



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

HELEN BOSSA DOS SANTOS PLACIDINA

**O PRINCÍPIO DAS GAVETAS DE DIRICHLET: UMA
PROPOSTA DE TAREFAS DE INVESTIGAÇÃO
MATEMÁTICA**

Londrina
2017

HELEN BOSSA DOS SANTOS PLACIDINA

**O PRINCÍPIO DAS GAVETAS DE DIRICHLET: UMA
PROPOSTA DE TAREFAS DE INVESTIGAÇÃO
MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT-SBM) da Universidade Estadual de Londrina para à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Túlio Oliveira de Carvalho

Londrina
2017

HELEN BOSSA DOS SANTOS PLACIDINA

**O PRINCÍPIO DAS GAVETAS DE DIRICHLET: UMA PROPOSTA DE
TAREFAS DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT-SBM) da Universidade Estadual de Londrina para à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Túlio Oliveira de Carvalho (orientador)
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dra. Magna Natalia Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dra. Karina Alessandra Pessoa da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Londrina, 10 de novembro de 2017.

Dedico este trabalho à minha família que é minha base, que a tudo me dá forças e me ensina e em especial ao meu marido Evandro, pela sua presença, compreensão e pela nossa nova missão de educarmos agora nosso filho Hector.

AGRADECIMENTOS

Agradeço acima de tudo a Deus que tão grandioso me permitiu o dom da Vida, da Sabedoria e sempre guia meus passos.

Aos meus pais e meu irmão que me ensinaram a amar a Deus, a retidão do caminho, me apoiaram em toda a minha caminhada e estão sempre ao meu lado.

Um grande agradecimento especial ao meu marido Evandro Placidina que se fez presente em todo o tempo, desde o momento de entrar no programa de Mestrado, passando por todas as fases de provas e qualificações até a entrega e apresentação deste trabalho, ele me compreendeu e me deu forças em todos os momentos que tanto necessitei. Agradeço também pela vida do nosso filho Hector que estamos gerando e que juntos iremos amar e educar, seguindo os passos de Jesus.

Em fim agradeço ao meu orientador, o professor Túlio Oliveira de Carvalho, por ter direcionado meu trabalho e que em muito me ajudou para seu desenvolvimento e sua conclusão.

PLACIDINA, Helen Bossa dos Santos. **O Princípio das Gavetas de Dirichlet: uma Proposta de Tarefas de Investigação Matemática**. 2017. 44 páginas. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo responder à seguinte questão: como desenvolver, por meio de tarefas de Investigação Matemática, as ideias do Princípio das Gavetas de Dirichlet, na Educação Básica? Para alcançar o objetivo proposto apresentamos um estudo com vários teoremas e aplicações do Princípio, também chamado Princípio da Casa dos Pombos, com diferentes escalas de dificuldade. Em seguida, apresentamos uma visão da Investigação Matemática, para embasar as tarefas que propomos ao final. Estas tarefas são construídas a partir de enunciados conhecidos, com o critério de tocar diversos conteúdos da Educação Básica. A formulação das tarefas parte de uma reflexão sobre os conteúdos estruturantes da Educação Básica, considerando a negligência aos problemas de contagem e Análise Combinatória e principalmente no aspecto de os livros didáticos conduzirem o professor à metodologia tradicional expositiva, com conteúdos estanques. A aplicação das tarefas, na perspectiva investigativa, pode dar ao aluno um papel mais relevante de fazer suas próprias descobertas matemáticas, guiado pelo olhar do professor, que pode fazer novos questionamentos.

Palavras-chave: Princípio das Gavetas de Dirichlet, Investigação Matemática, Tarefa.

PLACIDINA, Helen Bossa dos Santos. **The Pigeonhole Principle: a propose for Mathematical Investigation Tasks**. 2017. 44 páginas. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

ABSTRACT

The aim of this work is address the following question: how to build up tasks with Mathematical Investigation character on the theme of Dirichlet's Pigeonhole Principle for use in Basic Education. To achieve this we present a study with an assortment of theorems and applications of the Pigeonhole principle, at different difficulty levels. Then we review aspects of Mathematical Investigation, to support the tasks we propose. The tasks are constructed from known problems enunciations, which are selected from textbooks, with the criterion of touching various contents of Basic Education. The formulation of the tasks departs from a reflection on the contents structuring Basics Education, considering the negligence on counting problems and Combinatorial Analysis, but mainly to questioning that textbooks drive teachers to traditional expository lectures, with a compartmentalized view of the subjects. The teaching practice with such tasks might conduct student to a more meaningful role, making their own mathematical discoveries, and guided by teacher experience, they can bring further questioning.

Key-words: Pigeonhole Principle, Mathematical Investigation, Tasks.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Guardando objetos nas gavetas.....	15
Figura 2 – 6 pontos interligados por segmentos de reta	19
Figura 3 – Segmentos azuis que partem de A	20
Figura 4 – Disco C.....	23
Figura 5 – Possíveis Cores e Posições do Disco D	23
Figura 6 – Disco E.....	24
Figura 7 – Possíveis Cores e Posições do Disco F.....	24
Figura 8 – Tipos de Tarefas	29
Figura 9 – Os Diversos Tipos de Tarefas, em Termos do Grau de Dificuldade e de Abertura.....	30
Figura 10 – Propriedades Verdadeiras e Falsas	31

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	TRAJETÓRIA DO ESTUDO	11
3	O PRINCÍPIO DAS GAVETAS DE DIRICHLET	13
2.1	TEOREMA 1	13
2.2	TEOREMA 2	14
2.3	TEOREMA 3	16
2.4	TEOREMA 4	17
2.5	TEOREMA 5	18
2.6	TEOREMA 6	21
4	A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DE PONTE	27
5	FORMULAÇÃO DAS TAREFAS	37
4.1	TAREFA DE INVESTIGAÇÃO 1	37
4.2	TAREFA DE INVESTIGAÇÃO 2	38
4.3	TAREFA DE INVESTIGAÇÃO 3	39
4.4	TAREFA DE INVESTIGAÇÃO 4	40
4.5	TAREFA DE INVESTIGAÇÃO 5	41
4.6	TAREFA DE INVESTIGAÇÃO 6	42
6	CONCLUSÃO	43
	REFERÊNCIAS	44

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como foco responder nosso questionamento: como desenvolver, por meio de tarefas de Investigação Matemática, as ideias do Princípio das Gavetas de Dirichlet, na Educação Básica?

Para responder nossa pergunta foi traçado o objetivo central que é reformular problemas relacionados com o Princípio das Gavetas de Dirichlet, em tarefas de Investigação Matemática, com base em Ponte, para alunos da Educação Básica.

Este estudo apresenta como objetivos específicos os itens a seguir:

- fazer um levantamento das diferentes formas de enunciar o Teorema sobre o Princípio das Gavetas de Dirichlet;
- apresentar as demonstrações dos diferentes enunciados do Teorema;
- buscar na literatura, problemas que podem ser trabalhados na Educação Básica, e que envolvem o Princípio das Gavetas de Dirichlet;
- reformular esses problemas, produzindo tarefas de acordo com a Metodologia de Investigação Matemática;
- enunciar conteúdos matemáticos da Educação Básica que estejam condizentes com os PCN e as DCE, que podem ser explorados nas tarefas de investigações.

Pode-se dizer que este Princípio está mais intimamente relacionado com problemas de contagem e seus conceitos são estudados no Ensino Superior. A mais, o referido Princípio fornece geralmente condições suficientes para demonstrar a existência de elementos num conjunto com propriedades específicas, como ilustraremos em diversos exemplos no Capítulo 3.

Como se verá nos exemplos, o princípio de Dirichlet, também conhecido como Princípio da Casa dos Pombos, encontra outros contextos em que sua aplicação é *natural*, em problemas de geometria, por exemplo. Oferece-se aqui, por assim dizer, um contraponto ao estado atual dos documentos oficiais: as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná e os Parâmetros Curriculares Nacionais, que não fazem menção ao Princípio. Reforçando a aplicação em problemas do cotidiano, o princípio equivale à constatação: “se numa viagem de

férias, uma família de 11 pessoas pretende ficar na mesma casa, que só tem 3 quartos, uma sala, uma cozinha e um banheiro, considerando que ninguém vá dormir no banheiro, pelo menos um cômodo deverá acomodar pelo menos 3 pessoas”.

O capítulo seguinte, 2 Trajetória do Estudo, escrevemos sobre a natureza deste trabalho que se trata de uma pesquisa qualitativa e aborda também todos os caminhos percorridos para realização e conclusão deste Estudo.

No Capítulo 3, com título O Princípio das Gavetas de Dirichlet (1805-1859), o Princípio é enunciado de seis Teoremas equivalentes, e ao lado de suas respectivas demonstrações, são descritas aplicações que se lhes adaptam.

No Capítulo 4, A Investigação Matemática na Perspectiva de Ponte, traz a nossa leitura sobre a Metodologia de ensino que foi escolhida para o desenvolvimento deste trabalho, baseada nos textos de Ponte. As razões de sua escolha são ali justificadas, entre exemplos de atividades ditas de exploração sobre propriedades de conjuntos numéricos. Cabe destacar aqui como nos chama a atenção o fato dessa metodologia aproximar os alunos do trabalho investigativo e que com isso ele pode redescobrir relações matemáticas já conhecidas, organizando-as em “enunciados”.

No Capítulo 5, Formulação das Tarefas, expomos um total de seis tarefas que foram produzidas à partir de problemas já existem na literatura e antecedendo cada uma das tarefas incluímos o problema original, dessa forma podemos observar que uma tarefa com a Metodologia de Investigação Matemática pode surgir de problemas que já estão prontos, sem ter a necessidade de ser totalmente original ou inédito para se trabalhar com esta Metodologia em sala de aula.

As tarefas são dirigidas à uma possível aplicação na Educação Básica e fizemos questão de escolher os problemas que lhes dão origem de modo que os temas em que se baseiam sejam distintos, condizentes com os PCN e as DCE.

2 TRAJETÓRIA DO ESTUDO

Este estudo é considerado de natureza qualitativa, nos interessando o processo e Garnica classifica uma pesquisa qualitativa da seguinte forma:

Segundo minha concepção, o adjetivo “qualitativa”, estará adequado às pesquisas que reconhecerem: (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese *a priori*, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (GARNICA, 2004, p. 86).

O interesse e necessidade de estudo do Princípio das Gavetas de Dirichlet, surgiu no 1º semestre de 2015 do programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) durante a disciplina de Matemática Discreta, pois este assunto era um dos capítulos do livro de Morgado e Carvalho (2014) que foi usado como referência para conclusão desta disciplina, ao estudar tal conteúdo fiquei muito interessada, senti o desejo de saber como esse assunto poderia ser abordado na Educação Básica.

Posteriormente durante o curso de férias, no início de 2016 na disciplina de Resolução de Problemas ministrada pela professora Dra. Magna Natalia Marin Pires voltamos a estudar o Princípio das Gavetas de Dirichlet, desta vez usando como base o livro de Oliveira e Fernández (2012).

Para esta disciplina que servia como preparação ao Exame de Qualificação e como este assunto fazia parte dos conteúdos a serem estudados para esta prova, foi dedicado um tempo maior de estudo e resolução de exercícios sobre o assunto e foi por meio deste novo livro que conhecemos alguns enunciados distintos, porém equivalentes do Teorema sobre o Princípio.

Após a aprovação no Exame de Qualificação que aconteceu em julho de 2016, foi escolhido o orientador, no caso o professor Dr. Túlio Oliveira de Carvalho para iniciar o desenvolvimento deste trabalho, após alguns encontros o assunto

Princípio da Casa dos Pombos foi sugerido por ele e imediatamente aceito como tema a ser estudado para a elaboração deste trabalho.

Foi sugerido pelo orientador que se estudasse uma Metodologia de Ensino para desenvolver o assunto, optamos então por estudar a Investigação Matemática lendo os textos de Ponte. Então pensamos em responder a seguinte questão: como desenvolver, por meio de tarefas de Investigação Matemática, as ideias do Princípio das Gavetas de Dirichlet, na Educação Básica?

Durante o 2º semestre ainda do ano de 2016 cursamos a disciplina Tópicos de Matemática que foi ministrada pela professora Dra. Regina Célia Guapo Pasquini e no decorrer da disciplina pesquisamos mais sobre o assunto que aqui descrevemos e elaboramos o Pré-Projeto desta dissertação.

Tendo nossa pergunta inicial uma Metodologia de Ensino e agora o Pré-Projeto prontos, iniciamos o desenvolvimento deste trabalho.

O primeiro capítulo concluído foi A Investigação Matemática na Perspectiva de Ponte.

Os capítulos O Princípio das Gavetas de Dirichlet e Formulação das Tarefas eram escritos no início juntos, pois ao pesquisar sobre os diversos Teoremas usados neste trabalho e suas respectivas demonstrações encontrávamos problemas que poderiam ser exemplos ou base para as tarefas que foram propostas.

Seguindo o estudo conseguimos escolher os exemplos a serem usados em cada Teorema e assim concluir o capítulo sobre o Princípio.

Em seguida focamos nosso trabalho em escolher os problemas para formular as tarefas, desta vez, o foco era escolher problemas sobre o Princípio de Dirichlet, mas que abordasse conteúdos distintos da Educação Básica que estivessem presentes nos PCN e nas DCE.

Feita a escolha dos problemas, deveríamos agora modificá-los a ponto de se obter tarefas de Investigação Matemática que poderiam ser aplicadas à Educação Básica, alcançado este objetivo, concluímos o capítulo Formulação das Tarefas.

Para a conclusão deste trabalho foi então encerrado os capítulos Introdução, Conclusão e Trajetória do Estudo.

3 O PRINCÍPIO DAS GAVETAS DE DIRICHLET

Segundo Hefez (2007, p. 68) em 1834, o destacado matemático alemão Lejeune Dirichlet cujo nome completo é Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859), enunciou o seguinte princípio, apelidado de Princípio da Casa de Pombos:

Seja dada uma casa de pombos com n buracos e suponha que haja m pombos querendo ocupá-los. Se $m > n$, então algum buraco deverá ser ocupado por mais de um pombo.

Este princípio também recebe o nome de Princípio das Gavetas, e podemos também enunciá-lo de algumas outras maneiras como segue nos Teoremas a seguir:

2.1 TEOREMA 1

Teorema: *Queremos guardar m objetos em n gavetas. Se $m > n$, então, alguma gaveta deverá conter mais de um objeto.*

Este enunciado é extraído de Hefez (2007, p. 68).

Podemos provar este resultado por Indução Matemática sobre n gavetas.

Demonstração: Para $n = 1$, o resultado é óbvio, vejamos, se temos uma só gaveta e mais de um objeto, então, teremos que acomodar nesta única gaveta mais de um objeto.

Suponha agora o resultado válido para um certo número n de gavetas e consideremos a situação de termos $n + 1$ gavetas com $m > n + 1$ objetos. Queremos mostrar que o resultado vale também neste caso, para aplicar a Indução Matemática e concluir que vale para todo número natural n .

Depois de acomodar todos os m objetos nas $n + 1$ gavetas, escolha uma gaveta ao acaso. Se nesta gaveta há mais de um objeto, a nossa afirmação está provada. Agora, se nesta gaveta não há nenhum objeto, nas n gavetas que restaram estão acomodados os $m > n + 1 > n$ objetos, o que, pela hipótese de indução garante que em uma das gavetas há mais de um objeto. Temos ainda a chance de que na gaveta escolhida haja um objeto, logo, nas n gavetas restantes, estarão

distribuídos os $m - 1 > n$ objetos, o que, novamente, pela hipótese de indução, acarreta que em uma das gavetas há mais de um objeto.

■

O enunciado do Teorema 1 não é único e no decorrer do capítulo serão apresentadas algumas outras versões com teoremas bem interessantes, e para exemplificar o uso deste primeiro Teorema apresentamos o seguinte exemplo:

Exemplo 1: Numa floresta crescem 1000 jaqueiras. É conhecido que uma jaqueira não contém mais do que 600 frutos. Prove que existem 2 jaqueiras na floresta que têm a mesma quantidade de frutos.

Para fazer esta prova usaremos o Princípio das Gavetas.

Solução: Inicialmente devemos analisar quem faz o papel de gaveta e de objetos e para esses papéis temos as jaqueiras e a quantidade de frutos. Como devemos provar que 2 jaqueiras terão a mesma quantidade de frutos, então teremos que a quantidade de jaqueiras é maior do que a quantidade de frutos, sendo assim, temos:

1000 jaqueiras representando os objetos e 601 gavetas associadas aos números 0, 1, 2, ..., 600 que é a quantidade de frutos.

Como $1000 > 602 = 601 + 1$, o Princípio das Gavetas nos garante que existem duas jaqueiras com a mesma quantidade de frutos.

■

O Princípio das Gavetas de Dirichlet é um dos princípios considerados básicos da Combinatória que é “parte fascinante da Matemática; existem nela problemas de enunciado extremamente simples, mas que exigem, (...) para sua solução, raciocínios mais penetrantes e engenhosos, embora no nível de um aluno do segundo grau.” (PITOMBEIRA, 1986, p. 21) e tal princípio pode também ser enunciado como:

2.2 TEOREMA 2

Teorema: *Se forem dados n objetos, a serem colocados em, no máximo, $(n - 1)$ gavetas, então uma delas conterá pelo menos dois objetos.*

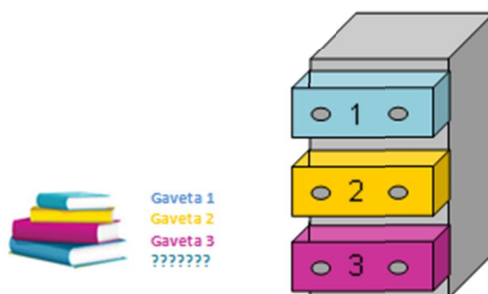
Este enunciado é extraído de Pitombeira (1986, p.21).

Para a demonstração desse enunciado, podemos fazer uma simples contagem dos objetos distribuídos em suas gavetas.

Demonstração: Vamos supor que em cada gaveta não tenha mais do que um objeto, então contando todos os objetos contidos nas $(n - 1)$ gavetas, teremos ao todo $(n - 1)$ objetos, o que contradiz a hipótese de termos n objetos a serem colocados nas $(n - 1)$ gavetas. Logo, uma delas conterá pelo menos dois objetos.

■

Figura 1 – Guardando objetos nas gavetas



Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/texto_002-principio-das-casas-dos-pombos/
Acesso em: 07/06/2017

Vemos na Figura 1 que ao ter 4 livros para guardar em um gaveteiro de 3 gavetas, podemos fazer essa ação de várias maneiras, uma delas é guardar o livro 1, na gaveta 1, o livro 2, na gaveta 2, o livro 3, na gaveta 3 e o livro 4 em qualquer uma das gavetas, assim teremos uma das gavetas com pelo menos 2 livros. E essa regra segue para qualquer outra maneira que a ação for feita.

Outro exemplo e bem simples da aplicação do Princípio das Gavetas é:

Exemplo 2: Dado um conjunto de 13 pessoas, pelo menos duas delas farão aniversário no mesmo mês.

■

Para Oliveira e Fernández (2012, p. 143) este princípio é “um interessante instrumento elementar para tratar problemas matemáticos relacionados à existência de elementos de conjuntos validando certas exigências”, os autores dizem ainda que este princípio foi usado por Dirichlet (1805 – 1859), grande matemático alemão a quem se atribui a moderna definição formal de função, para resolver problemas na

Teoria dos Números, entretanto ele possui um grande número de aplicações em diversos ramos da Matemática como Combinatória, Geometria, entre outros que iremos mencionar neste capítulo.

Podemos afirmar ainda que não é difícil identificar quando o princípio pode ser usado, mas a principal dificuldade para aplicá-lo está em identificar, em cada problema, quem são os objetos e quem são as gavetas.

Apresentaremos então outro enunciado para o Princípio das Gavetas de Dirichlet.

2.3 TEOREMA 3

Teorema: Se a soma de n números naturais é igual a S , então existe pelo menos um deles que não é maior que $\frac{S}{n}$, assim como existe pelo menos um deles que não é menor que $\frac{S}{n}$.

Este enunciado é extraído de Oliveira e Fernández (2012, p.146).

Demonstração: Para os n naturais termos: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

Chamaremos a soma de S , então $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ (I)

Teremos assim a média aritmética: $\frac{S}{n} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$

Para iniciar nossa demonstração, observamos que se cada um dos números é igual à média aritmética, não há o que mostrar.

Suponha agora que pelo menos um dos números a_k é menor do que $\frac{S}{n}$.

Se todos os demais satisfazem a mesma propriedade, $a_1 \leq \frac{S}{n}$, $a_2 \leq \frac{S}{n}$, $a_3 \leq \frac{S}{n}$, ..., $a_n \leq \frac{S}{n}$, teríamos $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n < n \cdot \frac{S}{n}$

Logo, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \leq S$, o que é absurdo por (I)

Então existe $a_k > \frac{S}{n}$.

Da mesma maneira é possível provar que existe $a_k < \frac{S}{n}$.

■

Um bom exemplo para aplicarmos este Teorema é:

Exemplo 3: Numa família formada por 5 pessoas a soma das idades é de 245 anos. Prove que podem ser selecionados 3 membros da família cuja a soma das idades não é menor que 147.

Solução: Para sua solução inicialmente podemos observar o número 147 e tentar entendê-lo, como a soma de todas as idades é igual a 245, em média cada pessoa tem 49 anos, multiplicando 49 anos por 3 membros da família, obteremos o valor 147.

Já observamos que teremos que encontrar um grupo com 3 dos 5 membros da família, então, devemos saber de quantas maneiras podemos combinar as 5 pessoas em grupos de 3.

Usando combinação, temos que: $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$ trios diferentes formados pelos membros da família.

Além disso, por combinação vemos que cada pessoa aparece exatamente em $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$ trios diferentes.

Então se denotarmos por E_j a soma das idades dos membros de cada trio T_j , com $j = 1, 2, \dots, 10$, teremos que

$$E_1 + E_2 + \dots + E_{10} = 6 \cdot 245 = 1470.$$

$$\text{Se } S = E_1 + E_2 + \dots + E_{10}, \text{ então } \frac{S}{10} = \frac{E_1 + E_2 + \dots + E_{10}}{10} = \frac{1470}{10} = 147.$$

Podemos então afirmar pelo Teorema 3 que existe algum trio T_j tal que $E_j \geq 147$.

■

Outra versão que é considerada mais geral e bastante útil na resolução de alguns problemas é o Teorema 4, a seguir.

2.4 TEOREMA 4

Teorema: Se distribuirmos $(Nk + 1)$ pombos em N casas, então alguma das casas contém pelo menos $(k + 1)$ pombos.

Este enunciado é extraído de Oliveira e Fernández (2012, p.146).

Demonstração: Suponhamos agora o contrário, que em cada casa não exista mais do que k pombos.

Então, contando todos os pombos contidos nas N casas não teremos mais do que $N \cdot k$ pombos, contradizendo assim a hipótese de termos $(Nk + 1)$ pombos distribuídos nas N casas.

■

Note que se $k = 1$, no Teorema 4, esta versão mais geral coincide com uma versão mais simples já apresentada.

Para aplicar este Teorema, apresentamos o próximo exemplo:

Exemplo 4: Quantas cartas devem ser escolhidas de um baralho de 52 cartas para garantir que pelo menos três cartas do mesmo naipe sejam escolhidas?

Solução: Sabendo que um baralho possui quatro naipes diferentes, vamos fazer a relação entre objetos e gavetas:

Os naipes serão considerados sendo as casas, que são 4, (copas, paus, ouro e espada), $N = 4$.

As cartas do baralho serão consideradas os pombos.

Devemos lembrar que cada carta está sempre associada ao seu naipe.

Vamos usar o Teorema 4, para $N = 4$, o enunciado nos pede que em uma das “casas” tenha, pelo menos, 3 “pombos” (cartas do mesmo naipe), então, $k + 1$ deve ser igual a 3, logo $k = 2$.

O Teorema 4 nos garante que a retirada de $Nk + 1 = 4 \cdot 2 + 1 = 9$ cartas é suficiente para garantir que pelo menos 3 cartas de mesmo naipe foram retiradas.

■

O Princípio das Gavetas pode ser reformulado também como segue neste próximo Teorema.

2.5 TEOREMA 5

Teorema: Se m objetos são colocados em n gavetas, então pelo menos uma gaveta contém $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1$ objetos.

(Obs.: $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor que ou igual a x).

Este enunciado é extraído de Pitombeira (1986, p. 24).

Demonstração: Se considerarmos que cada gaveta contém no máximo $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$ objetos, então o número de objetos que temos será no máximo:

$$n \cdot \left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor \leq n \cdot \frac{m-1}{n} = m-1 < m,$$

o que é uma contradição, já que temos m objetos. ■

Para exemplificar este Teorema podemos usar o exemplo a seguir:

Exemplo 5: Considere 6 pontos no espaço, não havendo 3 numa mesma linha. Cada dois pontos são ligados por um segmento de reta e cada um desses 15 segmentos de reta é pintado de uma cor dentre duas, azul e vermelho. Provar que qualquer que seja a escolha destas duas cores na pintura dos segmentos de reta sempre existirá um triângulo com todos os lados de uma mesma cor.

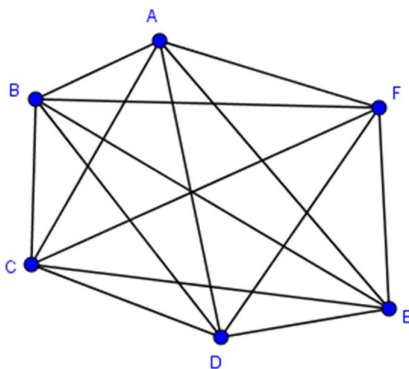
Solução: para saber a quantidade de segmentos de reta que unem os 6 pontos 2 a 2, usamos combinação

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15 \text{ e vemos que realmente 15 segmentos de reta ligará}$$

os 6 pontos.

Qualquer um dos 6 pontos no espaço está ligado a 5 outros pontos por 5 segmentos de reta distintos, como mostra a Figura 2.

Figura 2 – 6 pontos interligados por segmentos de reta



Fonte: Elaborada pela autora

Fixando o ponto A, por exemplo, observamos que dele parte 5 segmentos de reta.

Não é sempre que temos a facilidade de distinguir os objetos das gavetas com rapidez, neste exemplo vemos só neste ponto quem podemos considerar como gavetas e objetos para sua solução.

Consideramos as cores (azul e vermelho) como sendo as gavetas, então, $n = 2$;

Os objetos serão os segmentos de reta que são 5, $m = 5$.

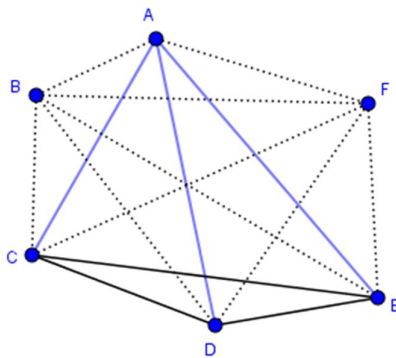
Separamos as gavetas e os objetos dessa maneira porque cada segmento de reta está associado a uma das duas cores.

Então, pelo Teorema 5, se $m = 5$ segmentos de reta será pintado com uma entre as $n = 2$ cores, devemos ter pelo menos

$$\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{5-1}{2} \right\rfloor + 1 = 2 + 1 = 3 \text{ segmentos com a mesma cor.}$$

Sendo assim, temos pelo menos 3 segmentos partindo de A de uma mesma cor (suponha que seja azul), indo, por exemplo, para os pontos C, D e E, como ilustramos na Figura 3 a seguir.

Figura 3 – Segmentos azuis que partem de A



Fonte: Elaborada pela autora

Podemos observar que se o triângulo CDE tem pelo menos um de seus lados azul, então temos pelo menos um triângulo azul. Se nenhum desses lados é azul, então temos o triângulo CDE vermelho.

Em todos os casos temos pelo menos um triângulo com todos os lados de uma mesma cor, como queríamos provar.



2.6 TEOREMA 6

Teorema: Sejam n gavetas e r um inteiro positivo dado. Coloque a_1 objetos na primeira gaveta, a_2 objetos na segunda, e assim sucessivamente, até a_n objetos na n -ésima gaveta. Então, se a média $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ for maior do que $r - 1$, uma das n gavetas conterá pelo menos r objetos.

Este enunciado é extraído de Pitombeira (1986, p. 24).

Demonstração: Se todos os a_i forem menores do que r , então podemos escrever que:

$$a_1 \leq r - 1$$

$$a_2 \leq r - 1$$

...

$$a_n \leq r - 1$$

$$\text{logo, } a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq nr - n = n(r - 1)$$

$$\text{donde } \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq r - 1$$

o que é uma contradição.

Logo, se a média dos números naturais a_1, a_2, \dots, a_n , for maior do que $r - 1$, então um dos a_i deverá ser maior do que ou igual a r .



O princípio da casa dos pombos pode ser deduzido deste último teorema. Com efeito, se tivermos n objetos para distribuir entre $(n - 1)$ gavetas, então a média $\frac{n}{n - 1}$ certamente será maior do que 1. Logo, fazendo $r = 2$, teremos que uma das gavetas deve conter pelo menos 2 objetos. (PITOMBEIRA, 1986, p. 24).

O Teorema 6 pode ser usado para demonstrar o exemplo 6, que parece inicialmente improvável fazer o uso do Princípio das Gavetas.

Exemplo 6: São dados dois discos, A e B, cada um deles dividido em 200 setores iguais. Os setores dos discos são pintados de branco ou de preto. Sabe-se que no disco A há 100 setores brancos e 100 pretos, em ordem desconhecida. O número de setores brancos de B é arbitrário e desconhecido por nós.

Coloquemos o disco A sobre o disco B de modo que cada setor de A fique exatamente sobre um setor de B (obs.: sempre que dissermos que o disco A foi colocado sobre o disco B, fica convencionado que há esta coincidência de setores).

É então possível escolher a posição de A de maneira que existam pelo menos 100 setores de A que tenham a mesma cor que os correspondentes setores de B.

Solução: Após a leitura desse exemplo com muita atenção na afirmação: É então possível escolher a posição de A de maneira que existam pelo menos 100 setores de A que tenham a mesma cor que os correspondentes setores de B, nos dá dicas dos elementos que usaremos como gavetas e objetos.

Teremos como gavetas o número total de setores possíveis, que neste caso é 200. Então $n = 200$.

Como o enunciado afirma que existam pelo menos 100 setores de A que tenham a mesma cor que os correspondentes setores de B, usaremos o número 100 sendo o inteiro positivo dado. Então, $r = 100$.

Então, coloque A sobre B. Chamaremos de a_1 o número de setores sobrepostos com cores coincidentes, onde a_1 é o número de objetos.

Mantendo B fixo, gire A de um setor (ou seja, de um ângulo $\frac{2\pi}{200}$ rd) no sentido horário. Seja então a_2 o número de setores sobrepostos coincidentes. Com a_2 sendo o número de objetos.

Continue este processo, girando A sempre $\frac{2\pi}{200}$ rd no sentido horário e obtendo a_3, a_4, \dots, a_{200} objetos.

Não sabemos os valores de a_1, a_2, \dots, a_{200} , mas podemos pensar em algumas outras situações para ilustrar esse comportamento e tirar algumas conclusões.

Suponha então que são dados dois discos, C e D, cada um deles dividido em 4 setores iguais. Os setores dos discos são pintados de branco ou de preto. Sabe-se que no disco C há 2 setores brancos e 2 pretos, em ordem desconhecida. O número de setores brancos de D é arbitrário e desconhecido por nós. Para ilustrar iremos fixar C, sendo o disco da imagem a seguir:

Figura 4 – Disco C

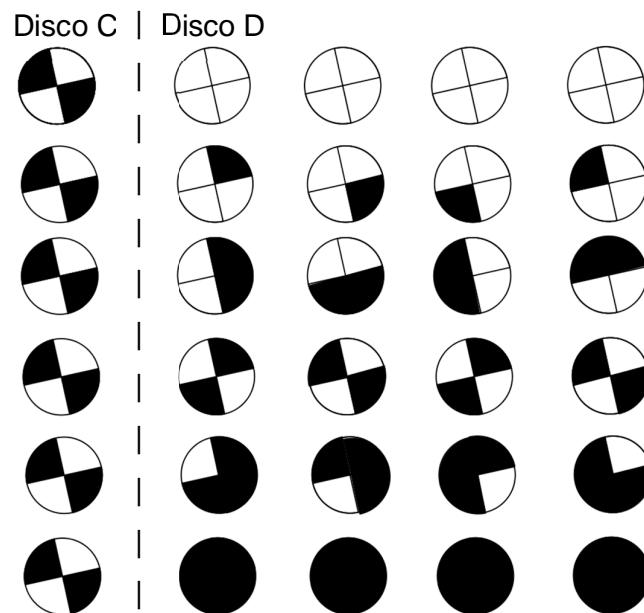


Fonte: Elaborada pela autora

E na figura seguinte teremos a imagem do disco D, em cada linha com uma mesma quantidade de setores brancos e pretos e também estes dispostos de maneiras diferentes.

Na mesma linha o disco D aparece com os 4 possíveis giros para contarmos as cores correspondentes que ficariam sobrepostas, observe:

Figura 5 – Possíveis Cores e Posições do Disco D



Fonte: Elaborada pela autora

Fazendo a contagem das coincidências de cores em cada linha acima, temos que em cada uma das linhas há um total de 8 coincidências.

Vamos fazer uma nova observação, suponha agora que são dados dois discos, E e F, cada um deles dividido em 6 setores iguais. Os setores dos discos são pintados de branco ou de preto. Sabe-se que no disco E há 3 setores brancos e 3 pretos, em ordem desconhecida. O número de setores brancos de F é arbitrário e

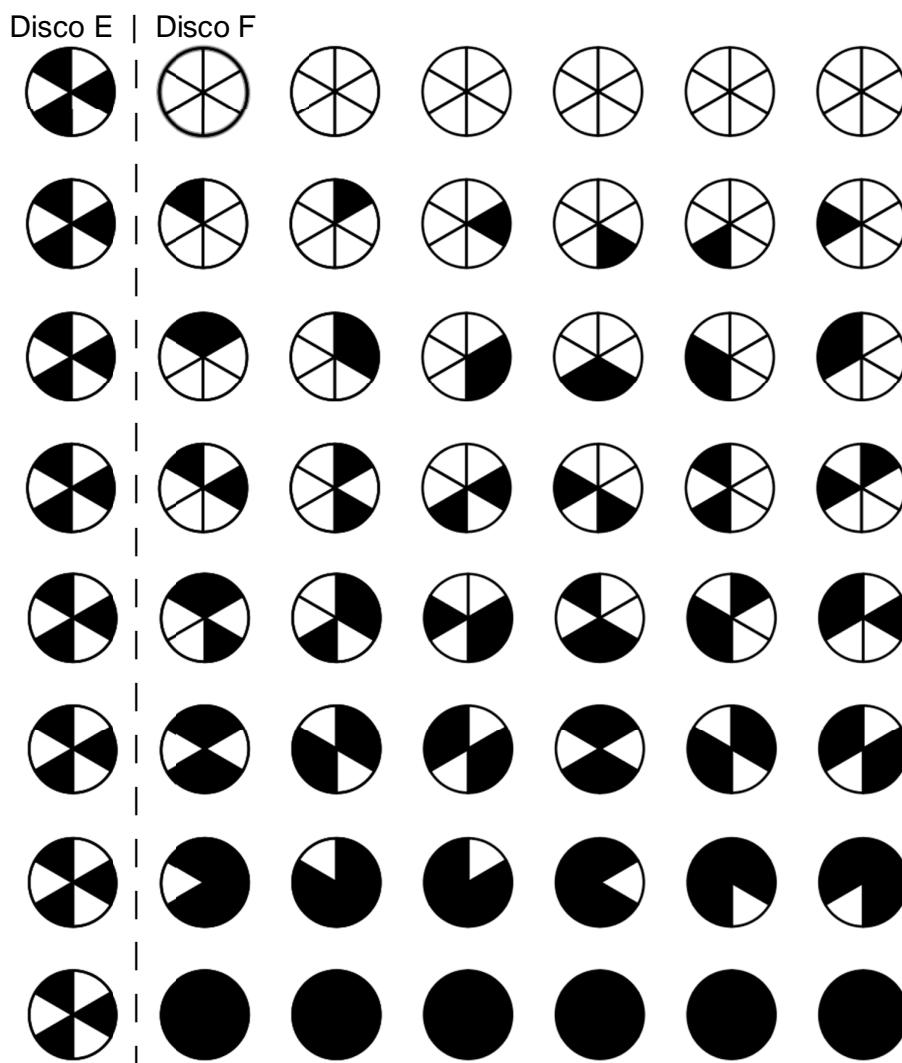
desconhecido por nós. Vamos fazer agora somente algumas observações, fixando o disco E como na Figura 6 a seguir, e em seguida observando as algumas possíveis cores, posições e giros do disco F, na Figura 7.

Figura 6 – Disco E



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 7 – Possíveis Cores e Posições do Disco F



Fonte: Elaborada pela autora

Ao fazer a contagem das coincidências de cores em cada linha acima, temos que em cada uma das linhas há um total de 18 coincidências.

Podemos afirmar que a quantidade total de coincidências é a quantidade de setores pretos (ou brancos) fixados, multiplicado pela quantidade total de setores, pois, disco C com 2 setores pretos, multiplicado por 4 setores ao todo, será igual a 8 coincidências. Disco E com 3 setores pretos, multiplicado por 6 setores ao todo, teremos um total de 18 coincidências.

Com estas informações, retomamos o problema inicial.

Afirmção: a soma total de coincidências entre os discos A e B nas n posições possíveis dos discos é constante.

Como consequência desta afirmação, a média de coincidências será a mesma e igual à metade dos setores de A.

Argumentamos a partir de uma certa configuração dos setores de B, informação que não conhecemos, pois está dito que eles foram pintados de forma aleatória.

Se todos os setores de B forem pretos, o número de coincidências em cada posição é constante e igual à metade dos setores de A, lembrando que A tem metade de setores pretos e a outra metade branca.

Considere agora que um dos setores de B mude para a cor branca. Numa posição em que havia discordância de cores passa a haver concordância (+1 coincidência) o que é compensado por uma posição em que havia concordância e passa a haver discordância (-1 coincidência).

Mas há metade de concordâncias e metade de discordâncias na forma anterior em que o disco B estava pintado. Por isto, na nova configuração dos setores de B, haverá a mesma soma total de concordâncias, consideradas as $2n$ posições.

Finalmente, qualquer configuração dos setores de B pode ser obtida a partir daquela em que todos os setores são pretos, bastando pintar um setor de cor branca de cada vez. Como demonstramos que quando há a troca de cor de um único setor, a média de coincidências não varia, ela é constante e igual a n , independente de como B foi pintado.

Pelo princípio da casa dos pombos, há pelo menos uma posição de B e A tal que ocorrem pelo menos n coincidências.

Sendo assim, a quantidade de total de coincidências é a quantidade de setores pretos (ou brancos) fixados no disco A, multiplicado pela quantidade total de setores, como o disco A possui 100 setores pretos, multiplicado por 200 setores ao todo, será igual a 20.000 coincidências.

É então verdade que o número total de coincidências é $a_1 + a_2 + \dots + a_{200} = 100 \cdot 200 = 100 \cdot 100 \cdot 2 = 2 \cdot 100^2$.

Então, pelo Teorema temos:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{200}}{200} = \frac{2 \cdot 100^2}{2 \cdot 100} = 100 > 100 - 1 \text{ (neste caso } r = 100\text{)}$$

Logo, pelo menos um dos a_i deve ser igual a ou maior do que 100, ou seja, para uma das posições o número de coincidências é de pelo menos 100.

■

4 A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DE PONTE

A Metodologia de Ensino escolhida para desenvolver este trabalho foi a Investigação Matemática, pois, como diz Ponte (2003, p. 1) não deveríamos separar investigar de aprender, afinal, quem investiga está a procura de aprender e quem aprende pode ter interesse em investigar, sendo assim esses conceitos podem interligar-se e ajudar no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Um dos princípios do trabalho com Investigação Matemática se trata de saber que,

Investigar não representa obrigatoriamente trabalhar em problemas muito difíceis. Significa, pelo contrário, trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, mas que procuramos clarificar e estudar de modo organizado (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009, p. 9).

E o interesse por esse tema decorre do fato que investigar constitui uma poderosa forma de construir conhecimento, Ponte (2003, p. 2) ainda afirma que “‘investigar’ não é mais do que procurar conhecer, procurar compreender, procurar encontrar soluções para os problemas”, sendo assim esta capacidade deveria permear o trabalho da escola para os alunos aprenderem a repensar os problemas, organizar suas ideias e até questionarem mais.

Um trabalho de Investigação Matemática é muitas vezes minucioso, pois com diz Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 13), “para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades”, sendo assim, podemos nos deparar com novos problemas e ter a oportunidade de trabalhar com objetos matemáticos desconhecidos o que se torna um trabalho enriquecedor ao professor.

Em um trabalho de investigação nem sempre terá uma pergunta a se responder, muitos questionamentos surgem no decorrer da própria tarefa. Os autores ainda afirmam que “uma investigação matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas. Pode mesmo dizer-se que o primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar claramente o problema a resolver”. (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009, p. 16).

E ainda segundo Stewart (1995, p. 17, apud PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 16) “um bom problema é aquele cuja a solução, em vez de simplesmente conduzir a um beco sem saída, abre horizontes inteiramente novos” o que pode causar um grande fascínio em quem está a resolver tal tarefa.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 20) dizem que a realização de uma Investigação Matemática pode envolver quatro momentos principais e que cada momento pode incluir diversas atividades como é está indicado no quadro a seguir:

Quadro 1 – Momentos na Realização de uma Investigação

Exploração e formulação de questões	<ul style="list-style-type: none"> - Reconhecer uma situação problemática - Explorar a situação problemática - Formular questões
Conjecturas	<ul style="list-style-type: none"> - Organizar dados - Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	<ul style="list-style-type: none"> - Realizar testes - Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	<ul style="list-style-type: none"> - Justificar uma conjectura - Avaliar o raciocínio ou resultado do raciocínio

Fonte: PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 20

As Investigações Matemáticas constituem uma das atividades que os alunos podem realizar e que se relacionam, de muito perto, com a resolução de problemas.

Então devemos distinguir a Resolução de Problemas da Investigação Matemática, para realizar um trabalho com mais qualidade e foco.

Um problema é uma questão para a qual o aluno não dispõe de um método que permita a sua resolução imediata, enquanto que um exercício é uma questão que pode ser resolvida usando um método

já conhecido. [...] O seu enunciado indica claramente o que é dado e o que é pedido [...] e a resposta do aluno ou está certa ou está errada. Numa investigação as coisas são um pouco diferentes. Trata-se de situações mais abertas – a questão não está bem definida no início, cabendo a quem investiga um papel fundamental na sua definição (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009, p. 22).

O envolvimento e participação ativa dos alunos favorecem em muito a sua aprendizagem e essa é uma característica forte que a Investigação Matemática tem como objetivo.

Devemos lembrar também que cada disciplina tem suas tarefas características, em Matemática a mais conhecida de acordo com Ponte (2003 p. 4) é o exercício, mas temos ainda os problemas e a investigação, entre outros. Podemos usar a figura a seguir para exemplificar estes três tipos de tarefas.

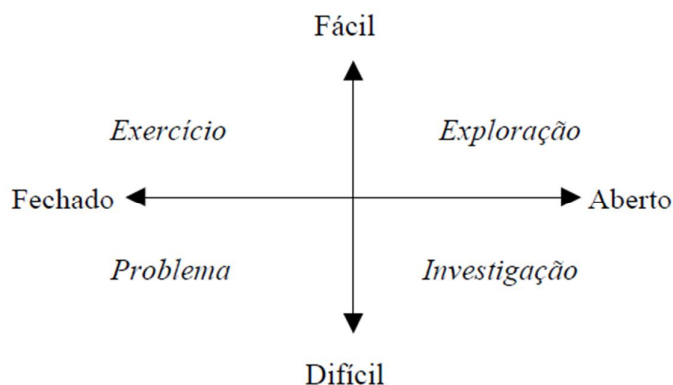
Figura 8 – Tipos de Tarefas

Exercício	Problema	Tarefa de investigação
Simplifica:		
a) $\frac{6}{12} =$	Qual o mais pequeno número inteiro que, dividido por 5, 6 e 7 dá sempre resto 3?	1. Escreve a tabuada dos 9, desde 1 até 12. Observa os algarismos das diversas colunas. Entras alguma regularidade.
b) $\frac{3 \times (10 - 7)}{17 - 2} =$		
c) $\frac{\frac{20}{18 - 9}}{(15 - 10) \times 2} =$ 3		

Fonte: PONTE, 2003, p. 4

Na minha perspectiva, uma tarefa tem quatro dimensões básicas: O seu grau de dificuldade, a sua estrutura, o seu contexto referencial e o tempo requerido para a sua resolução. Conjugando as duas primeiras dimensões, obtemos quatro tipos básicos de tarefa, que podemos visualizar no esquema da Figura 9 (PONTE, 2003, P. 4).

Figura 9 – Os Diversos Tipos de Tarefas, em Termos do Grau de Dificuldade e de Abertura



Fonte: PONTE, 2003, p. 5

De acordo com o esquema da Figura 9, a Investigação caracteriza-se com grau de dificuldade elevado que podemos chamar também de tarefa mais desafiadora, mas com uma estrutura aberta e a exploração matemática caracteriza-se com tarefas fáceis e com uma estrutura também aberta.

Muitas vezes não se distingue entre tarefas de investigação e de exploração, chamando-se 'investigações' a todas elas. Isso acontece, muito provavelmente, porque é complicado saber à partida qual o grau de dificuldade que uma tarefa aberta terá para um certo grupo de alunos. No entanto, uma vez que atribuímos importância ao grau de dificuldade das tarefas, é preferível termos uma designação para as tarefas abertas mais fáceis e outra designação para as mais difíceis (PONTE, 2003, p. 5).

Ponte (2003. p. 8) apresenta um exemplo de tarefa utilizando a Investigação Matemática que foi aplicada a um conteúdo que dizem normalmente serem usados exercícios repetitivos, para mostrar que é possível fazer um trabalho exploratório e investigativo, apresentamos essa tarefa a seguir, na Figura 10.

Figura 10 – Propriedades Verdadeiras e Falsas

1. Repara que $2^2 = 4$ e que $2 \times 2 = 4$.

- Será sempre verdade que $a^n = a \times n$?
- Experimenta nos seguintes casos e noutros por ti escolhidos, usando, se necessário, a calculadora.

$$\begin{array}{cccc} 0^2 = & 0 \times 2 = & 10^2 = & 10 \times 2 = \\ 4^2 = & 4 \times 2 = & \left(\frac{1}{2}\right)^3 = & \left(\frac{1}{2}\right) \times 3 = \\ 3^3 = & 3 \times 3 = & \left(\frac{5}{3}\right)^4 = & \left(\frac{5}{4}\right) \times 4 = \end{array}$$

2. Determina cada uma das seguintes potências

$$\begin{array}{ccc} 10^3 & 1^4 & 0.45^2 \\ 10^5 & 1^8 & 0.45^4 \\ 10^6 & 1^{18} & 0.45^7 \end{array}$$

- Se calculasses 10^7 , seria maior ou menor que 10^6 ?
 - E se calculasses 0.45^9 seria maior ou menor que 0.45^7 ?
 - O que se passa com as potências de base 1?
 - De todo o estudo que fizeste, podes tirar alguma conclusão?
3. Repara que $4^2 = 16$ e $2^4 = 16$. Será sempre verdade que $a^n = n^a$?
- Experimenta noutros casos!
4. Sabendo que $3^6 = 729$, és capaz de calcular imediatamente 3^7 ? e 3^8 ? e 3^{12} ?

Fonte: PONTE, 2003, p. 7

O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 23).

Ainda segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 25) devemos assumir que a Investigação Matemática é um tipo de tarefa que todos os alunos devem experimentar, com toda certeza, mas devemos ser muito cautelosos e pensar em

como realizá-las na sala de aula, pois não saberemos os caminhos que serão tomados pelos alunos nem mesmo seus avanços.

Uma investigação desenvolve-se habitualmente em três fases: (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009, p. 25).

Os autores dizem que o início da atividade, sua introdução, deve ser curta, porém é algo crítico e decisivo, pois, é imprescindível uma boa compreensão do que se tem a fazer e a partir daí o aluno tem que ele próprio formular as suas questões. É importante que os alunos saibam que “podem contar com o apoio do professor, mas que a atividade depende, essencialmente, da sua própria iniciativa” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009, p. 28).

Ao se propor uma tarefa de investigação, espera-se que os alunos possam, de uma maneira mais ou menos consistente, utilizar os vários processos que caracterizam a atividade investigação em matemática. Como referimos, alguns desses processos são: a exploração e formulação de questões, a formulação de conjecturas e, ainda, a justificação de conjecturas e avaliação do trabalho (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009, p. 29).

Para que tudo isso ocorra, em muitas tarefas os alunos devem gerar dados e organizá-los, só então começarem a formular questões; outras vezes surgem primeiro as conjecturas que necessitam de testes só então os alunos irão gerar mais dados para integrar seus conhecimentos matemáticos na investigação.

A justificação das conjecturas é feita pelos alunos orientados no que foi pedido pelo professor, sendo assim, pedir os registros escritos gera um novo desafio aos alunos e é aí que eles vão se fortalecendo na capacidade de se comunicar matematicamente, clarificar suas ideias e expor a discussão do grupo para o professor ter conhecimento do trabalho realizado por eles.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 38) afirmam que “à medida que os alunos vão interiorizando a necessidade de justificarem as suas afirmações e que suas ferramentas matemáticas vão sendo mais sofisticadas, vai-se tornando mais fácil realizarem pequenas provas”.

Outro momento importante para finalizar o trabalho onde os alunos podem fazer um balanço do que foi realizado é a discussão da investigação, o professor

tem o papel de moderador para que os alunos falem sobre suas estratégias, conjecturas, justificativas e desenvolvam a capacidade de se expressar matematicamente e de argumentação, “podemos mesmo afirmar que, sem a discussão final, se corre o risco de perder o sentido da investigação” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009, p. 41).

Com relação ao papel do professor em uma aula de Investigação Matemática, podemos dizer que “tais aulas representam um desafio adicional à sua prática, mas, certamente, traduzem-se também em momentos de realização profissional” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009, p. 47). O professor deve estar sempre atento, dar autonomia aos alunos, mas garantir que o trabalho seja significativo para isso a sua interação e capacidade de desafiar e questionar cada grupo é muito importante.

Outro ponto importante é a escolha da atividade que o professor deve fazer com atenção, escolher questões que desafiem os alunos lembrando da pluralidade de interesses. Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 48) acreditam que escolher questões abertas aumenta a possibilidade de mais envolvimento pelos alunos pela forma com que cada um pode interpretá-las. Os autores falam ainda sobre ensinar os alunos a interrogar matematicamente as situações e formular boas questões.

A atenção do professor no desenrolar da atividade para tentar compreender o pensamento dos alunos e saber onde querem chegar é fundamental, uma pergunta também é importante: “Será que eles já se apropriaram do conceito de investigação ou estão trabalhando de forma puramente convencional?” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009, p. 48).

Devemos também lembrar que “dada a natureza desse tipo de atividade, é muito natural que os alunos formulem questões em que o professor não pensou. De fato, é mesmo impossível antever todas as explorações que podem surgir” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009, p. 50).

O professor é um elemento decisivo para o êxito nesse tipo de tarefa, ele deve dar muita atenção aos alunos, tirar suas dúvidas, formular questões, encorajar os alunos sem dar respostas e muitas vezes colocar os alunos a argumentarem uns com os outros.

Mesmo a investigação tendo um importante papel na sala de aula Ponte (2003, p. 12) destaca alguns argumentos utilizados para desvalorizar esse tipo de tarefa, mas ele próprio responde.

(I) A maior parte dos alunos não tem interesse por realizar investigações matemáticas;

É verdade que muitos alunos, infelizmente, não têm qualquer interesse pelas investigações matemáticas, ou porque não têm interesse pela escola, ou porque têm esse interesse canalizado para outros objetivos (...). No entanto, por mais modesto que seja, há sempre algo que o professor pode fazer para captar a sua atenção: uma pergunta, uma observação, um desafio (PONTE, 2003, p.12).

(II) Os alunos têm dificuldade em perceber como investigar;

Os alunos à partida não sabem o que é uma investigação. Mas, como é evidente, podem aprender. Na verdade, os alunos podem precisar de várias experiências em trabalho investigativo para perceberem, de modo apropriado, o que é este trabalho (PONTE, 2003, p.12).

(III) Antes de poderem investigar os alunos têm de aprender muitos conceitos e procedimentos básicos;

Saber conceitos e procedimentos básicos é claro que ajuda na realização de investigações, como em todo o trabalho intelectual. Mas muitas coisas aprendem-se melhor em actividades significativas, lutando com dificuldades concretas, do que de uma forma dedutiva e linear. Muitos conceitos e procedimentos podem ser aprendidos através de actividades exploratórias e investigativas. Por isso, não tem de ser “primeiro coisa e depois a outra” (PONTE, 2003, p. 12).

(IV) A atividade do aluno e a do matemático são muito diferentes, não se pode comparar um profissional especializado, que trabalha em coisas que lhe interessam, com uma criança ou um jovem, que tem uma dúzia de disciplinas para estudar, e que o faz coagido pelo sistema de ensino;

“Que o matemático e o aluno são personagens diferentes, não há grande dúvida. Mas a sua actividade pode ter muitos pontos de contacto. São vários os matemáticos que o dizem” (PONTE, 2003, p. 13).

Entre o trabalho do aluno que tenta resolver um problema de geometria ou de álgebra e o trabalho de criação, pode dizer-se que existe apenas uma diferença de grau, uma diferença de nível, tendo ambos os trabalhos uma natureza semelhante (HADAMARD, 1945, p. 104, apud PONTE, 2003, p. 13).

O professor pode passar por novas experiências assim como seus alunos e também encontrar algumas dificuldades, que para alguns pode ser ao formular questões, estar sozinho, colocar suas ideias no papel, fazer suas conclusões, relatar sua Investigação Matemática e muitas vezes investigar sua própria prática de ensino.

Outro aspecto importante ao professor é o de promover nos alunos a reflexão sobre o seu trabalho, ajudá-los a fazer uma síntese da atividade que conste seus objetivos e estratégias e procurar justificar matematicamente as suas conjecturas.

As investigações matemáticas são uma atividade de aprendizagem e, como em todas as outras atividades, tem de haver avaliação. Essa avaliação permitirá ao professor saber se os alunos estão progredindo de acordo com suas expectativas ou se, pelo contrário, é necessário repensar a sua ação nesse campo. Além disso, permitirá ao aluno saber o seu desempenho é visto pelo professor e se existem aspectos a que precisa dar mais atenção (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009, p. 109).

Temos a nossa disposição vários instrumentos de avaliação tanto oral, quanto escrito para utilizar com os alunos que trabalharam individualmente ou em grupo.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p.110) utilizaram o relatório como exemplo de instrumento de avaliação e nele não estava presente apenas as conclusões dos alunos mas também as questões que foram levantadas, como organizaram os dados, os procedimentos para validar ou não suas conjecturas e todos os processos utilizados, os autores falam da potencialidade do relatório e também que os alunos devem ser orientados se não estiverem habituados a fazerem relatórios.

Outras formas de avaliar os alunos citadas pelos autores acima é a observação informal que dizem ser fundamental ao professor, a apresentação oral que por si só não se apresenta apenas como situação de avaliação, mas também um momento de aprendizagem.

Investigar pressupõe sobretudo uma atitude, uma vontade de perceber, uma capacidade para interrogar, uma disponibilidade para ver as coisas de outro modo e para pôr em causa aquilo que parecia certo. Investigar envolve sobretudo três actividades: estudar, conversar e escrever (PONTE, 2003, p. 21).

Devemos lembrar ainda que a Investigação Matemática é uma poderosa Metodologia de ensino que contribui e muito para a construção do conhecimento, porém como diz Ponte (2003, p. 22) não se trata ainda da fórmula geral para resolver todos os problemas da educação, mas tem suas potencialidades que podem promover o ensino.

5 FORMULAÇÃO DAS TAREFAS

Para produzir as tarefas de investigação na perspectiva da Metodologia da Investigação Matemática usando como conteúdo principal o Princípio das Gavetas de Dirichlet, vamos nos basear em problemas já existentes que encontramos nos livros sobre o assunto. A partir destes problemas iremos fazer a nossa proposta de tarefas transformando cada problema para deixá-lo na perspectiva de uma atividade de Investigação Matemática, afinal, como afirma Paraná (2008, p. 67) “as investigações matemáticas (semelhantes às realizadas pelos matemáticos) podem ser desencadeadas a partir da resolução de simples exercícios”.

Cada um dos problemas que buscamos para produzir as tarefas a partir deles trabalha com um conteúdo matemático distinto, iremos nos basear em problemas com conteúdos sobre Análise Combinatória, Aritmética, Funções, Geometria Analítica, Geometria Plana e Geometria Espacial.

Essa diversidade de conteúdos que o Princípio das Gavetas abrange é um ponto muito positivo, e isso pode fazer com que esse mesmo assunto seja retomado em diversas etapas da Educação e em diferentes momentos, o que não deixa um trabalho enjoativo e cansativo, reforçando assim a importância de tal assunto.

Em cada um dos itens a seguir apresentaremos um problema original sobre o Princípio das Gavetas e em seguida apresentaremos a tarefa de investigação já nos moldes de uma atividade de Investigação Matemática que foi baseada no problema apresentado.

4.1 TAREFA DE INVESTIGAÇÃO 1

Este primeiro problema de Fomin, Genkin e Itenberg (2012), é um problema que envolve Geometria Plana.

Problema 1:

Cinquenta e um pontos estão espalhados dentro de um quadrado com 1 metro de lado. Prove que algum conjunto contendo três desses pontos pode ser coberto por um quadrado de 20 centímetros de lado.

Tarefa de Investigação 1:

Cinquenta e um pontos estão espalhados dentro de um quadrado com 1 metro de lado.

1) Você pode subdividir um quadrado em outros quadrados? Em quantos?

1.1) Qual a proporção entre número de quadrados da subdivisão e o lado de cada quadrado?

2) O que se pode dizer sobre o número de pontos em regiões quadradas, dentro deste quadrado?

3) Qual o mínimo de pontos em cada subdivisão quadrada quando se divide o quadrado original em 4 quadrados, 9 quadrados?

3.1) Você consegue generalizar?

4) Em que momento na subdivisão, é possível ter certeza que algum quadrado ficará vazio?

4.2 TAREFA DE INVESTIGAÇÃO 2

Morgado e Carvalho (2014, p. 181) propõem alguns problemas relacionados ao Princípio das Gavetas. O problema relacionado com a Análise Combinatória é nosso problema 2. Um outro problema desses autores é sobre Geometria Analítica, que será nosso problema 3.

Problema 2:

40100 candidatos estão fazendo uma prova de 20 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas por questão. Suponha que nenhum candidato deixe de

responder a nenhuma questão. Considere a afirmação: “Pelo menos k candidatos responderão de modo idêntico às 4 primeiras questões da prova”. Determine o maior valor de k para o qual a afirmação é certamente verdadeira.

Tarefa de Investigação 2:

Em uma prova com 5 questões de múltipla escolha, com 4 alternativas por questão. Suponha que o candidato não deixe de responder a nenhuma questão.

1) De quantas formas podemos responder a esta prova?

2) Há um número mínimo de candidatos para garantir que pelo menos 2 candidatos respondam de maneira idêntica a prova? Você pode generalizar?

Agora, suponha que 40100 candidatos estão fazendo uma prova de 20 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas por questão. Suponha que nenhum candidato deixe de responder a nenhuma questão.

3) É possível que ao corrigir a essas provas, o corretor encontre resoluções iguais nas 2 primeiras questões? E nas 3 primeiras questões?

4) Existe um número mínimo de candidatos dentre os 40100, que respondam de modo idêntico as 4 primeiras questões? Se sim, qual é esse número?

4.3 TAREFA DE INVESTIGAÇÃO 3

Problema 3:

São dados, no plano, cinco pontos de coordenadas inteiras. Mostre que, entre os dez segmentos determinados por esses pontos, pelo menos um tem como ponto médio um ponto de coordenadas inteiras.

Tarefa de Investigação 3:

1) Escreva alguns pontos no plano com coordenadas inteiras.

2) Por esses pontos podemos formar quantos segmentos?

2.1) A quantidade de segmentos foi sempre a mesma para qualquer posição que os pontos se encontram?

3) Há segmentos que possui como ponto médio um ponto com coordenadas também inteiras?

4) Há casos em que você consegue escolher dois pontos e garantir a existência do ponto médio com coordenadas inteiras?

5) Existe uma quantidade mínima de pontos que garante que o ponto médio entre dois deles tenha coordenadas inteiras?

4.4 TAREFA DE INVESTIGAÇÃO 4

Temos também problemas relacionados à Geometria Espacial e à Aritmética, que podemos encontrar no livro de Morgado et al. (2004, p. 86), esses problemas serão respectivamente o problema 4 e o problema 5.

Problema 4:

Mostre que se escolhermos 800 pontos dentro de um cubo de aresta 10, pelo menos um dos segmentos determinados por esses pontos tem comprimento menor que 2.

Tarefa de Investigação 4:

Suponha termos um cubo.

1) Ao dividir o lado do cubo em 2, quantos cubinhos você obtém?

2) É possível dividir esse cubo em mais cubinhos iguais?

3) Existe alguma relação entre a quantidade de divisões do lado do cubo com a quantidade de cubinhos obtidos?

3.1) Se sim, qual relação é esta? É possível fazer uma generalização?

Agora escolha 800 pontos dentro de um cubo que tenha como medida da aresta 10.

4) Sempre terá pontos escolhidos dentro dos cubinhos que foram subdivididos anteriormente?

5) Existe uma quantidade máxima de divisão do lado do cubo que garanta sempre ter pontos dentro de todos os cubinhos?

5.1) Se sim, qual é essa quantidade?

6) Se ao escolher esses pontos, você conseguir deixá-los o mais distante possível, e dividir o cubo na quantidade mencionada no item 5.1), a distância entre dois desses pontos que estejam em um mesmo cubinho será menor que, maior que, ou igual a 2?

4.5 TAREFA DE INVESTIGAÇÃO 5

Problema 5:

Prove que em qualquer conjunto de 52 inteiros existe um par de inteiros cuja soma ou cuja diferença é divisível por 100.

Tarefa de Investigação 5:

1) Um número inteiro, quando dividido por 10, deixa resto 3. O que se deve somar ao número original para que o resultado seja divisível por 10? O que se pode subtrair ao número original para que o resultado seja divisível por 10?

2) Usando os dois números do item anterior, ao subtrair o menor do maior o resultado encontrado será divisível por 10?

3) Você consegue escrever alguma regra para que ao subtrair dois números inteiros olhando apenas o resto da divisão por 10, o resultado seja divisível por 10?

3.1) Tente generalizar este fato.

4) Combinando um conjunto maior de números, o que acontece com os restos das diferenças e somas, na divisão por 10?

5) Como podemos garantir que em qualquer conjunto de 52 inteiros existe um par de inteiros cuja soma ou cuja diferença é divisível por 100?

4.6 TAREFA DE INVESTIGAÇÃO 6

No trabalho de dissertação de Amorim (2013, p. 25) encontramos um problema que trata do conteúdo de Funções que também pode ser transformado em uma tarefa na perspectiva da Investigação Matemática.

Problema 6:

Sejam A e B dois conjuntos finitos tais que o número de elementos de A é maior que o número de elementos de B. Prove que não existe função injetiva de A em B.

Tarefa de Investigação 6:

1) Considere dois conjuntos, A com 7 elementos e B com 5 elementos. Considere regras de associação de elementos de A com elementos de B, traçando setas que partem dos elementos de A para os elementos de B. O que você observa nestas regras?

2) Se de cada elemento de A parte apenas uma seta (chegando a algum elemento de B, tem-se uma associação com um nome especial: *uma função*. Classifique as associações que fez entre as que são e as que não são funções.

3) Entre as funções que identificou, existe alguma na qual as setas podem ser invertidas e você ainda tem uma função? Tem como explicar a razão da sua resposta?

4) Fixe o conjunto A com 7 elementos, e considere vários casos para o conjunto B, com 5 ou mais elementos. Quando é possível que uma função de A em B seja invertida?

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi feito um estudo sobre diversos enunciados do Princípio das Gavetas de Dirichlet, que posteriormente foi usado como conteúdo para nos fundamentar nas Tarefas de Investigação.

Acreditamos que as demonstrações que foram feitas no desenvolvimento do trabalho são de grande importância para seu enriquecimento e ao leitor que tenha a intenção de aplicar este trabalho com seus alunos.

Com este trabalho, buscamos propor tarefas que utilizam como Metodologia de Ensino-Aprendizagem a Investigação Matemática, usando como ensejo o Princípio das Gavetas de Dirichlet no currículo da Educação Básica. O hábito de utilizá-lo pode enfim torná-lo *simples*, ainda que algumas de suas consequências precisem de termos pouco corriqueiros para serem enunciados, como “injetiva” e “sobrejetiva”.

Acreditamos que com o desenvolvimento das tarefas por meio da Investigação Matemática o aluno pode compreender conceitos que ele mesmo possa enunciar, junto com a capacidade de generalização. A metodologia preconiza que o aluno passe a agir como um matemático em suas argumentações, com os colegas e com o professor, posição com a qual coincidimos. Nas DCE afirma-se que “investigar significa procurar conhecer o que não se sabe” (PARANÁ, 2008, p. 67).

No desenvolvimento das Tarefas de Investigação procuramos sempre trabalhar com conteúdos que fizessem parte dos conteúdos estruturantes das Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná, dessa maneira o professor não deixa de trabalhar de acordo com as Diretrizes e pode fazer uma ponte entre os conteúdos para trabalhar dessa forma com o Princípio das Gavetas de Dirichlet.

Por fim, pretendemos como trabalho futuro criar condições para que as tarefas aqui propostas sejam de fato aplicadas em situação de sala de aula, e com este futuro relato subsidiar o professor que queira também trabalhar com essa Metodologia de Ensino.

REFERÊNCIAS

- AMORIM, L. A. B. **O Ensino do Princípio das Casas dos Pombos no Ensino Básico**. 2013. 49 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2013.
- FOMIN, D.; GENKIM, S.; ITENBERG, I. **Círculos Matemáticos: a experiência Russa**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- HEFEZ, A. **Indução Matemática**. Programa de Iniciação Científica da OBMEP, 2007. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.
- GARNICA, A. V. M. História oral e educação matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, p. 77-98, 2004.
- MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.
- MORGADO, A. C. O. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade: com as soluções dos exercícios**. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.
- OLIVEIRA, K. I. M.; FERNÁNDEZ, A. J. C. **Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções**. 2. ed. SBM: 2012.
- PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica - Matemática**. Curitiba: SEED, 2008.
- PITOMBEIRA, J. B. **Princípio da casa dos pombos**. Revista do Professor de Matemática, nº 8, p. 21 – 26, 1º Semestre, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1986.
- PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.
- PONTE, J. P. **Investigar, ensinar e aprender**. In: Actas do ProfMat 2003. (CD-ROM, pp.25-39). Lisboa: APM, 2003. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/~iole/GEN5711/Ponte,J.P.Investigar,Ensinareaprender.pdf>>. Acesso em: 23/05/2017.