Universidade Federal de Goiás – Regional Jataí

Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas

Programa de Mestrado Profissional em

Matemática em Rede Nacional

Modelagem de funções via Interpolação Polinomial de Lagrange

Flávio Inácio da Silveira Martins

Jataí - GO

2017

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Flávio Inácio da Silveira Martins

Título do trabalho: Modelagem de Funções via Interpolação Polinomial de Lagrange

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Flávio Inácio da Silveira Martins

Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Moreira

Assinatura do(a) orientador(a)² Data: 10/JANEIRO/2018

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo: Solicitação de registro de patente;

- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Flávio Inácio da Silveira Martins

Modelagem de funções via Interpolação Polinomial de Lagrange

Dissertação apresentada à Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas / Coordenação de Matemática da Universidade Federal de Goiás – Regional Jataí, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Ricardo Moreira.

Jataí - GO

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Martins, Flávio Inácio da Silveira
Modelagem de Funções via Interpolação Polinomial de Lagrange [manuscrito] / Flávio Inácio da Silveira Martins. - 2017.
49 f.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Ricardo Moreira.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, Jataí, PROFMAT- Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RJ), Jataí, 2017.
Bibliografia.
Inclui gráfico, tabelas, lista de figuras.

1. Função. 2. Interpolação polinomial de Lagrange. 3. Matemática. 4. Modelagem. I. Moreira, Fernando Ricardo, orient. II. Título.

CDU 51

Universidade Federal de Goiás-UFG REGIONAL JATAÍ
Mestrado profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT/UFG
Regional Jataí – Caixa Postal 03 – CEP: 75,804-020 – Jataí-GO.
Fones: (64) 3606-8213 **www.jatai.ufg.br/matematica**

Ata da reunião da Banca Examinadora da Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Flávio Inácio da Silveira Martins – Aos dezenove dias do mês de dezembro do ano de dois mil e dezessete (19/12/2017), às 14:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora, Prof. Dr. Fernando Ricardo Moreira - Orientador, Prof. Gecirlei Francisco da Silva e Profa. Dra. Ana Paula Freitas Vilela Boaventura, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no Auditório da Pós Graduação da Universidade Federal de Goiás - Regional Jataí, procederem a avaliação da defesa intitulada: **"Modelagem de funções via interpolação polinomial de lagrange"**, em nível de Mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás, polo Jataí. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca, Prof. Dr. Fernando Ricardo Moreira , que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor da Dissertação que, em 40 minutos, procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo em vista o que consta na Resolução nº. 1403/2016 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG e procedidas as correções recomendadas, o trabalho de conclusão foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na Secretaria da Coordenação de Matemática da Regional Jataí da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 15:50 horas a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu, José Alfredo Cespi de Oliveira, Secretário da Coordenação Geral de Pós-Graduação da Regional Jataí - UFG, lavrei a presente ata que, depois de lida e aprovada, é assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Prof. Dr. Fernando Ricardo Moreira – CPF 991.219.991-04
Profmat (Pólo Jataí)-UFG
Presidente da Banca

Ana Paula Freitas Vilela Boaventura

Profa. Dra. Ana Paula Freitas Vilela Boaventura - CPF 707.811.171-00
UAE – Ciências Exatas Regional Jataí-UFG
Membro externo

Prof. Dr. Gecirlei Franscisco da Silva - CPF 625.970.861-00
Profmat (Pólo Jataí)-UFG
Membro interno

Este trabalho é dedicado às pessoas que, direta
ou indiretamente, colaboraram para que este
objetivo fosse alcançado.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me proporcionar uma vida cheia de saúde e disposição para executar projetos, que me contemplem pessoal e profissionalmente, melhorando a cada dia mais os meus conceitos matemáticos, propiciando uma aplicação direcionada e eficiente desta.

Agradeço a minha família que sempre torceu pelo meu sucesso, me incentivando em cada etapa dos meus estudos, desde séries inicias até o presente momento, sempre com a compreensão necessária para me manter motivado e determinado para atingir cada objetivo.

Agradeço a minha amiga, Maria Lúcia Dantas de Carvalho, coordenadora do Colégio Estadual Professor Quintiliano Leão Neto em Rio Verde – Goiás, por ser a verdadeira responsável por eu estar fazendo parte desse projeto, desde a inscrição até esse momento de conclusão.

Agradeço a cada mestre, meus professores do PROFMAT polo Jataí, em especial ao meu orientador Professor Doutor Fernando Ricardo Moreira.

Agradeço aos colegas de turma, que foram amigos, verdadeiros parceiros, sempre unidos para motivar cada um, nos momentos mais desanimadores, sempre com otimismo e palavras de apoio para o sucesso deste projeto.

Agradeço, finalmente, a cada um que, direta ou indiretamente, torceram e me motivam para que este projeto fosse concluído.

Aprender é a única coisa de que a mente nunca se
cansa, nunca tem medo e nunca se arrepende.
Leonardo da Vinci (1452-1519)

Lista de Figuras

RESUMO

O presente trabalho objetiva debater, de forma conceitual, a modelagem de funções por meio da interpolação polinomial, utilizando o método de Lagrange. Para melhor fundamentação, o método de pesquisa empreendido segue natureza qualitativa e com revisão bibliográfica dos principais conteúdos relacionados nessa proposição: Funções Polinomiais e não – polinomiais, Interpolação Polinomial e Fórmula de Lagrange. Contempla ainda: gráficos, exemplos e situações - problema relevantes, o que possibilita ao leitor enriquecimento e melhor compreensão acerca da temática. No entanto, a conclusão mais importante dessa pesquisa é relacionar a teoria matemática com a prática escolar no ensino médio, mas não com um modelo formal ou mecânico, e sim familiar para que ocorra a identificação dos conceitos matemáticos em seu cotidiano.

Palavras-chave: Função, Interpolação polinomial de Lagrange, Matemática e Modelagem.

ABSTRACT

This work aims to discuss, conceptually, functions modeling through polynomial interpolation, using the Lagrange method. For a better theoretical foundation, the research method uses qualitative analysis and a literature review of key subjects related to this proposition: Polynomial and non - polynomial functions, Polynomial interpolation and Lagrange formula. This work presents graphs, examples and relevant problem-situations, permitting the reader to enrich and better understand the subject. Nevertheless, this research most important conclusion is to relate mathematical theory to high school practice, not with a formal or mechanical model, but with a familiar approach to identify the mathematical concepts in their daily basis life.

Keywords: Function, Lagrange's Polynomial interpolation, Mathematics and Modeling.

Sumário

1. Introdução

Um dos principais objetivos do processo de ensino-aprendizagem em matemática é fazer com que o sujeito goste mais à medida que a compreende. Este gosto passa a se desenvolver facilmente quando é envolvido em interesses e estímulos que provêm do ambiente externo à disciplina em questão, isto é, do mundo cotidiano. Dessa forma, ela se apresenta como um caminho para estimular, nos estudantes, o gosto pela teoria, uma vez que auxilia na resolução de possíveis situações-problema.

Neste contexto, a modelagem matemática se apresenta como a arte da transformação dos problemas reais em matemáticos, solucionando-os e interpretando suas soluções na linguagem do cotidiano. Na modelagem matemática são formuladas e resolvidas expressões que valem não somente a uma situação específica, mas que se apliquem, posteriormente, a outras. Assim, é possível dizer que, nela, há um processo valioso para encarar situações, resultando em uma possível solução do problema. Portanto, parte-se da premissa de que a modelagem matemática envolve multidisciplinaridade, encontrando e alinhando-se às novas tendências que apontem para a ruptura de limites e barreiras entre diversas áreas de pesquisa e conhecimento. (ARAUJO, 2017; LIMA, 2017).

Quando se fala em modelagem matemática por meio da interpolação polinomial, entende-se que, a segunda, ocorre quando há a necessidade de obter um valor intermediário que não se encontra visível. Esse tipo de cálculo ocorre em dados experimentais, tabelas estatísticas, funções e afins. A interpolação tratará de determinar uma função que assume valores conhecidos em determinados pontos. (ANDRADE, 2014). Para Franco (2006) "*Toda função continua pode ser arbitrariamente aproximada por um polinômio*".

Dessa forma, o estudo embasado nos conceitos descritos nesta revisão bibliográfica servirá como suporte para sustentação de prováveis descobertas para a resolução de situações-problemas.

1.1. Objetivos

1.1.1. Objetivo Geral

O presente trabalho tem como objetivo geral descrever, de forma conceitual, a modelagem de funções via interpolação polinomial pelo método de Lagrange.

1.1.2. Objetivos Específicos

A fim de traçar um caminho coerente para o desenvolvimento do tema, elencam-se como objetivos específicos:

- Apresentar os fundamentos históricos, teóricos e conceituais de funções;
- Abordar a interpolação polinomial de Lagrange;
- Apresentar aplicações que demonstrem a modelagem de funções por meio de interpolação polinomial pelo método de Lagrange.

1.2. Justificativa e Estrutura

A pesquisa empreendida tem como finalidade ser mais uma fonte a contribuir com informações para pesquisas acadêmicas. Fonte de embasamento teórico relevante para que o público de interesse no tema e envolvidos na área, se informem e reflitam sobre a importância da abordagem e da aplicabilidade da temática à realidade.

A pesquisa também tem como objetivo o fomento de conhecimento acadêmico-científico-profissional ao pesquisador, enriquecendo seu repertório e contribuindo para uma atuação profissional mais embasada e consciente. Além disso, visa também ser fonte de conhecimento ao leitor, que ao longo da pesquisa poderá formar um pensamento reflexivo-analítico sobre o tema e avaliar as conclusões conforme sua interpretação, o que pode resultar em aprofundamentos e abordagens distintas do assunto.

Diversos estudos relacionados ao ensino de matemática consideram a modelagem como uma ferramenta muito importante no processo de ensino aprendizagem (FRANCO, 2006; ANDRADE, 2014; ARAUJO, 2017; LIMA, 2017). Neste contexto, este trabalho surge como uma contribuição ao estudo da modelagem de funções por meio da interpolação polinomial de Lagrange.

O trabalho que segue está dividido em cinco capítulos, no primeiro, foram destacados, os objetivos gerais e específicos, bem como justificativa acerca do trabalho realizado. No segundo abordamos as funções matemáticas sob aspectos históricos, teóricos e conceituais. No terceiro capítulo apresentamos a interpolação polinomial no método de Lagrange. No quarto trabalhamos a parte prática do trabalho, com a aplicação da fórmula de Lagrange para modelar funções via interpolação polinomial por meio de resolução de exercícios e situações – problemas. Por fim, no quinto capítulo, apresentamos as considerações finais.

1.3. Trabalhos Relacionados Realizados no PROFMAT

Abaixo estão os trabalhos realizados no Programa de Mestrado Profissional PROFMAT, relacionados e/ou em casos específicos utilizados como referencial teórico para realização deste trabalho.

- Interpolação de Lagrange: Uma proposta ao Ensino Médio para Modelagem Matemática de Polinômios / Clicio Silva, UFAM, Manaus - 2016.
- Aproximação de Funções por Interpolação: Método de Lagrange / Antônio Marcos Gabetta Junior, UNICAMP, Campinas - 2015.
- O Ensino de Funções através de Modelagem Matemática / Eder Joacir de Lima, UFMT, Barra do Garças - 2017.
- Modelagem Matemática como Enfoque para o Ensino / Gilberto Faria de Araújo, UFMT, Cuiabá - 2017.
- Uma proposta para o ensino de funções através da utilização de objetos de aprendizagem / Renata Magarinus, UFSM, Santa Maria - 2013.

2. Fundamentos Históricos e Teóricos de Funções

Neste capítulo descrevemos sobre a história das funções, alguns dos principais autores e/ou pensadores e suas discussões acerca da proposta de contagem e organizações de conjuntos por meio de termos primitivos. Exploramos de forma sucinta o conceito e definição de funções polinomiais e algumas funções não polinomiais, destacando, em cada caso, além de suas definições, seus respectivos gráficos no plano cartesiano. Para plotar os gráficos das funções contidas nesta dissertação, utilizamos o software GeoGebra.

2.1. Aspectos históricos de funções

Maciel (2011) comenta que o conceito de função pode ser dividido historicamente em três principais fases, sendo elas:

- Antiguidade – cuja noção de função surge como uma dependência de valores, de maneira intuitiva;
- Idade Média – se relaciona às representações geométricas e mecânicas;
- Idade Moderna – passa a ser representada por meio de expressões analíticas.

De forma natural e por ações majoritariamente intuitivas, o conceito de função passa a ser presente na história da humanidade. Desde a pré-história o sistema social do homem teve como base de sua economia as trocas, processo que envolvia comercializações entre si e, portanto, uma atividade que requeria o controle das partes que eram divididas para cada família de um grupo de caçadores, por exemplo. Realizar tal divisão passou a estabelecer um processo em que o homem associava, por exemplo, uma pedra para cada animal de um rebanho, controlando assim, quantas cabeças tinha nesse rebanho e, logo, se encontrava criando uma relação de dependência entre as pedras e os animais. (MACIEL, 2011)

Gonçalves (2015) por sua vez, ressalta que existe pouca e esparsa bibliografia que trata de forma específica da história de origem do conceito de funções, de forma que os dados existentes sobre o assunto são diferentes e, muitas vezes, contraditórios, pois enquanto alguns estudos assumem um caráter funcional em algumas operações matemáticas da Antiguidade, como em trabalhos de astronomia na Babilônia, outros evocam o surgimento da geometria analítica de Descartes como o nascimento desse conceito. Outros ainda, segundo a autora, atribuem o surgimento do conceito de funções ao século XIX, quando Dirichlet e Lobatchevsky fizeram as definições clássicas do termo. Porém, ao abordar a fixação de um período para atribuir o surgimento histórico do conceito de funções, a autora aponta que seria em meados do século XVII, por meio de estudos de Descartes, Fermat, Newton e Leibniz. (GONÇALVES, 2015)

Souza e Mariani (2005) explicam que não se sabe ao certo em que momento da história surgiu o conceito de função, nem se seu surgimento ocorreu de forma intuitiva ou por conta da necessidade de resolver problemas práticos com a interdependência de duas grandezas distintas. Os autores apontam que alguns estágios históricos relatados sobre a evolução do conceito de funções, parte do instinto de funcionalidade que se encontra em tabelas elaboradas por astrônomos babilônicos ou então em estudos geométricos relacionados ao cálculo de áreas, elaborados pelos gregos.

Deixando para trás as primeiras realizações sobre o conceito de função, chegando à Idade Moderna, o conceito surge pela primeira vez por meio de Oresme[3], que descreveu de forma gráfica a dependência entre velocidade e tempo, fazendo uso de linhas verticais e horizontais para determinar um corpo que se move pela aceleração constante. A reta horizontal representava pontos instantes do tempo – as longitudes – e para cada instante traçou, de forma perpendicular à reta de longitude, um segmento de reta – latitude – com comprimento representando a velocidade. (CAMPOS, 2000)

A representação gráfica das funções ficou então conhecida como latitude de formas, sendo utilizada desde esse período até a época de Galileu Galilei. Entre os séculos XVI e XVII, o desenvolvimento do estudo de movimentos deu origem ao conceito de função por meio de uma relação entre variáveis, tornando-se fundamental para que praticamente todos os trabalhos posteriores fossem realizados (SOUZA, MARIANI, 2005).

Os autores afirmam que foi James Gregory, matemático e astrônomo escocês que, pela primeira vez, no ano de 1667, definiu de forma explícita a função: *"uma quantidade obtida de outras quantidades pela sucessão de operações algébricas ou por qualquer*

---

[3]Nicolau d' Oresme (1323 - 1382). Sábio francês nascido em Allemagne, França, físico escolástico e bispo em Lisieux.

outra operação imaginável". Porém, sua definição se perdeu no tempo. Depois dele, Descartes estabeleceu relações de dependência entre quantidades variáveis por meio de equação nas variáveis x e y, o que possibilitou o cálculo de valores de uma variável a partir de valores da outra.

Franco e Silva (2017) explicam que, ao final do século XVII, o uso do termo função era somente relacionado de forma indireta às quantidades formadas a partir de quantidades indeterminadas de constantes. De acordo com Roque (2012), foi então, por meio de Leonard Euler, no século XVIII que a função foi conceituada como um elemento central da matemática, cuja proposição foi da seguinte definição: *"Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de um modo qualquer dessa quantidade e de números, ou de quantidades constantes".*

Magarinus (2013) prossegue dizendo que Euler também foi responsável por definir função contínua e descontínua, porém, sua compreensão de continuidade é diferente da contemporânea. A contribuição de Louis Lagrange, em seus estudos sobre função, atribuiu à notação atual para derivadas de diversas ordens de função. De forma que seu conceito de função determina que elas representem uma combinação de operações diferentes sobre quantidades conhecidas a fim de alcançar valores de quantidades desconhecidas. Kleiner (1989) comenta ainda que ao longo de todo o século XVIII, embora tais descobertas tenham sido feitas, houve uma intensa despreocupação com a formalização do conceito de função, o que ocorreria no século seguinte, quando matemáticos passaram a fundamentar de forma rigorosa essa questão.

Magarinus (2013) prossegue dizendo que, ainda assim, a definição era imprecisa, sendo que, posteriormente, em 1837, foi Peter Gustav Lejeune Dirichlet que ofereceu uma definição mais próxima da que é aceita na contemporaneidade.

Contudo, a autora comenta que ainda nesse processo histórico era preciso determinar o conceito de conjunto e de números reais. Em 1872, diversos e significativos avanços foram empreendidos em relação a essas questões. Prosseguindo da história, em meados do século XX, matemáticos franceses publicaram trabalhos apresentando conceitos de matemática moderna, o que gerou como resultado, a redefinição dos conceitos básicos na linguagem de conjuntos. A autora entende que tal perspectiva histórica demonstra a complexidade do caminho que se percorreu para desenvolver o conceito de função, pois a resolução de problemas ocupou matemáticos ao longo da história e exerceram grande influência no processo de elaboração do conceito. De modo que, inicialmente, quando as preocupações tratavam da descrição e compreensão dos fenômenos naturais, a dependência entre variáveis ocorria de forma qualitativa. Ao longo do tempo, evoluíram para representações gráficas e descrições verbais e, em instâncias mais modernas, as funções são representadas como expressões analíticas e, finalmente, como uma relação entre conjuntos. (MAGARINUS, 2013)

2.2. O conceito de Função

Maciel (2011) explica que, para alcançar o conceito de função que é aceito na contemporaneidade, foi necessário percorrer todo esse caminho histórico que apresentou, em cada época, seu próprio conceito, bem como os de variável dependente e independente, continuidade, domínio, funções analíticas, entre outros. A fim de esclarecer alguns dos conceitos históricos que servirão em cada época, para definir as funções, o autor resume alguns conceitos conforme a época em que foram estabelecidos:

Tabela – Definições do conceito de funções ao longo da história

Período	Definição
Século XVII	Qualquer relação entre variáveis; Uma quantidade obtida de outras quantidades mediante operações algébricas ou qualquer outra operação imaginável; Qualquer quantidade que varia de um ponto a outro em uma curva; Quantidades formadas usando expressões algébricas e transcendentais de variáveis e constantes.
Século XVIII	Quantidades que dependem de uma variável; Função de algumas variáveis, como quantidade que é composta de alguma forma, de variáveis e constantes; Qualquer expressão útil para calcular.
Século XIX	Correspondência entre variáveis; Correspondência entre um conjunto A e os números reais; Correspondência entre os conjuntos.

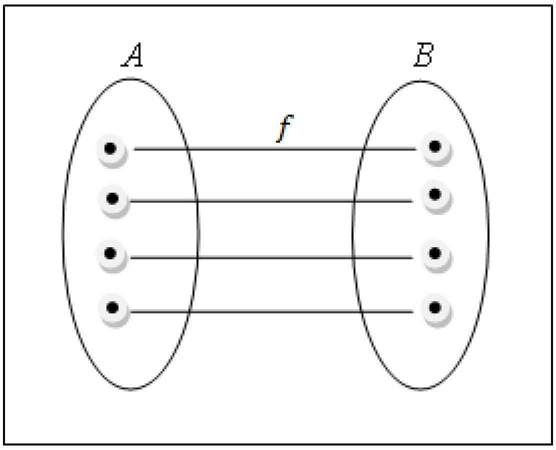
Fonte: Adaptado de Maciel (2011).

O autor explica que esses pontos sintetizam como os conceitos de função foram definidos e modificados ao longo dos séculos, sofrendo interferências de conjuntura e sem se manterem estáticos, de modo que esse desenvolvimento de concepções foi altamente importante para a construção da matemática.

Magarinus (2013) aponta que, após esse processo de evolução histórica pelo qual passou o conceito de função, desenvolveu-se de maneira linear até a contemporaneidade, é possível aceitar que a função é apresentada, no presente, como nos livros de educação básica, portanto, da seguinte forma (Lima, et al., 2006, apud Magarinus, 2013, p. 20):

Definição 1 – Dados os conjuntos X e Y, uma função $f : X \to Y$ (lê-se: "uma função de X em Y) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se domínio da função e Y é o contradomínio da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se imagem de x pela função f, ou valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \to f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em $f(x)$. Segue abaixo figura como exemplo da definição 1.

Figura 1 - Diagrama da Função



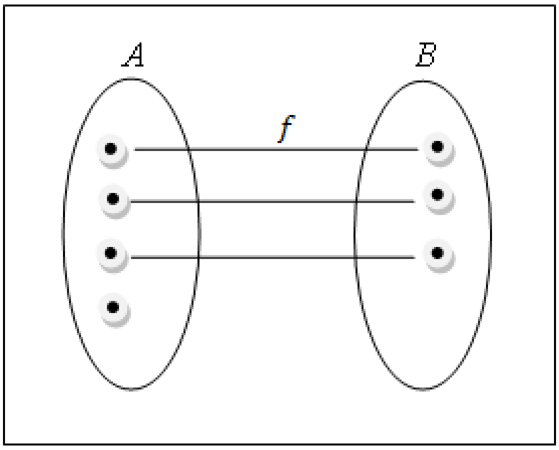
Fonte: Desenhada pelo autor

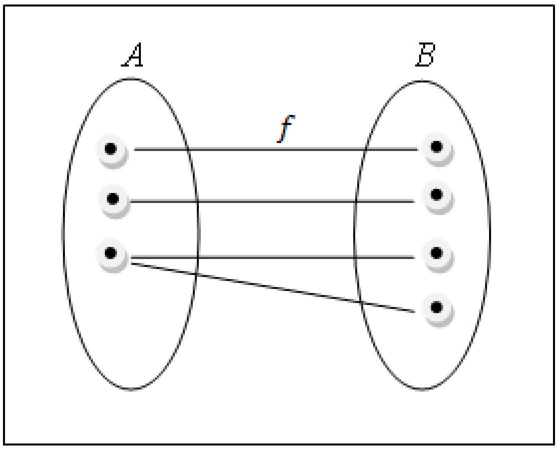
Em contradição a definição 1 proposta, temos exemplos a seguir que ferem a tal definição e não caracterizam função.

- Dados dois conjuntos A e B, $f : A \to B$, não caracteriza função quando há sobra de elementos em A.

- Dados dois conjuntos A e B, $f: A \to B$, não caracteriza função quando um único elemento de A liga em dois ou mais elementos de B.

Figura 2 - Relações que não definem Função.





Fonte: Desenhada pelo autor

Definição 2 – Seja $f: X \to Y$ uma função dada com domínio X e contradomínio Y. Definimos o gráfico da função f como sendo o subconjunto do plano cartesiano dado por $G(f) = \{(x, y); x \in X \text{ e } y = f(x) \in Y\}$.

Magarinus (2013) comenta ainda que a abordagem observada do conceito de funções em livros didáticos da educação básica, na introdução do estudo das funções, é realizada por meio de problemas contextualizados, com aspectos interdisciplinares, evidenciando a variação e também a dependência entre grandezas, o que pode facilitar o entendimento do que é a função.

2.3. Funções Polinomiais

Segundo Dantas (2013) a função polinomial é aquela determinada por um polinômio $P(x)$ e definida da seguinte forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

De forma que n se apresenta como um número inteiro não negativo e os números $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$, são constantes, denominadas de coeficientes do polinômio. O grau de uma função polinomial diz respeito ao valor de n, isto é, do maior expoente da variável do polinômio.

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \ .$$

Ainda segundo o autor, um dos exemplos mais claros da falta de objetividade que permanece até a contemporaneidade na maior parte dos livros didáticos, paira sobre a definição da função como um conjunto de pares ordenados. Enquanto que a função é um dos conceitos mais elementares da matemática – o outro é o conjunto. Sendo que os usuários da matemática e os matemáticos em si, tendem a pensar a função de maneira dinâmica, contrastando com essa concepção estática.

Comenta ainda que para um matemático ou um usuário leigo em matemática, uma função $f : X \to Y$, que tem como domínio o conjunto X e contradomínio o conjunto Y, corresponde – via de regra – a um critério, um algoritmo ou uma série de instruções que determina, sem exceções ou ambiguidades, para cada elemento $x \in X$, sua imagem $f(x) \in Y$.

2.3.1. Função Polinomial do Primeiro Grau – Funções Afins

Carneiro (1993) explica que uma função denomina-se de função afim quando existem constantes reais a e b, de forma que $f(x) = ax + b$ existam para todo $x \in \mathbb{R}$. O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, segundo o autor, é o "maior" conjunto de valores para os possíveis de encontrar $f(x)$. De forma que o domínio, quando não é especificado, passa a considerar como conjunto o $\mathbb{R}$.

Dessa maneira, o autor expõe um exemplo de situação real em que é possível descrever por meio do uso de uma função afim.

Exemplo 1 – O preço que se paga por uma corrida de táxi dependerá da distância que é percorrida em quilômetros, bem como dos valores constantes do quilometro rodado e da bandeirada. Essa distância percorrida em quilômetros é multiplicada por uma constante a – que apresenta o valor do quilometro rodado. Ao passo que a esse produto se adiciona um valor constante inicial b que representa o valor da bandeirada. O resultado disso será o preço a pagar pela viagem, de modo que a distância que foi percorrida – em quilômetros

– será representada pela variável independente x e $f(x) = ax + b$ ou então $y = ax + b$, que representará o preço a ser pago pela corrida.

Iezzi e Murakami (2004) apresentam então alguns exemplos de funções afins:

Exemplo 2

a) $f(x) = 3x + 7$, $a = 3$ e $b = 7$;

b) $g(x) = -x + 1$, $a = -1$ e $b = 1$;

c) $h(x) = \frac{1}{2}x - 23$, $a = \frac{1}{2}$ e $b = -23$;

d) $k(x) = \sqrt{7}x$, $a = \sqrt{7}$ e $b = 0$;

e) $s(x) = 59$, $a = 0$ e $b = 59$.

Faz-se necessário a demonstração da seguinte proposição: *O gráfico de uma função afim $f : x \to y$, da forma $f(x) = ax + b$ é uma reta.*

Demonstração. Basta verificarmos que três pontos quaisquer do gráfico de f são colineares. Sejam, portanto,

$$P_1 = (x_1, ax_1 + b),\ P_2 = (x_2, ax_2 + b) \text{ e } P_3 = (x_3, ax_3 + b)$$

Três pontos do gráfico de f. Para verificar que P_1, P_2 e P_3 são colineares é necessário e suficiente que o maior dos três números $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$ seja igual à soma dos outros dois.

Sem perda de generalidade, podemos supor que as abscissas, x_2 e x_3 foram ordenadas de modo que $x_1 < x_2 < x_3$. A fórmula da distância entre dois pontos nos dá:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2},$$

Seguindo o mesmo procedimento no cálculo das distancias $d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$, temos:

$$d(P_2, P_3) = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2},$$

$$d(P_1, P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}.$$

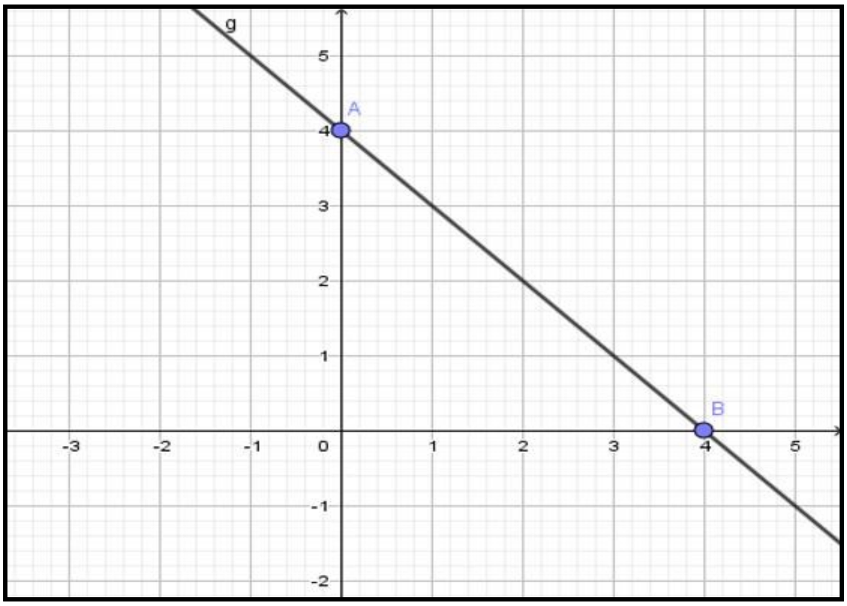
Daí se segue imediatamente que:

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).$$

Portanto, os pontos P_1, P_2 e P_3 são colineares.

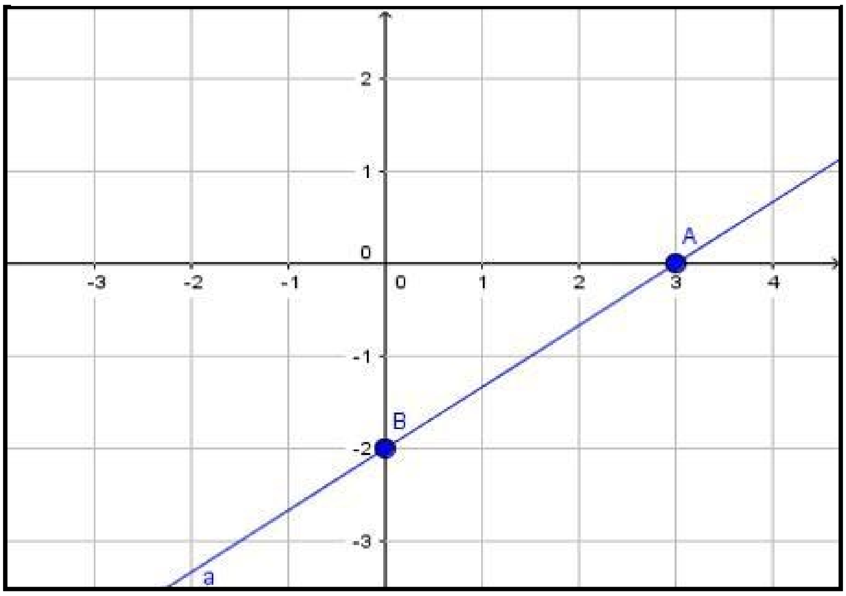
Abaixo, apresentaremos dois gráficos de funções afins: um crescente e o outro decrescente.

Figura 3 - Gráficos da função Afim: decrescente.



Fonte: Desenhado pelo autor

Figura 4 - Gráfico da função Afim: crescente.



Fonte: Desenhado pelo autor

2.3.2. Função Polinomial do Segundo Grau – Funções Quadráticas

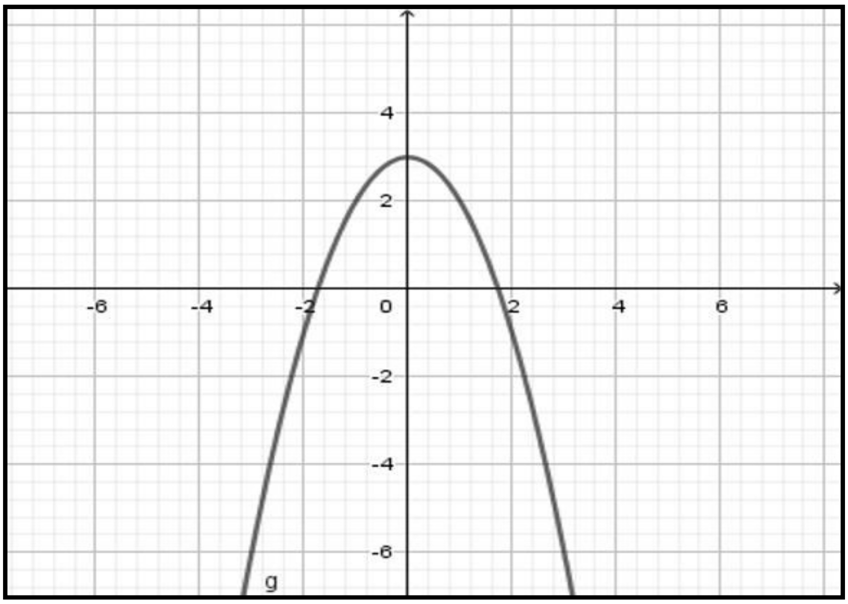
Dantas (2013) ressalta, sobre a função quadrática, que esse tipo de função é trabalhado junto a estudantes quando os mesmos já possuem uma noção sobre a função de maneira geral, isto é, quando seu conceito já foi definido. Presumindo que não haja dificuldade, passa-se então à definição da função quadrática – ou função polinomial do segundo grau, representada por: $f(x)=ax^2+bx+c$ com a, b e c números reais e $a \neq 0$, que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o valor $(ax^2+bx+c) \in \mathbb{R}$.

Iezzi e Murakami (2004) apontam que a resolução de problemas que fazem uso de funções quadráticas ou de uma equação de segundo grau, estão entre os mais antigos problemas da matemática.

Os autores prosseguem explicando que as raízes da função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ são valores x para os quais se tem $f(x)=0$, isto é, $ax^2+bx+c=0$, que se apresenta como uma equação de segundo grau. O que significa que as raízes da equação $f(x)=0$ também sejam denominadas de raízes da função quadrática $f(x)$.

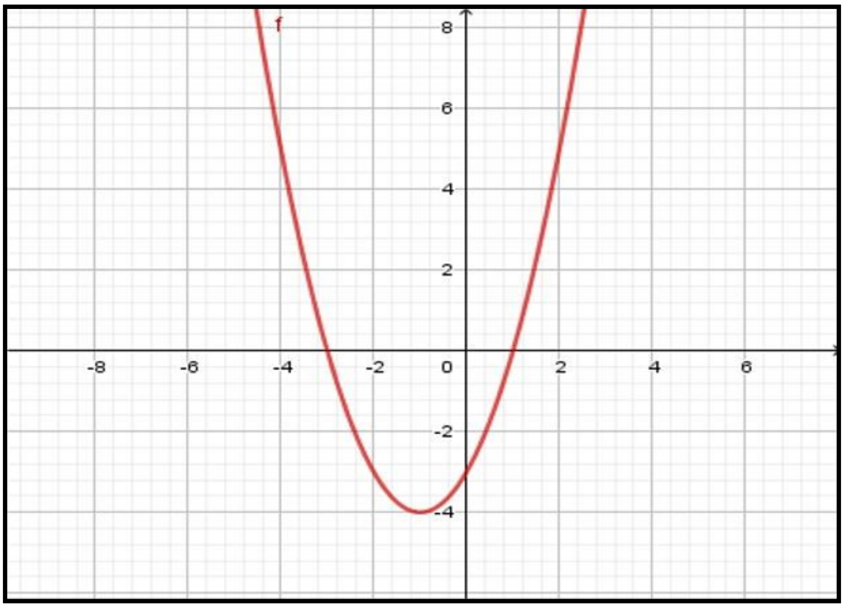
O gráfico de uma função quadrática, sempre será uma parábola, uma curva no plano, simétrica e formando o eixo da simetria da reta que mantém foco F e sendo perpendicular à reta diretriz. Abaixo encontraremos as representações da função da função quadrática: côncava para cima e côncava para baixo.

Figura 5 - Gráfico da função quadrática: $a<0$



Fonte: Desenhado pelo autor

Figura 6 - Gráfico da função quadrática $a > 0$



Fonte: Desenhado pelo autor

2.3.3. Funções polinomiais de grau maior ou igual a 3

Nascimento (2015) explica que zeros ou raízes da função polinomial serão denominados por:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

Aos valores de x para os quais $p(x) = 0$, isto é, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0.$ Sendo assim, as raízes das funções polinomiais são as soluções de suas respectivas equações.

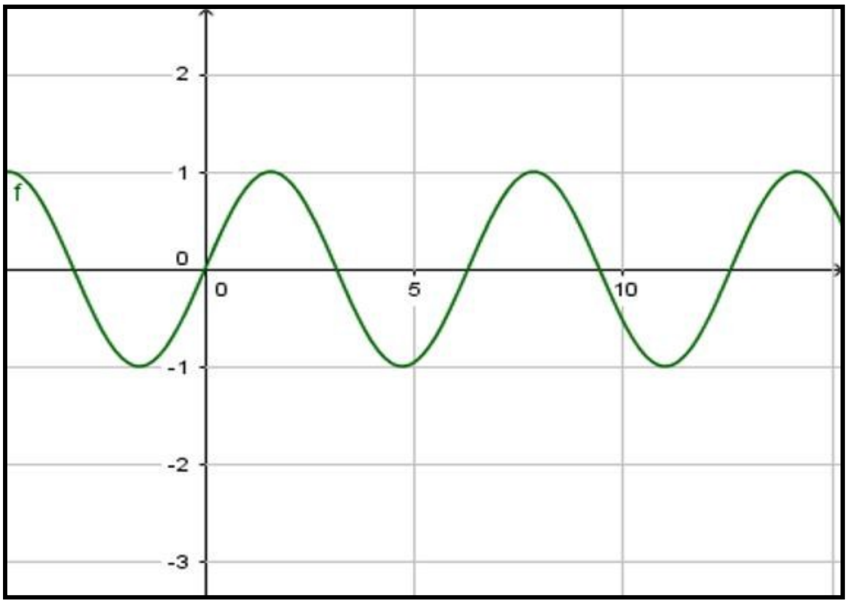
Pelo Teorema de Abel-Ruffini, não há um método que forneça as raízes de uma equação polinomial de grau maior ou igual a cinco, por meio de transformações algébricas, ou seja, não existe uma fórmula geral para resolver estas equações. (COELHO, 2016).

2.4. Algumas Funções Não Polinomiais

Dentre as funções não-polinomiais, Batista (2000) explica as funções trigonométricas, classificando-as como funções que envolvem em seus componentes as relações: seno, cosseno e tangente, de modo que, como as equações trigonométricas são diversas, serão apresentadas apenas essas três, os tipos mais elementares. O autor define as funções trigonométricas, como as voltadas a atender toda reta real, por meio do círculo trigonométrico, definido por circunferência de raio unitário centralizado na origem dos eixos coordenados.

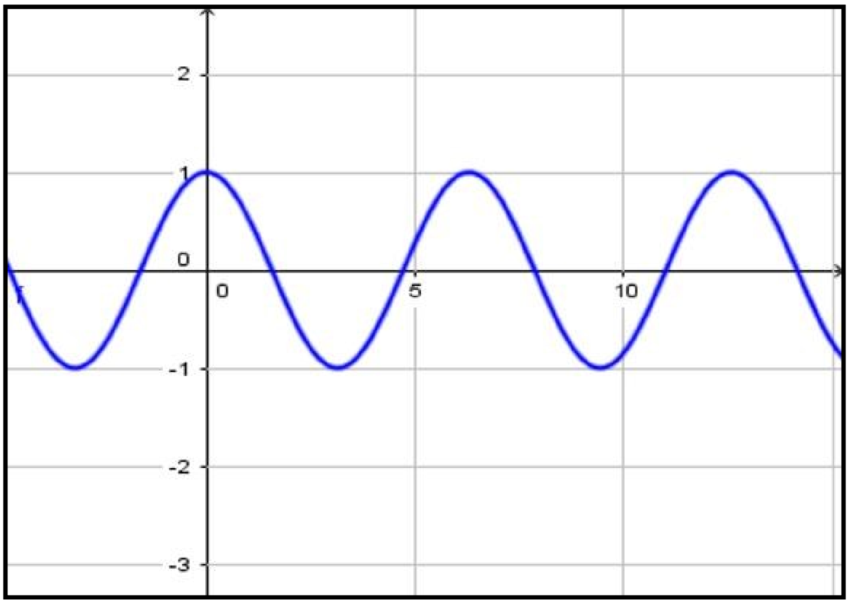
A seguir apresentamos os gráficos das funções, seno, cosseno e tangente, definidas em toda reta real.

Figura 7 - Gráfico da função seno: $f(x) = sen\ x$



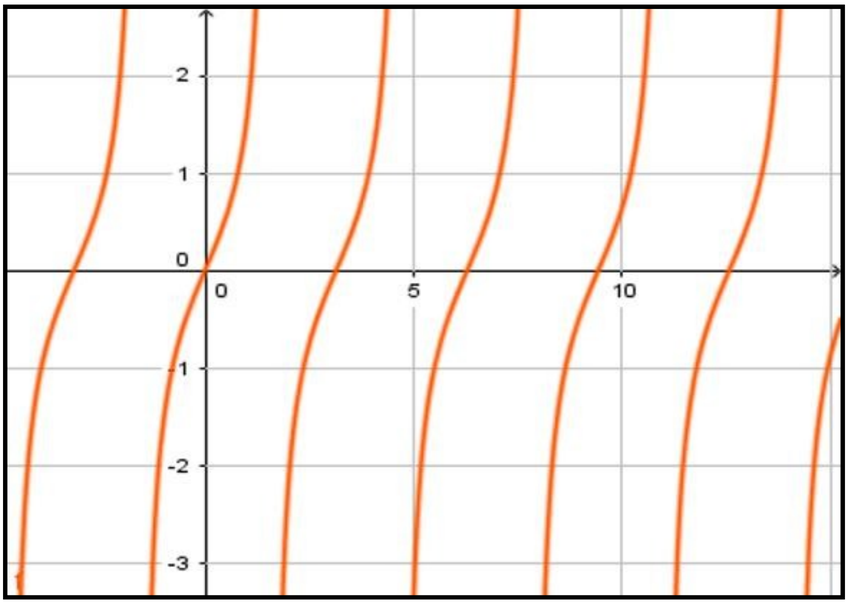
Fonte: Desenhado pelo Autor

Figura 8 - Gráfico da função cosseno: $f(x) = \cos x$



Fonte: Desenhado pelo autor.

Figura 9 - Gráfico da função tangente: $f(x) = tg\ x$



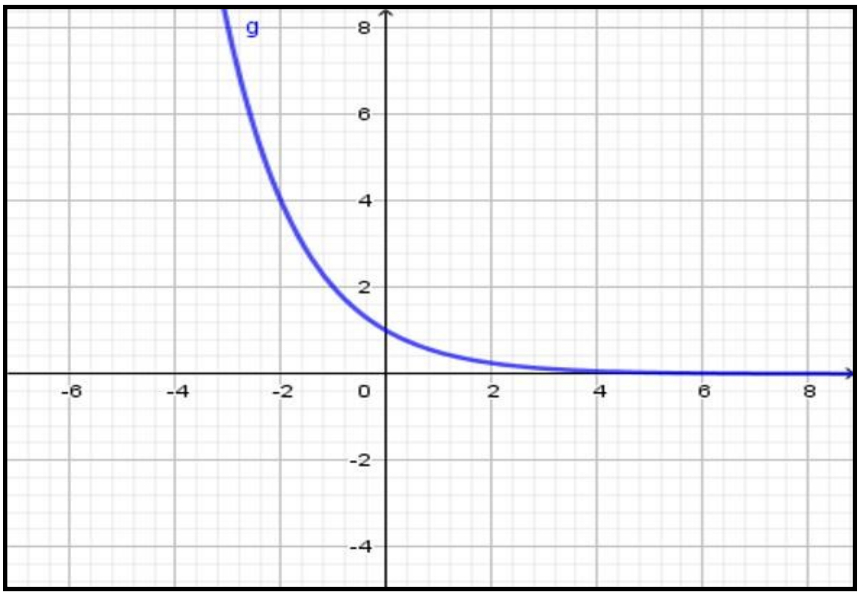
Fonte: Desenhado pelo autor

Outros exemplos de funções não polinomiais importantes da literatura são as funções exponenciais e as logarítmicas. A função exponencial, segundo Carneiro (1993) é representada com base a e definida por $f(x) = a^x$. De modo que $a > 0$, $a \neq 1$ e x representa qualquer número real.

A função logarítmica ainda segundo o autor pode ser assim explicada: quando uma função exponencial $f(x) = a^x$, sendo $a > 0$, se torna injetora em todo o seu domínio, significa que ela possui uma inversa, representada por $f^{-1}(x)$. Logo, ela recebe a denominação de função logarítmica na base a. Uma das principais aplicações dessa função é na solução de equações exponenciais. Portanto sendo a uma constante real, de modo que $a > 0$ e $a \neq 1$, se $x > 0$, é possível dizer que: $y = \log_a x$ somente se $a^y = x$, o que significa que essa função é definida por: $f(x) = \log_a x$.

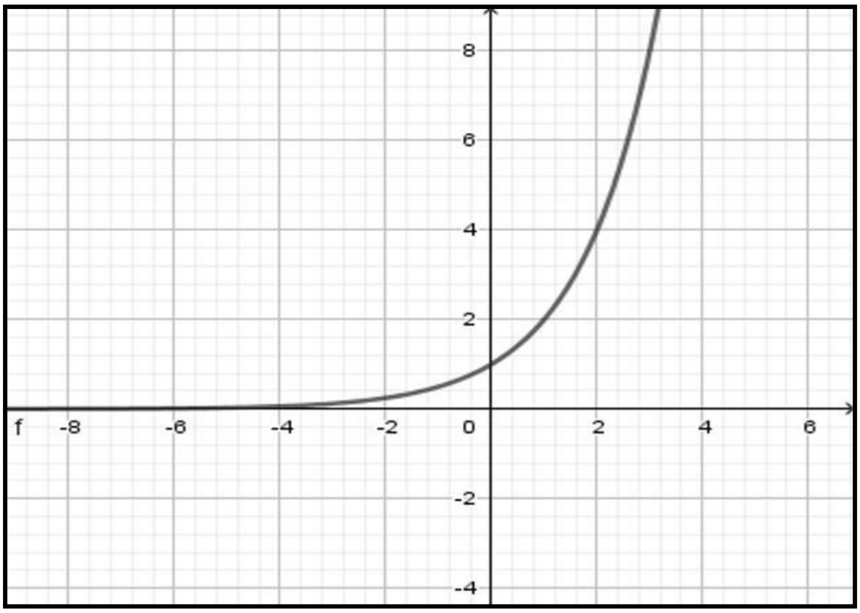
A seguir apresentamos os gráficos das funções, exponencial e logarítmica, decrescente e crescente respectivamente.

Figura 10 - Gráfico da função exponencial: decrescente.



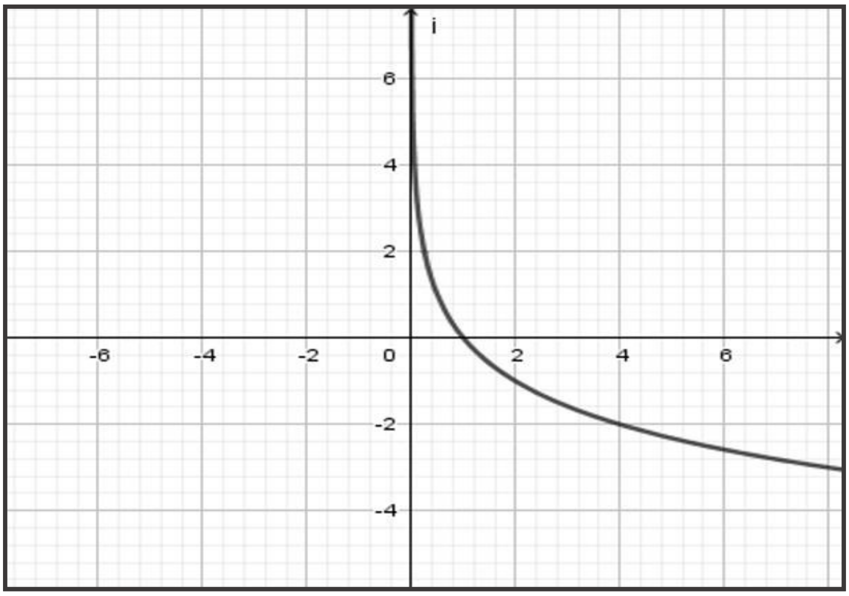
Fonte: Desenhado pelo autor.

Figura 11 - Gráfico da função exponencial: crescente.



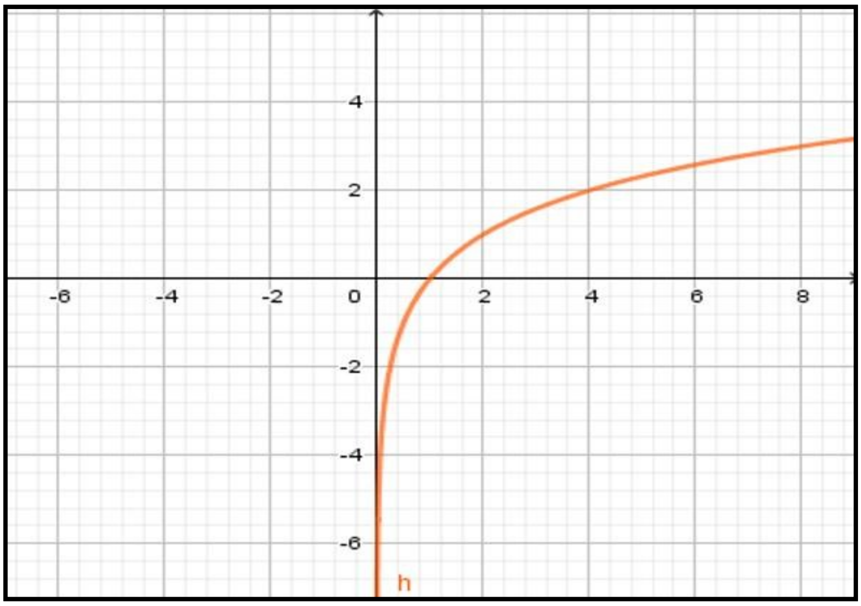
Fonte: Desenhado pelo autor.

Figura 12 - Gráfico da função logarítmica: decrescente.



Fonte: Desenhado pelo autor.

Figura 13 - Gráfico da função logarítmica: crescente.



Fonte: Desenhado pelo autor.

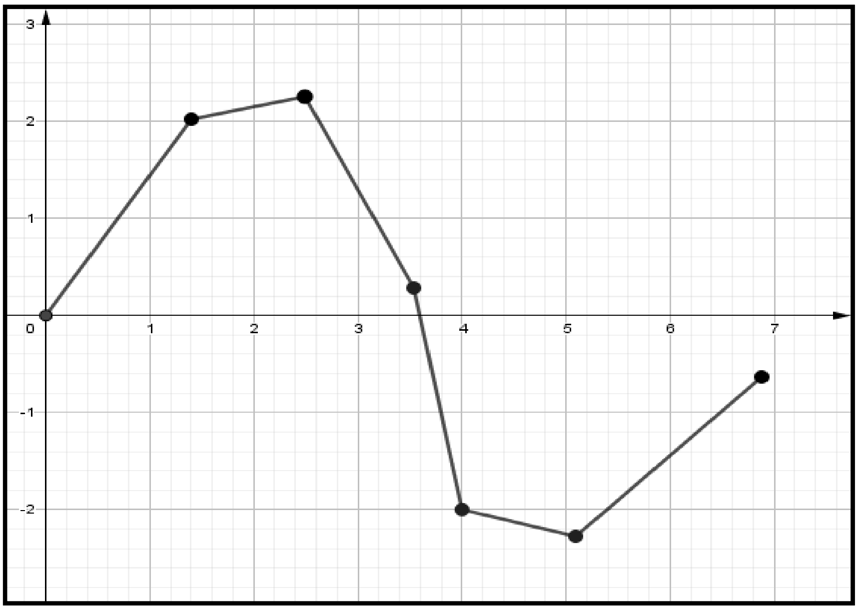
3. Interpolação Polinomial de Lagrange

Neste capítulo apresentamos a Interpolação Polinomial de Lagrange, este foi um matemático da segunda metade do século XVII e começo do século XVIII. Neste tratamos do polinômio interpolador de Lagrange, suas características e propriedades essenciais para a demonstração e utilização na resolução de alguns problemas, seja em sala de aulas e/ou no cotidiano do estudante. Para um melhor embasamento teórico do tema, iniciamos falando sobre o método de interpolação de polinômios.

Para Dias e Justino (2010), a interpolação é explicada como um método que possibilita a constituição de um novo conjunto de dados a partir de um conjunto discreto de dados pontuais conhecidos. Nas áreas de engenharia e ciências, geralmente os dados são dispostos de forma pontual, obtidos por meio de uma amostragem ou experimento. Sendo que é por meio da interpolação que se pode construir uma função que, aproximadamente se ajustará a esses dados pontuais.

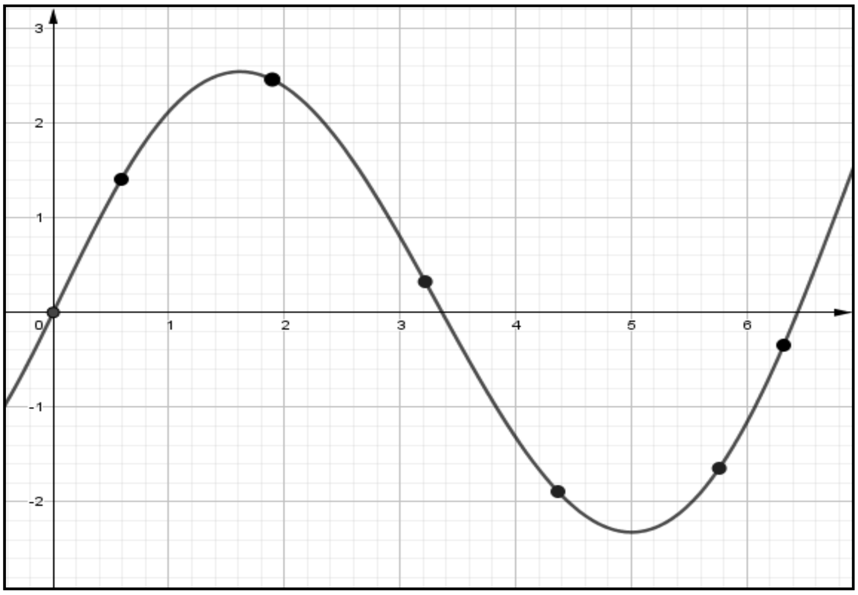
Os autores prosseguem dizendo que a interpolação possibilita fazer a reconstituição aproximada de uma função somente conhecendo algumas de suas abscissas e respectivas ordenadas. Logo, a função que resulta do processo de interpolação, passa nos pontos fornecidos e, em relação a outros pontos, pode se tratar de um simples ajuste. Abaixo temos exemplos de dois tipos de Interpolação:

Figura 14 - Gráfico da Interpolação Linear



Fonte: Desenhado pelo autor.

Figura 15 - Gráfico de Interpolação Polinomial de grau superior a 1



Fonte: Desenhado pelo autor

São tipos de interpolação: a linear, a polinomial e a trigonométrica. Ao tratar da interpolação linear, em uma análise numérica, trata de aproximar uma função em um intervalo por meio de uma função linear, isto é, pelo uso de polinômios de primeiro grau. O principal problema é que se os pontos são poucos ou muito afastados entre si a representação gráfica de determinada função não seria representada adequadamente por esse método. O que tornaria, possivelmente necessário fazer uso de polinômios de graus maiores – como o de Lagrange.

Em síntese, quando a função interpoladora é um polinômio, definida como $F(x)$, a interpolação será o processo de avaliação de $F(x)$, $x \in [a,b]$, sendo substituída a função $f(x)$ por uma função $F(x)$, de forma que ficará: $F(x_i) = f(x_i)$, $i = 1,...,n.$ Desse modo, o $f(x)$ se apresenta como função real definida em $[a,b] \in \mathbb{R}$, da que se conhecem os valores nos pontos de abscissas: $x_1, x_2,...x_i,...x_n \in [a,b]$.

3.1. Polinômio de interpolação

O estudo da aproximação de funções por polinômios é uma das ideias mais antigas e usadas até hoje. Tal ideia dá - se pela facilidade de tratamento de tais tipos de funções. Entre outras vantagens, temos uma maior facilidade em encontrar suas raízes por meio de métodos bem comuns e ainda que suas derivadas e integrais se arremeta a novos polinômios. Portanto é muito comum substituir uma função mais complicada por um polinômio que a represente, mesmo que de forma aproximada. Dentre os métodos mais comuns de modelagem por funções polinomiais, citamos: A Interpolação, Métodos de quadrados, Mini – Max, entre outros. (FRANCO, 2006)

Neste capítulo falaremos sobre resolução de funções pelo Método de Interpolação Polinomial. Tal utilização do método de aproximação para uma função $f(x)$ acontece em situações como:

- Quando trabalhamos com coleta de dados para experimentos, quando sabemos o valor de uma função f em alguns pontos $x_0, x_1, x_2, ...x_n$, e é necessário encontrar o valor de f em dado um ponto;
- Quando é necessário calculara integral definida em um determinado intervalo;
- Quando temos uma expressão muito complicada para a função f e esta é de difícil manipulação. Sendo que nesse último, o procedimento mais comum seria proceder com a simplificação dos cálculos do que necessariamente a busca por sua exatidão.

A seguir, vamos mostrar o problema geral por meio de polinômios.

Tal problema consiste em: dados $(n+1)$ números (ou pontos) distintos (reais ou complexos) $x_0, x_1, ..., x_n$ e $n+1$ números (reais ou complexos) $y_0, y_1, ..., y_n$, números estes que, em geral, são $n+1$ valores de uma função $y = f(x)$ em $x_0, x_1, ..., x_n$, determinar – se um polinômio $P_n(x)$ de grau máximo n tal que:

$$P_n(x_0) = y_0, \;\; P_n(x_1) = y_1, ..., P_n(x_n) = y_n.$$

Para tal demonstração usaremos o teorema abaixo para mostrar que o polinômio existe e é único para a hipótese de que os pontos $x_0, x_1, ..., x_n$, sejam distintos.

Teorema 1 – Dados $n+1$ pontos distintos $x_0, x_1, ..., x_n$ (reais ou complexos) e $n+1$ valores $y_0, y_1, ..., y_n$ existe um só polinômio $P_n(x)$, de grau menor ou igual a n, tal que:

$$P_n(x_k) = y_k, \;\; k = 0,1,...,n. \tag{1}$$

Prova: Seja $P_n(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ um polinômio de grau máximo n, com $n+1$ coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$, a serem determinados. Sabemos que $P_n(x_k) = y_k$, para $k = 0,1,...,n.$ Então:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \ldots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_1^n = y_1 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_0 + a_1x_n + \ldots + a_nx_n^n = y_n \end{cases} \tag{2}$$

O qual pode ser interpretado como um sistema linear para os coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ e cujo determinante conhecido como determinante de Vandermonde, é dado por:

$$V = V(x_0, x_1, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & & & \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} \tag{3}$$

Para calcular V, procedemos da seguinte maneira: consideremos a função $V(x)$ definida por:

$$V(x) = V(x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, x) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{n-1} & \ldots & x_{n-1}^n \\ 1 & x & \ldots & x^n \end{vmatrix} \tag{4}$$

A Função $V(x)$ é como facilmente se verifica um polinômio de grau menor ou igual a n. Além disso, $V(x)$ se anula em $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$. Podemos então escrever: $V(x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x) = A(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$, onde A é coeficiente do termo de maior grau.

Para calcular, desenvolvemos o determinante segundo os elementos da última linha e observamos que o coeficiente de x^n é $V(x_0, x_1, ..., x_{n-1})$. Logo pode ser escrito como:

$$V(x_0, ..., x_{n-1}, x) = V(x_0, ..., x_{n-1})(x - x_0)...(x - x_{n-1}). \qquad (5)$$

Substituindo x por x_n, obtemos a seguinte fórmula de recorrência:

$$V(x_0, ..., x_{n-1}, x_n) = V(x_0, ..., x_{n-1})(x_n - x_0)...(x_n - x_{n-1}). \qquad (6)$$

Da equação (3), temos que:

$$V(x_0, x_1) = x_1 - x_0.$$

Em vista da equação (6), podemos escrever:

$$V(x_0, x_1, x_2) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1).$$

Por aplicações sucessivas de (6), obtemos:

$$V(x_0, x_1, ..., x_n) = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

Temos por hipótese que os pontos $x_0, x_1, ..., x_n$ são distintos. Assim, $V \neq 0$ e o sistema (2) tem uma e uma só solução $a_0, a_1, ..., a_n$.

Conclui que: sendo $n+1$ pontos distintos $x_0, x_1, ..., x_n$ e $n+1$ valores de uma função $y = f(x)$ sobre esses pontos, isto é: $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$,..., $f(x_n) = y_n$, existe um e um só polinômio $P_n(x)$ de grau máximo n tal que $P_n(x_k) = f(x_k)$, $k = 0,1,...,n.$ Para tal conclusão segue a definição:

Definição 2 - Define – se como Polinômio de Interpolação da função $y = f(x)$ dado certo conjunto de pontos distintos $x_0, x_1, ..., x_n$ um polinômio de grau máximo n que coincide com a função f em $x_0, x_1, ..., x_n$. Assim o polinômio fica definido por $P_n(x)$.

Franco (2006) expõe o exemplo a seguir, que demonstra melhor a definição enunciada anteriormente.

Exemplo 3 - Conhecendo a tabela seguinte, devemos determinar o polinômio de interpolação para a função por este conjunto de pares de pontos.

x	-1	0	3
$f(x)$	15	8	-1

Da tabela, temos:

$x_0 = -1,\ x_1 = 0$ e $x_2 = 3$

$y_0 = f(x_0) = 15,\ \mathrm{y}_1 = f(x_1) = 8$ e $\mathrm{y}_2 = f(x_2) = -1.$

Como n = 2, devemos determinar um polinômio de grau máximo 2:

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \text{ tal que } P_2(x_k) = y_k,\ k = 0,1,2.$$

Isto é:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2 \end{cases}$$

Substituindo, x_k e y_k, $k = 1,2,3$, obtemos:

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 15 \\ a_0 \qquad\qquad\ = 8 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 = -1 \end{cases}$$

Portanto, temos como solução: $a_0 = 8,\ a_1 = -6$ e $a_2 = 1.$ Assim, $P_2(x) = 8 - 6x + x^2$ é o polinômio de interpolação para a função dada pelos pontos: $(-1{,}15)$; $(0{,}8)$; $(3, -1)$ (FRANCO, 2006).

3.2. Fórmula de Lagrange

Nepomuceno (2016) esclarece então que a interpolação se dá quando há a necessidade de obter um valor intermediário que não consta de uma tabela. Tais como dados experimentais, tabelas estatísticas e de funções complexas são alguns dos exemplos dessa situação. Dessa maneira, aproximar funções por polinômios é uma das ideias mais antigas no bojo da análise numérica e, ainda assim, é uma das mais utilizadas na contemporaneidade.

O autor entende que é fácil compreender a razão para essa ampla usabilidade, pois os polinômios possuem pontos positivos como: são facilmente computáveis, suas derivadas e integrais são novamente polinômios, suas raízes podem ser encontradas de forma relativamente simplificada, etc. Assim, a simplicidade dos polinômios possibilita uma aproximação polinomial de diversas formas: pelo método dos mínimos quadrados, pelo já apresentado método de Lagrange, etc.

Conforme Franco (2006), Dado um conjunto de pontos distintos $x_0, x_1, ..., x_n$ $n+1$ e considerando para $k = 0,1,...,n$, os seguintes polinômios $l_k(x)$ de grau n, temos:

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)}.$$

Portanto, podemos verificar que:

$$l_k(x_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 0, & se \quad k \neq j, \\ 1, & se \quad k = j. \end{cases}$$

Logo, substituindo x por x_k, observamos que tanto o numerador quanto o denominador ficaram iguais $\Rightarrow$ $l_k(x_k) = 1$. Porém, ao substituir x por x_j, com $j \neq k$, verificamos que o numerador anula – se e, assim $l_k(x_j) = 0$. Portanto para valores dados $f_0 = f(x_0), f_1 = f(x_1), ..., f_n = f(x_n)$ de uma função $y = f(x)$, o polinômio:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k l_k(x)$$

Sendo de grau máximo n, satisfaz:

$$P_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0,1,2,...,n.$$

Portanto, conclui a autora que:

Sendo $P_n(x)$, assim definido, é o polinômio de interpolação de $f(x)$ sobre os $n+1$ pontos distintos $x_0, x_1, ..., x_n$. Logo a fórmula é chamada **Fórmula de Lagrange do Polinômio de Interpolação** (FRANCO, 2006).

Conforme Nepomuceno (2016), um exemplo da aplicação do polinômio de Lagrange é apresentado a seguir:

Exemplo 4 – Calcular $p_2(0,2)$ a partir da tabela abaixo:

i	0	1	2
x_i	$0,1$	$0,6$	$0,8$
y_i	$1,221$	$3,320$	$4,953$

Para $n = 2$

- Cálculo de $l_0(x)$:

Por definição, temos que:

$$l_0(x_0) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

Assim, substituindo os pontos, obtemos:

$$l_0(x_0) = \frac{(x - 0,6)(x - 0,8)}{(0,1 - 0,6)(0,1 - 0,8)}$$

Após algumas manipulações algébricas, temos:

$$l_0(x_0) = \frac{x^2 - 1,4x + 0,48}{0,35}$$

- Cálculo de $l_1(x_1)$:

Por definição, temos que:

$$l_1(x_1) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

Assim, substituindo os pontos, obtemos:

$$l_1(x_1) = \frac{(x-0,1)(x-0,8)}{(0,6-0,1)(0,6-0,8)}$$

Após algumas manipulações algébricas, temos:

$$l_1(x_1) = \frac{x^2 - 0,9x + 0,08}{-0,1}$$

- Cálculo de $l_2(x_2)$

Por definição, temos que:

$$l_2(x_2) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Assim, substituindo os pontos, obtemos:

$$l_2(x_2) = \frac{(x-0,1)(x-0,6)}{(0,8-0,1)(0,8-0,6)}$$

Após algumas manipulações algébricas, temos:

$$l_2(x_2) = \frac{x^2 - 0,7x + 0,06}{0,14}$$

Logo definindo o polinômio interpolador, temos:

$$p(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

Substituindo os dados de y_i indicados na tabela, temos:

$$p(x) = 1,221\frac{x^2 - 1,4x + 0,48}{0,35} + 3,320\frac{x^2 - 0,9x + 0,08}{-0,1} + 4,953\frac{x^2 - 0,7x + 0,06}{0,14}$$

Agrupando os termos semelhantes, segue que:

$$p(x) = 5,67x^2 - 0,22x + 1,14$$

Observe que, para $p_2(0,2)$, temos:

$$\therefore p_2(0,2) = 1,414.$$

4. Exercícios, Problemas e Projetos Aplicados

Neste capítulo falaremos sobre os problemas e aplicações do polinômio interpolador de Lagrange como um recurso de modelagem matemática. Resolveremos alguns exercícios que servirão como demonstrações para os conceitos vistos nos capítulos anteriores.

Exercício 1 - Dada a tabela:

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	15	0	-1	0

Calcular $f(0,5)$ usando polinômio de interpolação sobre todos os pontos (FRANCO, 2006).

Solução:

- Com base nos dados da tabela, temos, $n=3$. Assim, o polinômio de interpolação na forma de Lagrange é dado por:

$$P_3(x)=\sum_{k=0}^{3} f_k l_k(x).$$

- Calculando $l_0(x)$

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}=\frac{(x+1)(x)(x-1)}{(-1)(-2)(-3)}\rightarrow l_0(x)=\frac{-x^3+x}{6}$$

- Calculando $l_2(x)$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=\frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{(0+2)(0+1)(0-1)}\rightarrow l_2(x)=\frac{-x^3-2x^2+x+2}{2}$$

Obs. Os valores de $l_0(x)$ e $l_1(x)$, não se fazem necessário, pois temos:

$$x_1 = -1 \rightarrow y_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_3 = 1 \rightarrow y_3 = 0$$

- Logo,

$$P_3(x) = l_0 y_0 + l_1 y_1 + l_2 y_2 + l_3 y_3 \quad \rightarrow \quad P_3(x) = 15l_0 + 0l_1 + (-1)l_2 + 0l_3$$

- Substituindo os valores $l_k y_k(x)$, $k = 0,1,2,3.$ Temos:

$$P_3(x) = 15.\left[\frac{-x^3 + x}{6}\right] + (-1).\left[\frac{-x^3 - 2x^2 + x + 2}{2}\right]$$

- Após algumas manipulações algébricas, temos o polinômio interpolador para os valores estabelecidos.

$$P_3(x) = -2x^3 + x^2 + 2x - 1$$

- Sendo $f(0,5) = P_3(0,5)$, temos:

$$P_3(x) = -2(0,5)^3 + (0,5)^2 + 2(0,5) - 1$$

- Portanto, temos:

$$P_3(0,5) = 0$$

Exercício 2 - Sendo 200 candelas a intensidade de uma lâmpada foi calculado a iluminação em casos de incidência normal sobre uma superfície situada a distâncias conhecidas, quando para cada distância foi calculada a iluminação, conforme a tabela a seguir (FRANCO, 2006).

Distância (metros)	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50
Iluminação (lux)	200.00	128.00	88.39	65.30	50.00	39.50	32.00

Usando o polinômio de interpolação de 2º grau, calcular a iluminação, quando a superfície estiver situada a 1.60 m da lâmpada.

- Com base na tabela, temos:

$$x_0 = 1.25, \quad y_0 = 128.00$$
$$x_1 = 1.50, \quad y_1 = 88.39$$
$$x_2 = 1.75, \quad y_2 = 65.30$$

- Assim, o polinômio de interpolação na forma de Lagrange é dado por:

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} f_k l_k(x).$$

- Calculando $l_0(x)$

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1.5)(x-1.75)}{(1.25-1.50)(1.25-1.75)} \rightarrow l_0(x) = 8x^2 - 26x + 21$$

- Calculando $l_1(x)$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1.25)(x-1.75)}{(1.50-1.25)(1.50-1.75)} \rightarrow l_1(x) = -16x^2 + 48x - 35$$

- Calculando $l_2(x)$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-1.25)(x-1.50)}{(1.75-1.25)(1.75-1.50)} \rightarrow l_2(x) = 8x^2 - 22x + 15$$

- Logo,

$$P_2(x) = l_0 y_0(x) + l_1 y_1(x) + l_2 y_2(x)$$

- Substituindo os valores $l_k y_k(x)$, $k = 0,1,2.$ Temos:

$$P_2(x) = \left[8x^2 - 26x + 21\right]128 + \left[-16x^2 + 48x - 35\right]88.39 + \left[8x^2 - 22x + 15\right]65.30$$

- Após algumas manipulações algébricas, temos o polinômio interpolador para os valores dessa integral.

$$P_2(x) = 132.16x^2 - 521.88x + 573.85$$

- Determinar o valor referente à iluminação em (lux), quando a lâmpada estiver a 1.6 m da superfície, ou seja, $P(1.6).$

$$P_2(1.6) = 132.16(1.6)^2 - 521.88(1.6) + 573.85$$

$$P_2(1.6) = 338.33 - 835 + 573.85$$

- Portanto, temos:

$$P_2(1.6) = 77.18$$

Exercício 3 - A integral elíptica completa é definida por:

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1 - x^2 sen^2 t)^{1/2}}.$$

Por uma tabela de valores dessa integral, encontramos:

$$K(1) = 1.5708, \quad K(2) = 1.5719, \quad K(3) = 1.5739.$$

Determinar $K(2.5)$, usando polinômio de interpolação, na forma de Lagrange, sobre todos os pontos (FRANCO, 2006).

Solução:

- Sendo,

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, \; K_0 = 1.5708 \\ x_1 &= 2, \; K_1 = 1.5719 \\ x_2 &= 3, \; K_2 = 1.5739 \end{aligned}$$

- Portanto, $n = 2$. Assim, o polinômio de interpolação na forma de Lagrange é dado por:

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} K_i l_i(x).$$

- Calculando $l_0(x)$

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} \rightarrow l_0(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2}$$

- Calculando $l_1(x)$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} \rightarrow l_1(x) = -x^2 + 4x - 3$$

- Calculando $l_2(x)$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} \rightarrow l_2(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{2}$$

- Logo,

$$P_2(x) = l_0 y_0(x) + l_1 y_1(x) + l_2 y_2(x)$$

- Substituindo os valores $l_k y_k(x)$, $k = 0,1,2.$ Temos:

$$P_2(x) = \left[\frac{x^2 - 5x + 6}{2}\right]1.5708 + \left[-x^2 + 4x - 3\right]1.5719 + \left[\frac{x^2 - 3x + 2}{2}\right]1.5739$$

- Após algumas manipulações algébricas, temos o polinômio interpolador para os valores dessa integral.

$$P_2(x) = 0.00045x^2 - 0.00025x + 1.5706$$

- Determinar $k(2.5)$ para o polinômio indicado

$$P_2(2.5) = 0.00045(2.5)^2 - 0.00025(2.5) + 1.5706$$

$$P_2(2.5) = 0.0028 - 0.0006 + 1.5706$$

- Portanto, temos:

$$K(2.5) = 1.5728$$

Exercício 4 - A criação de peixes (aquicultura) em tanques redes ou gaiolas é uma cultura que vem crescendo no interior do país. Entre as espécies cultivadas nesses criatórios, a Tilápia vem se destacando devidas condições favoráveis, tais como: manejo, menor investimento inicial, entre outros. A tabela a seguir indica o peso versus idade (tempo em semanas) da Tilápia Tailandesa.

Nº semanas	1	5	15	30
Peso (gramas)	1,8	23	289	1020

Fonte: Adaptada de SEBRAE – Manual do Piscicultor: Produção de Tilápia em Tanque rede. Dez. 2008.

Analisando a tabela acima, encontre o Polinômio Interpolador de Lagrange.

Solução:

- Com base nos dados da tabela, temos, $n = 3$. Assim, o polinômio de interpolação na forma de Lagrange é dado por:

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} f_k l_k(x).$$

- Calculando $l_0(x)$

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}=\frac{(x-5)(x-15)(x-30)}{(1-5)(1-15)(1-30)}\rightarrow l_0(x)=\frac{-x^3+50x^2-675x+2250}{1624}$$

- Calculando $l_1(x)$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{(x-1)(x-15)(x-30)}{(5-1)(5-15)(5-30)}\rightarrow l_0(x)=\frac{x^3-46x^2+495x-450}{1000}$$

- Calculando $l_2(x)$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=\frac{(x-1)(x-5)(x-30)}{(15-1)(15-5)(15-30)}\rightarrow l_0(x)=\frac{-x^3+36x^2-185x+150}{2100}$$

- Calculando $l_3(x)$

$$l_3(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=\frac{(x-1)(x-5)(x-15)}{(30-1)(30-5)(30-15)}\rightarrow l_0(x)=\frac{x^3-21x^2+95x-75}{10875}$$

- Após algumas manipulações algébricas, temos $P_3(x)$, o Polinômio Interpolador de Lagrange para situação problema descrita.

$$P_3(x)=-0.02x^3+1.98x^2-5.91x+5.75$$

5. Considerações Finais

Através das pesquisas realizadas a fim de compor o presente trabalho, foi possível entender que abordar a modelagem matemática por meio da interpolação polinomial, permite uma aproximação entre teoria e prática, o que é fundamental para que o conteúdo matemático se torne mais familiar aos alunos, facilitando a aprendizagem. Isso porque as funções matemáticas e a interpolação podem ser comumente vistas em diversas situações cotidianas da vida.

A disciplina de matemática, de maneira geral, pode apresentar uma maior contribuição com a educação global do indivíduo do que costumeiramente se atribui a ela. Isto porque é senso comum pensar que, em primeira instância, o ensino desta disciplina para crianças e adolescentes em idade escolar pode ser algo complicado e trabalhoso, porém, é preciso pensar que a aplicação da disciplina desde os primeiros anos escolares é essencial para a concepção de conceitos matemáticos, sem questionar ainda demais elementos cujos podem receber contribuição das regras da matéria. Para todos os conteúdos que formam parte de uma disciplina que, segundo a noção da população como um todo, são de difícil absorção ou alta complexidade, é preciso relacionar tais teorias às questões cotidianas do indivíduo, demonstrando que existe uma aplicação real e prática para aquela teoria que está sendo aprendida, o que pode facilitar no estímulo para a aprendizagem. Com o teorema de Pitágoras não é diferente, é preciso aplicar atividades em que os alunos consigam identificar a aplicação do mesmo em situações práticas de seu cotidiano.

É possível compreender que a grande dificuldade quanto às disciplinas exatas, paira sobre o desafio que identificar a relevância destas matérias na vida fora da escola. Por este motivo, entende-se que empreender nas aulas da disciplina em questão atividades de estímulo ao desenvolvimento da autoestima e capacidade de enfrentamento de situações não-familiares ou na concepção de raciocínio lógico é extremamente importante para estimular o aluno ao aprendizado dos conteúdos. De forma que apresentar tema como a interpolação polinomial de maneira detalhada, demonstrando suas aplicações e cálculos, é fundamental para que o aluno absorva de forma significativa esse conteúdo. Oferecer suporte teórico também é importante para as modelagens realizadas e para outras aplicações matemáticas, levando a um rigor matemático maior. Nota-se que a modelagem de funções com o uso de situações reais e cotidianas, por meio da interpolação polinomial pelo método de Lagrange, permite a consolidação da premissa de que é possível aproximar os conteúdos matemáticos da realidade, bem como entende-la como um instrumento fundamental das análises temporais de casos reais, especialmente utilizando-a como recurso para despertar políticas e ações que beneficiem a sociedade.

Dessa forma, para além de encontrar informações pertinentes ao tema no sentido matemático, foi possível notar que a preponderância do assunto não limitou-se somente a isso, mas sim, desencadeia uma proposta de ruptura de barreiras entre teoria e prática, ensino superior e básico, ciência e sociedade, e, sobretudo, entre a matemática e o aluno. A partir dessa perspectiva bibliográfica, é possível compreender que os objetivos propostos a esse trabalho foram cumpridos, ainda que tenham sido encontradas algumas limitações relacionadas à disponibilidade bibliográfica para a abordagem do assunto. Isso significa que os achados nessa pesquisa são apenas o passo inicial que deve abrir espaço e novas oportunidades de explorar e aprofundar os estudos sobre essa temática e outras relacionadas.

Referências

ANDRADE, J. L. G. Modelos Numéricos de Interpolação e Ajustes de Curvas como Método de Cálculo, Aproximação e Caracterização de Tendência de Dados Experimentais. Belo Horizonte: PUCMG, 2014. (Dissertação de Mestrado)

ARAUJO, G. F. Modelagem Matemática como Enfoque para o Ensino. Cuiabá: UFMT, 2017. (Dissertação de Mestrado)

BATISTA, J. Revisões de trigonometria. 2000. Disponível em: <http://coral.ufsm.br/gpscom/professores/andrei/Teoria/trigonometria.pdf>. Acesso em: ago. 2017.

CAMPOS, C. R. O ensino da Matemática e da Física Numa Perspectiva Integracionista. São Paulo: PUC-SP, 2000. (Dissertação de Mestrado)

CARNEIRO, V. C. Funções Elementares. Porto Alegre: Ed. UFRGS, 1993.

CHAMMAS, M.A; CARRIÇO, J.M.M; NAKANISHI, L.I.T. SEBRAE - Manual do piscicultor: Produção de Tilápia em Tanque – rede. Dez. 2008. Disponível em: <https://pt.scribd.com/document/190588741/manual-do-piscicultor-Producao-de-tilapia-em-tanque-rede-SEBRAE>. Acesso em: dez. 2017.

COELHO, G. J. Inequação Polinomial: Um Método Alternativo de Resolução. Campos dos Goytacazes/RJ: UENF - Darcy Ribeiro, 2016. (Dissertação de Mestrado)

DANTAS, V. As aplicações das funções de primeiro e segundo grau na cinemática. Mossoró: UFERSA, 2013. (Dissertação de mestrado).

DIAS, M.; JUSTINO, J. Conceitos básicos. Nov. 2010. Disponível em: <http://ltodi.est.ips.pt/mat2/documentos/MAT_BASICA/Conceitos_Basicos_Nov2010.pdf>. Acesso em: set. 2017.

FRANCO, P. A. A.; SILVA, K. B. R. Função a partir de uma perspectiva histórica. Rev. Espacios, vol. 38, nº 15, 2017.

FRANCO, N. B. Cálculo numérico. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

GONÇALVES, A. C. Aspectos da história do conceito de funções e suas representações por diagramas, linguagem algébrica e gráficos cartesianos. São Carlos: ICMC/USP, 2015. (Dissertação de mestrado).

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. Fundamentos da Matemática Elementar. 8ª ed. Guarulhos: Atual, 2004.

KLEINER, I. Evolution of the function concept: A brief survey. The College Mathematics Journal, v. 20, n. 4, sept.1989.

LIMA, E, J. O Ensino de Funções através de Modelagem Matemática. Barra do Garças: UFMT, 2017. (Dissertação de mestrado).

MACIEL, P. R. C. A construção do conceito de função através da história da matemática. Rio de Janeiro: CEFET-RJ, 2011. (Dissertação de mestrado).

MAGARINUS, R. Uma proposta para o ensino de funções através da utilização de objetos de aprendizagem. Santa Maria: UFSM, 2016. (Dissertação de mestrado).

NASCIMENTO, D. A. Métodos para encontrar raízes exatas e aproximadas de funções polinomiais até o 4º grau. João Pessoa: UFPB, 2015.

NEPOMUCENO, E. G. Métodos numéricos: interpolação, extrapolação, aproximação e ajuste de funções. Minas Gerais: UFSJ; CEFET-MG, 2016. Disponível em: <https://ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/nepomuceno/mn/12MN_Interpola.pdf>. Acesso em: set. 2017.

ROQUE, T. História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1.ed. Zahar, 2012.

SOUZA, V. M.; MARIANI, V. C. Um breve relato do desenvolvimento do conceito de função. In: V Congresso Nacional de Educação – EDUCERE. Curitiba, PUC-PR, out. 2005.