2(m+1)^2}{8} + \frac{m(m+1)(2m+1)}{12} = \frac{m(m+1)}{4} \cdot$

$$\left[\frac{m(m+1)}{2}+\frac{2m+1}{3}\right]=\frac{m(m+1)}{4}\cdot\left[\frac{3m^2+3m+4m+2}{6}\right]=$$

$$\frac{m(m+1)\left(3m^2+7m+2\right)}{24}=\frac{m(m+1)(3m+1)(m+2)}{24}=\frac{m(m+1)(m+2)(3m+1)}{24}.\ ■$$

Aplicação: Calcule o valor da soma $T_1+2T_2+3T_3+\cdots+50T_{50}$.

Solução: Tem-se que $T_1+2T_2+3T_3+\cdots+50T_{50}=\sum_{n=1}^{50} nT_n=\frac{50\cdot 51\cdot 52\cdot 151}{24}=834.275$.

Proposição 4.3.13: $\sum_{n=1}^{m}\ (T_n-n)^2=\frac{m(m^2-1)(3m^2-2)}{60}, \forall\ m\in\mathbb{N}$.

Prova: Tem-se que $\sum_{n=1}^{m}\ (T_n-n)^2=\sum_{n=1}^{m}\ ({T_n}^2-2nT_n+n^2)=$

$$\sum_{n=1}^{m} {T_n}^2-2\cdot\sum_{n=1}^{m} nT_n+\sum_{n=1}^{m} n^2=\frac{m(m+1)(m+2)\left(3m^2+6m+1\right)}{60}-$$

$$2\cdot\frac{m(m+1)(m+2)(3m+1)}{24}+\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}=\frac{m(m+1)(m+2)}{12}\cdot$$

$$\left[\frac{3m^2+6m+1}{5}-(3m+1)\right]+\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}=$$

$$\frac{m(m+1)(m+2)\left(3m^2+6m+1-15m-5\right)}{60}+\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}=\frac{m(m+1)}{6}\cdot$$

$$\left[\frac{\left(3m^2-9m-4\right)(m+2)}{10}+2m+1\right]=$$

$$\frac{m(m+1)}{6}\cdot\left[\frac{3m^3+6m^2-9m^2-18m-4m-8+20m+10}{10}\right]=\frac{m(m+1)}{6}\cdot$$

$$\left[\frac{3m^3-3m^2-2m+2}{10}\right]=\frac{m(m+1)}{6}\cdot\left[\frac{3m^2(m-1)-2(m-1)}{10}\right]=$$

$$\frac{m(m+1)(m-1)(3m^2-2)}{60}=\frac{m(m^2-1)(3m^2-2)}{60}, \forall\ m\in\mathbb{N}.\ ■$$

Aplicação: Calcule o valor da soma $(T_1-1)^2+(T_2-2)^2+\cdots+(T_{10}-10)^2$.

Solução: Tem-se que $(T_1 - 1)^2 + (T_2 - 2)^2 + \cdots + (T_{10} - 10)^2 = \sum_{n=1}^{10}(T_n - n)^2 = \frac{10(10^2-1)(3\cdot 10^2-2)}{60} = \frac{10\times 99\times 298}{60} = 4.917$.

Proposição 4.3.14: $\sum_{n=1}^{m} (T_n - n) = \frac{m(m^2-1)}{6}, \forall\, m \in \mathbb{N}$.

Prova: $\sum_{n=1}^{m} (T_n - n) = \sum_{n=1}^{m} T_n - \sum_{n=1}^{m} n = \frac{m(m+1)(m+2)}{6} - \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m(m+1)}{2} \cdot \left[\frac{m+2}{3} - 1\right] = \frac{m(m+1)(m-1)}{6} = \frac{m(m^2-1)}{6}, \forall\, m \in \mathbb{N}$.
■

Aplicação: Calcule o valor da soma $T_1 - 1 + T_2 - 2 + \cdots + T_{10} - 10$.

Solução: Tem-se $T_1 - 1 + T_2 - 2 + \cdots + T_{10} - 10 = \sum_{n=1}^{10} (T_n - n) = \frac{10(10^2-1)}{6} = \frac{990}{6} = 165$.

Proposição 4.3.15: $\sum_{n=1}^{m} T_{T_n - n} = \frac{m(m^2-1)(3m^2+8)}{120}, \forall\, m \in \mathbb{N}$.

Prova: Por definição, $T_{T_n - n} = \frac{(T_n - n)^2 + (T_n - n)}{2}$, de onde segue que $\sum_{n=1}^{m} T_{T_n - n} = \frac{1}{2} \cdot \left[\sum_{n=1}^{m}(T_n - n)^2 + \sum_{n=1}^{m}(T_n - n)\right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{m(m^2-1)(3m^2-2)}{60} + \frac{m(m^2-1)}{6}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{m(m^2-1)}{6}\left[\frac{(3m^2-2)}{10} + 1\right] = \frac{m(m^2-1)(3m^2+8)}{120}, \forall\, m \in \mathbb{N}$. ■

Aplicação: Calcule o valor da soma $T_{T_1 - 1} + T_{T_2 - 2} + \cdots + T_{T_{10} - 10}$.

Solução: Tem-se que $T_{T_1 - 1} + T_{T_2 - 2} + \cdots + T_{T_{10} - 10} = \sum_{n=1}^{10} T_{T_n - n} = \frac{10\times 99\times 308}{120} = 2.541$.

Proposição 4.3.16: $T_n{}^2 = T_n + T_{n-1} \cdot T_{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Prova: $T_{n-1} \cdot T_{n+1} + T_n = \frac{(n-1)n}{2} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{(n-1)(n+2)}{2} + 1\right] = \frac{n(n+1)\left(n^2+2n-n-2+2\right)}{4} = \frac{n(n+1)\left(n^2+n\right)}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = T_n{}^2, \forall\, n \in \mathbb{N}$. ∎

A identidade acima garante que $T_0 \cdot T_2 = T_1{}^2 - T_1$; $T_1 \cdot T_3 = T_2{}^2 - T_2$; $\cdots$; $T_{k-1} \cdot T_{k+1} = T_k{}^2 - T_k$, de onde surge $T_0 \cdot T_2 + T_1 \cdot T_3 + \cdots + T_{k-1} \cdot T_{k+1} = \left(T_1{}^2 + T_2{}^2 + \cdots + T_k{}^2\right) - (T_1 + T_2 + \cdots + T_k) = \frac{k(k+1)(k+2)\left(3k^2+6k+1\right)}{60} - \frac{k(k+1)(k+2)}{6} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}\left[\frac{\left(3k^2+6k+1\right)}{10} - 1\right] = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}\left[\frac{\left(3k^2+6k-9\right)}{10}\right] = \frac{k(k+1)(k+2)\left(k^2+2k-3\right)}{20} = \frac{k(k+1)(k+2)(k-1)(k+3)}{20} = \frac{(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)}{20}$.

Aplicação: Calcule o valor da soma $T_1 \cdot T_3 + T_2 \cdot T_4 + \cdots + T_{10} \cdot T_{12}$.

Solução: Ficou estabelecido que $\sum_{i=0}^{k-1} T_i \cdot T_{i+2} = \frac{(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)}{20}$, logo, tomando k = 11, segue-se que $\sum_{i=0}^{10} T_i \cdot T_{i+2} = T_0 \cdot T_2 + T_1 \cdot T_3 + \cdots + T_{10} \cdot T_{12} = T_1 \cdot T_3 + \cdots + T_{10} \cdot T_{12} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{20} = 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 7 = 12.012$.

4.4 MAIS CONGRUÊNCIAS E IDENTIDADES

Proposição 4.4.1: $(2a+1)^2T_n + T_a = T_{(2a+1)n+a}\ \forall\, a,n\ \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Prova: Para todos a, n inteiros não negativos, tem-se que

$$(2a+1)^2T_n + T_a = (2a+1)^2 \cdot \frac{n\cdot(n+1)}{2} + \frac{a\cdot(a+1)}{2} =$$

$$\frac{(4a^2+4a+1)\cdot(n^2+n)+a^2+a}{2} = \frac{4a^2n^2+4a^2n+4an^2+4an+n^2+n+a^2+a}{2} =$$

$$\frac{(2an+n+a)\cdot(2an+n+a+1)}{2} = T_{2an+n+a} = T_{(2a+1)n+a} \qquad \blacksquare$$

Tomando $a = 2$ tem-se a identidade $25T_n + 3 = T_{5n+2}$, válida para qualquer inteiro n não negativo. Isto significa que $25|T_{5n+2} - 3$ e como $5|25$, tem-se que $5|T_{5n+2} - 3$, isto é, $T_{5n+2} \equiv 3\ (mod\ 5), \forall\, n\ \in\ \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Aplicação: Mostre que $(T_2 + T_7 + T_{12} + \cdots + T_{2017})^{2017} \equiv 2(mod\ 5)$.

Solução: A PA $(2, 7, 12, \ldots, 2017)$ possui 404 termos, que corresponde à quantidade de triangulares que figuram na congruência. Segue-se que $T_2 + T_7 + T_{12} + \cdots + T_{2017} \equiv 404 \times 3(mod\ 5) \therefore T_2 + T_7 + T_{12} + \cdots + T_{2017} \equiv 1212(mod\ 5) \therefore T_2 + T_7 + T_{12} + \cdots + T_{2017} \equiv 2(mod\ 5) \therefore (T_2 + T_7 + T_{12} + \cdots + T_{2017})^{2017} \equiv 2^{2017}(mod\ 5)$. Como $2^4 \equiv 1(mod\ 5)$, segue-se que $(2^4)^{504} \equiv 1^{504}(mod\ 5) \therefore 2^{2016} \equiv 1(mod\ 5) \therefore 2^{2016} \times 2 \equiv 1 \times 2(mod\ 5) \therefore 2^{2017} \equiv 2(mod\ 5)$. Portanto, $(T_2 + T_7 + T_{12} + \cdots + T_{2017})^{2017} \equiv 2(mod\ 5)$.

Tomando $a = 3$ tem-se a identidade $49T_n + 6 = T_{7n+3}$, válida para qualquer inteiro n não negativo. Dela, segue que $T_{7n+3} \equiv 6\ (mod\ 49)$ e como $7|49$, tem-se $T_{7n+3} \equiv 6\ (mod\ 7) \therefore T_{7n+3} \equiv -1\ (mod\ 7)$.

Aplicação: Determine o resto da divisão de $(T_3 + T_{10} + T_{17} + \cdots + T_{2019})^{2019}$ por 7 .

Solução: Seja k a quantidade de termos da PA $(3, 10, 17, \ldots, 2019)$. Sabe-se que $2019 = 3 + (k-1) \cdot 7 \therefore 2016 = 7(k-1) \therefore k - 1 = 288 \therefore k = 289$. Segue-se então que $T_3 + T_{10} + T_{17} + \cdots + T_{2019} \equiv -289\ (\ mod\ 7)$. Como $-289 \equiv -2\ (mod\ 7)$, obtém-se $(-289)^3 \equiv (-2)^3 (mod\ 7) \therefore ((-289)^3)^{673} \equiv (-8)^{673} (mod\ 7) \therefore (-289)^{2019} \equiv (-1)^{673} (mod\ 7) \therefore (-289)^{2019} \equiv -1 (mod\ 7) \therefore (-289)^{2019} \equiv 6 (mod\ 7)$.

Portanto, $(T_3 + T_{10} + T_{17} + \cdots + T_{2019})^{2019} \equiv 6\ (mod\ 7)$, isto é, o resto é 6.

Em (TROTTER) podem ser encontradas várias identidades e somatórios envolvendo números triangulares.

4.5 PARIDADE DOS TRIANGULARES

Discutiremos aqui alguns aspectos sobre a paridade dos números triangulares, apresentando alguns resultados expressivos.

Proposição 4.5.1: Seja $n \in \mathbb{N}$. Se $4|n$ então T_n é par.

Prova: Se $4|n$ então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 4k$. Daí, $T_n = T_{4k} = \frac{4k \cdot (4k+1)}{2} = 2k \cdot (4k + 1) = 2(4k^2 + k)$. Portanto, T_n é par. ■

Com isso é possível afirmar, por exemplo, que $T_{123.456.784}$ é par.

Proposição 4.5.2: Seja n um natural par. Se $4 \nmid n$ então T_n é ímpar.

Prova: Se $4 \nmid n$ então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 4k + 1, 4k + 2$ ou $4k + 3$. Como n é par, resta que $n = 4k + 2$, daí $T_n = T_{4k+2} = \frac{(4k+2) \cdot (4k+3)}{2} = (2k + 1) \cdot (4k + 3) = 8k^2 + 6k + 4k + 3 = 8k^2 + 10k + 3 = 2 \cdot (4k^2 + 5k + 1) + 1$. Portanto, T_n é ímpar. ■

Fica verificado, como exemplo, que $T_{666.666.666}$ é ímpar.

Proposição 4.5.3: Seja n um natural ímpar. Se $4|n + 1$ então T_n é par.

Prova: Se $4|n + 1$ então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n + 1 = 4k$, isto é, $n = 4k - 1$. Daí,

$$T_n = T_{4k-1} = \frac{(4k-1)\cdot(4k-1+1)}{2} = (4k-1)\cdot(2k) = 2\cdot(4k^2-k).$$

Portanto, T_n é par. ■

É garantido então que $T_{888.887}$ é par.

Proposição 4.5.4: Seja n um natural ímpar. Se $4 \nmid n+1$ então T_n é ímpar.

Prova: Se $4 \nmid n+1$ então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n+1 = 4k+1, 4k+2$ ou $4k+3$,ou seja, $n = 4k, 4k+1$ ou $4k+2$. Como n é ímpar, tem-se que $n = 4k+1$. Daí, $T_n = T_{4k+1} = \frac{(4k+1)\cdot(4k+2)}{2} = (4k+1)\cdot(2k+1) = 8k^2+4k+2k+1 = 8k^2+6k+1 = 2\cdot(4k^2+3k)+1$. Portanto, T_n é ímpar. ■

Com isso é possível afirmar que $T_{777.777}$ é ímpar.

5 NÚMEROS TRIANGULARES E OUTROS ASPECTOS INTERESSANTES

Neste capítulo mostraremos que é possível formar progressões geométricas finitas, de três termos distintos, compostas por números triangulares. Em verdade, existem infinitas tais progressões, fato decorrente da existência de infinitos números triangulares que são simultaneamente quadrados. Será obtida uma fórmula para caracterizar tais números e apresentaremos outras curiosidades. Discutiremos também a solubilidade de algumas equações e encerraremos o trabalho construindo um link entre progressões aritméticas e números triangulares.

5.1 TRIANGULARES E PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Proposição 5.1.1 Se existirem $n, m \in N$ tais que $T_n = m^2$ então $(T_n, T_{n+2m}, T_{3n+4m+1})$ é uma progressão geométrica.

Prova: Tem-se que $T_{n+2m} = \frac{(n+2m)(n+2m+1)}{2} = \frac{n^2+2mn+n+2mn+4m^2+2m}{2} = \frac{(n^2+n)+4mn+4m^2+2m}{2} = \frac{n^2+n}{2} + 2mn + 2m^2 + m = T_n + 2mn + 2m^2 + m = m^2 + 2mn + 2m^2 + m = 2mn + 3m^2 + m = m(2n + 3m + 1)$. Além disso, $T_{3n+4m+1} = \frac{(3n+4m+1)(3n+4m+2)}{2} = \frac{9n^2+12mn+6n+12mn+16m^2+8m+3n+4m+2}{2} = 9\left(\frac{n^2+n}{2}\right) + 12mn + 8m^2 + 6m + 1 = 9T_n + 12mn + 8m^2 + 6m + 1 = 9m^2 + 12mn + 8m^2 + 6m + 1$. Como $n^2 + n = 2T_n = 2m^2$, ou seja, $8m^2 = 4n^2 + 4n$, segue-se que $T_{3n+4m+1} = 9m^2 + 12mn + 4n^2 + 4n + 6m + 1 = (3m)^2 + 2(3m)(2n+1) + (2n+1)^2 = (3m + 2n + 1)^2 = (2n + 3m + 1)^2$. Em consequência de $(m^2, m \cdot (2n + 3m + 1), (2n + 3m + 1)^2)$ ser uma progressão geométrica de razão $q =$

$\frac{2n+3m+1}{m}$, decorre que $(T_n, T_{n+2m}, T_{3n+4m+1})$ é uma progressão geométrica.■

A título de ilustração, tem-se que $T_8 = 36 = 6^2$ e nesse caso, $n = 8$ e $m = 6$. Logo, $T_{n+2m} = T_{20} = 210$ e $T_{3n+4m+1} = T_{49} = 1225$, isto posto, é imediato observar que$(36, 210, 1225)$ é uma progressão geométrica de razão $q = \frac{35}{6}$. A primeira PG determinada por 3 triangulares é $(T_1, T_3, T_8) = (1, 6, 36)$. Na realidade, estes não são os únicos exemplos. Existem infinitas progressões geométricas formadas por 3 triangulares e a prova disso está fundamentada na afirmação de que existem infinitos números triangulares que são simultaneamente quadrados perfeitos, mas a prova desta afirmação será feita mais tardiamente.

5.2 OUTRAS CURIOSIDADES E RESULTADOS

Afirmação: Existem infinitos pares de números triangulares cuja soma também é um número triangular.

Prova: Inicialmente, é preciso provar que $T_{k-1} + k = T_k, \forall\, k \in \mathbb{N}$. Diretamente, para qualquer natural k, tem-se $T_{k-1} + k = \frac{(k-1)k}{2} + k = \frac{k^2-k+2k}{2} = \frac{k^2+k}{2} = T_k$. Logo, tomando $k = T_n$, com $n \in \mathbb{N}$, segue-se que $T_{T_n-1} + T_n = T_{T_n}$.

Como exemplificação tem-se que $T_{T_{50}-1} + T_{50} = T_{T_{50}}$, ou seja, $T_{1274} + T_{50} = T_{T_{1275}}$. Com efeito, fica provado também que existem infinitos números triangulares que podem ser escritos como diferença entre dois triangulares consecutivos.

Afirmação: O único triangular que é um cubo é $T_1 = 1$.

Antes de provar esta afirmação é necessário discursar um pouco sobre um resultado matemático de grande importância e que permaneceu sem resposta durante um longo período de tempo, chamado Conjectura de Catalan. Eugène Charles Catalan (1814 – 1894) foi um matemático belga, que se distinguiu pelos seus estudos sobre a teoria dos números. Filho de Joseph Catalan, joalheiro francês que só reconheceu a sua paternidade em 1821. Em 1825, foi para paris estudar matemática na École Polytechnique, onde conheceu Joseph Liouville. Em 1834, foi expulso da escola, mas no ano seguinte, foi autorizado a continuar os seus estudos, o que lhe permitiu acabar a formatura e em seguida, ensinar matemática na École des Arts et Métiers em Châlons-en-Champagne. Foi professor de geometria descritiva, mas as suas atividades políticas de esquerda impuseram resistência à carreira de professor. A Conjectura de Catalan (ou Teorema de Mihailescu) foi proposta em 1844 por Eugène e por 158 anos permaneceu sem solução, desafiando os melhores matemáticos, sendo demonstrada em abril de 2002 pelo matemático romeno Preda V. Mihailescu e publicado no Jornal de Crelle em 2004. A conjectura afirma que 2^3 e 3^2 é o único par de potências consecutivas. Em outras palavras, isso significa que a única solução natural da equação $x^a - y^b = 1$, em que x, a, y e b são todos números maiores do que 1 é $x = 3, a = 2, y = 2, b = 3$. Provar o teorema está fora dos objetivos deste trabalho. O intuito é apenas informar o leitor sobre a existência do problema e aplicá-lo quando necessário. Passemos assim à prova da afirmação.

Prova: Desejamos determinar todos os naturais *n, m* tais que $T_n = m^3$. Esta igualdade equivale a $\frac{n(n+1)}{2} = m^3$. Logo, deve ser $n^2 + n = 2m^3 \therefore 4n^2 + 4n + 1 = 8m^3 + 1 \therefore (2n+1)^2 - 8m^3 = 1$. Pondo $x = 2n + 1$ e $y = 2m$ tem-se que $x^2 - y^3 = 1$. De acordo com a Conjectura de Catalan, o único par de potências perfeitas diferindo por uma unidade é 3^2 e 2^3, logo, $2n + 1 = 3$ e $2m = 2$, portanto, $n = m = 1$ e $T_1 = 1^3$ é o único triangular cúbico. ■

Proposição 5.2.1 o único número triangular primo é $T_2 = 3$.

Prova: Sejam $n, p \in \mathbb{N}$ tais que $T_n = p$. Logo, $\frac{n(n+1)}{2} = p$, isto é, $n(n+1) = 2p \therefore 2|n(n+1)$. Como n e $n+1$ são inteiros consecutivos, segue-se que n e $n+1$ têm paridades distintas. Suponha, sem prejuízo, que *n* é par. Assim, existe um natural *k* tal que $n = 2k$. Daí, $2p = 2k(2k+1) \therefore p = k(2k+1)$. Por hipótese *p* é primo e dessa forma $k = 1$ ou $2k+1 = 1$. Porém, $2k+1 = 1 \Rightarrow k = 0$, o que é uma contradição. Portanto, resta que $k = 1$, e finalmente, $n = 2$ e $p = 3$. ■

Proposição 5.2.2 Sejam n, p, q inteiros não negativos. Tem-se que $T_n = p \cdot q$ se, e somente se, $T_{n+p+q} = T_{n+p} + T_{n+q}$.

Prova: Por definição, $T_{n+p+q} = \frac{(n+p+q)[(n+p+q)+1]}{2} = \frac{(n+p+q)^2+n+p+q}{2} = \frac{n^2+p^2+q^2+2np+2nq+2pq+n+p+q}{2} = \frac{(n+p)^2+(n+p)}{2} + \frac{q^2+2nq+2pq+q}{2} =$

$T_{n+p} + \frac{q^2+2nq+2pq+q}{2}$. Por hipótese, $T_n = pq$, ou seja, $\frac{n^2+n}{2} = pq \therefore n^2 + n = 2pq \therefore 2pq = n^2 + n$. Logo, $T_{n+p+q} = T_{n+p} + \frac{q^2+2nq+2pq+q}{2} = T_{n+p} + \frac{q^2+2nq+n^2+n+q}{2} = T_{n+p} + \frac{(n+q)^2+(n+q)}{2} = T_{n+p} + T_{n+q}$.

Reciprocamente, se $T_{n+p+q} = T_{n+p} + T_{n+q}$ então

$$\frac{(n+p+q)(n+p+q+1)}{2} = \frac{(n+p)(n+p+1)}{2} + \frac{(n+q)(n+q+1)}{2} \therefore$$

$$n^2 + p^2 + q^2 + 2np + 2nq + 2pq + n + p + q$$
$$= n^2 + 2np + p^2 + n + p + n^2 + 2nq + q^2 + n + q \therefore$$

$$2pq = n^2 + n \therefore pq = \frac{n^2+n}{2} = T_n \therefore T_n = pq. \blacksquare$$

Já foi visto que $T_{666} = 333 \cdot 667 = 222.111$. Logo, tomando $n = 666, p = 333$ e $q = 667$ tem-se que $T_{666+333+667} = T_{666+333} + T_{666+667} \therefore T_{1666} = T_{999} + T_{1333}$.

Em outra ocasião observou-se que $T_{333} = 333 \cdot 167 = 55.611$. Consequentemente, tomando $n = p = 333$ e $q = 167$ tem-se $T_{333+333+167} = T_{333+333} + T_{333+167} \therefore T_{833} = T_{666} + T_{500}$.

Em verdade, ao provar esta última proposição, acabamos de fornecer outra demonstração de que existem infinitos pares de números triangulares cuja soma também é um número triangular, pois existem infinitos triangulares compostos. Em anexo a esse fato, também é possível garantir a existência de infinitos triangulares que podem ser expressos como diferença entre dois triangulares não necessariamente consecutivos.

Proposição 5.2.3 Se um número natural *n* é a soma de dois números triangulares, então $4n + 1$ é a soma de dois quadrados.

Prova: Por hipótese existem naturais *a* e *b* tais que $n = \frac{a^2+a}{2} + \frac{b^2+b}{2}$, logo,

$$\begin{aligned} 4n+1 &= \frac{4(a^2+a)}{2} + \frac{4(b^2+b)}{2} + 1 = 2a^2 + 2a + 2b^2 + 2b + 1 \\ &= (a^2+b^2+1+2a+2b+2ab) + (a^2-2ab+b^2) \\ &= (a+b+1)^2 + (a-b)^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ao tomar $a = 2$ e $b = 3$ obtem-se $n = \frac{2^2+2}{2} + \frac{3^2+3}{2} = 3 + 6 = 9$ e $4n + 1 = 4 \cdot 9 + 1 = 37 = (2+3+1)^2 + (2-3)^2$.

Outro fato interessante é que se pode tomar, por exemplo, $n = T_{833}$, já que tem-se $T_{833} = T_{666} + T_{500}$. Ao fazer isso, obtém-se $4T_{833} + 1 = (666+500+1)^2 + (666-500)^2 = (1167)^2 + (166)^2$ $\therefore$ $1.389.445 = (1167)^2 + (166)^2$.

5.3 NÚMEROS TRIANGULARES QUADRADOS PERFEITOS

Proposição 5.3.1 Se T_n é um quadrado perfeito, então $T_{4n(n+1)}$ também é um quadrado.

Prova: Tem-se que $T_{4n(n+1)} = \frac{4n(n+1)[4n(n+1)+1]}{2} = 2n(n+1)[4n^2 + 4n + 1] = 2n(n+1)(2n+1)^2$. Por hipótese, existe um natural *m* tal que $T_n = m^2$, isto é,

$\frac{n(n+1)}{2} = m^2 \therefore n(n+1) = 2m^2 \ \therefore 2n(n+1) = 4m^2.$ Logo, $T_{4n(n+1)} = 4m^2(2n+1)^2 = (2m)^2(2n+1)^2 = (4mn+2m)^2.$

Portanto, $T_{4n(n+1)}$ é um quadrado. ∎

Em (BOGOLMONY) o leitor poderá encontrar mais informações e curiosidades.

Como exemplo vale notar que $T_{49} = 1225 = 35^2$ e $T_{4\cdot 49\cdot(49+1)} = T_{4\cdot 49\cdot 50} = T_{9800} = 48.024.900 = (6930)^2$.

Antes de provar a infinitude dos triangulares quadrados perfeitos se faz necessária a solidez de alguns resultados.

Proposição 5.3.2 A equação $x^2 - 2y^2 = 1$ possui uma infinidade de soluções inteiras positivas. (Aconselha-se a leitura de (NETO, 2013), página 63.)

Prova: Observe que $3^2 - 2 \cdot 2^2 = 9 - 8 = 1$, ou seja, $x = 3, y = 2$ é uma solução da equação. É possível gerar infinitas soluções a partir de uma solução

$x = a, y = b$ não nula. De fato, se (a, b) é uma solução positiva da equação então

$a^2 - 2 \cdot b^2 = 1 \ \therefore \ (a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = 1$. Elevando ao quadrado ambos os membros desta última, obtemos $(a + b\sqrt{2})^2(a - b\sqrt{2})^2 = 1 \ \therefore (a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2})\,(a^2 + 2b^2 - 2ab\sqrt{2}) = 1 \ \therefore \ (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab\sqrt{2})^2 = 1 \ \therefore \quad (a^2 + 2b^2)^2 - 2(2ab)^2 = 1$. Esta última igualdade nos diz que $(a^2 + 2b^2, 2ab)$ é uma solução da equação inicial. Para obter outras soluções basta repetir o processo realizado, ou seja, repetindo o mesmo argumento sucessivas vezes obtém-se uma infinidade de soluções para a equação do enunciado. ∎

Tomando $a = 3$ e $b = 2$ tem-se que $(3^2 + 2 \cdot 2^2)^2 - 2(2 \cdot 3 \cdot 2)^2 = 1$, isto é, $(17)^2 - 2(12)^2 = 1$. Portanto, $(17, 12)$ é outra solução.

As quatro primeiras soluções não nulas da equação $x^2 - 2y^2 = 1$ são $(3, 2), (17, 12)$, $(99, 70)$ e $(577, 408)$. Logo mais será mostrado que tais soluções fornecem os triangulares $T_1 = 1^2$, $T_8 = 6^2$, $T_{49} = 35^2$ e $T_{288} = 204^2$. A equação $x^2 - 2y^2 = 1$ é um exemplo de equação do tipo $x^2 - dy^2 = m$, conhecida como equação de Pell, em referência a John Pell, matemático inglês do século XVII.

Definição 5.3.1 Seja $Q_m = m^2$ e m-ésimo quadrado perfeito. Um número triangular *T* é dito um quadrado se existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $T = T_n = Q_m$.

A igualdade $T_n = Q_m$ equivale à igualdade $\frac{n(n+1)}{2} = m^2$. Logo, deve ser $n^2 + n = 2m^2 \therefore 4n^2 + 4n + 1 = 8m^2 + 1 \therefore (2n + 1)^2 = 8m^2 + 1 \therefore (2n + 1)^2 - 2(2m)^2 = 1$. Fazendo $2n + 1 = x$ e $y = 2m$ chega-se à equação $x^2 - 2y^2 = 1$, que já provamos possuir uma infinidade de soluções. Fica então estabelecido o seguinte

Teorema 5.3.1 Existe uma infinidade de números triangulares que são quadrados perfeitos. ■

Para a solução $x = 3, y = 2$ tem-se $n = m = 1$ e $T_1 = 1^2$. Para a solução $x = 17, y = 12$ tem-se $n = 8, m = 6$ e $T_8 = 6^2$.

Agora, desejamos determinar um padrão de caracterização dos números triangulares quadrados perfeitos. Utilizaremos a notação $(TQ)_n$ para representar o *n*-ésimo número triangular que também é um quadrado. Observamos que

$$(TQ)_1 = (1 \cdot 1)^2$$

$$(TQ)_2 = (2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = (1+1)^2 \cdot (1+1+1)^2 = (1+1)^2 \cdot (2 \cdot 1 + 1)^2.$$

$$(TQ)_3 = (5 \cdot 7)^2 = 5^2 \cdot 7^2 = (2+3)^2 \cdot (2+2+3)^2 = (2+3)^2 \cdot (2 \cdot 2 + 3)^2.$$

$$(TQ)_4 = (12 \cdot 17)^2 = 12^2 \cdot 17^2 = (5+7)^2 \cdot (5+5+7)^2 = (5+7)^2 \cdot (2 \cdot 5 + 7)^2.$$

Antes de conjecturar uma fórmula para $(TQ)_n$ vamos definir a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ tal que $a_0 = 0, a_1 = 1$ e $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$, para $n \geq 2$. Além disso, um número *x* será dito triangular se existirem inteiros positivos *a* e *b* tais que $x = \frac{ab}{2}$ e $|a - b| = 1$. Agora, enunciamos a seguinte

Conjectura: Seja $(TQ)_n = {a_n}^2 \cdot (a_n + a_{n-1})^2, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Então:

I) Os números ${a_n}^2 \cdot (a_n + a_{n-1})^2$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, são triangulares.

II) Esta sequência de fato contém todos os triangulares quadrados perfeitos.

Prova: Obviamente, ${a_n}^2 \cdot (a_n + a_{n-1})^2$ é um quadrado perfeito, qualquer que seja o natural *n*. Provaremos então que tais números são triangulares utilizando o Princípio de Indução Finita.

i) Para $n = 1$ tem-se que $(TQ)_n = (TQ)_1 = {a_1}^2 \cdot (a_1 + a_0)^2 = 1^2(1+0)^2 = 1 = \frac{2 \cdot 1}{2}$ e $|2 - 1| = 1$.
ii) Suponha que ${a_n}^2 \cdot (a_n + a_{n-1})^2$ é triangular, ou seja, ${a_n}^2 \cdot (a_n + a_{n-1})^2 = \frac{2{a_n}^2 \cdot (a_n + a_{n-1})^2}{2}$ e $\left|2{a_n}^2 - (a_n + a_{n-1})^2\right| = 1$, para algum $n \geq 1$.
iii) Devemos verificar se ${a_{n+1}}^2 \cdot (a_{n+1} + a_n)^2$ é triangular.

Ora, $a_{n+1}{}^2 \cdot (a_{n+1} + a_n)^2 = \frac{2a_{n+1}{}^2 \cdot (a_{n+1}+a_n)^2}{2}$ e $\left|2a_{n+1}{}^2 - (a_{n+1} + a_n)^2\right| = \left|2a_{n+1}{}^2 - a_{n+1}{}^2 - 2 \cdot a_{n+1} \cdot a_n - a_n{}^2\right| = |a_{n+1}{}^2 - 2 \cdot a_{n+1} \cdot a_n - a_n{}^2|$. Da definição da sequência (a_n) tem-se que $a_{n+1} = 2 \cdot a_n + a_{n-1}$, logo,

$\left|2a_{n+1}{}^2 - (a_{n+1} + a_n)^2\right| = |(2 \cdot a_n + a_{n-1})^2 - 2(2 \cdot a_n + a_{n-1}) \cdot a_n - a_n{}^2| = \left|4a_n{}^2 + 4a_n a_{n-1} + a_{n-1}{}^2 - 4a_n{}^2 - 2a_n a_{n-1} - a_n{}^2\right| = \left|2a_n a_{n-1} + a_{n-1}{}^2 - a_n{}^2\right| = |a_n{}^2 - a_{n-1}{}^2 - 2a_n a_{n-1}| = \left|2a_n{}^2 - (a_n + a_{n-1})^2\right| = 1$. Portanto, $a_{n+1}{}^2 \cdot (a_{n+1} + a_n)^2$ é triangular e fica provada a primeira parte da conjectura.

Para a segunda parte, seja $m_1{}^2 = \frac{k_1(k_1+1)}{2}$, com $k_1 \in \mathbb{N}$, um número triangular quadrado arbitrário. Há dois casos a considerar, pois k_1 é par ou é ímpar. Sem prejuízo algum, considere k_1 ímpar. Logo, $k_1 + 1$ é par e $\frac{k_1+1}{2}$ é inteiro, logo, existe um natural *x* tal que $\frac{k_1+1}{2} = x \therefore k_1 = 2x - 1$. Com isso, $\left(k_1, \frac{k_1+1}{2}\right) = (2x - 1, x) = 1$.

Como $k_1 \cdot \frac{k_1+1}{2}$ é um quadrado e $\left(k_1, \frac{k_1+1}{2}\right) = 1$, segue-se que k_1 e $\frac{k_1+1}{2}$ são ambos quadrados. Assim, sejam $\frac{k_1+1}{2} = b_1{}^2$ e $k_1 = c_1{}^2$, com $b_1, c_1 \geq 1$. Como $k_1 \geq 1$, tem-se então que $2k_1 \geq k_1 + 1 \therefore k_1 \geq \frac{k_1+1}{2} \therefore c_1{}^2 \geq b_1{}^2 \therefore c_1 \geq b_1 \therefore b_1 \leq c_1$. Ocorre que $b_1 = c_1$ se, e somente se, $b_1{}^2 = c_1{}^2 \Leftrightarrow \frac{k_1+1}{2} = k_1 \Leftrightarrow k_1 = 1 \Leftrightarrow m_1{}^2 = 1$ e nesse caso $m_1{}^2 = a_1{}^2 \cdot (a_1 + a_0)^2 = (TQ)_1$. Caso seja $b_1 < c_1$, então defina $b_2 = c_1 - b_1, c_2 = 2b_1 - c_1$ e $m_2 = b_2{}^2 \cdot$

c_2^2. Daí, $m_2 = \frac{2b_2^2 \cdot c_2^2}{2}$ e $\left|2b_2^2 - c_2^2\right| = |2(c_1 - b_1)^2 - (2b_1 - c_1)^2| = \left|2c_1^2 - 4c_1b_1 + 2b_1^2 - 4b_1^2 + 4b_1c_1 - c_1^2\right| = \left|c_1^2 - 2b_1^2\right| = |k_1 - (k_1 + 1)| = |-1| = 1$. Além disso, a igualdade $2b_1^2 - c_1^2 = 1$ implica que $\left(b_1\sqrt{2} + c_1\right)\left(b_1\sqrt{2} - c_1\right) = 1$ e como $b_1, c_1 \geq 1$, tem-se que $b_1\sqrt{2} + c_1 > 0$ e $b_1\sqrt{2} - c_1 > 0$, pois o produto $(b_1\sqrt{2} + c_1)(b_1\sqrt{2} - c_1)$ é positivo, logo, $b_1\sqrt{2} > c_1$. Sabe-se que $\frac{3}{2} > \sqrt{2}$, logo, $\frac{3b_1}{2} > b_1\sqrt{2} > c_1 \therefore \frac{3b_1}{2} > c_1$, que é equivalente a $3b_1 > 2c_1$. Consequentemente, $2b_1 - c_1 > c_1 - b_1$. Ao mesmo tempo, $c_1 > b_1$ implica que $c_1 - b_1 > 0$ e $b_1 > 2b_1 - c_1$, que nos dão a desigualdade $c_1 > b_1 > 2b_1 - c_1 > c_1 - b_1 > 0$ equivalente a $c_1 > b_1 > c_2 > b_2 > 0$. Fica mostrado então que m_2^2 é também um triangular quadrado perfeito e é necessariamente menor do que m_1^2, pela última desigualdade.

Para o que segue, seja $m_2^2 = \frac{2b_2^2 \cdot c_2^2}{2} = \frac{k_2(k_2+1)}{2}$, com $2b_2^2 = k_2$. Como $2b_2^2 - c_2^2 = -1$, segue-se que $c_2^2 = 2b_2^2 + 1$ e k_2 é par. Vale notar que $m_2^2 \neq 1$, pois caso contrário, teríamos $\frac{2b_2^2 \cdot c_2^2}{2} = 1 \therefore b_2^2 \cdot c_2^2 = 1 \therefore (b_2 \cdot c_2)^2 = 1 \therefore b_2 \cdot c_2 = 1 \therefore b_2 = c_2 = 1.$ Prosseguindo, definamos $b_3 = c_2 - b_2 \therefore c_3 = 2b_2 - c_2$ e $m_3^2 = b_3^2 \cdot c_3^2$. Suponha que $b_3 > c_3$. Logo, $c_2 - b_2 > 2b_2 - c_2 \therefore 2c_2 > 3b_2 \therefore c_2 > \frac{3b_2}{2} \therefore c_2^2 - 2b_2^2 > \left(\frac{3b_2}{2}\right)^2 - 2b_2^2 \therefore c_2^2 - 2b_2^2 > \frac{9b_2^2}{4} - 2b_2^2 = \frac{9b_2^2 - 8b_2^2}{4} = \frac{b_2^2}{4}$. Ocorre que $2b_2^2 - c_2^2 = c_1^2 - 2b_1^2 = -1$, ou seja, $c_2^2 - 2b_2^2 = 1$, daí, $\frac{b_2^2}{4} < 1$. O número b_2 é natural, assim a única opção é $b_2 = 1$, de onde segue que $c_2^2 - 2 \cdot 1^2 = 1 \therefore c_2^2 = 3 \therefore c_2 = \sqrt{3}$, o que é uma contradição pois $c_2 \in \mathbb{N}$. Do exposto até aqui, conclui-se que a hipótese $b_3 > c_3$ é falsa, portanto, deve ser $b_3 \leq c_3$. A igualdade $b_3 = c_3$ equivale a $c_2 = \frac{3b_2}{2}$, que implica $1 = {c_2}^2 - 2{b_2}^2 = \left(\frac{3b_2}{2}\right)^2 - 2{b_2}^2 = \frac{{b_2}^2}{4} \therefore {b_2}^2 = 4 \therefore$ $b_2 = 2.$ Daí, $c_2 = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3, b_3 = c_2 - b_2 = 3 - 2 = 1,$

$c_3 = 2b_2 - c_2 = 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1,$

$b_1 = b_2 + c_2 = 2 + 3 = 5$ e

$c_1 = b_1 + b_2 = 5 + 2 = 7$. Por conseguinte, ${m_1}^2 = 5^2 \cdot 7^2 = {a_3}^2 \cdot (a_3 + a_2)^2 =$ $(TQ)_3$. De forma geral, com $b_3 \leq c_3, {m_3}^2 = {b_3}^2 \cdot {c_3}^2 = \frac{2{b_3}^2 \cdot {c_3}^2}{2}$ e

$$\begin{aligned} \left|2{b_3}^2 - {c_3}^2\right| &= |2(c_2 - b_2)^2 - (2b_2 - c_2)^2| \\ &= \left|2{c_2}^2 - 4c_2b_2 + 2{b_2}^2 - 4{b_2}^2 + 4b_2c_2 - {c_2}^2\right| = \end{aligned}$$

$\left|{c_2}^2 - 2{b_2}^2\right| = 1$, ou seja, ${m_3}^2$ é um triangular quadrado perfeito. Como $c_2 > b_2 > 2b_2 - c_2 \geq c_2 - b_2 > 0$, ou equivalentemente, $c_2 > b_2 > c_3 \geq b_3 > 0$, ${m_3}^2$ é menor do que ${m_2}^2$. Assim, se escrevemos ${m_3}^2 = \frac{2{b_3}^2 \cdot {c_3}^2}{2} = \frac{(k_3+1)k_3}{2}$, com $k_3 = {c_3}^2$, então $2{b_3}^2 - {c_3}^2 = 1$, isto é, $2{b_3}^2 = {c_3}^2 + 1$, ou ainda, $2{b_3}^2 = k_3 + 1$. Daí, k_3 é ímpar e podemos proceder exatamente da mesma maneira, gerando um novo e menor número triangular quadrado perfeito, até que finalmente cheguemos a

${m_n}^2 = {b_n}^2 \cdot {c_n}^2 = 1$, com $b_n = c_n = 1$. Isto implica que $1 = b_n = c_{n-1} - b_{n-1}$. Logo, $b_{n-1} = 2$ e $c_{n-1} = 3$. Segue-se então que $2 = b_{n-1} = c_{n-2} - b_{n-2}$ e $3 = c_{n-1} = 2b_{n-2} - c_{n-2}$, que gera $b_{n-2} = 5$ e $c_{n-2} = 7$, etc. Em geral, para $j \geq 2, b_{j+1} = c_j - b_j, c_{j+1} = 2b_j - c_j, b_j = c_{j-1} - b_{j-1}$ e $c_j = 2b_{j-1} - c_{j-1}$. Portanto, $2b_j + b_{j+1} = 2(c_{j-1} - b_{j-1}) + (c_j - b_j) = 2c_{j-1} - 2b_{j-1} + [(2b_{j-1} - c_{j-1}) - (c_{j-1} - b_{j-1})] = 2c_{j-1} - 2b_{j-1} + 2b_{j-1} - c_{j-1} - c_{j-1} + b_{j-1} = b_{j-1}$. Simultaneamente, $b_j = (c_{j-1} - b_{j-1}) \Rightarrow b_j + b_{j-1} = c_{j-1}$. É possível provar por indução que $b_j = a_{n-j+1}$ e $c_j = a_{n-j+1} + a_{n-j}$, para $j = 1, 2, \dots, n$. Em particular, para $j = 1$, tem-se ${m_1}^2 = {b_1}^2 \cdot {c_1}^2 = {a_n}^2 \cdot (a_n + a_{n-1})^2$, logo, ${m_1}^2$ pertence à sequência. Além disso, a sequência $(TQ)_n = {a_n}^2 \cdot (a_n + a_{n-1})^2$ é monótona crescente, portanto, fica estabelecido o resultado. ■

Para mais informações sobre os números triangulares quadrados perfeitos o leitor pode consultar (LAFER).

Nosso próximo objetivo é determinar uma fórmula fechada para $(TQ)_n$ em função apenas de seu índice. Antes disso precisamos expor alguns conceitos.

Definição 5.3.2 Uma recorrência linear homogênea de segunda ordem, com coeficientes constantes, é uma recorrência da forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Para o que segue, vamos supor sempre $q \neq 0$. A cada recorrência desse tipo está associada uma equação de segundo grau, chamada equação característica. Por exemplo, a recorrência $x_{n+2} = 3x_{n+1} + x_n$ tem equação característica $r^2 - 3r - 1 = 0$. [Para mais informações sobre recorrências leia (MORGADO, 2015)].

Teorema 5.3.2 Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, então $a_n = c_1 \cdot {r_1}^n + c_2 \cdot {r_2}^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes c_1 e c_2.

Demonstração: Tem-se que $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = c_1 \cdot {r_1}^{n+2} + c_2 \cdot {r_2}^{n+2} + p \cdot (c_1 \cdot {r_1}^{n+1} + c_2 \cdot {r_2}^{n+1}) + q \cdot (c_1 \cdot {r_1}^n + c_2 \cdot {r_2}^n) = c_1 \cdot {r_1}^n({r_1}^2 + pr_1 + q) + c_2 \cdot {r_2}^n({r_2}^2 + pr_2 + q)$. Como r_1 e r_2 são as raízes da equação característica, segue-se que ${r_1}^2 + pr_1 + q = {r_2}^2 + pr_2 + q = 0$.

Portanto, $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = c_1 \cdot {r_1}^n \cdot 0 + c_2 \cdot {r_2}^n \cdot 0 = 0$, ou seja, a_n é solução da recorrência. ■

Passemos à determinação da solução geral da recorrência $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1} = a_{n-2}, \forall\, n \geq 2$. Trocando *a* por *x* e *n* por $n+2$, temos $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n, \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, logo, $x_{n+2} - 2x_{n+1} - x_n = 0$ e a equação característica é $r^2 - 2r - 1 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $r_2 = 1 - \sqrt{2}$. Portanto, $a_n = c_1 \cdot \left(1+\sqrt{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(1-\sqrt{2}\right)^n$ é solução da recorrência. Como $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, resta que $0 = c_1 \cdot \left(1+\sqrt{2}\right)^0 + c_2 \cdot \left(1-\sqrt{2}\right)^0 = c_1 + c_2$ e $1 = c_1 \cdot \left(1+\sqrt{2}\right)^1 + c_2 \cdot \left(1-\sqrt{2}\right)^1 = c_1 + c_2 + \sqrt{2}(c_1 - c_2)$. Daí, $(c_1 - c_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \therefore 2c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \therefore c_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ e $c_2 = -c_1 = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$. Portanto, $a_n = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}$ é a solução procurada.

Sabe-se que $(TQ)_n = {a_n}^2 \cdot (a_n + a_{n-1})^2 = ({a_n}^2 + a_{n-1} \cdot a_n)^2$. Com base no que foi recentemente obtido, ${a_n}^2 = \left[\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}\right]^2 =$

$$\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} - 2\left(1+\sqrt{2}\right)^n\left(1-\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}}{8} = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n} - 2(-1)^n}{8}$$ e

$$a_{n-1} \cdot a_n = \left[\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}}{2\sqrt{2}}\right] \cdot \left[\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}\right] =$$

$$\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n-1} - \left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1}\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n-1}}{8} =$$

$$\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n-1} - \left(1+\sqrt{2}\right)^n\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)^n\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)^{-1} - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)^n\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)^{-1} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n-1}}{8} =$$

$$\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n-1} - (-1)^n\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) - (-1)^n\cdot\left(-\sqrt{2}-1\right) + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n-1}}{8} =$$

$$\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n-1}-(-1)^n\sqrt{2}+(-1)^n+(-1)^n\sqrt{2}+(-1)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n-1}}{8}=$$

$$\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n-1}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n-1}+2(-1)^n}{8}.$$

Logo,

$$(TQ)_n=$$

$$\left[\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}-2(-1)^n+\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n-1}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n-1}+2(-1)^n}{8}\right]^2=$$

$$\left[\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n-1}\cdot\left(1+\sqrt{2}+1\right)+\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n-1}\cdot\left(1-\sqrt{2}+1\right)}{8}\right]^2=$$

$$\left[\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}\cdot\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}\cdot\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(1-\sqrt{2}\right)}}{8}\right]^2=\left[\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}\cdot\sqrt{2}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}\cdot\sqrt{2}}{8}\right]^2=$$

$$2\cdot\frac{\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}\right]^2}{64}=\frac{\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}\right]^2}{32}\ \therefore\ (TQ)_n=$$

$\left[\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}}{4\sqrt{2}}\right]^2$. Ao desenvolver o produto notável, é possível ir mais adiante e obter $(TQ)_n=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{4n}-2\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{4n}}{32}=$

$$\frac{\left(17+12\sqrt{2}\right)^{n}-2\cdot(-1)^{2n}+\left(17-12\sqrt{2}\right)^{n}}{32}=\frac{\left(17+12\sqrt{2}\right)^{n}+\left(17-12\sqrt{2}\right)^{n}-2}{32}.$$

Proposição5.3.3 Se $(TQ)_n=u_n{}^2$ então $u_{n+2}=6u_{n+1}-u_n$, com $u_0=1$ e $u_1=1$.

Prova: Sabe-se que $(TQ)_n = {a_n}^2 \cdot (a_n + a_{n-1})^2 = ({a_n}^2 + a_{n-1} \cdot a_n)^2$, logo, $u_n = {a_n}^2 + a_n \cdot a_{n-1}$. Logo, $u_{n+2} = {a_{n+2}}^2 + a_{n+2} \cdot a_{n+1}$ e como $a_m = 2a_{m-1} + a_{m-2}, \forall\, m \geq 2$, com $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, segue-se que $u_{n+2} = (2a_{n+1} + a_n)^2 + (2a_{n+1} + a_n) \cdot a_{n+1} = 4{a_{n+1}}^2 + 4a_{n+1}a_n + {a_n}^2 + 2{a_{n+1}}^2 + a_{n+1}a_n = 6{a_{n+1}}^2 + 5a_{n+1}a_n + {a_n}^2$. Por outro lado, $6u_{n+1} - u_n = 6{a_{n+1}}^2 + 6a_{n+1}a_n - {a_n}^2 - a_na_{n-1} = 6{a_{n+1}}^2 + 6(2a_n + a_{n-1})a_n - {a_n}^2 - a_na_{n-1} = 6{a_{n+1}}^2 + 12{a_n}^2 + 6a_{n-1}a_n - {a_n}^2 - a_na_{n-1} = 6{a_{n+1}}^2 + 11{a_n}^2 + 5a_{n-1}a_n = 6{a_{n+1}}^2 + 5a_n(2a_n + a_{n-1}) + {a_n}^2 = 6{a_{n+1}}^2 + 5a_na_{n+1} + {a_n}^2$. Portanto, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - u_n$, com $u_0 = 1$ e $u_1 = 1$. ■

É importante frisar que ao resolver tal recorrência obtém-se a mesma fórmula para $(TQ)_n$, já que ela possui equação característica $r^2 - 6r + 1 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 3 + 2\sqrt{2} = \left(1 + \sqrt{2}\right)^2$ e $r_2 = 3 - 2\sqrt{2} = \left(1 - \sqrt{2}\right)^2$. Além disso, se $u_n = k_1 \cdot {r_1}^n + k_2 \cdot {r_2}^n$, como $u_0 = 0$ e $u_1 = 1$, as constantes obtidas são $k_1 = \frac{1}{4\sqrt{2}}$ e $k_2 = \frac{-1}{4\sqrt{2}}$.

À luz dos resultados obtidos vale notar que o número $\left[\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{4034} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{4034}}{4\sqrt{2}}\right]^2$ é um inteiro, pois corresponde a $(TQ)_{2017}$, bem como é verdadeira a igualdade $1225 = \frac{\left(17+12\sqrt{2}\right)^3 + \left(17-12\sqrt{2}\right)^3 - 2}{32}$.

Proposição 5.3.4 Existem infinitos pares (x, y) de números inteiros positivos tais que $2T_x = T_y$.

Prova: Vamos definir as recorrências $a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2$ e $b_n = 4a_{n-1} + 3b_{n-1} + 3$, com $a_0 = b_0 = 0$. Afirmamos que basta tomar $x = a_n$ e $y = b_n$, qualquer que seja o natural *n*.

i) Para $n = 1$ tem-se que $a_n = a_1 = 3a_0 + 2b_0 + 2 = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 = 2, b_n = b_1 = 4a_0 + 3b_0 + 3 =\cdot 0 + 3 \cdot 0 + 3 = 3, 2T_{a_n} = 2T_{a_1} = 2T_{a_2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2} = 6 = \frac{3 \cdot 4}{2} = T_3 = T_{b_1}$.

ii) Suponha que $2T_{a_n} = T_{b_n}$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

iii) Devemos verificar se $2T_{a_{n+1}} = T_{b_{n+1}}$.

Por definição, $2T_{a_{n+1}} = \frac{2 \cdot a_{n+1} \cdot (a_{n+1}+1)}{2} = a_{n+1} \cdot (a_{n+1} + 1) = (3a_n + 2b_n + 2) \cdot (3a_n + 2b_n + 3) = 9{a_n}^2 + 6a_nb_n + 9a_n + 6a_nb_n + 4{b_n}^2 + 6b_n + 6a_n + 4b_n + 6 = 9{a_n}^2 + 4{b_n}^2 + 12a_nb_n + 15a_n + 10b_n + 6$. Por outro lado, $T_{b_{n+1}} = \frac{b_{n+1} \cdot (b_{n+1}+1)}{2} = \frac{(4a_n+3b_n+3) \cdot (4a_n+3b_n+4)}{2} = \frac{16{a_n}^2+12a_nb_n+16a_n+12b_na_n+9{b_n}^2+12b_n+12a_n+9b_n+12}{2} = 8{a_n}^2 + 12a_nb_n + 4{b_n}^2 + 14a_n + \frac{9{b_n}^2+21b_n}{2} + 6$. A hipótese de indução nos diz que $\frac{2 \cdot a_n \cdot (a_n+1)}{2} = \frac{b_n \cdot (b_n+1)}{2} \therefore 2{a_n}^2 + 2a_n = {b_n}^2 + b_n \therefore 9{b_n}^2 + 9b_n = 18{a_n}^2 + 18a_n \therefore 9{b_n}^2 + 9b_n + 12b_n = 18{a_n}^2 +$

$18a_n + 12b_n \therefore \frac{9{b_n}^2+21b_n}{2} = \frac{18{a_n}^2+18a_n+12b_n}{2} = 9{a_n}^2 + 9a_n + 6b_n$. Com isso, tem-se que $T_{b_{n+1}} = 8{a_n}^2 + 12a_nb_n + 14a_n + 9{a_n}^2 + 9a_n + 6b_n + 6 = 17{a_n}^2 + 12a_nb_n + 23a_n + 6b_n + 6$. A hipótese de indução também garante que ${b_n}^2 = 2{a_n}^2 + 2a_n - b_n$, logo, $2T_{a_{n+1}} = 9{a_n}^2 + 4 \cdot (2{a_n}^2 + 2a_n - b_n) + 12a_nb_n + 15a_n + 10b_n + 6 = 9{a_n}^2 + 8{a_n}^2 + 8a_n - 4b_n + 12a_nb_n + 15a_n + 10b_n + 6 = 17{a_n}^2 + 12a_nb_n + 23a_n + 6b_n + 6$.

Portanto, $2T_{a_{n+1}} = T_{b_{n+1}}$. ■

Proposição 5.3.5 Existem infinitos pares (x, y) de inteiros positivos tais que $3T_x = T_y$.

Prova: Ao definir $a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} + 1$ e $b_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2$, com $a_0 = b_0 = 0$, afirma-se que $3T_{a_n} = T_{b_n}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

i) Para $n = 1$ tem-se que $a_n = a_1 = 2a_0 + b_0 + 1 = 1,\ b_n = b_1 = 3a_0 + 2b_0 + 2 = 2,\ 3T_{a_1} = T_1 = \frac{3 \cdot 1 \cdot 2}{2} = 3 = \frac{2 \cdot 3}{2} = T_2 = T_{b_1}$.

ii) Suponha que $3T_{a_n} = T_{b_n}$, para algum natural *n*, isto é, $\frac{3a_n(a_n+1)}{2} = \frac{b_n(b_n+1)}{2} \therefore 3{a_n}^2 + 3a_n = {b_n}^2 + b_n$.

iii) Devemos verificar se $3T_{a_{n+1}} = T_{b_{n+1}}$.

Por definição, $3T_{a_{n+1}} = \frac{3a_{n+1}(a_{n+1}+1)}{2} = \frac{3\cdot(2a_n+b_n+1\,)(2a_n+b_n+2)}{2} =$

$\frac{3\cdot\left(4a_n{}^2+2a_nb_n+4a_n+2a_nb_n+b_n{}^2+2b_n+2a_n+b_n+2\right)}{2} =$

$\frac{12a_n{}^2+3b_n{}^2+12a_nb_n+18a_n+9b_n+6}{2} = 6a_n{}^2 + 6a_nb_n + 9a_n +$

$\frac{9b_n{}^2+9b_n}{2} + 3.$ Por outro lado,

$T_{b_{n+1}} = \frac{b_{n+1}(b_{n+1}+1)}{2} = \frac{(3a_n+2b_n+2\,)\cdot(3a_n+2b_n+3)}{2} =$

$\frac{9a_n{}^2+6a_nb_n+9a_n+6a_nb_n+4b_n{}^2+6b_n+6a_n+4b_n+6}{2} = \frac{9a_n{}^2+15b_n}{2} + 6a_nb_n +$

$2b_n{}^2 + 5b_n + 3.$ Logo, $3T_{a_{n+1}} = T_{b_{n+1}} \Leftrightarrow \frac{9a_n{}^2+15a_n}{2} + 2b_n{}^2 + 5b_n =$

$6a_n{}^2 + 9a_n + \frac{3b_n{}^2+9b_n}{2} \Leftrightarrow 9a_n{}^2 + 15a_n + 4b_n{}^2 + 10b_n =$

$12a_n{}^2 + 18a_n + 3b_n{}^2 + 9b_n \Leftrightarrow b_n{}^2 + b_n = 3a_n{}^2 + 3a_n,$ que sabemos ser verdadeira pois é a hipótese de indução. ■

Recomenda-se ao leitor que veja (GUPTA), onde encontrará uma série de curiosidades e padrões referentes aos números triangulares.

Proposição 5.3.6 A equação $T_x = r^2 \cdot T_y$ apresenta solução $x = 4\lambda^2 + 4\lambda,\ y = \lambda,$ se $r = 4\lambda + 2$, com $\lambda \in \mathbb{N}$.

Prova: Para $x = 4\lambda^2 + 4\lambda,\ y = \lambda$ e $r = 4\lambda + 2$ tem-se que $T_x = \frac{(4\lambda^2+4\lambda)(4\lambda^2+4\lambda+1)}{2} = (2\lambda^2 + 2\lambda)(4\lambda^2 + 4\lambda + 1) = 8\lambda^4 + 8\lambda^3 + 2\lambda^2 + 8\lambda^3 + 8\lambda^2 + 2\lambda = 8\lambda^4 + 16\lambda^3 + 10\lambda^2 + 2\lambda$

e $r^2 \cdot T_y = \frac{(4\lambda+2)^2\lambda(\lambda+1)}{2} = \frac{(16\lambda^2+16\lambda+4)(\lambda^2+\lambda)}{2} = (8\lambda^2 + 8\lambda + 2)(\lambda^2 + \lambda) = 8\lambda^4 + 8\lambda^3 + 8\lambda^3 + 8\lambda^2 + 2\lambda^2 + 2\lambda = 8\lambda^4 + 16\lambda^3 + 10\lambda^2 + 2\lambda.$ Portanto, $T_x = r^2 \cdot T_y$. ■

Ao tomar $\lambda = 1$ tem-se a equação $T_x = 36 \cdot T_y$, cuja solução é $x = 8, y = 1$.

5.4 TERNOS PITAGÓRICOS TRIANGULARES

Teorema 5.4.1 A equação pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$ tem solução $x = T_a,\ y = T_b$, $z = T_c$, em que $T_a,\ T_b,\ T_c$ são números triangulares, se, e somente se, existem naturais m e n tais que:

$T_b^2 = m^3 + (m+1)^3 + \cdots + (m+n)^3$, isto é, T_b^2 é a soma de $n+1$ cubos consecutivos.

Prova: Sabe-se que $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = T_n^2$. Suponhamos, sem prejuizo, que $a \leq b$.

Logo, se $T_a^2 + T_b^2 = T_c^2$ então $T_b^2 = T_c^2 - T_a^2 = \sum_{k=0}^{c} k^3 - \sum_{k=0}^{a} k^3 = \sum_{k=0}^{a} k^3 + \sum_{k=a+1}^{c} k^3 - \sum_{k=0}^{a} k^3 = \sum_{k=a+1}^{c} k^3 = (a+1)^3 + (a+2)^3 + \cdots + c^3$. Note que o desenvolvimento de T_b^2 apresenta $b+1$ potências, o de T_c^2 apresenta $c+1$ potências e o de T_a^2, por sua vez, $a+1$ potências. Segue-se então que $b + 1 = c + 1 - (a+1) =\therefore b + 1 = c - a$, ou seja, o desenvolvimento de T_b^2

apresenta $c - a$ potências. Tomando $m = a + 1$ e $n = b$ tem-se $c = a + b + 1 = m + n$. Portanto, existem naturais m e n tais que $T_b^2 = m^3 + (m+1)^3 + \cdots + (m+n)^3$. Para a recíproca, basta reverter as igualdades acima. ■

O único exemplo conhecido de um tal terno pitagórico é $(8778,\ 10296, 13530)$ e a igualdade $8778^2 + 10296^2 = 13530^2$ equivale a $T_{132}^2 + T_{143}^2 = T_{164}^2$.

5.5 NÚMEROS TRIANGULARES EM PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Proposição 5.5.1 Toda progressão aritmética (r^2, s^2, t^2) pode ser associada a um terno pitagórico (x, y, z), onde $x = \frac{t+r}{2}, y = \frac{t-r}{2}$ e $z = s$.

Prova: Se (r^2, s^2, t^2) é uma PA então $s^2 = \frac{r^2+t^2}{2} \therefore r^2 + t^2 = 2s^2 \therefore 2|r^2 + t^2$, ou seja, r e t têm a mesma paridade, logo, $\frac{t+r}{2}$ e $,\frac{t-r}{2}$ são inteiros positivos. Além disso, $\left(\frac{t+r}{2}\right)^2 + \left(\frac{t-r}{2}\right)^2 = s^2$, isto é, os números r, s e t produzem o terno pitagórico (x, y, z), onde $x = \frac{t+r}{2}, y = \frac{t-r}{2}$ e $z = s$. Reciprocamente, todo terno pitagórico (x, y, z) produz uma PA (r^2, s^2, t^2) em que $r = x - y, s = z$ e $t = x + y$. De fato, se $r = x - y, s = z$ e $t = x + y$ e $x^2 + y^2 = z^2$ então $r^2 + t^2 = (x-y)^2 + (x+y)^2 = 2x^2 + 2y^2 = 2(x^2 + y^2) = 2z^2 = 2s^2$. Portanto, (r^2, s^2, t^2) é uma progressão aritmética. ■

Como exemplo, ao tomar $r = 1,\ s = 5$, e $t = 7$ tem-se a PA $(1, 25, 49)$ e $(3, 4, 5)$ é o terno pitagórico associado.

Proposição 5.5.2 Existem infinitas progressões aritméticas não constantes formadas por 3 números triangulares.

Prova: Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$ tais que (T_m, T_n, T_P) é uma PA. Logo, $T_n = \frac{T_m + T_p}{2} \therefore T_m + T_p = 2T_n \therefore 8T_m + 1 + 8T_p + 1 = 16T_n + 2 \therefore (2m+1)^2 + (2p+1)^2 = 2(2n+1)^2$, isto é, $((2m+1)^2, (2n+1)^2, (2p+1)^2)$ é uma PA. Sejam $r = 2m+1$, $s = 2n+1$ e $t = 2p+1$. Segue-se então que (r^2, s^2, t^2) é uma progressão aritmética, o que equivale à existência de um terno pitagórico (x, y, z) tal que $r = x - y, s = z$ e $t = x + y$. Com isso, $2m + 1 = x - y, 2n + 1 = z$ e $2p + 1 = x + y$, o que acarreta $m = \frac{x-y-1}{2}, n = \frac{z-1}{2}$ e $p = \frac{x+y-1}{2}$. Vale frisar que como os números m, n e p são inteiros, x e y devem possuir paridades distintas e z deve ser ímpar. Portanto, fica estabelecido que $\left(T_{\frac{x-y-1}{2}}, T_{\frac{z-1}{2}}, T_{\frac{x+y-1}{2}}\right)$ é uma progressão aritmética, sempre que (x, y, z) é um terno pitagórico, com z e $x \pm y$ todos ímpares. ■

Como exemplo, ao considerar $x = 12$, $y = 9$ e $z = 15$ tem-se $T_{\frac{x-y-1}{2}} = T_1 = 1, T_{\frac{z-1}{2}} = T_7 = 28$ e $T_{\frac{x+y-1}{2}} = T_{10} = 55$, que formam a $PA\ (1, 28, 55)$. Obviamente, a partir do terno $(12,9,15)$ é possível obter uma infinidade de ternos pitagóricos satisfazendo as condições da proposição acima, para isso, basta multiplicar o terno por um natural ímpar a. Portanto, é possível gerar uma infinidade de PA's cujos 3 termos são números triangulares distintos.

Proposição 5.5.3 Se $m > 1$ é um quadrado ímpar, $p = \frac{m-1}{8}$ e (x_i, x_j, x_k) é uma PA não constante, formada por triangulares, então $(mx_i + p, mx_j + p, mx_k + p)$ é uma PA não constante cujos termos são triangulares.

Prova: A igualdade $(2a+1)^2 \cdot T_n + T_a = T_{(2a+1)n+a}$ garante que se x é triangular e m é um quadrado ímpar, então o número $mx + p$, com $p = \frac{m-1}{8}$, é triangular. Note que se $m = (2a+1)^2$ então $p = \frac{(2a+1)^2-1}{8} = \frac{4a^2+4a}{8} = \frac{a^2+a}{2} = T_a$. Além disso, $\frac{mx_i+p+mx_k+p}{2} = \frac{m(x_i+x_k)+2p}{2} = \frac{m(2x_j)+2p}{2} = mx_j + p$.

Portanto, $(mx_i + p, mx_j + p, mx_k + p)$ é uma PA. ■

Assim, partindo somente da $PA\ (T_1, T_7, T_{10})$ já é possível obter uma infinidade de progressões aritméticas formadas por triangulares distintos. Como exemplos, tem-se as progressões $(9T_1 + 1; 9T_7 + 1;\ 9T_{10} + 1)$, $(9(9T_1 + 1) + 1;\ 9(9T_7 + 1) + 1;\ 9(9T_{10} + 1) + 1\ ), (25T_1 + 3;\ 25T_7 + 3;\ \ 25T_{10} + 3), (9(25T_1 + 3) + 1;\ \ 9(25T_7 + 3) + 1;\ 9(25T_{10} + 3) + 1\ )$, dentre outras.

Proposição 5.5.4 A razão da $PA\ (T_m, T_n, T_p)$ é um número triangular se, e somente se, $2(m + p + 1)(p - m) + 1$ é um quadrado.

Prova: Seja $\beta = T_k$, com $k \in \mathbb{N}$, a razão da PA dada. Isso equivale a dizer que $T_p - T_m = 2\beta = 2T_k$. Das igualdades $p = \frac{x+y-1}{2}$ e $m = \frac{x-y-1}{2}$ segue-se que deve ser

$T_{\frac{x+y-1}{2}} - T_{\frac{x-y-1}{2}} = 2T_k$, o que ocorre se, e somente se,

$$\frac{\left(\frac{x+y-1}{2}\right)\left(\frac{x+y-1}{2}+1\right)}{2} - \frac{\left(\frac{x-y-1}{2}\right)\left(\frac{x-y-1}{2}+1\right)}{2} = \frac{2k(k+1)}{2} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{(x+y)^2-1-[(x-y)^2-1]}{4} = 2k^2 + 2k \Leftrightarrow \frac{x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2}{4} = 2k^2 + 2k \Leftrightarrow \frac{4xy}{4} = 2k^2 + 2k \Leftrightarrow xy = 2k^2 + 2k \Leftrightarrow 2xy + 1 = 4k^2 + 4k + 1 \Leftrightarrow 2xy + 1 = (2k+1)^2 \Leftrightarrow 2(m+p+1)(p-m) + 1 = (2k+1)^2$$

■

Da equação $2k^2 + 2k = xy$ obtém-se $k = \frac{-2+\sqrt{4-8(-xy)}}{4} = \frac{-2+\sqrt{8xy+4}}{4} = \frac{-1+\sqrt{2xy+1}}{2} = \frac{-1+\sqrt{2(m+p+1)(p-m)+1}}{2}$. A tabela abaixo ilustra alguns exemplos de PA's que cumprem estas condições.

m	n	p	T_m	T_n	T_p	k	$\beta = T_k$
3	6	8	6	21	36	5	15 = T_5
11	18	23	66	171	276	14	105 = T_{14}
20	44	59	210	990	1770	39	780 = T_{39}
25	37	46	325	703	1081	27	378 = T_{27}

5.6 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentada uma série de resultados relativos a tópicos diversos da Teoria dos Números. Com o intuito de ressaltar a beleza contida nas informações expostas, procuramos fazer uso de aplicações inteligíveis referentes às demonstrações realizadas, pois entendemos que é bastante proveitoso aprender a partir de exemplos. Dito isto, o que resta é a consciência de que muito mais existe para ser explorado neste universo chamado Matemática e talvez por isso a palavra conclusão soe muito forte, ou até seja inadequada. Cabe então o desejo de que o objetivo tenha sido atingido, e que estas linhas fomentem em seus observadores a vontade de aprender mais e mais.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este trabalho esperamos ter alcançado o objetivo de levar até o leitor conceitos já há muito tempo conhecidos, porém muitas vezes aqui abordados de forma interligada a aplicações em problemas, pois o conhecimento não é algo estático e nunca se pode dizer que já aprendeu o suficiente. Desejamos também ter atingido a meta de que este seja uma referência de pesquisa para os entusiastas da Matemática, sejam eles professores da Educação Básica, alunos ou ex-alunos. Que os leitores destas linhas tenham aprendido algo novo para eles e que façam bom proveito destas informações, compartilhando-as. Como pode ter sido observado, muito do aqui exposto refere-se aos números triangulares e suas propriedades. Nesse contexto, buscou-se expor e demonstrar algumas de tantas identidades existentes, e utiliza-las para a obtenção de alguns somatórios envolvendo os triangulares e expressões em que tais números figuram. Sem deixar de lado outros conceitos, relacionamos algumas destas somas com o tópico de congruências. Outros resultados curiosos também foram observados e provados. Por fim, concatenamos alguns fatos relativos às progressões aritméticas finitas e não constantes cujos três termos são números triangulares. Compreendemos que no universo da Matemática sempre existe algo mais a explorar. Isto posto, não cabe dizer adeus, mas sim um breve até logo.

REFERÊNCIAS

BOGOLMONY, A. **There exist triangular numbers that are also square**. Disponível em: <http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/triSquare.shtml>. Acesso em: 5 jul. 2017.

DEZA, E. **Figurate Numbers**. Russia: Moscow State Pedagogical University , 2015.

GUPTA, S.S. **Fascinating Triangular Numbers**. 2002. Disponível em: <http://www.shyamsundergupta.com/triangle.htm>. Acesso em: 5 jul. 2017.

HEFEZ, A. **Aritmética**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.

LAFER, P. **Discovering the square-triangular numbers**. Washington: Washington State University, 1971.

MOREIRA, C. G.T.A. **Tópicos de teoria dos números**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2012.

MORGADO, A. C. **Matemática Discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015. (Coleção PROFMAT).

MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de matemática elementar:** teoria dos números. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção do Professor de Matemática).

TROTTER, T. J. Some Identities for the Triangular Numbers. **J. Recr. Math.,** v. 6, p. 128-135, 1973. Disponível em: <http://www.trottermath.net/numthry/trident.html>. Acesso em: 5 jul. 2017.