



PROFMAT



UFOP

Universidade Federal
de Ouro Preto

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Marcelo Henrique Simões Moreira

Geometria Elíptica e Aplicações.
(Elliptical Geometry and Applications)

Ouro Preto

2017

MARCELO HENRIQUE SIMÕES MOREIRA

**Geometria Elíptica e Aplicações.
(Elliptical Geometry and Applications)**

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edney Augusto Jesus de Oliveira.

**Ouro Preto
2017**

M813g Moreira, Marcelo Henrique Simões.
Geometria elíptica e aplicações [manuscrito] / Marcelo Henrique Simões
Moreira. - 2017.
52f.: il.: color; grafs; Fotos.

Orientador: Prof. Dr. Edney Augusto Jesus de Oliveira.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de
Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-
Graduação em Matemática em Rede Nacional.
Área de Concentração: Matemática com oferta nacional.

1. Geometria riemaniana. 2. Geometria afim. I. Oliveira, Edney Augusto
Jesus de. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU: 514.135/.142



UFOP
Universidade Federal
de Ouro Preto



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)
Departamento de Matemática - PROFMAT



“Geometria Elíptica e Aplicações”

Autor: Marcelo Henrique Simões Moreira

Dissertação defendida e aprovada, em 15 de setembro de 2017, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Edney Augusto Jesus de Oliveira (Orientador)
Universidade Federal de Ouro Preto

Gil Fidelix de Souza
Universidade Federal de Ouro Preto

Gheyza Ferreira da Silva
Universidade Federal de São João Del-Rei

Dedico esse trabalho aos meus pais pelo esforço e carinho que tem tido comigo por todos esses anos.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos meus pais pelo suporte e apoio por todos esses anos de estudo. A meus irmãos por sempre acreditarem em mim e aguentarem meu mau humor nesse período. Ao meu orientador Edney pela paciência e compreensão, mesmo quando as coisas não iam bem. A todos os meus amigos, familiares e entes queridos que compreenderam meu sumiço. A Escola Estadual Dom Pedro II e seu diretor Jorge Tadeu pela amizade, apoio e compreensão.

Resumo

Esse trabalho faz uma construção das geometrias: elíptica dupla, projetiva e afim. Também apresenta aplicações das mesmas como um modelo para o movimento da superfície terrestre e na identificação de cônicas. Além disso, possui uma utilização de cada uma dessas aplicações no ensino médio como meio de motivar os alunos no estudo de geometrias não euclidianas.

Palavras-chave: Geometria Elíptica, Geometria Afim, Aplicações.

Abstract

This work makes a construction of the geometries: Double Eiptica, Projective, and Affine. It presents applications as the model for the movement of the terrestrial surface and in the identification of conics. In addition, has a use of each of these applications in high school with a means to motivate students in the study of non-Euclidean geometries.

Keywords: Elliptical Geometry, Affine Geometry, Applications.

Conteúdo

1	Introdução	10
2	Aprofundando nos contextos	12
2.1	Plano elíptico	12
2.2	Distância entre pontos elípticos	17
2.3	Isometrias elípticas	19
2.4	Congruência	20
2.5	O plano projetivo	22
2.6	Geometria Afim	27
2.7	Colineação	29
2.7.1	Relação entre operador linear e colineação	29
2.7.2	Relação entre operador linear e correlação	30
3	Identificação de Cônicas	31
3.1	As cônicas	31
3.2	Identificando as cônicas	33
4	No ensino médio	38
4.1	Geometria elíptica dupla	38
4.2	Identificando cônicas	44
4.3	Conclusão	49
	Referências Bibliográficas	51

1 Introdução

Esse trabalho baseia-se no uso da geometria elíptica e suas aplicações. Já que nosso mundo não é plano essa geometria é um modelo mais real para descrever grandes deslocamentos sobre a superfície da Terra. A mesma ao se expandir pode ser usada na identificação de cônicas, além de também ser usada na definição da geometria projetiva que é muito utilizada hoje.

Um segundo foco do trabalho é demonstrar os resultados dessa mesma geometria, assim como toda sua formulação, de forma que o professor que estiver disposto usa-la possa ter embasamento teórico para trabalhar com seus alunos. O que inclui um estudo das geometrias não euclidianas tanto faladas e pouco usadas no ensino médio.

No segundo capítulo, falamos sobre a geometria elíptica dupla, suas definições, formulações e estrutura. Em seguida, construímos a geometria projetiva ou geometria elíptica simples que possui sua base ligada à geometria elíptica dupla. Além disso, fazemos a construção da geometria afim que está ligada a geometria projetiva. Um dos fatos mais intrigante nessas geometrias é como elas se interligam e fazem quase uma espécie de "simbiose", no sentido que uma depende da outra para ser definida e existir. Isso também nos ajuda a ter uma ideia melhor sobre aquela máxima sempre dita aos alunos e que poucos compreendem, até mesmo os universitários, que duas retas se encontram no infinito.

O terceiro capítulo é todo dedicado a identificação de cônicas, no qual utilizamos utilizando as geometrias projetiva e afim, aplicando técnicas como expansões, projeções e identificação afim. Empregamos também nestas identificações a ideia de que duas retas paralelas se encontram no infinito.

No quarto capítulo, inicialmente usamos a geometria elíptica dupla para criar uma forma de medir ângulos numa esfera. Usamos um globo para mostrar que essa geometria é um melhor modelo para movimentação, em longas distâncias, sobre o nosso planeta. Essa é uma parte que utiliza trabalho manual, manipulando isopor, régua, cola quente sendo muito interessante para feiras científicas em escolas, bem como para motivar o aluno a estudar um pouco mais as geometrias que temos.

Além disso, criamos um algoritmo para identificar cônicas que possuem o termo misto. Nessa parte temos o auxílio do Geogebra para confirmar os resultados. A ideia é gerar as seguintes perguntas nos alunos.

- Como esse algoritmo funciona?
- Por que essa cônica está rotacionada?
- Todas as cônicas que rotacionadas vem desse tipo de equação?

E quem sabe posteriormente falar mais da geometria afim e da geometria projetiva.

Uma observação importante é que o professor poderá ir direto ao quarto capítulo. Mas, os capítulos anteriores criam o embasamento teórico mais coerente. Assim, eles podem ser vistos como uma segunda leitura para aqueles que quiserem se aprofundar melhor nos conceitos.

2 Aprofundando nos contextos

2.1 Plano elíptico

Iniciaremos esse capítulo com a definição que a nomeia:

Definição 2.1.1. Chamaremos de plano elíptico o conjunto de todos os pontos do \mathbb{R}^3 equidistantes a uma unidade da origem $(0,0,0)$ e denotaremos tal conjunto por \mathbb{S}^2 .

Note que \mathbb{S}^2 quando vista imersa dentro do \mathbb{R}^3 é precisamente a casca de uma esfera unitária. Nosso objetivo é estudar tal casca como se não existe nenhum ponto fora dela. É claro que em diversos momentos iremos supôr tal plano dentro do \mathbb{R}^3 , afim de obtermos resultados interessantes. Aos pontos na casca da esfera daremos o nome de pontos elípticos. Aqui vamos relatar um abuso de linguagem, algumas vezes vamos considerar os pontos elípticos como vetores saindo da origem do \mathbb{R}^3 , sendo assim será comum usar termos como "norma de um ponto" com essa conotação.

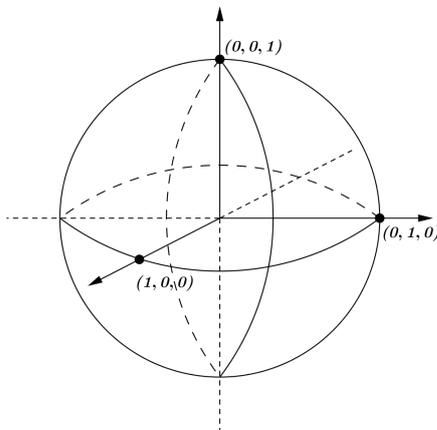


Figura 2.1: Plano Elíptico.

Na figura ao lado temos um plano elíptico \mathbb{S}^2 . O mesmo possui o centro na origem do sistema cartesiano do \mathbb{R}^3 e é formado por uma esfera de raio 1. Toca o eixo x nos pontos $(1,0,0)$ e $(-1,0,0)$, o eixo y nos pontos $(0,1,0)$ e $(0,-1,0)$ e o eixo z nos pontos $(0,0,1)$ e $(0,0,-1)$.

Definição 2.1.2. Uma reta elíptica é a interseção de um plano que passa pela origem do \mathbb{R}^3 , digamos α , com \mathbb{S}^2 . Se o vetor normal de α for n denotaremos essa reta por r_n . Em símbolos

$$r_n = \mathbb{S}^2 \cap \alpha.$$

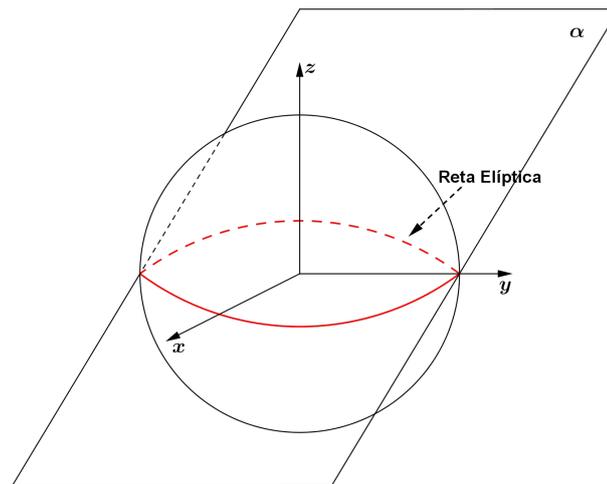


Figura 2.2: Reta Elíptica.

Iremos agora mostrar que nossa notação para retas elípticas está bem definida. Antes, para isso vamos enunciar a seguinte proposição, que pode ser vista em [4].

Proposição 2.1.1. *Dados dois planos de \mathbb{R}^3 que possuem o mesmo vetor normal, eles são paralelos ou coincidentes. O segundo ocorre quando a interseção entre eles é diferente de vazio.*

Note que a definição de reta elíptica pode gerar a seguinte confusão: dado um plano α podemos obter dele vários vetores normais distintos, mas paralelos. Nesse sentido nossa indexação pelo vetor normal não seria funcional, uma vez que o plano e o \mathbb{S}^2 continuam os mesmos (e conseqüentemente a sua interseção). No entanto o resultado a seguir prova que a indexação independe de vetores paralelos.

Teorema 2.1.1. *Sejam r_n e r_v duas retas elípticas dadas respectivamente pelos planos α_n e α_v de vetores normais n e v . Então $r_n = r_v$ se, e somente se $v = \lambda n$ com $\lambda \in \mathbb{R}^*$.*

Demonstração

Suponha que $r_n = r_v$. Temos, por definição, que $r_n = \mathbb{S}^2 \cap \alpha_n$ e $r_v = \mathbb{S}^2 \cap \alpha_v$ e portanto $\mathbb{S}^2 \cap \alpha_n = \mathbb{S}^2 \cap \alpha_v$. Como α_n e α_v são subespaços vetoriais de \mathbb{R}^3 que contêm a origem, pela definição de reta elíptica, a igualdade só vale se $\alpha_n = \alpha_v$, logo seus vetores normais são paralelos, isto é, $n = \lambda v$, com $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Agora suponha que $v = \lambda n$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Temos, por definição, que v e n são vetores normais dos subespaços α_n e α_v de \mathbb{R}^3 , logo $\alpha_n \cap \alpha_v \neq \emptyset$, pois os mesmos contêm a origem em \mathbb{R}^3 . Como v é paralelo a n , pois por hipótese $v = \lambda n$, como visto na Proposição 2.1.1, os planos α_n e α_v são coincidentes. Por simplicidade, vamos dizer que $\alpha_n = \alpha_v$ daí $\mathbb{S}^2 \cap \alpha_v = \mathbb{S}^2 \cap \alpha_n$ e portanto $r_n = r_v$.

□

Teorema 2.1.2. (Condição de Incidência) Uma reta elíptica r_n incide no ponto $v \in \mathbb{S}^2$ se, e somente se, $\langle v, n \rangle = 0$. Sendo $\langle v, n \rangle$ o produto interno tradicional do \mathbb{R}^3 .

Demonstração

Se r_n é uma reta elíptica então, por definição, existe um plano α com vetor normal n que passa pela origem e a contém. Dado um ponto $v \in \mathbb{S}^2$ esse ponto incide na reta r_n se, e somente se $v \in \alpha$ e isso ocorre se, e somente se $\langle v, n \rangle = 0$. Caso a reta receba uma indexação diferente de um λn com $n > 0$, o resultado não se altera, pois $\langle v, \lambda n \rangle = \lambda \langle v, n \rangle = \lambda 0 = 0$.

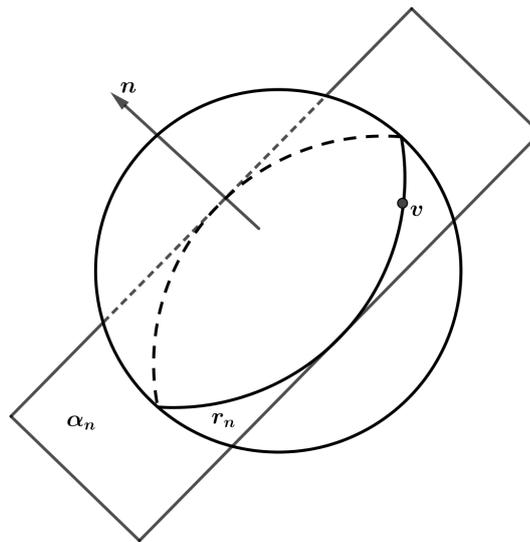
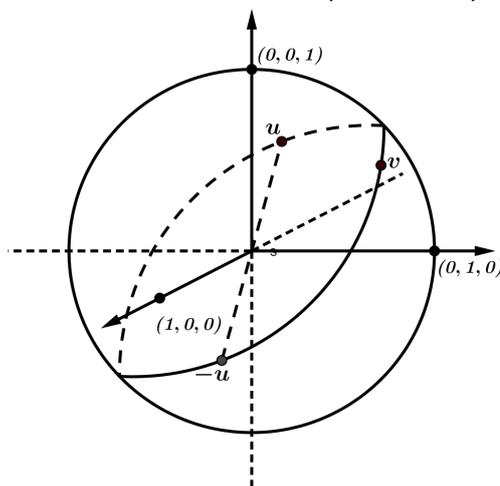


Figura 2.3: Reta r_n , indexada pelo vetor normal n do plano α_n , que incide no ponto v

□

Algo importante de se observar é que os pontos em \mathbb{S}^2 determinam vetores com início na origem no \mathbb{R}^3 . Utilizando este fato e o Teorema 2.1.2 podemos provar que dois pontos determinam uma reta elíptica. Primeiramente vamos afirmar que o produto vetorial de dois pontos de \mathbb{S}^2 só é o vetor nulo quando um ponto é o oposto do outro.



Na figura fica fácil de visualizar, já que o produto será nulo quando: um dos vetores for nulo, caso que não ocorre em \mathbb{S}^2 , ou quando um vetor for múltiplo do outro pois nesse caso o produto vetorial abaixo é zero. Dados dois vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ temos que $u \times v = 0$ equivale a:

$$\begin{aligned} i \cdot y_1 \cdot z_2 + j \cdot z_1 \cdot x_2 + q \cdot x_1 \cdot y_2 \\ -q \cdot x_2 \cdot y_1 - i \cdot y_2 \cdot z_1 - j \cdot z_2 \cdot x_1 = 0. \end{aligned}$$

E, no plano elíptico, isso só ocorre quando $u = -v$. Se esse não for o caso, pegue $n = u \times v$ como sendo o vetor normal do plano α_n . Nesse caso, temos $\langle u, n \rangle = 0 = \langle n, v \rangle$ e pelo critério de incidência u e v pertencem à reta r_n formada por α_n e portanto, os pontos elípticos definem essa reta.

No caso que $n = -v$ os pontos elípticos não definem uma reta, pois para qualquer vetor n no qual $\langle u, n \rangle = 0$ temos que $\langle u, v \rangle = \langle -u, n \rangle = -\langle u, n \rangle = 0$ e portanto, por esses pontos passam infinitas retas elípticas.

Proposição 2.1.2. *Se α_n e $\alpha_{n'}$ são dois planos distintos de \mathbb{R}^3 contendo a origem, então a interseção entre os planos é uma única reta (euclidiana) incidindo na origem e construída pelos múltiplos do vetor $u = n \times n'$.*

Demonstração:

Como pode ser visto em [4], a interseção entre dois planos é uma reta e como $\vec{0} \in \alpha_n$ e $\vec{0} \in \alpha_{n'}$ então $\vec{0} \in \alpha_n \cap \alpha_{n'}$. Portanto, a interseção dos planos contém a origem. Vamos chamar de u o vetor diretor de uma reta s dado por $u = n \times n'$. Como $\langle u, n \rangle = 0$ a reta s com o vetor diretor u está contida em α_n e a reta s também está contida em $\alpha_{n'}$ pois, $\langle u, n' \rangle = 0$. Daí $\alpha_n \cap \alpha_{n'} = s$ e $0 \in s$.

□

Proposição 2.1.3. (Concorrência de duas retas) *Duas retas elípticas distintas, r_n e r_k , sempre se intersectam. Mais ainda, a intersecção ocorre em dois pontos, a saber*

$$u_1 = \frac{n \times k}{\|n \times k\|} \quad \text{e} \quad u_2 = -\frac{n \times k}{\|n \times k\|}.$$

Esse pontos não dependem da indexação das retas elípticas.

Demonstração:

Como visto na proposição anterior a reta $s = \alpha_n \cap \alpha_k$ possui um vetor diretor $u = n \times k$ esse vetor também pode ser dado por $u' = -n \times k$. Para esse vetor pertencer ao plano \mathbb{S}^2 temos que ele deve ser unitário. Daí segue que a interseção das retas elípticas r_n e r_k são dadas por:

$$u = u_1 = \frac{n \times k}{\|n \times k\|} \quad \text{e} \quad u' = u_2 = -\frac{n \times k}{\|n \times k\|}.$$

□

Dados os pontos elípticos $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$, e $w = (x_3, y_3, z_3)$, representaremos por

$$\det[u \ v \ w] := \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}.$$

Proposição 2.1.4. (Equação de colinearidade para três pontos) Os pontos elípticos u , v , e w são colineares se, e só se, $\det[u \ v \ w] = 0$.

Demonstração: No caso que os pontos não são distintos o resultado é imediato.

No caso em que dois dos pontos, por exemplo u e w , são linearmente dependentes temos que $w = -u$. Teremos que os pontos u e v pertencem a uma reta elíptica r_n gerada pelo plano α_n com vetor normal $n = \langle u \times v \rangle$. Assim, como $w = -u$ temos que $\langle n, w \rangle = 0$ e portanto, $w \in \alpha_n$. Então, por definição, os três pontos estarão na mesma reta elíptica. Segue que o produto misto entre eles é zero, já que pertencem ao mesmo plano. Portanto $\det[u \ v \ w] = 0$.

No caso que os três pontos são distintos e linearmente independentes temos, por definição, que os pontos elípticos são colineares se, e somente se, pertencem a mesma reta elíptica r_n . Vamos escolher, sem perda de generalidade, $n = v \times w$. Isso equivale dizer que no plano elíptico eles são colineares se, e somente se, pertencem ao mesmo plano α_n . Portanto, $0 = \langle u, n \rangle = \langle u, v \times w \rangle = \det[u, v, w]$.

□

A próxima proposição trata sobre a concorrência entre três retas elípticas. Quando falamos nisso, podemos pensar em dois casos como mostra a figura abaixo.

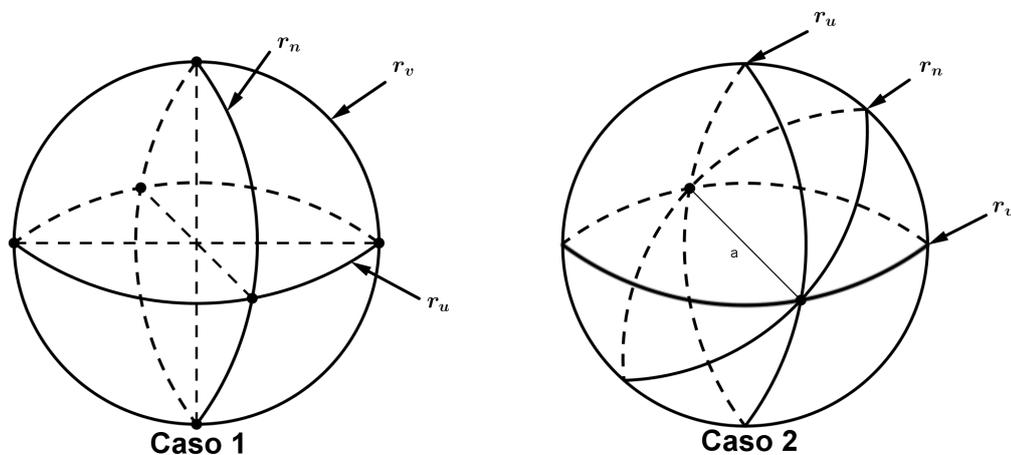


Figura 2.4: A concorrência ocorre no caso 2.

O caso 1 não é um caso de concorrência entre três retas elípticas, embora possamos erroneamente pensar que sim. Só consideramos a concorrência quando ela ocorre nos mesmos pontos, como visto no caso 2.

Proposição 2.1.5. (Equação de concorrência de três retas) As retas elípticas r_n , r_k e r_t são concorrentes se, e só se, $\det[n \ k \ t] = 0$.

Demonstração:

As três retas elípticas se intersectam nos mesmos dois pontos e esse pontos determinam uma reta euclidiana s . Isso ocorre se, e só se, os planos α_n , α_k e α_t geradores de suas

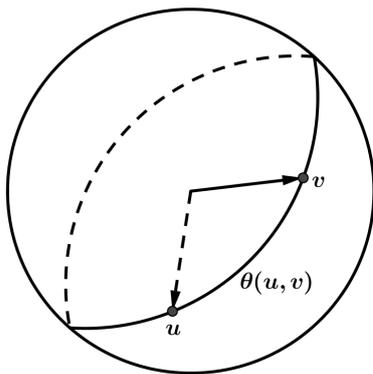
respectivas retas contêm a reta euclidiana s se só se, $s \in \alpha_n \cup \alpha_k \cup \alpha_t$. Vamos chamar de $l = k \times t$ o vetor diretor da reta s . Daí, temos que $0 = \langle n, l \rangle = \langle n, k \times t \rangle = \det[n \ k \ t]$.

□

2.2 Distância entre pontos elípticos

Inicialmente vamos fazer algumas observações. Sabemos, por [4], que o ângulo entre dois vetores u e v dado por $\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$. Assim, como no plano elíptico $\|u\| = \|v\| = 1$, temos que $\cos \theta = \langle u, v \rangle$. O mesmo vale para o seno que é dado por $\sin \theta = \|u \times v\|$.

Definição 2.2.1. (Distância Elíptica) A distância elíptica será a aplicação $d : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $d(u, v) = \theta(u, v)$, onde $\theta(u, v)$ é o ângulo entre os vetores que representam os pontos elípticos u e v .



Podemos ver na figura ao lado que a distância é o arco uv com $r = 1$. Logo temos:

$$\begin{aligned} 2\pi r &= 2\pi \text{rad} \\ d(u, v) &= \theta(u, v) \Rightarrow \theta(u, v) \cdot 2\pi = 2\pi \cdot d(u, v) \end{aligned}$$

Portanto, $d(u, v) = \theta(u, v)$.

Vamos demonstrar agora os seguintes fatos:

(I). $0 \leq d(u, v) \leq \pi$.

(II). $d(u, v) = \pi$ se, e somente se, $u = -v$.

Demonstração :

Primeiro provemos (I): como $\sin \theta(u, v) = \|u \times v\|$ então $\sin \theta(u, v) \geq 0, \forall u, v$. Mas, $\cos \theta(u, v) = \langle u, v \rangle$ que pode ser positivo ou negativo. Portanto $\theta(u, v)$ está no primeiro ou segundo quadrantes do círculo trigonométrico, daí $0 \leq \theta(u, v) \leq \pi$ e portanto, $0 \leq d(u, v) \leq \pi$.

Se $d(u, v) = \pi$ então, conseqüentemente, $\theta(u, v) = \pi$. Agora, $\|u \times v\| = \sin \pi = 0$, se $u \times v = 0$. No plano elíptico isso ocorre se $u = -v$.

□

Definição 2.2.2. Para a Proposição 2.2.1 precisamos do seguinte resultado. A identidade de Lagrange dada por:

$$\langle u \times v, v \times w \rangle = \det \begin{bmatrix} \langle u, v \rangle & \langle u, w \rangle \\ \langle v, v \rangle & \langle v, w \rangle \end{bmatrix} = \langle u, v \rangle \langle v, w \rangle - \langle u, w \rangle \langle v, v \rangle.$$

Mais informações sobre a identidade podem ser vistas em [1].

Proposição 2.2.1. A função $d(u, v)$ é uma função distância em \mathbb{S}^2 . Uma função é uma distância em um conjunto geométrico se gozar de três propriedades.

1. Ser positiva definida, que foi verificado no fato (I) acima.
2. Ser simétrica, ou seja, $d(u, v) = d(v, u)$.
3. A desigualdade triangular.

Demonstração:

A segunda propriedade vem do fato que $d(u, v) = \theta(u, v) = \langle u, v \rangle$ e que $d(v, u) = \theta(v, u) = \langle v, u \rangle$, mas $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ e portanto $d(u, v) = d(v, u)$.

Para a desigualdade triangular, considere três pontos elípticos $u, v, w \in \mathbb{S}^2$. Pela definição de distância elíptica temos as igualdades $\theta(u, v) = d(u, v)$, $\theta(v, w) = d(v, w)$ e $\theta(u, w) = d(u, w)$.

Portanto, a desigualdade que desejamos demonstrar é $\theta(u, w) \leq \theta(u, v) + \theta(v, w)$. Dividiremos a demonstração em dois casos:

1º Caso: Suponha que vale a desigualdade $\pi \leq \theta(u, v) + \theta(v, w)$. Como do fato 1 mostrado acima temos que $\theta(u, w) \leq \pi$ segue imediatamente que $\theta(u, w) \leq \pi \leq \theta(u, v) + \theta(v, w)$.

2º Caso: Suponha que vale a desigualdade $\theta(u, v) + \theta(v, w) \leq \pi$. Como a função $\cos : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ é decrescente, demonstrar a desigualdade triangular é equivalente a demonstrar a desigualdade

$$\cos(\theta(u, v) + \theta(v, w)) \leq \cos \theta(u, w).$$

Lembrando que os vetores são unitários temos as igualdades:

$$\begin{aligned} \cos(\theta(u, v) + \theta(v, w)) &= \cos \theta(u, v) \cos \theta(v, w) - \operatorname{sen} \theta(u, v) \operatorname{sen} \theta(v, w) \\ &= \langle u, v \rangle \langle v, w \rangle - \|u \times v\| \cdot \|v \times w\|. \end{aligned}$$

Agora a desigualdade de Cauchy-Schwartz, que pode ser encontrada em [1], garante que:

$$-\langle u \times v, v \times w \rangle \geq -\|u \times v\| \cdot \|v \times w\|.$$

Temos também que $\langle v, v \rangle = 1$ e aplicando a fórmula de Lagrange Definição 2.2.2, obtemos:

$$\begin{aligned} \cos(\theta(u, v) + \theta(v, w)) &= \langle u, v \rangle \langle v, w \rangle - \|u \times v\| \cdot \|v \times w\| \\ &\leq \langle u, v \rangle \langle v, w \rangle - \langle u \times v, v \times w \rangle \\ &= \langle u, v \rangle \langle v, w \rangle - \langle u, v \rangle \langle v, w \rangle + \langle u, v \rangle \langle v, v \rangle \\ &= \langle u, w \rangle = \cos \theta(u, w). \end{aligned}$$

□

2.3 Isometrias elípticas

Começaremos essa seção com as seguintes definições:

Definição 2.3.1. Um operador linear ortogonal $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear que preserva o produto interno. Ou seja, dados u e v vetores do \mathbb{R}^3 temos

$$\langle U(u), U(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

Definição 2.3.2. Uma isometria elíptica é uma aplicação $U : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ que preserva a distância, ou seja,

$$\theta(U(u), U(v)) = \theta(u, v).$$

Teorema 2.3.1. (Classificação das Isometrias Elípticas) Uma função $U_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ é uma isometria elíptica se, e somente se, U_0 for a restrição de um operador ortogonal $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Demonstração:

Seja $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador ortogonal. Como U preserva a norma temos que

$$\|U(u)\|^2 = \langle U(u), U(u) \rangle = \langle u, u \rangle = \|u\|^2,$$

sua restrição $U_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, $U_0(u) = U(u)$, está bem definida. Vamos agora mostrar que essa função preserva a distância elíptica. Sejam $u, v \in \mathbb{S}^2$, temos

$$\cos \theta(U_0(u), U_0(v)) = \langle U_0(u), U_0(v) \rangle = \langle u, v \rangle = \cos \theta(u, v).$$

E portanto, $\theta(U_0(u), U_0(v)) = \theta(u, v)$.

Reciprocamente, seja $U_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ uma isometria elíptica. Definimos $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, por

$$U(v) = \begin{cases} \|v\| U_0\left(\frac{v}{\|v\|}\right) & , \text{ se } v \neq 0; \\ 0 & , \text{ se } v = 0. \end{cases}$$

Aqui temos que $U(v) = 0$ se, e somente se, $v = 0$ e que se $v \in \mathbb{S}^2$ então $U(v) = U_0(v) \in \mathbb{S}^2$. Vamos mostrar que U preserva o produto interno em \mathbb{R}^3 , ou seja, que U é ortogonal em \mathbb{R}^3 .

Considere dois vetores $u, v \in \mathbb{S}^2$. Se um deles for o vetor nulo, vamos considerar sem perda de generalidade que $u = 0$, temos que

$$\langle U(0), U(v) \rangle = 0 = \langle 0, v \rangle.$$

Portanto, vamos supor que ambos sejam distintos do vetor nulo, daí segue que

$$\langle U(u), U(v) \rangle = \left\langle \|u\| U_0\left(\frac{u}{\|u\|}\right), \|v\| U_0\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right\rangle = \|u\| \cdot \|v\| \left\langle U_0\left(\frac{u}{\|u\|}\right), U_0\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right\rangle$$

$$= \|u\| \cdot \|v\| \cos \theta \left(U_0 \left(\frac{u}{\|u\|} \right), U_0 \left(\frac{v}{\|v\|} \right) \right) = (*).$$

Algumas considerações importantes aqui são:

1. $\|u\|$ e $\|v\|$ saem do produto interno, pois são constantes.
2. No caso $\left\langle U_0 \left(\frac{u}{\|u\|} \right), U_0 \left(\frac{v}{\|v\|} \right) \right\rangle = \theta \left(U_0 \left(\frac{u}{\|u\|} \right), U_0 \left(\frac{v}{\|v\|} \right) \right)$, pois ambos pertencem ao plano elíptico por serem unitário.

Continuando de (*), temos

$$(*) = \|u\| \cdot \|v\| \cos \theta \left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|} \right) = \|u\| \cdot \|v\| \cos \theta(u, v) = \langle u, v \rangle.$$

A etapa crucial da demonstração está na passagem que

$$\theta \left(U_0 \left(\frac{u}{\|u\|} \right), U_0 \left(\frac{v}{\|v\|} \right) \right) = \theta \left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|} \right),$$

pois $\theta(\cdot, \cdot)$ é a função distância em \mathbb{S}^2 e U_0 é uma isometria de \mathbb{S}^2 em relação à distância.

□

2.4 Congruência

Na geometria elíptica dizemos que dois segmentos são congruentes se existe uma isometria elíptica que leva um segmento no outro.

Nessa seção, vamos definir também ângulos entre retas elípticas e assim poderemos definir um triângulo elíptico. Mas, para definir os ângulos vamos diferenciar os vetores normais n e $-n$ das retas elípticas r_n . Essa diferenciação é muito parecida com a orientação de bases em \mathbb{R}^3 .

Primeiramente peguemos uma base orientada do \mathbb{R}^3 dada por $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$. Com essa base montamos uma matriz com entradas nas colunas dada por $[M] = [v_1 \ v_2 \ v_3]$ e calculamos seu determinante, ou seja, $\det[M] = \det[v_1 \ v_2 \ v_3]$. Esse determinante é diferente de zero, pois β é uma base do \mathbb{R}^3 . Dessa forma, se $\det[M] > 0$ então dizemos que a base está orientada positivamente e se $\det[M] < 0$ dizemos que a base está orientada negativamente.

O conjunto de todas as bases orientadas de \mathbb{R}^3 está particionado em O^+ e O^- . Esses conjuntos são chamados de orientações de \mathbb{R}^3 . Orientar \mathbb{R}^3 positivamente é escolher o par ordenado (\mathbb{R}^3, O^+) .

Agora vamos usar esse conceito para orientar as retas elípticas.

Seja O_n o conjunto de todas as bases ordenadas $\beta_{\lambda, n, u}$ da forma $\beta = \{\lambda n, u, v_1\}$, onde $\lambda > 0$ e $u \in r_n$. Dessa forma, podemos particionar O_n em dois subconjuntos distintos

$$O_n^+ = O_n \cap O^+ \quad \text{e} \quad O_n^- = O_n \cap O^-.$$

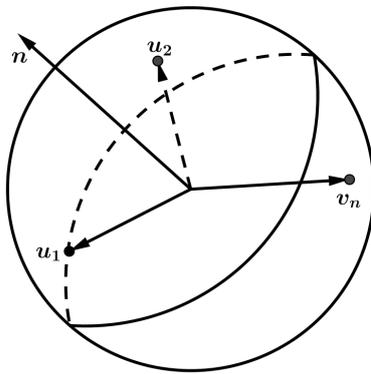
Esses conjuntos são diferentes do vazio, já que se $\{n, u, v_1\}$ pertence a uma partição então $\{-n, u, v_1\}$ pertence à outra.

Observações:

1. Sejam dados $[M_1] = [n \ u \ v_1]$ e $[M_2] = [-n \ u \ v_1]$ se $\det[M_1] > 0$ então $\det[M_2] < 0$ e vice versa.
2. $\{n, u, n \times u\}$ pertence a O^+ pois n e u são não colineares.

Definição 2.4.1. Uma reta elíptica orientada positivamente é o par ordenado (r_n, O_n^+) .

Dada a reta elíptica orientada (positivamente) r_n definimos o hemisfério criado pela reta elíptica, denotado \mathbb{H}_n , como sendo o conjunto de todos os $u \in \mathbb{S}^2$ tais que $\langle u, n \rangle \geq 0$.



Na figura ao lado temos que:

- $\langle u_1, n \rangle = 0$;
- $\langle u_2, n \rangle > 0$;

pois $0 \leq \theta(u_n, n) \leq 90^\circ$ e portanto $\cos \theta(u_n, n) \geq 0$.

No caso de v_n temos que $90^\circ < \theta(v_n, n) \leq 180^\circ$ e portanto $\cos \theta(v_n, n) \leq 0$.

O semiplano negativo será obviamente a orientação contrária.

Uma lua (ou um ângulo) determinada por duas retas elípticas distintas r_n e r_v denotada por \mathbb{L}_{nv} é obtida pela interseção dos semiplanos orientados positivamente que geram as retas. Dessa forma $\mathbb{L}_{nv} = \mathbb{H}_n \cap \mathbb{H}_v$.

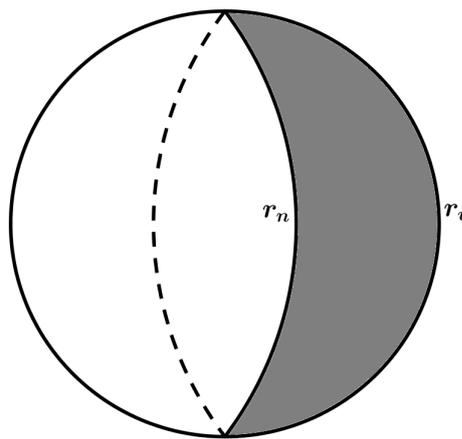


Figura 2.5: A região colorida representa a lua entre as retas r_n e r_v .

Observe que os vértices u e $-u$ da lua serão definidos pela reta de interseção dos planos e portanto

$$u = \frac{n \times v}{\|n \times v\|} \quad \text{e} \quad -u = -\frac{n \times v}{\|n \times v\|}.$$

A medida do ângulo, ou seja da lua, será dada pelos vetores n e $-v$ e portanto a medida de \mathbb{L}_{nv} será definida como

$$\theta(n, -v) = \arccos \frac{\langle n, -v \rangle}{\|n\| \cdot \| -v \|}.$$

Duas luas são congruentes se existe uma isometria elíptica que leva uma na outra. Agora temos o suficiente para definir um triângulo elíptico.

Definição 2.4.2. Um triângulo elíptico é a interseção de três luas.

Sejam u, v e w vetores que formam uma base orientada positivamente de \mathbb{R}^3 e que pertençam ao plano elíptico. Ou seja, $\det[u \ v \ w] > 0$. Esses pontos serão os vértices de um triângulo elíptico. E os lados dos triângulos serão o arco seno das retas r_n, r_s, r_t tais que $n = u \times v$, $s = v \times w$ e $t = w \times u$.

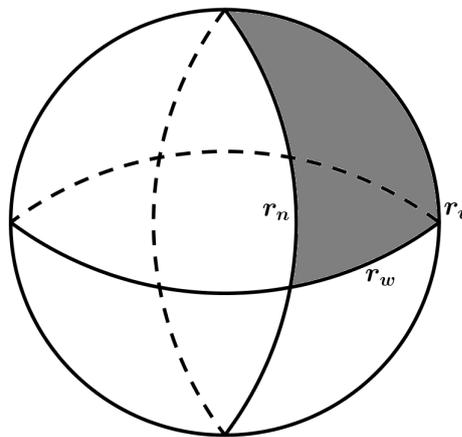


Figura 2.6: A parte colorida da figura acima representa o triângulo elíptico formado por três retas.

Dois triângulos elípticos são congruentes se existe uma isometria elíptica que leva um no outro.

2.5 O plano projetivo

Aqui vamos inserir o conceito de geometria projetiva ou geometria elíptica simples (simples pelo fato de todas as retas se cortarem num único ponto).

Pense numa avenida enorme, daquelas que você não consegue ver seu fim no horizonte. Agora pense numa rua paralela a ela. Esses dois entes parecem se encontrar no horizonte. Esse é o conceito de ponto de fuga. O ponto de fuga será nosso "ponto do infinito".

Outra coisa interessante é que a geometria projetiva faz curvas abertas, como uma parábola, se tornarem curvas fechadas no ponto de fuga.

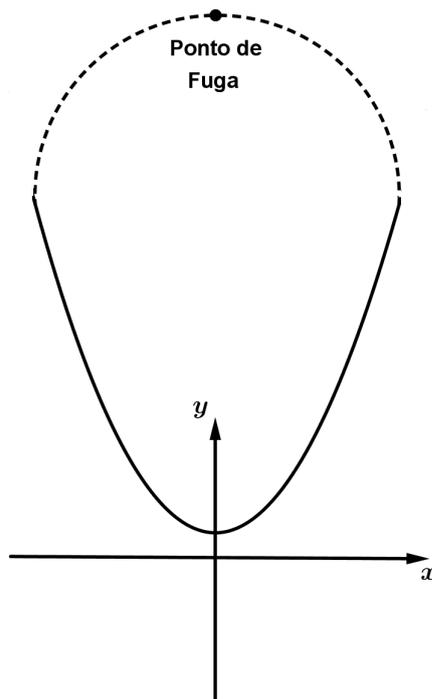


Figura 2.7: Parábola e o ponto de fuga.

Vamos considerar o conjunto formado pelo \mathbb{R}^3 sem a origem, $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, onde 0 denota a origem do \mathbb{R}^3 , o ponto $(0, 0, 0)$. Dado um plano $\alpha \in \mathbb{R}^3$, vamos definir o plano α' como sendo o plano $\alpha' = \alpha \cap \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ e daqui temos dois possíveis casos:

1. Se α' não passa pela origem então $\alpha' = \alpha$.
2. Se α' passa pela origem entenderemos α' como sendo um plano perfurado.

A mesma construção pode ser feita para as retas em \mathbb{R}^3 . Se a reta $r \in \mathbb{R}^3$ passa pela origem, então a reta $r' = r \cap \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ será uma reta perfurada.

Observe que definido dessa forma nosso plano perfurado será o conjunto de todos os vetores não nulos do \mathbb{R}^3 . Dessa forma, dados dois vetores v e w pertencentes a $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ vamos definir a seguinte relação:

$$v \sim w \Leftrightarrow \text{existe um número real } \lambda \neq 0 \text{ tal que } v = \lambda w.$$

Vamos mostrar que a mesma é uma relação de equivalência. Para isso, precisamos mostrar que ela é:

1. Reflexiva: $\forall v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ temos que $v \sim v$.
2. Simétrica: $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ se $v_1 \sim v_2$ então $v_2 \sim v_1$.
3. Transitiva: $\forall v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ se $v_1 \sim v_2$ e $v_2 \sim v_3$ então $v_1 \sim v_3$.

Para mostrar a reflexividade basta tomar $\lambda = 1$, dessa forma temos que $v = 1 \cdot v$ e portanto $v \sim v$.

Para a simetria temos que $v_1 \sim v_2$ e, por definição, existe um $\lambda \in \mathbb{R}$, com $\lambda \neq 0$ tal que $v_1 = \lambda v_2$. Vamos multiplicar ambos os membros da igualdade por $\frac{1}{\lambda}$. Assim, $\frac{1}{\lambda} \cdot v_1 = \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda v_2$

daí temos que $v_2 = \frac{1}{\lambda}v_1$. Denotando $\frac{1}{\lambda}$ por λ' temos $v_2 = \lambda'v_1$ com $\lambda' \neq 0$ e $\lambda' \in \mathbb{R}$. Segue da definição que $v_2 \sim v_1$.

Na transitividade temos que: se $v_1 \sim v_2$ então existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ com $\lambda_1 \neq 0$ tal que $v_1 = \lambda_1v_2$, se $v_2 \sim v_3$ então existe $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ com $\lambda_2 \neq 0$ tal que $v_2 = \lambda_2v_3$. Substituindo a segunda igualdade na primeira obtemos $v_1 = \lambda_1\lambda_2v_3$. Chamemos $\lambda_3 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$. Dessa forma, $v_1 = \lambda_3v_3$, com $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_3 \neq 0$. Segue da definição que $v_1 \sim v_3$.

Sendo assim, comprovamos que a relação definida realmente é uma relação de equivalência.

Vamos definir o plano projetivo denotado por \mathbb{RP}^2 como o quociente de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ por \sim . Ou seja,

$$\mathbb{RP}^2 = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) / \sim.$$

Aqui estamos fazendo todos os vetores de mesma direção representarem um único elemento. Dado um vetor $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ definimos o conjunto

$$\bar{v} = \{\lambda v; \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \lambda \neq 0\}.$$

Sendo assim, $\bar{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ é uma reta perfurada e a aplicação quociente será uma função denotada por

$$\Psi: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^2, \quad \Psi(v) = \bar{v}.$$

Chamaremos os elementos do plano projetivo $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$ por *pontos projetivos*. Além disso, se $v = (v_1, v_2, v_3)$, denotaremos por $\bar{v} = (v_1 : v_2 : v_3)$.

Com o objetivo de definir uma reta no plano projetivo vamos ver a relação entre \mathbb{S}^2 e \mathbb{RP}^2 . Note que é possível verificar que Ψ é uma projeção de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ em \mathbb{RP}^2 . Agora vamos restringir Ψ ao \mathbb{S}^2 :

$$\Psi_0 = \Psi|_{\mathbb{S}^2}: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2.$$

Vamos primeiramente mostrar que Ψ_0 é sobrejetiva. Para isso, vamos considerar Ψ^{-1} . Note que $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$ donde $\Psi^{-1}(\bar{v}) = \{\lambda v; \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \lambda \neq 0\}$, nesse conjunto considere $\lambda = \frac{1}{\|v\|}$ e daí definimos os pontos $u = \lambda v$ e $-u = -\lambda v$. Note que os pontos u e $-u$ são unitários e antípodas, logo esses pontos pertencem a \mathbb{S}^2 , independente do \bar{v} . Daí temos que $\Psi_0(u) = \Psi_0(-u) = \Psi(u) = \Psi(-u) = \bar{v}$, pois $u \in \bar{v}$. Portanto, Ψ_0 é sobrejetiva. E mais, Ψ_0^{-1} é formada por dois pontos antípodas e portanto $\Psi_0: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ é um recobrimento duplo de \mathbb{RP}^2 .

Para fazermos uma aplicação injetiva vamos restringir nossa aplicação apenas ao hemisfério norte (seria análogo fazê-lo com o hemisfério sul). Denotaremos o hemisfério norte de $\mathbb{H}_{e_3} = \{u \in \mathbb{S}^2; \langle u, e_3 \rangle \geq 0\}$ i.é, o conjunto de todos os pontos elípticos $u = (u_1, u_2, u_3)$ tais que $u_3 \geq 0$.

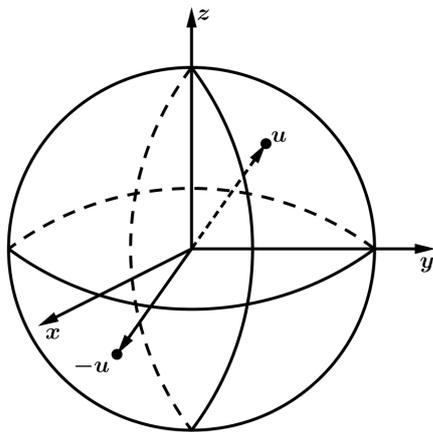


Figura 2.8: Recobrimento duplo no polo norte e sul.

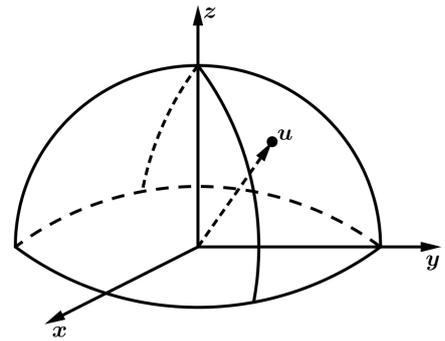


Figura 2.9: Recobrimento simples ao restringir a aplicação ao hemisfério norte.

Dessa forma, vamos ter dois casos para a pré-imagem dos pontos projetivos $\bar{u} = (u_1 : u_2 : u_3)$ em Ψ_0 :

1. $\Psi_0^{-1}(\bar{u}) = \{u\}$ se $u_3 > 0$ ou
2. $\Psi_0^{-1}(\bar{u}) = \{u, -u\}$ se $u_3 = 0$.

Vamos chamar de $r_{e_3} \in \mathbb{S}^2$ as retas elípticas que constituem o caso 2. A aplicação $\Psi(r_{e_3})$ será o conjunto dos pontos que chamaremos de ideais e denotaremos por I_∞ . Assim, a aplicação $\Psi_0 : \mathbb{H}_{e_3} \setminus r_{e_3} \rightarrow \mathbb{RP}^2 \setminus I_\infty$ será uma aplicação biunívoca. Agora já conseguimos definir o que é uma reta em \mathbb{RP}^2 .

Definição 2.5.1. Uma reta projetiva é a imagem de uma reta elíptica pela projeção $\Psi_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$. Vamos denotar a reta projetiva gerada pela reta elíptica r_n de r_n ($= \Psi(r_n)$).

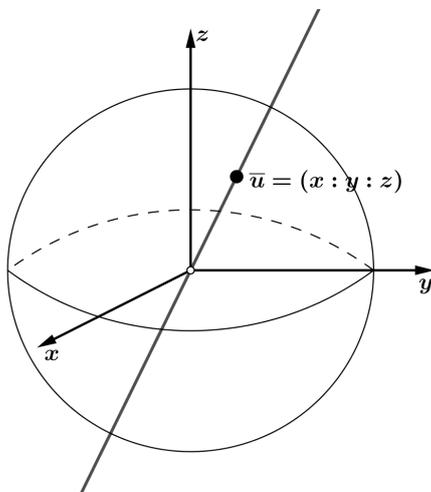


Figura 2.10: A reta perfurada representa o ponto projetivo gerado pela projeção de u dada por \bar{u}

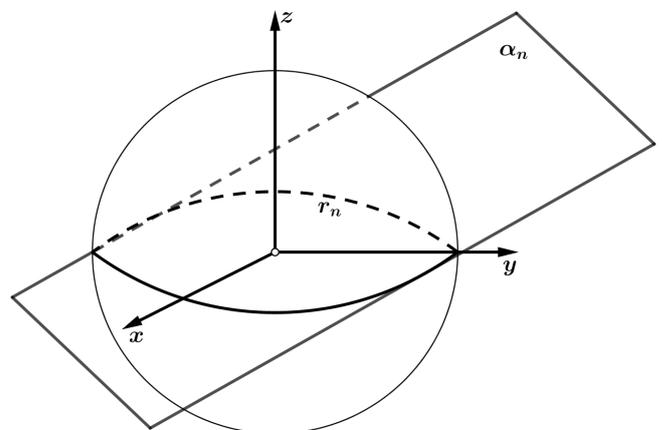


Figura 2.11: O plano perfurado α_n representa a reta projetiva gerada pela projeção de r_n .

O plano projetivo dual, denotado por \mathbb{RP}^{2*} , é o conjunto formado por todas as retas projetivas. Sendo $n \in \mathbb{R}^3$ o vetor que indexa $r_{\bar{n}}$ teremos que todas as outras possíveis indexações dessa reta serão da forma $r_{\frac{\lambda n}{\lambda}}$ com $\lambda \neq 0$. Sendo assim, só vai existir um ponto projetivo que indexa $r_{\bar{n}}$ e podemos então escrever o plano projetivo dual como sendo $\mathbb{RP}^{2*} = \{r_{\bar{n}}\}_{\bar{n} \in \mathbb{RP}^2}$. Desse modo, a aplicação $f : \mathbb{RP}^{2*} \rightarrow \mathbb{S}^2$ dada por $f(r_{\bar{n}}) = \bar{n}$ é biunívoca.

Para um conhecimento um pouco mais amplo vamos provar algumas proposições sobre o plano projetivo.

Proposição 2.5.1. (Condição de Incidência) *Uma reta projetiva $r_{\bar{n}}$ incide no ponto projetivo \bar{v} se, e somente se, $\langle v, n \rangle = 0$. Essa condição não depende dos representantes do ponto projetivo e da indexação.*

Demonstração:

Dizer que $r_{\bar{n}}$ incide em \bar{v} equivale a dizer que $\Psi_0^{-1}(\bar{v}) = \left\{ \frac{v}{\|v\|}, -\frac{v}{\|v\|} \right\}$ é um subconjunto de $r_{\bar{n}}$. Isso é verdade se, e somente se, $\langle v, n \rangle = 0$. Se trocarmos o representante do ponto projetivo ele será da forma λv com $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda \neq 0$. Daí, temos que $\langle \lambda v, n \rangle = \lambda \langle v, n \rangle = \lambda 0 = 0$. Mudando a indexação da reta estaremos apenas alterando o vetor normal ao plano que indexa a reta elíptica e portanto o produto escalar continua sendo zero.

□

Proposição 2.5.2. (Equação de uma reta por dois pontos) *Por dois pontos projetivos distintos \bar{u} e \bar{v} incide uma única reta projetiva, a saber,*

$$r_{\bar{n}}, \quad \text{onde } \bar{n} = \overline{u \times v}.$$

Essa reta não depende dos representantes dos pontos projetivos.

Demonstração

Considere dois pontos projetivos $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{RP}^2$. Os subconjuntos do plano elíptico $\Psi_0^{-1}(\bar{u}) = \left(\frac{u}{\|u\|}, -\frac{u}{\|u\|} \right)$ e $\Psi_0^{-1}(\bar{v}) = \left(\frac{v}{\|v\|}, -\frac{v}{\|v\|} \right)$, como visto na seção 2.1, por esses pontos passam uma única reta elíptica indexada pelo vetor $n = u \times v$. Sendo assim, pela definição de reta projetiva, os pontos projetivos estão sobre uma única reta dada por $\Psi(r_n) = r_{\bar{n}}$. Caso mudemos os representantes dos pontos projetivos vamos mudar apenas a indexação da reta elíptica que passará a ser dada por $n' = \lambda_1 u \times \lambda_2 v$, com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e ambos não nulos. Como visto no teorema 2.1.1 a reta elíptica independe da indexação, ou seja, teremos a mesma reta. Portanto, o resultado independe dos representantes dos pontos projetivos.

□

Proposição 2.5.3. (Concorrência de duas retas) *Duas retas projetivas distintas, $r_{\bar{n}}$ e $r_{\bar{v}}$, concorrem num único ponto, a saber,*

$$\bar{u} = \overline{n \times v} \in \mathbb{RP}^2.$$

Esse ponto independe dos representantes da indexações.

Demonstração:

Se r_n e r_v se projetam em $r_{\bar{n}}$ e $r_{\bar{v}}$, respectivamente, então $\Psi^{-1}(r_n \cap r_v) = r_{\bar{n}} \cap r_{\bar{v}}$. Como visto na proposição 2.1.3, as retas elípticas se cortam nos pontos $u_1 = \frac{n \times v}{\|n \times v\|}$ e $u_2 = -\frac{n \times v}{\|n \times v\|}$. Portanto, a concorrência entre $r_{\bar{n}}$ e $r_{\bar{v}}$ ocorre na projeção desses dois pontos. Assim, como estes pontos são antípodas eles são representantes do mesmo ponto projetivo dado por $n \times v$.

□

Proposição 2.5.4. (Equação da colinearidade para três pontos) Três pontos projetivos \bar{u} , \bar{v} e \bar{w} são colineares se, e somente se, $\det[u, v, w] = 0$. Essa condição não depende dos representantes dos pontos projetivos.

Demonstração:

Vamos supor que os representantes dos pontos projetivos dados são suas versões unitárias. Sendo assim, os pontos \bar{u} , \bar{v} e \bar{w} pertencem a reta projetiva $r_{\bar{n}}$ se, e somente se os conjuntos, $\Psi_0^{-1}(\bar{u}) = \{u, -u\}$, $\Psi_0^{-1}(\bar{v}) = \{v, -v\}$ e $\Psi_0^{-1}(\bar{w}) = \{w, -w\}$ estão sobre a mesma reta elíptica r_n . Portanto, pela proposição 2.1.4, isso ocorre se, e somente se, $\det[u, v, w] = 0$. Se mudarmos os representantes dos pontos projetivos teremos

$$\det[\lambda_1 u, \lambda_2 v, \lambda_3 w] = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \cdot \det[u, v, w] = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \cdot 0 = 0.$$

□

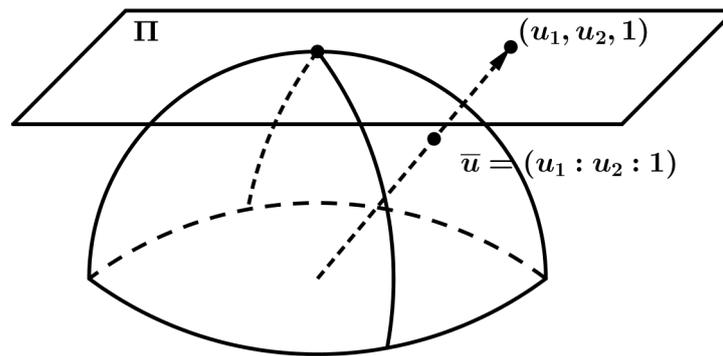
Proposição 2.5.5. (Equação da concorrência de três retas) Três retas projetivas $r_{\bar{n}}$, $r_{\bar{u}}$ e $r_{\bar{v}}$ são concorrentes se, e somente se, $\det[n, u, v] = 0$.

Demonstração: As retas elípticas r_n , r_u e r_v se projetam em $r_{\bar{n}}$, $r_{\bar{u}}$ e $r_{\bar{v}}$ respectivamente, portanto $\Psi_0^{-1}(r_n \cap r_u \cap r_v) = r_{\bar{n}} \cap r_{\bar{u}} \cap r_{\bar{v}}$. Pela proposição 2.1.5, isso ocorre se, e somente se, $\det[n, u, v] = 0$.

□

2.6 Geometria Afim

Vamos criar uma identificação do \mathbb{R}^2 em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ levando os pontos (x, y) em $(x, y, 1)$. Note que a imagem desta aplicação é um plano paralelo ao plano OXY tangente à esfera unitária \mathbb{S}^2 no polo norte. Usaremos para esse plano a notação clássica Π . A cada ponto $(x, y, 1) \in \Pi \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ determina-se um ponto do \mathbb{RP}^2 , denotado por $(x : y : 1)$.

Figura 2.12: Plano afim Π .

$$\mathbb{A}P^2 = \{(x : y : 1) \in \mathbb{R}P^2; (x, y, 1) \in \mathbb{R}^3\}.$$

O $\mathbb{A}P^2$ é de plano afim Π que denotamos anteriormente. Uma reta afim será a interseção de uma reta projetiva com o plano afim.

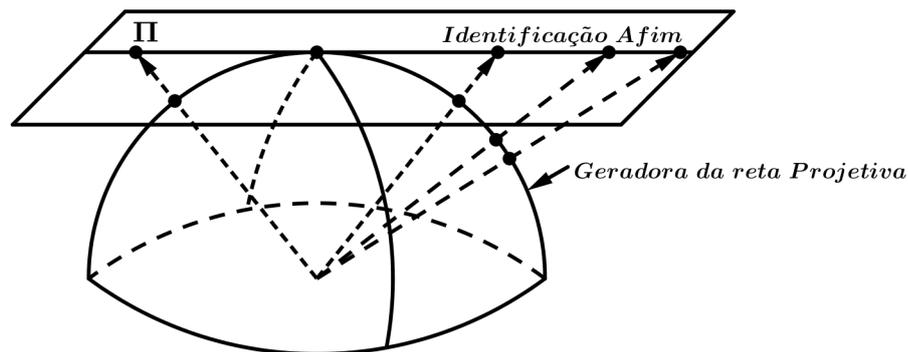


Figura 2.13: Identificação de uma reta afim.

Todos os pontos projetivos com $z \neq 0$ possuem uma identificação afim. Para encontrá-la, vamos pegar o representante do ponto projetivo $\bar{u} = (x : y : z)$ e colocá-lo na forma $\bar{u}' = \left(\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1\right)$ correspondente ao ponto $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ do \mathbb{R}^2 . Como há uma relação biunívoca entre o plano afim e o plano projetivo menos a reta ideal I_∞ , podemos considerar que o plano projetivo é o plano afim a menos da reta ideal I_∞ . Vamos passar a identificá-lo da seguinte maneira

$$\mathbb{A}P^2 = \{(u_1 : u_2 : u_3) \in \mathbb{R}P^2; u_3 \neq 0\}.$$

Aquela sensação do ponto de fuga é bem captada pelo plano afim, afinal todas as retas afim vão se tocar num único ponto. Como a reta ideal I_∞ é a reta projetiva $r_{\bar{n}}$ tal que $\bar{n} = (0 : 0 : 1)$ vamos representá-la por esse ponto. E nossa reta ideal se torna um ponto ideal.

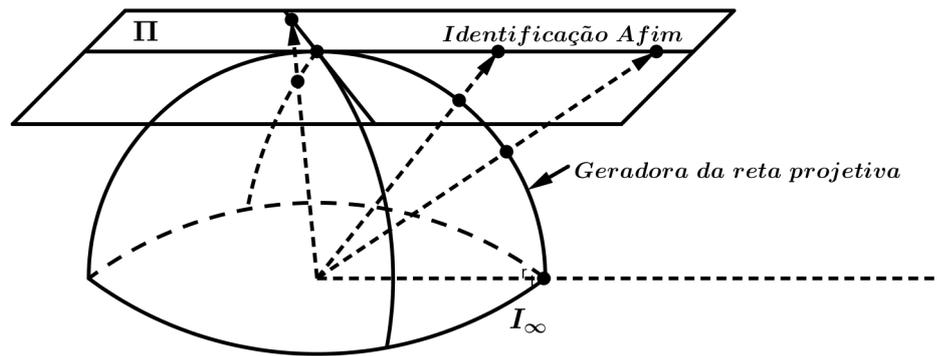


Figura 2.14: Interseção de duas retas afim.

Ao plano afim dual, que é conjunto de todas as retas afim vamos representar por $\mathbb{A}\mathbb{P}^{2*}$.

2.7 Colineação

Aqui estudaremos as projetividades, que são aplicações entre espaços projetivos. Existem dois tipos:

$$\text{Projetividade} \begin{cases} \text{Colineação.} \\ \text{Correlação} \begin{cases} \text{Polaridade.} \\ \text{Não Polaridade.} \end{cases} \end{cases}$$

Colineação é uma aplicação biunívoca $\Gamma : \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ que preserva a colinearidade, ou seja, dados os pontos projetivos \bar{u} , \bar{v} e \bar{w} se os mesmos forem colineares então $\Gamma(\bar{u})$, $\Gamma(\bar{v})$ e $\Gamma(\bar{w})$ também o são.

Correlação é uma aplicação biunívoca $\rho : \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{2*}$ que preserva a colinearidade dual, ou seja, dados os pontos \bar{u} , \bar{v} e \bar{w} se os mesmos forem colineares então as retas projetivas $\rho(\bar{u})$, $\rho(\bar{v})$ e $\rho(\bar{w})$ são concorrentes.

2.7.1 Relação entre operador linear e colineação

Seja A um operador linear invertível $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Vamos mostrar que A induz no espaço projetivo uma projetividade dada por

$$\bar{A} : \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^2, \bar{A}(x : y : z) = \overline{A(x, y, z)},$$

onde podemos escrever $\bar{A}(\bar{v}) = \overline{A(v)}$. A projetividade é uma colineação.

Proposição 2.7.1. *Se $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um operador linear invertível, então a aplicação $\bar{A} : \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ tal que $\bar{A}(\bar{v}) = \overline{A(v)}$, está bem definida e é uma colineação.*

Demonstração:

A boa definição vem de duas coisas.

1º) Se $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$ então $\bar{v} \neq (0, 0, 0)$. Agora se A é invertível então $\det[A] \neq 0$, como pode ser visto em [9], e isso só ocorre se suas linhas forem linearmente independentes. Portanto, a única solução que a equação homogênea admite é a trivial. Daí segue que $A(v) \neq 0$. Portanto, $\overline{A(v)} \in \mathbb{RP}^2$.

2º) \bar{A} independe do representante do ponto projetivo, pois seja $\bar{u} = \bar{v}$ dois representantes de um mesmo ponto projetivo, então temos que $u = \lambda v$ e portanto

$$\overline{A(u)} = \overline{A(\lambda v)} = \lambda \overline{A(v)} = \overline{A(v)}.$$

O operador será injetivo, pois dados $\overline{A(u)} = \overline{A(v)}$ temos que $A(u) = \lambda A(v)$ e isso implica em $u = \lambda v$ e então $\bar{u} = \bar{v}$. Agora temos uma aplicação injetiva de um conjunto nele mesmo e, como podemos ver em [6], se isso ocorre então a aplicação também é sobrejetiva. Portanto, nossa aplicação é bijetiva.

Se \bar{u} , \bar{v} e \bar{w} são não colineares pela proposição 2.5.4, temos que $\det[u \ v \ w] \neq 0$. Assim, nos pontos $\overline{A(u)}$, $\overline{A(v)}$ e $\overline{A(w)}$ temos que

$$\det[A(u) \ A(v) \ A(w)] = \det([A][u \ v \ w]) = \det[A] \cdot \det[u \ v \ w] \neq 0.$$

As propriedades dos determinantes utilizadas aqui podem ser conferidas em [9, pág. 228].

□

2.7.2 Relação entre operador linear e correlação

Como \mathbb{RP}^{2*} é um modelo do \mathbb{RP}^2 existe um operador linear invertível $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que induz uma aplicação $A^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}$ associando um \bar{v} a uma reta $r_{A^*(\bar{v})}$. Vamos denotar a inversa de A^* por A_* e a mesma será uma aplicação $A_* : \mathbb{RP}^{2*} \rightarrow \mathbb{RP}^2$.

Proposição 2.7.2. *Sejam A um operador linear invertível em \mathbb{R}^3 . Os pontos projetivos \bar{u} , \bar{v} , $\bar{w} \in \mathbb{RP}^2$ são colineares se, e somente se, as retas projetivas $A^*(\bar{u})$, $A^*(\bar{v})$, $A^*(\bar{w}) \in \mathbb{RP}^{2*}$ são colineares.*

Demonstração:

Note que:

$$\det[A(u) \ A(v) \ A(w)] = \det([A][u \ v \ w]) = \det A \cdot \det[u \ v \ w].$$

Portanto se $\det[u \ v \ w] = 0$ então $\det[A(u) \ A(v) \ A(w)] = 0$.

□

3 Identificação de Cônicas

3.1 As cônicas

Identificamos um cone C em \mathbb{R}^3 como o conjunto dos pontos $v = (x, y, z)$ que solucionam a equação

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0. \quad (3.1)$$

No caso acima, temos um cone C em \mathbb{R}^3 com centro na origem. Geometricamente, o cone pode ser representado pela figura:

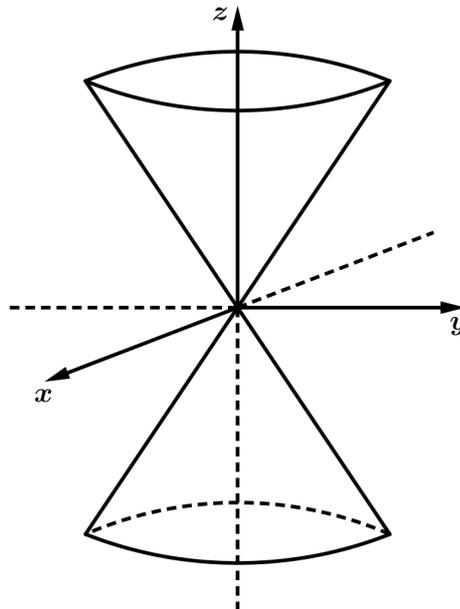


Figura 3.1: Cone centrado na origem.

Se $v = (x, y, z)$ é uma solução da equação (3.1) ao multiplicarmos as entradas por $\lambda \neq 0$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 - \lambda^2 z^2 = \lambda^2 (x^2 + y^2 - z^2) = \lambda^2 \cdot 0 = 0$$

Sendo assim, o próprio conjunto solução do cone nos induz a pensar no plano projetivo, pois se $v = (x, y, z)$ é uma solução da equação dada, todos os seus múltiplos dados por $\lambda v = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ também são soluções.

Dessa forma, temos uma equação em coordenadas homogêneas. O conjunto $C \in \mathbb{RP}^2$ formado por $\bar{v} = (x : y : z)$ cuja as coordenadas homogêneas satisfazem a equação

$$C : x^2 + y^2 - z^2 = 0. \quad (3.2)$$

Esse conceito surge do conceito de funções homogêneas. Uma função $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita homogênea de ordem d quando

$$E(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d E(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

para todo $\lambda \neq 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. A equação $E(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ é chamada de equação homogênea de ordem d . No caso acima, temos uma equação homogênea de ordem dois em três variáveis.

Dessa forma, temos que uma cônica em \mathbb{R}^2 é uma curva obtida pelo transporte via identificação afim da curva com a interseção de um cone com o plano Π de equação $z = 1$.

A aplicação $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $A(x, y, z) = (x, y, -z)$ terá como matriz

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dado $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ temos que a equação do cone pode ser escrita como

$$C : \langle v, A(v) \rangle = \langle (x, y, z), (x, y, -z) \rangle = x^2 + y^2 - z^2,$$

como a equação do cone é dada por $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, concluímos que a mesma pode ser escrita como $C : \langle v, A(v) \rangle = 0$.

Já que o operador A é invertível ele induz uma colineação \bar{A} no plano projetivo. Pela proposição 2.5.1, a equação $\langle v, A(v) \rangle = 0$ é a condição de incidência entre a reta projetiva $r_{\bar{n}} \subset \mathbb{RP}^2$ e o ponto projetivo $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$, ou seja, a reta projetiva $\overline{A(\bar{v})} = \bar{n} \in \mathbb{RP}^{2*}$.

Como o plano elíptico e seu dual tem o mesmo modelo aritmético, podemos considerar que o operador linear induz uma aplicação entre o plano projetivo e seu dual que pode ser definida como

$$A^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}, A^*(x : y : z) = (x : y : -z).$$

Sendo assim, a cônica em \mathbb{RP}^2 obtida pela projeção de um cone em \mathbb{R}^3 é o conjunto constituído pelos pontos projetivos \bar{v} tais que a reta projetiva $A^*(\bar{v})$ incide em \bar{v} .

Seja $\alpha_{A(v)}$ um plano tangente com vetor normal $A(v)$. Temos que $v \in \alpha_{A(v)}$, pois $\langle v, A(v) \rangle = 0$. A reta λv também pertence ao plano e ao cone. Veja a figura abaixo.

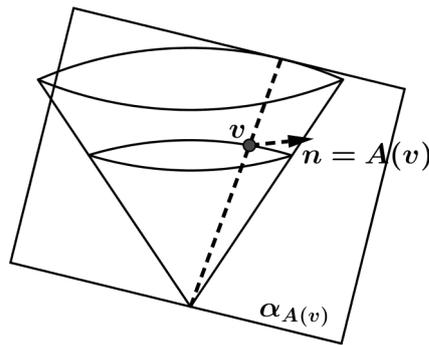


Figura 3.2: Plano tangente ao cone.

Ou seja, não só conseguimos a curva em \mathbb{RP}^2 que é o conjunto dos ponto $\bar{v} = (x : y : z)$ como também obtemos a reta projetiva que incide em \bar{v} e é tangente à cônica.

Como queremos estudar as cônicas em \mathbb{R}^2 basta transportarmos as mesmas para o plano através de uma identificação afim. Por exemplo, o ponto $\bar{v} = (3 : 4 : 5) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)$ é solução da equação e a reta projetiva tangente à cônica no ponto \bar{v} será $\bar{A}(\bar{v}) = \bar{n} = (3 : 4 : -5)$.

3.2 Identificando as cônicas

Vamos primeiro propor um teste. Não queremos trabalhar com cônicas degeneradas e para descartá-las vamos usar nossa própria definição $C : \langle v, A(v) \rangle = 0$. Temos da álgebra linear (o resultado pode ser encontrado em [9]) que o operador linear simétrico $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associado a uma equação quádrlica, do tipo $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0$, é o operador cuja matriz canônica é:

$$[A] = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}$$

A esse fato vamos associar o fato também da álgebra linear que diz que:

- Se um operador linear simétrico A possui todos os autovalores positivos então

$$\langle v, A(v) \rangle \geq 0.$$

- Se um operador linear simétrico A possui todos os autovalores negativos então

$$\langle v, A(v) \rangle \leq 0.$$

Nesses dois casos, nossa equação não é cumprida e as cônicas formadas são degeneradas. Portanto, o teste consiste em calcular os autovalores associados à cônica. Se todos tiverem o mesmo sinal ou se algum autovalor for nulo a cônica é degenerada e não temos nada mais a fazer.

Exemplo 3.2.1. Considere a quádrlica $x^2 - y^2 = 0$. Nesse caso temos

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)\lambda.$$

É fácil ver que os seus autovalores são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 0$.

Por outro lado, podemos reescrever

$$x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x - y)(x + y) = 0,$$

o que representa, no plano, a união de duas retas (no espaço isso representa a união entre dois planos) e portanto o autovalor zero degenera a cônica.

Definição 3.2.1. Seja ρ uma correlação e A a sua matriz. Diremos que ρ é uma polaridade se A for simétrica. Vamos dizer que uma polaridade é polar quando for a aplicação $A^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}$ e a polaridade é polo quando for a aplicação $A_* : \mathbb{RP}^{2*} \rightarrow \mathbb{RP}^2$.

Se $[A]$ for simétrica, vem de [9] que, sua inversa também é simétrica.

Definição 3.2.2. Diz-se que o ponto projetivo \bar{v} é auto conjugado em relação à aplicação polar A^* quando $\bar{v} \in r_{A^*}(\bar{v})$.

A condição de ser conjugado pode ser expressa algebricamente pela equação de incidência $\langle v, A(v) \rangle = 0$, em outras palavras v e $A(v)$ são ortogonais. Ou seja, nossa cônica em \mathbb{RP}^2 definida pela aplicação polar $A^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}$ é uma coleção dos pontos auto conjugados.

Definição 3.2.3. A cônica determinada pela aplicação polar $A^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}$ é o conjunto definido e denotado por

$$C_A = \{\bar{v} \in \mathbb{RP}^2; \langle v, A(v) \rangle = 0\}.$$

A definição da cônica C_A independe do representante do ponto projetivo, pois se

$$\langle v, A(v) \rangle = 0$$

e $\lambda \neq 0$, temos pelas propriedades do produto interno (vistas em [9]) que

$$\langle \lambda v, A(\lambda v) \rangle = \lambda^2 \langle v, A(v) \rangle = \lambda^2 \cdot 0 = 0.$$

Daqui para frente não vamos mais considerar cônicas vazias ou degeneradas. Dessa forma, os autovalores do operador linear invertível e simétrico $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ não possuem mesmo sinal e não são nulos.

E finalmente, com a proposição abaixo, chegamos a condição necessária para podermos identificar cônicas.

Proposição 3.2.1. *Uma reta projetiva $r_{\bar{n}}$ contém no máximo dois pontos auto conjugados associados a uma aplicação polar $A^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}$*

Demonstração:

Seja \bar{v} e \bar{w} dois pontos auto conjugados e distintos sobre a reta $r_{\bar{n}}$. Dessa, forma as retas $r_{A^*}(\bar{v})$ e $r_{A^*}(\bar{w})$ são distintas e qualquer ponto do plano $\alpha_n \in \mathbb{R}^3$ é dado como combinação linear dos vetores v e w (esse resultado pode ser encontrado em [4]). Sendo assim, os pontos da reta projetiva $r_{\bar{n}}$ podem ser expressos da seguinte forma

$$\bar{u} = \overline{sv + tw} \quad \text{onde} \quad |s| + |t| \neq 0.$$

Pela equação de autoconjugação temos que $\langle v, A(v) \rangle = 0 = \langle w, A(w) \rangle$. Agora, vamos supor por absurdo que exista um $\bar{u}_0 = \overline{s_0v + t_0w}$ que é também um ponto autoconjugado de $r_{\bar{n}}$. Expressando algebricamente essa condição através do produto interno e utilizando a simetria de A teremos:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u_0, A(u_0) \rangle \\ &= \langle s_0v + t_0w, A(s_0v + t_0w) \rangle \\ &= \langle s_0v, A(s_0v) \rangle + 2 \langle s_0v, A(t_0w) \rangle + \langle t_0w, A(t_0w) \rangle \\ &= s_0^2 \langle v, A(v) \rangle + 2s_0t_0 \langle v, A(w) \rangle + t_0^2 \langle w, A(w) \rangle \\ &= 2s_0t_0 \langle v, A(w) \rangle. \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $s_0 \neq 0$ e $t_0 \neq 0$ então $\langle v, A(w) \rangle = 0$, isso significa que $\bar{v} \in r_{A^*}(\bar{w})$. Mas, por hipótese, \bar{v} é auto conjugado e portanto $\bar{v} \in r_{A^*}(\bar{v})$. Daí, segue que

$$\bar{v} \in r_{A^*}(\bar{w}) \cap r_{A^*}(\bar{v}).$$

Pelo fato de A ser simétrica temos que $\langle w, A(v) \rangle = 0$ e portanto $\bar{w} \in r_{A^*}(\bar{v})$, mas por hipótese \bar{w} é autoconjugado e portanto $\bar{w} \in r_{A^*}(\bar{w})$. Daí segue que

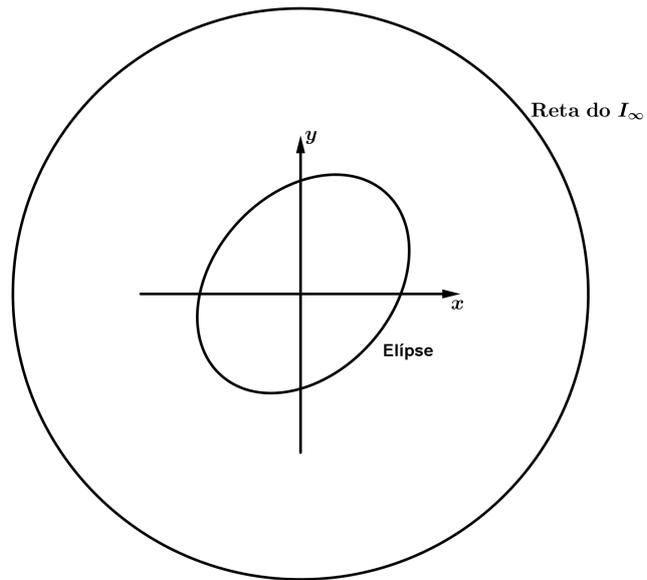
$$\bar{w} \in r_{A^*}(\bar{v}) \cap r_{A^*}(\bar{w}).$$

Mas, duas retas projetivas distintas incidem num único ponto e portanto, $\bar{v} = \bar{w}$. O que é uma contradição, pois estamos assumindo que esses pontos projetivos são distintos.

□

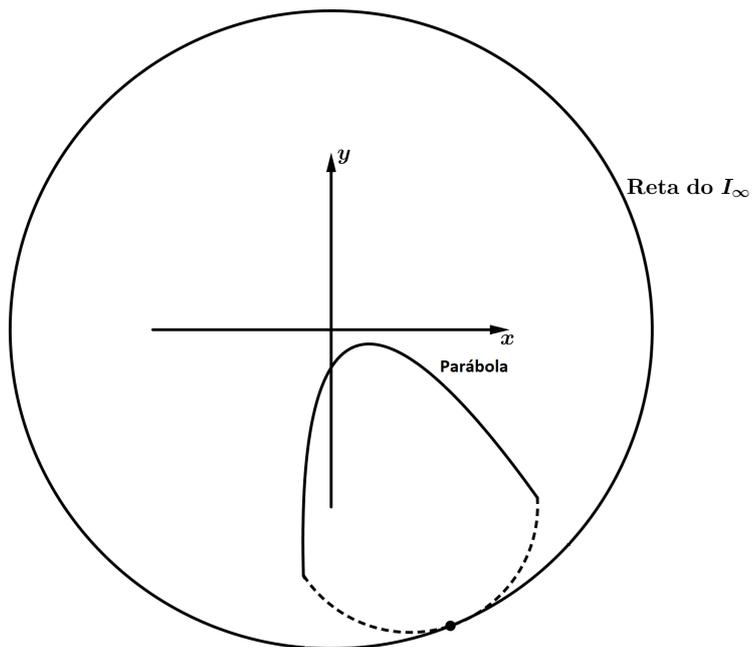
Com essa propriedade, finalmente podemos classificar as cônicas de acordo com suas interseções com a reta ideal I_∞ :

- se C_A não possui interseção com a reta ideal a mesma é uma elipse.



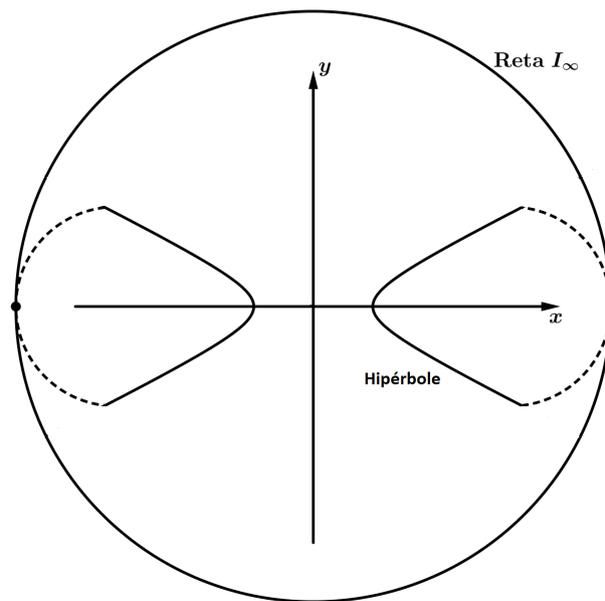
Note que a elipse "não vai até" a reta do infinito.

- se C_A possui uma interseção com a reta ideal a mesma é uma parábola.



Note que a parábola "vai até" a reta do infinito apenas uma vez.

- se C_A possui duas interseções com a reta ideal a mesma é uma hipérbole.



Note que a hipérbole "vai até" a reta do infinito duas vezes.

Vários exemplos de identificação de cônicas podem ser vistos mais a frente, na seção 3 do capítulo 4.

4 No ensino médio

Neste capítulo apresentaremos duas atividades da teoria estudada nos capítulos anteriores para serem aplicadas em turmas do ensino médio. Uma voltada para quaisquer turmas e outra voltada para uma turma avançada ou algum aluno do programa de iniciação científica jr. da OBMEP, o PICJr.

4.1 Geometria elíptica dupla

Nessa parte, vamos ver como usar a geometria elíptica dupla no ensino médio. Vamos usá-la como um modelo mais real do movimento em grandes distâncias na Terra. Um motivador interessante é pensar num avião se deslocando em linha reta pela superfície da terra. Suponha o mesmo com um motor de modo perpétuo (motor que funciona infinitamente e sem combustível). Depois de um tempo voando esse avião voltará ao ponto inicial, pois dará a volta na Terra, que pode ser considerada esférica.

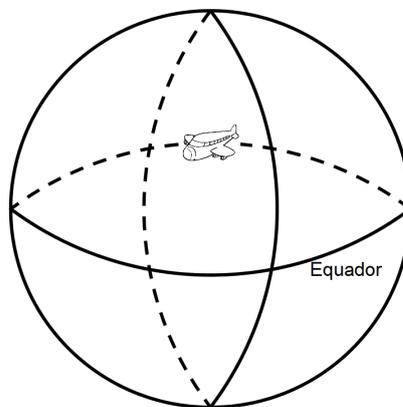


Figura 4.1: Avião ao redor da terra

Vamos, por simplicidade, considerar a Terra redonda, e que a reta na qual o avião anda será um equador da nossa esfera (Veja Figura 4.1). Nessa geometria, as retas serão os equadores ao redor da Terra. Nesse ponto já podemos mostrar para os alunos, como visto proposição 2.1.3, que quaisquer duas retas elípticas (aqui no caso equadores) se interceptam em dois pontos. E assim, justificar o nome geometria elíptica dupla.

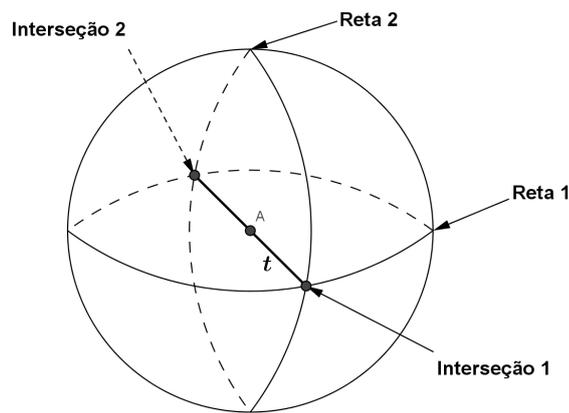


Figura 4.2: Dupla Interseção.

Para facilitar nosso estudo, vamos considerar que nossa unidade é o raio da Terra, i.e., vamos considerar o raio da terra igual a 1 e vamos colocar nossa esfera no centro do espaço coordenado \mathbb{R}^3 . Assim, teremos um modelo que une a geometria elíptica dupla a geolocalização.

Esse processo é criado para podermos diferenciar duas retas. Veremos que cada plano que passa pela origem do \mathbb{R}^3 vai gerar uma única reta. Como todos os planos distintos que passam pela origem tem um ponto em comum, nenhum deles é paralelo, e portanto todos os vetores normais desses planos são distintos. Logo, podemos indexar cada reta pelo vetor diretor do plano que a intersecta. Aqui, podemos ter algumas divergências. Existem livros do ensino médio que falam sobre o vetor diretor dos planos e alguns que não falam. Caso a escola em questão adote um livro que não fala do vetor diretor, basta indexar a reta pelo próprio plano. Esse processo também serve para trabalhar com alunos que ainda não estudaram geometria espacial. Basta definir um plano passando pela origem e mostrar geometricamente que dois planos não podem representar a mesma reta. Vimos resultado similar no teorema 2.1.1.

Agora que temos definidas nossas retas podemos também definir a distância entre dois pontos elípticos, como feito na seção 2.2. Note que, usando o raio da Terra como unidade seria o próprio ângulo percorrido, mas como queremos passar para quilômetros e sabendo que o raio da Terra é de 6371 quilômetros, basta propor a seguinte relação entre unidades:

$$1rad = 6371 km.$$

Assim, basta multiplicar nosso ângulo em *rad* pelo valor de 6371. Por exemplo, um avião que anda $\frac{\pi}{6}rad$ de um equador na superfície da terra terá andado aproximadamente 3310 quilômetros.

Agora temos o suficiente para definir um ângulo entre retas elípticas. Aqui vamos definir o ângulo como sendo o ângulo entre os planos que formam as retas. Daqui entramos numa parte mais prática com a indagação. Como poderíamos medir ângulos na superfície da Terra? A ideia aqui é criar uma ferramenta para trabalhar com ângulos na superfície de um globo

terrestre. Para isso, vamos precisar de: cola quente, duas dobradiças, 5cm de velcro, duas régulas flexíveis, um cortador de isopor, um transferidor, uma tesoura, um isopor de 30mm de espessura e um globo terrestre.



Figura 4.3: Materiais Utilizados.

Primeiramente, vamos descobrir o diâmetro do globo, geralmente encontrado na sua caixa. Mas, podemos medir isso com certa precisão fazendo traços nos lados opostos do mesmo numa superfície, ou ainda medindo o valor do equador com um cordão e fazendo uma simples regra de três.



Figura 4.4: Medindo o diâmetro do globo.

Depois disso, vamos marcar nas pontas do isopor dois pedaços de um quarto de circunferência com raio igual ao do globo terrestre utilizado. No caso, utilizei um globo de 30cm de diâmetro, dessa forma nosso raio terá 15cm. E, utilizando o cortador de isopor cortamos os dois moldes. Eles representarão as partes de duas retas elípticas distintas.



Figura 4.5: Primeira parte da ferramenta.

Agora, com cola quente prendemos os moldes um no outro utilizando as dobradiças. Aqui um adendo, quanto menores forem as dobradiças melhor será o resultado. Isso vai nos dar um semicírculo que se move abrindo e fechando, ou seja, duas retas elípticas das quais podemos mudar o ângulo entre elas.



Figura 4.6: Primeira parte da ferramenta terminada.

Para fazer a segunda parte da ferramenta, vamos usar o velcro e as régua. Cortamos com uma tesoura um pedaço de velcro com 5cm de comprimento e utilizando cola quente colamos as partes opostas nas régua flexíveis. Essa parte é bem importante pois é com ela que vamos fazer marcações no globo



Figura 4.7: Segunda parte da ferramenta terminada.

Para facilitar a situação, vamos criar alguns moldes de isopor utilizando o transferidor e o cortador. Esse moldes terão a medida de vários ângulos. Pode-se criar vários moldes de acordo

com a vontade do aluno. Aqui fiz apenas alguns, dos quais vamos tratar algumas indagações bem interessantes.



Figura 4.8: Moldes e ferramentas.

A primeira pergunta é: Se andarmos na superfície da Terra uma distância x para o norte, virarmos para o leste (uma curva de 90°) e andar a mesma distancia x e por fim, viramos para o sul e nos deslocamos x , qual será minha distância para o ponto inicial? Geralmente, o aluno que tem o pensamento que a terra é plana e vai responder logicamente que a distância será x , afinal no plano R^2 se voltamos novamente para o oeste formaremos um quadrado de lado x .

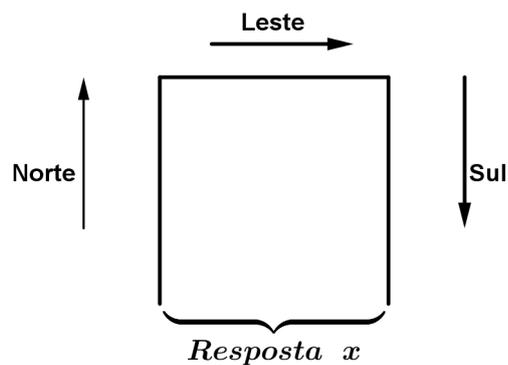


Figura 4.9: Resposta padrão do aluno.

Vamos fazer essas medições com nossas ferramentas. Primeiro, vamos pegar o molde com formato de 90° e colocar entre a primeira parte da ferramenta de desenho. Depois, vamos colocar as régua em cima de cada lado tomando o cuidado para alinhá-las. Agora, com as régua já alinhadas vamos repetir o processo no globo marcando com uma caneta não permanente (Veja Figura 4.1). No final, pedimos para os alunos medirem a distância final (Veja Figura 4.1). Neste exemplo, desenhei 5cm para cada lado.

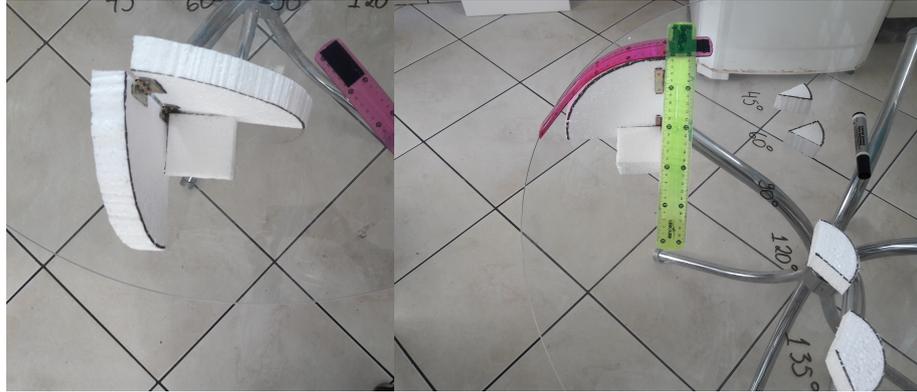


Figura 4.10: Preparação das ferramentas de marcação.



Figura 4.11: Marcação no globo, no caso usando 5cm.



E como resultado o aluno vai perceber que as retas estão se aproximando. Neste exemplo, o Resultado final foi menor que 4,5cm. O normal é surgir a pergunta: Porque isso ocorreu? E a resposta é bem simples. Na geometria que definimos não temos retas paralelas e todas as retas se tocam em pelo menos dois pontos. Dessa forma, se as retas "norte" e "sul" vão ter que se encontrar em algum ponto mais à frente formando um triângulo.

Figura 4.12: Resultado.

E aqui surge uma nova pergunta. Se é possível um triângulo com dois ângulos de 90° então meus triângulos vão possuir a soma dos ângulos internos maior que 180° ? Vamos responder isso usando agora o molde de 120° .



Figura 4.13: Preparação das ferramentas de marcação.

Em seguida, formamos um triângulo aleatório desenhando duas retas a partir do molde e unindo-as depois. No final, medimos com as ferramentas cada um dos dois ângulos formados.



Figura 4.14: Formação do triângulo e medição dos ângulos.



Figura 4.15: Resultado.

Como resultado, nesse exemplo, conseguimos um triângulo com os seguintes valores 120° , 50° e 45° resultando num total de 215° . Dessa forma, mostramos na prática que a trigonometria que conhecemos não funciona nessa nova geometria definida e que se movimentar na superfície da Terra por longas distâncias é muito mais intrigante do que nosso senso comum pode imaginar.

4.2 Identificando cônicas

A ideia dessa seção é usar o que vimos no capítulo três e montar uma atividade para os alunos que alia algoritmos predeterminados e o Geogebra. Sabemos que existem equações de cônicas que contêm termos mistos e que é quase impossível para um aluno do ensino médio identificar uma dessas formas. Assim, vamos usar expansões, a identificação afim e o

completamento de quadrados para mostrar aos alunos uma maneira prática de fazê-lo. No final, vamos usar o Geogebra para conferir os resultados. Vamos também dar algumas ideias básicas sobre geometria projetiva.

Nessa parte, podemos usar a explicação dada no capítulo 2 seção 5 sobre o ponto de fuga e acrescentar que nosso algoritmo vai nos dar uma maneira de calcular quantos pontos de curva uma cônica possui e classificá-las da seguinte forma:

- Se a equação não possui pontos ideais temos uma elipse.
- Se a equação possui um ponto ideal temos uma parábola.
- Se a equação possui dois pontos ideais temos uma hipérbole.

Aqui temos um pequeno problema, esse algoritmo não funciona em cônicas degeneradas e muitas vezes os alunos do ensino médio não possuem o conhecimento necessário para calcular se a cônica é degenerada ou não. Sendo assim, o professor pode omitir esse primeiro teste dando a ressalva aos alunos que não vamos trabalhar com cônicas degeneradas. Caso os alunos tenham conhecimento de determinante de matriz de ordem 3 e de equações algébrica (já que teremos que resolver equações de grau 3), pode ser passado para eles o seguinte teste.

Considere a equação de uma cônica $ax^2 + bx^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0$, temos que ela só não será degenerada se o polinômio $p(\lambda)$ dado abaixo não possuir raiz nula e também se as raízes não tiverem todas o mesmo sinal.

$$p(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix} \right).$$

Vamos explicar o algoritmo através de um exemplo. Nosso exemplo será a cônica $x^2 + y^2 + 4y + 4x + 4xy + 1 = 0$. Note que nosso algoritmo possui uma coordenada z referente ao espaço e que não possui termo independente. Para sanar esse "problema" vamos primeiro fazer uma homogeneização da cônica em uma nova variável z , isto é, completaremos os termos que faltam na equação de modo que todas as parcelas tenham mesmo grau 2, e assim, obtemos $x^2 + y^2 + 4yz + 4xz + 4xy + z^2 = 0$. Podemos conferir no Geogebra que essa expansão gerou um cone no espaço na figura 4.2.

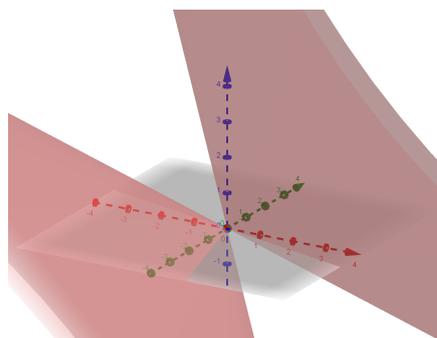


Figura 4.16: Cone Gerador pela equação $x^2 + y^2 + 4yz + 4xz + 4xy + z^2 = 0$.

Agora vamos aplicar o primeiro algoritmo dado e ver se nossa cônica é degenerada ou não.

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)^3 - 12\lambda - 4 = (\lambda + 1)^2 \cdot (\lambda - 5).$$

A resolução do determinante da matriz bem como da equação algébrica dadas podem ser encontradas em [6]. Portanto as raízes de polinômio são $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = 5$. Como o polinômio possui raízes não nulas com sinais distintos essa cônica não é degenerada¹. Para facilitar para o aluno podemos determinar a raiz também pelo comando raiz do Geogebra.

Agora a segunda parte do algoritmo é fazer $z = 0$ e resolver o polinômio de grau 2 resultante. Aqui estamos usando a geometria projetiva (explicada no capítulo 2) e calculando quantos pontos ideais a curva possui. Algo importante a salientar é que não vamos considerar a solução trivial $x = y = 0$, o vetor nulo não é definido na geometria projetiva. Nosso polinômio será $0 = x^2 + 4xy + y^2 = x^2 + 4xy + 4y^2 - 4y^2 = (x - 2y)^2 - 4y^2$, uma resposta será $x = 6y$ e a outra será $x = -2y$. Sendo assim, temos dois pontos ideais e portanto a cônica dada é uma hipérbole.

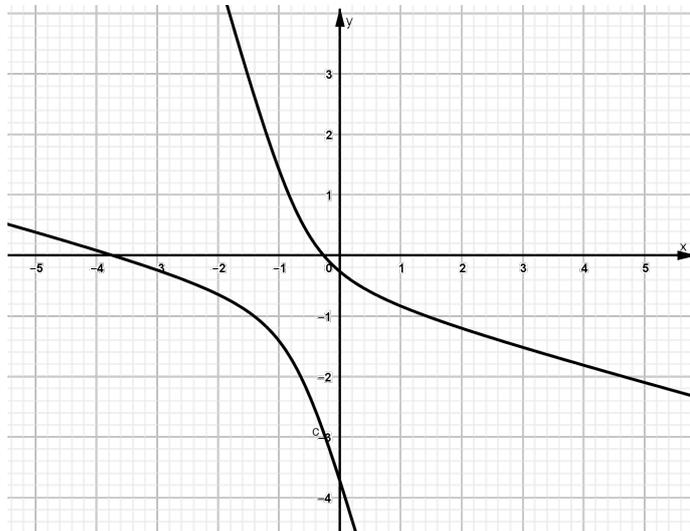


Figura 4.17: Hipérbole de equação $x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 4y + 1 = 0$.

Exemplo 4.2.1. *Identifique as cônicas abaixo.*

- a) $x^2 + 2xy + y^2 + 2 = 0$
- b) $x^2 - 2xy + 2x + y^2 + 2y = 0$
- c) $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$
- d) $2x^2 + 4xy + y - 1 = 0$

¹Ver resultado do início do capítulo 3 seção 2.

Resolução letra a):

Aplicando a primeira parte do algoritmo vamos estender a cônica em z obtendo:

$$x^2 - 2xy + 2xz + y^2 + 2yz = 0.$$

Agora vamos verificar se ela é degenerada.

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 & -0 \\ -1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 4\lambda^2 = 4\lambda = \lambda(\lambda - 2)^2.$$

Dessa forma, temos $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Como o polinômio possui uma raiz nula essa cônica é degenerada. Na verdade essa "cônica" é um conjunto vazio.

Resolução letra b):

Estendendo a cônica em z obtemos $x^2 - 2xy + 2xz + y^2 + 2yz = 0$. Temos

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 4 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 2).$$

Assim, temos como raízes $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$ e $\lambda_3 = -\sqrt{2}$. Agora que sabemos que nossa cônica não é degenerada vamos descobrir qual cônica temos fazendo $z = 0$. Daí temos:

$$x^2 - 2xy + y^2 = 0 \Rightarrow (x - y)^2 = 0 \Rightarrow y = x.$$

Logo, a cônica possui um único ponto ideal e portanto ela é uma parábola.

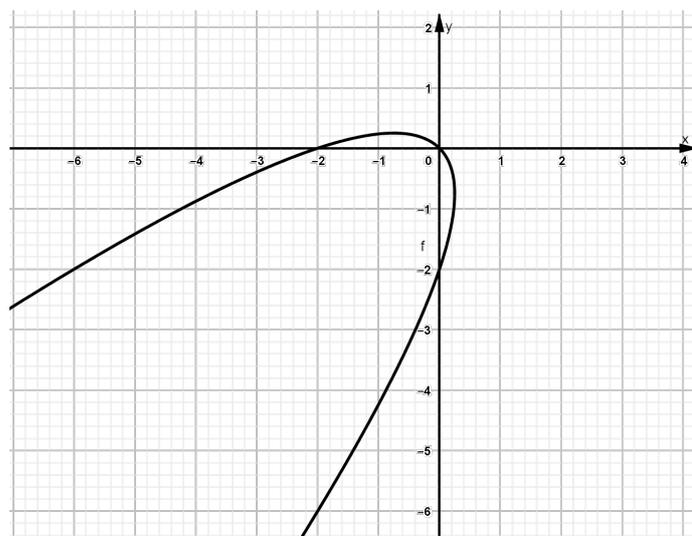


Figura 4.18: Parábola de equação $x^2 - 2xy + 2x + y^2 + 2y = 0$.

Resolução letra c):

Estendendo a cônica em z obtemos $x^2 + xy + y^2 - z^2 = 0$. Temos

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = (\lambda^2 - 1)(\lambda + 1) - \frac{\lambda}{4} - \frac{1}{4} = (\lambda + 1) \left(\lambda - \frac{3}{2} \right) \left(\lambda - \frac{1}{2} \right).$$

Dessa forma temos como raízes $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ e $\lambda_3 = \frac{1}{2}$. Agora que sabemos que nossa cônica não é degenerada vamos descobrir qual cônica temos fazendo $z = 0$. Daí temos:

$$x^2 + xy + y^2 = 0 \Rightarrow (x + y)^2 - xy = 0.$$

A única solução válida seria $x = y = 0$, mas como eles não podem ser ambos iguais a zero não temos solução. Daí esta cônica é uma elipse.

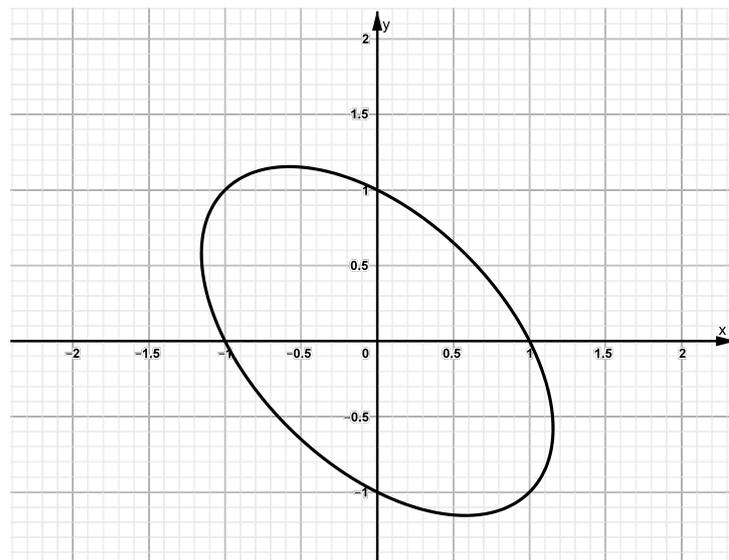


Figura 4.19: Elipse de equação $x^2 + xy + 2x + y^2 - 1 = 0$.

Resolução letra d):

Estendendo a cônica em z obtemos $2x^2 + 0y^2 - z^2 + 4xy + 0xz + yz = 0$. Temos

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda & -1/2 \\ 0 & -1/2 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 2) \cdot \lambda \cdot (\lambda + 1) - \frac{\lambda}{4} + \frac{2}{4} - 4\lambda - 4 = 0.$$

Nessa função, o teste da raiz ² falha e dificilmente um aluno do ensino médio conseguirá resolver. Nesse caso, escrevemos o polinômio no Geogebra como se fosse uma função e usamos o comando raiz obtendo a seguinte figura:

²Para mais detalhes deste teste consulte por exemplo [6].

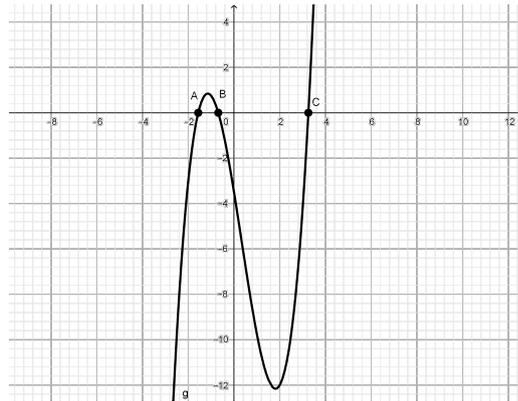


Figura 4.20: Gráfico da função gerada pelo polinômio $p(\lambda)$.

Observe que temos as três raízes não todas com o mesmo sinal. O que é suficiente para garantir que a cônica não é degenerada. Fazendo $z = 0$ obtemos:

$$2x^2 - 4xy = 0 \Rightarrow x(x - 2y) = 0.$$

Dessa forma, os resultados são $x = 0$ (note que nesse caso y é livre e conseqüentemente não se trata da solução trivial) e $x = 2y$. Temos dois pontos ideais, ou seja, temos uma hipérbole.

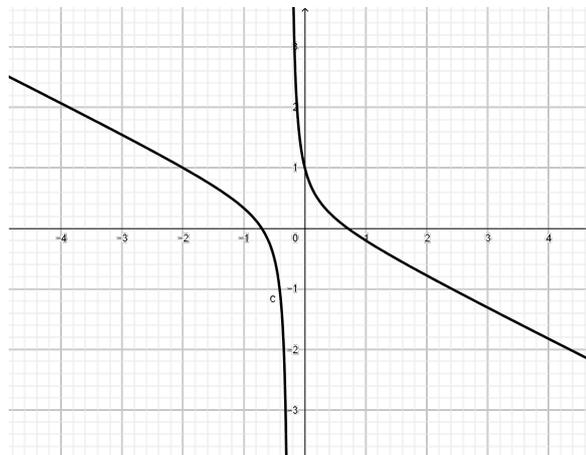


Figura 4.21: Hipérbole de equação $2x^2 + 4xy + y = 1$.

4.3 Conclusão

Embora não tenha tido tempo hábil de desenvolver o capítulo quatro com estudantes para testar seus resultados, esse trabalho tenta desenvolver uma forma prática de apresentar aos alunos do ensino básico e médio outras geometrias além da euclidiana. Além disso, tenta fornecer ao professor conhecimentos básicos para ensiná-las aos seus estudantes tendo capacidade de sanar quaisquer dúvidas relativas sobre as mesmas. Tais como

- Como essa geometria funciona?

- As cônicas podem ser rotacionadas livremente? Como as cônicas ficam dessa forma?
- Como um simples determinante pode dizer se uma cônica é degenerada ou não?
- Como funcionam os vetores no espaço?
- Porque os triângulos na superfície da Terra possuem a soma dos seus ângulos internos maior que 180° ?

Todas essas são exemplos de indagações que queremos ouvir/receber de nossos alunos. Queremos, com essas atividades, despertar nos estudantes aquela sensação de incômodo que gera a curiosidade e a busca por novos conhecimentos.

A seção 4.1 sobre geometria elíptica, por ser prática, pode ser usada em aulas do ensino fundamental entre o sétimo e oitavo ano e em feiras científicas de qualquer escola. Já a segunda seção tende a ser mais voltada para alunos com um interesse mais apurado em matemática, ela é um motivador para o estudo da geometria projetiva e álgebra linear, muito mais relacionada com turmas avançadas e alunos do PIC. Pretendo utilizar esse trabalho com alunos na feira científica da atual instituição na qual trabalho.

Dessa forma, esse trabalho tem a meta de resgatar aquela curiosidade necessária para motivar o estudo e a ciência e da matemática.

Bibliografia

- [1] ANDRADE, P., BARROS, A. *Introdução à Geometria Projetiva*. Rio de Janeiro: SBM 2010. 170p. (Coleção Textos Universitários)
- [2] ANDRADE, A. F. F. de. Um estudo da geometria projetiva elíptica. 2015. 127 f. Dissertação - (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2015. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/134030>>.
- [3] BOLDRINI, J. L. M. et al. *Álgebra Linear*. 2^aed., São Paulo: Harbra 1984. 411p.
- [4] DELGADO, J., FRENSEL, K., CRISSAF L. *Geometria Analítica* 1^aed., Rio de Janeiro: SBM 2013. 405p. (Coleção Profmat)
- [5] Lang, Serge *Álgebra Linear* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna 2003. 405p.
- [6] LIMA, E.L. et al. *A Matemática do Ensino Médio-Volume 3* 4^aed., Rio de Janeiro: SBM 1998. 249p. (Coleção do Professor de Matemática)
- [7] LIMA, E.L. *Álgebra Linear* 7^aed., Rio de Janeiro: IMPA 2006. 357p. (Coleção Matemática Universitária)
- [8] GEOGEBRA. Disponível em: <http://www.geogebra.org/>. Acesso em: 10/08/2017
- [9] HEFEZ, A., FERNANDES, C.S. *Introdução à Álgebra Linear* 1^aed., Rio de Janeiro: SBM 2012. 328p. (Coleção Profmat)
- [10] MUNIZ NETO, A.C. *Geometria* 1^aed., Rio de Janeiro: SBM 2013. 471p. (Coleção Profmat)
- [11] WYLIE, C.R. *Introduction to Projective Geometry*, New York: MacGran-Hill 1970. 556p.