Universidade Federal do ABC
Profmat - Mestrado Profissional em Matemática

Vitor Gustavo de Amorim

Aproximação de Funções Contínuas por Polinômios

Santo André-SP
2013

VITOR GUSTAVO DE AMORIM

APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES CONTÍNUAS POR POLINÔMIOS

Trabalho de Conclusão de Curso do Profmat - Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do ABC, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. JOÃO CARLOS DA MOTTA FERREIRA

Santo André - SP

2013

VITOR GUSTAVO DE AMORIM

APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES CONTÍNUAS POR POLINÔMIOS

Trabalho de Conclusão de Curso do Profmat - Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do ABC, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre.

Aprovada em MARÇO de 2013.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. JOÃO CARLOS DA MOTTA FERREIRA - Orientador
UFABC

Prof. Dr. RODNEY CARLOS BASSANEZI
UFABC

Prof. Dr. GERALDO POMPEU JUNIOR
UFSCAR

Santo André-SP

2013

Dedico este trabalho às pessoas que, com seu amor e seus ensinamentos, me trouxeram até aqui e com certeza me levarão cada vez mais longe; minha amada esposa Ana Carolina, meus irmãos Marcelo, Fábio e Luciana, minha mãe e amiga de sempre Celi e, especialmente, quem me ensinou o valor e a beleza da dedicação, meu pai Antonio Carlos (in memoriam).

Agradecimentos

Agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática pela brilhante iniciativa de criação do Profmat, pois este programa possibilitou meu retorno aos estudos e à vida acadêmica, sem precisar abdicar de meu trabalho como docente. É fato que o Profmat mudou e continuará mudando para melhor a trajetória de muitos professores brasileiros e, consequentemente, da Educação Matemática no Brasil.

À coordenação nacional do Profmat, pelo trabalho pioneiro e por enfrentar todas as dificuldades que este lhe trouxe. Pelo esforço em disponibilizar os materiais didáticos de qualidade, pelo fornecimento dos livros da SBM e pelo elaboração das provas nacionais que exigiram de nós alunos mais do que o lugar comum da sistematização de conhecimentos, exigiram o legítimo pensamento matemático.

À CAPES, pelo apoio financeiro nesses dois anos de curso, demonstrando seu compromisso com a educação brasileira e com a valorização do professor. O auxílio oferecido, além de proporcionar um enriquecimento bibliográfico, também possibilitou uma dedicação contínua e prioritária ao curso, sem afetar meu trabalho em sala de aula.

À Universidade Federal do ABC, por abrir as suas portas ao Profmat, incluindo-o na sua grade de pós-graduação e proporcionando aos seus alunos toda a estrutura da Universidade oferecida aos demais cursos de pós-graduação.

Ao coordenador do Profmat na UFABC, Rodney Bassanezi, que nos acolheu na Universidade e deu todo suporte aos alunos e professores durante o curso.

Aos professores das disciplinas que cursamos, João Motta, Rafael Grisi, Daniel Miranda, Armando Caputi e Sinuê Lodovici que nos deram apoio e incentivo para que nos aprofundássemos em cada uma das disciplinas que lecionaram. Em especial, agradeço ao professor Sinuê, que me acolheu em uma primeira ideia de trabalho de conclusão e muito me ensinou nesse período.

Ao meu professor e orientador João Carlos, pelos ensinamentos, pela orientação e principalmente, por acreditar na minha capacidade e me desafiar continuamente a buscar voos mais altos.

Agradeço também a todos os meus colegas de turma, pelo convívio, troca de ideias, momentos de descontração e apoio durante o curso. Especialmente, agradeço àqueles que estiveram mais perto, que me apoiaram de diversas maneiras e que além de colegas, se tornaram amigos: Alexandre, João, Leonardo, Maura, Regis, Samuel e Xavier.

Finalmente, agradeço à minha família pelo apoio, pelo amor irrestrito e pelo orgulho que manifestam por mim. E à minha amada esposa Ana Carolina, que esteve ao meu lado, bem de perto, durante todo o curso e acompanhou todas as dificuldades e todos os meus esforços desmedidos para fazer o melhor, me incentivando a superar todos os obstáculos; ela continua aqui, do meu lado, me incentivando a buscar mais.

A busca pelo conhecimento é bela e eterna. Eu não paro por aqui!

Resumo

O objetivo deste trabalho é fazer um estudo das aproximações de funções contínuas definidas em intervalos compactos através de polinômios. O pilar central deste estudo é a demonstração do Teorema de Aproximação de Weierstrass, utilizando para isso os polinômios de Bernstein como polinômios de aproximação. Para chegar a esse ponto, foi necessário fazer um estudo das funções contínuas definidas em conjuntos compactos, com o objetivo de estabelecer duas proriedades dessas funções que são essenciais na demonstração do referido Teorema: a continuidade uniforme e a imagem compacta. A validade do Teorema também é demonstrada para funções complexas com domínio em um intervalo real compacto. São apresentadas ainda, outras duas formas de aproximar uniformemente funções contínuas, sem a utilização de polinômios. Em seguida, é feito um estudo das melhores aproximações para funções contínuas dentro de um conjunto de polinômios com grau limitado por um inteiro positivo. O trabalho é finalizado com uma proposta de aplicação didática do estudo dos polinômios de Bernstein para alunos do Ensino Médio, seguida de uma sequência de exemplos sugerindo a forma de abordagem desses conteúdos em sala de aula.

Palavras-chave: Aproximação, funções contínuas, polinômios de Bernstein.

Abstract

The objective of this work is to make a study of approximations of continuous functions defined on compact intervals by polynomials. The central pillar of this study is the proof of the Weierstrass Approximation Theorem, using for this the Bernstein polynomials as polynomials approximation. To reach this point, it was necessary to make a study of continuous functions defined on compact sets, with the goal of establishing two proriedades those functions that are essential in the statement of that theorem: the uniform continuity and compact image. The validity of the theorem is also demonstrated for complex functions with domain in a real compact interval. We shown also other two ways of approximating uniformly continuous functions without the use of polynomials. Next, a study is made of the best approaches for continuous functions within a set of polynomial with a degree limited by a positive integer. The work ends with a proposal of application of didactic study of Bernstein polynomials to high school students, followed by a sequence of examples suggest how to approach such content in the classroom.

Keywords: Approximation, continuous functions, Bernstein polynomials.

Sumário

Introdução

O objetivo principal do presente trabalho é desenvolver um estudo sobre a aproximação de funções contínuas definidas em um intervalo compacto. Mais especificamente, o tema central deste estudo é o Teorema de Aproximação de Weierstrass, que afirma que toda função contínua definida em um intervalo compacto pode ser aproximada uniformemente por polinômios neste intervalo. A demonstração do resultado será feita utilizando-se de uma classe de polinômios associados à função dada que são conhecidos como polinômios de Bernstein. Para que seja possível demonstrar o referido Teorema, é necessário estabelecer duas propriedades fundamentais sobre as funções contínuas definidas em conjuntos compactos: a continuidade uniforme e a imagem compacta. No estudo da aproximação uniforme de funções contínuas, veremos também duas outras maneiras de se aproximar tais funções através de duas classes bem simples de funções: as funções afins por partes e as funções do tipo degrau. Mostraremos, como corolários do Teorema de Aproximação de Weierstrass, que este resultado permanece válido para funções complexas com domínio em um intervalo real compacto e que o conjunto $\mathcal{P}[a,b]$ dos polinômios definidos no intervalo fechado $[a,b]$ é denso no conjunto $\mathcal{C}[a,b]$ das funções contínuas definidas no mesmo intervalo. Em seguida, consideraremos seguinte problema: dado um conjunto de polinômios com grau menor ou igual a um inteiro positivo fixo, determinar-se-á a existência e a caracterização dos polinômios desse conjunto que realizam a melhor aproximação para uma função $f \in \mathcal{C}[a,b]$. Para finalizar o trabalho e, de acordo com a proposta do Trabalho de Conclusão do Profmat, apresentaremos uma proposta de aplicação didática do estudo dos polinômios de Bernstein associados a um função contínua. Mostraremos diversas razões que justificam o estudo de tais polinômios na 3ª série do Ensino Médio e apresentaremos uma sequência de exemplos sugerindo uma forma de abordagem para tal conteúdo. A organização deste trabalho foi divida em quatro capítulos.

No Capítulo 1, o principal objetivo é esbelecer dois resultados sobre as funções do conjunto $\mathcal{C}(K)$, onde $K \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto, que serão essenciais na demonstração do Teorema de Aproximação de Weierstrass. Esses resultados afirmam, respectivamente, que se $f \in \mathcal{C}(K)$, então f é uniformemente contínua e $f(K)$ é um conjunto compacto. Para chegar a esses resultados faremos um breve estudo sobre as sequências de números reais, a topologia de subconjuntos de $\mathbb{R}$ e as funções contínuas. Além disso, demonstramos também neste capítulo, alguns resultados que são pré-requisitos para as demonstrações do capítulo 3.

O capítulo 2 é iniciado com a definição do conceito de aproximação uniforme de funções contínuas e com a demonstração de dois Teoremas que estabelecem duas formas de aproximar uma função $f \in \mathcal{C}[a, b]$. Uma delas utilizando funções do tipo degrau e a outra através de funções afins por partes. Em seguida, são apresentados os polinômios de Bernstein e é feita a demonstração do Teorema de Aproximação de Weierstrass, resultado central do trabalho. O capítulo é finalizado com um breve estudo sobre funções complexas contínuas e com a demonstração do resultado análogo ao Teorema de Weierstrass para essas funções.

O objetivo do capítulo 3 é estudar conjuntos de polinômios gerados pelas combinações linareas de um conjunto de monômios previamente estabelecido. Dada uma função $f \in \mathcal{C}[a, b]$, deseja-se determinar os polinômios daquele conjunto que realizam a melhor aproximação de f em $[a, b]$, cujo sentido será definido. Demonstraremos um Teorema que garante a existência de polinômios com essa propriedade e, em seguida, será apresentado um resultado que caracteriza os polinômios de melhor aproximação.

Finalizando o presente trabalho, o capítulo 4 consiste de uma proposta de aplicação didática do estudo dos polinômios de Bernstein para alunos do Ensino Médio. Nesta proposta, apresentamos vários argumentos que justificam o ensino desse conteúdo à alunos da 3ª série do Ensino Médio. Em seguida, desenvolveremos uma sequência de exemplos que sugerem uma forma de abordagem em sala de aula. Em particular, serão desenvolvidos nesses exemplos alguns polinômios de Bernstein relacionados a funções elementares contínuas definidas no intervalo $[0, 1]$. O estudo da aproximação é feito através da visualização dos gráficos da função e dos polinômios associados construídos no GeoGebra. São propostos também alguns exemplos de funções que não satisfazem as hipóteses do Teorema de Aproximação de Weierstrass, com o objetivo de visualizar o resultado gráfico dos polinômios associados a essas funções e verificar a importância da função ser contínua e estar definida em um intervalo compacto, para que seja garantida a validade do Teorema. Finalizando esta sequência, feremos dois exemplos em que serão desenvolvidos os polinômios de aproximação para funções contínuas em um intervalo $[a, b]$ qualquer. Estes polinômios resultarão de uma adaptação dos polinômios de Bernstein ao intervalo dado.

Capítulo 1

Funções Contínuas em Conjuntos Compactos

O objetivo deste capítulo é estabelecer resultados fundamentais sobre a Topologia do conjunto dos números reais e as funções contínuas com domínio em subconjuntos de $\mathbb{R}$. Esses resultados servirão como pré-requisitos para a demonstração do Teorema de Aproximação de Weiertrass, que constitui o tema central deste trabalho.

Em particular, serão demonstrados dois teoremas centrais da Análise sobre funções contínuas em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$. Com esse foco, faremos um breve estudo das sequências de números reais, dos subconjuntos compactos da reta e das funções contínuas, para que a partir daí, seja possível demonstrar esses teoremas.

Os desenvolvimento dos conteúdos deste capítulo foi baseado nas referências [1], [6], [7] e [8].

1.1 Sequências de números reais.

As demonstrações feitas nessa seção baseiam-se em [1, Cap. 2 e 5], [6] e [7, Cap. IV].

Definição 1.1. *Uma sequência de números reais é uma função $x_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada natural n um número real x_n.*

As sequências de números reais serão representadas por (x_n), enquanto o símbolo x_n representa o valor da função (x_n) no número natural n, chamado também de valor da sequência no índice n. Os valores da sequência serão frequentemente chamados de pontos da sequência. Se (x_n) é uma sequência de números reais e $L = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\} \subset \mathbb{N}$ é um subcontjunto infinito de $\mathbb{N}$, então a restrição da função (x_n) aos valores de L, representada por (x_{n_k}), é chamada de subsequência de (x_n). Uma subsequência (x_{n_k}) também pode ser vista como uma composição

$x_{n_k} = x_n \circ \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow L$ é a função que carcteriza o subconjunto $L \subset \mathbb{N}$. Assim, toda subsequência também pode ser vista como uma sequência $x_{n_k} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Por esse motivo e por uma questão de simplicidade da linguagem, uma subsequência (x_{n_k}) poderá ser representada eventualmente por (x_n).

Definição 1.2. *Um número real a é chamado limite da sequência (x_n) para n tendendo ao infinito se, para todo real $\varepsilon > 0$, existe um índice n_0 tal que $n > n_0$ acarreta $|x_n - a| < \varepsilon$. Essa definição é representada simbolicamente por*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

O símbolo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ também é escrito, de forma mais simples, como $\lim x_n = a$. Quando o limite definido acima existe, a sequência é dita *convergente*. Diz-se também que (x_n) converge para a. O limite de uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) é definido de forma análoga. Ou seja,

$$\lim_{n_k\to\infty} x_{n_k} = a \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_{k_0} \in L \subset \mathbb{N}; n_k > n_{k_0} \Longrightarrow |x_{n_k} - a| < \varepsilon$$

Definição 1.3. *Dizemos que uma sequência (x_n) tende ao infinito e escrevemos* $\lim x_n = \infty$ *se*

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Longrightarrow x_n > M$$

Analogamente definimos $\lim x_n = -\infty$ *quando*

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Longrightarrow x_n < -M$$

O resultado a seguir mostra que, se (x_n) converge para a, tende ao infinito ou a menos infinito, então toda subsequência de (x_n) mantém esse comportamento.

Proposição 1.4. *Para toda subsequência (x_{n_k}) de uma dada sequência (x_n) tem-se:*

(a) $\lim x_n = a \Longrightarrow \lim x_{n_k} = a$.

(b) $\lim x_n = \infty \Longrightarrow \lim x_{n_k} = \infty$.

(c) $\lim x_n = -\infty \Longrightarrow \lim x_{n_k} = -\infty$.

Demonstração. Vamos demonstrar apenas a implicação (a), já que as outras duas são demonstradas de forma inteiramente análoga. Se $\lim x_n = a$, então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ tem-se $|x_n - a| < \varepsilon$. Como o subconjunto $L \subset \mathbb{N}$ onde a subsequência (x_{n_k}) está definida é infinito, então, existe $n_{k_0} \in L$ tal que $n_{k_0} > n_0$. Logo,

$$n_k > n_{k_0} \Longrightarrow n_k > n_0 \Longrightarrow |x_{n_k} - a| < \varepsilon \Longrightarrow \lim x_{n_k} = a$$

□

Uma sequência é dita *limitada* quando existe um número real $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Caso contrário, a sequência será dita *ilimitada*. Mostraremos a seguir que as sequências convergentes são sempre limitadas.

Proposição 1.5. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) um sequência convergente. Então existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim x_n = a$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Longrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Daí seque que, se $L = max\{|a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|\}$, então

$$|a - \varepsilon| \leq L \quad \text{e} \quad |a + \varepsilon| \leq L \Longrightarrow -L \leq a - \varepsilon < a + \varepsilon \leq L$$

Ou seja,

$$n > n_0 \Longrightarrow -L \leq a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \leq L \Longrightarrow |x_n| \leq L$$

Considere então $M = max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{n_0}|, L\}$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $|x_n| \leq M$. Logo, (x_n) é limitada. □

Chamamos uma sequência (x_n) de *não decrescente* quando a função (x_n) é não decrescente, ou seja, se $m < n \Longrightarrow x_m \leq x_n$. Analogamente, (x_n) é chamada de *não crescente* se $m < n \Longrightarrow x_m \geq x_n$. Uma sequência que é não crescente ou não decrescente é também chamada de *monótona*.

Lembramos que um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito *limitado* quando existe um número real $M > 0$ tal que $|x| \leq M$ para todo $x \in X$. Quando ocorrer tal fato, diremos também que X é limitado por M. O subconjunto X é dito *limitado inferiormente*, quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$. Analogamente, X é *limitado superiormente* se existir $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Obviamente, todo conjunto limitado é limitado inferiormente e superiormente.

Além disso, recordemos também os conceitos de *supremo* e o *ínfimo* de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ que são definidos, respectivamente, por

$$S = sup(X) = min\,\{s \in \mathbb{R}; x \leq s, \forall x \in X\} \quad \text{e} \quad I = inf(X) = max\,\{i \in \mathbb{R}; x \geq i, \forall x \in X\}$$

Destaquemos duas propriedades importantes do supremo e do ínfimo:

(i) Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado inferiormente admite ínfimo e todo subconjunto limitado superiormente admite supremo.

(ii) Se $S = sup(X)$ e $I = inf(X)$, então para todo $\varepsilon > 0$ tem-se $(S - \varepsilon, S] \cap X \neq \emptyset$ e $[I, I + \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$.

Outra propridade importante do supremo e do ínfimo é a que segue na proposição a seguir.

Proposição 1.6. *Se $X \subset \mathbb{R}$ é um subconjunto limitado inferiormente, então existe uma sequência (x_n) de pontos de X tal que $\lim x_n = I = inf(X)$. Analogamente, se X é limitado superiormente, existe uma sequência (y_n) de pontos de X tal que $\lim y_n = S = sup(X)$.*

Demonstração. Suponha que (X) é limitado inferiormente. Então, pelas propriedades (i) e (ii) dadas acima, X admite ínfimo e para cada $\varepsilon > 0$ tem-se $[I, I + \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$, onde $I = inf(X)$. Escolhemos então, para cada natural n, um valor $x_n \in [I, I + \frac{1}{n}) \cap X$. Mostraremos que a sequência (x_n) de pontos de X assim obtida converge para I. De fato, dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Então

$$n > n_0 \Longrightarrow I - \varepsilon < I \leq x_n < I + \frac{1}{n} < I + \frac{1}{n_0} < I + \varepsilon \Longrightarrow |x_n - I| < \varepsilon \Longrightarrow \lim x_n = I$$

A afirmação relativa ao supremo pode ser demonstrada de forma inteiramente análoga. □

Para encerrar essa seção, apresentaremos um importante resultado sobre as sequências limitadas que será fundamental no estudo de conjuntos compactos que faremos na próxima seção. Esse resultado é consequência das duas proposições que serão demonstradas a seguir. Provaremos também um resultado semelhante que diz respeito às sequências ilimitadas.

Proposição 1.7. *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração. Suponha que (x_n) é uma sequência não decrescente e limitada. Então o conjunto $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ é limitado e, portanto, admite supremo. Seja $S = sup(X)$. Assim, pela propriedade (ii) acima, seque que para todo $\varepsilon > 0$, tem-se $(S - \varepsilon, S] \cap X \neq \emptyset$, ou seja, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $S - \varepsilon < x_{n_0} \leq S$. Sendo (x_n) não decrescente e $S = sup(X)$, temos então que $n > n_0 \Longrightarrow S - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq S$. Logo,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Longrightarrow S - \varepsilon < x_n < S + \varepsilon \Longrightarrow |x_n - S| < \varepsilon \Longrightarrow \lim x_n = S$$

Se (x_n) for não cresecente prova-se, de forma inteiramente análoga, que $\lim x_n = I = inf(X)$. De qualquer modo, temos que (x_n) é convergente. □

Proposição 1.8. *Toda sequência admite uma subsequência monótona.*

Demonstração. Considere a sequência (x_n) e os conjuntos

$$I = \{k \in \mathbb{N}; \quad \exists n > k \quad \text{com} \quad x_n \geq x_k\} \quad \text{e} \quad J = \{k \in \mathbb{N}; \quad \exists n > k \quad \text{com} \quad x_n \leq x_k\}$$

É imediato verificar que $I \cup J = \mathbb{N}$. Sendo assim, temos dois casos a considerar:

1º caso - I é infinito

Nesse caso, seja $n_1 = min(I)$. Então tomamos $n_2 \in I$ tal que $n_2 > n_1$ e $x_{n_2} \geq x_{n_1}$. Em seguida, tomamos $n_3 \in I$ tal que $n_3 > n_2$ e $x_{n_3} \geq x_{n_2}$. Sendo I um conjunto infinito, podemos continuar esse processo indefinidamente e, assim, obtemos uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) que é não decrescente, ou seja, (x_{n_k}) é monótona.

2º caso - J é infinito

Nesse caso, podemos obter, de forma análoga ao processo acima, uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) que é não crescente, ou seja, (x_{n_k}) é monótona.

Em qualquer caso, (x_n) admite uma subsequência monótona. □

Finalmente, como consequência dos dois teoremas apresentados acima, temos o principal resultado desta seção.

Teorema 1.9 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sequência limitada admite subsequência convergente.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência limitada. Então, pela Proposição 1.8, (x_n) admite uma subsequência (x_{n_k}) monótona que, assim como (x_n), também é limitada. Logo, pela Proposição 1.7, segue que (x_{n_k}) é convergente. □

Encerrando esse breve estudo das sequências reais, temos um resultado análogo ao Teorema acima, porém sobre sequências ilimitadas.

Teorema 1.10. *Toda sequência ilimitada, admite uma subsequência* (x_{n_k}) *tal que* $\lim x_{n_k} = \infty$ *ou* $\lim x_{n_k} = -\infty$.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência ilimitada. Considere os conjuntos $L = \{n \in \mathbb{N}; x_n > n\}$ e $K = \{n \in \mathbb{N}; x_n < -n\}$. Como (x_n) é ilimitada então temos que L é infinito ou K é infnito (ou ambos o são). Assim, se $L \subset \mathbb{N}$ é infinito, a restrição de (x_n) aos valores de L nos dá uma subsequência (x_{n_k}) tal que, para todo real $M > 0$, existe $n_{k_0} \in L$, com $n_{k_0} > M$, tal que

$$n_k > n_{k_0} \Longrightarrow x_{n_k} > M \Longleftrightarrow \lim x_{n_k} = \infty$$

Analogamente, se K for infinito teremos uma subsequência (x_{n_k}) tal que $\lim x_{n_k} = -\infty$. □

1.2 Subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

As demonstrações feitas nessa seção baseiam-se em [1, Cap. 5] e [7, Cap. V].

Definição 1.11. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio. Então um número real a é dito ponto de aderência de X se existe uma sequência (x_n) de pontos de X, tal que* $\lim x_n = a$.

Na definição acima, diz-se também que a é *aderente* a X. Observamos que qualquer número $a \in X$ é aderente a X, pois se tomarmos a sequência constante $x_n = a$, teremos $x_n \in X$ para todo n e $\lim x_n = a$. O conjunto dos pontos aderentes a X é chamado de *fecho* de X e é denotado por $\overline{X}$. Pelo observado acima temos que $X \subset \overline{X}$, para todo subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ não vazio. Dados dois subconjuntos X e Y tais que $X \subset Y \subset \mathbb{R}$, diz-se que X é *denso* em Y quando $Y \subset \overline{X}$, ou seja, X é denso em Y quando todo ponto de Y é limite de uma sequência de pontos de X.

Definição 1.12. *Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito fechado quando contém todos seus pontos de aderência, ou seja, quando $X = \overline{X}$.*

Lembramos que, dados $a, b \in \mathbb{R}$, chamamos de intervalo fechado com extremos em a e b ao subconjunto de $\mathbb{R}$ definido por $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$. Vamos mostrar que, de acordo com a definição acima, qualquer intevalo fechado é um conjunto fechado.

Proposição 1.13. *Todo intervalo fechado é um conjunto fechado.*

Demonstração. Considere o intervalo fechado $[a, b]$ e suponha que esse intervalo não seja um conjunto fechado. Então, existe um ponto de aderência de $[a, b]$, digamos x_0, que não pertence a esse intervalo. Ou seja, existe uma sequência (x_n) de pontos de $[a, b]$ tal que $\lim x_n = x_0$ e $x_0 \notin [a, b]$. Portanto, temos que $x_0 \in (-\infty, a)$ ou $x_0 \in (b, \infty)$.
Se $x_0 \in (-\infty, a)$, então, tomando $\varepsilon = \frac{a-x_0}{2}$, temos que, pela definição de limite de sequência, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow |x_n - x_0| < \varepsilon \Longrightarrow -\varepsilon + x_0 < x_n < \varepsilon + x_0 = \frac{a + x_0}{2} < \frac{a + a}{2} = a$$

Daí concluímos que $n > n_0 \Longrightarrow x_n < a$ e isso contradiz a hipótese de (x_n) ser uma sequência de valores pertencentes ao conjunto $[a, b]$. Assim, não podemos ter $x_0 \in (-\infty, a)$.
Analogamente, se $x_0 \in (b, \infty)$, ao tomarmos $\varepsilon = \frac{x_0-b}{2}$, chagaremos à conclusão de que a sequência (x_n) possui termos no intervalo (b, ∞), o que nos leva novamente a uma contradição. Logo, o intervalo $[a, b]$ deve ser necessariamente um conjunto fechado. $\square$

Nesse momento, vamos estabelecer algumas propriedades sobre os subconjuntos de $\mathbb{R}$ chamados de *abertos*. Esses resultados serão úteis em algumas demonstrações que faremos no próximo capítulo.

Definição 1.14. *Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito aberto quando para todo $x \in X$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset X$.*

Proposição 1.15. *Todo intervalo aberto $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $x \in (a, b)$ e tome $\varepsilon = min\,\{x - a, b - x\}$. Então, se $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, temos

$$a \leq x - \varepsilon < y < x + \varepsilon \leq b \Longrightarrow y \in (a, b) \Longrightarrow (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (a, b)$$

□

Analogamente podemos demonstrar que os intervalos $(-\infty, a)$ e (a, ∞) são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

Proposição 1.16. *Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família qualquer de subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$. Então, o conjunto $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é aberto.*

Demonstração. Dado $x \in A$, então existe $\lambda_0 \in L$ tal que x pertence ao conjunto aberto A_{λ_0}. Portanto, é possível encontrar $\varepsilon > 0$ tal que

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_{\lambda_0} \subset A$$

Logo, o conjunto A é aberto. □

O próximo Teorema expressa a relação entre subconjuntos fechados e abertos de $\mathbb{R}$.

Teorema 1.17. *Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é aberto se, e somente se, seu complementar em $\mathbb{R}$ é fechado.*

Demonstração. Vamos assumir inicialmente que A é aberto. Seja $F = \mathbb{R} - A$ e considere $a \in F$ um ponto de aderência desse conjunto. Então existe uma sequência (x_n) de pontos de F tal que $\lim x_n = a$. Vamos supor $a \in A$. Então, sendo A um conjunto aberto, é possível encontrar $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A$. Por outro lado, para esse mesmo valor de ε, deve existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Longrightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A$$

o que é um absurdo, pois a sequência (x_n) não possui valores em A. Logo, devemos ter $a \in F$ e, portanto, F é fechado.

Reciprocamente, suponha que F é fechado. Se A não for aberto, então existe um ponto $a \in A$, tal que, para todo $\varepsilon > 0$, o intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ contém pontos que não pertencem ao conjunto A. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) \cap F$. Obtemos assim uma sequência de pontos de F tal que, dado $\varepsilon > 0$, ao tomar $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ obtemos

$$n > n_0 \Longrightarrow |x_n - a| < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

donde segue que $\lim x_n = a$. Portanto a é um ponto de aderência do conjunto F e, sendo F fechado, devemos ter $a \in F$, o que é um absurdo. Logo, A é aberto. $\square$

Corolário 1.18. *Se $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer de subconjuntos fechados de $\mathbb{R}$, então o conjunto $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é fechado.*

Demonstração. Basta observar que $\mathbb{R} - F = \bigcup_{\lambda \in L} \overline{F_\lambda}$, onde $\overline{F_\lambda} = \mathbb{R} - F_\lambda$ para todo $\lambda \in L$. Logo, segue da Proposição 1.16 e do Teorema anterior que F é fechado. $\square$

Definição 1.19. *Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito compacto quando é fechado e limitado.*

Observamos que dado um intervalo fechado $[a, b]$, temos que, se $M = max\{|a|, |b|\}$, então

$$|a| \leq M \quad \text{e} \quad |b| \leq M \Longrightarrow -M \leq a < b \leq M$$

Daí seque que

$$\forall x \in [a, b] \Longrightarrow -M \leq a \leq x \leq b \leq M \Longrightarrow |x| \leq M$$

Assim, pela Proposição 1.13 e de acordo com a observação feita acima, temos que todo intervalo fechado é um conjunto fechado e limitado, ou seja, todo intervalo fechado $[a, b]$ é um conjunto compacto.

A seguir, demonstraremos um resultado sobre conjuntos compactos que será fundamental no estudo que faremos mais adiante sobre funções contínuas definidas em conjuntos deste tipo.

Teorema 1.20. *Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos de X possui uma subsequência convergente para um ponto pertencente a X.*

Demonstração. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um subconjunto compacto e considere (x_n) um sequência de pontos de X. Então, como $x_n \in X$ para todo n e X é limitado, temos que (x_n) é um sequência limitada. Portanto, pelo Teorema 1.9, (x_n) admite um subsequência (x_{n_k}) convergente. Ou seja, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim x_{n_k} = a$. Assim, segue que a é um ponto de aderência de X e, sendo X um conjunto fechado, devemos ter necessariamente $a \in X$. Logo, (x_n) possui um subsequência convergente para um ponto de X.

Por outro lado, seja $X \subset \mathbb{R}$ e suponha que toda sequência de pontos de X admite uma subsequência convergente para um ponto de X. Então, se $a \in \mathbb{R}$ é um ponto aderente a X, existe uma sequência (x_n) de pontos de X tal que $\lim x_n = a$. Por hipótese, temos que (x_n) possui um subsequência (x_{n_k}) convergente para um ponto de X. Mas, de acordo com a Proposição 1.4, devemos ter necessariamente $\lim x_{n_k} = a$. Segue então que $a \in X$ e, portanto, $\overline{X} \subset X$, ou seja, X é um conjunto fechado. Além disso, se X não fosse um conjunto limitado, para cada $n \in \mathbb{N}$ existiria um número real x_n, tal que $x_n > n$ ou $x_n < -n$. Assim, obteríamos um sequência (x_n) ilimitada em que todas as suas subsequências (x_{n_k}) seriam ilimitadas, pois $x_{n_k} > n_k$ ou $x_{n_k} < -n_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, pela Proposição 1.5, (x_n) não admite subsequência convergente, o que contradiz a hipótese. Logo, o conjunto X é fechado e limitado e, portanto, compacto. □

1.3 Funções contínuas

As demonstrações feitas nessa seção baseiam-se em [1, Cap. 4 e 5] e [7, Cap. VII].

Definição 1.21. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio. Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita contínua em $a \in X$, se para todo $\varepsilon > O$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$x \in X, |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Se uma função for contínua em todos os pontos do domínio X, diz-se que a função é contínua em X, ou simplesmente contínua. Vejamos agora dois resultados importantes sobre funções contínuas que serão muito úteis nas demonstrações do próximo capítulo. O primeiro deles mostra que uma função composta de funções contínuas também é contínua. O segundo mostra que uma função contínua que assume um valor positivo ou negativo para um valor x_0 do domínio, permanece com esse sinal em um intervalo sufucientemente pequeno contendo x_0.

Proposição 1.22. *Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $a \in X$ e $g : f(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $b = f(a) \in f(X)$, então a função $h = g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $a \in X$.*

Demonstração. Como g é contínua em b, então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$y \in f(X), |y - b| < \delta \Longrightarrow |g(y) - g(b)| < \varepsilon$$

ou seja,

$$x \in X, |f(x) - f(a)| < \delta \Longrightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$$

Mas, sendo f contínua em a, temos que para o δ dado acima, existe $\zeta > 0$ tal que

$$x \in X, |x - a| < \zeta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \delta$$

Portanto,

$$x \in X, |x-a| < \zeta \Longrightarrow |f(x)-f(a)| < \delta \Longrightarrow |g(f(x))-g(f(a))| = |h(x)-h(a)| < \varepsilon$$

Logo, h é contínua em a. $\square$

Proposição 1.23. *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Dado $x_0 \in X$, se $f(x_0) > 0$ (respectivamente $f(x_0) < 0$), então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ (respectivamente $f(x) < 0$) para todo $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap X$.*

Demonstração. Suponha $f(x_0) > 0$. Como f é contínua em x_0, então, dado $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, |x-x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon \Longrightarrow 0 < \frac{f(x_0)}{2} = f(x_0) - \varepsilon < f(x)$$

ou seja,

$$x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap X \Longrightarrow f(x) > 0$$

A afirmação para $f(x_0) < 0$ se prova de forma inteiramente análoga. $\square$

Dada uma sequência (x_n) de pontos em $X \subset \mathbb{R}$ e uma função $f : X \to \mathbb{R}$, podemos obter uma nova sequência em $f(X)$, que denotaremos por (y_n), através da composição $y_n = f \circ x_n$. Ou seja, (y_n) é a sequência que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ o número real $f(x_n)$. O próximo resultado, mostra que o fato de f ser contínua está ligado ao limite da sequência (y_n), quando (x_n) for convergente.

Teorema 1.24. *Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $a \in X$ se, e somente se, para toda sequência (x_n) de pontos de X tal que $\lim x_n = a$, tem-se $\lim f(x_n) = f(a)$.*

Demonstração. Suponha que f é contínua em $a \in X$ e considere uma sequência (x_n) de pontos de X tal que $\lim x_n = a$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

Em particular, como $x_n \in X$ para todo n, tem-se

$$x_n \in X, |x_n-a| < \delta \Longrightarrow |f(x_n)-f(a)| < \varepsilon$$

Mas, sendo $\lim x_n = a$, temos que para o δ dado acima, existe n_0 tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow |x_n-a| < \delta \Longrightarrow |f(x_n)-f(a)| < \varepsilon \Longleftrightarrow \lim f(x_n) = f(a)$$

Reciprocamente, vamos supor que para toda sequência (x_n) de pontos de X tal que $\lim x_n = a$, tem-se $\lim f(x_n) = f(a)$. Se f não fosse contínua em $a \in X$, então seria possível determinar um $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ teríamos

$$\exists x \in X; |x - a| < \delta \quad \text{e} \quad |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon_0$$

Considere então o número real $\delta_n = \frac{1}{n}$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, escolhemos o número $x_n \in (a - \delta_n, a + \delta_n) \cap X$ tal que $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon_0$. Obtemos assim uma sequência (x_n) de pontos de X onde é imediato verificar que $\lim x_n = a$. Portanto, pela hipótese feita acima de que f não é contínua em a, temos que existe ε_0 tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in X; |x_n - a| < \delta_n \quad \text{e} \quad |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon_0$$

daí concluímos que

$$\lim x_n = a \quad \text{e} \quad \lim f(x_n) \neq f(a)$$

o que contradiz nossa hipótese. Logo, f deve ser necessariamente contínua em a. □

O Teorema demonstrado acima juntamente com o Teorema 1.20 serão fundamentais para que possamos estabalecer os dois principais resultados desse capítulo, sobre funções contínuas definidas em conjuntos compactos. Antes, porém, vamos definir o importante conceito de continuadade uniforme, que será utilizado na demonstração do Teorema de Aproximação de Weierstrass.

Definição 1.25. *Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita uniformemente contínua se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - y| < \delta$ acarreta $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, quaisquer que sejam $x, y \in X$. Simbolicamente, f é uniformemente contínua quando*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; x, y \in X, |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Observamos que, diferentemente da Definição 1.21, que trata da continuidade da função em um ponto $a \in X$, a continuidade uniforme de uma função afirma que para todo $\varepsilon > 0$ é possível determinar um $\delta > 0$ que não dependa do ponto em que se estuda a continuidade, mas que serve para todos os pontos do domínio X. Por isso, a continuidade é chamada de *uniforme*.

Agora estamos em condições de demonstrar os resultados centrais deste capítulo. O primeiro deles afirma que funções contínuas definidas em conjuntos compactos, são necessariamente uniformemente contínuas.

Teorema 1.26. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um subconjunto compacto e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, f é uniformemente contínua.*

Demonstração. Vamos supor que f não é uniformemente contínua. Então é possível encontrar um $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existem $x, y \in X$ tais que $|x - y| < \delta$ e $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$. Considere então o número $\delta_n = \frac{1}{n}$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, escolhemos $x_n, y_n \in X$ tais que

$$|x_n - y_n| < \delta_n = \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$$

Como X é compacto, então, pelo Teorema 1.20, as sequências (x_n) e (y_n) obtidas acima admitem subsequências (x_{n_k}) e (y_{n_k}) convergentes para pontos de X. Vamos mostrar que $\lim (x_{n_k}) = \lim (y_{n_k})$. Com efeito, se $\lim (x_{n_k}) = a$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n > n_o \Longrightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Seja $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 > \frac{2}{\varepsilon}$ e tome $N = max\{n_0, n_1\}$. Então

$$n > N \Longrightarrow |y_n - a| = |y_n - x_n + x_n - a| \leq |x_n - y_n| + |x_n - a| < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

daí concluímos que $\lim (y_{n_k}) = a = \lim (x_{n_k})$. Por outro lado, sabemos que f é contínua. Portanto, pelo Teorema 1.24, devemos ter $\lim f(x_{n_k}) = f(a) = \lim f(y_{n_k})$. Assim, para o ε_0 dado acima, existe $n_{k_0} \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > n_{k_0}$ acarreta $|f(x_{n_k}) - f(a)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ e $|f(y_{n_k}) - f(a)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$, ou seja,

$$n_k > n_{k_0} \Longrightarrow |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = |f(x_{n_k}) - a + a - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - a| + |f(y_{n_k}) - a| < \varepsilon_0$$

o que contradiz nossa hipótese. Logo, f é uniformemente contínua. □

O próximo resultado afirma que as funções contínuas preservam os conjuntos compactos, ou seja, a imagem de um conjunto compacto por uma função contínua é também um conjunto compacto. Em particular, a imagem de um compacto por uma função contínua é um conjunto limitado, fato este que será de grande utilidade no próximo capítulo.

Teorema 1.27. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um subconjunto compacto e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, $f(X)$ é um conjunto compacto.*

Demonstração. Seja (y_n) uma sequência de pontos de $f(X)$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $y_n = f(x_n)$. Como X é um conjunto compacto, segue do Teorema 1.20 que a sequência (x_n) admite uma subsequência (x_{n_k}) convergente para um ponto $a \in X$. Por outro lado, considere a subsequência de (y_n) dada por $(y_{n_k}) = f(x_{n_k})$. Sendo f uma função contínua temos, pelo Teorema 1.24, que $\lim f(x_{n_k}) = \lim y_{n_k} = f(a)$, com $f(a) \in f(X)$, já que $a \in X$. Assim, (y_n) admite uma subsequência convergente para um ponto de $f(X)$. Logo, pelo Teorema 1.20, $f(X)$ é um conjunto compacto. □

1.4 Sequências de funções

Nesta seção, serão apresentados alguns conceitos que, através de alguns Corolários, enriquecerão as interpretações dadas ao Teorema de Aproximação de Weierstrass, além tornar mais claro seu enunciado. Para isso, comecemos definindo algumas importantes classes de funções. As demonstrações feitas nessa seção baseiam-se em [1, Cap. 9] e [7, Cap. X].

Denotaremos por $\mathcal{F}(X)$ o conjunto de todas as funções $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $X \subset \mathbb{R}$ é um subconjunto não vazio. Por outro lado, o símbolo $\mathcal{C}(X)$ representará o conjunto de todas as funções contínuas de $\mathcal{F}(X)$. Ou seja,

$$\mathcal{C}(X) = \{f \in \mathcal{F}(X);\ f \textit{ é contínua}\}$$

Em particular, dado um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ compacto, vimos na seção anterior que, se $f \in \mathcal{C}(K)$, então f é uniformemente contínua e limitada. Vimos também que, se $f \in \mathcal{C}(X)$ e $g \in \mathcal{C}(f(X))$, então $g \circ f \in \mathcal{C}(X)$, qualquer que seja $X \subset \mathbb{R}$.

De forma análoga ao que foi feito na Seção 1.1, definiremos e estudaremos algumas propriedades das sequências de elementos no conjunto $\mathcal{F}(X)$, bem como as noções de limite e convergência.

Definição 1.28. *Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, uma sequência no conjunto $\mathcal{F}(X)$ é uma função $f_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{F}(X)$ que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ uma função $f_n \in \mathcal{F}(X)$.*

As sequências em $\mathcal{F}(X)$ serão representadas simplesmente por (f_n) enquanto f_n representa uma função de $\mathcal{F}(X)$ associada ao natural n. Para este tipo de sequência, vamos estabelecer duas noções distintas de convergência, sendo que a segunda delas traduz de forma mais precisa o significado intuitivo de aproximação.

Definição 1.29. *Seja (f_n) uma sequência de funções em $\mathcal{F}(X)$, onde $X \subset \mathbb{R}$. Então diz-se que (f_n) converge simplesmente (ou pontualmente) para a função $f \in \mathcal{F}(X)$ se, dado $\varepsilon > 0$, para cada $x \in X$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n > n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

A definição acima pode ser interpretada como um limite de sequências números reais para cada $x \in X$. De fato, de acordo com essa definição, temos que (f_n) converge pontualmente para f quando, para cada $x \in X$, tem-se $\lim f_n(x) = f(x)$. Para exprimir a convergência de f_n para f definida acima, escreveremos $f_n \longrightarrow f$ simplesmente. Observamos que na convergência simples das sequências em $\mathcal{F}(X)$, para cada $\varepsilon > 0$ dado, o valor de n_o, a partir do qual as imagens da funções f_n ficam arbitrariamente próximas da imagem de f, depende de cada $x \in X$

do domínio, ou seja, podemos ter diferentes valores de n_o correspondentes a diferentes pontos do domínio. Geometricamente, os gráficos das funções f_n que convergem simplesmente para f não se aproximam necessariamente do gráfico de f. Em contrapartida, veremos que na definição de convergência que será dada abaixo, chamada de convergência uniforme, essa aproximação será mais precisa.

Definição 1.30. *Seja (f_n) é uma sequência de funções em $\mathcal{F}(X)$, onde $X \subset \mathbb{R}$. Então diz-se que (f_n) converge uniformemente para a função $f \in \mathcal{F}(X)$ e escreve-se $f_n \longrightarrow f$ uniformemente se, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ acarreta $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in X$. Simbolicamente, $f_n \longrightarrow f$ uniformemente quando*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

Portando, quando (f_n) convergente uniformemente para f temos que, a partir de um certo n_0, os valores de $f_n(x)$ ficam arbitrariamente próximos dos valores de $f(x)$ independentemente dos valores de $x \in X$. Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, a proximidade dos valores das imagens de f_n e f através de ε se dará para todo $x \in X$, quando $n > n_o$. Geometricamente, a convergência uniforme de f_n para f significa que os gráficos das funções f_n se situam na 'faixa' do plano cartesiano compreendida pelos gráficos das funções $f - \varepsilon$ e $f + \varepsilon$. Em outras palavras, os gráficos das funções f_n se aproximam arbitrariamente do gráfico de f. A figura abaixo ilustra tal situação.

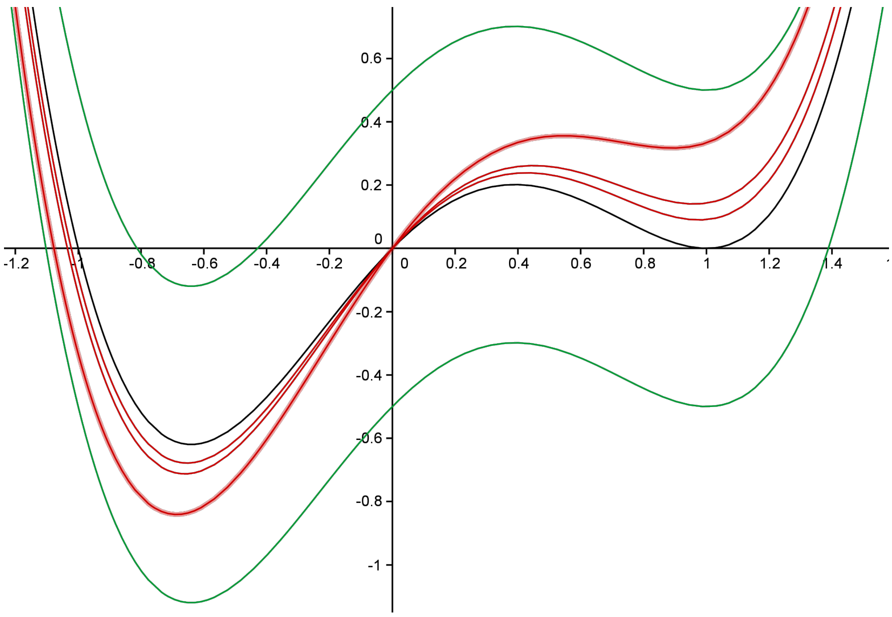

Figura 1.1: Convergência uniforme

Observamos também que, se (f_n) converge uniformemente para f, então (f_n) também converge pontualmente para f, mas a recíproca é obviamente falsa.

Assim como foi feito na Seção 1.1 para subconjuntos $X \subset \mathbb{R}$, podemos definir os conceitos de aderência e densidade em $\mathcal{F}(X)$.

Definição 1.31. *Dado um subconjunto $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}(X)$, dizemos que uma função $f \in \mathcal{F}(X)$ é aderente a $\mathcal{L}$ se existe uma sequência (f_n) de funções de $\mathcal{L}$ tal que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente.*

O conjunto que contém todas as funções aderentes a $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}(X)$ é chamado *fecho* de $\mathcal{L}$ e denotado por $\overline{\mathcal{L}}$.

Definição 1.32. *Dados dois subconjuntos $\mathcal{K}$ e $\mathcal{L}$ tais que $\mathcal{K} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{F}(X)$, diz-se que $\mathcal{K}$ é denso em $\mathcal{L}$ quando $\mathcal{L} \subset \overline{\mathcal{K}}$.*

Uma *função polinomial* ou simplesmente *polinômio* em $\mathbb{R}$ é uma função $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

onde $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ são números reais chamados de coeficientes do polinômio. Denotaremos por $\mathcal{P}(X)$ o conjunto de todos os polinômios com domínio no subconjunto $X \subset \mathbb{R}$. A partir das definições dadas na Seção 1.3, pode-se provar que todo polinômio é uma função contínua, ou seja, $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{C}(X)$ para todo $X \subset \mathbb{R}$. Uma das consequências interessantes do Teorema de Aproximação de Weierstrass será a conclusão de que, para todo intervalo fechado $[a, b]$, o conjunto $\mathcal{P}[a, b]$ é denso em $\mathcal{C}[a, b]$. Discuteremos esse resultado mais detalhadamente no próximo capítulo.

Capítulo 2

O Teorema de Aproximação de Weierstrass

O objetivo principal deste capítulo é enunciar e demonstrar o resultado que constiuti o tema central do trabalho: o Teorema de Aproximação de Weierstrass. O referido Teorema afirma que toda função contínua com domínio em um intervalo $[a, b]$ pode ser aproximada uniformemente por polinômios com domínio no mesmo intervalo. Antes disso, porém, mostraremos outras duas formas interessantes de aproximar uniformemente uma função contínua. Uma delas utilizando funções do tipo 'degrau' e a outra através das funções chamadas afins por partes.

Além disso, como consequência do Teorema de Aproximação de Weierstrass, apresentaremos dois Colorários interessantes. Um deles sobre a validade do Teorema para funções complexas com domínio no intervalo $[a, b]$ e o outro sobre a densidade do conjunto $\mathcal{P}[a, b]$ no conjunto $\mathcal{C}[a, b]$, como já foi mencionado no final do primeiro capítulo.

Os desenvolvimento dos conteúdos deste capítulo foi baseado nas referências [2], [3], [5], [9] e [11].

2.1 Aproximação de funções

Existem várias formas de definir o conceito de aproximação de funções. Uma delas, usualmente chamada de aproximação uniforme, é a que definiremos a seguir. As demonstrações feitas nessa seção baseiam-se em [2].

Definição 2.1. *Considere uma função $f \in \mathcal{F}(X)$ e seja $\mathcal{L}(X) \subset \mathcal{F}(X)$ uma classe qualquer de funções contida em $\mathcal{F}(X)$. Dizemos que f é aproximada uniformemente por funções de $\mathcal{L}(X)$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma função $g_\varepsilon \in \mathcal{L}(X)$ tal que*

$$|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

Observamos que, de acordo com a definição 1.30, dada uma sequência (f_n) de funções em $\mathcal{F}(X)$ tal que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente, então, para cada $\varepsilon > 0$ dado, sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

Assim, quando $f_n \longrightarrow f$ uniformemente, temos que f é aproximada uniformemente por funções do conjunto $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$. Portanto, a convergência uniforme de uma sequência (f_n) de funções é uma das formas de traduzir o conceito intuitivo de aproximação de funções.

Mostraremos a seguir que toda função contínua com domínio em um intervalo fechado $[a, b]$ pode ser uniformemente aproximada por dois tipos de funções bem simples.

Definição 2.2. *Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ será chamada de função degrau, quando existir uma família de intervalos disjuntos $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$, com $\bigcup\limits_{\lambda \in L} I_\lambda = \mathbb{R}$, tal que a restrição de f a cada intervalo I_λ é uma função constante.*

Teorema 2.3. *Toda função $f \in \mathcal{C}[a, b]$ pode ser aproximada uniformemente por funções do tipo degrau.*

Demonstração. Como f é uma função contínua e $[a, b]$ é um conjunto compacto, então, pelo Teorema 1.26, temos que f é uniformemente contínua. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in [a, b] \tag{2.1}$$

Por outro lado, considere o número natural $n = max\left\{l \in \mathbb{N}; l < \frac{b-a}{\delta}\right\}$ e, para cada natural k com $1 \leq k \leq n$, defina o intervalo $I_k = [a + (k-1)\delta, a + k\delta)$. Defina também os intervalos $I_0 = (-\infty, a)$, $I_{n+1} = [a + n\delta, b]$ e $I_{n+2} = (b, \infty)$. Então, se $L = \{0, 1, ..., n, n+1, n+2\}$, é imadiato verificar que a família $(I_k)_{k \in L}$ é de intervalos disjuntos e que $\bigcup\limits_{k \in L} I_k = \mathbb{R}$. Agora, para cada $1 \leq k \leq n+1$, escolhemos um número $x_k \in I_k$, de modo que x_k não seja um dos extremos desse intervalo. Dessa forma, para todo $x \in [a, b]$, existe um intervalo I_k, com $1 \leq k \leq n+1$, tal que $x \in I_k$ e $|x - x_k| < \delta$, pois

$$x, x_k \in I_k \Longrightarrow a + (k-1)\delta \leq x < a + k\delta \quad \text{e} \quad a + (k-1)\delta < x_k < a + k\delta \Longrightarrow$$

$$a + (k-1)\delta \leq x < a + k\delta \quad \text{e} \quad -a - k\delta < -x_k < -a - (k-1)\delta \Longrightarrow$$

$$-\delta < x - x_k < \delta \Longrightarrow |x - x_k| < \delta$$

Considere então a função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} f(x_k), & \text{se} \quad x \in I_k \subset [a, b], \quad 1 \leq k \leq n+1 \\ 0, & \text{se} \quad x \in I_0 \quad \text{ou} \quad x \in I_{n+2} \end{cases}$$

Das considerações feitas acima acerca da família $(I_k)_{k\in L}$, segue então que a função g é uma função degrau. Além disso, para todo $x \in [a,b]$, concluímos de (2.1) que

$$\exists k, 1 \leq k \leq n+1; x \in I_k \Longrightarrow |x - x_k| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_k)| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

□

Podemos interpretar o resultado acima geometricamente. O Teorema afirma que, se f é uma função contínua definida em um intervalo $[a,b]$, então, dado $\varepsilon > 0$, é possível encontrar uma função degrau tal que os segmentos de reta horizontais que representam seu gráfico, estão compreendidos na 'faixa' do plano cartesiano determinada pelos gráficos das funções $f+\varepsilon$ e $f-\varepsilon$, como mostra a figura a seguir.

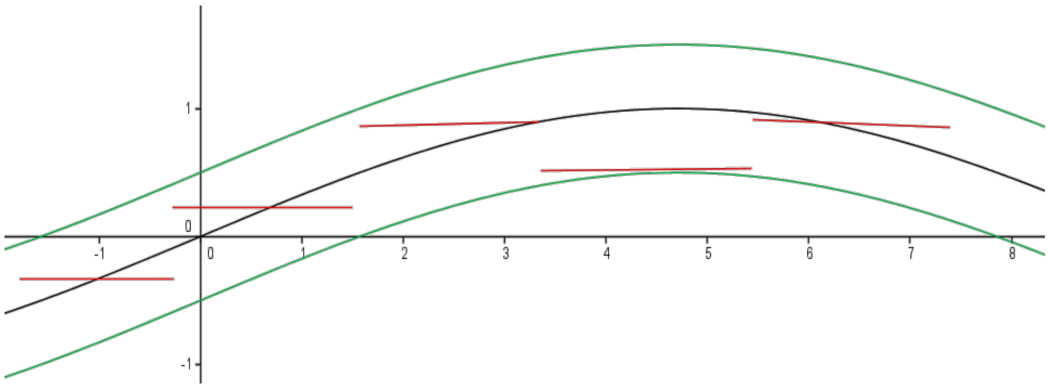

Figura 2.1: Aproximação uniforme por função degrau

O próximo resultado exibirá outra forma de aproximar uniformemente uma função contínua definida em um intervalo fechado.

Definição 2.4. *Uma função $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita afim por partes quando existem números reais $a = c_0 < c_1 < c_2 < ... < c_{n-1} < c_n = b$ tais que, para todo k, com $1 \leq k \leq n$, a restrição de f ao intervalo $[c_{k-1}, c_k]$ é uma função afim.*

Teorema 2.5. *Toda função $f \in \mathcal{C}[a,b]$ pode ser aproximada uniformemente por funções afins por partes.*

Demonstração. Utilizando novamente o resultado obtido no Teorema 1.26, temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x, y \in [a,b] \tag{2.2}$$

Considere o então um número real ζ tal que $0 < \zeta < \delta$ e seja $n = max\left\{l \in \mathbb{N}; l < \frac{b-a}{\zeta}\right\}$. Além disso, defina, para cada $1 \leq k \leq n$, os números $c_k = a + \zeta k$ e $c_{n+1} = b$. Então, é imediato verificar que $a = c_0 < c_1 < c_2 < ... < c_n < c_{n+1} = b$ e que

$$0 \leq k \leq n \quad \text{e} \quad x, y \in [c_k, c_{k+1}] \Longrightarrow |x - y| < \delta \tag{2.3}$$

Portanto, para todo $x \in [a, b]$, existe $0 \leq k \leq$ tal que $x \in [c_k, c_{k+1}]$. Sendo assim, defina a função $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ que, para algum k, associa a cada $x \in [c_k, c_{k+1}] \subset [a, b]$ o número

$$g(x) = \frac{f(c_{k+1}) - f(c_k)}{c_{k+1} - c_k}(x - c_k) + f(c_k)$$

É claro que a restrição de função g a cada intervalo $[c_k, c_{k+1}]$ é uma função afim, ou seja, g é uma função afim por partes. Além disso, se $x \in [c_k, c_{k+1}]$, observamos que

$$c_k \leq x \leq c_{k+1} \Longrightarrow 0 \leq x - c_k \leq c_{k+1} - c_k \Longrightarrow 0 \leq \frac{x - c_k}{c_{k+1} - c_k} \leq 1$$

Logo, dado $x \in [c_k, c_{k+1}] \subset [a, b]$, segue de (2.2), (2.3) e da observação acima, que

$$|f(x) - g(x)| = \left| f(x) - \frac{f(c_{k+1}) - f(c_k)}{c_{k+1} - c_k}(x - c_k) - f(c_k) \right| \leq$$

$$|f(x) - f(c_k)| + |f(c_{k+1}) - f(c_k)| \left| \frac{x - c_k}{c_{k+1} - c_k} \right| \leq$$

$$|f(x) - f(c_k)| + |f(c_{k+1}) - f(c_k)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Geometricamente, o Teorema demonstrado acima pode ser interpretado da seguinte forma: se f é uma função contínua definida em um intervalo fechado, então, dado $\varepsilon > 0$, existe um função afim por partes definida nesse mesmo intervalo, tal que a linha poligonal que representa seu gráfico está contida na 'faixa' do plano cartesiano compreendida pelos gráficos das funções $f + \varepsilon$ e $f - \varepsilon$. A figura abaixo ilustra tal situação.

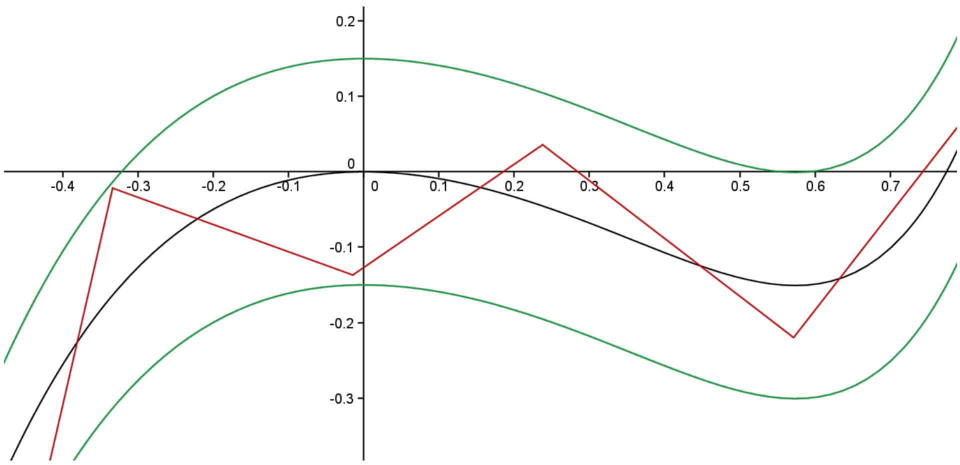

Figura 2.2: Aproximação uniforme por uma função afim por partes

2.2 O Teorema de Aproximação de Weierstrass

Na seção anterior, mostramos duas formas distintas de aproximar uniformemente funções contínuas definidas em um intervalo fechado. O Teorema de Aproximação de Weierstrass, que afirma que toda função $f \in \mathcal{C}[a,b]$ pode ser aproximada uniformemente por polinômios, traz uma forma ainda mais notável de aproximar esse tipo de função, já que o conjunto $\mathcal{P}[a,b]$ tem muitas vantagens estruturais dos pontos de vista algébrico e análitico, pois é fechado para adição, multiplicação, multiplicação por escalar, derivação e integração. Além disso, os polinômios são funções bastantes simples do ponto de vista computacional, pois suas imagens são obtidas por um conjunto de operações elementares sobre os valores do domínio.

Uma das maneiras de demonstrar o referido Teorema é exibir, para cada função $f \in \mathcal{C}[a,b]$ e $\varepsilon > 0$ dados, um polinômio $p \in \mathcal{P}[a,b]$ que satisfaça $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [a,b]$; esse é o caminho que seguiremos. Mais precisamente, mostraremos que dada uma função $f \in \mathcal{C}[a,b]$, existe um sequência de polinômios (p_n) em $\mathcal{P}[a,b]$ tal que $p_n \longrightarrow f$ uniformemente. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow |f(x) - p_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a,b]$$

Para construir tal sequência, recorreremos a uma classe de polinômios conhecidos como *polinômios de Bernstein* associados e função f. Varemos adiante que tais polinômios são definidos somente no intervalo $[0,1]$. Portanto, o Teorema de Aproximação de Weierstrass será demonstrado inicialmente apenas para funções contínuas definidas no intervalo $[0,1]$. A validade do Teorema em um intervalo $[a,b]$ qualquer seguirá como consequência dessa demonstração.

As demonstrações feitas a seguir foram baseadas em [2], [3], [5] e [9].

Definição 2.6. *Seja $f \in \mathcal{F}[0,1]$. Então para cada natural $n \geq 1$, o polinômio de Bernstein de ordem n associado a f é dado por*

$$B_{n,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

onde $x \in [0,1]$.

Na demonstração do Teorema, necessitaremos de um resultado técnico sobre os polinômios de Bernstein associados a duas funções específicas, cuja demonstração segue no Lema abaixo.

Lema 2.7. *Sejam $f_1, f_2 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ as funções dadas dadas por $f_1(x) = x$ e $f_2(x) = x^2$. Então, para todo natural $n \geq 1$, tem-se:*

$$B_{n,f_1}(x) = x \quad e \quad B_{n,f_2}(x) = \frac{(n-1)x^2}{n} + \frac{x}{n}$$

Demonstração. Observamos inicialmente que o reultado acima é de verificação imediata para $n = 1$. Assim, a demonstração será feita considerando polinômios de Bernstein de ordem maior ou igual a dois.

Lembramos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a fórmula conhecida como binômio de Newton nos fornece

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Além disso, é imediato verificar que, para todo $n, k \in \mathbb{N}$, com $1 \leq k \leq n$, tem-se

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$$

Então, de acordo com a definição dos polinômios de Bernstein e observando que o termo correspondente a $k = 0$ se anula, temos que, para todo $n \geq 2$,

$$B_{n,f_1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^{j+1} (1-x)^{n-(j+1)} = x \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{(n-1)-j} = x(x+(1-x))^{n-1} = x$$

onde a penúltima igualdade segue da apliacação do binômio de Newton.

Por outro lado, considerando a função $f_2(x) = x^2$ e observando novamente que o termo correspondente a $k = 0$ do seu polinômio de Bernstein se anula, temos então que, para todo $n \geq 2$,

$$B_{n,f_2}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{j+1}{n}\binom{n-1}{j} x^{j+1} (1-x)^{n-(j+1)} = \frac{x}{n}\sum_{j=0}^{n-1} (j+1)\binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{(n-1)-j} =$$

$$\frac{x}{n}\left[\sum_{j=0}^{n-1} j\binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{(n-1)-j} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{(n-1)-j}\right] =$$

$$\frac{x}{n}\left[(n-1)\sum_{j=0}^{n-1} \frac{j}{n-1}\binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{(n-1)-j} + (x+(1-x))^{n-1}\right]$$

$$\frac{x}{n}\left[(n-1)B_{n-1,f_1} + 1\right] = \frac{x}{n}\left[(n-1)x + 1\right] = \frac{(n-1)x^2}{n} + \frac{x}{n}$$

□

Agora estamos em condições de enunciar e demonstrar o resultado central deste trabalho.

Teorema 2.8 (Teorema de Aproximação de Weierstrass)**.** *Toda função $f \in \mathcal{C}[a,b]$ pode ser aproximada uniformemente por polinômios de $\mathcal{P}[a,b]$. Em outras palavras, dado $\varepsilon > 0$, existe um polinômio $p \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que*

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a,b]$$

Demonstração. Conforme foi dito anteriormente, começaremos demonstrando o Teorema para funções contínuas definidas no intervalo $[0,1]$. Considere então a função $f \in \mathcal{C}[0,1]$. Provaremos que a sequência $(B_{n,f}) \in \mathcal{P}[0,1]$ dos polinômios de Bernstein associados a f converge uniformemente para f. Ou seja, mostraremos que para cada $\varepsilon > 0$, é possível encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow |f(x) - B_{n,f}(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [0,1] \tag{2.4}$$

Sendo assim, seja $\varepsilon > 0$. Como o intervalo $[0,1]$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ e f é contínua então, pelos Teoremas 1.26 e 1.27, sabemos que valem, respectivamente, as seguintes afirmações:

(i) f é uniformemente contínua, ou seja, para o $\varepsilon > 0$ dado acima, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x, \frac{k}{n} \in [0,1]; \left| x - \frac{k}{n} \right| < \delta \Longrightarrow \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(ii) $f([0,1])$ é um conjunto compacto e, portanto, a função f é limitada, ou seja, existe $M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [0,1]$.

Sendo assim, escolhemos $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n_0 > \dfrac{M}{\varepsilon \delta^2}$. Vamos mostrar que esse valor de n_0 satisfaz a condição (2.4). De fato, fazendo $y = 1 - x$ no desenvolvimento do binômio $(x+y)^n$, obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1 \tag{2.5}$$

Assim, tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ e, utilizando a igualdade acima, segue que

$$\begin{aligned} |B_{n,f}(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - f(x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n} \left[\left(\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right) \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \right] \right|, \quad \forall x \in [0,1] \end{aligned} \tag{2.6}$$

Por outro lado, para cada $x \in [0,1]$, defina os seguintes conjuntos

$$I(x) = \left\{ k \in \mathbb{N}; 1 \leq k \leq n \quad \text{e} \quad \left| x - \frac{k}{n} \right| < \delta \right\} \quad \text{e} \quad J(x) = \left\{ k \in \mathbb{N}; 1 \leq k \leq n \quad \text{e} \quad \left| x - \frac{k}{n} \right| \geq \delta \right\}$$

Então, para cada $x \in [0,1]$, segue de (2.6) que

$$|B_{n,f}(x) - f(x)| = \left| \sum_{k=0}^{n} \left[\left(\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right) \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \right] \right|$$

$$= \left| \sum_{k\in I(x)} \left[\left(\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right) \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \right] + \sum_{k\in J(x)} \left[\left(\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right) \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \right] \right|$$

$$\leq \sum_{k\in I(x)} \left| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| + \sum_{k\in J(x)} \left| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \quad (2.7)$$

$$< \sum_{k\in I(x)} \left| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k\in J(x)} \left| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \left(\left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| + |f(x)| \right) \quad (2.8)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \left| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k\in J(x)} \left| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| (M+M) \quad (2.9)$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot \sum_{k\in J(x)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (2.10)$$

onde as desigualdades (2.7), (2.8) e (2.9) seguem da desigualdade triangular e das condições obtidas em (i) e (ii). E a igualdade (2.10) segue de (2.5) e do fato de que $x^k(1-x)^{n-k} \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$.

Vamos analisar a soma obtida em (2.10). Observe que

$$k \in J(x) \Longrightarrow \left| x - \frac{k}{n} \right| \geq \delta \Longrightarrow \frac{(x-\frac{k}{n})^2}{\delta^2} \geq 1$$

Portanto,

$$\sum_{k\in J(x)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \sum_{k\in J(x)} \binom{n}{k} \frac{(x-\frac{k}{n})^2}{\delta^2} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(x-\frac{k}{n})^2}{\delta^2} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{\delta^2} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x^2 - \frac{2xk}{n} + \frac{k^2}{n^2} \right) x^k (1-x)^{n-k} \right)$$

$$= \frac{1}{\delta^2} \left(x^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - 2x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} \right) \quad (2.11)$$

Assim, utilizando as notações e os resultados obtidos no Lema 2.7, segue de (2.11) e de (2.5) que

$$\sum_{k\in J} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{\delta^2} \left(x^2 - 2xB_{n,f_1}(x) + B_{n,f_2}(x) \right) = \frac{1}{\delta^2} \left(x^2 - 2x^2 + \frac{(n-1)x^2}{n} + \frac{x}{n} \right)$$

$$= \frac{1}{n\delta^2}(nx^2 - 2nx^2 + nx^2 - x^2 + x) = \frac{x-x^2}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}, \quad (2.12)$$

pois $x - x^2 \leq \frac{1}{4}$ para todo $x \in [0,1]$.

Logo, segue de (2.10) e (2.12) que, para todo $x \in [0,1]$, tem-se

$$n > n_0 \Longrightarrow |B_{n,f}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot \sum_{k \in J} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{4n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M\varepsilon\delta^2}{2M\delta^2} = \varepsilon$$

e o Teorema fica demonstrado para o intervalo [0,1].

Vamos mostrar a validade do Teorema em um intervalo [a,b] qualquer. Considere uma função $f \in \mathcal{C}[a,b]$ e, para cada $x \in [0,1]$, seja $y = a + (b-a)x$. Observe que

$$x \in [0,1] \Longleftrightarrow y \in [a,b]$$

Sendo assim, consideremos a função $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$g(x) = f(a + (b-a)x) = f(y), \quad \forall x \in [0,1]$$

Pela observação acima, vemos que g está bem definida. Além disso, g é dada pela composição de duas funções contínuas. Então, pela Proposição 1.22, g é uma função contínua definida no intervalo [0,1]. Logo, pelo resultado provado acima, dado $\varepsilon > 0$, existe um polinômio $q \in \mathcal{P}[0,1]$, tal que

$$|g(x) - q(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [0,1] \tag{2.13}$$

Considere então o polinômio $p \in \mathcal{P}[a,b]$ dado por

$$p(y) = q\left(\frac{y-a}{b-a}\right) = q(x), \quad \forall x \in [0,1]$$

Concluímos então, de (2.13), que

$$|g(x) - q(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [0,1] \Longleftrightarrow |f(y) - p(y)| < \varepsilon, \quad \forall y \in [a,b]$$

□

Corolário 2.9. *Para todo intervalo fechado $[a,b]$, o conjunto $\mathcal{P}[a,b]$ é denso no conjunto $\mathcal{C}[a,b]$.*

Demonstração. De acordo com a definição 1.32, devemos provar que os conjuntos $\mathcal{P}[a,b] \subset \mathcal{C}[a,b] \subset \mathcal{F}[a,b]$ são tais que $\mathcal{C}[a,b] \subset \overline{\mathcal{P}[a,b]}$. De fato, dada a função $f \in \mathcal{C}[a,b]$, então, de acordo com o Teorema de Aproximação de Weierstrass, existe uma sequência (p_n) de polinômios pertencentes a $\mathcal{P}[a,b]$ tal que $p_n \longrightarrow f$ uniformemente. Portanto, f é aderente a $\mathcal{P}[a,b]$, ou seja $f \in \overline{\mathcal{P}[a,b]}$. Logo, $\mathcal{C}[a,b] \subset \overline{\mathcal{P}[a,b]}$. □

2.3 O Teorema de Aproximação para Funções Complexas

Nesta seção apresentaremos mais um Corolário interessante do Teorema de Aproximação de Weierstrass. Esse resultado afirma que se uma função complexa $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ é contínua, então f também pode ser aproximada uniformemente por polinômios complexos definidos no intervalo dado. Os conceitos de continuidade e aproximação uniforme para funções complexas serão definidos de forma interamente análoga ao caso real. As demonstrações feitas nessa seção baseiam-se em [9] e [11].

Lembramos que um número complexo z é um número dado pela expressão $z = u + iv$, onde $u, v \in \mathbb{R}$ e i é a unidade imaginária que satisfaz a relação $i^2 = -1$. Os valores de u e v são chamados, respectivamente, de *parte real* e *parte imaginária* do complexo z e serão representados por $\mathfrak{Re}(z)$ e $\mathfrak{Im}(z)$. O conjugado do número complexo $z = u+iv$, é o número dado por $\overline{z} = u-iv$ e o *módulo* ou a *norma* de z é o número real definido pela expressão

$$|z| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Destaquemos duas propriedades do módulo de um número complexo que serão úteis mais adiante. Dados os números complexos $z = u + iv$ e $w = a + ib$, tem-se

(i) $|z \cdot w| = |z||w|$

De fato,

$$|z \cdot w| = |(ua - vb) + i(ub + va)| = \sqrt{(ua - vb)^2 + (ub + va)^2}$$
$$= \sqrt{u^2a^2 + v^2b^2 + u^2b^2 + v^2a^2} = \sqrt{(u^2 + v^2)(a^2 + b^2)} = |z||w|$$

(ii) $|z + w| \leq |z| + |w|$

De fato,

$$|z + w|^2 = |(u + a) + i(v + b)|^2 = u^2 + 2ua + a^2 + v^2 + 2vb + b^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2(ua + vb) \leq$$
$$|z|^2 + |w|^2 + 2\sqrt{(ua + vb)^2} \leq |z|^2 + |w|^2 + 2\sqrt{(ua + vb)^2 + (va - ub)^2} = |z|^2 + |w|^2 + 2|z \cdot \overline{w}| =$$
$$|z|^2 + |w|^2 + 2|z||\overline{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2$$

Portanto,

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

Dada uma função complexa $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, que associa a cada número real $x \in X$ o complexo $f(x) = u(x) + iv(x)$, a parte real e a parte imaginária do complexo $f(x)$ dependem de x. Portanto, ao definir tal função, estamos definindo implicitamente duas funções reais, chamadas parte real e parte imaginágira de f e representadas por $\mathfrak{Re}(f)$ e $\mathfrak{Im}(f)$, que determinam, respectivamente, os valores de $u(x)$ e $v(x)$. Essas funções desempenharão um papel importante nas demosntrações desta seção.

Definição 2.10. *Uma função complexa $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ é dita contínua em $a \in X$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$x \in X, |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

A função f é dita contínua se for contínua em todos os pontos de X. Mostraremos a seguir que a continuidade de uma função complexa é equivalente à continuidade de suas partes real e imaginária.

Proposição 2.11. *A função $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ é contínua se, e somente se, as funções $\mathfrak{Re}(f) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\mathfrak{Im}(f) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas.*

Demonstração. Para simplificar a escrita, utilizaremos as representações $\mathfrak{Re}(f) = u$ e $\mathfrak{Im}(f) = v$, ou seja, $f = u + iv$. Vamos supor inicialmente que f é contínua. Então para todo $a \in X$, tem-se que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Daí segue que

$$x \in X, |x - a| < \delta \Longrightarrow |u(x) - u(a)| = \sqrt{((u(x) - u(a))^2} \leq \sqrt{(u(x) - u(a))^2 + (v(x) - v(a))^2} =$$

$$|u(x) - u(a) + i(v(x) - v(a))| = |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Portanto, a função u é contínua a, para todo $a \in X$, ou seja, u é contínua. De forma inteiramente análoga, demonstra-se que a função v também é contínua.

Reciprocamente, vamos supor que as funções u e v são contínuas. Então, para todo $a \in X$ temos que, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$x \in X, |x - a| < \delta_1 \Longrightarrow |u(x) - u(a)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad x \in X, |x - a| < \delta_2 \Longrightarrow |v(x) - v(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Assim, se $\delta = min\,\{\delta_1, \delta_2\}$, segue que

$$x \in X, |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| = |u(x) - u(a) + i(v(x) - v(a))| \leq$$

$$|u(x) - u(a)| + |i||v(x) - v(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Logo, f é contínua. □

De forma análoga ao caso real, defineremos abaixo a noção de aproximação uniforme de uma função complexa com domímio em um subconjunto de $\mathbb{R}$.

Definição 2.12. *Considere a classe de funções dada por* $\mathcal{A}(X) = \{g : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\}$ *e seja* $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}(X)$*. Então, dizemos que uma função* $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *pode ser aproximada uniformemente por funções de* $\mathcal{B}(X)$ *se, para todo* $\varepsilon > 0$*, existe uma função* $g_\varepsilon \in \mathcal{B}(X)$ *tal que*

$$|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

Uma função polinomial complexa com domínio em $\mathbb{R}$, ou simplesmente polinômio complexo, é uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_o$$

onde $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ são números complexos denominados coeficientes do polinômio. O Teorema de Aproximação que demonstraremos a seguir, utlizará esse tipo do polinômio para estabelecer um resultado análogo ao Teorema 2.8.

Corolário 2.13 (Teorema de Aproximação para Funções Complexas)**.** *Seja* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *uma função contínua. Então* f *pode ser aproximada uniformemente por polinômios complexos com domínio no intervalo* $[a, b]$*. Ou seja, para todo* $\varepsilon > 0$*, existe um polinômio* $p : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *tal que*

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b]$$

Demonstração. Como a função f é contínua, então, pela Proposição 2.11, temos que as funções $\mathfrak{Re}(f) = u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\mathfrak{Im}(f) = v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ também são contínuas. Logo, segue do Teorema de Aproximação de Weierstrass que, dado $\varepsilon > 0$, existem polinômios $q_1, q_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$|u(x) - q_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad |v(x) - q_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in [a, b]$$

Consideremos então o polinômio $p : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por $p = q_1 + iq_2$. Logo, para o ε dado acima tem-se

$$|f(x) - p(x)| = |u(x) + iv(x) - q_1(x) - iq_2(x)| \leq$$

$$|u(x) - q_1(x)| + |i||v(x) - q_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b]$$

□

Capítulo 3

Polinômios de melhor aproximação

O Teorema de Aproximação de Weierstrass garante que toda função contínua definida em um intervalo $[a, b]$ pode ser aproximada uniformemente por polinômios. Esse resultado garante que, para qualquer erro arbitrariamente escolhido, é possível encontrar um polinômio, cujo grau depende do erro escolhido, que aproxima uniformemente tal polinômio. Desse modo, não há restrições para o grau do polinômio de aproximação.

Neste capítulo, estudaremos a aproximação uniforme por polinômios de uma função contínua definida em um intervalo $[a, b]$, sob a condição de que o grau de todas as aproximações possíveis não seja superior a um determinado inteiro positivo fixo. Os desenvolvimento dos conteúdos deste capítulo foi baseado nas referências [4], [10] e [12].

3.1 Existência de polinômios de melhor aproximação

As demonstrações feitas nessa seção baseiam-se em [4] e [10]. Na definição 2.1, demos um sentido ao conceito de aproximação de funções. Veremos a seguir que essa definição está diretamente ligada ao conceito de norma de uma função.

Definição 3.1. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ e considere uma função $f \in \mathcal{F}(X)$. Então, definimos a norma de f, denotada por $||f||$, como sendo o número real dado por*

$$||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

Conforme observamos acima, a noção de aproximação de funções pode ser definida de forma equivalente à definição 2.1 utilizando o conceito de norma. De fato, se $f \in \mathcal{F}(X)$ é aproximada uniformemente por funções de $\mathcal{L}(X) \subset \mathcal{F}(X)$, então para todo $\varepsilon > 0$, existe uma função $g_\varepsilon \in \mathcal{L}(X)$ tal que $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $x \in X$. Por outro lado, é imediato verificar que

$$|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in X \Longrightarrow ||f - g_\varepsilon|| < \varepsilon$$

Reciprocamente, temos ainda que

$$||f - g_\varepsilon|| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

Ainda nesse sentido, a definição de convergência uniforme de uma sequência (f_n) de funções também pode ser traduzida utilizando-se o conceito de norma. Se uma sequência (f_n) de funções de $\mathcal{F}(X)$ é tal que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente, então

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in X$$

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Longrightarrow ||f_n - f|| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \lim ||f_n - f|| = 0$$

Com raciocínio análogo, também é imediato provar que

$$\lim ||f_n - f|| = 0 \Longrightarrow f_n \longrightarrow f \ uniformemente$$

A proposição a seguir trará uma lista de propriedades da norma de uma função. Essas propriedades, que serão muito úteis nesta seção, podem ser demonstradas diretamente através da utilização das propriedades do módulo de um número real, juntamente com o conceito de supremo. Por esta razão, omitiremos tais demonstrações.

Proposição 3.2. *Sejam $f, g \in \mathcal{F}(X)$. Se $f(X)$ é limitado, então valem as seguintes propriedades:*

(i) $||f|| \geq 0$. *Além disso,* $||f|| = 0$ *se, e somente se,* $f = 0$*;*

(ii) $||cf|| = |c|||f||$, *para todo número real c;*

(iii) $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$*;*

(iv) $||f - g|| = ||g - f||$

(v) $|||f|| - ||g||| \leq ||f \pm g||$*;*

(vi) O conjunto $f(X)$ *é limitado por* $M > 0$ *se, e somente se,* $||f|| \leq M$.

Definição 3.3. *Uma sequência (f_n) de funções definidas em um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dita uniformemente limitada se existe um número real $M > 0$ tal que*

$$|f_n(x)| < M, \quad \forall x \in X, n \in \mathbb{N}$$

Observamos que, de acordo com a definição acima, se uma sequência (f_n) é uniformemente limitada, então existe $M > 0$ tal que o conjunto $f_n(X)$ é limitado por M para todo $n \in \mathbb{N}$ e isso ocorre, de acordo com o item *(vi)* da Proposição 3.2, se, e somente se, $||f_n|| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{R}$.

Nesse momento, tendo estabelecido o conceito a algumas propriedades da norma de uma função, iniciaremos o estudo do conceito de melhor aproximação. A seguir, demonstraremos um Lema cujo resultado será a base do primeiro Teorema central desse estudo.

Sendo assim, considere o conjunto $\mathcal{B} = \left\{x^k; k \in \mathbb{N}\right\}$ e seja $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$ um subconjunto finito. Então, representaremos por $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes reais gerados pelos monômios de $\mathcal{L}$. Ou seja,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \left\{a_1 x^{k_1} + a_2 x^{k_2} + ... + a_n x^{k_n}; a_i \in \mathbb{R}, x^{k_i} \in \mathcal{L}\right\}$$

O Lema abaixo estabelece uma propriedade importante dos conjuntos $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

Lema 3.4. *Seja $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$ um subconjunto finito. Então toda sequência de polinômios de $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ defininidos no intervalo $[a,b]$, uniformemente limitada por $M > 0$, admite uma subsequência que converge uniformemente para um polinômio de $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ limitado por M.*

Demonstração. Considere o subconjunto finito de $\mathcal{B}$ dado por $\mathcal{L} = \left\{x^{k_1}, x^{k_2}, ..., x^{k_n}\right\}$ e seja (p_m) uma sequência de polinômios de $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ uniformemnete limitada dada por $p_m = a_{m1}x^{k_1} + a_{m2}x^{k_2} + ... + a_{mn}x^{k_n}$. Então sabemos que existe $M > 0$ tal que $||p_m|| \leq M$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que os coeficientes dos polinômios p_m são limitados, ou seja, existe $N > 0$ tal que $|a_{mi}| \leq N$ para todo $1 \leq i \leq n$ e $m \in \mathbb{N}$. De fato, suponha que tal N não exista e considere a sequência (x_m) que associa a cada natural m o número $x_m = max\left\{|a_{mi}|; 1 \leq i \leq n\right\}$. De acordo com a nossa suposição, a sequência (x_m) é ilimitada e, pelo Teorema 1.10, admite uma subsequência, que denotaremos ainda por (x_m), tal que $\lim x_m = \infty$. É claro que tal subsequência possui infinitos valores cujo máximo dos módulos $|a_{mi}|$ é atingido para um mesmo i. Assim, podemos extrair uma nova subsequência, denotada novamente por (x_m), tal que $\lim x_m = \infty$ e cujos valores são atingindos para um mesmo i. Sem perda da generalidade, vamos supor que esses valores são atingidos para $i = 1$. Então teremos $x_m = |a_{m1}|$ para todo m e $\lim |a_{m1}| = \infty$. Considere então a sequência de polinômios (q_m) dada por $q_m = \dfrac{p_m}{a_{m1}}$. Como $(|a_{m1}|)$ tende ao infinito, então, dado $\varepsilon > 0$, é possível encontrar $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > m_0 \Longrightarrow |a_{m1}| > \frac{M}{\varepsilon}$$

Portanto, para o ε dado acima, tem-se

$$m > m_0 \Longrightarrow ||q_m|| = \frac{||p_m||}{|a_{m1}|} < \frac{M\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

Donde concluímos que (q_m) converge uniformemente para a função nula. Além disso, pondo $b_{mi} = \dfrac{a_{mi}}{a_{m1}}$ para todo m e i, teremos

$$q_m(x) = x^{k_1} + b_{m2}x^{k_2} + ... + b_{mn}x^{k_n}$$

onde $|b_{mi}| \leq 1$ para todo $1 \leq i \leq n$ e $m \in \mathbb{N}$. Assim, para cada i, a sequência (b_{mi}) é limitada e, pelo Teorema 1.9, admite uma subsequência convergente, que denotaremos ainda por (b_{mi}). Utilizando tais subsequências como coeficientes de polinômios em $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$, obtemos uma subsequência de (q_m), que também será denotada por (q_m). Escrevendo $\lim b_{mi} = b_i$ para cada i, defina o polinômio

$$q(x) = x^{k_1} + b_2x^{k_2} + ... + b_nx^{k_n}$$

Por outro lado, considerando que cada monômio x^{k_i} é um função contínua em $[a, b]$, podemos obter $L = \max\left\{||x^{k_i}||; 1 \leq i \leq n\right\}$. Segue então que, para todo $m \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\begin{aligned}
|q(x)| &= |q(x) - q_m(x) + q_m(x)| \\
&\leq |q(x) - q_m(x)| + |q_m(x)| \\
&\leq \sum_{i=2}^{n} |b_i - b_{mi}||x^{k_i}| + ||q_m|| \\
&\leq \sum_{i=2}^{n} |b_i - b_{mi}|||x^{k_i}|| + ||q_m|| \\
&\leq \left(\sum_{i=2}^{n} |b_i - b_{mi}|\right) L + ||q_m||,
\end{aligned}$$

para todo $x \in [a, b]$, isto é,

$$||q|| \leq \left(\sum_{i=2}^{n} |b_i - b_{mi}|\right) L + ||q_m||. \tag{3.1}$$

Como (q_m) converge uniformemente para a função nula e, para cada i, $\lim b_{mi} = b_i$, então, dado $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > m_0 \Longrightarrow ||q_m|| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad m > m_0 \Longrightarrow |b_i - b_{mi}| < \frac{\varepsilon}{2(n-1)L}$$

Logo, segue de (3.1), que

$$m > m_0 \Longrightarrow ||q|| \leq \left(\sum_{i=2}^{n} |b_i - b_{mi}|\right) L + ||q_m|| < \frac{(n-1)\varepsilon L}{2(n-1)L} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Devemos então ter, necessariamente $||q|| = 0$, o que acarreta

$$x^{k_1} + b_2x^{k_2} + ... + b_nx^{k_n} = 0, \forall x \in [a, b] \Longrightarrow 1 = b_2 = b_n = 0$$

o que é um absurdo.

Segue portanto que existe $N > 0$ tal que $|a_{mi}| \leq N$ para todo $1 \leq i \leq n$ e $m \in \mathbb{N}$. Assim, pelo Teorema 1.9, para cada $1 \leq i \leq n$, a sequência (a_{mi}) admite uma subsequência (a_{mi}) tal que $\lim a_{mi} = a_i$. Utilizando termos a_{mi} de cada subsequência como coeficientes, obtemos uma subsequência de (p_m), denotada também por (p_m). Definimos então o polinômio $p(x) = a_1x^{k_1} + a_2x^{k_2} + ... + a_nx^{k_n}$. Segue então, para todo $m \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\begin{aligned}
|p_m(x) - p(x)| &= |(a_{m1} - a_1)x^{k_1} + (a_{m2} - a_2)x^{k_2} + \ldots + (a_{mn} - a_n)x^{k_n}| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |a_{mi} - a_i||x^{k_i}| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_{mi} - a_i|||x^{k_i}|| \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{mi} - a_i| \right) L,
\end{aligned}$$

para todo $x \in [a, b]$, isto é,

$$||p_m - p|| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{mi} - a_i| \right) L. \tag{3.2}$$

Como $\lim a_{mi} = a_i$ para cada $1 \leq i \leq n$, então, dado $\varepsilon > 0$, é possível obter $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > m_0 \Longrightarrow |a_{mi} - a_i| < \frac{\varepsilon}{nL}$$

Logo, segue de (3.2), que para o ε dado acima, tem-se

$$m > m_0 \Longrightarrow ||p_m - p|| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{mi} - a_i| \right) L < \frac{n\varepsilon L}{nL} = \varepsilon$$

Ou seja, $p_m \longrightarrow p$ uniformemente. Além disso, se $m > m_o$ temos também que

$$||p|| = ||p - p_m + p_m|| \leq ||p - p_m|| + ||p_m|| < \varepsilon + M$$

Como a desigualdade acima vale para todo $\varepsilon > 0$, então podemos afirmar que $||p|| \leq M$. $\square$

Definiremos agora, de forma bastante intuitiva, o conceito de melhor aproximação de um polinômio para uma função e demonstraremos em seguida um resultado que garante a existência de tal polinômio para toda função $f \in \mathcal{C}[a, b]$.

Definição 3.5. *Seja $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$ um subconjunto finito. Então, dado $X \subset \mathbb{R}$, definimos, para cada $f \in \mathcal{F}(X)$, o grau de aproximação de f pelos polinômios de $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ como o número real dado por*

$$E(f; \mathcal{L}) = \inf_{p \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}} ||f - p||$$

Se o ínfimo é atingido para algum polinômio $p \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$, então p é chamado de polinômio de melhor aproximação para f em X.

Teorema 3.6. *Dado $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$ um subconjunto finito, então, para cada $f \in \mathcal{C}[a,b]$, existe em $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ um polinômio de melhor aproximação para f em $[a,b]$.*

Demonstração. Considere o conjunto $X = \{||f - p||, p \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}\}$. É claro que X admite ínfimo, pois é limitado inferiormente pelo zero e, pela Proposição 1.6, existe uma sequência de pontos de X que converge para $I = inf(X) = E(f;\mathcal{L})$. Assim, podemos obter uma sequência (p_m) de polinômios em $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ tal que $\lim ||f - p_m|| = E(f;\mathcal{L})$. Então, de acordo com a Proposição 1.5, temos que a sequência $(||f - p_m||)$ é limitada, digamos por $N_1 > 0$. Por outro lado, sendo f contínua no compacto $[a,b]$, sabemos do Teorema 1.27 que f é uma função limitada, ou seja, existe $N_2 > 0$ tal que $||f|| \leq N_2$. Segue então que, para todo $m \in \mathbb{N}$, tem-se

$$||p_m|| = ||p_m - f + f|| \leq ||p_m - f|| + ||f|| \leq N_1 + N_2$$

Assim, pondo $M = N_1 + N_2$, temos $||p_m|| \leq M$ para todo $m \in \mathbb{N}$, e, pelo Lema 3.4, segue que (p_m) admite uma subsequência (p_{m_j}) tal que $p_{m_j} \longrightarrow p$ uniformemente, onde $p \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $m_{j_0} \in \mathbb{N}$ tal que

$$m_j > m_{j_0} \Longrightarrow ||p_{m_j} - p|| < \varepsilon$$

Da condição acima e observando a propriedade *(v)* da Proposição 3.2, podemos concluir então que

$$m_j > m_{j_0} \Longrightarrow \big| ||f - p_{m_j}|| - ||f - p|| \big| \leq ||(f - p_{m_j}) - (f - p)|| = ||p - p_{m_j}|| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \lim ||f - p_{m_j}|| = ||f - p||$$

Portanto,

$$E(f;\mathcal{L}) = \lim ||f - p_m|| = \lim ||f - p_{m_j}|| = ||f - p||$$

Logo, p é um polinômio de melhor aproximação para f em $[a,b]$. $\square$

O Teorema demonstrado acima garante a existência em $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ de um polinômio de melhor aproximação para toda função $f \in \mathcal{C}[a,b]$. Mas tal polinômio não é necessariamente único. O exemplo que será dado a seguir ilustra bem essa situação. Além disso, esse exemplo mostra que o fato de $p \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ ser um polinômio de melhor aproximação para f em $[a,b]$ não significa necessariamente que tal aproximação seja boa, como ocorre na convergência uniforme de uma sequência de polinômios (p_n) para f. Geometricamente, isso significa que os gráficos de p e f podem ser bastantes distintos, mesmo sendo os gráficos de p os que melhor aproximam os gráficos de f entre os polinômios de $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

Exemplo 3.7. *Considere a função* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = 3$ *para todo* $x \in [0,1]$ *e seja* $\mathcal{L} = \{x, x^2, x^3\}$. *Vamos mostrar que todo polinômio* $q \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ *dado por* $q(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, *com* $a, b, c \geq 0$ *e* $a + b + c \leq 6$, *é um polinômio de melhor aproximação para* f *em* $[0,1]$. *Em seguida, exibiremos o gráfico de* f *com alguns de seus polinômios de melhor aproximação.*

Seja $p(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \lambda x$ um polinômio qualquer em $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$. Então temos que

$$||f - p|| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - p(x)| \geq |f(0) - p(0)| = 3 \Longrightarrow E(f;\mathcal{L}) = \inf_{p \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}} ||f - p|| \geq 3 \tag{3.3}$$

Por outro lado, se $q : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é um polinômio em $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ dado por $q(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, com $a, b, c \geq 0$ e $a + b + c \leq 6$, então para todo $x \in [0,1]$ segue que

$$0 \leq ax^2 + bx^2 + cx \leq a + b + c \Longrightarrow -3 \leq 3 - (a + b + c) \leq 3 - (ax^3 + bx^2 + cx) \leq 3$$

$$\Longrightarrow |f(x) - q(x)| \leq 3 \Longrightarrow ||f - q|| \leq 3$$

Sendo assim, segue de (3.3) que

$$3 \leq E(f;\mathcal{L}) = \inf_{p \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}} ||f - p|| \leq ||f - q|| \leq 3 \Longrightarrow E(f;\mathcal{L}) = ||f - q|| = 3$$

Logo, q é um polinômio de melhor aproximação para f em $[0,1]$, pelos polinômios de $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

Assim, podemos afirmar que os polinômios $p_1(x) = x^3 + x^2 + x$, $p_2(x) = 6x^3$, $p_3(x) = 4x$ e $p_4(x) = \dfrac{x^2}{1000}$ são polinômios de melhor aproximação para f em $[0,1]$. A figura abaixo mostra o gráfico destes polinômios juntamente com o gráfico de f. Observe que apesar desses

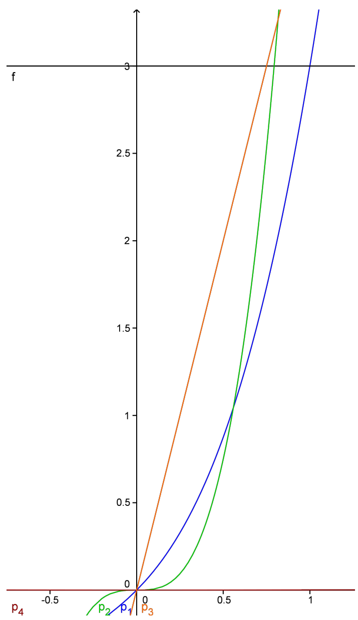

Figura 3.1: Gráficos de $f(x) = 3$ e dos polinômios p_1, p_2, p_3 e p_4

polinômios estarem entre os que melhor aproximam f em $[0,1]$, considerando o conjunto $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$, não há necessariamente uma aproximação, no sentido intuitivo.

3.2 Caracterização dos polinômios de melhor aproximação

Para encerrar este capítulo, demonstraremos um Teorema que fornece uma condição suficiente e necessária para que $p \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ seja um polinômio de melhor aproximação para uma função $f \in \mathcal{C}[a,b]$.

A demonstração feita a seguir foi baseada em [10].

Teorema 3.8. *Sejam $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$ um subconjunto finito e $f \in \mathcal{C}[a,b]$. Então, $p \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ é um polinômio de melhor aproximação para f em $[a,b]$ se, e somente se, para todo $q \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ tem-se*

$$\max_{x \in A_0} \{[f(x) - p(x)]q(x)\} \geq 0 \tag{3.4}$$

onde A_0 é o conjunto de todos os pontos $x \in [a,b]$ tais que $||f-p|| = |f(x)-p(x)|$.

Demonstração. Seja p um polinômio de melhor aproximação para f em $[a,b]$, cuja existência é garantida pelo Teorema 3.6. Assim temos que $E(f;\mathcal{L}) = ||f-p||$, cujo valor será denotado simplesmente por E. Suponha que a condição (3.4) não se verifica. Então deve existir $q \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ tal que

$$\max_{x \in A_0} \{[f(x) - p(x)]q(x)\} = -2\varepsilon$$

para algum $\varepsilon > 0$.

Defina a função $h(x) = [f(x)-p(x)]q(x) + \varepsilon$ para todo $x \in [a,b]$. Daí segue que existe $x_0 \in A_0$ tal que

$$h(x_0) = [f(x_0) - p(x_0)]q(x_0) + \varepsilon = -\varepsilon < 0 \tag{3.5}$$

É claro que a função h é contínua em $[a,b]$, pois f, p e q também o são. Então, segue da Preposição 1.23, que para cada $x_0 \in A$ que satisfaz (3.5), existe um intervalo aberto I_{x_0} contendo x_0 tal que $h(x) < 0$ para todo $x \in I_{x_0} \cap [a,b]$. Considere o conjunto aberto dado por $A = \bigcup I_{x_0}$. Podemos afirmar então que

$$h(x) < 0, \quad \forall x \in A \cap [a,b] \Longrightarrow [f(x)-p(x)]q(x) < -\varepsilon, \quad \forall x \in A \cap [a,b]$$

Por outro lado, sabemos que o polinômio q é uma função limitada em $[a,b]$, pois é uma função contínua definida em um conjunto compacto. Portanto, existe $M > 0$ tal que $||q|| \leq M$. Sendo assim, considere um número real λ que satisfaça $0 < \lambda < M^{-2}\varepsilon$, o que equivale a $\lambda^2 M^2 < \lambda\varepsilon$. Definindo o polinômio $p_1 = p - \lambda q$, temos que

$$\begin{aligned} |f(x) - p_1(x)|^2 &= |(f(x)-p(x)) + \lambda q(x)|^2 \\ &= (f(x)-p(x))^2 + 2\lambda[f(x)-p(x)]q(x) + \lambda^2(q(x))^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &< ||f-p||^2 - 2\lambda\varepsilon + \lambda^2||q||^2 \\ &< E^2 - 2\lambda\varepsilon + \lambda\varepsilon \\ &= E^2 - \lambda\varepsilon \end{aligned}$$

para todo $x \in A \cap [a,b]$. Concluímos então que

$$|f(x) - p_1(x)| < \sqrt{E^2 - \lambda\varepsilon}, \quad \forall x \in A \cap [a,b] \tag{3.6}$$

Como A é um conjunto aberto, sabemos $F = \mathbb{R} - A$ é um conunto fechado e, portanto, o conjunto $K = F \cap [a,b]$ também é fechado. Além disso, K é obviamente limitado, ou seja, K é compacto. Observamos também que, para todo $x \in K$ tem-se

$$|f(x) - p(x)| < E$$

pois $K \cap A_0 = \emptyset$. Vamos mostrar que existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - p(x)| < E - \delta, \quad \forall x \in K \tag{3.7}$$

De fato, a função $t : K \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $t(x) = |f(x) - p(x)|$ é contínua e, de acordo com o Teorema 1.27, o conjunto $Y = t(K)$ é compacto. Vamos supor que para todo $\delta > 0$, existe $x \in K$ tal que $t(x) = |f(x) - p(x)| \geq E - \delta$. Obteríamos assim uma sequência (y_n) de valores de Y tal que $y_n \geq E - \frac{1}{n}$ para todo natural n. Mas, dado $\zeta > 0$ e tomando $n_0 > \frac{1}{\zeta}$, teríamos

$$n > n_0 \Longrightarrow |E - y_n| \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \zeta$$

Ou seja, teríamos $\lim y_n = E$. Daí segue que E é um ponto de aderência do conjunto Y e, sendo esse conjunto fechado, deveríamos ter $E \in Y$, o que acarretaria $t(x) = |f(x) - p(x)| = E$, para algum $x \in K$. E isso contradiz a condição $|f(x) - p(x)| < E$. Logo, existe $\delta > 0$ tal que (3.7) é verdadeira.

Assim, tomando λ real satisfazendo a condição dada anteriormente e com a condição adicional $0 < \lambda < (2M)^{-1}\delta$, obtemos

$$\begin{aligned} |f(x) - p_1(x)| &= |(f(x) - p(x)) + \lambda q(x)| \\ &\leq |f(x) - p(x)| + \lambda||q|| \\ &< E - \delta + \frac{\delta}{2} = E - \frac{\delta}{2} \end{aligned} \tag{3.8}$$

para todo $x \in K$.

Considere o número real dado por $\gamma = min\left\{E - \sqrt{E^2 - \lambda\varepsilon}, \frac{\delta}{2}\right\}$. Segue então de (3.6) e (3.8) que

$$|f(x) - p_1(x)| < E - \gamma, \quad \forall x \in [a,b] \Longrightarrow ||f - p_1|| \leq E - \gamma$$

o que é um absurdo, já que p é foi tomado como o polinômio de menor aproximação para f em $[a, b]$ e com isso devemos ter $||f - p_1|| \geq ||f - p|| = E$.

Reciprocamente, suponha que a condição (3.4) vale para todo $q \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$. Tomando um polinômio arbitrário $p_1 \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$, considere $q \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ satisfazendo $q = p - p_1$. Da condição assumida, sabemos que existe $x_0 \in A_0$ tal que

$$[f(x_0) - p(x_0)]q(x_0) \geq 0$$

Logo,

$$\begin{aligned} |f(x_0) - p_1(x_0)|^2 &= |(f(x_0) - p(x_0)) + q(x_0)|^2 \\ &= (f(x_0) - p(x_0))^2 + 2[f(x_0) - p(x_0)]q(x_0) + q(x_0)^2 \\ &\geq (f(x_0) - p(x_0))^2 = ||f - p||^2 \end{aligned}$$

Daí segue que

$$||f - p_1|| \geq |f(x_0) - p_1(x_0)| \geq ||f - p||$$

De onde podemos concluir que p é um polinômio de melhor aproximação para f em $[a, b]$, pelos polinômios de $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$. $\square$

Capítulo 4

Polinômios Bernstein no Ensino Médio - aplicações em sala de aula

O objetivo deste capítulo é propor uma aplicação didática no Ensino Médio dos estudos desenvolvidos até aqui. Ainda que as demonstrações com rigor matemático deste tópico não sejam adequadas a esse nível de ensino, mostraremos diversas razões que justificam a apresentação dos polinômios de Bernstein aos alunos da 3ª série de Ensino Médio. Observamos que muitos dos conteúdos matemáticos apresentados usualmente aos alunos de todas as séries do Ensino Básico, desde o Teorema Fundamental da Aritmética no 6º ano do Ensino Fundamental ao Teorema Fundamental da Álgebra na 3ª série do Ensino Médio, são ministrados sem o rigor dos axiomas e das demonstrações sob as quais se alicerça a Matemática moderna. Essa prática se justifica porque, mesmo que os alunos dessa faixa etária não tenham maturidade intelectual para compreender a linguagem e o raciocínio utilizado em tais demonstrações, muitas dessas noções são desenvolvidas de forma intuitiva pelo aluno e o processo de compreensão e aplicação da ideia matemática envolvida não fica prejudicado. De fato, grande parte dos conceitos matemáticos desenvolvidos ao longo da história teve origem em uma ideia intuitiva ou observada empiricamente; a linguagem e as demonstrações rigorosas são trabalhadas posteriormente, baseadas nessas ideias.

Sob essa ótica, a apresentação, para alunos da 3ª série do Ensino Médio, dos polinômios de Bernstein associados a uma função contínua $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ e, mais geralmente, o desenvolvimento de polinômios de aproximação para funções contínuas definidas em um intervalo $[a, b]$ qualquer, pode proporcionar um enorme ganho no desenvolvimento matemático para os alunos desse segmento. Entre as várias razões nas quais podemos basear tal afirmação, destacamos:

- O estudo dos polinômios de Bernstein apresenta uma oportunidade para o aluno revisitar e reforçar a sua compreensão de vários conceitos aprendidos durante o Ensino Médio, entre os quais citamos o estudo dos polinômios, Binômio de Newton, coeficientes binomiais e triângulo de Pascal, representação gráfica de funções, propriedades gráficas das funções elementares, domínio e imagem, periodicidade (no caso das funções trigonométricas), variação e monoticidade, concavidade e convexidade dos gráficos, correspondência biunívoca, entre outros.

- A aproximação dos polinômios de Bernstein para uma função contínua pode ser visualizada geometricamente, sem recorrer a rescursos analíticos inadequados a essa faixa etária. Para isso, pode-se utilizar softwares de Geometria dinâmica, como o GeoGebra, para visualiar tal aproximação. Com isso, o aluno perceberá também que quanto maior o grau do polinômio, melhor será a aproximação da função.

- Considerando ainda a visualização dos gráficos de aproximação, o aluno terá a enriquecedora oportunidade didática de testar as hipóteses sob as quais o Teorema garante a aproximação de funções por polinômios de Bernstein. Um dos exemplos que pode ser tomado para este próposito é o da função $\ln : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, cujo domínio não é um intervalo fechado e, portanto, poderá ser observada uma falha nas aproximações dos polinômios de Bernstein.

- Apesar de o aluno de Ensino Médio não ter contato e definição matemática de continuidade de um função, essa propriedade pode ser estudada intuitiva e geometricamente e com isso, o aluno pode ser induzido a testar também a hipótese da continuidade da função para que os polinômios de Bernstein associados a uma função realizem a aproximação. Além disso, pensando ainda na continuidade, o aluno começa a ser preparado, pelo menos intuitivamente, para estudos posteriores mais avançados sobre funções contínuas.

- Finalmente, a apresentação de conceitos e Teoremas mais avançados a alunos concluintes do Ensino Médio pode aguçar a curiosidade daqueles que têm maior afinidade com a Matemática e estão propensos a seguir seus estudos na área de exatas. A visualizão de um resultado tão forte e não trivial da Matemática avançada, pode provocar admiração a esta área do conhecimento humano que parece tão misteriosa ao olhar de alguns e, consequentemente, impulsionar a formação de novos pesquisadores.

Claramente, ao pensar no primeiro objetivo entre os listados acima, recomenda-se que o momento que precede ao início desse estudo, deve ser aproveitado para uma efetiva retomada de todos os conceitos citados, que foram ensinados ao longo das três séries do Ensino Médio e que tenham relação com os conceitos que serão definidos e com os exemplos que serão trabalhados. Em seguida, pode-se fazer um breve estudo intuitivo do conceito de função contínua, para que então se possa definir os polinômios de Bernstein e enunciar o Teorema de Aproximação de Weierstrass utilizando tais polinômios para aproximações no intervalo $[0,1]$. Encerrando este momento de introdução deve-se apresentar, juntamente com alguns exemplos, a noção de que qualquer intervalo fechado $[a,b]$ pode ser colocado em correspondência biunívoca com o intervalo $[0,1]$ através da função $y:[0,1]\longrightarrow[a,b]$ dada por $y=a+(b-a)x$. Assim será possível estudar os polinômios de aproximação para funções contínuas definidas em um intervalo $[a,b]$ qualquer, seguindo a ideia da demonstração que fizemos do Teorema de Aproximação de Weiestrass.

A partir deste ponto, e com foco nos objetivos didáticos listados acima, apresentaremos a seguir uma sequência de exemplos que podem ser trabalhados em sala de aula, desde o desenvolvimento algébrico dos polinômios de Berstein no intervalo $[0,1]$, passando pelos polinômios de aproximação em um intervalo $[a,b]$ qualquer, até a exploração geométrica no GeoGebra dos gráficos da função e de alguns de seus polinômios de aproximação.

Exemplo 4.1. *Considerando a função $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\cos x$, vamos desenvolver os polinômios de Bernstein $B_{n,f}(x)$ associados a f, para $2\leq n\leq 5$. Em seguida, construiremos os gráficos dos polinômios $B_{n,f}$ e de f para visualizar a aproximação uniforme de f através desses polinômios.*

De acordo com a definição 2.6, temos

(a) para $n=2$,

$$\begin{aligned}
B_{2,f}(x) &= \sum_{k=0}^{2}\cos\left(\frac{k}{2}\right)\binom{2}{k}x^k(1-x)^{2-k}\\
&= (1-x)^2+2\cos\left(\frac{1}{2}\right)x(1-x)+\cos(1)x^2
\end{aligned}$$

(b) para $n=3$,

$$\begin{aligned}
B_{3,f}(x) &= \sum_{k=0}^{3}\cos\left(\frac{k}{3}\right)\binom{3}{k}x^k(1-x)^{3-k}\\
&= (1-x)^3+3\cos\left(\frac{1}{3}\right)x(1-x)^2+3\cos\left(\frac{2}{3}\right)x^2(1-x)+\cos(1)x^3
\end{aligned}$$

(c) para $n=4$,

$$\begin{aligned}
B_{4,f}(x) &= \sum_{k=0}^{4}\cos\left(\frac{k}{4}\right)\binom{4}{k}x^k(1-x)^{4-k}\\
&= (1-x)^4+4\cos\left(\frac{1}{4}\right)x(1-x)^3+6\cos\left(\frac{1}{2}\right)x^2(1-x)^2+4\cos\left(\frac{3}{4}\right)x^3(1-x)\\
&+ \cos(1)x^4
\end{aligned}$$

(d) para $n = 5$,

$$
\begin{aligned}
B_{5,f}(x) &= \sum_{k=0}^{5} \cos\left(\frac{k}{5}\right)\binom{5}{k} x^k(1-x)^{5-k} \\
&= (1-x)^5 + 5\cos\left(\frac{1}{5}\right)x(1-x)^4 + 10\cos\left(\frac{2}{5}\right)x^2(1-x)^3 + 10\cos\left(\frac{3}{5}\right)x^3(1-x)^2 \\
&+ 5\cos\left(\frac{4}{5}\right)x^4(1-x) + \cos(1)x^5
\end{aligned}
$$

A figura abaixo mostra a construção, feita no GeoGebra, dos gráficos de f e dos polinômios $B_{n,f}$, para $2 \leq n \leq 5$. Observe que quanto maior o grau do polinômios de Bernstein, melhor é a aproximação, isto é, os gráficos de $B_{n.f}$ ficam mais próximos do gráfico de f. Observe também que fora do intervalo de validade do Teorema, o intervalo $[0, 1]$, as aproximações se tornam grosseiras, ou seja, os gráficos de $B_{n.f}$ começam a se afastar do gráfico de f.

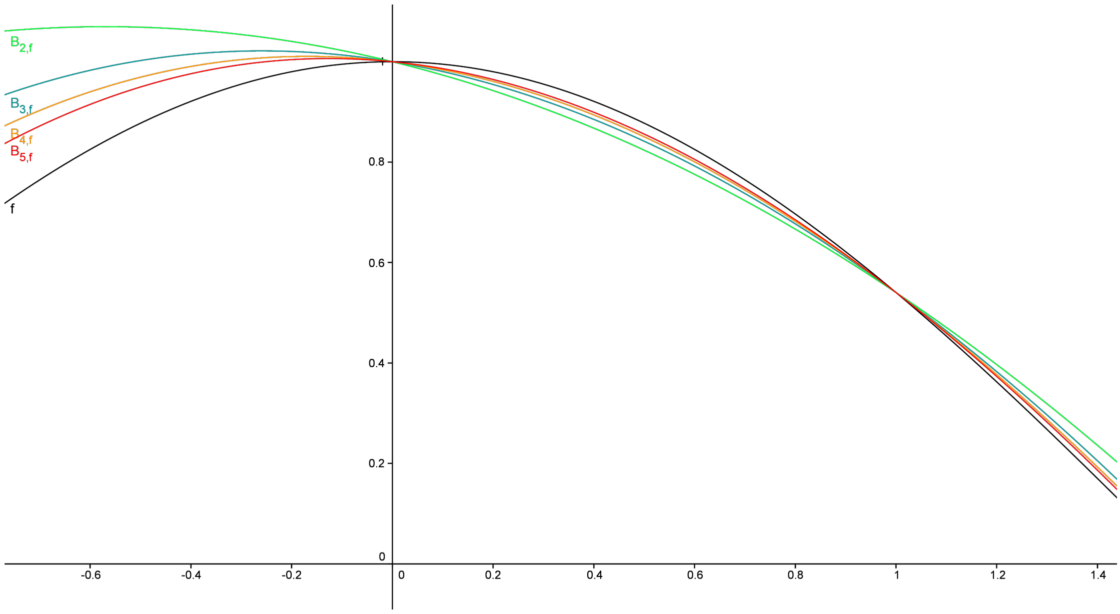

Figura 4.1: Gráficos de $f(x) = \cos x$ e $B_{n.f}(x)$

Exemplo 4.2. *Neste exemplo, vamos estudar os polinômios de Bernstein, e suas respectivas representações gráficas, para a função $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$. Porém, consideraremos uma variação maior no grau dos polinômios $B_{n,f}$, tomando-os para $n = 1$, $n = 2$, $n = 5$ e $n = 9$. O obejtivo é mostrar, graficamente, que grandes variações no valor de n proporcionam considerávies melhoras nas aproximações.*

Vamos desenvolver os polinômios citados e estudar sua representação gráfica.

(a) Para $n = 1$,

$$
B_{1,f}(x) = \sum_{k=0}^{1} e^{\frac{k}{1}} \binom{1}{k} x^k(1-x)^{1-k}
$$

$$= \quad 1 - x + ex = (e-1)x + 1$$

(b) Para $n = 2$,

$$\begin{aligned} B_{2,f}(x) &= \sum_{k=0}^{2} e^{\frac{k}{2}} \binom{2}{k} x^k (1-x)^{2-k} \\ &= (1-x)^2 + 2e^{\frac{1}{2}} x(1-x) + ex^2 \end{aligned}$$

(c) Para $n = 5$,

$$\begin{aligned} B_{5,f}(x) &= \sum_{k=0}^{5} e^{\frac{k}{5}} \binom{5}{k} x^k (1-x)^{5-k} \\ &= (1-x)^5 + 5e^{\frac{1}{5}} x(1-x)^4 + 10e^{\frac{2}{5}} x^2 (1-x)^3 + 10e^{\frac{3}{5}} x^3 (1-x)^2 \\ &+ 5e^{\frac{4}{5}} x^4 (1-x) + ex^5 \end{aligned}$$

(d) Para $n = 9$,

$$\begin{aligned} B_{9,f}(x) &= \sum_{k=0}^{9} e^{\frac{k}{9}} \binom{9}{k} x^k (1-x)^{9-k} \\ &= (1-x)^9 + 9e^{\frac{1}{9}} x(1-x)^8 + 36e^{\frac{2}{9}} x^2 (1-x)^7 + 84e^{\frac{1}{3}} x^3 (1-x)^6 \\ &+ 126e^{\frac{4}{9}} x^4 (1-x)^5 + 126e^{\frac{5}{9}} x^5 (1-x)^4 + 84e^{\frac{2}{3}} x^6 (1-x)^3 \\ &+ 36e^{\frac{7}{9}} x^7 (1-x)^2 + 9e^{\frac{8}{9}} x^8 (1-x) + ex^9 \end{aligned}$$

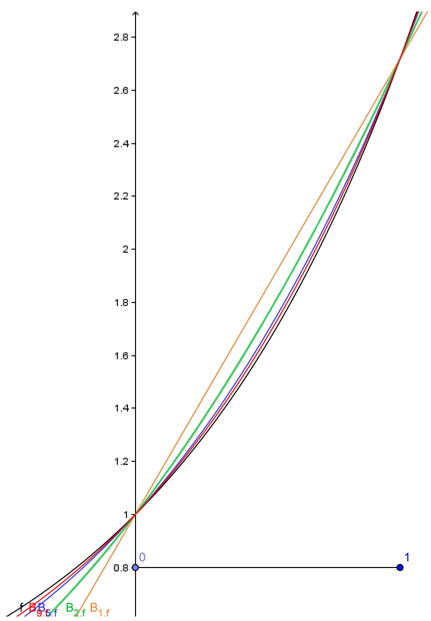

Figura 4.2: Gráficos de $f(x) = e^x$ e $B_{n.f}(x)$

Observando o gráfico acima, vemos que a variação do grau dos polinômios de Bernstein, de $n = 1$ a $n = 9$, tem como consequência um erro cada vez menor na aproximação. De fato, na escala adotada, é possível verificar que para valores ainda maiores de n, os gráficos de f e $B_{n,f}$ tendem a se tornam indistiguíveis.

Exemplo 4.3. *Seja $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Veremos que para essa função é possível calcular através de procedimentos algébricos simples, o erro cometido na aproximção de f pelos polinômios de Bernstein. Em seguida, a partir de um erro preestabelecido, determinaremos o polinômio de menor grau cuja aproximação de f fica no limite de tal erro, isto é, dado $\varepsilon > 0$ encontraremos $n \in \mathbb{N}$ tal que $|B_{n,f}(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [0,1]$.*

Conforme vimos no Lema 2.7, para todo natural $n \geq 1$ tem-se

$$B_{n,f}(x) = \frac{(n-1)x^2 + x}{n}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |B_{n,f}(x) - f(x)| &= \left|\frac{(n-1)x^2 + x}{n} - x^2\right| = \left|\frac{nx^2 - x^2 + x - nx^2}{n}\right| \\ &= \left|\frac{x(1-x)}{n}\right| = \frac{x(1-x)}{n}, \quad \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

onde a última ocorre porque $x(1-x) \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$.

Assim, se denotarmos o erro de aproximação por $E_n(x) = |B_{n,f}(x) - f(x)|$, temos que a função E_n é uma função quadrática cujo valor máximo é atingido, para todo $n \geq 1$, no ponto $x_0 = \dfrac{1}{2}$. Portanto, o erro máximo de aproximação é dado por

$$E_n(x_0) = \frac{1}{4n}, \quad \forall n \geq 1$$

Logo, dado um erro $\varepsilon > 0$, temos para todo $n \geq 1$ que

$$E_n(x) = |B_{n,f}(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [0,1] \Longleftrightarrow E_n(x_0) < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{4n} < \varepsilon \Longleftrightarrow n > \frac{1}{4\varepsilon}$$

Isso significa que para qualquer erro preestabelecido, é possível determinar o menor valor de n tal que o polinômio $B_{n,f}$ aproxima f uniformemente satisfazendo tal erro. Determinaremos a seguir os polinômios de aproximação de f utlizando os erros 10^{-1} e 10^{-2}.

- Para o erro $\varepsilon_0 = 10^{-1}$ temos

  $$E_n(x) < \varepsilon_0 \Longleftrightarrow n > \frac{1}{4 \cdot 10^{-1}} \Longleftrightarrow n \geq 3$$

  Ou seja, o polinômio de menor grau cuja aproximação atinge um erro máximo de 10^{-1} é dado por

  $$B_{3,f}(x) = \frac{2x^2 + x}{3}$$

- Analogamente, considerando o erro $\varepsilon_1 = 10^{-2}$, temos

$$E_n(x) < \varepsilon_1 \Longleftrightarrow n \geq 26$$

Portanto, o polinômio de menor grau que aproxima f com erro menor que 10^{-2} é dado por

$$B_{26,f}(x) = \frac{25x^2 + x}{26}$$

Geometricamente, isso significa que os gráficos dos polinômios $B_{3,f}$ e $B_{26,f}$ estão compreendidos, respectivamente, nas faixas do plano cartsiano limitadas pelas funções $f + \varepsilon_0$ e $f - \varepsilon_0$, no primeiro caso, e $f + \varepsilon_1$ e $f - \varepsilon_1$, no segundo caso. A figura dada abaixo ilustra tal situação.

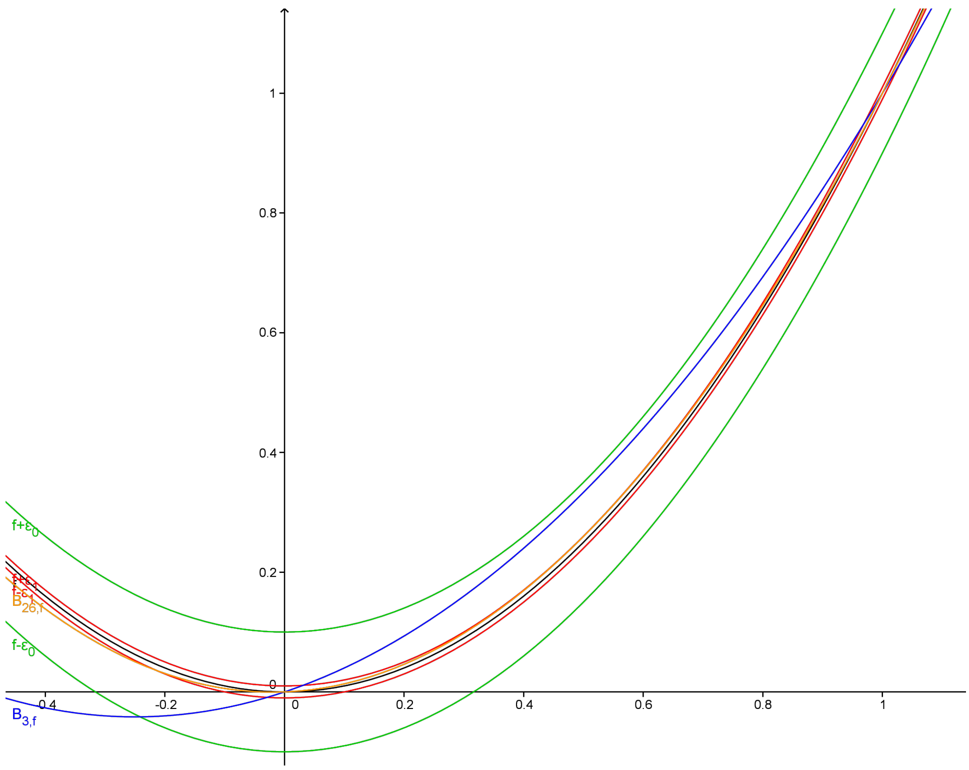

Figura 4.3: Gráficos de $f(x) = x^2$, $B_{n.f}(x)$ e $f + \varepsilon_i$

Exemplo 4.4. *Estudaremos neste exemplo a função logaritmo natural. Sabemos que tal função não está definida no zero, o que nos impede de construir os polinômios de Bernstein associados, já que não é possível calcular o valor de* $f\left(\frac{0}{n}\right)$*, correspondente a* $k = 0$*. Entretanto, com o objetivo testar as hipóteses do Teorema de Aproximação de Weierstrass, estudaremos o comportamento dos polinômios de Bernstein associados a função* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \ln x$*, se* $x \neq 0$ *e* $f(0) = 0$*. Obviamente,* f *não é contínua no ponto* $x = 0$*, o que nos levará a constatar através da representação gráfica que os polinômios* $B_{n,f}$ *não aproximam uniformemente a função*

f. Além disso, dado $\varepsilon > 0$, estudaremos a aplicação do Teorema à função $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g_\varepsilon(x) = \ln(x+\varepsilon)$.

Vamos construir os polinômios de Berntein $B_{n,f}(x)$ para $n = 4$ e $n = 7$ e, em seguida, estudar suas representações gráficas.

(a) Para $n = 4$,

$$\begin{aligned} B_{4,f}(x) &= \sum_{k=0}^{4} f\left(\frac{k}{4}\right)\binom{4}{k}x^k(1-x)^{4-k} \\ &= 4\ln\left(\frac{1}{4}\right)x(1-x)^3 + 6\ln\left(\frac{1}{2}\right)x^2(1-x)^2 + 4\ln\left(\frac{3}{4}\right)x^3(1-x) \end{aligned}$$

(b) Para $n = 7$,

$$\begin{aligned} B_{7,f}(x) &= \sum_{k=0}^{7} f\left(\frac{k}{7}\right)\binom{7}{k}x^k(1-x)^{7-k} \\ &= 7\ln\left(\frac{1}{7}\right)x(1-x)^6 + 21\ln\left(\frac{2}{7}\right)x^2(1-x)^5 + 35\ln\left(\frac{3}{7}\right)x^3(1-x)^4 \\ &+ 35\ln\left(\frac{4}{7}\right)x^4(1-x)^3 + 21\ln\left(\frac{5}{7}\right)x^5(1-x)^2 + 7\ln\left(\frac{6}{7}\right)x^6(1-x) \end{aligned}$$

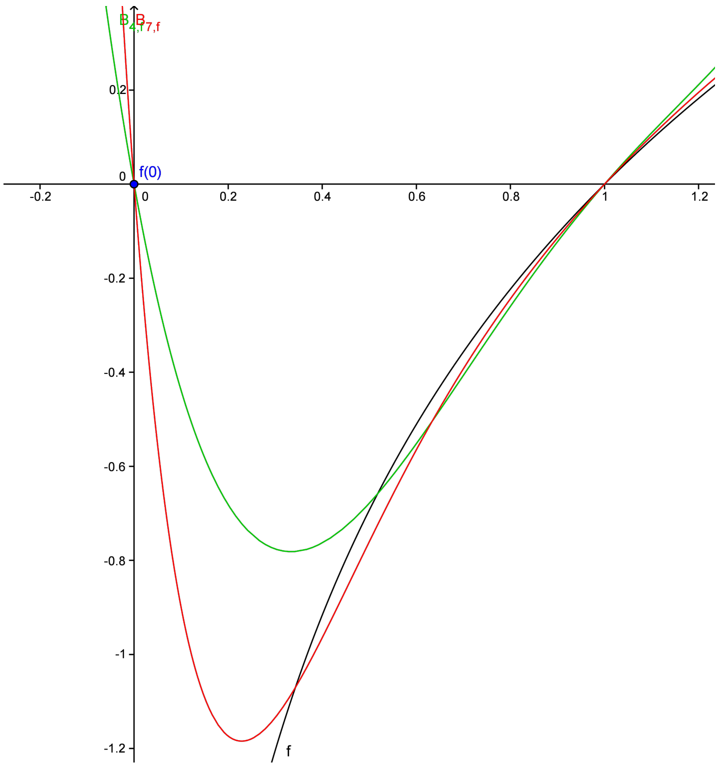

Figura 4.4: Gráficos de $f(x)$ e $B_{n,f}(x)$

Podemos observar na figura acima que, para valores do domínio próximos a $x = 1$, os gráficos de $B_{n,f}$ estão muito próximos do gráfico de f. Porém, quando x se aproxima de zero, os gráficos dos polinômios começam a se afastar 'rapidamente' do gráfico de f, ou seja, os polinômios $B_{n,f}$ não cumprem a função de aproximar f uniformemente. Isso ocorre porque, ainda que a função logaritmo natural seja contínua, ela está definida em um intervalo que não é compacto e, com isso, perdem-se duas propriedades essenciais à validade do Teorema: a continuidade uniforme e a limitação. Ao tentarmos estender a definição da função para $x = 0$, perdemos a sua continuidade, o que também afeta o resultado. Esse exemplo reforça a necessidade de que as duas hipóteses essencias do Teorema de Weierstrass sejam satisfeitas: a continuidade da função e o domínio em um intervalo compacto.

Por outro lado, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, a função g_ε definida no enunciado é claramente contínua e está bom definida para todo $x \in [0, 1]$, pois $g_\varepsilon(0) = \ln \varepsilon$. Assim, podemos obter polinômios de Bernstein que aproximam uniformemente a função logaritmo natural no intervalo $[\varepsilon, \varepsilon + 1]$. Considerando $\varepsilon = 10^{-2}$, vamos obter os polinômios B_{n,g_ε} para $n = 5$ e $n = 8$ e comparar os gráficos desses polinômios com os gráficos da função logaritmo natural.

(a) Para $n = 5$,

$$
\begin{aligned}
B_{5,g_\varepsilon}(x) &= \sum_{k=0}^{5} g_\varepsilon\left(\frac{k}{5}\right)\binom{5}{k} x^k(1-x)^{5-k} \\
&= \ln\left(\frac{1}{100}\right)(1-x)^5 + 5\ln\left(\frac{21}{100}\right)x(1-x)^4 + 10\ln\left(\frac{41}{100}\right)x^2(1-x)^3 \\
&+ 10\ln\left(\frac{61}{100}\right)x^3(1-x)^2 + 5\ln\left(\frac{81}{100}\right)x^4(1-x) + \ln\left(\frac{101}{100}\right)x^5
\end{aligned}
$$

(b) Para $n = 8$,

$$
\begin{aligned}
B_{8,g_\varepsilon}(x) &= \sum_{k=0}^{8} g_\varepsilon\left(\frac{k}{8}\right)\binom{8}{k} x^k(1-x)^{8-k} \\
&= \ln\left(\frac{1}{100}\right)(1-x)^8 + 8\ln\left(\frac{27}{200}\right)x(1-x)^7 + 28\ln\left(\frac{13}{50}\right)x^2(1-x)^6 \\
&+ 56\ln\left(\frac{77}{200}\right)x^3(1-x)^5 + 70\ln\left(\frac{51}{100}\right)x^4(1-x)^4 + 56\ln\left(\frac{127}{200}\right)x^5(1-x)^3 \\
&+ 28\ln\left(\frac{19}{25}\right)x^6(1-x)^2 + 8\ln\left(\frac{177}{200}\right)x^7(1-x) + \ln\left(\frac{101}{100}\right)x^8
\end{aligned}
$$

Observe na figura abaixo que os gráficos dos polinômios B_{n,g_ε} se aproximam dos graficos das funções logaritmo natural e g_ε e os gráficos dessas duas últimas são quase indistinguíveis, já que o segundo é o resultado do deslocamento horizontal para a esquerda do primeiro da ordem de $\frac{1}{100}$ de unidade de comprimento. Ainda que a aproximação dos polinômios se verifique, podemos observar um melhor resultado para valores de x próximos a um do que para valores próximos a zero, ressaltando a dificuldade em obter polinômios de aproximação para essa função nestes pontos do domínio.

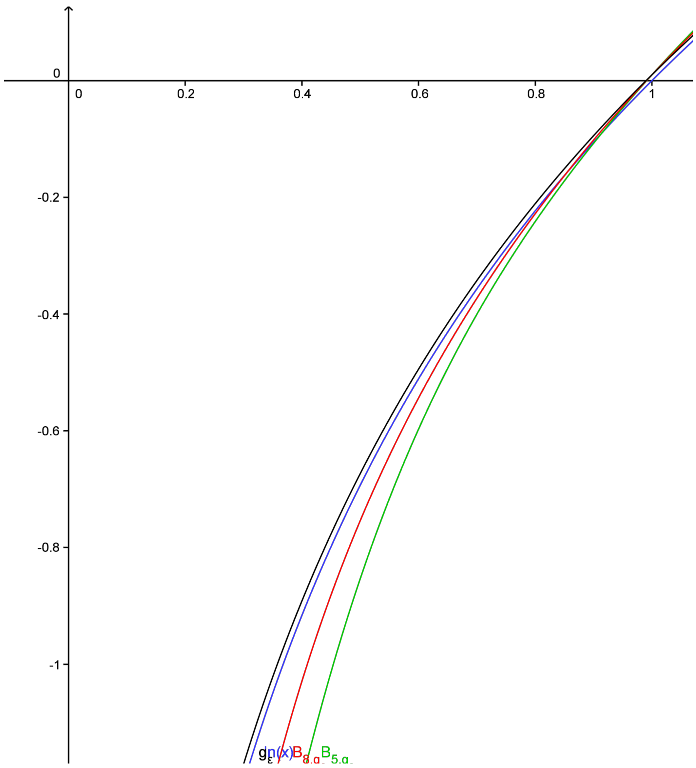

Figura 4.5: Gráficos de $g_\varepsilon(x)$, $\ln x$ e $B_{n,g_\varepsilon}(x)$

Os exemplos feitos até aqui, com aproximação de funções definidas no intervalo $[0,1]$, utilizaram os polinômios de Bernstein para realizar tais aproximações. Nos próximos exemplos desenvolveremos os polinômios de aproximação para funções contínuas definidas em um intervalo $[a,b]$ qualquer. Para isso, utilizaremos a mesma ideia apresentada na demonstração do Teorema de Aproximação de Weierstrass, estabelecendo um correspondência biunívoca entre o intervalo $[a,b]$ e o intervalo $[0,1]$ através da função dada por $y = a + (b-a)x$, para todo $x \in [0,1]$. Com isso, podemos fazer uma pequena adaptação nos polinômios de Bernstein para obter os novos polinômios de aproximação.

Exemplo 4.5. *Considere a função $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = sen(x)$. Utilizando a ideia discutida acima vamos obter uma sequência de polinômios que se aproximam uniformemente de f. Construiremos também neste exemplo, os gráficos de f e de seus polinômios de aproximação.*

Para poder utilizar os polinômios de Bernstein na aproximação, devemos obter uma função, associada a função f, que esteja definida apenas no intervalo $[0,1]$. Para todo $x \in [0, 2\pi]$, seja y dado por $y = \frac{x}{2\pi}$. É imediado verificar que

$$x \in [0, 2\pi] \Longleftrightarrow y \in [0,1]$$

Assim podemos definir uma função $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g(y) = f(2\pi y) = f(x) \quad \forall y \in [0,1], x \in [0, 2\pi]$$

Como g é uma função contínua, pois é dada pela composição de duas funções contínuas, então podemos utilizar os polinômios de Bernstein $B_{n,g}(y)$ para aproximar uniformemente a função g no intervalo $[0,1]$. Consequentemente, os polinômios $B_{n,g}\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ aproximam f uniformemente no intervalo $[0, 2\pi]$. Portanto, os polinômios de aproximção para f são dados por

$$\begin{aligned} B_{n,g}(y) &= B_{n,g}\left(\frac{x}{2\pi}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^k\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^k\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

Utilizando a igualdade acima, desenvolveremos os polinômios de aproximação para f utilizando $n = 3$, $n = 6$ e $n = 8$.

(a) Para $n = 3$,

$$\begin{aligned} B_{3,g}\left(\frac{x}{2\pi}\right) &= \sum_{k=0}^{3} f\left(\frac{2\pi k}{3}\right)\binom{3}{k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^k\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)^{3-k} \\ &= 3\cdot sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\frac{x}{2\pi}\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)^2 + 3\cdot sen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\left(1-\frac{x}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

(b) Para $n = 6$,

$$\begin{aligned} B_{6,g}\left(\frac{x}{2\pi}\right) &= \sum_{k=0}^{6} f\left(\frac{2\pi k}{6}\right)\binom{6}{k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^k\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)^{6-k} \\ &= 6\cdot sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\frac{x}{2\pi}\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)^5 + 15\cdot sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)^4 \\ &+ 15\cdot sen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\left(\frac{x}{2\pi}\right)^4\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)^2 + 6\cdot sen\left(\frac{5\pi}{3}\right)\left(\frac{x}{2\pi}\right)^5\left(1-\frac{x}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

(c) Para $n = 8$,

$$\begin{aligned} B_{8,g}\left(\frac{x}{2\pi}\right) &= \sum_{k=0}^{8} f\left(\frac{2\pi k}{8}\right)\binom{8}{k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^k\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)^{8-k} \\ &= 8\cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{x}{2\pi}\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)^7 + 28\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)^6 \\ &+ 56\cdot sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)\left(\frac{x}{2\pi}\right)^3\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)^5 + 56\cdot sen\left(\frac{5\pi}{4}\right)\left(\frac{x}{2\pi}\right)^5\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)^3 \\ &- 28\left(\frac{x}{2\pi}\right)^6\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)^2 + 8\cdot sen\left(\frac{7\pi}{4}\right)\left(\frac{x}{2\pi}\right)^7\left(1-\frac{x}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

Na figura abaixo, foram construídos os gráficos de f e dos polinômios $B_{n,g}$. Observe que a aproximação de f ocorre no intervalo $[0, 2\pi]$, pois quando x varia neste intervalo, y varia no intervalo $[0, 1]$, o que garante a validade do Teorema de Aproximação de Weierstrass. Ao visualizar tais gráficos, é possível perceber que as aproximações de f não têm a mesma qualidade que as aproximações que fizemos nos exemplos anteriores, com funções definidas no intervalo $[0, 1]$. Isso significa que, neste caso, para obter aproxições com erros menores, é necessário tomar valores de n bem maiores do que os que consideramos acima. Por outro lado, destacamos um fato notável: como a função seno é periódica com período igual a 2π, então os polinômios que construímos acima, quando calculados no intervalo $[0, 2\pi]$, aproximam os valores de f em toda a reta real.

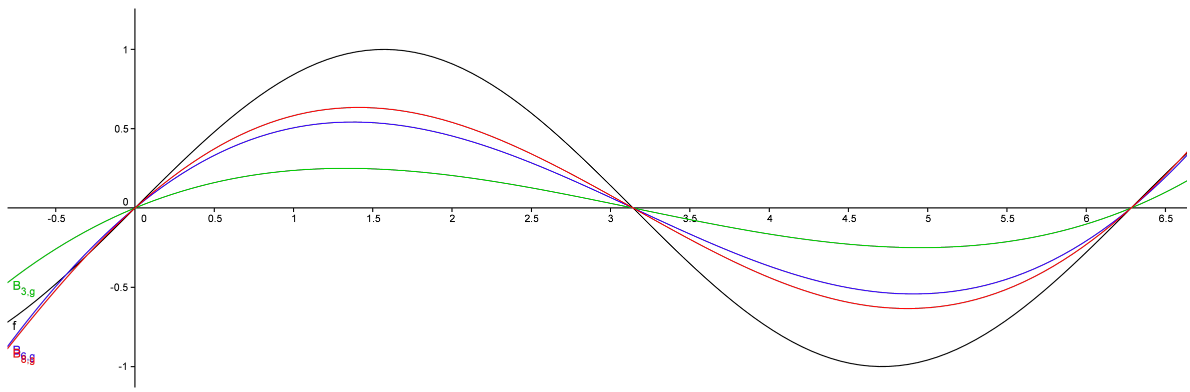

Figura 4.6: Gráficos de $f(x) = sen(x)$ e $B_{n,g}\left(\frac{x}{2\pi}\right)$

Exemplo 4.6. *Considere a função* $f : [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \ln x$. *Utilizando um raciocínio análogo ao exemplo anterior, vamos desenvolver os polinômios de aproximação para* f *em* $[1, 2]$ *e construir sua representação gráfica.*

Para estabelecer uma correspondência biunívoca entre os intervalos $[0, 1]$ e $[1, 2]$, considere, para cada $x \in [1, 2]$, o valor de y dado por $y = x - 1$. Então temos

$$x \in [1, 2] \Longleftrightarrow y \in [0, 1]$$

Assim, definimos a função $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(y) = f(y + 1) = f(x)$, para todo $x \in [1, 2]$. Pelos mesmos motivos já citados anteriormente, g é uma função contínua e, portanto, os polinômios $B_{n,g}(y) = B_{n,g}(x - 1)$ aproximam f uniformemente no intervalo $[1, 2]$. Logo, os polinômios de aproximação para f neste intervalo são dados por

$$\begin{aligned} B_{n,g}(x-1) &= \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} (x-1)^k (2-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n} + 1\right) \binom{n}{k} (x-1)^k (2-x)^{n-k} \end{aligned}$$

Neste exemplo vamos utilizar $n = 4$ e $n = 7$.

(a) Para $n = 4$,

$$\begin{aligned} B_{4,g}(x-1) &= \sum_{k=0}^{4} f\left(\frac{k}{4}+1\right)\binom{4}{k}(x-1)^k(2-x)^{4-k} \\ &= 4\ln\left(\frac{5}{4}\right)(x-1)(2-x)^3 + 6\ln\left(\frac{3}{2}\right)(x-1)^2(2-x)^2 \\ &+ 4\ln\left(\frac{7}{4}\right)(x-1)^3(2-x) + \ln(2)(x-1)^4 \end{aligned}$$

(b) Para $n = 7$,

$$\begin{aligned} B_{7,g}(x-1) &= \sum_{k=0}^{7} f\left(\frac{k}{7}+1\right)\binom{7}{k}(x-1)^k(2-x)^{7-k} \\ &= 7\ln\left(\frac{8}{7}\right)(x-1)(2-x)^6 + 21\ln\left(\frac{9}{7}\right)(x-1)^2(2-x)^5 \\ &+ 35\ln\left(\frac{10}{7}\right)(x-1)^3(2-x)^4 + 35\ln\left(\frac{11}{7}\right)(x-1)^4(2-x)^3 \\ &+ 21\ln\left(\frac{12}{7}\right)(x-1)^5(2-x)^2 + 7\ln\left(\frac{13}{7}\right)(x-1)^6(2-x) + \ln(2)(x-1)^7 \end{aligned}$$

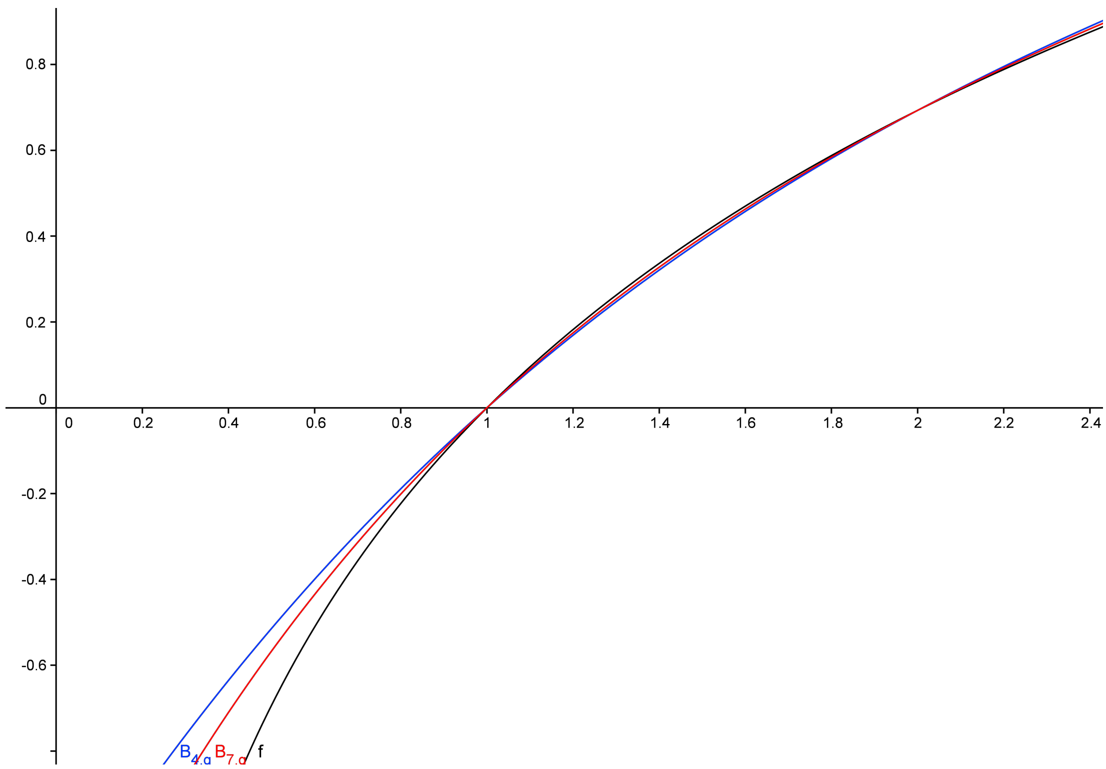

Figura 4.7: Gráficos de $f(x) = \ln x$ e $B_{n,g}(x-1)$

Observe que, diferentemente do exemplo anterior, as aproximações dos polinômios $B_{n,g}$ ao gráfico de f apresentam um erro muito pequeno; no intervalo $[1, 2]$ os gráficos são praticamente indistinguíveis.

Para finalizar esta sequência de exemplos faremos, de modo semelhante ao Exemplo 4.4, o estudo de uma função que não satisfaz as hipóteses do Teorema de Weierstrass: a função tangente definida no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. O objetivo é reforçar a ideia de que, se a função não estiver definida em um intervalo compacto ou não for contínua, não é possível aproximá-la uniformemente por polinômios de Bernstein.

Exemplo 4.7. *Considere a função $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \tan x$ se $x \neq \pm\frac{\pi}{2}$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Vamos construir um polinômio de aproximação de grau cinco (supondo que fosse possível) para f em $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e verificar graficamente o comportamento de tal polinômio em relação a f.*

Como consequência de sua definição, é imediato verificar que f não é contínua nos extremos do intervalo do domínio, mas definir a função nesses pontos se faz necessário para que seja possível fazer a correspondência biunívoca com o intervalo $[0, 1]$. Assim, para cada $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, considere o valor de y dado por

$$y = \frac{2x + \pi}{2\pi}$$

Segue então que

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Longleftrightarrow y \in [0, 1]$$

Definindo a função $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(y) = f\left(-\frac{\pi}{2} + \pi y\right) = f(x)$, obtemos os polinômios $B_{n,g}(y) = B_{n,g}\left(\frac{2x + \pi}{2\pi}\right)$ que seriam os polinômios de aproximação de f, caso f fosse contínua. Vamos desenvolver tais polinômios para $n = 5$ e analisar sua representação gráfica.

$$\begin{aligned}
B_{5,g}\left(\frac{2x+\pi}{2\pi}\right) &= \sum_{k=0}^{5} g\left(\frac{k}{5}\right)\binom{5}{k}\left(\frac{2x+\pi}{2\pi}\right)^k\left(1-\frac{2x+\pi}{2\pi}\right)^{5-k} \\
&= \sum_{k=0}^{5} f\left(\frac{(2k-5)\pi}{10}\right)\binom{5}{k}\left(\frac{2x+\pi}{2\pi}\right)^k\left(1-\frac{2x+\pi}{2\pi}\right)^{5-k} \\
&= 5\tan\left(-\frac{3\pi}{10}\right)\left(\frac{2x+\pi}{2\pi}\right)\left(1-\frac{2x+\pi}{2\pi}\right)^4 \\
&+ 10\tan\left(-\frac{\pi}{10}\right)\left(\frac{2x+\pi}{2\pi}\right)^2\left(1-\frac{2x+\pi}{2\pi}\right)^3 \\
&+ 10\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)\left(\frac{2x+\pi}{2\pi}\right)^3\left(1-\frac{2x+\pi}{2\pi}\right)^2 \\
&+ 5\tan\left(\frac{3\pi}{10}\right)\left(\frac{2x+\pi}{2\pi}\right)^4\left(1-\frac{2x+\pi}{2\pi}\right)
\end{aligned}$$

Podemos observar na figura abaixo, que o gráfico de $B_{5,g}$ não tem semelhança alguma com o gráfico de f, muito menos proximidade. Isso ocorre porque, quando x se aproxima dos extremos do intervalo do domínio de f, a função tangente é ilimitada e não é uniformemente contínua;

condições que foram fundamentais na demonstração do Teorema de Aproximação de Weierstrass.

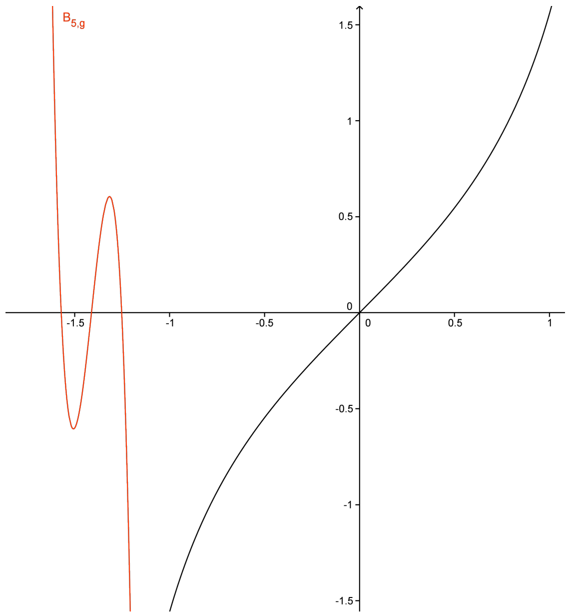

Figura 4.8: Gráficos de $f(x) = \tan x$ e $B_{5,g}\left(\frac{2x+\pi}{2\pi}\right)$

Por outro lado, como a função tangente é contínua, basta fazer uma pequena adaptação no seu domínio de validade para que possamos obter polinômios de aproximação. De fato, para todo $\varepsilon > 0$, a função $\tan : \left[-\frac{\pi}{2}+\varepsilon, \frac{\pi}{2}-\varepsilon\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ cumpre as condições do Teorema e, portanto, pode ser uniformemente aproximada por polinômios.

Conclusão

O Teorema de Aproximação de Weierstrass traz um resultado bastante notável e não trivial sobre as funções contínuas definidas em intervalos compactos. A afirmação de que toda função contínua definida nesses intervalos pode ser aproximada uniformemente por polinômios desperta grande interesse teórico e possibilidades de aplicações práticas. As funções polinomiais são bastantes simples do ponto de vista computacional, além de apresentarem várias vantagens operacionais, como o fechamento para operações algébricas e analíticas. Assim, alguns aspectos computacionais no estudo das funções contínuas, podem ser transportados, madiante a um erro preestabelecido, para polinômios de aproximação. Nesse contexto, os polinômios de Bernstein, trazem uma forma elementar, sem a utilização de recursos analíticos, de aproximar uniformemente uma função contínua. As expressões que determinam tais polinômios são de fácil construção e manipulção, o que torna o seu estudo mais próximo de níveis menos avançados de ensino.

Sendo assim, um resultado tão surpreendente e passível de compreensão no nível da Matemática Básica, pelo menos de forma intuitiva, pode deixar os limites da Análise Matemática e ser apresentado aos alunos do Ensino Médio, ainda que não seja possível demonstrar a validade do Teorema de Aproximação. Porém, tal condição não pode ser colocada como empecilho para o desenvolvimento de conteúdos matemáticos no Ensino Básico, já que não são poucos os temas trabalhados nesse nível de ensino cuja ideia matemática envolvida é compreendida e aplicada pelo aluno, sem que haja a demonstração do fato estudado. Citamos como exemplos o Teorema Fundamental da Aritmética, o Teorema Fundamental da Álgebra, a soma de infinitos termos de uma PG, a área da superfície esférica entre outros.

Em particular, como vimos no quarto capítulo deste trabalho, o Teorema de Aproximação de Weierstrass pode ser estudado e amplamente explorado, do ponto de vista intuitivo, com a ajuda de softwares de contrução de gráficos como o GeoGebra. Várias ideias analíticas presentes na demonstração do Teorema podem ser compreendidas pelos alunos pela via geométrica, através manipulação dos polinômios de aproximação. Por exemplo, a ideia da convergência uniforme dos polinômios de Bernstein para a função dada, é compreendida graficamente quando o aluno percebe que o aumento no grau do polinômio acarreta uma diminuiçãoo do erro de aproximação. Por outro lado, a exploração de funções ilimitadas, definidas em intervalos não fechados, mostra a necessidade da hipótese do domínio ser um intervalo fechado e limitado. Além disso, o estudo dos gráficos de funções contínuas definidas neste tipo de domínio, leva o aluno a parceber que essas funções são sempre limitadas e que tal condição é fundamental para a validade do Teorema.

Finalmente observamos que, no desenvolvimento dos sete exemplos estudados no quarto capítulo, é possível constatar a enorme variedade de conteúdos ministrados no Ensino Médio que foram, direta ou indiretamente, requisitados nas discussões presentes em cada situação. Destaca-se principalmente o estudo das funções, um dos temas centrais da Matemática do Ensino Médio e cujo domínio é necessário para que o aluno possa compreender tais exemplos. Assim, o estudo dos polinômios de Berstein na 3ª série do Ensino Médio pode proporcionar ao aluno uma síntese e, consequentemente, uma compreensão mais profunda do conceito de função, de sua representação gráfica e das principais propriedades das funções elementares. Além disso, a possibilidade de testar hipóteses sobre as funções por intermédio do GeoGebra, cria no aluno um espírito investigativo, habilidade essencial para a formação no Ensino Superior e que pode ajudar a formar novos pesquisadores. Sendo assim, a proposta de aplicação didática feita neste trabalho representa mais do que apenas um novo conteúdo para o programa de ensino; representa a possibilidade de uma formação Matemática mais sólida, com aprofundamento de conteúdos e pensamento crítico e investigativo sobre os mesmos.

Referências Bibliográficas

[1] Ávila, Geraldo. *Introdução à Análise Matemática, 2a. edição revista*, Editora Edgard Blucher, 1999.

[2] Bartle, Robert G.. *The Elements os Real Analysis, 2a. edição*, John Wiley & Sons, Inc., 1975.

[3] Braga, Gastão de Almeida. *Notas de Aula de Análise III*, UFMG, 2007.

[4] Cheney, E.W.. *Introduction to Approximation Theory, 2a. edição*, American Mathematical Society, 1998.

[5] Farouki, Rida T.. *The Bernstein Polynomial Basis: a centennial retrospective*, University of California, 2012.

[6] Hefez, Abramo. *Fundamentos do Cálculo*, Coleção Profmat, 2012.

[7] Lima, Elon L.. *Curso de Análise Vol. 1, 11a. edição*, Projeto Euclides, 2004.

[8] Lima, Elon L.. *Espaços Métricos, 3a. edição*, Projeto Euclides, 1993.

[9] Lopes, Wanda Aparecida. *O Teorema de Stone-Weierstrass e Aplicações.*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2009.

[10] Lorentz, G.G.. *Approximation of Functions*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1966.

[11] Neto, Alcides L.. *Funções de uma Variável Complexa, 2a. edição*, Projeto Euclides, 1993.

[12] Rudin, Walter. *Princípios de Análise Matemática*, Ao Livro Técnico S.A., Editora Universidade de Brasília, 1971.