Universidade Federal de Goiás
Regional de Jataí
Unidade Acadêmica Especial de
Ciências Exatas e Tecnológicas
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Resolução de Equações via Métodos Numéricos: Bissecção e Falsa Posição.

Adão Gomes de Souza

Jataí

2017

sistema de bibliotecas ufg

PRPG

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRONICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: [X] Dissertação [ ] Tese

2.Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Adão Gomes de Souza

Título do trabalho: Resolução de Equações via Métodos Numéricos: Bissecção, Falsa Posição

3. Informações de Acesso ao documento:

Concordo com a liberação total do documento: [x] Sim [ ] Não[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou Dissertação.

Adão Gomes de Souza

Assinatura do(a) autor(a)

Ciente e de acordo:

assinatura do(a) orientador(a)

Data: 06 / 12 / 17

1 Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa . A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dado do documento não será disponibilizados durante o período de embargo.
Caso de embargo:
- Solicitação de registro de patente
- Submissão de artigo em revista científica
- Publicação como artigo de livro
- Publicação da dissertação/tese em livro

Adão Gomes de Souza

Resolução de Equações via Métodos Numéricos: Bissecção e Falsa Posição.

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Exatas/Coordenação de Matemática da Universidade Federal de Goiás – Regional Jataí, como parte dos requisitos para obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

Área de concentração: Matemática do Ensino Médio

Orientador: Profº Dr. Fernando Ricardo Moreira

Jataí – Go

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Souza, Adão Gomes de
Resolução de Equações via Métodos Numéricos: Bissecção e Falsa Posição [manuscrito] / Adão Gomes de Souza. - 2017.
iii, 58 f.

Orientador: Prof. Dr. Dr Fernando Ricardo Moreira.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Jataí, 2017.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras, lista de tabelas.

1. Matemática. 2. Álgebra. 3. Equações polinomiais. 4. Resolução de equações. I. Moreira, Dr Fernando Ricardo, orient. II. Título.

CDU 51

Universidade Federal de Goiás-UFG REGIONAL JATAÍ
Mestrado profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT/UFG
Regional Jataí – Caixa Postal 03 – CEP: 75,804-020 – Jataí-GO.
Fones: (64) 3606-8213 **www.jatai.ufg.br/matematica**

UFG

PROFMAT

Ata da reunião da Banca Examinadora da Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Adão Gomes de Souza – Aos vinte e três dias do mês de novembro do ano de dois mil e dezessete (23/11/2017), às 14:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora, Prof. Dr. Fernando Ricardo Moreira - Orientador, Profa. Dra. Ana Paula Freitas Vilela Boaventura e Prof. Dr. Gecirlei Franscisco da Silva, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no Auditório da Pós Graduação da Universidade Federal de Goiás - Regional Jataí, procederem a avaliação da defesa intitulada: **"Resolução de Equações Via Métodos Numéricos: Bissecção e Falsa Posição"**, em nível de Mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás, polo Jataí. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca, Prof. Dr. Fernando Ricardo Moreira, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor da Dissertação que, em 40 minutos, procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo em vista o que consta na Resolução nº. 1403/2016 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG e procedidas as correções recomendadas, o trabalho de conclusão foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na Secretaria da Coordenação de Matemática da Regional Jataí da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 16:00 horas a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu, José Alfredo Cespi de Oliveira, Secretário da Coordenação Geral de Pós-Graduação da Regional Jataí - UFG, lavrei a presente ata que, depois de lida e aprovada, é assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

FRMoreira

Prof. Dr. Fernando Ricardo Moreira - CPF 991.219.991-04
Profmat (Pólo Jataí)-UFG
Presidente da Banca

Ana Paula Freitas Vilela Boaventura

Profa. Dra. Ana Paula Freitas Vilela Boaventura - CPF 707.811.171-00
UAE – Ciências Exatas Regional Jataí-UFG
Membro externo

Gecirlei Fra— da Sil

Prof. Dr. Gecirlei Franscisco da Silva - CPF 625.970.861-00
Profmat (Pólo Jataí)-UFG
Membro interno

Adão Gomes de Souza graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (UFG) – 2003. Graduou-se me Biologia pela Universidade Estadual de Goiás (UEG) – 2004. Especializou-se em Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás (UFG) - 2007 e em Docência do Ensino Superior pela Faculdade Padrão, Goiânia-Goiás – 2011. Mestrando de Matemática – Universidade Federal de Goiás – Regional Jataí – Profmat, 2017. Atualmente é professor efetivo do Ensino Fundamental e Médio no Colégio Estadual Castelo Branco em Trindade – Goiás.

Dedico esta dissertação aos meus pais (*in memorian*), por nunca duvidarem do meu potencial.

Dedico a minha esposa Mariza Rosa de Souza, pelo apoio incondicional, por nunca duvidar que eu seria capaz de chegar onde cheguei.

Dedico também aos meus filhos: Guilherme Rogers, Gusthavo Auréllio, Geovanna e João Netto, pois por eles nunca desisti e cheguei até aqui.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao Meu Deus pela oportunidade de ter trilhado este mestrado e mesmo diante dos contratempos que apareceram no caminho, agradeço por ter me dado forças e compreensão para vencer cada etapa e ter concedido que eu chegasse ao final dessa caminhada como vencedor.

Agradeço a pessoa mais importante na minha vida, minha esposa, por todo suporte que sempre me deu nessa trajetória, seja qual fosse minha decisão; pela confiança que sempre pude encontrar nela e pela serenidade que me passa em saber que sempre posso contar com seu auxílio. Agradeço por ter estado junto a mim nesta caminhada e por toda ajuda e compreensão que despendeu em meu favor. Posso dizer que olhando para o tamanho de seu amor por mim, consigo imaginar a grandeza do amor de Deus. Amor, esta vitória também é sua!

Aos meus filhos por todo compreensão, amor e carinho. Por muitas vezes terem aberto mão de passeios, festas, comemorações.

A meu sobrinho Hélio de Souza e minha comadre Tânia Ferreira pela ajuda e pelo tempo dispensado em me levar e buscar na rodoviária durante todo esse tempo, sem se importarem com o horário e seus afazeres;

Agradeço a minha sogra Izabel, meu sogro João e as minhas cunhadas Sandra e Edinamar por toda fé, compreensão, apoio e torcida desde o início até a conclusão deste curso.

Aos meus colegas da turma 2015 do PROFMAT de Jataí agradeço por terem me mostrado a importância da união. Neste mestrado tive a oportunidade de conhecer pessoas incríveis, nobres e que foram muito importantes no decorrer desta caminhada. Em especial, agradeço aos colegas Flávio, Kepler, Wellington e Lucinda por sua nobreza de espírito em praticar a caridade e por compartilharem seus conhecimentos,

Ao profº Dr. Fernando Ricardo Moreira, meu orientador, agradeço por ter aceitado a tarefa de me orientar no desenvolvimento deste trabalho e por toda paciência, confiança, incentivos, amizade e excelente orientação.

E a todos que direta ou indiretamente, fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

Por fim, agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior) pelo suporte financeiro.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo central debater de maneira conceitual sobre o processo e evolução histórica da resolução das equações algébricas. A justificativa para a escolha do tema paira sobre sua contemporaneidade, além da expectativa de contribuir para o âmbito acadêmico. O método de pesquisa empreendido segue natureza qualitativa, com abordagem de pesquisa básica, de natureza exploratória e coleta de informações por meio de pesquisa bibliográfica. Dentre os principais achados, foi possível concluir que as equações algébricas surgem em meio a civilizações humanas antigas, na tentativa do homem de mensurar quantidades e resolver problemas cotidianos da vida. Portanto, nota-se que, diferente do estigma que paira sobre o conteúdo da matemática, a ciência que envolve não é distante da realidade e da experiência humana, mas sim, uma parte dela que busca respostas aos problemas comuns da vida. O que faz da matemática como um todo e das equações algébricas, problemáticas comuns da vida e que precisam ser aprendidos e solucionados.

Palavras-chave: Matemática. Álgebra. Equações polinomiais. Resolução de equações.

ABSTRACT

The main objective of this work is to discuss in a conceptual way the historical process and evolution of the resolution of algebraic equations. The justification for choosing the theme hovers about its contemporaneity, besides the expectation of contributing to the academic scope. The research method followed is qualitative, with a basic research approach, exploratory nature and information collection through bibliographic research. Among the main findings, it was possible to conclude that algebraic equations arise in the midst of ancient human civilizations, in the man's attempt to measure quantities and solve everyday problems of life. Therefore, it is noted that, unlike the stigma that hangs over the content of mathematics, the science it involves is not far from reality and human experience, but rather a part of it that seeks answers to the common problems of life. What makes math as a whole and the algebraic equations common problems of life that need to be learned and solved.

Keywords: Mathematics. Algebra. Polynomial equations. Solving Equations.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Resolver equações habitualmente foi uma atividade que ocasionou o desenvolvimento da álgebra, desde os seus primórdios, contribuindo para seus avanços. Isso porque desde as civilizações humanas mais antigas, o homem encontrou em suas atividades cotidianas, a necessidade de dar forma aos pensamentos e, no que se relaciona ao pensamento matemático, as ideias iniciais, evidenciavam a representação de quantidades por meio de símbolos.

Esses sistemas passaram então por evoluções, gerando os modelos de numeração e, mais tarde, os de escrita de sentenças matemáticas de forma mais complexa e sofisticada. As equações, nesse meio tempo, surgem como um desdobramento natural da forma matemática de pensamento, com base na ideia elementar de igualdade. Enquanto que, solucionar uma equação reflete em descobrir um valor que pode tornar iguais duas expressões que, inicialmente, são diferentes.

As primeiras equações que foram elaboradas e resolvidas, naturalmente se apresentavam de forma muito simples, mas ainda assim implicavam uma ideia de incógnita, com quantidade inicialmente desconhecida que equilibraria o tamanho de dois conjuntos. O avanço da matemática ao longo do tempo fez com que as equações evoluíssem em complexidade e na forma de representação.

Na contemporaneidade são envolvidas em basicamente todos os processos da sociedade moderna, em uma ampla gama de categorias com incógnitas que podem envolver não somente números, mas funções. Equações que podem ser complexas o bastante para envolver quase todos os problemas possíveis de traduzir para a linguagem matemática.

1.1 Objetivos

Apresentamos, nesta seção, os objetivos desta dissertação. Os mesmos foram divididos em Geral e Específicos.

1.1.1 Objetivo geral

O objetivo geral do presente trabalho é:

- Estudar e discutir sobre alguns métodos numéricos para resolução de equações algébricas.

1.1.2 Objetivos específicos

A fim de traçar um caminho coerente para o desenvolvimento do tema, enumeram-se como objetivos específicos:

- Conceituar os aspectos históricos e teóricos da resolução de equações algébricas;
- Abordar sobre os métodos numéricos para a resolução das equações;
- Debater sobre as aplicações por meio da exemplificação dos métodos para resolver as equações.

1.2 Problema de pesquisa

Sendo assim, a problemática de pesquisa a ser solucionada à finalização deste, paira sobre a questão: qual é o histórico e evolução do processo de resolução das equações algébricas e suas possíveis aplicações?

1.3 Justificativa e estrutura

O presente estudo justifica-se, pois pretende contribuir para o âmbito acadêmico oferecendo através da pesquisa em tela uma visão diferenciada acerca do tema, ampliando o material teórico, que poderá ser utilizado a fim de desenvolver estudos e pesquisas posteriores, estimular o aprofundamento sobre o tema, assuntos relacionados e demais vertentes científicas que possam originar-se a partir do interesse por este.

Além da relevância acadêmica, a pesquisa em questão também intenciona servir como fonte de informações para o âmbito social, podendo oferecer dados relevantes para que os públicos de interesse envolvidos na área colham dados para notar a importância da abordagem e aplicabilidade do tema em estudo.

Para além, o trabalho também tem a finalidade de fomentar conhecimento no pesquisador, além de seu leitor, que durante o desenvolvimento da pesquisa terá condições de desenvolver um pensamento reflexivo-crítico a fim de formar uma trajetória analítica do tema, culminando assim em sua conclusão apresentada como resultado preliminar deste estudo, podendo resultar em aprofundamentos, demais vertentes e debates acerca do assunto.

O trabalho está dividido em cinco capítulos, o segundo deles aborda os fundamentos históricos e teóricos da resolução das equações algébricas, tratando sobre os aspectos históricos e também falando sobre as equações polinomiais e suas resoluções, considerando então as equações de primeiro e segundo grau, bem como as funções polinomiais de grau maior ou igual a três e ainda as equações não-polinomiais.

No terceiro capítulo são apresentados alguns métodos numéricos para a resolução das equações, com subitens classificados para apresentar as definições, convergência e critério de parada, o conceito de bissecção e o método da falsa posição. O quarto capítulo, tratará de apresentar a aplicação de alguns modelos de equações com os métodos apresentados no capítulo anterior.

E por fim, o quinto e último capítulo, apresentará as considerações finais referentes ao presente trabalho.

2. FUNDAMENTOS HISTÓRICOS E TEÓRICOS DA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Neste capítulo apresentamos aspectos históricos sobre a resolução de equações algébricas, enfatizando que todo o conhecimento matemático que existe hoje sobre o tema abordado, tem em suas origens, a busca, pelo ser humano, de respostas a problemas oriundos de suas práticas sociais. Serão abordados também os aspectos teóricos relacionados ao desenvolvimento, bem como a descoberta de fórmulas para a resolução de equações algébricas, que serão abordados nas próximas seções.

2.1 Aspectos históricos

Lages (2007) explica que no sentido histórico, resolver uma equação sempre foi uma problemática de importância relevante aos matemáticos. A autora acredita que, apesar das limitações existentes sobre a questão da álgebra nos currículos de formação educacional, a resolução de equações – sobretudo polinomiais – envolve um interesse histórico em relação à percepção dos problemas envolvidos na disciplina em questão.

Schuvaab (2013) complementa esta percepção dizendo que a busca por soluções de equações algébricas foi um problema de grande interesse por parte de matemáticos. O autor aponta que os registros antigos, os papiros, demonstram que as equações algébricas datam de aproximadamente quatro mil anos. Sendo que a sociedade egípcia fazia uso de diversas formas de resolver essas equações. Contudo, aponta que o alcance do método de resolução da equação de primeiro grau foi o marco que desencadeou todos os demais.

Esse, conforme o autor, se deu com base nos axiomas[1] enunciados na obra “Os Elementos de Euclides”, que influenciou e influencia ainda na contemporaneidade, grande parte da produção científica após sua publicação. Esta obra é considerada o mais antigo livro-texto e se perpetua em uso até o presente. Assim, a fórmula que é reconhecida na atualidade como fórmula de Bhaskara, não foi, na realidade, descoberta por Bhaskara, mas sim, publicada por um matemático hindu, Sridhara, um século antes da publicação de Bhaskara, porém, essa obra inicial nunca chegou ao conhecimento do público (Schuvaab, 2013).

Em relação às origens mais primitivas das formas de resolução das equações algébricas, Schuvaab (2013) aponta que é necessário traçar esse histórico de forma simultânea à própria história da matemática. Sobre isso, o autor explica que a matemática se fez presente como uma parte da vida cotidiana do homem, em sociedades primárias da humanidade em que valia a lei de sobrevivência do mais apto a lidar com o mundo, o mais forte a enfrentar suas adversidades e resolver os problemas que se apresentavam.

Lages (2007) oferece uma perspectiva ligeiramente distinta, apontando que o conceito de número sempre fora relacionado à matemática, podendo ser essa, uma criação conjunta com a criação dos primeiros símbolos cuja finalidade era de representar números, porém, ressaltando que a resolução das equações foi um componente da matemática de todas as épocas, reconhecidas em todos os registros históricos existentes.

A autora explica que foi na região da Mesopotâmia, local de ocupação de sumérios e babilônios, que os primeiros relatos foram notados. Sendo o império babilônico fundado aproximadamente em 1700 a.C., a civilização egípcia aproximadamente teve início em 3200 a.C., ao passo que seu declínio ocorreu aproximadamente em 1085 a.C., o que faz com que as perspectivas históricas sobre as equações, sejam iniciadas justamente originadas das civilizações babilônicas e egípcias.

Ainda conforme Lages (2007) no princípio, o trabalho foi realizado para solucionar equações e, sobretudo seus aspectos, em formatos muito distintos do que é visto no presente. A posteriori, na civilização grega – iniciada aproximadamente em 900 a.C. – e devido ao desenvolvimento dos trabalhos dessa no campo da geometria, as equações passaram a ser geometricamente interpretadas, obtendo, inclusive, uma resolução geométrica. De forma que a partir de 300 d.C., o império grego deu início ao seu processo de decadência, fazendo surgir no oriente novas formas de desenvolver a matemática, denominadas então de “resolução de equações”.

Antes de adentrar nesse ponto, a autora aborda as descobertas histórias anteriores à sociedade grega, explicando que são reconhecidas vindas do oriente, de forma que os mesopotâmios foram os primeiros a fazer registros, em placas de barro cozidas de tamanho variável, conservando de forma surpreendentemente duradoura, os registros de suas atividades (figura 1). Enquanto que os egípcios faziam uso de papiro, Papiro de Rhind (figura 2), para relatar seus achados e, ainda que não fosse um material de tão boa conservação, alcançaram um nível razoável de achados que perduraram durante séculos, muitos deles, graças à localização em regiões de clima desértico.

Figura 1: *Tablete Mesopotâmico*

Fonte:<https://www.google.com.br/search?rlz=1C1GCEA_enBR755BR755&biw=1366&bih=638&tbm=isch&sa=1&q=tablet+usados+pelos+mesopotamicos&oq=tablet+usados+pelos+mesopotamicos&gs_l=psy-ab.3...> Acesso em 08/09/2017.

Figura 2:*Papiro de Rhind ou Papiro de Ahmes*

Fonte:<https://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/rhind/imagens/papiro2.jpg>

Acesso 08/09/2017

Com relação à civilização egípcia, Andrade (2000) contribui dizendo que uma grande parte dos conhecimentos matemáticos provém dela, sendo que, dos papiros mencionados que foram encontrados com registros e que são conhecidos na contemporaneidade, observa-se uma ordem prática, cujos elementos centrais das questões eram os cálculos.

O autor ressalta ainda que, mesmo quando os egípcios apreciavam em seus processos de resolução de equações, os elementos teóricos, seu objetivo era realmente facilitar a técnica e não o entendimento. Por esta razão, aponta que muitos desses cálculos surgiram da necessidade de resolver problemas cotidianos, oriundos de suas práticas sociais, especialmente relacionados à atividade econômica que, naquele período, estava em desenvolvimento nesta região.

Segundo Andrade (2000) além disso, os problemas apresentados também apareciam como formas de ensino, tal como exercícios, enigmas ou recreações matemáticas. Sendo que, dentre os problemas apresentados nesses papiros é possível encontrar, em sua maioria, o que na contemporaneidade seria classificado como algébricos e reduzidos às equações de primeiro grau.

Conforme o autor, para solucionar esses problemas, os egípcios faziam uso de um método – que no presente se conhece por “método de falsa posição” ou “falsa suposição” – que paira sobre atribuir à incógnita um valor numérico que é reconhecido, inicialmente como falso. A partir daí, substitui-se a incógnita por esse valor e faz-se os respectivos cálculos a fim de chegar à solução do problema.

Para isso, Andrade (2000) explica que bastava multiplicar o valor atribuído de forma inicial à incógnita pelo quociente entre o termo independente da equação – o que traduz o problema – e o valor obtido pela substituição da incógnita pelo valor suposto.

Nessa mesma linha de pensamento, Schuvaab (2013) explica que alguns dos problemas apresentados nos papiros egípcios dedicavam-se a resolver equações lineares com uma incógnita, problemas que eram exercícios numéricos de quantidade desconhecida e, portanto, representavam uma aproximação à álgebra que se conhece na contemporaneidade.

Evidencia-se, por outro lado, que símbolos algébricos não eram utilizados, bem como a quantidade desconhecida era designada por meio verbal, mas, aponta que os egípcios faziam uso de um artifício no mínimo engenhoso para encontrar a resposta, que é reconhecido como o já mencionado método da falsa posição. Conforme o autor, alguns dos problemas que derivam dessa época e sociedade, demonstram que as resoluções não se limitavam somente às equações lineares, mas também às quadráticas, cujo método do complemento do quadrado era utilizado, um raciocínio que foi aplicado três milênios depois, por parte dos hindus.

Lages (2007) também fala dos problemas matemáticos encontrados nos papiros egípcios, ilustra o papiro de Rhind, especialmente nos problemas de número 24, 25, 26 e 27, que continhas as equações mais simples, uma vez que, em todos eles, havia essa necessidade de somar à incógnita uma fração dela mesma que alcançasse determinado número. Porém, embora essas técnicas de resolução tenham sido observadas, a autora comenta que a matemática mesopotâmica pode ter sido mais evoluída do que a do Egito.

Isso porque, segundo a autora, existe um sistema de numeração posicional nela, de base sexagesimal, o que no período dos sumérios, lhes possibilitava multiplicar de forma mais fácil e ainda atribuída mais habilidade de cálculo. Alguns dos problemas dessa época que são conhecidos, demonstram resoluções de equações lineares e também quadráticas.

Andrade (2000) explica que a extração da raiz quadrada, possivelmente foi o mais antigo problema de segundo grau solucionado pelos mesopotâmicos de forma numérica – que era correspondente ao cálculo do número que, elevado ao quadrado dá a, equivalente à solução de uma equação $x^2 = a$ – fazendo uso de uma tabela de quadrados que possibilitava enquadrar a raiz que era buscada, o que oferecia um valor por defeito e outro por excesso. Um dos pedaços das tabelas utilizadas pela sociedade babilônica para essa finalidade, poderia ser representada de forma semelhante à seguinte:

Tabela 1 – *Exemplo de tabela utilizada para resolver equações da sociedade babilônica*

Número	**...**	1;20	1;21	1;22	1;23	1;24	1;25	...
Quadrado	...	1;46,40	1;49,21	1;52,04	1;54,49	1;57,36	2;00,25	...

Fonte: Andrade (2000, p. 13)

Analisando a tabela de quadrados podia-se concluir que $\sqrt{2}$ estava compreendido entre 1;24 e 1;25. Desde que as situações a resolver não exigissem um grau de aproximação muito grande, os Babilônios consideravam que $\sqrt{2}$ era

1;24 ou 1;25. No entanto e sempre que necessário, eram utilizados algoritmos rigorosos de pesquisa para obtenção de valores mais precisos. Por exemplo, conheciam uma aproximação de $\sqrt{2}$ bem mais rigorosa: 1;24, 51,10 (ANDRADE, 2000).

Lages (2007) segue então para falar sobre a sociedade babilônica, apontando que seguiam a mesma ideia inicial, porém, suas equações quadráticas foram classificadas em três tipos, diferentes das outras sociedades, eram eles:

$$x^2 + px = q \ , \ x^2 = px + q \text{ e } x^2 + q = px$$

sendo que existiam em seus registros, exemplos de soluções para todos os tipos.

Andrade (2000) trata justamente sobre essas equações. Para a equação do tipo $x^2 + px = q$, o autor oferece o seguinte exemplo:

Eu adicionei a área e o lado do meu quadrado deu 45. Tu consideras 1, a unidade. Divides o 1 a meio, dá 30. Multiplicas 30 por 30, dá 15. Junta o 15 ao 45, dá 1. É o quadrado de 1. Subtrais 30, que foi o que tu multiplicaste, a 1, obténs 30, é o lado do quadrado (ANDRADE 2000, apud MAHAMMED, 1371)

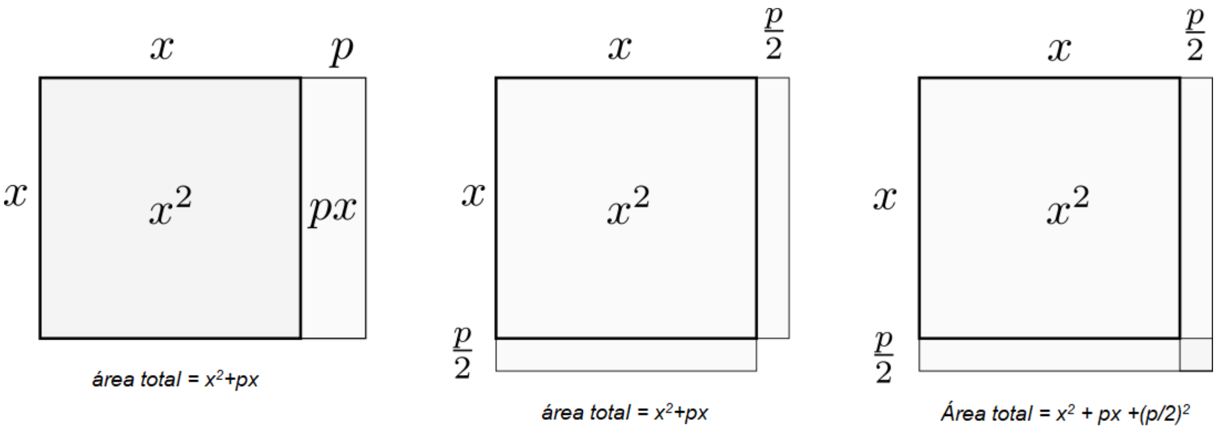
Representando o lado do quadrado por x, o problema reduz-se a resolver a equação $x^2 + x = 45$ que é do tipo $x^2 + px = q$. O algoritmo usado foi o seguinte:

$$x = \sqrt{\left(\frac{1^o}{2}\right)^2 + 45} - \frac{1^0}{2} = \sqrt{(30)^2 + 45} - 30 = \sqrt{15 + 45} - 30 = \sqrt{1^0} - 30 = 1^0 - 30 = 30$$

que corresponde no caso geral a:

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$$

O autor esclarece então que os documentos dessa civilização não oferecem, de maneira geral, registros em relação à forma como eram obtidas as soluções dos problemas que eram propostos. Porém, a opinião expressa é de que os algoritmos resolutivos das equações quadráticas foram alcançados por meio de raciocínios geométricos. Sendo que, nesse caso de equações em especial, pode ter sido baseada na seguinte fórmula com uso da figura:



Como $x^2 + px = q$, vem que a área do quadrado de lado $\left(x+\frac{p}{2}\right)$ é $q+\left(\frac{p}{2}\right)^2$; daí se conclui que $x+\frac{P}{2}=\sqrt{q+\left(\frac{p}{2}\right)^2} \Leftrightarrow x=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}-\frac{p}{2}$

A fim de não alongar por demais os aspectos históricos dessa civilização em particular, as outras equações não serão exemplificadas. Portanto, segue-se com a ideia de Andrade (2000), mas evoluindo para seus achados em relação à civilização grega, apontando que no primeiro milênio a.C., ocorreram intensas mudanças econômicas, culturais e políticas em toda a bacia do Mediterrâneo.

Andrade (2000) ressalta ainda que os gregos aprenderam muito com civilizações anteriores, sobretudo a babilônica, porém, a capacidade dessa civilização, demonstrava que sua habilidade não era limitada a aprender, mas também a ampliar e melhorar conhecimentos. O que desencadeou o objetivo inicial da sociedade grega, entender o local do homem no universo.

Para tanto, a matemática era um elemento que auxiliava a fim de ordenar ideias de maneira racional, ainda que não se conheçam fontes reconhecidas que possibilitem avaliar o cenário do desenvolvimento inicial da matemática grega, o autor ressalta a existência de publicações consideráveis de alguns matemáticos importantes dessa época, como Euclides e Diofanto.

Lages (2007) contribui dizendo que a ideia mais aceita é de que a matemática grega foi iniciada por meio de Tales de Mileto, entre 640 a 546 a.C. Sendo que sua evolução se deu juntamente com a cultura grega como um todo, tomando caminhos diferentes de civilizações anteriores, sobretudo por conta de uma despreocupação com questões bélicas em parcela da sociedade.

Schuvaab (2013) ressalta que, um dos matemáticos mais importantes desse período grego foi Euclides. Ele formulou a ideia de que qualquer triangulo retângulo possui o quadrado do comprimento da hipotenusa igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos, produzindo pela primeira vez, na Europa, uma equação de segundo grau.

O próximo passo histórico desse processo, segundo Lages (2007) são as civilizações do oriente, especialmente árabes e hindus. Sendo que após o período áureo da civilização grega, houve a ocupação romana, que absorveu sua cultura. Esse império se encontrava dividido entre as porções oriental e ocidental, sendo que, como a parcela ocidental fazia grande uso de trabalho escravo, toma-se esse fato como argumento para o atraso do desenvolvimento dessa região.

Portanto, a autora aponta que a parcela oriental teve um desenvolvimento muito mais acelerado em relação à ciência e, especialmente à matemática. De forma que a partir do século V e durante diversos séculos que se seguiram, árabes e hindus se tornam os principais matemáticos. Os principais nomes desse período foram Aryabhata e Brahmagupta, sendo que o segundo, por volta de 1150 teve seu trabalho retomado por Bhaskara na resolução de equações de primeiro e segundo grau, que apresentavam indícios de soluções com discriminante negativo.

Andrade (2000) explica que, embora quase inexistente, a tradição matemática na civilização árabe ocorreu a partir do século VIII, por meio da constituição do amplo império islâmico, que deu início ao interesse por um interesse mais aprofundado aos diversos campos da ciência. Schuvaab (2013) complementa dizendo que os árabes passaram então a inserir o mundo ocidental na ciência, por meio da numeração arábica, o conhecimento do zero e o uso da álgebra.

O passo final dessa evolução histórica, segundo Lages (2007) foi o período europeu da Idade Média, em que a expansão do império romano na Europa fez crescer o interesse pela matemática. A partir do século XII, com a ampliação das civilizações cristãs, cresceu o contato com as culturas árabes, o que possibilitou que conhecimentos matemáticos até então desconhecidos da população europeia, se tornassem reconhecidos.

A autora aponta que a tradução do livro "*Hisabal-jabrwal-mugabla*", de al-Khowarazmi do árabe para o latim, pode ser considerado o marco histórico do início da álgebra na Europa. Isso porque as cidades mais importantes, no sentido do comércio com o oriente, foram o local em que, naturalmente, surgiram os principais matemáticos e, com eles, as principais descobertas matemáticas da época.

Segundo Lages (2007, p. 27): "Génova, Pisa, Milão, Florença e Veneza foram, em Itália, os grandes centros comerciais e onde apareceram, em relativamente pouco tempo, muitos matemáticos a produzir trabalho importante no domínio da resolução de equações". Prossegue dizendo que, nesse cenário, Leonardo de Pisa, popularmente conhecido como Fibonacci, viajou por todo o oriente a fim de exercer sua atividade de mercador.

Lages (2007) apresenta que Fibonacci estudou a equação $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$, calculando uma aproximação da solução real, ainda que não se saiba exatamente qual foi o método que aplicou para encontrá-la. Nesse processo de aproximação, fez o cálculo de seis casas sexagesimais e exprimiu-a em fração sexagesimal por meio do cálculo:

$$1+\frac{22}{60}+\frac{7}{60^2}+\frac{42}{60^3}+\frac{33}{60^4}+\frac{4}{60^5}+\frac{40}{60^6}$$

Schuvaab (2013) complementa dizendo que após Fibonacci, o seguinte principal matemático europeu, foi o italiano, frei franciscano Luca Paciolo, conhecido como Pacioli, que se debruçou aos estudos da aritmética, sendo conhecido como o pai da contabilidade moderna.

Andrade (2000) completa dizendo que, posteriormente, é possível ressaltar as contribuições de René Descartes, francês que passou a contribuir com achados matemáticos em aproximadamente 1619. Porém, somente em 1637 publicou sua obra "Discurso do método", em que editou, pela primeira vez, seu trabalho de geometria analítica.

O autor explica que, futuramente, Descartes apresentou de forma detalhada a resolução geométrica de três tipos de equações de segundo grau completas com os coeficientes e soluções positivas. Destaca ainda que a finalidade elementar de Descartes não era de revolucionar a geometria, mas sim de esclarecer sobre a álgebra por meio da intuição geométrica e seus conceitos, ou, em outros termos, tratar graficamente as equações algébricas.

2.2 Resolução de equações polinomiais

Nessa seção estudaremos os métodos de resolução das equações polinomiais do 1º e 2º graus e também as equações de grau maior ou igual a três, bem como as equações não polinomiais.

2.2.1. Resolução de equações polinomiais de primeiro grau.

As equações do 1º grau surgem naturalmente em problemas que envolvem proporção, linearidades e em situações simples do cotidiano.

Considere a equação $ax+b=0$, com a e $b \in \mathbb{R}$ e com $a \neq 0$. A solução algébrica para resolver esse tipo de equação, baseia-se em dois axiomas:

- **Princípio aditivo da igualdade ou de Euclides:**

  Podemos somar um número real a ambos os membros de uma igualdade que ela não se altera.

  Em símbolos: dados a, b e c números reais, tem-se:

$$a=b \Rightarrow a+c=b+c$$

- **Princípio multiplicativo da igualdade:**

  Podemos multiplicar ambos os membros de uma igualdade por um número real não nulo que ela não se altera.

  Simbolicamente, dados *a*, *b* e *c* números reais, com *c*≠ o, tem-se:

$$a=b \Rightarrow a.c=b.c$$

Pata resolver a equação, soma-se o oposto de *b* aos dois lados da igualdade e obtem-se

$$ax+b+(-b)=0+(-b) \Leftrightarrow ax=-b$$

Posteriormente, multiplicamos pelo inverso de *a*, chamado de a^{-1}, chega-se a

$$a^{-1}.ax=-b.a^{-1} \Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}$$

Portanto, a raiz da equação, $ax+b=0$, com $a\neq 0$ é $x=-\frac{b}{a}$.

2.2.2. Resolução de equações polinomiais de segundo grau.

Considere a equação $ax^2+bx+c=0$, com coeficientes a, b e c, com $a\neq 0$:

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow$$
$$ax^2+bx=-c \Leftrightarrow$$
$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

Completando o primeiro membro da equação a fim de transformá-lo num trinômio quadrado perfeito. Para isso, adicionamos $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ a ambos os membros dessa equação, obtendo:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2} \Leftrightarrow$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

No último item da equação acima, chamaremos b^2-4ac de Δ e resolvendo-o, obtemos as seguintes equações do 1º grau:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow \sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{\Delta}{(2a)^2}} \Leftrightarrow$$
$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Fazendo a separação dos sinais na expressão acima temos:

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow$$
$$x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow$$
$$x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\Leftrightarrow$$
$$x=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\Leftrightarrow$$
$$x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

De $x=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, concluímos que as raízes da equação $ax^2+bx+c=0$, com $a\neq 0$ são dadas por:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Essa é fórmula resolutiva de uma equação do segundo grau, também conhecida como Fórmula de Bháskara.

Se os coeficientes *a*, *b* e *c* são reais, deduz-se da fórmula resolutiva, que:

I. A equação terá duas raízes reais e distintas se, e somente se, $\Delta > 0$.

II. A equação terá duas raízes reais e iguais se, e somente se, $\Delta = 0$.

III. A equação terá raízes complexas distintas conjugadas se, e somente se $\Delta < 0$.

2.2.3. Resolução de equações polinomiais de terceiro grau.

Segundo Schuvaab (2013) a história da ciência não é ausente de choques entre talentos em buscas e conflitos de vaidades e egos, assim, considerando que a equação do segundo grau deixou de caracterizar um problema a ser solucionado, os matemáticos do século XVI deram início às pesquisas para resolver equações de grau maior ou igual a 3.

A principal novidade nesse período, consistiu na teoria sobre a resolução de equações de terceiro grau por meio de equações cúbicas. Scipione Del Ferro não tinha como costume deixar trabalho escritos, logo, fazia apenas relatos de suas descobertas a poucas pessoas, como amigos e alunos. Foi em 1515 que Ferro, na qualidade de professor de matemática na Universidade de Bolonha, resolveu a equação cúbica: $x^3+mx=n$, com base em fontes árabes.

Partindo do que já foi explicado, sobre o desafio que Ferrari impôs a Cardano, Schuvaab (2013) explica que no método Cardano-Tartaglia, a resolução das equações de terceiro grau é empregada às equações de terceiro grau que podem ser escritas na forma: $x^3 + px + q = 0$. Logo, qualquer equação do terceiro grau pode ser reduzida, via mudança de variáveis, a uma equação na forma: $x^3 + px + q = 0$.

Isso, segundo o autor, ocorre quando se considera a equação: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, cujos coeficientes são reais e $a \neq 0$. Para realizar uma mudança de variável a fim de que, nessa nova variável se obtenha uma equação sem termo do segundo grau, é necessário fazer com que $x = y + m$ resulte em:

$$a(y+m)^3 + b(y+m)^2 + c(y+m) + d = 0$$
$$a(y^3 + 3y^2m + 3ym^2 + m^3) + b(y^2 + 2ym + m^2) + cy + cm + d = 0$$
$$ay^3 + 3ay^2m + 3aym^2 + am^3 + by^2 + 2bym + bm^2 + cy + cm + d = 0$$

ou:

$$ay^3 + y^2(b + 3am) + y(3am^2 + 2bm + c) + (am^3 + bm^2 + cm + d) = 0$$

Schuvaab (2013) explica que calcula-se então m a fim de anular o termo de segundo grau, ou seja, $b + 3am = 0$ ou, equivalentemente, $m = -\frac{b}{3a}$. Toda essa equação deve ser então dividida por $a \neq 0$, seguindo o seguinte caminho:

$$\frac{a}{a}y^3 + y^2\left(\frac{b+3am}{a}\right) + y\left(\frac{3am^2 + 2bm + c}{a}\right) + \left(\frac{am^3 + bm^2 + cm + d}{a}\right) = 0$$

Obtemos:

$$y^3 + y^2\left(\frac{b+3am}{a}\right) + y\left(\frac{3am^2 + 2bm + c}{a}\right) + \left(\frac{am^3 + bm^2 + cm + d}{a}\right) = 0$$

Substituindo *m* pelo valor encontrado temos:

$$y^3 + y^2\left(\frac{b + 3a\left(-\frac{b}{3a}\right)}{a}\right) + y\left(\frac{3a\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + 2b\left(-\frac{b}{3a}\right) + c}{a}\right) + \left(\frac{a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(-\frac{b}{3a}\right) + d}{a}\right) = 0$$

Ou seja,

$$y^3+\frac{1}{a}\left(3a\left[-\frac{b}{3a}\right]^2+2a\left[-\frac{b}{3a}\right]+c\right)y+\frac{1}{a}\left(\left[-\frac{b}{3a}\right]^3+b\left[-\frac{b}{3a}\right]^2+c\left[-\frac{b}{3a}\right]+d\right)=0$$

Sendo assim, discorre que qualquer equação $ax^3+bx^2+cx+d=0$ pode ser escrita na forma $y^3+px+q=0$ sendo que:

$$p=\frac{1}{a}\left(3a\left[-\frac{b}{3a}\right]^2+2a\left[-\frac{b}{3a}\right]+c\right)$$

e

$$q=\frac{1}{a}\left(a\left[-\frac{b}{3a}\right]^3+b\left[-\frac{b}{3a}\right]^2+c\left[-\frac{b}{3a}\right]+d\right)$$

Pontes (2013) coloca que a civilização babilônica construíra um método de resolução de equações de terceiro grau com base em tabelas e quadrados, cubos e raízes cúbicas de números naturais. Mostra então a forma de solução dos babilônios que idealizaram, entre 1800 e 1600 a.C. as primeiras tentativas de solucionar esse tipo de equação.

O autor explica que esse povo fazia tabelas de cubos e raízes cúbicas para auxiliar na tabela de n^3+n^2, sendo que o n é inteiro entre 1 e 30. Ao passo que a solução dessas equações tinha termos com x^3, x^2 e termo independente, o que fazia com que empregassem o método de substituição. Em equações como $ax^3+bx^2=c$ poderiam ser convertidas em equações utilizadas por esse povo, caso fossem multiplicadas por $\frac{a^2}{b^3}$, alcançando a equação:

$$\left(\frac{ax}{b}\right)^3+\left(\frac{ax}{b}\right)^2=\frac{a^2c}{b^3}$$

Nessa, segundo Pontes (2013), se o x fosse um número natural entre 1 e 30, encontrava-se a solução. Lages (2007) explica que para solucionar a equação $py+q=0$, pode-se considerar a forma canônica dessa solução, primeiramente encarando *y* como soma de dois valores *u* e *v*. Sendo que:

$$\begin{aligned}
&y^3 + px + q = 0 \Leftrightarrow \\
&(u+v)^3 + py + q = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0 \Leftrightarrow \\
&u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0 \Leftrightarrow \\
&u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q = 0
\end{aligned}$$

A autora considera que o objetivo é encontrar todas as soluções da equação, sejam elas reais ou imaginárias, contudo, é necessário determinar primeiro uma solução para descobrir as demais. A autora descobre então que u e v, tal como $u^3 + v^3 + q = 0$ e $3uv + p = 0$, absolutamente para tais valores de u e v é necessário ter:

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q = 0$$

Ora,

$$3uv + p = 0 \Leftrightarrow v = -\frac{p}{3u}$$

e substituindo em

$$u^3 + v^3 + q = 0$$

vem

$$u^3 + \left(-\frac{p}{3u}\right)^3 + q = 0 \Leftrightarrow u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q = 0 \Leftrightarrow 27\left(u^3\right)^2 + 27q\left(u^3\right) - p^3 = 0$$

usando a fórmula vista para resolução de equações do 2º grau,

$$\Leftrightarrow u^3 = \frac{-27q \pm \sqrt{27^2 q^2 + 4.27p^3}}{2.27} \Leftrightarrow u^3 = \frac{-27q}{2.27} \pm \sqrt{\frac{27^2 q^2 + 4.27p^3}{4.27^2}} \Leftrightarrow u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Lages (2007) estabelece que basta obter uma solução $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ para determinar v, podendo substituir u em qualquer equação em que u e v estejam relacionados, por meio do uso da forma: $u^3 + v^3 + q = 0$, alcançando então:

$$-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}+v^3+q=0 \Leftrightarrow v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} \Leftrightarrow v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Sendo possível encontrar uma solução para a equação $y^3+py+q=0$, que será:

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Como forma de elucidar equações superiores a do terceiro grau, toma-se como base os escritos de Lages (2007) sobre as equações de quarto grau, sendo que para solucioná-las, é indispensável fazer uso do método de Ferrari. Para isso, deve-se supor que há uma equação $x^4+bx^3+cx+d+e=0$, de forma que os coeficientes reais de x^4 é 1, o que pode-se fazer sem perder a generalidade, uma vez que α_4, o que alcançará:

$$\alpha_4x^4+\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0=0 \Leftrightarrow \alpha_4.\left(x^4+\frac{\alpha_3}{\alpha_4}x^3+\frac{\alpha_2}{\alpha_4}x^2+\frac{\alpha_1}{\alpha_4}x+\frac{\alpha_0}{\alpha_4}\right)=0$$

Considerando-se que o objetivo é primeiro escrever uma equação equivalente a $x^4+bx^3+cx+d+e=0$, mas com o aspecto de $(Ax^2+Bx+C)^2=\left(Dx+E\right)^2$, é necessário alcançar:

$$\begin{aligned}
&(Ax^2+Bx+C)^2=\left(Dx+E\right)^2 \Leftrightarrow A^2x^4+2Ax^2.\left(Bx+C\right)+\left(Bx+C\right)^2=D^2x^2+2DxE+E^2 \Leftrightarrow\\
&A^2x^4+2ABx^3+2ACx^2+B^2x^2+2BCx+C^2-D^2x^2-2DEx-E^2=0 \Leftrightarrow\\
&A^2x^4+2ABx^3+\left(2AC+B^2-D^2\right)x^2+2\left(BC-DE\right)x+C^2-E^2=0
\end{aligned}$$

Ficam estabelecidas então, as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} A^2=1\\ 2AB=b\\ 2AC+B^2-D^2=c\\ 2\left(BC-DE\right)=d\\ C^2-E^2=e \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} A=1\\ B=\dfrac{b}{2}\\ 2C+\dfrac{b^2}{4}-D^2=c\\ bC-2DE=d\\ C^2-E^2=e \end{cases}$$

Basta-nos então pensar no sistema, nas incógnitas C, D e E:

$$\begin{cases} 2C - D^2 = c - \dfrac{b^2}{4} \\ bC - 2DE = d \\ C^2 - E^2 = e \end{cases}$$

Esses argumentos podem ser ajustados a outros níveis de equações que se deseja alcançar.

Porém existem algumas equações, também importantes, que não são polinomiais as quais nem sempre é possível encontramos suas raízes exatas, daí faz-se necessário o desenvolvimento de alguma técnica para aproximar as raízes nestes casos. Como exemplo de uma equação não polinomial, temos o movimento ondulatório de um pêndulo, onde sua equação é dada em função do tempo.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{m.g}{L}}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

3. MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

Ribeiro (2012) explica que os métodos numéricos consistem em processos recíprocos que possuem como finalidade principal, determinar raízes de equações a partir de uma aproximação inicial. A partir da qual são feitos aperfeiçoamentos de tal aproximação, diante do uso de metodologias que promovem as interações. O autor comenta que esse método pode ser dividido em duas fases que são: isolamento da raiz – que paira sobre a localização do intervalo que contém a raiz; e, refinamento – que envolve a melhoria da aproximação inicial até que se alcance a precisão que se deseja.

Sanches e Furlan (2007) indicam que o cálculo numérico é realizado para obter a solução de um problema por meio da aplicação de um método numérico, de modo que a solução do problema se evidencia por um conjunto de números – sejam eles exatos ou aproximados. O método numérico, por seu turno, consiste em um algoritmo formado por um número finito de operações que envolvem somente números – como operações aritméticas elementares, cálculo de funções, consulta a tabela de valores, a gráficos, etc.

A modelagem será a etapa de alcance do modelo matemático capaz de descrever o comportamento do sistema físico e, por fim, a resolução é a etapa em que a solução é obtida por meio da aplicação de métodos numéricos, alcançando, assim, o objetivo do cálculo numérico.

Conforme Sanches e Furlan (2007) o método numérico pode ser classificado de duas formas, com a finalidade de encontrar as raízes em uma equação. A primeira forma é o método direto, que se caracteriza quando a solução é oferecida por meio de um único passo, com uma raiz exata a menos de erros de arredondamento.

A segunda forma é o método iterativo ou indireto, que consiste em um processo de cálculo finito, recursivo cujo valor alcançado a cada passo dependerá dos valores obtidos em passos anteriores. Esse tipo de método, na maioria dos casos, não alcança uma solução exata para as raízes, mas uma solução aproximada dentro de uma faixa de erro que é considerada aceitável.

Sanches e Furlan (2007, p. 15) destacam que: “[...] normalmente, os métodos iterativos são mais precisos quando executados em um computador que permite agilizar os cálculos matemáticos, obtendo assim uma melhor precisão”. Como mencionado, os métodos iterativos são divergentes entre as fases de isolamento de raízes e de refinamento. Os autores esclarecem que na fase de isolamento de raízes é feita uma análise teórica e também gráfica da função $f(x)$ que, para ser alcançada, com frequência, faz uso de um popular teorema algébrico:

Teorema 3.1: *Se uma função $f(x)$ contínua assume valores de sinais opostos nos pontos extremos do intervalo $[a,b]$, isto é, se $f(a).f(b)<0$, então o intervalo conterá, no mínimo, uma raiz da equação $f(x)=0$; em outras palavras, haverá, no mínimo, um número $\xi \in (a,b)$ tal que $f(\xi)=0$.*

Os autores definem então que a etapa de refinamento ocorre após o isolamento da raiz no intervalo $[a,b]$, passando então a calculá-la por meio de métodos numéricos que devem fornecer uma sequência $\{x_i\}$ de aproximação, com limite sendo a raiz exata ξ,. E em cada aproximação x_n,da raiz exata ξ, faz-se uso de um dos critérios e compara-se o resultado com a tolerância ε que foi pré-estabelecida.

3.1 Definições, convergência, critério de parada

Castilho (2001) explica que o cálculo numérico toma como axioma o estudo dos esquemas numéricos – algoritmos – para resolver problemas que podem ser representados por um modelo matemático. Um esquema pode ser considerado eficiente quando apresenta soluções no bojo de uma precisão desejado de custo computacional – de tempo de execução + memória – baixo.

Desta forma, os esquemas numéricos oferecem aproximações para viabilizar o alcance da solução exata do problema. Sendo que erros que são cometidos nessa aproximação, transcorrem da discretização do problema, isto é, passar do modelo matemático para o sistema numérico e, da forma como as máquinas representam os dados numéricos.

Conforme Castilho (2001, p. 15) a convergência é intuitiva e uma demonstração analítica que o autor possibilita oferecer sobre ela, se dá por meio do teorema 3.1. Sendo assim, o autor explica que o método gera três sequências, sendo elas:

$\{a_k\}$*:* Sequência não decrescente e limitada superiormente por b_0. Logo

$$a_0 \leq a_1 \leq ... < b_0 \Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} \text{ tal que } \lim_{k\to\infty} a_k = M$$

$\{b_k\}$*:* Sequência não crescente e limitada inferiormente por a_0. Logo

$$b_0 \geq b_1 \geq ... > a_0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{R} \text{ tal que } \lim_{k\to\infty} b_k = m$$

$\{x_k\}$*:* Por construção temos que:

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2} \Rightarrow a_k < x_k < b_k \forall k \in \mathbb{N}$$

Sendo assim, conforme Castilho (2001), a amplitude de cada intervalo gerado consiste em metade da amplitude do intervalo anterior, o que gera: $x_k = \frac{a_k + b_k}{2} \Rightarrow a_k < x_k < b_k \forall k \in \mathbb{N}$. Tem-se que

$$b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2},\ b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^2},\ \ b_3 - a_3 = \frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{b_1 - a_1}{2^2} = \frac{b_0 - a_0}{2^3} ...$$

Em geral, pode ser mostrado por indução matemática que

$$b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

Calculando o limite quando $k \to \infty$ temos:

$$\lim_{k\to\infty} (b_k - a_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{b_0 - a_0}{2^k} = 0$$

Isto segue que

$$\lim_{k\to\infty} b_k - \lim_{k\to\infty} a_k = 0 \Rightarrow M - m = 0 \Rightarrow M = m$$

Usando este fato e calculando o limite temos:

$$m = \lim_{k\to\infty} a_k \leq \lim_{k\to\infty} x_k \leq \lim_{k\to\infty} b_k = m \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_k = m$$

Falta mostrar que m é raiz de f, isto é $f(m) = 0$.Em cada iteração $f(a_k).f(b_k) < 0$ .Como f é contínua, temos então que

$$0 \geq \lim_{k\to\infty} f(a_k).f(b_k) = \lim_{k\to\infty} f(a_k).\lim_{k\to\infty} f(b_k) = f(\lim_{k\to\infty} a_k).f(\lim_{k\to\infty} b_k) = f^2(m) \geq 0$$

Portanto, $f(m) = 0$.

Sobre o critério da parada, Franco (2006) explica que para aplicarmos qualquer método numérico devemos ter sempre a ideia sobre a localização da raíz a ser determinada.

Segundo a autora, a partir da localização da raiz, escolhemos então x_0 como uma aproximação inicial para a raiz $\bar{x}$ de $f(x) = 0$. Com essa aproximação inicial e um método numérico aprimoramos a solução até obtê-la com uma determinada precisão, ou seja, número de casas decimais corretas.

Franco (2006) afirma que para obtermos uma raiz com uma determinada precisão prefixada ε devemos, ao longo do processo iterativo, efetuar o seguinte teste:

Se

$$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \varepsilon \ \ (erro\ relativo) \ ,$$

Se x_k e x_{k+1} são duas aproximações consecutivas para $\bar{x}$, então x_{k+1} é a raiz procurada, isto é, tomamos $\bar{x} = x_{k+1}$.

Segundo a autora, devemos observar alguns detalhes ao utilizar o critério da parada em um determinado método utilizado:

a) Em relação à precisão prefixada, normalmente tomamos $\varepsilon = 10^{-m}$ onde m é o número de casas decimais que queremos no resultado;

b) Apesar de alguns autores considerarem como teste de parada o fato de $|f(x_{k+1})| < \varepsilon$,é preciso tomar cuidado pois a menos que se tenha ideia muito clara do comportamento da função, podemos nos surpreender com a resposta do teste;

c) Alguns autores consideram como teste de parada o fato de $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, chamado de erro absoluto. Entretanto, se estes números forem muito grandes e ε for muito pequeno, não pode ser possível calcular a raiz com uma precisão tão exigente.

3.2 Método da bissecção

Considere o intervalo $[a,b]$ para o qual $f(a).f(b)<0$. No método da bissecção obtemos o valor da função $f(x)$ no ponto médio $x_1=\dfrac{a+b}{2}$. Portanto existem três possibilidades :

1. Se o valor de $f(x)$ em x_1 fosse nulo, isto é, se $f(x_1)=0$. Neste caso não teríamos que fazer mais nada, a raiz foi encontrada;
2. Se $f(a).f(x_1)<0$ *então* f tem uma raiz entre a e x_1. Neste caso o processo pode ser repetido sobre o novo intervalo $[a,x_1]$;
3. Se $f(a).f(x_1)>0$, segue que $f(b).f(x_1)<0$, desde que é conhecido que $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos. Portanto f tem uma raiz entre x_1 e b. Neste caso o processo pode ser repetido com $[x_1,b]$.

A repetição do método é chamado iteração e as aproximações sucessivas são os termos iterados. Logo, podemos escrever o método da bissecção da seguinte maneira:

Para $k=1,2,3,...$, faça:

$$x_k=\frac{a_k+b_k}{2}$$

Se $f(a).f(x_k)\begin{cases}<0, \ então \ a_k=a_{k+1} \ e \ b_{k+1}=x_b \\ >0, \ então \ a_{k+1}=x_k \ \ e \ b_{k+1}=b_k\end{cases}$

Para exemplificar o método em questão, considere que desejamos calcular a raiz positiva da equação:

$$f(x)=(x+1)^2e^{(x^2-2)}=0$$

Podemos observar que não é fácil determinarmos a raiz exata desta equação usando os métodos convencionais. Para isso usaremos o método da bissecção para determinarmos as raízes desta equação.

Observe que para essa equação temos que $f(0)<0$ e que $f(1)>0$. Portanto, a equação terá uma raiz no intervalo $[0,1]$. Podemos verificar que o ponto médio para esse intervalo é $x_1=0,5$, com $f(x_1)=-0,6090086$.

Os primeiros passos do método da bissecção, para esta equação, estão mostrados na tabela abaixo:

Tabela 2: *Exemplo de tabela utilizada no Método da Bissecção*

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
1	0	1	0,5	-0,609009
2	0,5	1	0,75	-0,272592
3	0,75	1	0,875	0,023105
4	0,75	0,875	0,8125	-0,139662
5	0,8125	0,875	0,84375	-0,062448
6	0,84375	0,875	0,859375	-0,020775
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Fonte: Franco (2006, p. 59)

Aplicando o processo da parada, com seis iterações do método obtermos o seguinte valor do erro:

$$\frac{|x_6 - x_5|}{|x_6|} = \frac{|0,859375 - 0,84375|}{|0,859375|} = 0,0181818...$$

Não obtemos uma precisão boa. Continuando o processo e exigindo uma precisão $\varepsilon = 10^{-5}$, obteremos: $x_{16} = 0,866868$ e $x_{17} = 0,866876$ e assim:

$$\frac{|x_{17} - x_{16}|}{|x_{17}|} = \frac{|0,866876 - 0,866868|}{|0,866876|} = 9,2.10^{-6} < \varepsilon = 10^{-5}$$

3.3 Método da falsa posição

Medeiros e Medeiros (2004) explicam que o método da falsa posição, falsa suposição ou, falso pressuposto, é uma forma antiga de resolver problemas que, na contemporaneidade podem ser interpretados como relacionados às equações e sistemas lineares. Esses problemas que são, geralmente resolvidos de forma exclusivamente simbólica, seja por meio da adoção imediata de letras na representação de quantidades desconhecidas, ou então por meio de uma álgebra disfarçada no uso de quadradinhos ou outras figuras que representam incógnitas.

Tal método pode ser visto como uma variação de um outro método numérico, o método da secante. Ele compreende em tomar duas aproximações iniciais x_0 e x_1 tais que $f(x_0)$ e $f(x_1)$ tenham sinais opostos, isto é, $f(x_0).f(x_1) < 0$.

Suponha que $|f(x_1)|<|f(x_0)|$. É coerente esperar que a raiz $\bar{x}$ esteja mais próxima de x_0 do que de x_1, daí o nome de Falsa Posição ou Falsa Suposição. Ao invés de calcular o iterado x_2 como sendo o ponto médio entre x_0 e x_1, iremos calcular o iterado x_2 como sendo uma média ponderada com pesos $|f(x_0)|$ e $|f(x_1)|$, da seguinte forma:

$$x_2 = \frac{x_0\,|f(x_1)| - x_1\,|f(x_0)|}{|f(x_1)| - |f(x_0)|}$$

Extraindo os módulos, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

Assim, o interado x_2 estará mais próximo de x_1 *do que de* x_0.

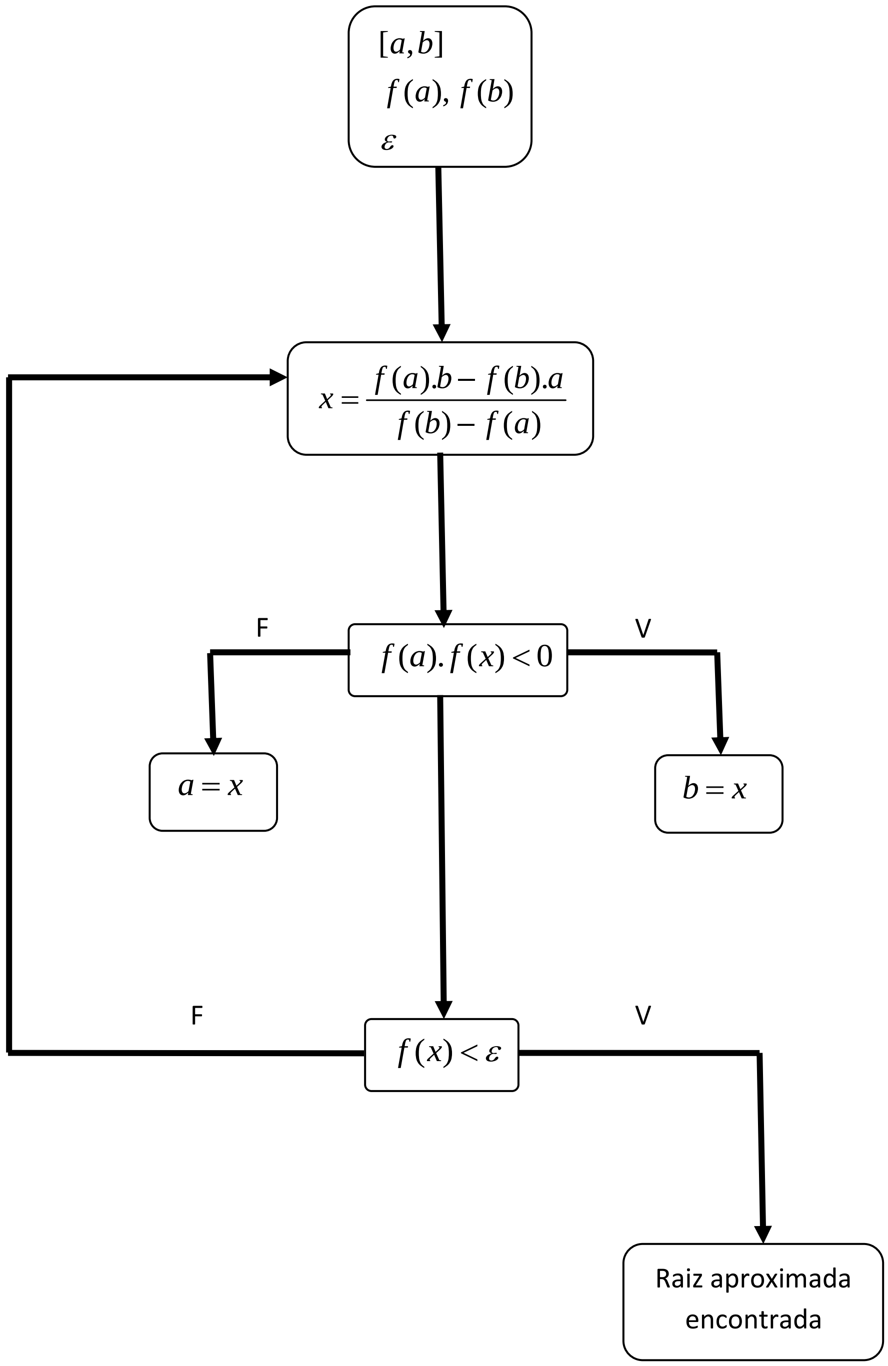
Se,

$$\frac{|x_2 - x_0|}{|x_2|} < \varepsilon \text{ ou } \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} < \varepsilon$$

Para um ε prefixado, então x_2 é a raiz procurada. Caso contrário, calculamos $f(x_2)$ e escolhemos entre x_0 e x_1 aquele cuja f tenha sinal contrário ao de $f(x_2)$. Com x_2 e esse ponto calculamos x_3 sobre este ponto como fizemos anteriormente, usando a fórmula acima.

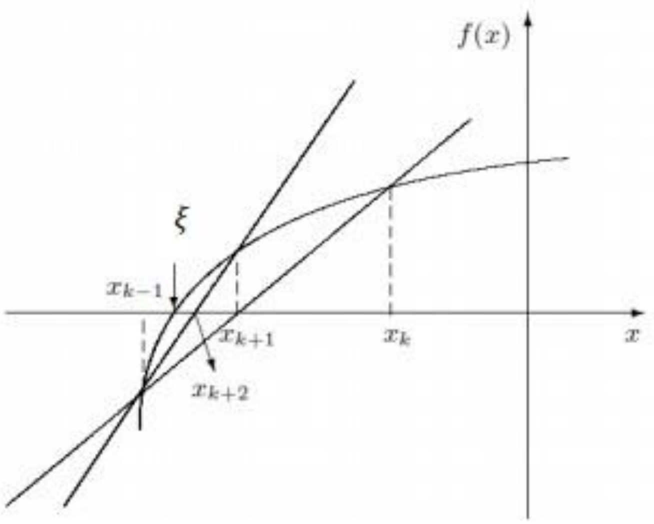
Tal procedimento deve se repetir até que se alcance a raiz recomendada pela precisão pré-determinada. De modo que o método da falsa posição pode ser exemplificado por meio do seguinte fluxograma:

Figura 03 – Fluxograma do método da falsa posição



De forma análoga podemos também exemplificar o método da falsa posição através do gráfico abaixo:

Figura 04 – Interpretação gráfica do método da falsa posição



Fonte: Ribeiro (2012, p. 31)

Medeiros e Medeiros (2004) explicam que o método da falsa posição consiste, em síntese, na tentativa de resolver um problema matemático por meio da adoção inicial de uma solução provisória e conveniente. Que pode ser modificada posteriormente por meio de um raciocínio que envolva proporções. Tal característica possibilita encontrar similaridades entre esse método e algumas soluções encontradas em problemas geométricos que envolvem relações de semelhança.

Para uma melhor análise do método da falsa posição, podemos resumi-lo em um fluxograma:

4. APLICAÇÕES

Neste capítulo iremos apresentar algumas aplicações dos métodos estudados neste trabalho. Para cada problema, aplicaremos os dois métodos e compararemos as soluções obtidas e a quantidade de iterações para se chegar a raiz aproximada.

4.1 Um amplificador eletrônico, com acoplamento R-C, com três estágios em cascata tem uma resposta a um degrau unitário de tensão dado pela expressão:(FRANCO, 2006, p.97)

$$g(T) = 1 - \left(1 + T + \frac{T^2}{2}\right)e^{-T}$$

onde $T = \dfrac{t}{RC}$ é uma unidade de tempo normalizada. O tempo de subida de um amplificador é definido como o tempo necessário para sua resposta ir de 10% a 90% de seu valor final. No caso, como $g(\infty) = 1$, é necessário calcular os valores de T para os quais:

$$g = 0{,}1 \text{ e } g = 0{,}9$$

ou seja resolver a equação:

$$0{,}1 = 1 - \left(1 + T + \frac{T^2}{2}\right).e^{-T}$$

$$0{,}9 = 1 - \left(1 + T + \frac{T^2}{2}\right).e^{-T}$$

Chamando de $T_{0,1}$ o valor obtido na 1ª equação e $T_{0,9}$ o valor obtido de T na 2ª equação, calcular o tempo de subida.

RESOLUÇÃO:

Devemos encontrar o valor do tempo de subida para 10% e 90%.

Para g = 0,1, temos:

$$1 - \left(1 + T + \frac{T^2}{2}\right).e^{-T} = 0{,}1$$

$$\left(1 + T + \frac{T^2}{2}\right).e^{-T} - 0{,}9 = 0$$

* Isolamento das raízes:

T	0	1	2	1,5
f(T)	+	+	-	-

$\exists \bar{T} \in (1;1,5)$ tal que $f(\bar{T}) = 0$

Usaremos como critério de parada $\varepsilon = 10^{-2}$

Método da Bissecção:

Tabela 3 - Amplificar eletrônico

K	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
0	1	1,5	1,25	-
1	1	1,25	1,125	-
2	1	1,125	1,0625	+
3	1,0625	1,125	1,09375	+
4	1,09375	1,125	1,109375	-
5	1,09375	1,109375	1,1015625	+
6	1,1015625	1,109375	1,10546875	-

Teste da raiz:

$$\frac{|x_5 - x_4|}{|x_5|} = 0,007 < 10^{-2}$$

Logo a uma aproximação para a raiz é x = 1,1015.

Para g = 0,9, temos:

$$1 - \left(1 + T + \frac{T^2}{2}\right).e^{-T} = 0,9$$

$$\left(1 + T + \frac{T^2}{2}\right).e^{-T} - 0,1 = 0$$

* Isolamento das raízes:

T	0	1	1,5	2	3	4	5	5,5
f(T)	+	+	+	+	+	+	+	-

$\exists \bar{T} \in (5;5,5)$ tal que $f(\bar{T}) = 0$

Método da Bissecção:

Tabela 4 - Amplificar eletrônico

K	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
0	5	5,5	5,25	+
1	5,25	5,5	5,375	-
2	5,25	5,375	5,3125	+
3	5,3125	5,375	5,34375	-
4	5,3125	5,34375	5,328125	-
5	5,3125	5,328125	5,3203125	-

Teste da raiz:

$$\frac{|x_5 - x_4|}{|x_5|} = 0,001 < 10^{-2}$$

Portanto uma aproximação para a raiz é x = 5,3203.

Logo o tempo de subida será dado por:

$$5,3203 - 1,1015 = 4,2188$$

Método da Falsa Posição:

Tabela 5 - *Amplificar eletrônico*

K	a_k	b_k	x_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(b_k)$
0	1	1,5	1,0889	0,0197	- 0,0911	+
1	1,0889	1,5	1,1003	0,0026	- 0,0911	+
2	1,1003	1,5	1,1016	0,0003	- 0,0911	+

Teste da raiz:

$$\frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = 0,0012 < 10^{-2}$$

Portanto uma aproximação para a raiz é x = 1,1016

Tabela 6 - *Amplificar eletrônico*

K	a_k	b_k	x_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(b_k)$
0	5	5,5	5,3398	0,0246	- 0,0116	-
1	5	5,3398	5,3240	0,0246	- 0,0012	-
2	5	5,3240	5,3227	0,0246	- 0,0001	-

Teste da raiz:

$$\frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = 0,0002 < 10^{-2}$$

Portanto uma aproximação para a raiz é x = 5,3227

.Logo o tempo de subida será dado por:

$$5,3227 - 1,1016 = 4,2211$$

4.2 A equação (FRANCO, 2006, p. 100)

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{sen\alpha.\cos\alpha}{\frac{gR}{v^2} - \cos^2\alpha}$$

Permite calcular o ângulo de inclinação, α , em que o lançamento deve ser feito para atingir um determinado alvo. Na equação acima,

- α - ângulo de inclinação com a superfície da Terra com a qual é feita o lançamento do míssil;
- g - aceleração da gravidade $\cong 9,81 m/s^2$;
- R -raio da Terra $\cong 6371000m$
- v - velocidade de lançamento do míssil, m/s;
- θ - ângulo (medido do centro da Terra) entre o ponto de lançamento e o ponto de impacto desejado

Resolva o problema considerando: $\theta = 80^o$ e v tal que $\frac{v^2}{gR} = 1,25$, ou seja, aproximadamente $8.840 m/s$.

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{sen\alpha.\cos\alpha}{\frac{gR}{v^2} - \cos^2\alpha}$$

$$tg\left(\frac{80}{2}\right) = \frac{sen\alpha.\cos\alpha}{0,8 - \cos^2\alpha}$$

$$0,839 = \frac{sen\alpha.\cos\alpha}{0,8 - \cos^2\alpha}$$

Temos que

$$sen(\alpha + \alpha) = sen(2\alpha) = 2sen\alpha\cos\alpha \Rightarrow sen\alpha.\cos\alpha = \frac{sen(2\alpha)}{2}$$

Então,

$$\frac{sen(2\alpha)}{2.(0,8 - \cos^2\alpha)} - 0,8391 = 0$$

Multiplicando a equação por 2 temos:

$$\frac{sen(2\alpha)}{0,8 - \cos^2\alpha} - 1,6782 = 0$$

- Isolamento da raiz:

A	0,5	1	1,3
f(α)	+	+	-

- Método da Bissecção:

Tabela 7 – *Ângulo de inclinação do foguete*

K	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
0	1	1,3	1,15	-
1	1	1,15	1,075	-
2	1	1,075	1,0375	-
3	1	1,0375	1,01875	+
4	1,01875	1,0375	1,02812	-
5	1,01875	1,028125	1,02344	+

Teste da raiz:

$$\frac{|x_5 - x_4|}{|x_5|} = 0,004 < 10^{-2}$$

Logo a uma aproximação para a raiz é x = 1,02344

Transformando a raiz em graus:

$$\begin{aligned} &\pi \to 180^{\circ} \\ &1,02344 \to x \\ &x = 58,63879258 \\ &x = 58^{\circ}38'19,65'' \end{aligned}$$

Portanto o ângulo de inclinação procurado é 58º38’19,65”

- Método da Falsa Posição:

Tabela 8 – *Ângulo de inclinação do foguete*

K	a_k	b_k	x_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(b_k)$
0	1	1,3	1,0351	0,1115	-0,9705	-
1	1	1,0351	1,0242	0,1115	-0,0509	-
2	1	1,0241	1,0238	0,1115	-0,0015	-

Teste da raiz:

$$\frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = 0,0003 < 10^{-2}$$

Portanto uma aproximação para a raiz é x = 1,0238

Transformando a raiz em graus:

$$\pi \to 180^o$$
$$1,0238 \to x$$
$$x = 58,65941907$$
$$x = 58^o 35'34''$$

Portanto o ângulo de inclinação procurado é 58º35’34”

4.3 *Lee and Duffy* (*A.I.ch. E Journal, 1976*) relacionaram o fator de atrito para escoamento de partículas fibrosas em suspensão com o número de *Reynolds*, pela seguinte equação empírica (FRANCO, 2006, p. 104):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \left(\frac{1}{k}\right).\ln(RE\sqrt{f}) + \left(14 - \frac{56}{k}\right)$$

Nesta relação f é o fator de atrito, RE é o número de Reynolds e k é uma constante determinada pela concentração de partículas em suspensão. Para uma suspensão de $0,08\%$ de concentração temos que $k = 0,28$. Determine o valor de f quando $RE = 3750$.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \left(\frac{1}{k}\right).\ln(RE\sqrt{f}) + \left(14 - \frac{56}{k}\right)$$
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \left(\frac{1}{0,28}\right).\ln(3750\sqrt{f}) + \left(14 - \frac{56}{0,28}\right)$$
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \left(\frac{1}{0,28}\right).\ln(3750\sqrt{f}) - 6$$
$$\frac{1}{0,28}.\ln(3750\sqrt{f}) - \frac{1}{\sqrt{f}} - 6 = 0$$

- Isolamento da raiz:

F	0,5	0,1	0,01	0,001
F	+	+	+	-

- Método da Bissecção:

Tabela 9 – *Fator de atrito para escoamento de partículas fibrosas*

K	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
0	0,001	0,01	0,0055	+
1	0,001	0,0055	0,00325	-
2	0,00325	0,0055	0,004375	-
3	0,004375	0,0055	0,0049375	-
4	0,0049375	0,0055	0,00521875	+
5	0,0049375	0,00521875	0,005078125	-
6	0,005078125	0,00521875	0,005148437	+
7	0,005078125	0,005148437	0,005113281	-

Teste da raiz:

$$\frac{|x_7 - x_6|}{|x_6|} = 0,006 < 10^{-2}$$

Logo a uma aproximação para a raiz é x = 0,0051

- Método da Falsa Posição:

Tabela 10 – *Fator de atrito para escoamento de partículas fibrosas*

K	a_k	b_k	x_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(b_k)$
0	0,001	0,01	0,0082	-20,5669	5,1676	+
1	0,001	0,0082	0,0071	-20,5669	3,7636	+
2	0,001	0,0071	0,0064	-20,5669	2,6732	+
3	0,001	0,0064	0,0062	-20,5669	1,8706	+
4	0,001	0,0062	0,0058	-20,5669	1,6139	+
5	0,001	0,0058	0,0056	-20,5669	1,0642	+
6	0,001	0,0056	0,0054	-20,5669	0,7691	+
7	0,001	0,0054	0,0053	-20,5669	0,4589	+
8	0,001	0,0053	0,0052	-20,5669	0,2978	+
9	0,001	0,0052	0,0052	-20,5669	0,1323	+
10	0,001	0,0052	0,0051	-20,5669	0,1324	

Teste da raiz:

$$\frac{|x_{10}-x_9|}{|x_{10}|}=0,002<10^{-2}$$

Portanto uma aproximação para a raiz a raiz aproximada é x = 0,0051

4.4 Um método muito eficiente para integração numérica de uma função é o chamado *método de quadratura de Gauss*. No desenvolvimento das fórmulas para este método é necessário calcular os zeros de uma família de polinômios ortogonais. Uma família importante de polinômios ortogonais é a de *Legendre*. Encontre os zeros do polinômio de Legendre de grau 6 (FRANCO, 2006, p.106).

$$P_6(x)=\frac{1}{48}(693x^6-945x^4+315x^2-15)$$

Observação: Todos os zeros dos polinômios de Legendre são menores que 1 (um) em módulo e são simétricos em relação a origem.

$$P_6(x)=\frac{1}{48}(693x^6-945x^4+315x^2-15)$$
$$P_6(x)=0$$
$$\frac{1}{48}(693x^6-945x^4+315x^2-15)=0$$

- Isolamento da raiz:

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
P₆(x)	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	+

- Método da Bissecção:

$\exists \bar{x} \in (0,2;0,3)$ tal que P(x) = 0

Tabela 11 – Polinômio de *Legendre*

K	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
0	0,2	0,3	0,25	+

1	0,2	0,25	0,225	-
2	0,225	0,25	0,2375	-
3	0,2375	0,25	0,24375	+
4	0,2375	0,24375	0,240625	+
5	0,3575	0,340625	0,2390625	+
6	0,2375	0,2390625	0,23828125	-

Teste da raiz:

$$\frac{|x_5 - x_4|}{|x_5|} = 0,006 < 10^{-2}$$

Logo a uma aproximação para a raiz é x = 0,24

$\exists \bar{x} \in (0,6;0,7)$ tal que P(x) = 0

Tabela 12 – *Polinômio* de *Legendre*

K	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
0	0,6	0,7	0,65	+
1	0,65	0,7	0,675	-
2	0,65	0,675	0,6625	-
3	0,65	0,6625	0,65625	+
4	0,65625	0,6625	0,659375	+

Teste da raiz:

$$\frac{|x_3 - x_2|}{|x_3|} = 0,0095 < 10^{-2}$$

Logo a uma aproximação para a raiz é x = 0,65.

$\exists \bar{x} \in (0,9;1)$ tal que P(x) = 0

Tabela 13 – *Polinômio* de *Legendre*

K	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
0	0,9	1	0,95	+
1	0,9	0,95	0,925	-
2	0,925	0,95	0,9375	+
3	0,925	0,9375	0,93125	-
4	0,93125	0,9375	0,934375	+

Teste da raiz:

$$\frac{|x_3 - x_2|}{|x_2|} = 0,0067 < 10^{-2}$$

Logo a uma aproximação para a raiz é x = 0,93.

- Método da Falsa Posição:

$\exists \bar{x} \in (0,2;0,3)$ tal que P(x) = 0

Tabela 14 – *Polinômio* de *Legendre*

K	a_k	b_k	x_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(b_k)$
0	0,2	0,3	0,2384	- 0,08058	0,12918	-
1	0,2384	0,3	0,2331	- 0,00047	0,12918	-
2	0,2331	0,3	0,2387	- 0,01173	0,12918	+
3	0,2331	0,2387	0,2386	- 0,01173	0,00017	-
4	0,2386	0,2387	0,2390	- 0,00004	0,00017	-

Teste da raiz:

$$\frac{|x_4 - x_3|}{|x_4|} = 0,0016 < 10^{-2}$$

Logo a uma aproximação para a raiz é x = 0,24

$\exists \bar{x} \in (0,6;0,7)$ tal que P(x) = 0

Tabela 15 – *Polinômio* de *Legendre*

K	a_k	b_k	x_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(b_k)$
0	0,6	0,7	0,6579	0,17209	- 0,12529	+
1	0,6579	0,7	0,6578	0,01034	- 0,12529	+
2	0,6578	0,7	0,6611	0,01066	-0,12529	+

Teste da raiz:

$$\frac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} = 0,0001 < 10^{-2}$$

Logo a uma aproximação para a raiz é x = 0,65.

$\exists \overline{x} \in (0,9;1)$ tal que P(x) = 0

Tabela 16 – *Polinômio* de *Legendre*

K	a_k	b_k	x_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(b_k)$
0	0,9	1	0,9194	- 0,24116	1	-
1	0,9194	1	0,9275	- 0,11242	1	-
2	0,9275	1	0,9306	- 0,0453	1	-

Teste da raiz:

$$\frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = 0,003 < 10^{-2}$$

Logo a uma aproximação para a raiz é x = 0,93.

Portanto os zeros do polinômio de Legendre são: 0,24; 0,65; 0,93 e seus simétricos.

5. Considerações Finais

Através das pesquisas realizadas a fim de escrever o presente trabalho, foi possível compreender que as equações algébricas – especialmente as polinomiais – não recebem tanta atenção quanto recebiam épocas anteriores e, ainda que sejam cálculos importantes, tendem a ser superadas por outros tipos de equações, como as diferenciais, por exemplo. Mesmo assim, as equações algébricas, de forma geral, permanecem presentes de forma constante no cotidiano da vida. Isso porque muitas situações cotidianas envolvem esse tipo de problemática, que demanda conhecimento para resolver as equações a fim de solucioná-las.

Porém, é no ambiente escolar que a maior parte desse conhecimento é transmitida, por meio de problemas elementares que são formulados em linguagem matemática, resultando em equações polinomiais a uma variável, o que envolve a importância do ensino e aprendizagem desses conteúdos, a fim de capacitar o indivíduo a resolvê-las. O propósito desse estudo, em particular, não foi propriamente debater a forma como as equações algébricas são apresentadas em situações de ensino, mas sim, compreender seu contexto, suas origens e como essas equações podem ser resolvidas com diferentes métodos numéricos.

De forma que, por meio do conhecimento histórico da resolução dessas equações, foi possível notar a natureza humana envolvida na matemática, quebrando essa percepção de complexidade que sempre envolveu seu conteúdo. Através dessa construção histórica foi possível notar como a matemática é uma forma puramente humana que o homem encontrou, ao longo do tempo, para resolver seus problemas. O que significa que a matemática não é construída por mentes excepcionais, muito menos consiste em uma ciência distante da experiência humana. Ao passo que conhecer os processos que envolveram a busca pela solução dessas equações é um enriquecimento histórico importante.

Conclui-se o presente trabalho com a crença de que objetivos, tanto geral quanto específicos, foram atendidos. Contudo, como não era de intento, o assunto está longe de ser esgotado, fora dado um primeiro e importante passo para o fomento de conhecimento e estímulo para o aprofundamento no tema, que pode ser feito em estudos posteriores, que visem corroborar, refutar ou complementar as constatações obtidas até o momento.

6. Referências Bibliográficas

ANDRADE, B. C. *A evolução histórica da resolução das equações do 2º grau*. Porto: UPT, 2000. (Dissertação de mestrado).

CASTILHO, J. E. *Cálculo numérico*. Uberlândia. UFU, 2001.

FRANCO, N.M.B. *Cálculo Numérico*. Editora: Pearson – Prentice Hall. São Paulo, 2006.

LAGES, S. N. *A resolução de equações algébricas: uma perspectiva histórica*. Porto: UPT, 2007. (Dissertação de mestrado).

MEDEIROS, C. F.; MEDEIROS, A. *O método da falsa posição na história e na educação matemática*. Ciência & Educação, v. 10, n. 3, p. 545-557, 2004.

PONTES, R. S. *Equações polinomiais: soluções algébricas, geométricas e com auxílio de derivadas.* João Pessoa: UFPB, 2013. (Dissertação de Mestrado - PROFMAT).

RIBEIRO, R. R. J. *Revisão bibliográfica de alguns métodos numéricos para obtenção de zeros reais de funções transcendentes e polinomiais*. Angicos: UFERSA, 2012.

SANCHES, J. J.; FURLAN, D. C. *Métodos numéricos*. Curitiba: UFPR, 2007.

SCHUVAAB, J. L. *Resolução de equações algébricas até quarto grau: uma abordagem histórica*. Maringá: UEM, 2013. (Dissertação de mestrado - PROFMAT).