UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Renato Carneiro de Souza

Equações Algébricas - Estudos e Sala de Aula.
Algebraic Equations - Studies and Classroom

Ouro Preto

2017

RENATO CARNEIRO DE SOUZA

Equações Algébricas - Estudos e Sala de Aula.

Área de Concentração: Álgebra e Ensino de Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Jamil Ferreira.

Ouro Preto
2017

C213e Carneiro, Renato.
Equações algébricas [manuscrito]: estudos e sala de aula / Renato Carneiro. - 2017.
77f.: il.: grafs; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Jamil Ferreira.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.
Área de Concentração: Matemática com oferta nacional.

1. Corpos finitos (Álgebra). 2. Álgebra. 3. Equações. I. Ferreira, Jamil. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Titulo.

CDU: 517

Catalogação: www.sisbin.ufop.br

Ministério da Educação
Universidade Federal de Ouro Preto
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
ICEB - Campus – Morro do Cruzeiro
Ouro Preto – MG – CEP 35.400-000
Fone: (031) 3559 - 1629
E-mail: profmat@iceb.ufop.br

"Equações Algébricas: estudos e sala de aula"

Autor: Renato de Souza Carneiro

Dissertação defendida e aprovada, em 03 de Julho de 2017, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Professor Dr. Jamil Ferreira
Universidade Federal de Ouro Preto

Valmecir Bayer

Professor Dr. Valmecir Antônio Dos Santos Bayer
Universidade Federal Do Espírito Santo

Professor Dr. Rodrigo Geraldo do Couto
Universidade Federal de Ouro Preto

Agradecimentos

Ao professor Dr Jamil Ferreira, pela oportunidade única de trabalhar ao seu lado, pela confiança em meu trabalho, pela amizade adquirida durante o curso e que vai ser levada para o resto da minha vida. Foi como um pai pra mim durante todo o mestrado, passando muito conhecimento e também sempre me incentivando na superação dos meus limites, chamando a minha atenção nas horas em que eu mais precisava.

À minha esposa, amiga e companheira Valéria Z. de Souza Carneiro, não tenho palavras para agradecer todo o seu carinho, todo seu apoio incondicional, toda sua ajuda na realização do meu sonho de fazer esse mestrado. Tenho certeza de que sem ela eu nunca teria chegado onde cheguei, acredito plenamente que ela foi um anjo que Deus colocou no meu caminho para me incentivar em todos os momentos difíceis da minha caminhada, nunca deixando que eu desistisse.

Aos meus filhos Gabriel, Tomás e Eduarda, por sempre estarem ao meu lado, aguardando com paciência nas horas em que eu estava estudando ou escrevendo, para depois brincarmos.

À minha turma do Profmat, grandes amigos de profissão que me ajudaram muito durante todo o nosso curso. Em especial ao colega, amigo e companheiro Marcelo Moreira, famoso "Marceleza", pela grande ajuda nessa monografia e aos grandes amigos Rodney, Bruno e Bruna, por fazerem parte do meu grupo de estudos.

Aos meus professores e monitores do Profmat Ouro Preto, por todo apoio nesses dois anos de estudo e pela amizade conquistada durante esse período.

Aos meus pais Adeodato B de Souza e Solange C de Souza pela vida e dedicação de sempre.

E principalmente a Deus, por Ele ter me dado saúde e capacidade suficientes para eu realizar meu sonho de ser um Mestre mesmo aos 41 anos.

Resumo

Neste trabalho, escolhemos um tema relevante do conteúdo do Ensino Médio, a saber, Equações Algébricas. Não só trabalhamos do ponto de vista teórico, revisitando e aprofundando o conteúdo estudado no PROFMAT, mas também do ponto de vista didático, através de uma pesquisa bibliográfica de textos que julgamos inovadores para a prática docente. Com esses propósitos, cada capítulo foi subdividido em uma seção teórica e uma seção didática, denominada "Em sala de aula", onde apresentamos uma proposta de abordagem do conteúdo, fruto de nossa pesquisa bibliográfica aliada aos mais de vinte anos de docência do autor. O conteúdo teórico, por sua vez, abordou em que medida os resultados tradicionalmente trabalhados para os subcorpos dos complexos se estendem para corpos finitos. Estudamos também detalhadamente uma demonstração rigorosa, porém, com ferramentas matemáticas elementares, do Teorema Fundamental da Álgebra, devida ao matemático brasileiro Oswaldo Rio Branco de Oliveira, da Universidade de São Paulo, publicada em "Mathematical Intelligencer [8]".

Palavras-chave: Equações Algébricas, Corpos Finitos, Teorema Fundamental da Álgebra

Abstract

In this work, we have chosen one relevant theme that belongs to the contents of High School, Algebraic Equations. We have done so, not only to work from a theoretical standpoint, revisiting and deepening the content studied in the PROFMAT, but also from a didactic point of view, through a bibliographical research of texts which we deem innovative for teaching practice. With these purposes, each chapter has been subdivided into a theoretical section and a didactic section, called "In classroom", where we present an approach to the content, derived from our bibliographic research allied to more than twenty years of teaching. The theoretical content, in turn, addressed to which extent the results traditionally worked for the subfields of the complexes extend to finite fields. We have also studied in detail a rigorous demonstration, however realized with elementary mathematical tools, of the Fundamental Theorem of Algebra, published by the Brazilian mathematician Oswaldo Rio Branco de Oliveira, of the University of São Paulo, published in Mathematical Intelligencer [8].

Keywords: Algebraic Equations, Finite Fields, Fundamental Theorem of Algebra

Conteúdo

1 Introdução

A ideia central do nosso trabalho foi estudar as equações algébricas e suas aplicações, aprofundar os conhecimentos obtidos no PROFMAT, junto com os conhecimentos já adquiridos durante minha trajetória nesses 21 anos em sala de aula. Para ajudar os professores no uso desse conteúdo, criamos uma seção chamada “em sala de aula” onde colocamos problemas que poderão ser usados pelos professores para exemplificar o conteúdo trabalhado.

O segundo capítulo consiste de um breve histórico das equações algébricas, começando pelas equações do primeiro grau e terminando com considerações sobre as equações de grau maior ou igual a 5.

No terceiro capítulo estudamos as equações quadráticas, onde apresentamos várias aplicações, mostramos como encontrar graficamente as raízes complexas construindo gráficos de funções de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{R}$, apresentamos um argumento, a nível de ensino médio, para o Teorema Fundamental da Álgebra.

No quarto capítulo estudamos as equações cúbicas, demonstramos a fórmula de Cardano-Tartaglia, explicando minuciosamente seu uso, vantagens e desvantagens, e também apresentamos aplicações dessa fórmula.

No quinto capítulo estudamos as equações quárticas, descrevendo o método de Ferrari para resolvê-las, mostrando aplicações desse método e também resolvemos equações quárticas especiais.

Importante ressaltarmos que resolvemos todas essas equações nos corpos de característica zero.

No sexto capítulo apresentamos uma demonstração rigorosa, porém elementar, do Teorema Fundamental da Álgebra devida ao professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira.

No sétimo aprofundamos nossos estudos em corpos finitos, fizemos algumas extensões de corpos e resolvemos equações algébricas em corpos de característica prima.

2 Equações Algébricas – Um breve histórico das Equações Algébricas

Para estabelecermos um breve histórico das equações algébricas e dos respectivos métodos de resolução, precisamos começar fazendo referência a um dos mais antigos textos matemáticos da história: *O Papiro Rhind (1650 a.C). Escrito pelo escriba Amés*, o Papiro Rhind recebeu esse nome porque foi adquirido pelo escocês Alexander Henry Rhind em 1850, em Luxor, no Egito. Esse texto contém uma série de 85 problemas,alguns dos quais podem ser considerados exemplos de Equações do primeiro grau.

Abaixo um exemplo retirado do Papiro Rhind:

Uma quantidade, com 1/7 dela adicionado, torna-se 19.

Na notação algébrica atual, teríamos: $x + \frac{1}{7}x = 19 \Rightarrow \frac{8}{7} \cdot x = 19 \Rightarrow x = \frac{19 \cdot 7}{8} = \frac{133}{8}$

Os egípcios usavam a chamada Regra da Falsa Posição.

Segue uma descrição simplificada do método:

Considerando-se a equação $ax = b$, escolhe-se um valor arbitrário x_0 e calcula-se ax_0 . Tal valor será chamado b_0 , ou seja, $ax_0 = b_0$. Em seguida, multiplicamos os dois membros da equação por $\frac{b}{b_0}$.

Assim, temos $ax_0 \cdot \frac{b}{b_0} = b_0 \cdot \frac{b}{b_0} \Rightarrow a\left(x_0 \cdot \frac{b}{b_0}\right) = b$

Desse modo, o termo $x_0 \cdot \frac{b}{b_0}$ é a solução esperada. Na prática, x_0 é escolhido a fim de facilitar as contas. Assim, por exemplo se a é uma fração com denominador 13, escolhemos $x_0 = 13$, isso eliminará os denominadores, tornando os cálculos mais simples.

No problema em questão, escolhemos $x_0 = 7$. Teríamos o seguinte: $7 + \frac{1}{7} \cdot 7 = 8$

Como desejamos obter o valor 19 no membro direito da equação, vamos multiplicar os dois membros da igualdade por $\frac{19}{8}$, então $\left(7+\frac{1}{7}\cdot 7\right)\cdot\frac{19}{8}=8\cdot\frac{19}{8}\Rightarrow 7\cdot\frac{19}{8}+\frac{1}{7}\cdot 7\cdot\frac{19}{8}=19$

Observe que o termo $7\cdot\frac{19}{8}=\frac{133}{8}$ faz os dois membros se tornarem iguais. Desse modo, o valor $\frac{133}{8}$ é a solução da equação do primeiro grau.

Assim, tudo o que se deveria calcular era a divisão de 19 por 8 e multiplicar o resultado por 7. Isso era simples para os egípcios que lançavam mão da base binária para efetuar multiplicações e divisões. Para uma abordagem detalhada da aritmética dos egípcios, veja [1].

Convém ressaltar que a notação algébrica empregada na explicação do método não condiz com o caráter descritivo original do método. Conforme veremos, a estrutura $ax=b$ foi introduzida apenas no século XVI, pelo matemático francês François Viète.

Segundo alguns historiadores da matemática, há rudimentos de problemas do segundo grau em tábulas babilônicas antigas. Os babilônios habitaram a Mesopotâmia por volta de 2000 a 1600 a.C. e produziram centenas de tábulas de argila, às quais devemos nossas informações sobre a matemática babilônica antiga. Embora numa estrutura bem diferente da atual, há registros que indicam que os babilônios eram capazes de resolver algumas equações quadráticas, principalmente usando um método similar ao que conhecemos hoje como método de completar quadrados. Uma das tábulas encontradas fornece uma sequência de quadrados e de cubos dos inteiros de 1 a 30, bem como a sequência de valores n^3+n^2 . Outra tábula contém alguns problemas redutíveis a cúbicas da forma $x^3+x^2=b$, os quais podem ser resolvidos usando a tábula n^3+n^2. Al-Khôwârizmî $(\approx 790-\approx 800)$ em seus primeiros textos, faz referências aos algoritmos hindus para efetuar cálculos aritméticos. Entretanto, foi no campo da álgebra que o seu trabalho teve maior destaque. Seus textos fazem referência a equações lineares e quadráticas, estas últimas resolvidas aritmeticamente e geometricamente.

Al-Khôwârizmî enumerou os seis problemas básicos envolvendo quantidades desconhecidas, problemas estes enunciados por palavras. Eis os problemas, em linguagem algébrica atual:

1. Quadrados iguais a raízes $(ax^2=bx)$
2. Quadrados iguais a um número $(ax^2=c)$
3. Raízes iguais a um número $(ax=b)$
4. Quadrados e raízes iguais a um número $(ax^2+bx=c)$
5. Quadrados e um número iguais a raízes $(ax^2+c=bx)$
6. Raízes e um número iguais a quadrados $(bx+c=ax^2)$

Convém ressaltar que o termo raiz indica aqui uma quantidade correspondente ao termo do primeiro grau (em nomenclatura atual).

Os métodos de resolução de cada um desses casos eram justificados por uma série de procedimentos geométricos. Entretanto, não é possível afirmar que houvesse uma fórmula ou expressão genérica de resolução, no sentido como a conhecemos atualmente.

No século XII, o matemático indiano Bháskara produziu o texto intitulado Lilavati. Nessa publicação, que recebeu o nome de sua filha única, Bháskara apresentou alguns problemas redutíveis a equações do segundo grau. Tais problemas eram escritos em forma de versos, muitas vezes fazendo referência a personagens importantes para o povo hindu. Abaixo um exemplo:

Arjuna, na exasperação do combate, arremessou uma aljava de flechas para matar Carna. Com metade das flechas ele neutralizou as de seu antagonista; com 4 vezes a raiz quadrada de toda a aljava ele matou seu cavalo; com 6 flechas ele matou Salya (cocheiro de Carna); com 3 destruiu o escudo, o estandarte e o arco; e com uma ele decepou a cabeça do inimigo. Quantas flechas Arjuna arremessou?

Em linguagem algébrica atual, temos:

$$\frac{x}{2}+4\sqrt{x}+6+3+1=x \Rightarrow 4\sqrt{x}+10=\frac{x}{2} \Rightarrow 8\sqrt{x}=x-20 \Rightarrow 64x=x^2-40x+400$$

O que equivale à equação do segundo grau $x^2-104x+400=0$, onde $x>10$.

O método usado por Bháskara consiste em completar o quadrado no primeiro membro, extrair a raiz quadrada dos dois membros e resolver a equação do primeiro grau resultante.

Resolveremos $x^2-104+400=0 \Rightarrow x^2-104x=-400$, os passos são os seguintes:

1) Multiplicar os dois membros por 4. Temos:

$$4x^2-4\cdot 104x=-1600$$

2) Completar o quadrado do lado esquerdo, o que equivale a somar 104^2 aos dois membros da equação:

$$4x^2-4\cdot 104x+104^2=-1600+104^2$$

3) Assim, o primeiro membro equivale a $(2x-104)^2$, ou seja,

$$(2x-104)^2 = 9216 \Rightarrow 2x-104 = \pm 96 \Rightarrow x = 100 \quad \text{ou} \quad x = 4$$

Concluímos então que $x = 100$.

Alguns dos avanços mais significativos da álgebra nos séculos XV e XVI foram propiciados pelos esforços para a determinação de uma solução para equações cúbicas por radicais. Nessa época, havia diferentes tipos de equações cúbicas, classificadas anteriormente pelo matemático Omar Khayam.

O matemático Scipione Del Ferro, no século XVI, obteve uma expressão utilizando radicais para resolver determinadas equações cúbicas. Entretanto, tal fórmula permaneceu secreta. Mais tarde, Niccolo Fontana Tartaglia estabeleceu um método de resolução de diversas equações cúbicas da forma $x^3 + mx = n$, com coeficientes literais. Mais tarde, o matemático Girolamo Cardano conseguiu obter a solução de Tartaglia, jurando segredo. Entretanto, em 1545 foi publicada a Ars Magna de Cardano, contendo a fórmula de Tartaglia. Como era de se esperar, Tartaglia protestou com veemência. Entretanto, Ludovico Ferrari, discípulo de Cardano, rebateu as alegações de Tartaglia, afirmando que Cardano havia recebido informações de Del Ferro. A fórmula dada por Cardano na Ars Magna, para a equação $x^3 + px + q = 0$ é a seguinte:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Pouco depois da solução da cúbica, surgiu a solução da equação quártica geral. Em 1540, o matemático italiano Zuanne de Tonini da Coi propôs a Cardano um problema cuja solução levava a uma quártica. Ferrari, discípulo de Cardano, conseguiu resolver o problema em questão. Cardano também publicou essa solução na sua Ars Magna. Abaixo temos o procedimento usado por Ferrari:

Consideremos a equação $x^4 + px^2 + qx + r = 0$

Em seguida, obtemos $x^4 + 2px^2 + p^2 = px^2 - qx - r + p^2 \Rightarrow (x^2 + p)^2 = px^2 - qx + p^2 - r$

Escolhendo-se um y arbitrário, temos

$$(x^2 + p + y)^2 = px^2 - qx + p^2 - r + 2y \cdot (x^2 + p) + y^2 = (p + 2y) \cdot x^2 - qx + (p^2 - r + 2py + y^2)$$

Sabe-se que uma condição necessária e suficiente para que a expressão ax^2+bx+c seja um quadrado de uma expressão linear é que o discriminante b^2-4ac se anule.

Desse modo, devemos escolher um valor conveniente de y, para que o segundo membro da equação seja um quadrado.

Tal condição será satisfeita se $4(p+2y)(p^2-r+2py+y^2)-q^2=0$

Observe que essa é uma equação cúbica, cuja solução pode ser obtida pelo método já apresentado. Esse valor de y reduz o problema original à extração de raízes quadradas.

Convém destacar também o trabalho monumental do matemático francês François Viète (1540-1603). Viète padronizou a representação para os coeficientes de uma equação, padronização esta que acabou levando ao formato notacional algébrico atual, após sugestões de alterações.

Viète também sistematizou um método para o cálculo de raízes de equações por meio de aproximações sucessivas. Veja um exemplo aplicado à equação $x^2+mx=n$.

Seja x_1 um valor aproximado de uma raiz x_1+x_2. Substituindo-se na equação, temos

$$(x_1+x_2)^2+m(x_1+x_2)=n \Rightarrow x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+m(x_1+x_2)=n$$

Assumindo x_2 suficientemente pequeno, podemos desprezar o termo x_2^2.

Desse modo, obtemos $x_2=\dfrac{n-x_1^2-mx_1}{2x_1+m}$. Assim, obtemos em x_1+x_2 uma aproximação da raiz procurada.

De posse desse valor, podemos repetir o processo, obtendo uma aproximação ainda melhor em $x_1+x_2+x_3$, e assim por diante.

Esse método foi utilizado por Viète para obter uma raiz aproximada da equação:

$$x^6+6000x=191246976$$

Ressaltamos aqui que as fórmulas resolutivas apresentadas acima para equações de graus 3 e 4 têm imenso valor teórico mas são raramente utilizadas nas aplicações, para as quais lançamos mão dos métodos numéricos atuais viabilizados em computadores, similares ao utilizado por Viète, baseados, por sua vez, em resultados teóricos de análise matemática. Um exemplo pode ser apreciado em [9], onde se apresenta a resolução de uma equação cúbica pelo método da bisseção.

Em 1750, o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), inspirado pelo trabalho de Ferrari, tentou igualmente reduzir a resolução de uma equação quíntica geral à de uma quártica. Entretanto, Euler falhou nessa tarefa. Coube ao matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829) a demonstração de que as raízes de equações gerais de grau cinco, não podem ser expressas por meio de radicais em termos dos coeficientes respectivos. Tal conclusão faz parte do Teorema de Abel-Ruffini.

O Teorema de Abel-Ruffini diz que não existem fórmulas resolutivas gerais que determinem corretamente as soluções de uma equação algébrica de grau 5 ou maior.

Niels Henrik Abel nasceu em 5 de agosto de 1802 na pequena cidade de Finnöy, na Noruega, filho e neto de pastores protestantes, e teve quatro irmãos e uma irmã. Seu pai, Abel, foi um dos fundadores da universidade de Oslo, onde aos 13 anos Abel foi estudar. Abel era excepcionalmente talentoso e resolvia com facilidade problemas que seus colegas julgavam difíceis, e dos 17 aos 19 anos ele se interessou pelas equações algébricas e pensou haver encontrado uma forma geral de se resolver as do 5^o grau, mas um pouco depois ele mesmo percebeu uma falha na sua solução.

Próximo ao Natal de 1823, aos 21 anos, ele provou que, exceto em casos particulares, é impossível resolver uma equação de grau 5 utilizando-se apenas um número finito de operações algébricas como soma, multiplicação, subtração, divisão e extração de raízes.

Abel foi um grande matemático que fez muitas descobertas durante sua curta vida e uma de suas maiores criações foi o Teorema Geral sobre as Integrais, hoje conhecido como Grande Teorema de Abel.

Sua contribuição matemática é tanta que vários objetos matemáticos levam seu nome, como por exemplo os chamados grupos abelianos, e um dos grandes prêmios matemáticos, chamado de prêmio Abel.

Antes de Abel, Paolo Ruffini (1765-1822), um filósofo e matemático italiano, também tentou demonstrar o teorema anterior, mas sua demonstração era incompleta e, por isso, insatisfatória, mas por ter sido o primeiro a pensar neste teorema e tentar demonstrá-lo, o teorema também leva seu nome.

Outro matemático que demonstrou o Teorema de Abel-Ruffini foi o francês Évariste Galois (1811-1832). Évariste Galois nasceu no dia 25 de outubro de 1811, na pequena cidade de Bourg-la-Reine, próxima a Paris, no seio de uma família culta e liberal. Filho de pai republicano e mãe erudita e dotada de elevado senso ético. Em 1823, Évariste foi mandado para o colégio Louis-le-grand, em Paris, onde teve início a sua escolaridade formal. Em 1825, aos 14 anos, Galois teve seu primeiro contato com a matemática, matéria que acabara virando sua grande paixão.

Em 1828, incidindo curiosamente em erro análogo ao de Abel anos antes, Galois acreditou ter encontrado a solução geral para as equações do 5^o grau.

Ele publicou vários trabalhos como por exemplo a demonstração de um teorema sobre frações contínuas periódicas em 1829, incentivado pelo seu professor Louis-Paul-Émile Richard.

Galois já havia escrito um trabalho muito mais importante, que apresentou à Academia de Ciências de Paris em 25 de maio e novamente em 1^o de junho desse mesmo ano, chamado: Pesquisas sobre as equações algébricas de grau primo. Não completara ainda 18 anos e já realizara descobertas da maior envergadura naquilo que mais tarde seria conhecida como a Teoria dos Grupos.

Ele desenvolveu uma teoria, que hoje é conhecida como Teoria de Galois, e utilizou esta teoria para demonstrar o teorema de Abel-Ruffini, bem como para especificar em quais casos em grau maior ou igual a cinco as equações algébricas possuem solução em termos de radicais. Foi Galois que, em seus estudos, deu origem à Teoria dos Grupos, estabelecendo conexões entre grupos e solubilidade de equações algébricas.

A Teoria de Galois é uma das grandes teorias matemáticas e que até hoje é estudada com afinco pelos matemáticos atuais, mas neste trabalho não entraremos nos detalhes técnicos da Teoria de Galois, responsável pelos resultados referentes a equações de grau maior ou igual a cinco.

3 Equações Quadráticas

3.1 Considerações Teóricas

As equações do segundo grau são abordadas na história da matemática desde a época dos egípcios, babilônios, gregos, hindus e chineses. Os primeiros registros vêm dos Mesopotâmicos e dos Egípcios que resolviam alguns casos, sob a forma de receitas. Resolviam problemas que podem ser transformados em equações com formatos bem específicos, como no exemplo abaixo, retirado de [1]:

"De um enxame de abelhas, tome a metade, depois a raiz. Este grupo extrai o pólen de um campo de jasmins. Oito nonos do todo flutuam pelo céu. Uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma flor de Lótus. Atraído pela fragrância, ele tinha se deixado aprisionar na noite anterior. Quantas abelhas havia no enxame?

Apenas com o francês Viéte, no início da idade moderna, que é introduzido o simbolismo algébrico, forma pela qual reconhecemos atualmente as equações do segundo grau. Somente a partir daí, é que estavam criadas todas as condições para o surgimento de uma fórmula geral para todas as equações de 2^{o} grau, então a forma geral da equação do 2^{o} grau ficou representada por $ax^2+bx+c=0$, com $a\neq 0$.

O fundamento usado para obter esta fórmula foi buscar uma forma de reduzir a equação do segundo grau a uma do primeiro grau, através da extração de raízes quadradas de ambos os membros da mesma como mostraremos abaixo:

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow 4a^2x^2+4a\cdot bx+4a\cdot c=4a\cdot 0$$
$$\Leftrightarrow 4a^2x^2+4abx+4ac=0 \Leftrightarrow 4a^2x^2+4abx+4ac+b^2=0+b^2$$
$$\Leftrightarrow (4a^2x^2+4abx+b^2)+4ac=b^2 \Leftrightarrow (4a^2x^2+4abx+b^2)=b^2-4ac$$

Chamando de $\Delta=b^2-4ac$, teremos que $(2ax+b)^2=\Delta$

Então $2ax+b=\pm\Delta \Leftrightarrow x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Com isso obtemos uma fórmula fechada que nos fornece as raízes da equação em função dos coeficientes da equação, conhecida no Brasil como fórmula de Bháskara.

Sabemos hoje, pelo conhecido Teorema Fundamental da Álgebra, provado em 1799 pelo alemão K. F. Gauss (1777-1855) em sua tese de doutorado e que veio a ser considerada a primeira prova correta do Teorema Fundamental da Álgebra, que qualquer polinômio $p(z)$ com coeficientes complexos de uma variável e de grau $n \geq 1$ tem alguma raiz complexa, daremos uma demonstração desse teorema no capítulo 5 dessa monografia.

3.2 Em sala de aula

3.2.1 Problemas que recaem em equações quadráticas e seus objetivos didáticos

Consideramos bastante motivador introduzir esse assunto através de situações problema que conduzem a equações de segundo grau, bem como aguardar os alunos perceberem que os métodos utilizados para resolver equações de grau 1 não são suficientes no caso de grau 2. Só assim, o aluno estaria receptivo a novas técnicas que conduzem à fórmula radical, conhecida como de Bháskara. Após tornarem-se fluentes na resolução de equações quadráticas, consideramos importante apresentar problemas que recaem em equações quadráticas relacionados a outros assuntos: trigonometria, logaritmos, etc. Seguem alguns exemplos com os objetivos acima.

Começaremos com dois problemas que aparecem na forma de receitas, um deles retirado de [1] *e o outro proposto pelo matemático Bháskara, apresentados nessa ordem.*

1) De um enxame de abelhas, tome a metade, depois a raiz. Este grupo extrai o pólen de um campo de jasmins. Oito nonos do todo flutuam pelo céu. Uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma flor de Lótus. Atraído pela fragrância, ele tinha se deixado aprisionar na noite anterior. Quantas abelhas haviam no enxame?

RESOLUÇÃO: Chamando o total de abelhas de x, então sua metade seria $\frac{x}{2}$ e a sua raiz $\sqrt{\frac{x}{2}}$, os oito nonos do todo flutuam pelo céu será representado por $\frac{8x}{9}$.

Com essas informações, obtemos:

$$\sqrt{\frac{x}{2}}+\frac{8x}{9}+2=x\Rightarrow\sqrt{\frac{x}{2}}=x-\frac{8x}{9}-2\Rightarrow\sqrt{\frac{x}{2}}=\frac{x}{9}-2$$

$$\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2=\left(\frac{x-18}{9}\right)^2\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{x^2-36x+324}{81}$$

$$2x^2-153x+648=0$$

$$\Delta=(-153)^2-4\cdot 2\cdot(648)\Rightarrow\Delta=18225$$

$$x=\frac{-(-153)\pm\sqrt{18225}}{2\cdot 2}\Rightarrow x=\frac{153\pm 135}{4}\Rightarrow x=72\quad\text{ou}\quad x=\frac{9}{2}$$

Então nossa resposta será igual a 72 abelhas.

Neste problema buscamos desenvolver no aluno a habilidade de equacioná-lo convenientemente, que é sua maior dificuldade. Nesse sentido, equacionaremos agora o mesmo problema de modo a simplificar sua resolução.

Vamos chamar o total de abelhas no enxame de $2x^2$, pois sua metade é x^2 e depois de extrairmos a raiz, chegaremos a x. Os oito nonos do todo será representado por, $\frac{8}{9}\cdot 2x^2$. Chegamos assim na seguinte equação quadrática:

$$\frac{8}{9}\cdot(2x^2)+x+2=2x^2\Rightarrow 16x^2+9x+18=18x^2\Rightarrow 2x^2-9x-18=0$$

$$\Delta=(-9)^2-4\cdot 2\cdot(-18)\Rightarrow\Delta=225$$

$$x=\frac{-(-9)\pm\sqrt{225}}{2\cdot 2}\Rightarrow x=\frac{9\pm 15}{4}\Rightarrow x=6\quad\text{ou}\quad x=-\frac{3}{2}$$

Como chamamos o total de $2x^2$, encontramos um total de 72 abelhas, mas com uma equação do segundo grau mais simples.

Essa discussão de como introduzir e tratar variáveis na resolução de problemas de matemática é pertinente não apenas neste contexto, sempre deve ser tratada, como tudo o que desmistifica e esclarece os conceitos matemáticos.

2) Um bando barulhento de macacos se divertia. Um oitavo ao quadrado brincava no bosque. Doze, os que sobraram, gritavam ao mesmo tempo, no alto da colina verdejante. Quantos eram os macacos no total? Esse problema foi proposto pelo próprio Bháskara.

RESOLUÇÃO: Naturalmente o aluno vai chamar o total de x, então teremos a seguinte equação:

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x \Rightarrow \frac{x^2}{64} + 12 = x \Rightarrow x^2 - 64x + 768 = 0$$

$$\Delta = (-64)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (768) \Rightarrow \Delta = 1024$$

$$x = \frac{-(-64) \pm \sqrt{1024}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{64 \pm 32}{2} \Rightarrow x = 48 \quad \text{ou} \quad x = 16$$

Teremos dois bandos distintos de macacos, um com 16 macacos ou outro com 48 macacos. Usando a observação ao final do exemplo anterior, simplifica-se as contas se designarmos o total de macacos por $8x$.

$$x^2 + 12 = 8x \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (12) \Rightarrow \Delta = 16$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{8 \pm 4}{2} \Rightarrow x = 6 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

Quando $x = 2$ teremos um bando com 16 macacos e quando $x = 6$ teremos outro bando com 48 macacos.

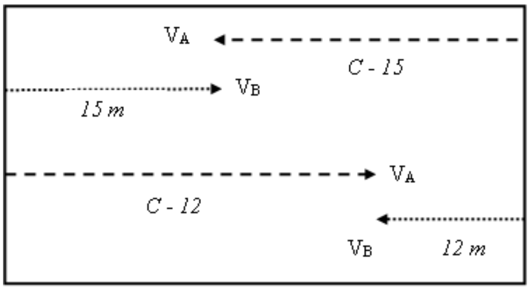
O próximo problema foi adaptado do vestibular da UFMG para ser resolvido como uma questão discursiva e está relacionado com a cinemática escalar e sua solução recai numa equação do segundo grau.

3) (UFMG) Dois nadadores posicionados em lados opostos de uma piscina retangular e em raias adjacentes, começam a nadar em um mesmo instante, com velocidades constantes. Sabe-se que, nas duas primeiras vezes em que ambos estiveram lado a lado, eles nadavam em sentidos opostos: na primeira vez, a 15 m de uma borda e, na segunda vez, a 12 m da outra borda. Qual é o comprimento dessa piscina em metros?

RESOLUÇÃO:

Esse é um problema onde precisamos fazer um bom desenho da situação e criarmos um referencial para conseguirmos equacionar da melhor maneira a situação descrita. Precisamos introduzir algumas variáveis, como o tempo passado até os nadadores ficarem lado a lado, bem como a velocidade de cada nadador, e finalmente trabalhar com essas variáveis para chegarmos ao comprimento C da piscina, que é o objetivo final do problema.

Denotando por C o comprimento dessa piscina, temos dois momentos distintos representados na figura abaixo, o do primeiro encontro a 15 m de uma borda, após um tempo t_1 depois do início, e o outro encontro a 12 metros da outra borda, ocorridos após um tempo t_2 depois do primeiro encontro.



Teremos então as seguintes equações:

$$\begin{cases} V_A = \dfrac{C-15}{t_1} \\ \\ V_B = \dfrac{15}{t_1} \end{cases} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{C-15}{15} \text{ e } \begin{cases} V_A = \dfrac{15+C-12}{t_2} \\ \\ V_B = \dfrac{C-15+12}{t_2} \end{cases} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{C+3}{C-3}.$$

Portanto teremos: $\dfrac{C-15}{15} = \dfrac{C+3}{C-3} \Rightarrow C^2 - 33C = 0 \Rightarrow C = 0$ ou $C = 33,$ mas como $C \neq 0$ teremos $C = 33$ metros.

Os dois próximos problemas são tipos clássicos que aparecem para os alunos durante o 9^{o} ano do ensino fundamental. Geralmente, a maior dificuldade encontrada pelos alunos está relacionada com a escolha de quais serão as variáveis que devem ser introduzidas para conseguir chegar ao objetivo final que é a solução do problema. Geralmente, as variáveis que devem ser introduzidas surgem da pergunta do problema, como perceberemos abaixo.

4) As despesas com uma festa de formatura de uma classe totalizaram $R\$2.800,00$ e serão igualmente pagas por um grupo de alunos. Cinco alunos desistiram da festa, porque de última hora resolveram viajar, o que obrigou os restantes a pagar, além da sua parte, um adicional de $R\$10,00$ cada um. Qual é o total de alunos dessa classe?

RESOLUÇÃO:

Nesse caso precisamos encontrar o total de alunos, mas para isso precisamos de uma variável auxiliar que será o valor a ser pago por cada aluno antes da desistência dos 5 alunos.

Denotando por v o valor que cada aluno pagaria inicialmente e por n o número total de alunos dessa classe, teremos que $v = \dfrac{2800}{n}$.

Como 5 alunos desistiram da festa e cada aluno restante teve que pagar $R\$10,00$ a mais do que iria pagar, teremos $v + 10 = \dfrac{2800}{n-5}$

Resolvendo o sistema de equações que acabamos de formar, teremos:

$v+10=\frac{2800}{n-5} \Rightarrow \frac{2800}{n}+10=\frac{2800}{n-5}$, multiplicando ambos os membros por $n\cdot(n-5)$ teremos:

$2800n-14000+10n^2-50n=2800n \Rightarrow 10n^2-50n-14000=0$

Finalmente dividindo os dois lados da igualdade por 10, teremos:

$n^2-5n-14000=0$

$\Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot(-14000) \Rightarrow \Delta=5625$

$n=\frac{5\pm\sqrt{5625}}{2\cdot 1} \Rightarrow n=\frac{5\pm 75}{2} \Rightarrow n=40$ ou $n=-35$

Como n é o número de alunos da classe, então teremos $n=40$.

5) Uma transportadora entrega, com caminhões, 60 toneladas de açúcar por dia. Devido a problemas operacionais, em certo dia cada caminhão foi carregado com 500 kg a menos que o usual, tendo sido necessário, naquele dia, alugar mais 4 caminhões. Quantos caminhões foram necessários naquele dia e quantos quilos transportou cada caminhão naquele dia.

RESOLUÇÃO:

Nesse caso queremos saber quantos caminhões foram necessários naquele dia e quantos quilos transportou cada caminhão naquele dia, portanto começaremos o problema proposto criando as variáveis relacionadas aos dias normais de trabalho, tomando o cuidado depois para transportar nossas respostas para o dia em que ocorreram os problemas operacionais que levaram a mudança do número de caminhões e do número de quilogramas transportados por cada caminhão.

$$\begin{cases} n = \text{número de caminhões} \\ k = \text{quantidade de toneladas transportadas por caminhão} \end{cases}$$

Temos que: $\begin{cases} n\cdot k=60 \Rightarrow k=\frac{60}{n} \\ (n+4)\cdot(k-0,5)=60 \end{cases}$

$nk - 0,5n + 4k - 2 = 60 \Rightarrow 60 - \dfrac{n}{2} + 4k - 2 = 60 \Rightarrow 4k - 2 = \dfrac{n}{2}$

$\Rightarrow 8k - 4 = n \Rightarrow 8 \cdot \dfrac{60}{n} - 4 = n \Rightarrow n^2 + 4n - 480 = 0$

$n^2 + 4n - 480 = 0$

$\Delta = \dfrac{(4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-480)}{2 \cdot 1} \Rightarrow \Delta = 1936$

$n = \dfrac{-4 \pm \sqrt{1936}}{2} \Rightarrow n = \dfrac{-4 \pm 44}{2} \Rightarrow n = 20$ ou $n = -24$

Note que mesmo querendo a quantidade de quilogramas transportadas por cada caminhão naquele dia, nós criamos a variável k, porém em toneladas, para facilitar as nossas contas e sabendo também que naquele dia foram transportadas $k - 0,5$ toneladas.

Como o número de caminhões é igual a 20, voltando na equação $k = \dfrac{60}{n}$, encontramos então $k = 3$ toneladas, ou seja 3.000 kg, portanto concluímos que o número de quilogramas transportados naquele dia foi igual a 2.500 kg.

Nos próximos três exemplos abaixo usaremos a técnica da mudança de variável para transformarmos a equação a ser resolvida em uma equação quadrática para facilitar a resolução do problema. Em alguns casos essas substituições são imediatas, como na primeira equação, mas em alguns casos não são tão obvias como nos dois casos seguintes.

6) Determine todos os números reais x tais que $2 \cdot \log^2(x) - 5 \cdot \log(x) + 2 = 0$

RESOLUÇÃO: Fazendo $y = \log(x)$, encontramos $2y^2 - 5y + 2 = 0$.

$2y^2 - 5y + 2 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow \Delta = 9$

$y = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} \Rightarrow y = \dfrac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow y = 2$ ou $y = \dfrac{1}{2}$

Para finalizar precisamos voltar a variável x, então teremos que:

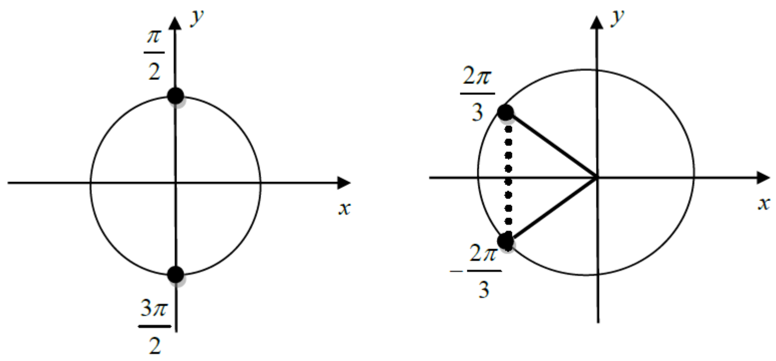
$$\begin{cases} y = 2 \Rightarrow \log x = 2 \Rightarrow x = 10^2 \Rightarrow x = 100 \\ y = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \log x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 10^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \sqrt{10} \end{cases}$$

Portanto teremos $x = 100$ ou $x = \sqrt{10}$

7) Resolva a equação $1+\cos(x)+\cos(2x)=0$. sendo x um número real.

RESOLUÇÃO: Lembrando que $\cos(2x)=\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x)=2\cos^2(x)-1$, então teremos $2\cos^2(x)+\cos(x)=0$, fazendo $y=\cos(x)$, teremos a equação $2y^2+y=0$, na variável y, portanto $2y^2+y=0 \Rightarrow y\cdot(2y+1)=0 \Rightarrow y=0$ ou $y=-\dfrac{1}{2}$

Para finalizar precisamos voltar para a variável x, então teremos que:



$$\begin{cases} y=0 \Rightarrow \cos(x)=0 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z} \\ y=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos(x)=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Teremos o conjunto solução $S=\left\{x\in\mathbb{R} : x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi \quad \text{ou} \quad x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\right\}$

8) Determine todos os números reais x tais que $4^x+6^x=2\cdot 9^x$.

RESOLUÇÃO:

Reescrevendo a equação $4^x+6^x=2\cdot 9^x$ como $(2^x)^2+2^x\cdot 3^x=2\cdot(3^x)^2$, percebemos que temos duas possíveis mudanças de variável para fazer, podemos fazer $y=2^x$ e $z=3^x$, mas assim teríamos uma equação com duas variáveis diferentes. Vamos resolver essa equação de uma outra maneira mas depois voltaremos a esse ponto e resolveremos com essas duas variáveis diferentes.

O truque que podemos usar para fazermos uma única mudança de variável será dividir os dois lados da equação por 3^{2x}, pois $3^{2x}\neq 0$, onde obteremos a seguinte equação

$$\frac{2^{2x}}{3^{2x}}=\frac{2^x\cdot 3^x}{3^{2x}}=2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+\left(\frac{2}{3}\right)^{x}-2=0$$

Fazendo então a mudança de variável $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x}=y$, teremos uma equação do 2^o grau, mas agora na variável y, e representada por $y^2+y-2=0$.

$y^2 + y - 2 = 0$

$\Delta = (1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) \Rightarrow \Delta = 9$

$y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow y = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow y = 1$ ou $y = -2$

Para finalizar precisamos voltar para a variável x, mas como $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x > 0$ para todo x real, então teremos que $y = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \left(\dfrac{2}{3}\right)^0 \Rightarrow x = 0.$

Uma solução alternativa usando fatoração, poderia ser feita da seguinte maneira:

Como $2^{2x} + 2^x \cdot 3^x = 2 \cdot 3^{2x}$, fazendo $y = 2^x$ e $z = 3^x$, teremos:

$y^2 + y \cdot z = 2z^2 \Rightarrow y^2 - z^2 + y \cdot z - z^2 = 0$

$(y+z)(y-z) + z(y-z) = 0 \Rightarrow (y+2z)(y-z) = 0$

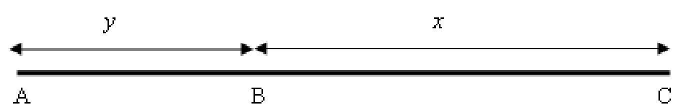
$$\begin{cases} y = z \Rightarrow 2^x = 3^x \Rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0 \\ y = -2z \Rightarrow 2^x = -2 \cdot 3^x \Rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = -2 \nexists \text{ solução.} \end{cases}$$

Os dois próximos problemas mostram situações em que o que vai ser pedido é a razão entre duas variáveis e o produto entre duas variáveis, respectivamente. Nesse tipo de problema o aluno encontra muita dificuldade pois ele sempre imagina que precisa encontrar cada uma das variáveis separadamente para depois fazer a razão ou o produto. Importante ressaltar que ele não conseguirá encontrar cada uma das variáveis separadamente, como no primeiro exemplo, e ás vezes será quase impossível descobrir as variáveis separadamente, impossível no sentido de ser muito trabalhoso, como veremos no segundo exemplo.

9) Sejam A, B e C, nessa ordem, pontos colineares de uma reta r que satisfazem a seguinte condição $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \left(\overline{BC}\right)^2$. Qual é o valor da razão $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, conhecida como razão áurea?

RESOLUÇÃO:

Observe a figura abaixo, onde os pontos A, B e C são colineares.

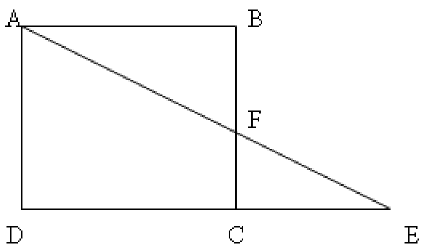


Temos que $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \left(\overline{BC}\right)^2 \Rightarrow y \cdot (x+y) = x^2 \Rightarrow xy + y^2 = x^2$ e como queremos encontrar o valor da razão $\frac{x}{y}$, então um belo truque será dividir os dois lados da equação acima por y^2, para conseguirmos criar uma equação quadrática cuja variável seja exatamente o que procuramos, ou seja, criaremos uma equação quadrática na variável $\frac{x}{y}$, a saber:

$$\begin{cases} xy + y^2 = x^2 \Rightarrow \dfrac{xy+y^2}{y^2} = \dfrac{x^2}{y^2} \Rightarrow \dfrac{xy}{y^2} + \dfrac{y^2}{y^2} = \dfrac{x^2}{y^2} \Rightarrow \dfrac{x}{y} + 1 = \dfrac{x^2}{y^2} \\ \Rightarrow \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{y}\right) - 1 = 0 \\ \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad \dfrac{x}{y} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Como sabemos que $\frac{x}{y} > 0$, então concluímos que $\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

10) Na figura abaixo temos que o quadrilátero $ABCD$ é um quadrado de lado unitário. Determine o valor do produto das medidas dos segmentos CF e CE sabendo que os pontos E, F e A são colineares, sendo F um ponto pertencente ao lado BC do quadrado $ABCD$, e que o segmento EF tem medida igual a 1.



RESOLUÇÃO:

Vamos denotar por x a medida do segmento CE e por y a medida do segmento CF, então temos que $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ e que $CE \cdot CF = xy$.

Como os triângulos CEF e DEA são semelhantes pois possuem o ângulo E em comum e $ADE = FCE = 90^{\text{o}}$ então teremos que $\frac{y}{1} = \frac{x}{x+1} \Rightarrow y = \frac{x}{x+1}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo CEF teremos que $x^2 + y^2 = 1$. Como a maioria dos alunos sempre querem descobrir quem são as variáveis x e y, naturalmente eles iriam tentar resolver o sistema $\begin{cases} y = \dfrac{x}{x+1} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ por substituição o que os levariam a equação quártica

$$x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = 1 \Rightarrow x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Como essa equação não possui raízes racionais, pois sabemos que as possíveis raízes racionais dessa equação são 1 e -1 e nenhum desses números satisfaz tal equação, então estariam diante de um problema muito complicado.

Por outro lado, sabendo que queremos encontrar o produto xy então uma outra saída será tentar encontrar uma equação quadrática cuja variável seja o que estamos procurando, analogamente ao que foi feito no exemplo anterior.

Sabemos que $y = \dfrac{x}{x+1} \Rightarrow xy + y = x \Rightarrow xy = x - y$, portanto, elevando ao quadrado os dois lados da igualdade $xy = x - y$, teremos $(xy)^2 = (x-y)^2 \Rightarrow (xy)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, mas como $x^2 + y^2 = 1$, então obteremos a equação quadrática na variável xy representado por $(xy)^2 + 2(xy) - 1 = 0$.

Resolvendo a equação, teremos $\begin{cases} (xy)^2 + 2(xy) - 1 = 0 \\ \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8 \\ xy = \dfrac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \\ xy = -1 + \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad xy = -1 - \sqrt{2} \end{cases}$

Como sabemos que $xy > 0$, então concluímos que $xy = -1 + \sqrt{2}$, resolvendo o nosso problema sem precisar encontrar os valores de x e y.

Agora, perceba que com isso concluímos que $\begin{cases} xy = \sqrt{2} - 1 \\ x - y = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$, portanto poderemos encontrar quais são os valores de x e y.

Isolando y na segunda equação e substituindo na primeira, teremos:

$$y = x - \left(\sqrt{2} - 1\right) \Rightarrow x \cdot \left[x - \left(\sqrt{2} - 1\right)\right] = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow x^2 - \left(\sqrt{2} - 1\right)x - \left(\sqrt{2} - 1\right) = 0$$

$$x^2 - \left(\sqrt{2} - 1\right)x - \left(\sqrt{2} - 1\right) = 0$$

$$\Delta = \left[-\left(\sqrt{2} - 1\right)\right]^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left[-\left(\sqrt{2} - 1\right)\right] \Rightarrow \Delta = 2\sqrt{2} - 1 \approx 1,82$$

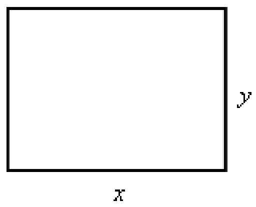
$$x = \frac{-\left[-\left(\sqrt{2} - 1\right)\right] \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2} - 1 \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$$

Lembrando que $0 < x < 1$, teremos que $x = \dfrac{\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$, encontrando assim o respectivo valor de y usando o fato de que $xy = -1 + \sqrt{2}$.

Note que nesses dez problemas propostos chegamos em equações quadráticas que sempre possuíram raízes reais. Finalizaremos essa seção com dois problemas que não possuem solução no conjunto dos números reais.

11) Quais são os valores, em metros, das dimensões de uma praça retangular cujo perímetro é igual a $16km$ e cuja área mede $32km^2$.

RESOLUÇÃO:
Observe a figura abaixo, onde x e y são as medidas dos lados da praça.



Com as informações dadas temos um sistema com duas variáveis e duas equações:

$$\begin{cases} 2x+2y=16 \\ xy=32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=8 \\ xy=32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=8-x \\ xy=32 \end{cases} \Rightarrow x\cdot(8-x)=32$$

$$\Rightarrow 8x-x^2=32 \Rightarrow x^2-8x+32=0$$
$$\Delta=(-8)^2-4\cdot 1\cdot 32 \Rightarrow \Delta=-64$$

Como não existem números reais que satisfazem a equação acima, concluímos que essa praça não existe.

12) Quais são os pontos de interseção da reta de equação $4x+y-2=0$ com a parábola de equação $y=x^2-6x$.

RESOLUÇÃO:
Para encontrarmos os pontos de interseção das duas curvas dadas, precisamos encontrar, se existirem, os valores de x para os quais os respectivos valores de y serão iguais, ou seja, precisamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} -4x+y+2=0 \\ y=x^2+6x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4x-2 \\ y=x^2+6x \end{cases} \Rightarrow 4x-2=x^2+6x \Rightarrow x^2+2x+2=0$$

$$x^2+2x+2=0$$
$$\Delta=2^2-4\cdot 1\cdot 2 \Rightarrow \Delta=-4$$

Como essa equação não possui solução real, concluímos que essa reta e essa parábola não se intersectam.

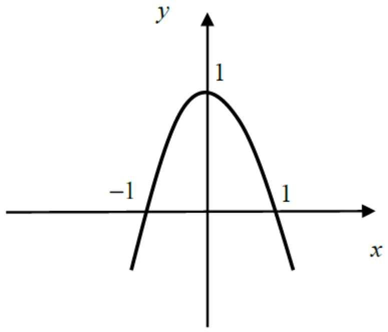
3.2.2 Representação gráfica de funções de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{R}$

As equações que não possuem raízes reais possuem raízes complexas, pelo Teorema Fundamental da Álgebra. Quando tratamos de funções quadráticas sem raízes reais, como poderíamos visualizar as complexas, pelo menos em alguns casos particulares? Esse tipo de estudo possibilita discutir com os alunos, obviamente em termos elementares, algumas das semelhanças e diferenças entre funções reais e complexas.

No estudo dos números complexos em si, de que não trataremos neste trabalho, sua bela geometria deve ser enfatizada, como o significado geométrico de multiplicação de um número complexo por um complexo unitário como uma rotação, a sua soma, como soma de vetores (pares ordenados de $\mathbb{R}^2$), etc. Nesta seção, nos limitaremos a apresentar alguns gráficos de funções de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{R}$. Deve-se deixar claro para o estudante a impossibilidade de gráficos de funções de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$. Os exemplos tratados abaixo foram adaptados do excelente livro Matemática Aplicada - J.Jakubovic et Al- Editora Moderna [6], cuja primeira e, infelizmente, última edição se deu na década de 1980.

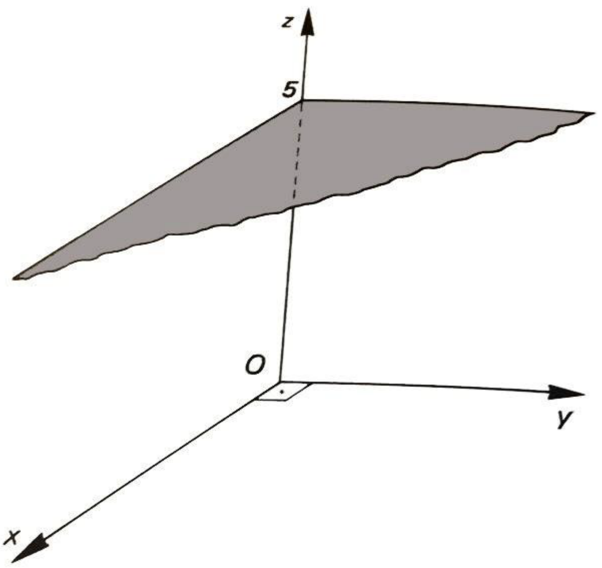
Conhecidos os números complexos, poderemos agora encontrar o lugar onde poderemos representar os zeros de funções de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{R}$. Para isso, vamos fazer algumas considerações sobre funções definidas no conjunto dos complexos $(\mathbb{C})$ com imagem no conjunto dos números reais $(\mathbb{R})$.

De um modo geral, para construir o gráfico de uma função real de variável real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dado por $y = f(x)$, utilizamos o plano de coordenadas retangulares: os valores da variável x são marcados no eixo das abscissas, e os de y no eixo das ordenadas, conforme exemplo abaixo, onde $f(x) = -x^2 + 1$.

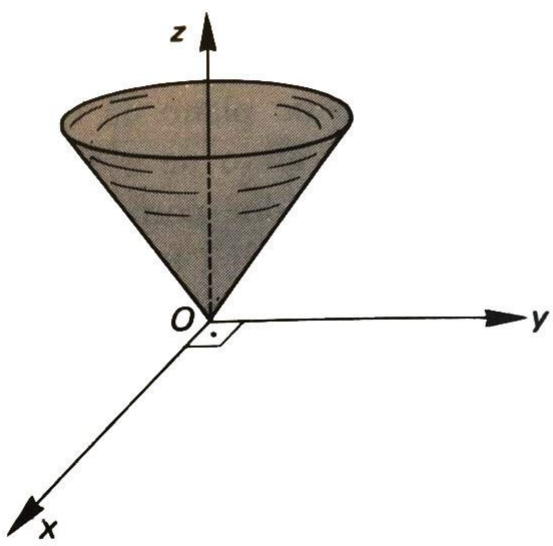


Agora vamos explorar a função real de variável complexa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, onde temos que para cada $z = (x, y)$ pertencente ao plano complexo, associamos o número real $f(z)$. Representamos geometricamente o par $(z, f(z))$ pelo ponto P de $\mathbb{R}^3$, definido por $P = (x, y, f(z))$. O conjunto de tais pontos é definido como sendo o gráfico de f.

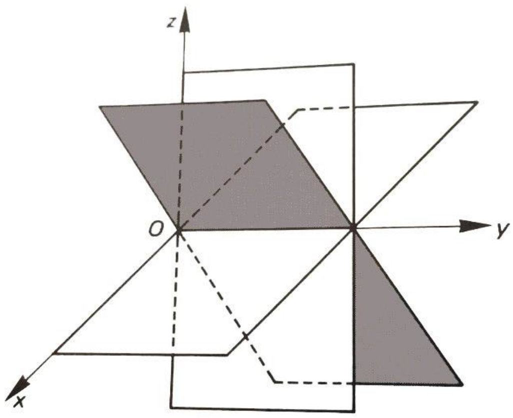
EXEMPLO 1: Considere : $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ uma função constante definida por $f(z) = 5$, ou seja, a cada elemento $z = (x, y)$ do domínio, associamos o número real 5. Representando geometricamente os pontos $P = (x, y, 5)$ do R^3 teremos um plano paralelo ao plano complexo passando no eixo das cotas (eixo z) no ponto 5, conforme figura abaixo, retirada de [6].



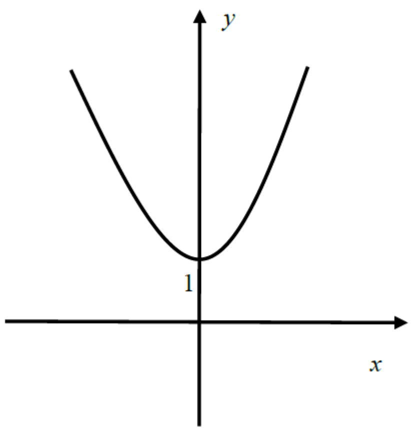
EXEMPLO 2: Considere $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, ou seja, a cada elemento $z = (x, y)$, do domínio, associamos o número real $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Representando geometricamente os pontos $P = \left(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}\right)$ do $\mathbb{R}^3$ teremos como gráfico de f um cone reto com o vértice na origem, conforme figura abaixo, retirada de [6].



EXEMPLO 3: Considere $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(z) = Re(z)$, ou seja, a cada elemento $z = (x, y)$ do domínio, associamos o número real $x = Re(z)$. Representando geometricamente os pontos $P = (x, y, z)$ do $\mathbb{R}^3$, teremos um plano $z = x$, conforme a figura abaixo retirada de [6]:



EXEMPLO 4: Abaixo temos o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2 + 1$. Qual seria o motivo pelo qual este gráfico não apresenta as raízes dessa função?



A resposta é muito simples pois as raízes dessa função são os números imaginários $\pm i$,e neste gráfico estão marcadas apenas os valores reais assumidos pela variável real x.

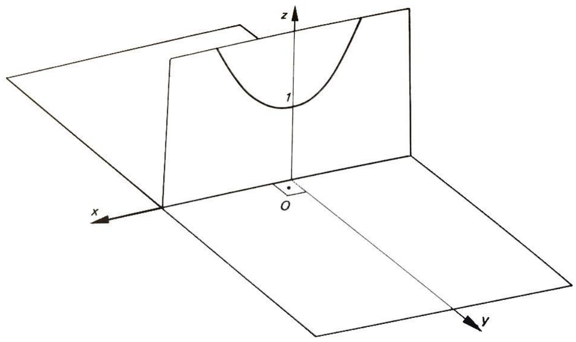
Para melhorarmos a nossa resposta, ampliaremos a nossa função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, de modo que a antiga variável real independente x também assuma alguns valores imaginários, por isso a variável independente x vai ser trocada pela variável z, mas tomando cuidado com a variável dependente y que será denotada agora por w, ou seja, w será uma função das variáveis x e y, que são números reais e $z = x + yi$.

Assim construímos a função $f:\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{R}$, onde a cada z do domínio, associaremos um número w, tal que $w=z^2+1$. Estamos interessados em encontrar todos os complexos z tais que $w=(x+yi)^2+1=(x^2-y^2+1)+(2xy)i$ seja um número real, ou seja, queremos que $Im(w)=0$, ou seja, $2xy=0\Rightarrow x=0$ ou $y=0$.

Notamos que quando $x=0\Rightarrow z=yi$ e quando $y=0\Rightarrow z=x$, ou seja, a variável dependente w assumirá valores reais quando atribuirmos à variável independente z um valor real ou um valor imaginário puro.

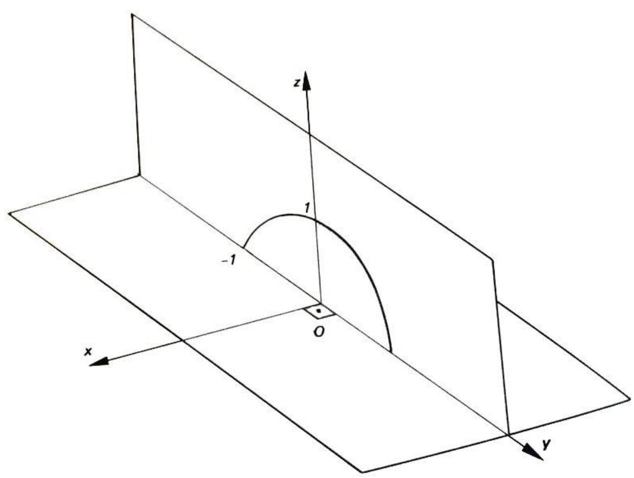
Com isso teremos que considerar dois casos:

1^o CASO) Sendo $y=0\Rightarrow z=x\Rightarrow w=x^2+1$, esse é o caso mais simples, o gráfico foi construído anteriormente, mas o faremos agora no espaço. Nesse caso a variável independente z assumiu apenas valores reais. Figura retirada de [6].

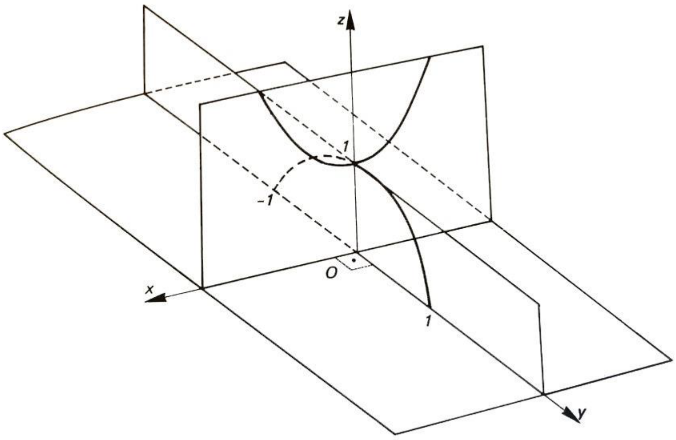


2^o CASO) Sendo $x=0\Rightarrow z=yi\Rightarrow w=-y^2+1$, esse gráfico encontra-se abaixo, note que nesse caso a variável independente z assumiu apenas os valores imaginários puros.

Faremos esse gráfico no espaço. Figura retirada de [6].



Considere agora um conjunto D formado apenas por todos os números reais e por todos os números imaginários puros que correspondem aos eixos coordenados x e y. Definimos a função $f : D \to \mathbb{R}$ onde $f(z) = z^2 + 1$, sendo $z \in D$. O gráfico dessa função será obtido juntando os dois gráficos feitos anteriormente. Figura retirada de [6].



Esse é o gráfico da função $f(z) = z^2 + 1$, onde $z \in D$. Portanto percebemos agora onde estão as raízes complexas, quando o gráfico é representado no espaço tridimensional.

No caso mais geral temos que dada uma função complexa de variável complexa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por $w = f(z)$, podemos trabalhar com ela algebricamente pois se fossemos desenhar o gráfico dessas funções percebemos que:

1^{o}) Para representar apenas os valores da variável independente z, que é um número complexo, precisamos do plano de *Argand-Gauss*, pois esse possui duas dimensões, o mesmo ocorrendo para representar a imagem dessa função.

2^{o}) Portanto, para desenhar o gráfico dessa função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ precisaríamos de quatro dimensões, o que o torna inviável, pois o espaço físico em que vivemos possui apenas três dimensões.

Dessa forma, a opção para visualizarmos o comportamento da função graficamente, deveremos utilizar dois planos complexos: um para o domínio de f e outro para o contradomínio.

Ilustraremos no próximo exemplo esse tipo de análise fornecendo um argumento geométrico para justificar o Teorema Fundamental da Álgebra em um caso particular acessível ao estudante do Ensino Médio. O argumento pode ser generalizado para polinômios quaisquer e pode ser encontrado em [9]. Posteriormente, no capítulo 5, apresentaremos uma demonstração rigorosa, embora elementar, do referido teorema.

EXEMPLO 5: Um argumento geométrico para compreender o Teorema Fundamental da Álgebra:

Todo polinômio complexo de grau maior ou igual a 1 possui pelo menos uma raiz complexa.

Devido à continuidade das funções polinomiais, ao longo de um intervalo fechado e limitado, um polinômio assume todos os valores situados entre os valores assumidos nas extremidades do intervalo, que é o Teorema do Valor Intermediário, devido à completeza do corpo ordenado dos reais.

Mais geralmente, temos o resultado relativo às funções contínuas de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$, que abordaremos aqui de forma intuitiva e que afirma que a imagem de uma curva contínua e fechada deve ser uma outra curva contínua e fechada, embora não necessariamente uma curva simples, podendo cruzar a si própria.

Vamos assumir, então, a continuidade da função polinomial $p:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $p(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_2z^2+a_1z+a_0$, com coeficientes $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{C}$, e o nosso objetivo será mostrar que existe um $z_0\in\mathbb{C}$ tal que sua imagem pela função p seja igual a zero, ou seja, $p(z_0)=0$. A ideia para verificar isso será abordada no caso da função polinomial $p(z)=z^2+1$ e não difere, em essência, do argumento para o caso geral.

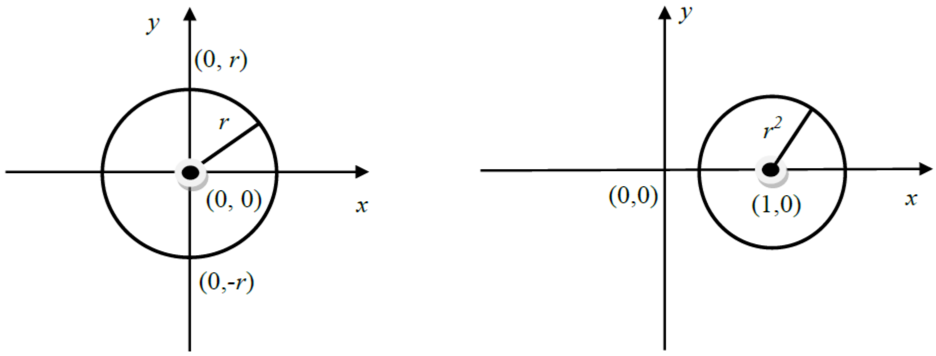
Vejamos, então, qual seria a imagem de um círculo com centro na origem e raio r pela função $p(z)=z^2+1$, que sabemos que tem como raízes os complexos i e $-i$.

Tal círculo tem por equação a igualdade $z=r\cdot(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha)$, com α entre 0 e 2π. Temos, então, que:

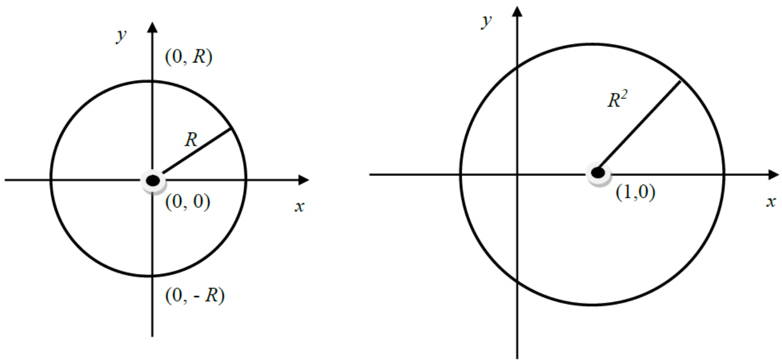
$$p(z)=r^2\cdot(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha)^2+1=r^2(\cos 2\alpha+i\,\text{sen}\,2\alpha)+1$$

Essa expressão deixa claro que a imagem do círculo com centro na origem e raio r é o círculo de raio r^2 com centro no ponto $(1,0)$ e percorrido duas vezes no sentido anti-horário.

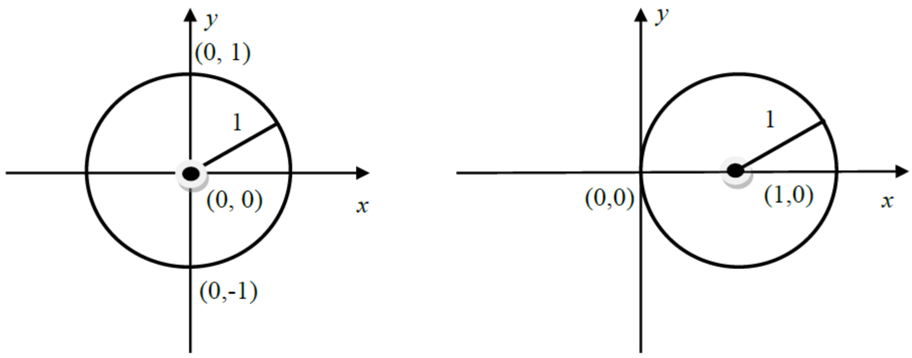
Perceba que as imagens dos círculos de raios r tais que $0 < r < 1$ serão curvas a direita do eixo das ordenadas, sempre centrados no ponto $(1,0)$ e com $0 < r^2 < 1$.



Perceba também que as imagens dos círculos de raios $R > 1$ serão curvas centrados no ponto $(1,0)$ e com $R^2 > 1$.



Pela continuidade da função p teremos um círculo cuja imagem vai passar pela origem, e esse será o círculo de raio unitário, portanto visualizamos geometricamente que existe z_0 tal que $p(z_0) = 0$, onde nesse caso são os pontos $z_0 = i$ e $z_0 = -i$.



Note que o argumento de cada ponto $z = x + yi$ do domínio é duplicado pela função $p(z) = z^2 + 1$, então começando pelo ponto $(1,0) = 1 + 0i$ temos como imagem o ponto $(2,0) = 2 + 0i$, e estamos no início da primeira volta, então quando passamos pelo ponto $(0,1) = 0 + i$ teremos como imagem o ponto $(0,0) = 0 + 0i$, ou seja, a imagem passa pela origem na primeira volta. Quando passamos pelo ponto $(-1,0) = -1 + 0i$ temos como imagem o ponto $(2,0) = 2 + 0i$, e estamos no início da segunda volta, então ao passarmos pelo ponto $(0,-1) = 0 - i$ teremos como imagem o ponto $(0,0) = 0 + 0i$, ou seja, a imagem passa pela origem, agora na segunda volta. Encontramos assim os dois valores de $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que sua imagem pela função p seja igual a zero, ou seja, $p(z_0) = 0$.

4 Equações Cúbicas

4.1 Considerações teóricas

Num livro publicado em 1545, Cardano (1501–1576) mostra que, sob certas condições, uma das raízes da equação de 3^{o} grau, desprovida do termo em x^2, escrita como $x^3+px+q=0$, é dada por:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Sabe-se que Cardano não foi o descobridor desta fórmula. Ele próprio admitiu em seu livro que a mesma lhe havia sido sugerida pelo matemático Tartaglia. O que Cardano não mencionou é que ele a obteve sob juramento de não revelar o segredo a ninguém, pois Tartaglia pretendia firmar sua reputação matemática publicando a dedução daquela fórmula como ponto principal do seu tratado sobre Álgebra. Cardano, no entanto, deslealmente se antecipou e seu livro, contendo não só a resolução da equação do 3^{o} grau, mas também a do 4^{o} grau, causou grande impacto entre os matemáticos de sua época, e é considerado, até hoje, um marco no desenvolvimento da matemática.

Faremos agora uma demonstração rigorosa da fórmula de Cardano-Tartaglia.

Dividindo por a ambos os membros da equação $ax^3+bx^2+cx+d=0$ (1), $a\neq 0$ obtemos:

$x^3+\left(\frac{b}{a}\right)x^2+\left(\frac{c}{a}\right)x+\left(\frac{d}{a}\right)=0$, completando um cubo, teremos:

$$x^2+3\left(\frac{b}{3a}\right)x^2+3\left(\frac{b}{3a}\right)^2x+\left(\frac{b}{3a}\right)^3+\left(\frac{c}{a}\right)x-3\left(\frac{b}{3a}\right)^2x+\left(\frac{d}{a}\right)-\left(\frac{b}{3a}\right)^3=0$$

$$\left[x+\frac{b}{3a}\right]^3+\left[\frac{c}{a}-3\left(\frac{b}{3a}\right)^2\right]x+\frac{d}{a}-\left(\frac{b}{3a}\right)^3=0$$

Fazendo a substituição de variável $y = x + \dfrac{b}{3a}$ na última equação, então teremos:

$$y^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)\left(y - \frac{b}{3a}\right) + \left(\frac{d}{a}\right) - \left(\frac{b}{3a}\right)^3 = 0$$

$$\Rightarrow y^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right)\left(y - \frac{b}{3a}\right) + \left(\frac{d}{a}\right) - \left(\frac{b}{3a}\right)^3 = 0$$

$$y^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right)y + \left(\frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{b^3}{9a^3} - \frac{b^3}{27a^3}\right) = 0 \Rightarrow y^3 + py + q = 0 \quad (2)$$

onde $p = \dfrac{3ac - b^2}{3a^2}$ e $q = \dfrac{d}{a} - \dfrac{bc}{3a^2} + \dfrac{b^3}{9a^3} - \dfrac{b^3}{27a^3} = \dfrac{27a^2d + 2b^3 - 9abc}{27a^3}$

Estamos agora com uma equação do 3º grau sem o termo de grau dois, portanto sabendo a solução da equação (2), chegaremos as soluções da equação (1).

Introduziremos duas variáveis u e v, tais que $y = u + v$, na equação (2). Obtemos:

$$y^3 + py + q = 0 \Rightarrow (u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \Rightarrow u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u+v) + q = 0$$

$$\Rightarrow u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0 \Rightarrow u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q = 0$$

A condição $3uv + p = 0$ acarreta $u \cdot v = -\dfrac{p}{3}$ e $u^3 + v^3 = -q$. Como a primeira dessas equações equivale a $u^3 \cdot v^3 = -\dfrac{p^3}{27}$, vemos que u^3 e v^3 são as soluções da equação quadrática seguinte $z^2 + qz - \dfrac{p^3}{27} = 0$.

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0 \Rightarrow z = -\frac{q}{2} \pm \frac{\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \Rightarrow z = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Como as raízes dessa equação são u^3 e v^3, temos que:

$$\begin{cases} u^3 = -\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}} \\[2ex] v^3 = -\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}} \\[2ex] v = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = u + v \Rightarrow y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \text{ com } u \cdot v = -\frac{p}{3}.$$

A fórmula acima deve ser compreendida da seguinte forma: a cada uma das três raízes cúbicas de u^3, somamos aquela raiz cúbica de v^3, tal que $u \cdot v = -\frac{p}{3}$. Sem tal significado, a fórmula fica sem sentido, podendo significar nove expressões distintas.

Muito importante notar que a fórmula de Cardano-Tartaglia aplicada a certas situações problema foi o que realmente motivou o estudo de números complexos e não, como usualmente somos levados a pensar, a mera vontade de solucionar a equação $x^2 + 1 = 0$. De fato, há situações em que o radicando da raiz quadrada que ocorre na fórmula de Cardano-Tartaglia é negativo, levando-se a crer que a equação não admite raízes reais. No entanto, há problemas concretos que recaem em equações cúbicas as quais, através de análise independente, sabemos possuir raízes reais, mas nas quais $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ é um número negativo, conforme veremos na seção seguinte. Os matemáticos que se depararam com esse tipo de problema pela primeira vez optaram por trabalhar tais expressões sob as mesmas regras algébricas do corpo dos reais, mais a suposição da existência de um número i cujo quadrado é -1. A forma polar dos números complexos e o plano de Argand-Gauss tornaram mais concretas as expressões do tipo $a + bi$, com a e b reais. A fórmula de Cardano-Tartaglia é de grande importância teórica, mas raramente utilizada na resolução de equações cúbicas, para as quais se utilizam métodos numéricos, como o método de Newton, da bisseção etc. $[3]$

4.2 Em sala de aula

O problema seguinte, retirado de $[6]$ tem por objetivo, conforme comentado acima, motivar o estudo de números complexos, uma vez que admite raízes reais, mas a equação cúbica que o resolve apresenta uma raiz quadrada de um número negativo.

1) Seja V_C o volume de um cubo de aresta x e seja V_P o volume de um paralelepípedo com área da base igual a 3 e altura igual a aresta do cubo. Determine o valor de x para que se tenha $V_C = V_P + 1$.

RESOLUÇÃO:

Do enunciado temos a equação $x^3 = 3x + 1 = 0 \Rightarrow x^3 - 3x - 1 = 0$, onde $a = -3$ e $b = -1$. Utilizando a fórmula de Cardano-Tartaglia, teremos:

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 1}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - 1}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}},$$

Observando as raízes quadradas de número negativos na fórmula. Por outro lado, notamos que:

$$\begin{cases} \text{Para} \quad x=1 \quad \text{teremos} \begin{cases} V_C = 1^3 = 1 \\ V_P + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4 \end{cases} \Rightarrow V_C < V_P + 1 \\ \text{Para} \quad x=2 \quad \text{teremos} \begin{cases} V_C = 2^3 = 8 \\ V_P + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7 \end{cases} \Rightarrow V_C > V_P + 1 \end{cases}$$

Portanto, para algum valor entre 1 e 2, deveríamos ter $V_C = V_P + 1$.

Essa constatação intuitiva tem sua prova rigorosa no Teorema do Valor Intermediário, que, por sua vez, é consequência da completeza do corpo dos reais. A versão desse teorema que utilizaremos aqui afirma que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais contrários, então existirá pelo menos um $\alpha \in [a,b]$ tal que $f(\alpha) = 0$. Tal fato pode ser facilmente compreendido pelos alunos, embora saibamos de sua profundidade teórica. Voltando ao problema em questão, definindo a função contínua $f(x) = x^3 - 3x - 1$, como $f(1) = -3 < 0$ e $f(2) = 1 > 0$, então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um $\alpha \in]1,2[$ tal que $f(\alpha) = 0$, ou seja, α é um zero real da função $f(x)$, portanto uma solução real da equação $x^3 - 3x - 1 = 0$.

Por outro lado, vê-se que tal solução depende do cálculo de $\sqrt{-\frac{3}{4}}$. Como a raiz real da equação existe, mas não foi obtida através da fórmula de Cardano-Tartaglia, então somos obrigados a pensar na possibilidade da existência de $\sqrt{-\frac{3}{4}}$, mas não no universo dos números reais, ou pensar na seguinte possibilidade: este caso é semelhante ao de uma equação do 2^o grau com $\Delta < 0$; logo, a equação do 3^o grau não tem raízes reais e o problema proposto não tem solução. Tal caso, como vimos, está fora de consideração.

Assim, o tratamento gradual dessa equação consiste em uma introdução motivadora ao estudo dos números complexos, conforme desenvolvido com maestria em [2]. Como não trataremos de números complexos neste trabalho, vamos diretamente à solução da equação, aplicando corretamente a fórmula resolutiva.

Como chegamos a $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$, percebemos que para resolver a equação $x^3 - 3x - 1 = 0$, devemos determinar as raízes cúbicas dos números complexos $Z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $Z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Temos que Z_1 e Z_2, possuem afixos respectivamente iguais a $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e que os seus módulos são iguais a 1.

Escrevemos esses números e na forma trigonométrica, teremos:

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\theta_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \theta_1 = Arg(Z_1) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow Z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\theta_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \theta_2 = Arg(Z_2) = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow Z_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

Calculando as raízes cúbicas dos complexos $Z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $Z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ através de sua representação geométrica, obtemos:

$$\sqrt[3]{Z_1} = \underbrace{\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}\right)}_{k=0,1,2} = \begin{cases} u_1 = \cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right) + i\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{9}\right) \\ u_2 = \cos\left(\dfrac{7\pi}{9}\right) + i\operatorname{sen}\left(\dfrac{7\pi}{9}\right) \\ u_3 = \cos\left(\dfrac{13\pi}{9}\right) + i\operatorname{sen}\left(\dfrac{13\pi}{9}\right) \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{Z_2} = \underbrace{\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{3}\right)}_{k=0,1,2} = \begin{cases} v_1 = \cos\left(\dfrac{5\pi}{9}\right) + i\operatorname{sen}\left(\dfrac{5\pi}{9}\right) \\ v_2 = \cos\left(\dfrac{11\pi}{9}\right) + i\operatorname{sen}\left(\dfrac{11\pi}{9}\right) \\ v_3 = \cos\left(\dfrac{17\pi}{9}\right) + i\operatorname{sen}\left(\dfrac{17\pi}{9}\right) \end{cases}$$

Importante observarmos que:

$$\begin{cases} \overline{u_1} = \cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right) - i\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{9}\right) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{9}\right) - i\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{9}\right) \\ \overline{u_1} = \cos\left(\dfrac{17\pi}{9}\right) - i\operatorname{sen}\left(\dfrac{17\pi}{9}\right) = v_3 \Rightarrow \overline{u_1} = v_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{u_2} = \cos\left(\dfrac{7\pi}{9}\right) - i\operatorname{sen}\left(\dfrac{7\pi}{9}\right) = \cos\left(-\dfrac{7\pi}{9}\right) - i\operatorname{sen}\left(-\dfrac{7\pi}{9}\right) \\ \overline{u_2} = \cos\left(\dfrac{11\pi}{9}\right) - i\operatorname{sen}\left(\dfrac{11\pi}{9}\right) = v_2 \Rightarrow \overline{u_2} = v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{u_3} = \cos\left(\dfrac{13\pi}{9}\right) - i\,\text{sen}\left(\dfrac{13\pi}{9}\right) = \cos\left(-\dfrac{13\pi}{9}\right) - i\,\text{sen}\left(-\dfrac{13\pi}{9}\right) \\ \overline{u_3} = \cos\left(\dfrac{5\pi}{9}\right) - i\,\text{sen}\left(\dfrac{5\pi}{9}\right) = v_1 \Rightarrow \overline{u_3} = v_1 \end{cases}$$

Sabemos que através da condição $u \cdot v = -\dfrac{p}{3}$ onde $x^3 + px + q = 0$, encontraremos quais serão os pares de raízes u e v que serão somadas para formarem cada uma dos soluções da equação inicial. Na equação $x^3 - 3x - 1 = 0$, teremos que escolher os pares u e v tais que $u \cdot v = 1$, ou seja, $u \cdot v = |u|^2 \Rightarrow u \cdot v = u \cdot u \Rightarrow v = u$.

$$\begin{cases} x_1 = u_1 + \overline{u_1} = u_1 + v_3 = \cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{9}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right) - i\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{9}\right) \\ x_2 = u_2 + \overline{u_2} = u_2 + v_2 = \cos\left(\dfrac{7\pi}{9}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{7\pi}{9}\right) + \cos\left(\dfrac{7}{\pi}9\right) - i\,\text{sen}\left(\dfrac{7\pi}{9}\right) \\ x_3 = u_3 + \overline{u_3} = u_3 + v_1 = \cos\left(\dfrac{13\pi}{9}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{13\pi}{9}\right) + \cos\left(\dfrac{13\pi}{9}\right) - i\,\text{sen}\left(\dfrac{13\pi}{9}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = u_1 + \overline{u_1} = u_1 + v_3 = 2 \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right) \approx 1,88 \\ x_2 = u_2 + \overline{u_2} = u_2 + v_2 = 2 \cdot \cos\left(\dfrac{7\pi}{9}\right) \approx -1,53 \\ x_3 = u_3 + \overline{u_3} = u_3 + v_1 = 2 \cdot \cos\left(\dfrac{13\pi}{9}\right) \approx -0,35 \end{cases}$$

Assim, encontramos três soluções reais, mas apenas uma positiva, aquela que prevíamos, pelo Teorema do Valor Intermediário, situar-se no intervalo $]1,2[$, que foi $x_1 = 2 \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right) \approx 1,88$. Note que, embora tenha aparecido $\sqrt{-\dfrac{3}{4}}$ na fórmula de Cardano- Tartaglia, os números complexos que expressam as duas raízes quadradas de $-\dfrac{3}{4}$ foram os agentes condutores para as soluções reais!

2) Resolva a equação cúbica $x^3 - 6x - 9 = 0$.

RESOLUÇÃO:

Neste exemplo queremos mostrar uma aplicação da fórmula de Cardano-Tartaglia, enfatizando quais serão os pares das raízes cúbicas que vamos escolher para encontrar cada uma das soluções da equação. Utilizando a fórmula de Cardano-Tartaglia, teremos:

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{216}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{216}{27}}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$$

Lembrando que $\begin{cases} \sqrt[3]{8} = 2 \cdot \left[\cos\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right)\right], k = 0,1,2 \\ \sqrt[3]{1} = 1 \cdot \left[\cos\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right)\right], k = 0,1,2 \end{cases}$, teremos que:

$$\sqrt[3]{8} = \begin{cases} u_1 = 2[\cos(0) + i\,\text{sen}(0)] = 2 \\ u_2 = 2\left[\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) i\,\text{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right] = -1 + \sqrt{3}i \\ u_3 = 2\left[\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) i\,\text{sen}\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)\right] = -1 - \sqrt{3}i \end{cases} \quad \text{e}$$

$$\sqrt[3]{1} = \begin{cases} v_1 = \cos(0) + i\,\text{sen}(0) = 1 \\ v_2 = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ v_3 = \cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Note que $\sqrt[3]{8}$ possui três raízes, representadas por $u_1 = 2$, $u_2 = -1 + \sqrt{3}i$ e $u_3 = -1 - \sqrt{3}i$ e que $\sqrt[3]{1}$ possui três raízes, representadas por $v_1 = 1$, $v_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ e $v_3 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Como sabemos que $u \cdot v = 2$, então concluímos que as três raízes dessa equação são:

$$\begin{cases} x_1 = u_1 + v_1 = 2 + 1 = 3 \\ x_2 = u_2 + v_3 = -1 + \sqrt{3}i - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_1 = u_3 + v_2 = -1 - \sqrt{3}i - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Uma forma de abreviar a resolução acima é perceber que 3 é uma raiz dessa equação cúbica, descoberta com o auxílio da pesquisa de raízes racionais.

Logo, as outras duas raízes serão raízes do quociente da divisão exata do polinômio $x^3 - 6x - 9$ por $x - 3$, que será $x^2 + 3x + 3$, encontradas pela fórmula resolutiva da equação quadrática.

3) Encontre o conjunto solução do sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} r+s+t=9 \\ r\cdot s+r\cdot t+s\cdot t=25 \\ r\cdot s\cdot t=25 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO:

Observe que esse sistema representa as relações de Girard para equações cúbicas, que no presente caso seria $t^3-9t^2+25t-25=0$. Caso o aluno não tenha o domínio de tal assunto, uma opção é resolver como apresentado abaixo:

Fazemos $r+s=9-t$, $r\cdot s=\dfrac{25}{t}$, de onde se seque que:

$$\begin{cases} r\cdot s+r\cdot t+s\cdot t=25 \Rightarrow r\cdot s+(r+s)\cdot t=25 \Rightarrow \dfrac{25}{t}+(9-t)\cdot t=25 \\ \Rightarrow 25+9t^2-t^3=25t \Rightarrow t^3-9t^2+25t-25=0 \end{cases}$$

Para eliminarmos o termo de grau dois nessa equação, fazemos a mudança de variável $x=t-3 \Rightarrow t=x+3$, obtendo a equação cúbica:

$$(x+3)^3-9(x+3)^2+25(x+3)-25=0$$

$$\Rightarrow x^3+9x^2+27x+27-9x^2-54x-81+25x+75-25=0 \Rightarrow x^3-2x-4=0$$

Utilizando a fórmula de Cardano-Tartaglia, teremos:

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{4-\frac{8}{27}}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{4-\frac{8}{27}}} \Rightarrow x=\sqrt[3]{2+\frac{10\sqrt{3}}{9}}+\sqrt[3]{2-\frac{10\sqrt{3}}{9}}$$

Importante notar que $u=\sqrt[3]{2+\dfrac{10\sqrt{3}}{9}}$ possui três valores possíveis $v=\sqrt[3]{2-\dfrac{10\sqrt{3}}{9}}$ também possui três valores possíveis, mas como sabemos que devemos escolher os valores de u e v tais que $u\cdot v=\dfrac{2}{3}$, então teremos que uma solução dessa equação será o número real representado por $x=\sqrt[3]{2+\dfrac{10\sqrt{3}}{9}}+\sqrt[3]{2-\dfrac{10\sqrt{3}}{9}}$.

Perceba que a fórmula de Cardano-Tartaglia nos forneceu um número real muito estranho, sendo esse um dos motivos para os quais essa fórmula não é muito usada.

Por outro lado, pesquisando as raízes racionais, obtemos 2 como uma de suas raízes, logo as outras duas raízes serão raízes do quociente da divisão exata do polinômio x^3-2x-4 por $x-2$, que será x^2+2x+2 que serão $x=-1+i$ ou $x=-1-i$.

Em particular, concluímos a surpreendente igualdade: $2=\sqrt[3]{2+\frac{10\sqrt{3}}{9}}+\sqrt[3]{2-\frac{10\sqrt{3}}{9}}$.

Como $x=2$, então $t=x+3=5$. Voltando ao sistema inicial teremos:

$\begin{cases} r+s=4 \\ r\cdot s=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=2+i \\ s=2-i \end{cases}$ de onde se segue que o conjunto solução é $S=\{2+i,2-i,5\}$

Se tivéssemos escolhido $x=-1-i$, então $t=x+3=2-i$. Voltando ao sistema inicial teremos:

$\begin{cases} r+s=7+i \\ r\cdot s=10+5i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=2+1 \\ s=5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} r=5 \\ s=2+i \end{cases}$

Portanto percebemos que o conjunto solução seria o mesmo, isso se deve ao fato do sistema inicial ser simétrico em relação as variáveis r, s e t.

5 Equações Quárticas

5.1 Considerações teóricas

A solução algébrica da equação do 4^o grau se deu graças ao matemático, Ludovico Ferrari, aluno de Girolamo Cardano. Sabe-se que Ferrari obteve uma fórmula geral para as soluções das equações do quarto grau, contudo Ferrari não foi reconhecido pela resolução, sendo o mérito todo dado somente a Cardano, pois foi ele que, com toda sua esperteza, assim como fez com as soluções da equação do 3^o grau, acabou publicando também em seu nome as da equação do 4^o grau.

Apresentaremos agora o método de Ferrari para a resolução da equação do quarto grau, muito sofisticado por sinal:

Considere a equação $x^4+ax^3+bx^2+cx=d=0 \quad (1)$, então $x^4+ax^3=-(bx^2+cx+d)$, completando quadrado no primeiro membro dessa equação, teremos:

$$x^4+ax^3+\frac{a^2x^2}{4}=\frac{a^2x^2}{4}-(bx^2+cx+d)\Rightarrow\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-b\right)x^2-cx-d \quad (2)$$

Note que se o segundo membro dessa equação fosse um quadrado perfeito, a resolução da equação se reduziria à de duas equações do segundo grau. Precisamos então transformar o segundo membro dessa equação em um quadrado perfeito sem destruir o quadrado perfeito que aparece em seu primeiro membro. Esse é o detalhe mais criativo da demonstração de Ferrari.

Somando a expressão $y^2+2y\left(x^2+\dfrac{ax}{2}\right)$, a se determinar, a ambos os membros da equação acima, teremos:

$$y^2+2y\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)+\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)^2=y^2+2y\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)+\left(\frac{a^2}{4}-b\right)x^2-cx-d$$

Agora vamos fazer algumas modificações na igualdade acima, deixando o segundo membro como uma expressão do segundo grau na variável x.

$$\left[\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)+y\right]^2=\left(2y+\frac{a^2}{4}-b\right)x^2+(ay-c)x+y^2-d \quad (3)$$

Descobriremos agora os valores de y que transformarão o segundo membro de (3) em um quadrado perfeito, ou seja, queremos que o discriminante dessa expressão quadrática na variável x seja igual a zero.

$$\Delta=0 \Leftrightarrow (ay-c)^2-4\left(2y+\frac{a^2}{4}-b\right)(y^2-d)=0$$

$$\begin{cases} (ay-c)^2-(8y+a^2-4b)(y^2-d)=0 \\ a^2y^2-2acy+c^2-8y^3+8dy-a^2y^2+a^2d+4by^2-4bd=0 \\ -2acy+c^2-8y^3+8dy+a^2d+4by^2-4bd=0 \\ 8y^3-4by^2+(2ac-8d)y+4bd-a^2d-c^2=0 \quad (4) \end{cases}$$

Recaímos, assim, em uma equação cúbica em y.

Escolhendo y como sendo uma das raízes da equação (4), então a equação (3) passa a ser escrita como $\left[\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)+y\right]^2=(mx+n)^2 \;\; (5)$, com m e n convenientes.

Então esta equação se resolve mediante a resolução de duas equações do segundo grau, a saber:

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)+y=(mx+n) \quad \text{e} \quad \left(x^2+\frac{ax}{2}\right)+y=-(mx+n).$$

Como a equação (1) é equivalente à equação (5), percebemos que a resolução de uma equação do quarto grau pode ser reduzida à resolução de equações de grau três e de grau dois.

5.2 Em sala de aula

Resolveremos algumas equações de grau 4 utilizando técnicas que os alunos aprendem no ensino médio como fatoração, substituição entre outras, mas esse primeiro exemplo será usado para mostrarmos o método usado por Ferrari na resolução de uma equação quártica completa, porém, em equações quárticas incompletas, há alternativas mais diretas.

1) Resolva a equação quádrica $x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$.

RESOLUÇÃO:

Nesta equação, temos: $a = -1$, $b = -2$, $c = -2$ e $d = 4$. Substituindo esses valores na equação (4) acima, obtemos:

$$8y^3 + 8y^2 - 28y - 40 = 0 \quad \text{ou} \quad 2y^3 + 2y^2 - 7y - 10 = 0.$$

Essa equação pode se resolver pela fórmula de Cardano-Tartaglia após a eliminação do termo de grau dois ou, como sempre convém, com técnica mais simples, quando possível. Nesse caso, temos:

$$\begin{cases} 2y^3 + 2y^2 - 7y - 10 = 0 \Rightarrow (2y^3 - 8y) + (2y^2 + y - 10) = 0 \\ \Rightarrow 2y(y-2)(y+2) + (2y+5)(y-2) = 0 \\ \Rightarrow (y-2)(2y^2 + 6y + 5) = 0 \end{cases}$$

Resolvendo a equação fatorada, teremos que:

$$\begin{cases} 2y^2 + 6y + 5 = 0 \\ \Delta = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 \Rightarrow \Delta = -4 \\ y = \dfrac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 2} \Rightarrow y = \dfrac{-6 \pm 2i}{4} \Rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{i}{2} \\ y = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{i}{2} \end{cases} \\ \text{ou} \quad y = -2 = 0 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

Notamos que 2 é a única raiz real da cúbica, as outras duas são números complexos $-\dfrac{3}{2} + \dfrac{i}{2}$ e $-\dfrac{3}{2} - \dfrac{i}{2}$, obtidos resolvendo a equação $2y^2 + 6y + 5 = 0$.

Voltando na equação (3) e usando os valores $y = 2$, $a = -1$, $b = -2$, $c = -3$ e $d = 4$, teremos:

$\left(x^2 - \frac{x}{2} + 2\right)^2 = \frac{25}{4}x^2 \Rightarrow \left(x^2 - \frac{x}{2} + 2\right)^2 = \left(\frac{5x}{2}\right)^2$, portanto podemos concluir que:

$\left(x^2 - \frac{x}{2} + 2\right)^2 = \left(\frac{5x}{2}\right)^2 \Rightarrow \underbrace{x^2 - \frac{x}{2} + 2 = \frac{5x}{2}}_{\text{1ª Equação 2º grau}}$ ou $\underbrace{x^2 - \frac{x}{2} + 2 = -\frac{5x}{2}}_{\text{2ª Equação 2º grau}}$, ou seja, resolvemos duas equações quadráticas.

$$\begin{cases} x^2 - \frac{x}{2} + 2 = \frac{5x}{2} \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 2 \\ x^2 - \frac{x}{2} + 2 = -\frac{5x}{2} \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 + i \quad \text{ou} \quad x = -1 - i \end{cases}$$

Portanto essas $\{1, 2, -1+i, -1-i\}$ são as quatro raízes da equação original.

Poderíamos questionar o que ocorreria caso tivéssemos utilizado uma das raízes imaginárias ao invés da raiz 2. Um pouco de reflexão nos leva a crer que encontraríamos as mesmas raízes da equação original, pois a essência do método de Ferrari é a obtenção de um quadrado perfeito no segundo membro. Cada uma das raízes da equação cúbica se presta a esse objetivo, ou seja, obtém-se equações equivalentes.

A título de ilustração, voltando na equação (3) e agora usando os valores $y = -\frac{3}{2} + \frac{i}{2}$, $a = -1$, $b = -2$ e $d = 4$, obtemos:

$$\begin{cases} \left[\left(x^2 - \frac{x}{2}\right) - \frac{3}{2} + \frac{i}{2}\right]^2 = \left(-3 + i + \frac{1}{4} + 2\right)x^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{i}{2} + 2\right)x + 2 - \frac{2i}{2} - 4 \\ \Rightarrow \left(x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2} + \frac{i}{2}\right)^2 = \left(i - \frac{3}{4}\right)x^2 + \left(\frac{7-i}{2}\right)x - \left(2 + \frac{3i}{2}\right) \end{cases}$$

Resolvendo equação $\left(i - \frac{3}{4}\right)x^2 + \left(\frac{7-i}{2}\right)x - \left(2 + \frac{3i}{2}\right) = 0$ teremos:

$$\Delta = \left(\frac{7-i}{2}\right)^2 + 4\left(i = \frac{3}{4}\right)\left(2 + \frac{3i}{2}\right) \Rightarrow \Delta = \frac{24 - 7i}{2} + \frac{(4i-3)(4+3i)}{2} = 0$$

$$x = \frac{\frac{-7+i}{2}}{2i - \frac{3}{2}} \Rightarrow x = \frac{-7+i}{-3-4i} \cdot \frac{-3-4i}{-3-4i} \Rightarrow x = \frac{21 + 28i - 3i + 4}{25} \Rightarrow x = 1 + i.$$

Portanto nossa equação pode ser escrita na forma fatorada como $\left(i = \frac{3}{4}\right)[x - (1+i)]^2 = 0.$

Como sabemos que $i - \frac{3}{4} = \frac{-3+4i}{4} = \left[\frac{\pm(1+2i)}{2}\right]$, então teremos:

$$\left[\left(x^2-\frac{x}{2}\right)-\frac{3}{2}+\frac{i}{2}\right]^2=\left[\frac{(1+2i)^2}{2}\right]^2[x-(1+i)]^2$$

$\left(x^2-\frac{x}{2}\right)-\frac{3}{2}+\frac{i}{2}=\frac{(1+2i)[x-(1+i)]}{2}$ ou $\left(x^2-\frac{x}{2}\right)-\frac{3}{2}+\frac{i}{2}=\frac{(-1-2i)[x-(1+i)]}{2}$

Resolvendo a primeira das equações teremos:

$$\left(x^2-\frac{x}{2}\right)-\frac{3}{2}+\frac{i}{2}=\frac{(1+2i)[x-(1+i)]}{2}\Rightarrow 2x^2-x-3+i=x-1-i+3xi-2i+2$$

$\Rightarrow 2x^2-(2+2i)x-4+4i=0\Rightarrow x^2-(1+i)x-2+2i=0\Rightarrow x=2$ ou $x=-1+i$

Resolvendo a segunda das equações teremos:

$$\left(x^2-\frac{x}{2}\right)-\frac{3}{2}+\frac{i}{2}=\frac{(-1-2i)[x-(1+i)]}{2}\Rightarrow 2x^2-x-3+i=x-1-i+2xi-2i+2$$

$\Rightarrow 2x^2+2ix-2-2i=0\Rightarrow x^2+ix-1-i=0\Rightarrow x=1$ ou $x=-1-i$

Portanto essas $\{1,2,-1+i,-1-i\}$ são as quatro raízes da equação original.

Nem sempre teremos que usar o método de Ferrari para resolvermos algumas equações do quarto grau, mostraremos abaixo algumas equações quárticas que podem ser resolvidas fazendo apenas uma mudança de variável, ou fazendo alguma fatoração ou simplesmente calculando-se raízes quartas de números complexos.

2) Resolva a equação $x^4-7x^2+12=0$.

RESOLUÇÃO:

Essa equação quártica recebe um nome especial, chama-se equação biquadrada e ela pode ser resolvida fazendo a substituição$y=x^2$ para chegarmos em uma equação quadrática, porém na variável y. Feito a substituição chegamos na equação $y^2-7y+12=0$, então:

$$\begin{cases} y^2-7y+12=0, \quad \text{onde} \quad \Delta=1 \\ y=\dfrac{7\pm 1}{2}\Rightarrow y=4 \quad \text{ou} \quad y=3 \end{cases}$$

Encontrados os valores de y, utilizamos o fato de que $y=x^2$ para encontrarmos os respectivos valores de x, ou seja: $\begin{cases} y=4\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=-2 \quad \text{ou} \quad x=2 \\ y=3\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=-\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x=\sqrt{3} \end{cases}$

Logo o conjunto solução dessa equação será $S=\{-2,-\sqrt{3},\sqrt{3},2\}$.

3) Encontre o conjunto solução da equação $x^4 - 16 = 0$.

RESOLUÇÃO:

Fatorarmos uma equação algébrica utilizando produtos notáveis é uma técnica muito interessante para resolvermos qualquer tipo de equação algébrica.

Na equação proposta usaremos o produto notável $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ para fatorar tal equação e transformá-la em uma equação mais fácil de ser resolvida.

Teremos que $x^4 - 16 = 0 \Rightarrow (x^2-4)(x^2+4) = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2)(x^2+4) = 0$.

Como temos um produto de três fatores dando um resultado igual a zero, e como estamos trabalhando no corpo dos números complexos, então teremos que:

$$\begin{cases} x-2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ \text{ou} \\ x+2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ \text{ou} \\ x^2+4 = 0 \Rightarrow x = -2i \quad \text{ou} \quad x = 2i \end{cases}$$

Portanto o conjunto solução dessa equação será $s = \{-2, -2i, 2, 2i\}$.

4) Resolva a equação $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$.

RESOLUÇÃO:

Uma equação da forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, onde os coeficientes dos termos equidistantes do termo central são iguais, é chamada de equação recíproca. Nesse tipo de equação temos que se α é uma raiz, então $\frac{1}{\alpha}$ também será uma raiz dessa equação.

Dividindo os dois lados da equação $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$ por x^2, encontramos:

$$\begin{cases} \dfrac{x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1}{x^2} = \dfrac{0}{x^2} \\ x^2 - 3x + 4 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0 \\ \Rightarrow \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 4 = 0 \end{cases}$$

Fazendo agora a mudança de variável $y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, então transformaremos a equação original, na variável x, numa equação quadrática $y^2 - 3y + 2 = 0$, porém na variável y.

Resolvendo a equação $y^2-3y+2=0$ encontramos $y=1$ ou $y=2$, então como $y=x+\dfrac{1}{x}$, vamos usar os valores de y obtidos anteriormente para encontrarmos os respectivos valores de x.

Recairemos na resolução de duas equações quadráticas.

$$\begin{cases} \text{Se} \quad y=1 \Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=1 \Rightarrow x^2-x+1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} \quad \text{ou} \quad x=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2} \\ \text{Se} \quad y=2 \Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=2 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=1 \quad \text{(raiz dupla)} \end{cases}$$

Portanto o conjunto solução dessa equação será $S=\left\{\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2},\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2},1\right\}$.

5) Encontre todas as raízes da equação $x^4+16=0$.

SOLUÇÃO:

Equações quárticas desse tipo são facilmente resolvidas extraindo as raízes quartas de um número complexo, pois como temos que $x^4=-16$, então o problema se transforma em encontrar as quatro raízes quartas do complexo $Z=-16$. Como Z possui módulo igual a 16 e argumento principal igual a π radianos, então sua forma trigonométrica será $Z=16\cdot[\cos(\pi)+i\,\text{sen}(\pi)]$.

Então as raízes quartas de $Z=-16$ são:

$$\sqrt[4]{Z}=\sqrt[4]{16}\cdot\underbrace{\left[\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\right]}_{k=0,1,2,3}=\begin{cases} Z_1=2\cdot\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+i\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right] \\ Z_2=2\cdot\left[\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)+i\,\text{sen}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right] \\ Z_3=2\cdot\left[\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)+i\,\text{sen}\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)\right] \\ Z_4=2\cdot\left[\cos\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)+i\,\text{sen}\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)\right] \end{cases}$$

Usando trigonometria, chegaremos as raízes $\begin{cases} Z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2} \\ Z_2=-\sqrt{2}+i\sqrt{2} \\ Z_3=-\sqrt{2}-i\sqrt{2} \\ Z_4=\sqrt{2}+-\sqrt{2} \end{cases}$

Sabemos que as quatro raízes desta equação são os 4 vértices de um quadrado inscrito num círculo de raio 2 e centro na origem do plano complexo.

6 O Teorema Fundamental da Álgebra, Uma Demonstração Direta e Elementar

1) Introdução

Apresentaremos a seguir o estudo detalhado que fizemos de uma bela demonstração elementar do Teorema Fundamental da Álgebra, devida a Oswaldo Rio Branco de Oliveira, do IME-USP, publicada em 2011, no "Mathematical Intelligencer", conforme $[8]$.

Essa demonstração utiliza três teoremas da análise matemática que assumiremos sem demonstração: a continuidade das funções polinomiais complexas e as seguintes consequências da completeza de $\mathbb{R}$:

- Qualquer função contínua $f : D \to \mathbb{R}$, onde D é um disco limitado e fechado em $\mathbb{R}^2$, possui um mínimo em D.
- Todo número real positivo possui uma raiz quadrada positiva.

2) Raízes Quadradas

Sabe-se que a eqação $z^2 = a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, pode ser resolvida em $\mathbb{C}$. Fazendo $x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$, teremos:

$$(x+yi)^2 = a+bi \Rightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = a+bi \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Se $b = 0$ então teremos $x = 0$ ou $y = 0$, ou seja:

$$\begin{cases} 1^{\text{o}})\ b = 0 \text{ e } x = 0 \Rightarrow a < 0 \text{ e } y = \pm\sqrt{-a} \\ 2^{\text{o}})\ b = 0 \text{ e } y = 0 \Rightarrow a > 0 \text{ e } x = \pm\sqrt{a} \end{cases}$$

Suponha agora que $b \neq 0$, então teremos dois casos a considerar:

$1^{\text{o}})$ Se $b > 0$ então x e y terão sinais iguais;
$2^{\text{o}})$ Se $b < 0$ então x e y terão sinais opostos;

Considerando $x \neq 0$, então teremos $y = \dfrac{b}{2x}$, portanto:

$$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{b}{2x}\right)^2 = a \Rightarrow 4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0 \Rightarrow 4x^4 - 4ax^2 + a^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow (2x^2 - a)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 2x^2 - a = \pm\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow x^2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

Como $\sqrt{a^2+b^2} \geq a \Rightarrow x^2 = \dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{a}{2} + \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} + \dfrac{a}{2}}$

Se $x = \sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} + \dfrac{a}{2}} \Rightarrow y = \dfrac{b}{2\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} + \frac{a}{2}}} \Rightarrow y = \dfrac{b\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} - \frac{a}{2}}}{2\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} + \frac{a}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} - \frac{a}{2}}}$

$$\Rightarrow y = \frac{b\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} - \frac{a}{2}}}{2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4} - \frac{a^2}{4}}} \Rightarrow y = -\frac{b\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} - \frac{a}{2}}}{|b|}$$

Considerando $b > 0$, então x e y possuem o mesmo sinal, portanto teremos:

Se $x = \sqrt{\dfrac{a}{2} + \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \Rightarrow y = \dfrac{b\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} - \frac{a}{2}}}{|b|} \Rightarrow y = \sqrt{-\dfrac{a}{2} + \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$

Se $x = -\sqrt{\dfrac{a}{2} + \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \Rightarrow y = \dfrac{-b\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} - \frac{a}{2}}}{|b|} \Rightarrow y = -\sqrt{-\dfrac{a}{2} + \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$

Considerando $b < 0$, então x e y possuem sinais opostos, portanto teremos:

Se $x = \sqrt{\dfrac{a}{2} + \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \Rightarrow y = \dfrac{b\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} - \frac{a}{2}}}{|b|} \Rightarrow y = -\sqrt{-\dfrac{a}{2} + \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$

Se $x = -\sqrt{\dfrac{a}{2} + \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \Rightarrow y = \dfrac{-b\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} - \frac{a}{2}}}{|b|} \Rightarrow y = \sqrt{-\dfrac{a}{2} + \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$

Essas soluções podem ser escritas, mais simplificadamente, usando a expressão:

$$\pm z = \sqrt{\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + sgn(b)i\sqrt{\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}}, \text{ onde } \begin{cases} sgn(b) = \dfrac{b}{|b|} \text{ se } b \neq 0 \\ sgn(b) = 1 \text{ se } b = 0 \end{cases}$$

Aplicando esta fórmula repetidamente encontram-se todas as raízes 2^n-ésimas, onde $j \in \mathbb{N}$, de $z = \pm 1$ e $z = \pm i$.

3) Teorema Fundamental da Álgebra

Seja P um polinômio complexo, de grau n, sendo n maior ou igual a 1. Então, existe um $z_0 \in \mathbb{C}$ que satisfaz a equação $P(z_0) = 0$.

Demonstração:

Escrevendo $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, com $a_j \in \mathbb{C}$, $0 \leq j \leq n$, e $a_n \neq 0$, têm-se que $|P(z)| \geq |a_n| \cdot |z|^n - |a_0| - |a_1| \cdot |z| - |a_2| \cdot |z|^2 - \cdots - |a_{n-1}| \cdot |z|^{n-1}$ onde $\lim\limits_{|z| \to \infty} |P(z)| = \infty$.

Essa desigualdade vem de $|u - v| \geq ||u| - |v|| \geq |u| - |v|$, como mostraremos abaixo no caso de $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$, do qual o caso geral se deduz por indução. Teremos então:

$$|P(z)| = |a_0 + a_1 z + a_2 z^2| = |a_2 z^2 - (-a_0 - a_1 z)| \geq ||a_2 z^2| - |-a_0 - a_1 z|| = ||a_2 z^2| - |a_0 + a_1 z||$$

$|P(z)| \geq |a_2 z^2| - |a_0 + a_1 z|$ mas como $|a_0 + a_1 z| \leq |a_0| + |a_1 z|$, então $-|a_0 + a_1 z| \geq -|a_1 z| - |a_0|$ portanto teremos: $|P(z)| \geq |a_2 z^2| - |a_1 z| - |a_0|$

Assumindo a continuidade da função polinomial complexa P e da função módulo, obtemos que a função composta $|P|$ é continua em $\mathbb{C}$, e sendo não negativa, então $|P|$ assume um mínimo absoluto em algum $z_0 \in \mathbb{C}$.

Supondo sem perda de generalidade que $z_0 = 0$.

Consequentemente colocando-se $S^1 = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$, teremos:

$|P(rw)|^2 - |P(0)|^2 \geq 0$ para todo $r \geq 0, \forall w \in S^1$, onde $P(z) = P(0) + z^k \cdot Q(z)$, para algum $k \in \{1, \cdots, n\}$, onde Q é um polinômio com $Q(0) \neq 0$.

Combinando essa inequação com $z = rw$ têm-se:

$$|P(0) + r^k \cdot w^k \cdot Q(rw)|^2 - |P(0)|^2 = (P(0) + r^k \cdot w^k \cdot Q(rw)) \cdot \overline{P(0) + r^k \cdot w^k \cdot Q(rw)} - P(0) \cdot \overline{P(0)}$$

$$= (P(0) + r^k \cdot w^k \cdot Q(rw)) \cdot (\overline{P(0)} + r^k \cdot \overline{w^k} \cdot \overline{Q(rw)}) - P(0) \cdot \overline{P(0)}$$

$$= \overline{P(0)} \cdot r^k \cdot w^k \cdot Q(rw) + P(0) \cdot r^k \cdot \overline{w^k} \cdot \overline{Q(rw)} + r^{2k} \cdot w^k \cdot \overline{w^k} \cdot Q(rw) \cdot \overline{Q(rw)}$$

$$= r^k \cdot \left(\overline{P(0)} \cdot w^k \cdot Q(rw) + P(0) \cdot \overline{w^k} \cdot \overline{Q(rw)} \right) + r^{2k} \cdot |w^k|^2 \cdot |Q(rw)|^2$$

$$= r^k \cdot \left(\overline{P(0)} \cdot w^k \cdot Q(rw) + \overline{\overline{P(0)} \cdot w^k \cdot Q(rw)} \right) + r^{2k} \cdot |w^k|^2 \cdot |Q(rw)|^2$$

$$= r^k \cdot 2Re \left[\overline{P(0)} \cdot Q(rw) \cdot w^k \right] + r^{2k} \cdot |w^k|^2 \cdot |Q(rw)|^2$$

Como $w \in S^1$, então $|w^k| = 1 \Rightarrow \left|w^k\right|^2 = 1$, portanto teremos:

$|P(0) + r^k \cdot w^k \cdot Q(rw)|^2 - |P(0)|^2 = 2r^k \cdot Re[\overline{P(0)} \cdot Q(rw) \cdot w^k] + r^{2k} \cdot |Q(rw)|^2 \geq 0, \forall r \geq 0, \forall w \in S^1$ e, dividindo tudo por $r^k > 0$, teremos:

$2Re[\overline{P(0)} \cdot Q(rw) \cdot w^k] + r^k \cdot |Q(rw)|^2 \geq 0, \forall r > 0, \forall w \in S^1$, cujo lado esquerdo é uma função continua de r, onde $r \in [0, +\infty)$. Assim, deixando $r \to 0$, têm-se:

$$(2) \qquad 2Re\left[\overline{P(0)} \cdot Q(0) \cdot w^k\right] \geq 0, \forall w \in S^1$$

Seja $\alpha = \overline{P(0)} \cdot Q(0)$, então retirando todas as potências de 2 pode-se escrever $k = 2^f \cdot m$ onde m é ímpar. Tomando $w = 1$ em (2) conclui-se que $Re[\alpha] \geq 0$.

Escolhendo w para que $w^{2^f} = -1 \Rightarrow w^k = w^{2^f \cdot m} = \left(w^{2^f}\right)^m = (-1)^m = -1$, pois m é ímpar, então conclui-se que $Re[\alpha] \leq 0$, e consequentemente, $Re[\alpha] = 0$.

Escolhendo w para que $w^{2^f} = i \Rightarrow w^k = w^{2^f \cdot m} = \left(w^{2^f}\right)^m = i^m = \pm i$, pois m é ímpar, conclui-se então que $w^k = \pm i$ e como $\overline{w}^k = \overline{w^k} \Rightarrow \overline{w}^k = \mp i$, substituindo w e $\overline{w}$ em (2) conclui-se que $Re[\pm \alpha i] = \mp Im[\alpha] \geq 0$ pois $\begin{cases} w^k = i \Rightarrow -Im(\alpha) \geq 0 \Rightarrow Im(\alpha) \leq 0 \\ w^k = -i \Rightarrow Im(\alpha) \geq 0 \end{cases}$ ou seja, teremos que $Im[\alpha] = 0$.

Então, como temos $Re[\alpha] = 0$ e $Im[\alpha] = 0$, concluímos que $\alpha = 0 \Rightarrow \overline{P(0)} \cdot Q(0) = 0$, mas como temos $Q(0) \neq 0$ então $\overline{P(0)} = 0 \Rightarrow P(0) = 0$.

$\square$

4) Observações finais

O último parágrafo da demonstração trata de um truque para evitar recorrer à trigonometria.

Uma verificação fácil, mas não-elementar, de (2) implica que $P(0) = 0$, pode ser feita com o auxílio de $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)$, n natural e θ real, conhecida como Fórmula de "De Moivre", da maneira a seguir:

Fazendo $w = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$, com $w \in S^1$ e θ um número real, escolhe-se valores de θ para que $w^k = \cos(k\theta) + i\,\mathrm{sen}(k\theta)$, assim como na demonstração acima do Teorema Fundamental da Álgebra assumindo os valores ± 1 e $\pm i$.

Como $2Re\left[\overline{P(0)} \cdot Q(0) \cdot w^k\right] \geq 0$, $\forall w \in S^1$, fazendo $\overline{P(0)} \cdot Q(0) = x + yi$, e escolhendo os ângulos θ para os quais w^k assuma os valores ± 1 e $\pm i$, teremos que:

$$w^k = 1 \Rightarrow \cos(k\theta) + i\,\mathrm{sen}(k\theta) = 1 \Rightarrow \left\{ \cos(k\theta) = 1\,\mathrm{sen}(k\theta) = 0 \right. \Rightarrow k\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

Então para $\theta = 0$ teremos $w^k = 1$, portanto $2Re\left[\overline{P(0)} \cdot Q(0)\right] \geq 0, \forall w \in S^1 \Rightarrow 2x \geq 0$

$$w^k = -1 \Rightarrow \cos(k\theta) + i\,\mathrm{sen}(k\theta) = -1 \Rightarrow \begin{cases} \cos(k\theta) = -1 \\ \mathrm{sen}(k\theta) = 0 \end{cases} \Rightarrow k\theta = \pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{k}$$

Então para $\theta = \dfrac{\pi}{k}$ terenos $w^k = -1$ então $2Re\left[\overline{P(0)} \cdot Q(0)\right] \leq 0, \forall w \in S^1 \Rightarrow 2x \leq 0$

Portanto concluímos que $x = 0$.

$$w^k = i \Rightarrow \cos(k\theta) + i\,\mathrm{sen}(k\theta) = i \Rightarrow \begin{cases} \cos(k\theta) = 0 \\ \mathrm{sen}(k\theta) = 1 \end{cases} \Rightarrow k\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2k}$$

Então para $\theta = \dfrac{\pi}{2k}$ teremos $w^k = i$ então $-2Im\left[\overline{P(0)} \cdot Q(0)\right] \geq 0, \forall w \in S^1 \Rightarrow 2y \leq 0$

$$w^k = -i \Rightarrow \cos(k\theta) + i\,\mathrm{sen}(k\theta) = -i \Rightarrow \begin{cases} \cos(k\theta) = 0 \\ \mathrm{sen}(k\theta) = -1 \end{cases} \Rightarrow k\theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2k}$$

Então para $\theta = \dfrac{3\pi}{2k}$ teremos $w^k = -i$ então $2Im\left[\overline{P(0)} \cdot Q(0)\right] \geq 0, \forall w \in S^1 \Rightarrow 2y \geq 0$

Portanto concluímos que $y = 0$, então como $\overline{P(0)} \cdot Q(0) =$ e $Q(0) \neq 0$, teremos $\overline{P(0)} = 0 \Rightarrow P(0) = 0$.

$\square$

7 Equações Algébricas sobre Corpos Finitos

Neste capítulo estudaremos em que medida poderemos estender as fórmulas radicais e outros resultados estudados anteriormente para corpos de característica 0 para corpos finitos. Forneceremos inicialmente os resultados básicos e necessários sobre corpos finitos para tratarmos das equações algébricas sobre eles, mais detalhes podem ser encontrados na literatura básica de álgebra e análise, por exemplo Abramo Hefez, curso de Álgebra - volume 1, Análise 1 – Elon Lages Lima e em Jamil Ferreira - A construção dos Números.

7.1 Corpos

Definição: Um conjunto não-vazio K é um corpo se nele estão definidas duas operações, designadas por $(+)$ e $(\cdot)$ denominadas adição e multiplicação, de modo que as propriedades seguintes sejam satisfeitas:

Propriedades da adição:

1) Associativa: $(a+b)+c = a+(b+c)$, para quaisquer elementos $a,b,c \in K$.

2) Comutativa: $a+b = b+a$, para quaisquer elementos $a,b \in K$.

3) Elemento neutro: existe $n \in K$ tal que $a+n = a$, qualquer que seja $a \in K$. Prova-se que um elemento com essa propriedade é único e será denotado por 0;

4) Elemento oposto (ou simétrico ou inverso aditivo): Para cada $a \in K$ existe um $x \in K$ tal que $a+x = 0$.Para cada $a \in K$ o elemento x com essa propriedade é único e será denotado por $-a$, ou seja, $a+(-a) = 0$.

Propriedades da multiplicação:

5) Associativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ para quaisquer elementos $a,b,c \in K$;

6) Comutativa: $a \cdot b = b \cdot a$ para quaisquer elementos $a,b \in K$;

7) Elemento neutro: existe $m \in K$ tal que $a \cdot m = a$, qualquer que seja $a \in K$. Prova-se que um elemento m com essa propriedade é único e será denotado por 1;

8) Elemento inverso: Para cada $a \in K \setminus \{0\}$ existe um $y \in K$ tal que $a \cdot y = 1$.Para cada $a \in K$ o elemento y com essa propriedade é único e será denotado por a^{-1} , ou seja, $a \cdot a^{-1} = 1$.

9) Distributiva: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$, para quaisquer elementos $a, b, c \in K$.

Um conjunto que possui todas as propriedades acima, com exceção de 8, se diz um Anel. Um anel que tem a propriedade seguinte se diz um domínio de integridade.

Sejam a e b elementos desse Anel, então se $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

É simples verificar que todo corpo é um domínio de integridade, embora haja domínios de integridade que não são corpos, por exemplo $\mathbb{Z}$.

Dado um conjunto não vazio K, e duas operações, adição $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$, representaremos um corpo com a seguinte notação $(K, +, \cdot)$. Por exemplo, temos:

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ é o corpo dos números Racionais;

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ é o corpo dos números Reais;

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ é o corpo dos números Complexos;

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ não é um corpo pois os únicos elementos invertíveis são 1 e -1, porém é um Domínio de Integridade.

Por outro lado, mostraremos abaixo que $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ é um corpo quando p é um número primo, o que nos garantirá a existência de corpos finitos.

Considere $a, b \in \mathbb{Z}$ e $m > 1$ um inteiro. Define-se a relação $a - b \Leftrightarrow m | a - b$, ou equivalentemente, quando a e b deixam o mesmo resto na divisão por m . Mostra-se facilmente que essa relação é de equivalência, ou seja, é reflexiva, simétrica e transitiva.

Ela possui exatamente m classes de equivalência que correspondem aos m possíveis restos na divisão euclidiana por m, que se representam por $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{m-1}$.

No conjunto $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{m-1}\}$, definimos duas operações, uma adição e uma multiplicação, da seguinte maneira: $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$ e $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$.

Prova-se que essas duas operações estão bem definidas, isto é, não dependem do inteiro que representa a classe de equivalência, isto é, se $\overline{a} = \overline{a_1}$ e $\overline{b} = \overline{b_1}$ então teremos que $\overline{a+b} = \overline{a_1+b_1}$ e $\overline{a \cdot b} = \overline{a_1 \cdot b_1}$.

Pela igualdade das classes temos que existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $a - a_1 = x \cdot n$ e $b - b_1 = y \cdot n$, então somando estas duas equações temos que $(a+b) - (a_1 + b_1) = (x+y) \cdot n$, ou seja, temos que $\overline{a+b} = \overline{a_1+b_1}$.

Por outro lado, como $a = x \cdot n + a_1$ e $b = y \cdot n + b_1$, multiplicando as equações, teremos que $a \cdot b = x \cdot y \cdot n^2 + x \cdot n \cdot b_1 + y \cdot n \cdot a_1 + a_1 \cdot b_1 \Rightarrow a \cdot b - a_1 \cdot b_1 = (x \cdot y \cdot n + x \cdot b_1 + y \cdot a_1) \cdot n$, ou seja, temos que $\overline{a \cdot b} = \overline{a_1 \cdot b_1}$. Além disso, elas definem em $\mathbb{Z}_m$ a estrutura de anel.

Observe que nem sempre $\mathbb{Z}_m$ será um domínio de integridade, por exemplo, em $\mathbb{Z}_6$, $2 \cdot 3 = 0$, sendo 2 e 3 diferentes de 0.

Mais especificamente, temos o seguinte: $\mathbb{Z}_m$ será um domínio de integridade se, e somente se, m for primo, em cujo caso, será um corpo.

Consideramos então o conjunto $\mathbb{Z}_p = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{p-1}\right\}$, com p primo. Vamos mostrar que todo elemento de $\mathbb{Z}_p$ possui inverso, de onde seguirá que $\mathbb{Z}_p$ é corpo, logo, domínio de integridade.

Quando tomamos $\overline{r} \in \mathbb{Z}_p$, com $\overline{r} \neq \overline{0}$ temos que $r < p$ e portanto, como p é primo, teremos que $(r, p) = 1$, portanto, pela definição de máximo divisor comum, temos que existem inteiros x e y tais que $rx + py = 1$.

Reescrevendo $rx + py = 1$ como $rx = (-y)p + 1$, segue-se que o resto da divisão de rx pelo número primo p é igual a 1, ou seja, $\overline{r \cdot x} = \overline{1}$,ou seja, $\overline{r} \cdot \overline{x} = \overline{1}$, como queríamos. Concluímos que $\mathbb{Z}_p = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{p-1}\right\}$ é um corpo com p elementos.

Admita agora que p não seja primo, portanto existem inteiros a e b, diferentes de zero, com $1 < a$, $b < p$, tais que $p = a \cdot b$, mas como $\overline{0} = \overline{p} = \overline{a} \cdot \overline{b}$, então $\mathbb{Z}_p$ não é um domínio de integridade.

7.2 Corpos Ordenados

Definição: Um corpo K se diz ordenado se contiver um conjunto P, com $\emptyset \neq P \subseteq K$, satisfazendo:

1) $x, y \in P \Rightarrow x + y \in P$ e $x \cdot y \in P$

2) Tricotomia: $\forall x \in K$ vale uma e somente uma das condições: $x \in P$, $-x \in P$ ou $x = 0$.

Para todos $x, y \in K$, escrevemos $x > y$ quando $x - y \in P$, assim temos que $x > 0$ equivale a $x \in P$.

Escrevemos $x \geq y$ para designar que $x > y$ ou $x = y$.

Prova-se que $\geq$ é uma relação de ordem em K, isto é, reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Teorema: Seja K um corpo ordenado, cujos elementos neutro, aditivo e multiplicativo, são respectivamente representados por 0 e 1, então teremos:

1) Para todo $a \in K$, tem-se $a \cdot 0 = 0$;
2) Para $a, b \in K$, tem-se $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -ab$ e $(-a) \cdot (-b) = ab$;
3) Se $0 = 1$, então K possui só um elemento;
4) $x^2 \geq 0$, para todo $x \in K$;
5) Se $1 \neq 0$, então $1 > 0 > -1$;
6) Se $1 \neq 0$, então K contém uma cópia de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{Z}$ e de $\mathbb{Q}$ e é, portanto infinito.

Demonstração:

1) $a \cdot 0 = a \cdot (0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 + a \cdot 0 = -a \cdot 0 + a \cdot 0 + a \cdot 0 \Rightarrow 0 = a \cdot 0$

2) $\left\{ \begin{array}{l} ab + (-a) \cdot b = (a + (-a)) \cdot b = 0 \cdot b = 0 \Rightarrow -ab + ab + (-a) \cdot b = -ab + 0 \\ \Rightarrow (-a) \cdot b = -ab, \text{ segue-se que } a \cdot (-b) = (-b) \cdot a = -b \cdot a = -a \cdot b \end{array} \right.$

Por outro lado, temos também que $(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-ab) = ab$

Pois em qualquer anel A vale $-(-a) = a, \forall a \in A$.

3) Tome $x \in K$, então $x = 1 \cdot x = 0 \cdot x = 0 \Rightarrow K = \{0\} = \{1\}$

4) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Se } x \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0, \text{ por } (1) \\ \text{Se } x < 0 \Rightarrow -x > 0, (-x)^2 = x^2 > 0 \text{ por } (1) \end{array} \right.$

5) Como sabemos que $x^2 \geq 0$, para todo $x \in K$, portanto temos que: $1 = 1^2 \geq 0$ mas como $1 \neq 0 \Rightarrow 1 > 0 \Leftrightarrow 1 \in P \Leftrightarrow 0-(-1) > 0 \Leftrightarrow 0 > -1 \Leftrightarrow 1 > 0 > -1$.

6) Utilizando aqui a compatibilidade da relação de ordem $\geq$ veja [4], com a adição e estendendo-a à relação $>$, temos: $1 > 0 \Rightarrow 1+1 > 1+0 \Rightarrow 2 > 1$, analogamente, teremos que $\cdots > 2 > 1 > 0 > -1 > -1 > \cdots$, portanto concluímos que K contém uma cópia de $\mathbb{N}$ e uma cópia de $\mathbb{Z}$, sendo portanto um corpo infinito. Como K é um corpo, todo elemento $0 \neq b \in K$ possui inverso b^{-1}, logo contém $a \cdot b^{-1}$ que identificamos com o número racional $\frac{a}{b}$, portanto K contém uma cópia de $\mathbb{Q}$.

Como exemplo temos que os corpos $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ e $(\mathbb{R},+,\cdot)$ são ordenados, tendo como subconjunto P da definição, os respectivos conjuntos $\mathbb{Q}_+$ e $\mathbb{R}_+$ de números positivos.

Por outro lado, o corpo $(\mathbb{C},+,\cdot)$ não é ordenado, pois teríamos pelo item 4 que $-1 = i^2 \geq 0$ e pelo item 5, que $0 > -1$, o que contradiz a tricotomia.

7.3 Corpos Finitos

Definição: Sejam K e F dois corpos. Uma função $f: K \to F$ é um homomorfismo de K em F se satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)+f(y), \forall x,y \in K \\ f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \forall x,y \in K \end{cases}$$

Definição: Um homomorfismo bijetor de corpos será chamado de *isomorfismo*. Dois corpos serão ditos *isomorfos* se existir um isomorfismo entre eles. Dois corpos isomorfos são considerados idênticos.

Definição: A característica de um corpo K, que será denotada por $car(K)$, é o menor inteiro positivo n tal que $n \cdot x = 0, \forall x \in K$. Se tal elemento n não existir, dizemos que o corpo K tem característica zero.

Considere agora K um corpo finito com elemento unidade 1 e o conjunto $A_K = \{n \in \mathbb{N} : n1 = 0\}$, onde $n1$ significa $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{n parcelas}}$. Pode-se provar que $(mn)1 = m(n1) = (m1)(n1)$.

Pelo fato de K ser finito, temos que existem dois inteiros $n_1 < n_2$ tais que $n_1 1 = n_2 1$, logo teremos $(n_1 - n_2)1 = 0$ como $n_2 - n_1 > 0$ e portanto, $A_k \neq \emptyset$. Pelo princípio da Boa Ordem A_k possui um elemento mínimo.

Definição: Define-se a característica de um corpo finito K, como sendo o número inteiro positivo $car(K) = minA_k = min\{n \in \mathbb{N} : n1 = 0\}$.

Se um corpo F é subcorpo de um corpo K, então $A_F = A_K$ e, portanto, $car(K) = car(F)$. Temos também que K é um espaço vetorial sobre F.

Exemplo: O corpo dos números Racionais, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, e o corpo dos números Reais,$(\mathbb{R}, + \cdot)$, são corpos ordenados com característica zero.

Exemplo: $\mathbb{Z}_p$ é um corpo de característica p.

Proposição: Seja K um corpo finito, então $car(K)$ é um número primo.

Demonstração: Seja $n = car(K)$ e suponhamos que n não seja primo. Logo $n = r \cdot s$, onde r e s são inteiros maiores que 1 e menores do que n.

Logo temos que $0 = n \cdot 1 = (r \cdot s) \cdot 1 + r(s1) = (r1) \cdot (s1)$, mas como K é um corpo, temos que $r1 = 0$ ou $s1 = 0$, contradizendo o fato de n ser mínimo.

Proposição: Seja K um corpo finito com $car(K) = p$. Se para $m \in \mathbb{Z}$ e $a \in K$ tem-se que $m \cdot a = 0$, então m é um múltiplo de p, ou $a = 0$.

Demonstração: Suponhamos que $m \cdot a = 0$, então $(m1) \cdot a = 0$, mas como K é um corpo, temos que $(m1) = 0$ ou $a = 0$. Se $a = 0$, então $m \cdot a = 0$, por outro lado, se $m1 = 0$, teremos que mostrar que m é múltiplo de p.

Suponhamos então que $m1 = 0$, pelo algoritmo da divisão de Euclides, temos que $m = pq + r$, onde $0 \leq r \leq p$, portanto teremos $0 = m1 = (pq + r)1 = q(p1) + r1 = q0 + r1 = r1$, mas como p é o menor inteiro positivo tal que $p1 = 0$, teremos que $r = 0$, concluindo assim que m é um múltiplo de p.

Teorema 2:

Seja K um corpo finito com $car(k) = p$, onde p é um número primo. Então, K contém um subcorpo isomorfo a $\mathbb{Z}_p$ (que ainda denotaremos por $\mathbb{Z}_p$). Em particular, K tem p^n elementos para algum número natural n.

Demonstração: Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}_p &\to K \\ \overline{n} &\mapsto n1 \end{aligned}$$

Perceba primeiro que ela está bem definida, ou seja, se $\overline{n} = \overline{m}$, onde m e n são dois inteiros, então existe um inteiro k tal que $m = m + kp$, portanto teremos que:

$n1 = (m+kp)1 = m1 + (kp)1 = m1 + k(p1) = m1 + k0 = m1 + 0 = m1$

Verificamos facilmente que:

$$\begin{cases} \varphi(a+b) = (a+b)1 = a1 + b1 = \varphi(a) + \varphi(b) \\ \varphi(ab) = (ab)1 = a(b1) = (a1)(b1) = \varphi(a)\cdot\varphi(b) \\ \varphi(1) = 1 \end{cases}$$, ou seja, φ é um homomorfismo,

portanto temos que $\varphi(\mathbb{Z}_p)$ é um subcorpo de K, isomorfo a $\mathbb{Z}_p$. Temos, portanto, que K é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}_p$, e como K é finito, temos que ele tem dimensão finita sobre $\mathbb{Z}_p$, como visto em [7].

Considere então que $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ seja uma base de K sobre $\mathbb{Z}_p$, então sabemos que todo elemento de K se escreve de maneira única como uma combinação linear dos vetores dessa base, ou seja, todo elemento de K pode ser escrito como $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$. Com os $\alpha_1 \in \mathbb{Z}_p$, $i = 1, 2, \cdots, n$. Contando esses elementos teremos que $|K| = p^n$.

7.4 Anéis de Polinômios

Sejam A um anel e X uma indeterminada, então um polinômio $P(X)$ com coeficientes em A na indeterminada X é uma expressão formal do tipo

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$$

onde n é um inteiro não negativo e os a_i são elementos de A. Com a soma e uma multiplicação de polinômios definidas usualmente, teremos que $A[X]$ é um anel.

Definição: Se $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ é um polinômio não nulo em $A[X]$ com $a_n \neq 0$, define-se o grau de $P(X)$ como sendo o inteiro não negativo n. Se $P(X) = 0$, não se define o grau de $P(X)$. Denotaremos o grau de $P(X) \neq 0$ por $gr(P(X))$. Note que $gr(P(X)) = 0$ se, e somente se, $P(X) = a_0 \in A - \{0\}$.

Definição: Se $gr(P(X)) = n$ e $a_n = 1$, diremos que $P(X)$ é um polinômio mônico.

7.5 Classes residuais de Polinômios

Como visto em [12], se K é um corpo, então $K[X]$ é um domínio de integridade euclidiano.

Como no caso das classes residuais de inteiros definiremos as classes residuais de $A = K[X]$ módulo um polinômio não constante e mônico $m = P(X)$ de grau n por:

Seja $R[X] \in K[X]$ então diremos que $R[X] \sim S[X]$ quando os restos das divisões de $R[X]$ e $S[X]$ pelo polinômio $P(X)$ forem iguais, ou seja, $P(X)$ divide $R[x] - S[x]$. Tal relação é uma relação de equivalência.

Portanto temos que $[R(x)] = \{S(X) \in K[X] : R[X] \sim S[X]\}$.

As primeiras observações a serem feitas são que:

$A_m = K[X]_{P(X)} = \{[R(X)] : R(X) \in K(X)$ com $R(X) = 0$ ou $gr(R(X)) < n\}$ onde $[R(X)]$ são os elementos de A_m.

Note que se $R_1(X), R_2(X) \in K(X)$, com $gr(R_1(X)) < n$ e $gr(R_2(X)) < n$, são tais que $R_1(X) \neq R_2(X)$, então $[R_1(X)] \neq [R_2(X)]$.

De fato, dado $F(X) \in K[X]$, pelo algoritmo da divisão euclidiana, temos que existem polinômios $Q(X)$ e $R(X)$ unicamente determinados pelas condições $F(X) = P(X) \cdot Q(X) + R(X)$ com $R(X) = 0$ ou $gr(R(X)) < n$, então existe um único polinômio $R(X)$ com $R(X) = 0$ ou $gr(R(X)) < n$ tal que $[F(X)] = [R(X)]$. Isso prova que os elementos de $K[X]_{P(X)}$ estão em correspondência biunívoca com os polinômios de $K[X]$ da forma $a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$.

Anunciaremos agora dois resultados cujas demonstrações podem ser encontradas em [7].

Proposição: O elemento $[F(X)] \in K[X]_{P(X)}$ é inversível se, e somente se, $MDC(F(X), P(X)) = 1$.

Teorema: O anel $K[X]_{P(X)}$ é um corpo se, e somente se, o polinômio $P(X)$ é irredutível.

“Esse teorema nos fornece um método prático para construir corpos finitos. De fato, seja dado $K = \mathbb{Z}_p$, onde p é um número primo positivo. Se $P(X) \in K[X]$ é um polinômio irredutível de certo grau n, então como $K[X]_{P(X)}$ é formado pelas classes de polinômios $\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_iX^i \in K[X]$, e dois polinômios distintos de graus menores do que n dão origem a classes distintas. O corpo $K[X]_{P(X)}$ tem p^n elementos. Além disso, para cada $a \in \mathbb{Z}_p$, temos que $[r] = [s]$ se, e somente se, $r = s$ em $\mathbb{Z}_p$. Assim podemos pensar em $\mathbb{Z}_p$ como um subcorpo de $K[X]_{P(X)}$, identificando o elemento $r \in \mathbb{Z}_p$ com o elemento $[r] \in K[X]_{P(X)}$."

Exemplo 1) Seja $K = \mathbb{Z}_2$ e $P(X) = X^2 + X + 1$. Note que $P(X)$ é um polinômio irredutível de grau 2 em $\mathbb{Z}_2[X]$, pois $P(0) = 1 \neq 0$ e $P(1) = 3 = 1 \neq 0$.

Como $gr(P(X)) = 2$, o corpo $\mathbb{Z}_2[X]_{X^2+X+1}$ terá $2^2 = 4$ elementos, ou seja, os seus elementos serão dados por $\sum\limits_{i=0}^{1} a_iX^i = a_0 + a_1X \in \mathbb{Z}_2[X]$ onde $a_0, a_1 \in \{0, 1\}$.

Fazendo $a_0 = 0$ e $a_1 = 0$ obtemos o elemento $[0]$

Fazendo $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$ obtemos o elemento $[1]$

Fazendo $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$ obtemos o elemento $[X]$

Fazendo $a_0 = 1$ e $a_1 = 1$ obtemos o elemento $[1 + X]$

Construímos assim o corpo $\mathbb{F}_4 = \mathbb{Z}_2[X]_{X^2+X+1} = \{[0], [1], [X], [1 + x]\}$.

Descrevemos abaixo as operações de adição no corpo $\mathbb{F}_4$:

$+$	$[0]$	$[1]$	$[X]$	$[1+X]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$[X]$	$[1+X]$
$[1]$	$[1]$	$[2]$	$[1+X]$	$[2+X]$
$[X]$	$[X]$	$[1+X]$	$[2X]$	$[1+2X]$
$[1+X]$	$[1+X]$	$[2+X]$	$[1+2X]$	$[2+2X]$

Como $K=\mathbb{Z}_2$, então a tabela acima pode ser reescrita assim:

$+$	$[0]$	$[1]$	$[X]$	$[1+X]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$[X]$	$[1+X]$
$[1]$	$[1]$	$[0]$	$[1+X]$	$[X]$
$[X]$	$[X]$	$[1+X]$	$[0]$	$[1]$
$[1+X]$	$[1+X]$	$[X]$	$[1]$	$[0]$

Descrevemos abaixo a operação de multiplicação em $\mathbb{F}_4$:

$\times$	$[0]$	$[1]$	$[X]$	$[1+X]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$	$[X]$	$[1+X]$
$[X]$	$[0]$	$[X]$	$[X^2]$	$[X+X^2]$
$[1+X]$	$[0]$	$[1+X]$	$[X+X^2]$	$[1+X^2]$

Sabemos que $K=\mathbb{Z}_2$, então como temos que:

$$[0]=[1+X+X^2]=[1]+[X+X^2]\Rightarrow[X+X^2]=-1=1\Rightarrow[X+X^2]=[1]$$

$$[0]=[1+X+X^2]=[1+X]+[X^2]\Rightarrow[0]+[1+X]=[2+2X]+[X^2]\Rightarrow[X^2]=[1+X]$$

$$[1+X]^2=[1+2X+X^2]=[1]+[X^2]=[1]+[1+X]\Rightarrow[1+X]^2=[X]$$

Então a tabela de multiplicação pode ser representada assim:

$\times$	$[0]$	$[1]$	$[X]$	$[1+X]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$	$[X]$	$[1+X]$
$[X]$	$[0]$	$[X]$	$[1+X]$	$[1]$
$[1+X]$	$[0]$	$[1+X]$	$[1]$	$[X]$

Exemplo 2) Sejam $K = \mathbb{Z}_2$ e $P(X) = X^3 + X + 1$. Note que $P(X)$ é um polinômio irredutível de grau 3 em $\mathbb{Z}_2[X]$, pois $P(0) = 1 \neq 0$ e $P(1) = 3 = 1 \neq 0$,

Como $gr(P(X)) = 3$, o corpo $\mathbb{Z}_2[X]_{X^3+X+1} \in \mathbb{Z}_2[X]$ onde $a_0, a_1, a_2 \in \{0,1\}$.

Fazendo $a_0 = 0$, $a_1 = 0$ e $a_2 = 0$ obteremos o elemento $[0]$

Fazendo $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ e $a_2 = 0$ obteremos o elemento $[1]$

Fazendo $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ e $a_2 = 0$ obteremos o elemento $[X]$

Fazendo $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ e $a_2 = 0$ obteremos o elemento $[1+X]$

Fazendo $a_0 = 0$, $a_1 = 0$ e $a_2 = 1$ obteremos o elemento $[X^2]$

Fazendo $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ e $a_2 = 1$ obteremos o elemento $[1+X^2]$

Fazendo $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$ obteremos o elemento $[X+X^2]$

Fazendo $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$ obteremos o elemento $[1+X+X^2]$

Construímos assim o corpo $\mathbb{Z}_8$:

$\mathbb{F}_8 = \mathbb{Z}_2[X]_{X^3+X+1} = \{[0],[1],[X],[1+X],[X^2],[1+X^2],[X+X^2],[1+X+X^2]\}$

Exemplo 3) Considere agora $K = \mathbb{Z}_5$ e o polinômio $P(X) = X^2 - 3$.

$P(X)$ é um polinômio irredutível de grau 2 em $\mathbb{Z}_5[X]$, pois $P(0) = -3 = 2 \neq 0, P(1) = -2 = 3 \neq 0, P(2) = 1 \neq 0, P(3) = 6 = 1 \neq 0$ e $P(4) = 13 = 3 \neq 0$.

Como $gr(P(X)) = 2$, o corpo $\mathbb{Z}_5[X]_{X^2-3}$ terá $5^2 = 25$ elementos ou seja, os seus elementos são dados por $\sum_{i=0}^{1} a_i X^i = a_0 + a_1 X \in \mathbb{Z}_5[X]$ onde $a_0, a_1 \in \{1,2,3,4\}$.

Portanto

$\mathbb{F}_{25} = \mathbb{Z}_5[X]_{X^2-3} = \{[0],[1],[2],[3],[4],[X],[2X],[3X],[4X],[1+X],[2+X],[3+X],[4+X],[1+2X],[2+2X],[3+2X],[4+2X],[1+3X],[2+3X],+[3+3X],[4+3X],[1+4X],[2+4X],[3+4X],[4+4X]\}$

Note que $[0] = [X^2-3] = [X^2]-[3] \Rightarrow [X^2] = [3]$ e $[2X]^2 = [4X^2] = [4]\cdot[X^2] = [12] = [2]$.

Exemplo 4) Sejam $K = \mathbb{Z}_3$ e $P(X) = X^2 + 1$. Note que $P(X)$ é um polinômio irredutível de grau 2 em $\mathbb{Z}_3[X]$, pois $P(0) = 1 \neq 0$, $P(1) = 1 \neq 0$ e $P(2) = 5 = 2 \neq 0$. Como $gr(P(X)) = 2$, o corpo $\mathbb{Z}_3[X]_{X^2+1}$ terá $3^2 = 9$ elementos, ou seja, os seus elementos são dados por $\sum_{i=0}^{1} a_i X^i = a_0 + a_1 X \in \mathbb{Z}_3[X]$ onde $a_0, a_1 \in \{0,1,2\}$.

Fazendo $a_0 = 0$ e $a_1 = 0$ obtemos o elemento $[0]$

Fazendo $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$ obtemos o elemento $[1]$

Fazendo $a_0 = 2$ e $a_1 = 0$ obtemos o elemento $[2]$

Fazendo $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$ obtemos o elemento $[X]$

Fazendo $a_0 = 1$ e $a_1 = 1$ obtemos o elemento $[1+X]$

Fazendo $a_0 = 2$ e $a_1 = 1$ obtemos o elemento $[2+X]$

Fazendo $a_0 = 0$ e $a_1 = 2$ obtemos o elemento $[2X]$

Fazendo $a_0 = 1$ e $a_1 = 2$ obtemos o elemento $[1+2X]$

Fazendo $a_0 = 2$ e $a_1 = 2$ obtemos o elemento $[2+2X]$

Portanto $\mathbb{F}_9 = \mathbb{Z}_3[X]_{X^2+1} = \{[0],[1],[2],[X],[1+X],[2+X],[2X],[1+2X],[2+2X]\}$

Esses exemplos são versões para corpos finitos do seguinte fato:

Mostraremos agora que o corpo dos números complexos, representado por $\mathbb{C}$ é isomorfo ao corpo $\mathbb{R}[X]_{x^2+1}$.

Definido $\mathbb{R}[X]_{x^2+1} = \{[ax+b]/a,b,\in \mathbb{R}\}$, considere a aplicação $\begin{cases} \varphi : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}[X]_{x^2+1} \\ a+bi \mapsto [ax+b] \end{cases}$ então teremos que $a+bi = c+di \Leftrightarrow [ax+b] = [cx+d]$.

Vamos provar que $\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y)$, $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y)$ e $\varphi(1) = 1$, ou seja, que φ é um homomorfismo.

$\varphi((a+bi)+(c+di)) = \varphi((a+c)+(b+d)i) = [(a+c)+(b+d)x]$

$\varphi((a+bi)+(c+di)) = [a+bx]+[c+dx] = \varphi(a+bi)+\varphi(c+di)$

$\varphi((a+bi)\cdot(c+di)) = \varphi((ac-bd)+(ad+bc)i) = [(ac-bd)+(ad+bc)x]$

Por outro lado temos que $[ax+b]\cdot[cx+d] = [bdc^2+(ad+bc)x+ac]$, então dividindo $bdx^2+(ad+bc)x+ac$ por x^2+1, obteremos $[(ac-bd)+(ad+bc)x]$, conforme a divisão abaixo:

$$\begin{array}{r|l} bdx^2+(ad+bc)x+ac & x^2+1 \\ \cline{2-2} bdx^2 \qquad\qquad\qquad +bd & \text{bd} \\ \hline (ad+bc)x+(ac-bd) & \end{array}$$

Portanto concluímos que:

$$\varphi((a+bi)\cdot(c+di)) = [(ac-bd)+(ad+bc)x] = [a+bx]\cdot[c+dx] = \varphi(a+bi)\cdot\varphi(c+di)$$

Como $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}[X]_{X^2+1}$ são corpos então $\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x)-\varphi(y) = 0 \Rightarrow \varphi(x-y) = 0.$

Se $x \neq y$, então $x-y$ seria inversível, logo $\varphi(x-y)$ seria inversível, e portanto, não nulo; o que seria um absurdo. Consequentemente $x = y$ e portanto, φ é injetora.

Como φ é um homomorfismo injetor de corpos, sua imagem é um subcorpo de $\mathbb{R}[X]_{X^2+1}$; para provar que $\varphi(\mathbb{C})$ é um subcorpo de $\mathbb{R}[X]_{X^2+1}$, teremos que mostrar apenas que, se $\alpha,\beta \in \varphi(\mathbb{C})$,então $\alpha-\beta \in \varphi(\mathbb{C})$ e se $\beta \neq 0$ então teremos que $\dfrac{\alpha}{\beta} \in \varphi(\mathbb{C})$.

Suponhamos então que $\alpha = \varphi(x)$ e $\beta = \varphi(y)$, temos que:

$$\begin{cases} \alpha-\beta = \varphi(x)-\varphi(y) = \varphi(x-y) \in \varphi(\mathbb{C}) \\ \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(y)} = \varphi(x)\cdot[\varphi(y)]^{-1} = \varphi(x)\cdot\varphi(y^{-1}) = \varphi(x\cdot y^{-1}) \in \varphi(\mathbb{C}) \end{cases}$$

7.6 Considerações sobre equações algébricas em corpos finitos

Notemos que todas as fórmulas radicais para equações de grau menor ou igual a 4 foram obtidas considerando-se apenas a estrutura algébrica de corpo dos conjuntos que continham os coeficientes das equações. O problema crucial se deu ao entendermos os complexos como um corpo algebricamente fechado. Nele, encontram-se as raízes quadradas e cúbicas que ocorrem nas fórmulas radicais.

Notemos em $\mathbb{Z}_2$ a fórmula resolutiva da equação do segundo grau não pode ser usada pois temos $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e sabemos que $[2] = [0]$

No caso da fórmula de Cardano-Tartaglia, ela também não pode ser usada em $\mathbb{Z}_2$ w $\mathbb{Z}_3$, pois temos $x = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}}$ e sabemos que $[2] = [0]$ e $[3] = [0]$.

Tais fórmulas valem, no entanto, em corpos de características diferente de 2 e de 3.

Exemplificaremos com equações em $\mathbb{Z}_5$.

1) $x^2 - [24]x + [13] = [0]$

Sabemos que em $\mathbb{Z}_5, [24] = [4]$ e $[13] = [3]$, portanto a equação será $x^2 - [4]x + [3] = 0$. Lembrando que em $\mathbb{Z}_5$ o inverso de $[2]$ é igual a $[3]$. então teremos:

$$\begin{cases} x^2 - [4]x + [3] = [0] \\ \Delta = [4] \\ x = \dfrac{[4] \pm [2]}{[2]} = ([4] \pm [2]) \cdot [2]^{-1} = ([4] \pm [2]) \cdot [3] \\ x = [18] = [3] \text{ ou } x = [6] = [1] \end{cases}$$

Logo o conjunto solução é o conjunto $S = \{[3], [1]\}$.

2) $x^2-[12]x+[22]=[0]$

Sabemos que em $\mathbb{Z}_5, [12]=[2]$ e $[22]=[2]$ portanto a equação será $x^2-[2]x+[2]=[0]$.

$$\begin{cases} x^2-[2]x+[2]=0 \\ \Delta=[-4]=[1] \\ x=\dfrac{[2]\pm[1]}{[2]}=([2]\pm[1])\cdot[2]^{-1}=([2]\pm[1])\cdot[3] \\ x=[9]=[4] \text{ ou } x=[3] \end{cases}$$

Logo o conjunto solução é o conjunto $S=\{[3],[4]\}$.

Note nesse exemplo que o discriminante negativo foi facilmente resolvido pois em $\mathbb{Z}_5$ sabemos que $[-4]=[1]$.

Conforme observamos, corpos finitos não são ordenáveis. Logo não há números negativos. No entanto, encontramos nesse contexto situações em que o corpo não comporta raízes quadradas ou cúbicas de alguns dos seus elementos. É o que ocorre nesse próximo exemplo.

3) $x^2-[4]x+[2]=[0]$

$$\begin{cases} x^2-[4]x+[2]=[0] \\ \Delta=[3] \\ x=\dfrac{[4]\pm\sqrt{[3]}}{[2]} \\ x=? \end{cases}$$

O problema é que $[3]$ não é um quadrado em $\mathbb{Z}_5$. Faremos então uma extensão do corpo $\mathbb{Z}_5$ associada ao polinômio irredutível $P(X)=X^2-3$, pois sabemos que $\mathbb{Z}_5$ é um subcorpo de $\mathbb{F}_{25}=\mathbb{Z}_5[X]_{X^2-3}$.

Sabemos que no corpo $\mathbb{F}_{25}=\mathbb{Z}_5[X]_{X^2-3}$ temos que $[X]^2-[3]=[0]$, portanto $[X]^2=[3]$, então teremos as seguintes soluções para a equação acima:

$$\begin{cases} x=\dfrac{[4]\pm\sqrt{[3]}}{[2]}=\left([4]\pm\sqrt{X^2}\right)\cdot[2]^{-1}\Rightarrow([4]\pm[X])\cdot[3] \\ \Rightarrow x=[12]\pm[3X]\Rightarrow x=[2]\pm[3X]\Rightarrow x=[2+3X] \text{ ou } x=[2-3X] \end{cases}$$

Ou seja, encontramos as raízes $x=[2+3X]$ ou $x=[2-3X]$.

De fato essas são as raízes procuradas, pois:

$$\begin{cases} [2+3X]^2-4[2+3X]+[2]=[4+12X+9X^2]-[8+12X]+[2] \\ =[4+12X+9X^2-8-12X+2]=[4X^2-2]=[10]=[0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} [2-3X]^2-4[2-3X]+2=[4+12X+9X^2]-[8-12X]+[2] \\ =[4-12X+9X^2-8+12X+2]=[4X^2-2]=[10]=[0] \end{cases}$$

Logo o conjunto solução é o conjunto $S=\{[2+3X],[2-3X]\}$.

4) $x^3=[1]$

Temos que $[1]$ é uma solução. Nesse contexto, pode-se provar que, como em característica zero, $\mathbb{Z}_5[X]$ é um domínio Euclidiano, veja [12].

Logo $x^3-[1]$ é divisível por $x-[1]$, ou seja $x^3-[1]=(x-[1])(x^2+x+[1])$, onde $x^2+x+[1]$ é um polinômio mônico e irredutível em $\mathbb{Z}_5$.

As demais raízes cúbicas de $[1]$ estão então na extensão de $\mathbb{Z}_5[X]_{X^2+X+1}$.

Nessa extensão, $[X]^2+[X]+[1]=[0]$, logo $[X]$ é uma raiz de $x^2+x+[1]$ em $\mathbb{Z}_5[X]_{X^2+X+1}$. Para simplificar a notação, chamamos $[X]$ de α.

Dividindo $x^2+x+[1]$ por $x-\alpha$, obtemos:

$$\begin{array}{l|l} x^2+x+[1] & x-\alpha \\ \cline{2-2} x^2-\alpha x & x+1+\alpha \\ \cline{1-1} x(1+\alpha)+[1] & \\ x(1+\alpha)-\alpha-\alpha^2 & \\ \cline{1-1} [1]+\alpha+\alpha^2=[0] & \end{array}$$

Assim a terceira raiz de $x^2+x+[1]$ é $-\alpha-1$ e o conjunto solução de $x^3=[1]$ em $\mathbb{Z}_5[X]_{X^2+X+1}$ é o conjunto $S=\{[1],[X],-[X]-[1]\}$, enquanto em $\mathbb{Z}_5$ é $S=\{1\}$.

5) $x^3+[2]x-[2]=[0]$

Em $\mathbb{Z}_5$ a fórmula de Cardano-Tartaglia para equação $x^3+px+q=0$ fica assim:

$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{2}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{2}}}$ pois $[27]=[2]$, portanto teremos:

$$\begin{cases} x=\sqrt[3]{[1]+\sqrt{[1]+[4]}}+\sqrt[3]{[1]-\sqrt{[1]+[4]}}=\sqrt[3]{[1]+\sqrt{[5]}}+\sqrt[3]{[1]-\sqrt{[5]}} \\ x=\sqrt[3]{[1]+\sqrt{[0]}}+\sqrt[3]{[1]-\sqrt{[0]}}=\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}=[1]+[1]=[2] \end{cases}$$

Aqui usamos o fato de que $\sqrt[3]{[1]}=[1]$ em $\mathbb{Z}_5$.

Dividindo o polinômio $x^3+[2]x-[2]$ pelo binômio $x-[2]$ em $\mathbb{Z}_5$, obteremos:

$$\begin{array}{l|l} x^3+[2]x-[2] & x-[2] \\ \cline{2-2} x^3-[2]x^2 & x^2+[2]x+[1] \\ \hline [2]x^2+[2]x-[2] & \\ [2]x^2-[4]x & \\ \hline [x]-[2] & \\ [x]-[2] & \\ \hline [0] & \end{array}$$

Portanto $x^3+[2]x-[2]=(x-[2])(x^2+[2]x+[1])$, mas $x^2+[2]x+[1]=(x+[1])^2$, então teremos que $x^3+[2]x-[2]=(x-[2])(x+[1])^2$, ou seja, as raízes da equação

$x^3+[2]x-[2]=[0]$ serão $\begin{cases} x-[2]=0\Rightarrow x=[2] \\ x+[1]=0\Rightarrow x=-[1]\Rightarrow x=[4] \end{cases}$, onde $[4]$ é uma raiz dupla.

Logo o conjunto solução é o conjunto $S=\{[2],[4]\}$.

Outra forma de chegar a essas raízes é utilizando o exercício 4 a partir de $\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}$ acima. Lembremos que cada $\sqrt[3]{1}$ da primeira parcela se associa a uma $\sqrt[3]{1}$ da segunda parcela através de $v=\frac{p}{3u}$.

Sabemos do exercício 4 que as raízes cúbicas de 1 em $\mathbb{Z}_5[X]_{X^2+X+1}$, são $u_1=[1]$, $u_2=\alpha$ e $u_3=-1-\alpha$, onde $\alpha=[X]$.

Obtemos portanto:

$$\begin{cases} v_1 = -\dfrac{[2]}{[3]u_1} = \dfrac{[2]}{[3]\cdot[1]} = -[2]\cdot[3]^{-1} = [3]\cdot[2] = [6] = [1] \\ v_2 = -\dfrac{[2]}{[3]u_2} = \dfrac{[2]}{[3]\cdot\alpha} = -[2]\cdot[3]^{-1}\cdot\alpha^{-1} = [3]\cdot[2]\cdot\alpha^2 = \alpha^2 = -1-\alpha \\ v_3 = -\dfrac{[2]}{[3]u_3} = \dfrac{[2]}{[3]\cdot(-1-\alpha)} = -[2]\cdot[3]^{-1}\cdot(-1-\alpha)^{-1} = [3]\cdot[2]\cdot\alpha^{-2} = \alpha \end{cases}$$

Logo Chegamos as soluções $\begin{cases} x_1 = u_1 + v_1 = [1]+[1] = [2] \\ x_2 = u_2 + v_2 = \alpha + (-1-\alpha) = -1 = [4] \\ x_3 = u_3 + v_3 = (-1-\alpha) + \alpha = -1 = [4] \end{cases}$

6) $x^3 - [4]x^2 - x + [2] = [0]$

Notamos que essa é uma equação cúbica completa, portanto não podemos usar a fórmula de Cardano-Tartaglia, porém percebemos que $x = [3]$ é uma solução dessa equação pois teremos $[3]^3 - 4[3]^2 - [3] + [2] = [27] - [36] - [3] + [2] = [-10] = [0]$.

Vamos então dividir o polinômio $x^3 - [4]x^2 - x + [2]$ pelo polinômio $x - [3]$

$$\begin{array}{l|l} x^3 - [4]x^2 - x + [2] & x - [3] \\ \cline{2-2} \underline{x^3 - [3]x^2 \qquad\qquad} & x^2 - x - [4] \\ -x^2 - x + [2] & \\ \underline{-x^2 + [3]x \qquad\qquad} & \\ -[4]x + [2] & \\ \underline{-4[x] + [12]} & \\ -[10] = [0] & \end{array}$$

Como $x^3 - [4]x^2 - x + [2] = (x - [3])(x^2 - x - [4]) = [0]$, então as outras raízes dessa equação serão as raízes da equação quadrática abaixo:

$$\begin{cases} x^2 - x - [4] = [0] \\ \Delta = [2] \\ x = \dfrac{[1] \pm \sqrt{[2]}}{[2]} \\ x = ? \end{cases}$$

Faremos então uma expansão do corpo $\mathbb{Z}_5$ associada ao polinômio irredutível $P(X) = X^2 - 2$, pois sabemos que $\mathbb{Z}_5$, é um subconjunto de $\mathbb{F}_{25} = \mathbb{Z}_5[X]_{X^2-2}$.

No corpo $\mathbb{F}_{25} = \mathbb{Z}_5[X]_{X^2-2}$ temos, $[X^2-2] = [0] \Rightarrow [X^2] - [2] = [0] \Rightarrow [X^2] = [2]$, então teremos as seguintes soluções para equação acima:

$$\begin{cases} x = \dfrac{[1] \pm \sqrt{[2]}}{[2]} = \left([1] \pm \sqrt{[X]^2}\right) \cdot [2]^{-1} \Rightarrow x = ([1] \pm [X]) \cdot [3] \\ \Rightarrow x = [3] \pm [3X] \Rightarrow x = [3+3X] \text{ ou } x = [3-3X] \end{cases}$$

Ou seja, encontramos as raízes $x = [3+3X]$ ou $x = [3-3X]$.

De fato essas são as raízes procuradas. pois:

$$\begin{cases} [3+3X]^2 - [3+3X] - [4] = [9+18X+9X^2] - [3+3X] - [4] \\ = [9+12X+9X^2-3+3X-4] = [4X^2+2] = [5] = [0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} [3-3X]^2 - [3-3X] - [4] = [9-18X = 9X^2] - [3-3X] - [4] \\ = [9-18X+9X^2-3-3X-4 = [4X^2+2] = [5] = [0] \end{cases}$$

Logo o conjunto solução é o conjunto $S = \{[3], [3+3X], [3-3X]\}$.

Vale observar, conforme [3], que dado um corpo finito F, então existe um polinômio irredutível de qualquer grau sobre F, o que, com métodos análogos aos utilizados nos exemplos acima, mostra que existem extensões de F com grau finito arbitrário, usados para encontrar raízes de polinômios com coeficientes em F. Além disso, prova-se que duas extensões quaisquer de F com mesmo grau são isomorfas. Finalmente, uma versão mais geral do TFA, conforme [3], afirma que F admite uma extensão algébrica que é algebricamente fechada, como é o caso de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$, denominada fecho algébrico de F.

Bibliografia

[1] Roque, Tatiana e de Carvalho, João Bosco Pitombeiras. *Tópicos de História da Matemática*. SBM Coleção PROFMAT, 2012.

[2] Hefez, A e Villela, M.L.T. *Polinômios e Equações Algébricas*. SBM Coleção PROFMAT, 2012.

[3] Bhattacharya et al. *Basic Abstract Algebra*. Cabrifge: 1994.

[4] Ferreira, Jamil *Construção dos Números*. SBM Textos Universitários, 2010.

[5] Oliveira K.I.M e Fernandes, A.J.C. *Iniciação à Matemática: Um curso com problemas e soluções*. SBM Coleção do Professor de Matemática, 2010.

[6] Jakubovic,J. et al. *Matemática Aplicada*. Editora Moderna, 1980.

[7] Hefez, A e Villela, M.L.T. *Código Corretores de Erros*. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[8] de Oliveira, O.R.B. *The Fundamental Theorem of Algebra: An Elementary and Direct Proof*. The Mathematical Intelligencer, 2011.

[9] Lima, E.L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. Volume 3, Editora SBM , 1999.

[10] Ripoli, C. et al. *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica*. Vol 1, Editora SBM, 2015.

[11] Eves, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora UNICAMP, 2004.

[12] Dummit, D. S. e Foote, R. M. *Abstratic Algebra*. Prentice Hall, 1994.

[13] Hefez, A. *Aritmética*. SBM Coleção PROFMAT, 2014.

[14] Garbi, Gilberto Geraldo. *Lições de História da Matemática*. São Paula: USP - Notas do Curso de Verão, 2004.