Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Estudo Geométrico dos Sistemas Lineares em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Jair Oliveira Passos Junior

Jataí
2017

sistema de bibliotecas ufg

PRPG
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data

1. **Identificação do material bibliográfico**: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Jair Oliveira Passos Junior

Título do trabalho: Estudo Geométrico dos Sistemas Lineares em R^2 e R^3

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

____
Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

____
Assinatura do(a) orientador(a)[2]

Data: 18 / 01 / 18

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Jair Oliveira Passos Júnior

Estudo Geométrico dos Sistemas Lineares em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Dissertação de Mestrado apresentada a Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFG/Campus Jataí, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Universidade Federal de Goiás
Regional Jataí
Departamento de Matemática

Orientador: Prof.º Dr. Wender José de Souza

Jataí
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Junior, Jair Oliveira Passos
Estudo Geométrico dos Sistemas Lineares em IR^2 e IR^3 [manuscrito] / Jair Oliveira Passos Junior. - 2017.
LXXXIV, 84 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Wender José de Souza.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Jataí, 2017.
Bibliografia.
Inclui gráfico, lista de figuras.

1. Sistema Lineares. 2. Gráficos. 3. Estudo Geométrico. I. Souza, Wender José de, orient. II. Título.

CDU 51

Ata da reunião da Banca Examinadora da Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Jair Oliveira Passos Junior – Aos vinte dias do mês de dezembro do ano de dois mil e dezessete (20/12/2017), às 10:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora, Prof. Dr. Wender José de Souza - Orientador, Profa. Dra. Adriana Araújo Cintra e Profa. Dra. Kamila da Silva Andrade, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada na Sala 08 da Pós Graduação da Universidade Federal de Goiás - Regional Jataí, procederem a avaliação da defesa intitulada: **"Estudo Geométrico dos Sistemas Lineares em IR² e IR³ ",** em nível de Mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás, polo Jataí. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca, Prof. Dr.Wender José de Souza , que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor da Dissertação que, em 40 minutos, procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo em vista o que consta na Resolução nº. 1403/2016 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG e procedidas as correções recomendadas, o trabalho de conclusão foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na Secretaria da Coordenação de Matemática da Regional Jataí da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 11:45 horas a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu, José Alfredo Cespi de Oliveira, Secretário da Coordenação Geral de Pós-Graduação da Regional Jataí - UFG, lavrei a presente ata que, depois de lida e aprovada, é assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Wender José de Souza

Prof. Dr. Wender José de Souza
Profmat (Pólo Jataí)-UFG
Presidente da Banca

Adriana Araujo Cintra

Profa. Dra. Adriana Araujo Cintra
Profmat (Pólo Jataí)-UFG
Membro interno

Profa. Dra. Kamila da Silva Andrade
UFG - Goiânia
Membro externo

Dedicatória

À **DEUS**, primeiramente, por ter me dado força durante esses dois anos de curso. Por ter me iluminado nas decisões mais difíceis e por ter me guiado ao longo do curso para trilhar o caminho mais correto possível.

Aos meus pais, **Rosa e Jair**, que sempre confiaram em mim e foram minha inspiração para encerrar mais uma caminhada da minha vida. Minha mãe não mediu esforços pra que este sonho se realizasse, sem sua compreensão, ajuda e confiança nada disso seria possível hoje.

Aos meus amigos, em especial **Viviane Damasceno Pinto e Maria Isabel Pereira Bezerra**, aos meus irmãos **Suellen e Gabriel**, por toda paciência, compreensão, carinho e amor, me deixando mais tranquilo nos momentos mais difíceis do curso e por me ajudar muitas vezes a achar soluções quando elas pareciam não existir. Sempre apoiando minhas decisões, vocês me encheram de coragem para chegar na final.

Não conquistaria nada se todos vocês não estivessem ao meu lado. Obrigado, por estarem sempre presentes em todos os momentos, me dando carinho, apoio, incentivo, determinação, fé, e principalmente pelo amor de vocês.

Agradecimentos

Desejo expressar a minha gratidão a todos que contribuíram para que este trabalho se concretizasse.

À **DEUS**, por me iluminar principalmente nas minhas viagens permitindo que eu concluísse este trabalho.

Ao meu orientador **Prof. Dr. Wender José de Sousa**, pelo modo como me orientou, me aconselhou, pelas observações e sugestões e por ter acreditado e me guiado à conclusão deste trabalho.

Aos professores **Dra. Kamila da Silva Andrade** e **Dra. Adriana Araujo Cintra** , membros da banca examinadora desta dissertação, pelo tempo dedicado à leitura e pelas valiosas observações para este trabalho.

Aos **professores da UFG** do pólo de Jataí que participaram do PROFMAT, pela contribuição para a minha formação.

Aos **meus colegas de mestrado** pelo convívio, amizade, ajuda e principalmente pelos momentos felizes que passamos juntos, em especial as minhas amigas Maria Isabel Pereira Bezerra e Viviane Damasceno pelo seu companheirismo durante o curso.

Aos **meus colegas de trabalho**, pelo apoio e compreensão até o término deste curso.

A **CAPES**, pelo fornecimento da bolsa de estudos que garantiu o sustento necessário para a realização deste trabalho.

Por fim, às pessoas mais importantes na minha vida, minha mãe e meu pai , **Rosa** e **Jair "in Memorian"** pelo apoio, paciência e pelas constantes orações para a concretização deste sonho.

"Quanto mais alto se voa, menor se fica aos olhos de quem não sabe voar."
Friedrich Nietzsche

Resumo

O estudo de sistemas lineares em sua maioria está focado na álgebra, ou seja, está sempre objetivado em como descobrir o valor das incógnitas, nos métodos disponíveis para se chegar à um resultado numérico e na construção de uma solução. Isso dificulta a compreensão do conteúdo por parte do aluno, pois o mesmo se torna extremamente abstrato. Com o intuito de facilitar o trabalho de ambas as partes envolvidas no processo de ensino-aprendizagem propomos que o estudo de sistemas lineares seja realizado algebricamente e geometricamente. Assim sendo, aplicaremos tais definições à situações-problemas encontradas nos livros didáticos, bem como onde os mesmos são usados em outras áreas da matemática. **Palavras-chave:** sistemas lineares, gráficos, estudo geométrico.

Abstract

The study of linear systems is mostly focused on algebra, that is, it is always objectified in how to discovering the value of the variables, in the methods available to arrive at a numerical result and in the construction of a solution. This makes it difficult for the student to understand the content, because it becomes extremely abstract. In order to facilitate the work of both parties involved in the teaching-learning process we propose that the study of linear systems to be performed algebraically and geometrically. Therefore, we will apply such definitions to situations-problems found in a didatics books, as well as where they are used in other areas of mathematics.
Keywords: linear systems, graphs, geometric study.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

No Ensino Médio, os alunos aprendem como resolver sistemas de equações lineares de duas e três variáveis, porém, geralmente não é dado um enfoque geométrico pelos professores principalmente no caso tridimensional. Sendo assim, o presente trabalho tem por objetivo apresentar algumas aplicações de sistemas lineares e também um estudo geométrico. E desta forma, contribuir com um material de apoio tanto para o aluno quanto para o professor.

A Matemática desde os primórdios carrega ao longo de sua história rótulos que foram dados por todos aqueles que tiveram um contato com ela. É comum ouvirmos que tal disciplina atende à um público específico, os gênios, que apesar de ser necessária à todas as profissões é uma disciplina difícil, e por tal pensamento errôneo os alunos se contentam em conhecer e dominar as quatro operações básicas.

O desafio do professor atualmente consiste em romper com o modelo tradicional de ensino, visto que o público ao qual a escola atende tem mudado com o passar dos anos e é justamente desse capital humano que a escola sobrevive. Em relação à formação de professores, os Paramêtros Curriculares Nacionais (PCN'S) [8], destacam

> "...construção de um referencial que oriente a prática escolar de forma a contribuir para que toda criança e jovem brasileiros tenham acesso a um conhecimento matemático que lhes possibilite de fato sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura. [8], "(PCNs, 1998)".

Em relação ao quadro educacional, propostas elaboradas na reforma educacional no período de 1980/1985 visavam um ensino da Matemática que contribuísse para a construção de cidadãos e não apenas ensinar conteúdos que serviriam de premissas àqueles que viriam a ser aprendidos nas próximas séries escolares; destacou também a importância do aluno como parte integrante do processo de ensino-aprendizagem à partir desse momento, o aluno participa e constrói juntamente com o professor o conhecimento; o ensino na Matemática se baseará em resolução de problemas, de modo que esses auxiliem em situações cotidianas e interdisciplinares; aplicar conceitos tecnológicos e o uso de suas ferramentas afim de acompanhar os avanços sociais no qual a escola está inserida.

A Matemática está definida, segundo os PCNs, como uma forma de compreender o mundo baseada nas experiências humanas por meio de sua interação com o meio social onde se encontra. Desse modo,

> "Esta visão opõe-se àquela presente na maioria da sociedade e na escola que considera a Matemática como um corpo de conhecimento imutável e verdadeiro, que deve ser assimilado pelo aluno. A Matemática é uma ciência viva, não apenas no cotidiano dos cidadãos mas também nas universidades e centros de pesquisas, onde

> se verifica, hoje, uma impressionante produção de novos conhecimentos que, a par de seu valor intrínseco, de natureza lógica, têm sido instrumentos úteis na solução de problemas científicos e tecnológicos da maior importância."(PCNs, 1998) [8]

Para se obter um resultado satisfatório, o professor dispõe de algumas metodologias que o auxiliam em sala de aula, destacaremos:

- **História da Matemática:** remeter à história é construir uma linha do tempo das necessidades que foram supridas a partir da descoberta e construção dos conhecimentos matemáticos, fazendo com que o aluno entenda a lógica e aplicação de cada conteúdo, tal metodologia pode ser utilizada a qualquer momento da aula, e é bastante utilizada, como justificativa para se aprender sobre determinado assunto.

- **Tecnologias**: permitem ao aluno a reflexão sobre se conhecer aspectos matemáticos que lhe permitam realizar cálculos de maneira mais veloz; evidencia a importância da representação gráfica, a linguagem visual auxilia na abordagem de novos caminhos durante a resolução de problemas.

Compreendendo a importância da Geometria na construção do saber e suas inúmeras aplicações em materiais concretos, não nos privaríamos de utilizar ferramentas visuais durante a resolução de exercícios sobre sistemas lineares. Essas serão as duas metodologias utilizadas no decorrer deste trabalho, aliadas à resolução de problemas, afim de elucidar situações cotidianas. Se tratando da resolução de sistemas lineares, associamos resoluções gráficas às resoluções algébricas, afim de que o aluno compreenda o que cada solução representa bem como o que significa cada nomenclatura que os sistemas recebem.

Para uma melhor consepção dos objetivos deste trabalho, foi realizado uma apresentação de conteúdos primordiais para o entendimento do estudo geométrico dos sistemas lineares. No primeiro capítulo apresentamos e discutimos os referenciais teóricos compostos pela história da Matemática sobre o surgimento dos sistemas lineares, bem como as definições e demonstrações sobre matrizes.

O estudo de determinantes será apresentado no capítulo dois, que é um dos métodos utilizados para resolução de sistemas.

A conceituação e métodos de resolução de sistemas de equações lineares, será apresentada no capítulo três.

Para a análise de um sistema linear, torna-se imperioso apresentar a Geometria Analítica no capítulo quatro.

No capítulo cinco, será demonstrado efetivamente, o estudo geométrico dos sistemas lineares, representando graficamente e algebricamente este sistema linear em números reais em duas dimensões e três dimensões.

Já no capítulo seis iremos resolver alguns exercícios de aplicação, gráficos dentro de sistemas lineares.

1 Preliminares

O presente trabalho tem como foco o estudo acerca dos sistemas lineares, seus conceitos e representações geométricas, porém para fazê-lo é necessária a exposição dos conceitos iniciais que norteiam o estudo dos sistemas lineares, para que possamos ter uma noção lógica da base teórica que precede tal o tema.

Antes de chegarmos ao tema principal, remetemos à história da matemática, sem a qual nenhum conhecimento matemático se dá, pois é através dela que tais conceitos são passados de geração em geração nos ambientes escolares.

Feito isso, foram expostos todas as definições e propriedades acerca de matrizes e determinantes as quais servirão de base para estudo dos sistemas lineares.

Por fim, fizemos uma breve descrição de como se dá a construção de um gráfico, o que cada parte componente dele representa e como dispor de um sistema linear em um plano matemático.

1.1 Matrizes

Os breves comentários a seguir sobre à história dos Sistemas Lineares apoiam-se no livro Fundamentos da Matemática, volume 4 [6]. Arthur Cayley (1821-1895) foi um dos pioneiros no estudo das matrizes que, por volta de 1850, divulgou esse nome e passou a demonstrar sua aplicação. As matrizes, inicialmente, eram aplicadas quase que exclusivamente na resolução de sistemas lineares; apenas há pouco mais de 150 anos tiveram sua importância detectada. No entanto, o primeiro uso implícito da noção de Matriz se deve a Joseph Louis Lagrange (1736-1813), em 1790. O primeiro a lhes dar um nome foi Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), que as chamavam de tabelas. O nome Matriz só veio com James Joseph Sylvester (1814-1897), em 1850. Entretanto Sylvester ainda via as matrizes como mero ingrediente dos determinantes. Somente com Cayley, portanto, elas passaram a ter vida própria e, gradativamente, começaram a suplantar os determinantes em importância.

Nesse capítulo, os conceitos abordados foram descritos nas obras [1], [2], [4].

Definição 1. *Uma matriz $m \times n$ é um arranjo retangular de $m.n$ números reais distribuídos em ordem de m linhas horizontais e n colunas verticais, como pode ser visto em* (1.1).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

A i-ésima linha da matriz A é

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \end{pmatrix}, \ (1 \leq i \leq m);$$

e a j-ésima coluna da matriz A é

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \ (1 \leq j \leq n).$$

Denotaremos por $A_{m \times n}$ uma matriz A de ordem m por n. Se $m = n$ dizemos que A é uma matriz quadrada de ordem n e que os números $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ formam a diagonal principal de A. Nos referimos ao número a_{ij}, que está na i-ésima linha e na j-ésima coluna de A, como o ij-ésimo elemento de A ou o elemento (ij) de A e escrevemos frequentemente A como

$$A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} \ ou \ \ [a_{ij}] \, .$$

Exemplo 1. *Ao recolhermos os dados referentes a altura, peso e idade de um grupo de quatro pessoas, podemos dispô-los na tabela 1:*

	Altura (m)	Peso (kg)	Idade (anos)
Pessoa 1	1,70	70	23
Pessoa 2	1,75	60	45
Pessoa 3	1,60	52	25
Pessoa 4	1,81	72	30

Tabela 1 – Altura, Peso e Idade

Ao extraímos os significados das linhas e colunas da Tabela 1, temos a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1,70 & 70 & 23 \\ 1,75 & 60 & 45 \\ 1,60 & 52 & 25 \\ 1,81 & 72 & 30 \end{bmatrix}$$

Os elementos de uma matriz podem ser números reais, funções ou ainda outras Matrizes.

Definição 2. *Duas matrizes $A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B_{rxs} = [b_{ij}]_{r \times s}$ são iguais, $A = B$, se elas têm o mesmo número de linhas (m = r) e colunas (n = s), e todos os seus elementos são iguais, se $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall 1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.*

Exemplo 2. *Sejam as matrizes A e B, tais que $A = \begin{pmatrix} 2^3 & log10 & \sqrt{81} \\ \frac{9}{3} & 12 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 \\ 3 & 12 & 0,5 \end{pmatrix}$*

Note que, $A = B$, pois $2^3 = 8$, $\log 10 = 1, \sqrt{81} = 9$, $\dfrac{9}{3} = 3$ e $\dfrac{1}{2} = 0,5$

Definição 3. *Matriz Identidade de ordem n é uma matriz quadrada de ordem n em que a_{ii} = 1 e a_{ij} = 0, para i $\neq$ j, onde usaremos a notação I_n.*

Exemplo 3. *Escreva uma matriz identidade de ordem 3×3.* ***Resolução***

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definição 4. *Matriz Nula é aquela em que $a_{ij} = 0$, para todo i e j, onde usaremos a notação $O_{m \times n}$.*

Exemplo 4. *Escreva uma matriz nula de ordem 3×3.* ***Resolução***

$$O_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.1.1 OPERAÇÕES COM MATRIZES

Ao utilizar matrizes, surge naturalmente a necessidade de efetuarmos certas operações. Logo vamos apresentar nesta seção como podemos somar e multiplicar Matrizes.

ADIÇÃO

Definição 5. *Sejam A = $[a_{ij}]$ e B = $[b_{ij}]$, é uma matriz m x n, então a* **soma** *de A e B é uma matriz C = $[c_{ij}]$, $m \times n$, definida por*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n).$$

Isso significa que a soma de duas matrizes A e B do tipo $m \times n$ é uma matriz C do mesmo tipo em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em A e B.

Exemplo 5. *Sejam as matrizes A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcule $A + B$.*

Temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Apresentaremos as propriedades de adição de matrizes e faremos a verificação apenas para valores baixos de m e n. O caso geral é análogo.

Propriedades: Dadas as matrizes **A, B e C** de mesma ordem m x n, temos:

i) **A + B = B + A** (Comutatividade)

ii) **A + (B+C) = (A + B) + C** (Associatividade)
iii) **A + O = A**, onde **O** denota a matriz nula m x n.
Sejam as matrizes A e B iguais à

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}.$$

respectivamente. A soma de $A + B$ é dada por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, a matriz a direita da igualdade pode, comutando os elementos de cada termo da matriz, ser reescrita da forma:

$$\begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & b_{13}+a_{13} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} & b_{23}+a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Logo, $A + B = B + A$
ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$. (Associatividade)

Sejam dadas as matrizes A, B e C, tais que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad e \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

A soma $A + (B + C)$ é dada por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}+c_{11} & a_{12}+b_{12}+c_{12} \\ a_{21}+b_{21}+c_{21} & a_{22}+b_{22}+c_{22}. \end{pmatrix}$$

que também pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Logo, $(A + B) + C$.

iii) $A + O = A$, onde **O** denota a matriz nula m x n.

Sejam dadas as matrizes A e O, tais que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \quad e \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz $A + O$ é igual à

$$A + O = \begin{pmatrix} a_{11}+0 & a_{12}+0 \\ a_{21}+0 & a_{22}+0 \\ a_{31}+0 & a_{32}+0 \end{pmatrix},$$

consequentemente

$$A + O = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Logo, $A + O = A$.

Poderá ser usada a notação $O_{m\times n}$ para matriz nula, quando houver perigo de confusão com o número zero.

MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

Definição 6. *Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e k um número real, chama-se **produto** $k \cdot A$ a matriz $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ tal que $b_{ij} = k.a_{ij}$ para todo i e todo j. Isso significa que multiplicar uma matriz A por um número k é construir uma matriz B formada pelos elementos de A todos multiplicados por k, ou seja,*

$$k.A = [ka_{ij}]_{m\times n}.$$

Exemplo 6. *Dada a Matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Determine a matriz $-2A$.*

$$-2\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -20 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

MULTIPLICAÇÃO ENTRE MATRIZES

Definição 7. *O produto da Matriz $A = (a_{ik})_{m\times p}$ pela Matriz $B = (b_{kj})_{p\times n}$ é a Matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ tal que cada elemento c_{ij} de **C** é igual à soma dos produtos dos elementos da **i-ésima linha de A** pelos correspondentes elementos da **j-ésima coluna de B**. Portanto, podemos observar que só há o produto entre duas se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda.*
Simbolicamente:

$$C = A.B$$
$$\Updownarrow$$
$$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + ai2.b_{2j} + a_{i3}.b_{3j} + \cdots + a_{ip}.b_{pj}$$

Exemplo 7. *Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, obter a Matriz $A.B$.*

$$A.B = \begin{pmatrix} 1.2 + 3.1 + 2.1 & 1.1 + 3.0 + 2.1 & 1.3 + 3.2 + 2.0 \\ 2.2 + 1.1 + 1.1 & 2.1 + 1.0 + 1.1 & 2.3 + 1.2 + 1.0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+3+2 & 1+0+2 & 3+6+0 \\ 4+1+1 & 2+0+1 & 6+2+0 \end{pmatrix}.$$

Portanto

$$A.B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 9 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

PROPRIEDADES QUE NÃO SE APLICA A MULTIPLICAÇÃO ENTRE MATRIZES

- Comutativa

  Em geral, multiplicação de matrizes **não é comutativa**, ou seja, as matrizes **AB** e **BA não são obrigatoriamente iguais**. Existem, portanto, matrizes A e B tais que **AB** $\neq$ **BA**.

  Exemplo 8. *Sejam dadas as matrizes A e B, desse modo:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

  A multiplicação $A.B$ é dada por

$$A.B = \begin{pmatrix} 2.1+3.3+5.1 & 2.0+3.2+5.4 \\ 1.1+4.3+6.1 & 1.0+4.2+6.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+9+5 & 0+6+20 \\ 1+12+6 & 0+8+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 26 \\ 19 & 32 \end{pmatrix};$$

  Por outro lado, a multiplicação $B.A$ é dado por

$$B.A = \begin{pmatrix} 1.2+0.1 & 1.3+0.4 & 1.5+0.6 \\ 3.2+2.1 & 3.3+2.4 & 3.5+2.6 \\ 1.2+4.1 & 1.3+4.4 & 1.5+4.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 3+0 & 5+0 \\ 6+2 & 9+8 & 15+12 \\ 2+4 & 3+16 & 5+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 8 & 17 & 27 \\ 6 & 19 & 29 \end{pmatrix}.$$

  Assim sendo, é fácil verificar que $A.B \neq B.A$

- Anulamento de produto

  Na multiplicação de matrizes, **não vale** a "lei do anulamento do produto", ou seja, o produto de duas matrizes pode ser nulo mesmo que ambas sejam não nulas. Desse modo, existem portanto, Matrizes A e B tais que **A** $\neq 0$, **B** $\neq 0$ e **AB** $= 0$.

  Exemplo 9. *Sejam dadas as Matrizes A e B não nulas,* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

  Assim, $A.B$ é dado por:

$$A.B = \begin{pmatrix} 1.0+1.0 & 1.1+1.(-1) \\ 0.0+0.0 & 0.1+0.(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 & 1-1 \\ 0+0 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Cancelamento

  Na multiplicação de matrizes, **não vale** a "lei do cancelamento", ou seja: na igualdade $AC = BC$ não se pode "cancelar"C e concluir que $A = B$. Sendo assim, existem portanto Matrizes A, B e C tais que $AC = BC$ **e** $A \neq B$.

Exemplo 10. *Sejam dadas as matrizes A, B e C não nulas, desse modo*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

A multiplicação $A.C$ é dada por

$$A.C = \begin{pmatrix} -2.4 + 3.2 & -2.2 + 3.1 \\ 5.4 + 1.2 & 5.2 + 1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 + 6 & -4 + 3 \\ 20 + 2 & 10 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 22 & 11 \end{pmatrix}.$$

Fazendo a multiplicação de $B.C$, teremos

$$B.C = \begin{pmatrix} -1.4 + 1.2 & -1.2 + 1.1 \\ 2.4 + 7.2 & 2.2 + 7.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + 2 & -2 + 1 \\ 8 + 14 & 4 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 22 & 11 \end{pmatrix}.$$

Portanto podemos que algumas propriedades, não são verdadeiras na multiplicação entre matrizes.

1.1.2 MATRIZ TRANSPOSTA

Definição 8. *A matriz transposta da matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é $A^t = (b_{ij})_{n\times m}$, tal que $bij = a_{ji}, \forall i \in (1, 2, 3, \ldots, m)$, $\forall j \in (1, 2, 3, \ldots, n)$. Portanto, a Matriz transposta é **trocar** ordenadamente linha por colunas.*

Exemplo 11. *A transposta da Matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ é dada por:*

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 Determinantes

Os breves comentários a seguir sobre à história e os conceitos sobre Determinantes apoiam-se nas obras [1] e [6].

Os primeiros estudos sobre Determinantes datam do século 111 a.C. Mas foi só em 1683 que o japonês Takakazu Seki Kowa (1642-1708) usou a ideia de Determinante em seus trabalhos sobre Sistemas Lineares. O uso do Determinante no Ocidente começou 10 anos depois, com um trabalho de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), ligado também a Sistemas Lineares. O francês Étienne Bézout (1730-1783) sistematizou, em 1764, o processo de estabelecimento dos sinais dos termos de um Determinante. E coube a outro francês, Alexandre Théophile Vandermonde (1735-1796), a primeira abordagem da teoria dos Determinantes. O termo Determinante, com o sentido atual, surgiu em 1812, em um trabalho de AugustinLouis Cauchy (1789-1857) sobre o assunto. Além de Cauchy, quem mais contribuiu para consolidar a teoria dos Determinantes foi o alemão Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851). Deve-se a ele a forma simples como essa teoria se apresenta até hoje.

2.1 Permutações

Seja $n \geq 1$ um número natural. Consideremos N_n = $\{1, \cdots, n\}$.

Definição 9. *Toda aplicação bijetora $\sigma : N_n \to N_n$ chama-se permutação do conjunto N_n.*

Se σ e ϕ são permutações de N_n, então σ o ϕ: $N_n \to N_n$ também é uma permutação, conforme a Matriz (2.1).

A aplicação idêntica de N_n (indicaremos por id) é obviamente uma permutação. Além disso, a inversa σ^{-1} de uma permutação σ de N_n também é uma permutação de N_n.

Notação: indicaremos abreviadamente uma permutação σ de N_n por

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Exemplo 12. *Se $n = 2$, existem duas $(= 2!)$ permutações do conjunto $N_2 = \{1, 2\}$ que são*

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \; e \; \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 13. *Existem $6(= 3!)$ permutações de $N_3 = \{1, 2, 3\}$, são elas*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definição 10. *Consideremos uma permutação de N_n conforme a matriz* (2.1). *Seja r o número de pares ordenados (i, j) com $1 \leq i < j \leq n$ tais que σ(i)> $\sigma(j)$. Chama-se sinal da permutação σ o número inteiro representado por sgn(σ), que é:*

$$sgn(\sigma) = \begin{cases} 1, se \quad r \quad \text{é} \quad par, \\ -1, se \quad r \quad \text{é} \quad \acute{\imath}mpar. \end{cases}$$

Exemplo 14. *Seja* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$*, calcule o sinal de σ .*
Logo, os pares (i, j) com $1 \leq i < j \leq 3$ e σ(i)> $\sigma(j)$ são $(1, 2)$ e $(1, 3)$ logo $r = 2$ e $sgn(\sigma) = 1$.

Exemplo 15. *Seja* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$*. Calcule o sinal de σ:*
Temos que o único par (i, j) com $1 \leq i < j \leq 3$ e σ(i)> $\sigma(j)$ é $(2, 3)$. Então $r = 1$ e $sgn(\sigma) = -1$.

Se σ é uma permutação de N_n, diremos que σ é uma permutação par se $sgn(\sigma) = 1$ e ímpar se $sgn(\sigma) = -1$.

2.2 Determinantes

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz real de ordem n. Consideremos um produto da forma

$$a_{1,\sigma(1)}.a_{2,\sigma(2)}. \cdots .a_{n,\sigma(n)},$$

onde σ é uma permutação do conjunto de N_n. Nesse produto aparece apenas um elemento de cada linha de A.

$$sgn(\sigma)a_{1,\sigma(1)}.a_{2,\sigma(2)}. \cdots .a_{n,\sigma(n)}.$$

Finalmente, somemos todos os números assim obtidos, de maneira que σ percorra o conjunto de todas as permutações de N_n. Teremos, portanto, $n!$ parcelas na somatória:

$$\sum_{\sigma} sgn(\sigma)a_{1,\sigma(1)}.a_{2,\sigma(2)}. \cdots .a_{n,\sigma(n)}.$$

Definição 11. *Chama-se Determinante da matriz A de ordem n o número real:*

$$det(A) = \sum_{\sigma} sgn(\sigma)a_{1,\sigma(1)}.a_{2,\sigma(2)}. \cdots .a_{n,\sigma(n)}.$$

No que segue:

Usaremos como notação para determinante de uma matriz A, det A ou |A|.

Vamos agora usar Definição 11 para calcular o determinantes de matrizes de ordens 1, 2 e 3.

Determinante de ordem 1

$$\text{Se } A = (a_{11}) \text{ então } det(A) = a_{11}.$$

Determinante de ordem 2

Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in N_2 = \{1, 2\}$, temos que, as permutações do conjunto N_2 e seus sinais são:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \ (sgn\sigma = 1) \text{ e } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \ (sgn\sigma = -1).$$

Logo, $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Exemplo 16. *Calcule o valor do Det B =* $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$.

$$Det\ B = 1.9 - 2.3 = 9 - 6 = 3$$

Observação: Note que para calcular um determinante de ordem 2 basta fazer a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal com o produto dos elementos da diagonal secundária.

Determinante de ordem 3

Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in N_3 = \{1, 2, 3\}$. As permutações do conjunto N_3 e seus respectivos sinais são:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, sgn(\sigma_1) = 1 \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \text{sgn } (\sigma_2) = -1$$
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, sgn(\sigma_3) = 1 \qquad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, sgn(\sigma_4) = -1$$
$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, sgn(\sigma_5) = 1 \qquad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, sgn(\sigma_6) = -1$$

Logo,

$$DetA = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

2.2.1 TÉCNICAS PARA CALCULAR UM DETERMINANTE

REGRA DE SARRUS

A Regra de Sarrus é uma técnica de memorização para o cálculo de um determinante de ordem 3. Como será mostrado passo a passo utilizando a matriz 2.2:

Determine o valor do Determinante abaixo:

$$DetC = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{2.2}$$

1º Passo:

Repetir as duas primeiras filas da Matriz 2.2;

$$\text{Det C} = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right|.$$

2º Passo:

Realizando o somatório do produto dos elementos da diagonal principal. De acordo com o processo abaixo:

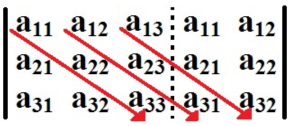


Figura 1 – Soma dos produtos da diagonais principais

logo,

$$a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{21}.$$

3º Passo:

Utilizando o mesmo processo de somatório do produto dos elementos da diagonal secundária, conforme a figura 3 obtemos:

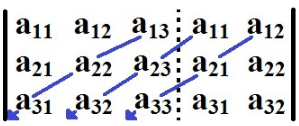


Figura 2 – Soma dos produtos das diagonais secundárias

logo,

$$a_{13}.a_{22}.a_{31} + a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}.a_{21}.a_{33}.$$

4º Passo:

A diferença entre o produto dos termos da diagonal principal com o produto dos termos da diagonal secundária é o det C, como:

$$detC = (a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{21}) - (a_{13}.a_{22}.a_{31} + a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}.a_{21}.a_{33})$$

Exemplo 17. *Calcule o valor de det C =* $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

$$\text{Det C} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 5 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & -2 \end{array}\right|$$

$$\begin{aligned} \text{det C} &= 1.(-1).4 + 5.2.0 + 0.2.(-2) - [0.(-1).0] - [2.(-2).1] - (5.2.4) \\ &= -4 + 0 + 0 + 0 + 4 - 40 \\ &= -40. \end{aligned}$$

DESENVOLVIMENTO DE LAPLACE

Para determinante de ordem maior que 3, iremos demonstrar o Teorema de Laplace, sabendo que há outros métodos para resolução, de acordo com (Boldrini, 1980),

Seja $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ temos que:

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Note que,

$$detA = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Assim, o determinante da matriz inicial 3×3 pode ser expresso em função dos determinantes de submatrizes 2×2, isto é,

$$\text{det A} = a_{11}|\mathbf{A}_{11}| - a_{12}|\mathbf{A}_{12}| + a_{13}|\mathbf{A}_{13}|$$

onde $\mathbf{A}_{ij}$ é a submatriz da inicial, de onde a i-ésima linha e a j-ésima coluna omitidas. Além disso, se chamarmos

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ij}|$$

obtemos a expressão

$$\det A = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}.$$

Esta propriedade continua sendo válida para matrizes de ordem n, onde é demonstrada na obra de *(Boldrini,1980)* e assim podemos expressar:

$$\begin{aligned} detA_{n\times n} &= a_{i1}\Delta_{i1} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} det\mathbf{A}_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}. \end{aligned}$$

O número Δ_{ij} (que é o determinante afetado pelo sinal $(-1)^{i+j}$ da submatriz $\mathbf{A}_{ij}$, obtida de **A** omitindo-se a *i-ésima* linha e a *j-ésima* coluna) é chamado de *cofator* ou *complemento algébrico* do elemento a_{ij}. Observe que na fórmula dada, o determinante foi "desenvolvido"pela *i-ésima* linha. Uma forma análoga é válida para as colunas.

3 Sistemas Lineares

Na Matemática ocidental antiga, são poucas as aparições de Sistemas de Equações Lineares. No Oriente, os chineses representavam os Sistemas Lineares por meio de seus coeficientes escritos com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro. Assim, acabaram descobrindo o método de resolução por eliminação, que consiste em anular coeficientes por meio de operações elementares. Exemplos deste procedimento encontram-se num texto do século 111 a.C., chamado Nove capítulos sobre a arte da Matemática. Neste capítulo, utilizamos como referências as obras [1], [4] e [2].

3.1 Conceitos

Definição 12. *Uma equação linear é uma equação escrita na forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \tag{3.1}$$

onde $a_1, a_2, ..., a_n$ *e* b *são números reais.*

Exemplo 18. *As equações* $2x + 3y = 6$ *e* $3x + 8y - 7z = 10$ *são lineares.*

Exemplo 19. *As equações* $x^2 + 3y = 0$ *e* $xy + 5z = 20$ *não são equações lineares.*

Definição 13. *Uma solução de uma equação* (3.1) *é uma sequência de* ***n*** *números reais, indicada por* $(x_1, x_2, ..., x_n)$*, tal que:*

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b \tag{3.2}$$

é uma frase verdadeira.

Definição 14. *Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3.3}$$

com a_{ij}*,* $b_j \in \mathbb{R}$*, para todos* $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$*.*

No Sistema Linear (3.3), tem-se que:

- a_{ij} é o coeficiente da variável x_j da **i-ésima** equação.

Uma solução do sistema (3.3) é uma *n-upla* de números reais μ = $(b_1, b_2, ...b_n)$ que é solução de cada uma das m equações do sistema. O conjunto solução do sistema é formado por todas as soluções do sistema (3.3).

3.1.1 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Para a resolução de sistema de equações lineares em $\mathbb{R}^2$, iremos apresentar alguns procedimentos mais utilizados no ensino básico, como o método de adição e substituição. Comos serão mostrados no decorrer desta seção.

Definição 15. *Dizemos que dois sistemas de equações lineares são equivalentes quando eles tem o mesmo conjunto solução.*

MÉTODO DA ADIÇÃO

O método da soma consiste em eliminar uma incógnita pela soma dos termos semelhantes das equações que o compõem, e desta forma trabalhar com a solução primeiro de uma equação e depois da outra.

Exemplo 20. *Resolver o sistema:*

$$\begin{cases} x & + & 4y & = & 100 \\ 2x & + & 3y & = & 90 \end{cases}. \tag{3.4}$$

Para eliminarmos x, por exemplo, devemos multiplicar os valores da primeira equação do sistema (3.4) *por (-2) e somar o resultado com a segunda equação, obteremos a equação* (20)*, como demostrado abaixo:*

$$\begin{cases} x & + & 4y = 100, & \times(-2) \\ 2x & + & 3y = 90. \end{cases}$$

Somando as equações do sistema (20)*, temos,*

$$\begin{cases} -\,2x & - & 8y = -200 \\ 2x & + & 3y = 90 \end{cases} + \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} 0x - 5y &= -100 \\ y &= \frac{-110}{-5} \\ y &= 22. \end{aligned}$$

Substituindo $y = 22$ na primeira equação do sistema (3.4)*, obtemos o valor de x.*

$$\begin{aligned} x + 4y &= 100 \\ x + 4.(22) &= 100 \\ x + 88 &= 100 \\ x &= 100 - 88 \\ x &= 12. \end{aligned}$$

Portanto a solução desse sistema é S = {(12; 22)}.

MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

O objetivo do método é o mesmo aplicado no método de adição; porém, devemos isolar uma das incógnitas de uma das equação e substitui-lo na outra, sendo assim a equação, ficará somente com uma incógnita.

Exemplo 21. *Utilizaremos o sistema* (3.4) *para resolução através do método da substituição*

Isolando x na da primeira equação do sistema (3.4)*, temos*

$$\begin{aligned} x + 4y &= 100 \\ x &= 100 - 4y \end{aligned}$$

Substituindo na segunda equação $2x + 3y = 90$

$$\begin{aligned} 2 \cdot (100 - 4y) + 3y &= 90 \\ 200 - 8y + 3y &= 90 \\ 200 - 5y &= 90 \\ y &= \frac{90 - 200}{-5} \\ y &= 22. \end{aligned}$$

Substituindo o valor de y na primeira equação $x + 4y = 100$*.*

$$\begin{aligned} x + 4 \cdot (22) &= 100 \\ x + 88 &= 100 \\ x &= 100 - 88 \\ x &= 12. \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto solução do sistema é $S = (12; 22)$*.*

3.1.2 ESCALONAMENTO

Para a resolução de sistemas lineares em $\mathbb{R}^3$, utilizaremos o método de escalonamento. Este método consiste em aplicar três operações elementares, a saber:

I) Permutação de duas equações;

II) Multiplicação de uma equação por um número real diferente de zero;

III) Substituição de uma equação por sua soma com outra equação previamente multiplicada por um número real diferente de zero.

As operações elementares abaixo, quando aplicada em um sistema de equações lineares, dá origem a sistemas equivalentes. Iremos mostrar esse método através de alguns exemplos.

Exemplo 22. *Considere o sistema linear:*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 9y & + & z & = & -29 \\ -x & + & 4y & - & z & = & 10 \\ 2x & - & 7y & + & 3z & = & -13 \end{array}\right. . \tag{3.6}$$

Primeiramente multiplicamos a 2ª equação por -1 (operação II) do sistema (3.6). *Em seguida, permutamos entre si as duas primeiras equações (operação I), a fim de tornar unitário o coeficiente de x na 1ª equação, o que é conveniente para o processo de escalonamento:*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 3x & - & 9y & + & z & = & -29 & \\ -x & + & 4y & - & z & = & 10 & \times\ (-1) \\ 2x & - & 7y & + & 3z & = & -13 & \end{array}\right. ,$$

então,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 4y & + & z & = & -10 \\ 3x & - & 9y & + & z & = & -29 \\ 2x & - & 7y & + & 3z & = & -13 \end{array}\right. . \tag{3.7}$$

Agora aplicamos a operação (III), somando à 2ª equação com a 1ªequação do sistema (3.7) *previamente multiplicada por (-3), posteriormente somamos à 3ª equação a 1ª equação do sistema* (3.7) *previamente multiplicada por (-2):*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrrll} x & - & 4y & + & z & = & - & 10 & \times(-3) & \times(-2) \\ 3x & - & 9y & + & z & = & - & 29 & & \\ 2x & - & 7y & + & 3z & = & - & 1 & & \end{array}\right. .$$

Logo, permutamos entre si as duas últimas equações (operação I):

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 4y & + & z & = & -10 \\ & & 3y & - & 2z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 7 \end{array}\right. . \tag{3.8}$$

Somamos à 3ª equação com a 2ª do sistema (3.9) *previamente multiplicada por (-3) (operação III):*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & 4y & + & z & = & -10 & \\ & & 3y & - & 2z & = & 1 & \\ & & y & + & z & = & 7 & \times(-3) \end{array}\right. ,$$

temos,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 4y & + & z & = & -10 \\ & & y & + & z & = & 7 \\ & & & - & 5z & = & -20 \end{array}\right. . \tag{3.9}$$

Com base no sistema (3.9)*, temos que,*

$$\begin{aligned} -5z &= -20 \\ z &= \frac{-20}{-5} \\ z &= 4. \end{aligned}$$

Substituindo $z = 4$ *na 2ª equação do sistema* (3.9) *temos,*

$$\begin{aligned} y + 4 &= 7 \\ y &= 7 - 4 \\ y &= 3. \end{aligned}$$

Por fim, substituindo os valores de $y = 3$ *e* $z = 4$*, na 1ª equação do sistema* (3.9) *temos,*

$$\begin{aligned} x - 4 \cdot (3) + 4 &= -10 \\ x - 12 + 4 &= -10 \\ x &= -10 + 12 - 4 \\ x &= -2. \end{aligned}$$

Desse sistema escalonado tiramos que $z = 4, y = 3$ *e* $x = -2$*. Logo, temos que* $S = (-2, 3, 4)$*.*

Exemplo 23. *Resolva o sistema:*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -10 \\ 3x & + & 7y & + & 2z & = & -19 \\ 5x & + & 12y & + & 5z & = & -21 \end{array} \right. . \tag{3.10}$$

Multiplicando a 1ª equação do sistema 3.10 por (-3) *e somando-se com a 2ª equação, obtemos:*

$$y + 5z = 11.$$

Substituindo a 2ª equação do sistema (3.10) *por* $y + 5z = 11$*, obtemos 3.11,*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -10 \\ & & y & + & 5z & = & 11 \\ 5x & + & 12y & + & 5z & = & -21 \end{array} \right. . \tag{3.11}$$

Multiplicando a 1ª equação do sistema 3.10 por -5 *e somando-se com a 3ª equação, obtemos:*

$$2y + 10z = 29.$$

Substituindo a 3ª equação do sistema 3.11 por $2y + 10z = 29$*, obtemos o sistema 3.12,*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -10 \\ & & y & + & 5z & = & 11 \\ & & 2y & + & 10z & = & 29 \end{array} \right. . \tag{3.12}$$

Multiplicando a 2ª equação do sistema 3.12 por (-2) *e somando-se com a terceira, obtemos:*

$$0z = 7. \tag{3.13}$$

Observando que a equação 3.13 não é satisfeita para nenhum valor de z, podemos concluir que o sistema (3.10) *não possui solução, ou seja,* $S = \emptyset$.

Exemplo 24. *Resolva o seguinte sistema*

$$\begin{cases} x & - & 2y & + & 3z & = & -11 \\ -2x & + & 5y & - & 7z & = & 27 \\ 3x & - & 5y & + & 8z & = & -28 \end{cases}. \tag{3.14}$$

Multiplicando a 1ª equação do sistema 3.14 por -2 *e somando-se com a 2ª equação, obtemos:*

$$y - z = 5. \tag{3.15}$$

Substituindo a 2ª equação do sistema 3.14 por $y - z = 5$, *obtemos o sistema 3.16:*

$$\begin{cases} x & - & 2y & + & 3z & = & -11 \\ & & y & - & z & = & 5 \\ 3x & - & 5y & + & 8z & = & -28 \end{cases}. \tag{3.16}$$

Multiplicando a 1ª equação por -3 e somando-se com a 3ª equação obtemos:

$$y - z = 5. \tag{3.17}$$

Substituindo a 3ª equação do sistema 3.16 por $y - z = 5$, *temos:*

$$\begin{cases} x & - & 2y & + & 3z & = & -11 \\ & & y & - & z & = & 5 \\ & & y & - & z & = & 5 \end{cases} \tag{3.18}$$

Multiplicando a 2ª equação do sistema 3.18 somando-se com a 3ª equação:

$$0z = 0. \tag{3.19}$$

Note que a equação 3.19 fica satisfeita para qualquer valor de z, logo a solução do sistema (3.14) *é dada por* $S = \mathbb{R}$.

3.2 Regra de Cramer

De acordo com a obra [1], esse método só se aplica a sistemas lineares em que o número de equações é igual ao número de incógnitas. Suponhamos que desejássemos resolver o sistema de *n-equações* e *n-incógnitas*.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Podemos escrever este sistema na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ou

$$A \cdot X = B$$

onde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ é a Matriz dos coeficientes e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ é a Matriz dos termos independentes, e $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, a matriz das incógnitas. Para esta equação suponhamos que det**A** $\neq 0$ e, portanto, que **A** tenha a inversa A^{-1}. Então

$$\begin{aligned} A^{-1}(\mathbf{AX}) &= A^{-1}\mathbf{B} \\ (A^{-1}A)\mathbf{X} &= A^{-1}\mathbf{B} \\ I_nX &= A^{-1}\mathbf{B} \\ X &= A^{-1}\mathbf{B}. \end{aligned}$$

Na forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Usando a relação para matriz inversa, temos:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \ldots & \Delta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{n1} & \ldots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Então

$$x_1 = \frac{b_1\Delta_{11} + \ldots + b_n\Delta_{n1}}{detA}.$$

Mas note que o numerador desta fração é igual ao determinante da matriz que obtemos de A, substituindo a primeira coluna pela matriz dos termos independentes. De fato, usando o desenvolvimento de Laplace, obtemos:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_{11}\Delta_{11} + \dots b_n\Delta_{n1}.$$

Ou seja

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

Fazendo deduções análogas, obtemos

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

Observe que no denominador temos o determinante da matriz dos coeficientes $(detA \neq 0)$, e no numerador aparece o determinante da matriz obtida de A, substituindo a *i-ésima* coluna pela coluna dos termos independentes. Este método de resolução de um sistema linear de n equações e n incógnitas, que só pode ser aplicado quando o determinante da matriz dos coeficientes for não nulo.

Exemplo 25. *Utilizando a Regra de Cramer, resolva o sistema*

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & - & 3y & + & 7z & = & 1 \\ x & & & + & 3z & = & 5 \\ & & 2y & - & z & = & 0 \end{array} \right. .$$

Resolução

$$det = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 14 - 3 - 12 = -1 \neq 0.$$

Logo,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{70 - 15 - 6}{-1} = -49.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-10 + 1}{-1} = 9.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{2 - 20}{-1} = 18.$$

Portanto a solução desse é $S = (-49, 9, 18)$.

4 Geometria Analítica

Para iniciarmos as aplicações geométricas, faz-se necessário que haja uma abordagem sobre conceitos básicos da Geometria Analítica que servirão de ferramentas para as demostrações no decorrer do trabalho, onde os conceitos descritos desse capítulo é baseado nas obras [9], [7] e [5].

4.1 O Plano Cartesiano: $\mathbb{R}^2$

Consideremos o plano definido pelo par de retas perpendiculares x e y, tal como mostra a Figura 3. O eixo horizontal recebe o nome de eixo das abcissas (x), já o eixo vertical recebe o nome de eixo das ordenadas (y) conforme mostra a Figura 3. O local onde os dois eixos se interceptam se chama origem, sendo representado pela letra O.

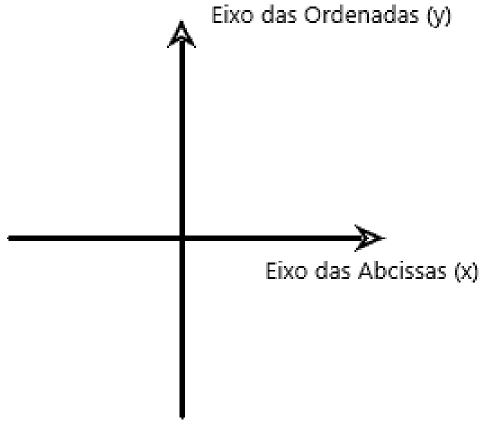


Figura 3 – Representação geométrica do Plano Cartesiano

.

A partir disso a Figura 4 nos mostra que os eixos são enumerados conforme a orientação das retas que os compõem, tal fato só é possível a partir da localização do eixo de Origem. Assim, o sistema está dividido em quatro quadrantes, são eles:

- **Primeiro Quadrante:** é aquele delimitado à direita pelo eixo OX e acima do eixo OY, que corresponde aos pares ordenados (x, y), tais que $x > 0$ e $y > 0$;
- **Segundo Quadrante:** é aquele delimitado à esquerda pelo eixo OX e acima do eixo OY, que corresponde aos pares ordenados (x, y), tais que $x < 0$ e $y > 0$;
- **Terceiro Quadrante:** é aquele delimitado à esquerda pelo eixo OX e abaixo do eixo OY, que corresponde aos pares ordenados (x, y), tais que $x < 0$ e $y < 0$;

- **Quarto Quadrante:** é aquele delimitado à direita pelo eixo OX e abaixo do eixo OY, que corresponde aos pares ordenados (x, y), tais que $x > 0$ e $y < 0$.

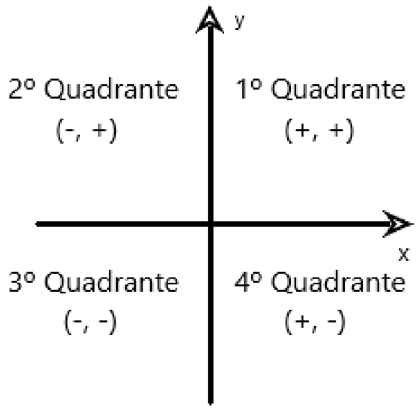


Figura 4 – Localização dos Quadrantes no Plano Cartesiano

Dessa forma, é possível localizar um ponto no gráfico através de seu par ordenado, o qual é composto por uma coordenada do eixo x em seguida uma coordenada do eixo y, genericamente representado por (x,y). Vejamos na Figura 5 o exemplo do ponto Q que possui par ordenado (a, b).

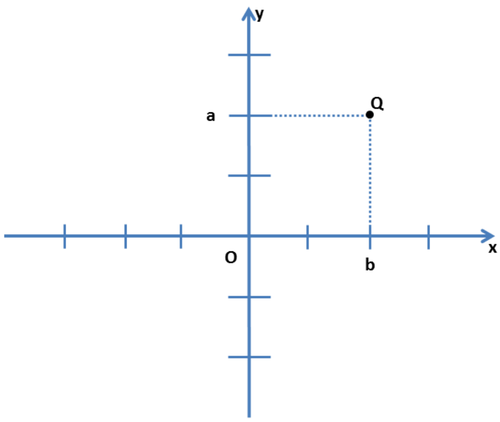


Figura 5 – Representação geométrica do par ordenado Q = (a, b)

.

Se considerarmos dois pontos Q e R, com pares ordenados iguais a (x_1, y_1) e (x_2, y_2), respectivamente, através de Q e R podemos construir o triângulo retângulo QRS, afim de demonstrar a equação que nos permite calcular a distância entre dois pontos, como mostrado na Figura 4.1.

A medida do lado QS é dada por $x_2 - x_1$, a medida do lado SR é dada por $y_2 - y_1$ e a medida do lado RQ é equivalente à distância entre os pontos Q e R. Devemos observar que, se tratando

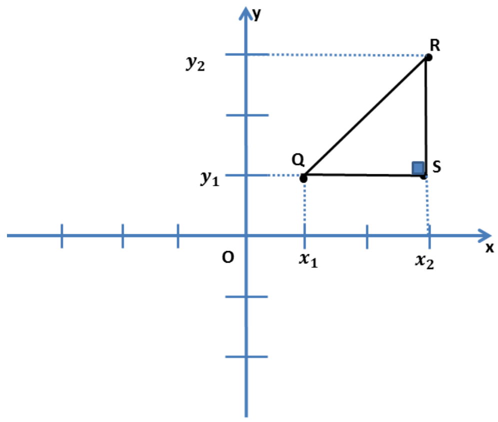


Figura 6 – Representação geométrica de distância entre dois pontos

.

de um triângulo retângulo, os lados assumem os seguintes papéis: RQ é a hipotenusa, QS e SR são catetos. Aplicando o Teorema de Pitágoras, obteremos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} (RQ)^2 &= (QS)^2 + (SR)^2 \\ (RQ)^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ (RQ) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \end{aligned}$$

4.2 Vetores no Plano

Vimos que cada par ordenado (x, y) corresponde a um ponto no plano. Se $(x, y) \neq (0, 0)$, além do ponto podemos também fazer corresponder ao par (x, y) uma seta. Assim, um par ordenado $(x, y) \neq (0, 0)$ pode ser representado por um ponto ou por uma seta, como na Figura 7. Quando utilizamos a seta, podemos associar a este par ordenado $(x, y) \neq (0, 0)$ direção, sentido e módulo.

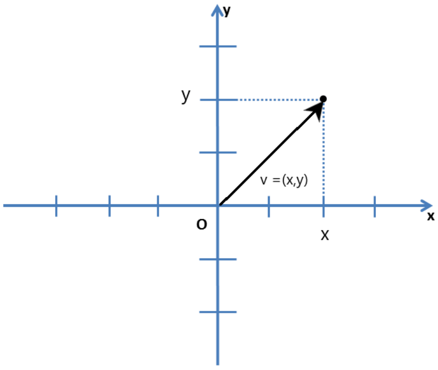


Figura 7 – Representação geométrica de um vetor

.

Esse objeto ao qual se pode associar os conceitos de direção, sentido e módulo é chamado um vetor.

Em vetor nulo é o vetor representado por um segmento orientado nulo, ou seja, de comprimento zero. É representado por $\vec{0}$ possui propriedades únicas entre todos os vetores assim como o zero, entre os números reais.

Temos, também, casos em que o vetor não parte da origem conforme mostra a Figura 8,

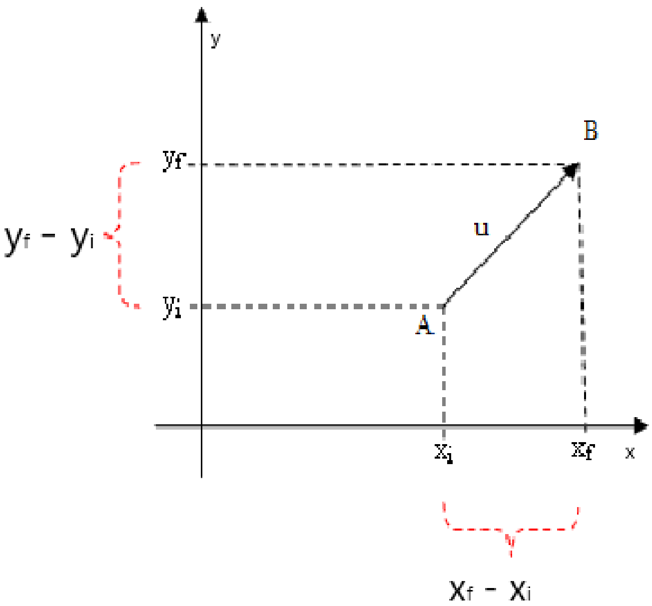


Figura 8 – Representação geométrica do Vetor $\vec{AB}$

Logo,

$$\vec{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

A todo vetor no plano podemos associar uma matriz coluna que o represente, ou seja, o vetor $u = (x_1, y_1)$ é equivalente à Matriz $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

Ao conjunto de todos os vetores no plano podemos associar duas operações, a adição e multiplicação por escalar, que são dadas por:

Se $u = (x, y)$ e $v = (a, b)$ são dois vetores e $k \in \mathbb{R}$, temos:

$a)$ $u + v = (x + a, y + b)$;

$b)$ $ku = (kx, ky)$.

4.3 Produto Escalar

Definição 16. *O produto escalar dos vetores* $u = (a, b)$ *e* $v = (c, d)$ *como sendo o número*

$$u \cdot v = ac + bd.$$

Exemplo 26. *Se* $u = (3, 2)$ *e* $v = (1, 4)$*, calcule* $u \cdot v$.

$$\begin{aligned} u \cdot v &= 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \\ u \cdot v &= 3 + 8 \\ u \cdot v &= 11. \end{aligned}$$

4.4 Equação Paramétrica

Seja $v = (a, b)$ um vetor não nulo e $P = (x_0; y_0)$ um ponto do plano, da geometria sabemos que existe uma única reta r com a direção de v e que contém P.

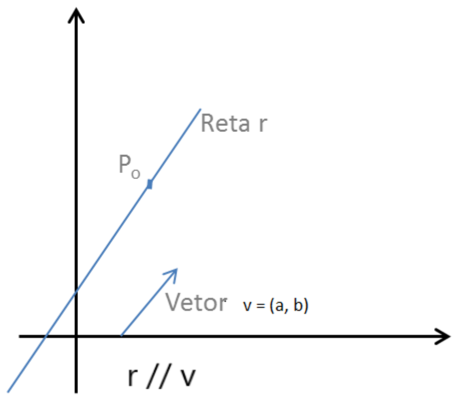


Figura 9 – Representação geométrica da reta r e o vetor v

Assim, um ponto $A = (x, y)$ pertence à reta r se, e somente se,

$$\vec{AP} = tv$$

$(x - x_0, y - y_0) = t(a, b)$. Isto equivale ao sistema (4.1)

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} . \tag{4.1}$$

Esse sistema de equações é chamado de **Equação Paramétrica** de r.

Exemplo 27. *Dadas as equações abaixo, determine o ponto que pertence a reta e seu vetor direção.*

$$x = 3 + 2t$$
$$y = 5 - 3t$$

Como podemos observar o ponto é $P(3, 5)$ e o vetor $v(2, -3)$.

4.5 Equação Cartesiana da Reta

Sabemos que as Equações Paramétricas de uma reta r paralela ao vetor não nulo $v = (a, b) \neq (0, 0)$ e que contém o ponto (x_0, y_0), conforme a Figura 4.4, são dadas pelo sistema (4.1). Com isso, podemos eliminar o parâmetro t das equações deste sistema, seguindo os seguintes passos:

- multiplicando a primeira equação por b e a segunda por a obtemos:

$$\begin{cases} bx = bx_0 + abt \\ ay = ay_0 + abt \end{cases} \tag{4.2}$$

- subtraindo as duas equações do sistema (4.2) obtemos uma nova equação dada por:

$$ay - bx = ay_0 - bx_0,$$

onde $ay_0 - bx_0$ é uma constante. Fazendo agora $c = ay_0 - bx_0$, temos a equação:

$$ay - bx = c. \tag{4.3}$$

A equação (4.3) é chamada de **equação cartesiana da reta** r.

Podemos reescrever a equação (4.3) da seguinte maneira:

$$y = \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}, \quad se\ a \neq 0. \tag{4.4}$$

Fazendo $m = \dfrac{b}{a}$ e $h = \dfrac{c}{a}$ na equação (4.4), obtemos:

$$y = mx + h. \tag{4.5}$$

Também podemos observar na Figura 10 que o ângulo de inclinação θ é igual a $tg\ \theta = \dfrac{b}{a}$, em que temos que $\dfrac{b}{a}$ corresponde ao valor m da equação (4.5) e esse número é chamado de Declividade de r ou coeficiente angular.

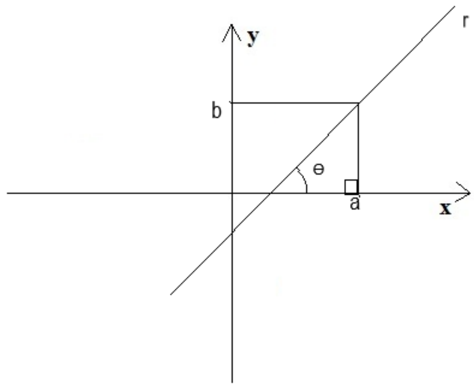


Figura 10 – Representação geométrica da inclinação de r

4.6 O Espaço Euclidiano: $\mathbb{R}^3$

Para definirmos vetores no espaço bem como suas propriedades é necessário primeiramente conhecermos a construção do mesmo. Assim como no plano, tal construção acontece de acordo com a inclinação de suas retas originárias; porém, a diferença se dá pela quantidade. O plano cartesiano é determinado por duas retas, é chamado de bidimensional $(2D)$ ou $\mathbb{R}^2$, já o espaço é determinado por três retas que formam um ângulo de 90º duas a duas e é chamado de tridimensional $(3D)$ ou $\mathbb{R}^3$, conforme Figura 11.

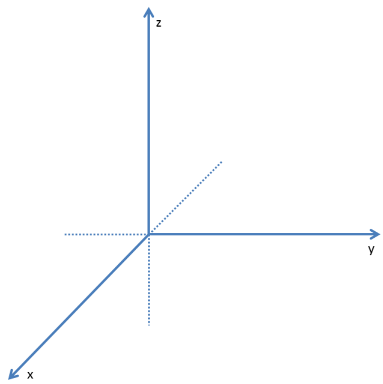


Figura 11 – O Espaço Euclidiano: $\mathbb{R}^3$

Cada ponto do espaço é correspondente à uma terna ordenada, dada pelas projeções nos eixos, seguindo essa ordem estabelecida. Assim, um ponto no espaço pode ser genericamente representado por $p = (x_1, y_1, z_1)$, ou por sua matriz da seguinte forma $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$.

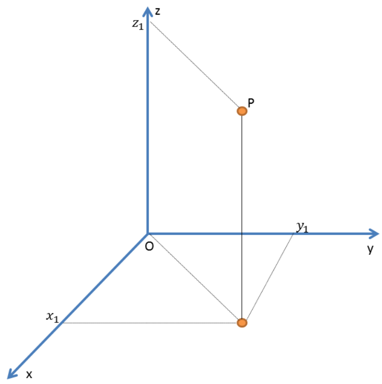


Figura 12 – Ilustração de um ponto no espaço

4.6.1 VETORES NO ESPAÇO

Um vetor no espaço $\mathbb{R}^3$ é uma terna ordenada de números reais (x, y, z) e interpretamos a seta OP como sendo sua representação gráfica e que tenha a mesma direção, mesmo sentido e mesma intensidade, onde podemos observar pela Figura 13. O vetor $O = (0, 0, 0)$ é o vetor nulo do espaço e sua representação gráfica é a origem dos sistema de coordenadas.

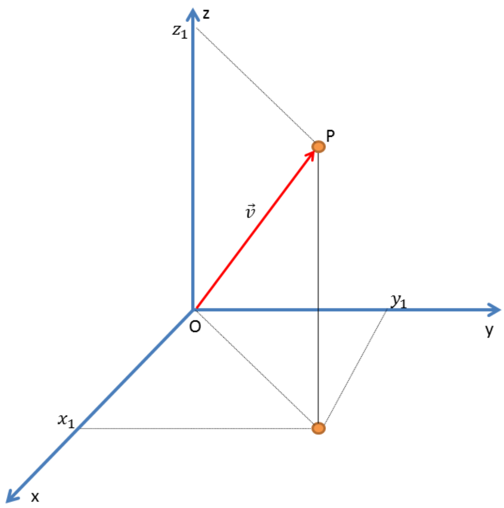


Figura 13 – Representação geométrica de um vetor no espaço $\mathbb{R}^3$

.

4.6.2 PRODUTO VETORIAL

Dado um vetor $w = (x, y, z)$ que seja simultaneamente perpendicular a dois vetores dados, $u = (a, b, c)$ e $v = (a_1, b_1, c_1)$. Logo, devemos ter $u \cdot w = 0$ e $v \cdot w = 0$, logo:

$$ax + by + cz = 0$$
$$a_1x + b_1y + c_1z = 0$$

Este sistema admite uma infinidade de soluções. Uma delas é:

$$x = bc_1 - b_1c$$
$$y = a_1c - ac_1$$
$$z = ab_1 - a_1b,$$

como pode ser verificado por substituição. Portanto, o vetor

$$w = (bc_1 - b_1c, a_1c - ac_1, ab_1 - a_1b)$$

O vetor w é chamado de **Produto Vetorial** de u por v e indicado por $u \times v$.

Agora, mostraremos um método para calcular o produto vetorial de $u = (a, b, c)$ por $v = (a_1, b_1, c_1)$, temos:

$$u \times v = (bc_1 - b_1c, a_1c - ac_1, ab_1 - a_1b)$$

exige. Primeiro notamos que, se

$$\begin{aligned} i &= (1, 0, 1) \\ j &= (0, 1, 0) \\ k &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

logo,

$$(x, y, z) = xi + yj + zk.$$

como se fosse um determinante da terceira ordem sobre o conjunto dos números reais. Se resolvermos este determinantes segundo elementos da primeira linha, obtemos

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = (bc_1 - b_1c)i + (a_1c - ac_1)j + (ab_1 - a_1b)k = (bc_1 - b_1c, a_1c - ac_1, ab_1 - a_1b) = u \times v$$

Exemplo 28. *Se $u = (1, 3, 1)$ e $v = (2, 4, 3)$, utilizando o método apresentado. Determine o produto vetorial $u \times v$.*

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{matrix} \Bigg| = 6i + 2j + 4k - 6k - 4i - 3j = 2i - 1j - 2k$$

logo,

$$u \times v = (2, -1, -2)$$

4.7 Vetores Linearmente Independentes

Teorema 1. - *Os vetores* $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3), \vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ *e* $\vec{w} = (c_1, c_2, c_3)$ *são linearmente independentes, se e somente se,*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Demonstração. Os vetores **u, v, w**, são linearmente independentes se o sistema:

$$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = 0 \tag{4.6}$$

possuir somente a solução trivial $x = y = z = 0$.

Em coordenadas podemos expressar a equação (4.6) como:

$$x(a_1, a_2, a_3) + y(b_1, b_2, b_3) + z(c_1, c_2, c_3) = 0.$$

E logo teremos o sistema:

$$B = \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}.$$

Pela regra de Cramer o sistema anterior tem solução única se e somente se seu determinante for não nulo:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

□

4.7.1 EQUAÇÃO DO PLANO

Dado $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto do espaço e $v = (a, b, c)$ um vetor não-nulo, pertencente a um único plano α perpendicular ao vetor v. Isto significa que, qualquer que seja o ponto $P(x, y, z)$ de α, o vetor $\vec{AP}$ é perpendicular a v. ou seja, o ponto P pertence a α

$$\vec{AP} \cdot v = 0.$$

Como $\vec{AP} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$, temos

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

que é a **Equação Cartesiana do Plano** α

Exemplo 29. *A equação do plano que contém o ponto $A = (2, 0, 3)$ e é perpendicular ao vetor $v = (2, 4, 3)$ é:*
Temos que

$$v \cdot \vec{AP} = O.$$

qualquer que seja o ponto $P = (x, y, z)$ do plano. Portanto,

$$\begin{aligned} (2,4,3)\cdot(x-2, y-0, z-3) &= 0 \\ 2x - 4 + 4y + 3z - 9 &= 0 \\ 2x + 4y + 3z - 13 &= 0 \\ 2x + 4y + 3z &= 13. \end{aligned}$$

A equação pode ser representada na forma $ax + by + cz + d = 0$, como podemos observar pelo exemplo 29, onde chamaremos de Equação Geral do Plano.

4.7.2 VETOR NORMAL A UM PLANO

Dado um plano π pela sua equação geral: $ax + by + cz + d = 0$, onde a, b, c e d são números reais, e a, b e c não são nulos, um vetor normal ao plano π é um vetor que é ortorgonal a todos os vetores paralelos ao plano π.

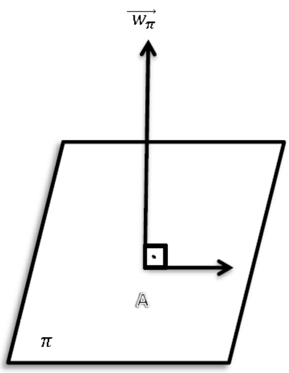


Figura 14 – Representação Geométrica de um vetor normal ao plano

Sejam $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $X = (x, y, z)$ pertencem a $\pi : ax + by + cz + d = 0$ e $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ e também, $(X - A) = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Iremos provar que $\vec{w}_\pi = (a, b, c)$ é normal ao plano π. Como $ax + by + cz + d = 0$ e $ax_0 + by_0 + cz_0 = d = 0$, se subtrairmos as duas equações membro a membro obtém-se $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, que é o produto escalar $(a, b, c).(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$ isso implica, que $\vec{w}_\pi \cdot (X - A) = 0$. Como $(X - A)$ é um vetor qualquer contido no plano, logo o vetor $\vec{w}_\pi$ é normal ao plano.

Teorema 2. *Seja π um plano de equação $ax + by + cz + d = 0$ e $\vec{n} = (a, b, c)$. Então, quaisquer que sejam os pontos P_1 e P_2 em π, $\vec{n}$ será ortogonal a $\overrightarrow{P_1P_2}$, dizemos que $\vec{n}$ é ortogonal a π.*

Demonstração. Sejam $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ dois pontos quaisquer de π. Temos:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \quad e \quad ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0.$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0$, reescrevendo na forma de produto escalar:

$$(a, b, c)(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = 0 \Rightarrow \vec{n}.P_1\vec{P}_2 = 0.$$

Mostrando que $\vec{n} \perp \overrightarrow{P_1P_2}, \forall P_1, P_2 \in \pi$. □

O vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ é um **vetor normal** ao plano $ax + by + cz + d = 0$. Qualquer vetor, não nulo, paralelo a $\vec{n}$ é também um vetor normal ao plano, como foi demonstrado no Teorema 2.

Com isso podemos concluir que:

Exemplo 30. *Se a equação de um plano for* $3x + 2y + 7z + 9 = 0$*, saberemos que é ortogonal ao vetor* $(3, 2, 7)$.

Exemplo 31. *Os planos* $2x + y + 3z + 1 = 0$ *e* $4x + 2y + 6z + 7 = 0$ *certamente são paralelo pois o primeiro é ortoganal a* $(2, 1, 3)$ *e o segundo a* $(4, 2, 6)$ *que são vetores paralelos.*

Teorema 3. *Se um plano* π *for ortogonal ao vetor* $\vec{n} = (a, b, c)$*, uma equação de* π *será* $ax + by + cz = d$.

Demonstração. Fixemos $A = (x_0, y_0, z_0)$ em π.

Para cada $P = (x, y, z)$ do plano π, teremos $\vec{AP} \perp \vec{n}$, ou seja, $\vec{AP}.\vec{n} = 0$. Daí, $(x - x_0, y - y_0, z - z_0).(a, b, c) = 0$, o que nos dá:

$$ax + by + cz + (-ax_0 - by_0 - cz_0) = 0,$$

onde $(-ax_0 - by_0 - cz_0)$ chamaremos de coeficiente d, logo

$$logo,\ ax + by + cz + d = 0. \tag{4.7}$$

□

Exemplo 32. *Dada a equação* $2x + 3y + 9z + 11 = 0$. *Qual o seu vetor normal?*

Como podemos observar pelo enunciado temos que $a = 2$, $b = 3$ *e* $c = 9$, *logo*

$$\vec{n} = (2, 3, 9).$$

5 Estudo Geométrico dos Sistemas Lineares

Nesse capítulo mostraremos como é a representação dos sistemas lineares na forma geométrica, no primeiro momento em $\mathbb{R}^2$ e depois em $\mathbb{R}^3$.

Em uma equação linear com duas incógnitas, o conjunto solução é representado graficamente por uma reta no plano cartesiano; isto é, o conjunto de todos os pares (x; y) $\mathbb{R}^2$ que satisfazem uma equação da forma ax + by = c a equação de uma reta, conforme já vimos no capítulo 4. Por exemplo, o conjunto solução da equação $2x + y = 3$ é ilustrado na Figura 15.

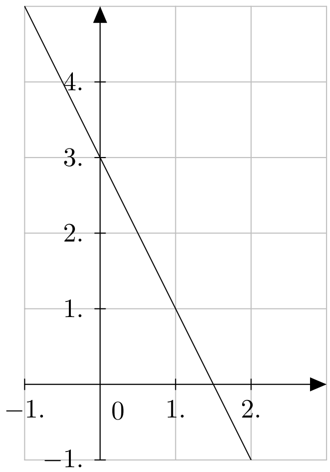


Figura 15 – Representação geométrica da reta com equação cartesiana $2x + y = 3$

Já em uma equação linear com três incógnitas, o conjunto solução representa graficamente um plano do espaço de outro modo, o conjunto de todos os ternos que satisfazem uma equação da forma $ax + by + cz = d$ define um plano. Por exemplo, o conjunto solução da equação $3x + 2y + z = 0$ determina graficamente o plano representado na figura 16.

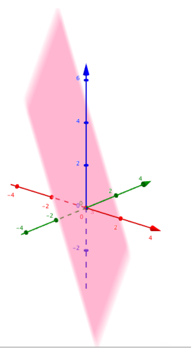


Figura 16 – Representação geométrica do plano $3x + 2y + z = 0$

5.1 Representação Gráfica de um Sistema Linear em $\mathbb{R}^2$

Nessa seção, iremos estudar geometricamente as posições entre duas retas em sistema cartesiano em $\mathbb{R}^2$. Considere um sistema linear escrito da seguinte maneira:

$$\begin{cases} ax + by = \alpha & (r) \\ cx + dy = \beta & (s) \end{cases} . \tag{5.1}$$

Uma solução do sistema (5.1) é um par (x, y) que satisfaz ambas as equações como foi definido no Capítulo 4.

Temos apenas 3 possibilidades de posições geométricas das r e s: concorrentes, paralelas distintas ou coincidentes.

Resolvendo esse sistema pelo método de adição, temos:

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases} .$$

$$\begin{cases} ax + by = \alpha & (d) \\ cx + dy = \beta & (-b) \end{cases} \quad +$$

ou seja,

$$adx - bcx = \alpha d - \beta b \quad \Rightarrow \quad x(ad - bc) = \alpha d - \beta b \tag{5.2}$$

da mesma forma, Multiplicando a primeira equação por $-c$, a segunda equação por a e em seguida somando as duas equações, teremos:,

$$\begin{cases} ax + by = \alpha & (-c) \\ cx + dy = \beta & (a) \end{cases} \quad +$$

ou seja,

$$ady - bcy = a\beta - c\alpha \quad \Rightarrow \quad y(ad - bc) = a\beta - c\alpha \tag{5.3}$$

Sendo

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$$

Podemos escrever as equações (5.2) e (5.3) da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x.D = D_1 \\ y.D = D_2 \end{cases} . \tag{5.4}$$

1º Caso - Retas Concorrentes

Neste caso, temos que as retas r e s se interceptam em um único ponto (x, y). Logo, o sistema (5.1) tem uma única solução, portanto o par (x, y) será a solução desse sistema, pois ele pertence às retas r e s.

Reciprocamente, podemos analisar pelos coeficientes das equações, onde se o $D \neq 0$, temos uma única solução para o sistema (5.4) de imediato.

Analisando de outra forma podemos concluir que:

$$D \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

$$ad - bc \neq 0$$

$$ad \neq bc$$

$$\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}, \quad b, d \neq 0. \tag{5.5}$$

Podemos observar que $\frac{a}{b}$ é o valor da inclinação da equação r e $\frac{c}{d}$ é o valor da inclinação da equação s, como já vimos na equação (4.5), são valores diferentes. Logo, podemos observar que essas retas r e s serão concorrente $r \times s$ quando suas inclinação forem diferentes. Mostraremos um exemplo para ilustrar essa situação.

Exemplo 33. *Represente geometricamente o sistema:*

$$\begin{cases} x & + & y & = & 2 \\ x & - & y & = & 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

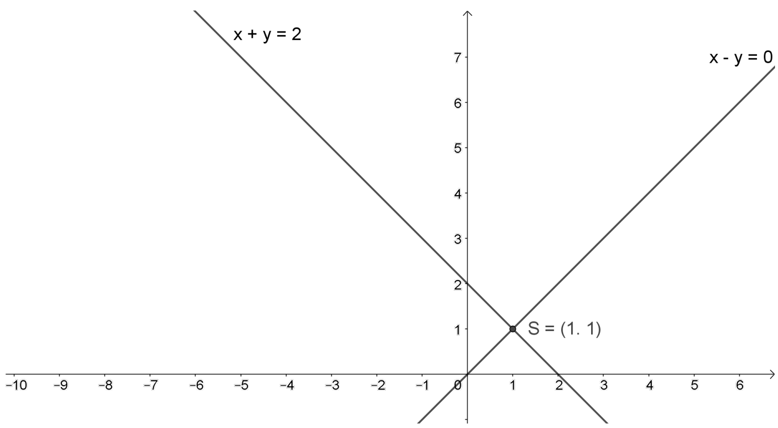


Figura 17 – Representação geométrica do sistema (5.6)

Como podemos observar na Figura 17, as retas se interceptam em um único ponto $S = \{(1,1)\}$, que esse ponto S pertence a r e s, logo ele é solução do sistema. Como demonstraremos através do resolução algébrica de sistemas lineares.

Adicionando as duas equações do sistemas temos,

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 2 \\ x & - & y & = & 0 \end{array}\right. +$$

temos,

$$\begin{aligned} x + x &= 2 \\ 2x &= 2 \\ x &= \frac{2}{2} \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Substituindo $x_1 = 1$ na primeira equação temos que:

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 1 + y &= 2 \\ y &= 2 - 1 \\ y &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, a conjunto solução desse sistema é $S = \{(1,1)\}$

2º Caso: - Retas Coincidentes

Neste caso, temos que as retas r e s são coincidentes em todos os ponto. Logo, o sistema (5.1) tem infinitas soluções, portanto infinitos pares (x, y) que serão soluções desse sistema, pois todos pertencem às retas r e s.

Analisando pelos os coeficientes das equações, supondo que existirão $D = D_1 = D_2 = 0$, o sistema (5.4) terá equações equivalentes.

$$D = 0, \quad D_1 = 0 \quad e \quad D_2 = 0,$$

é equivalente à,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \beta & b \\ \alpha & d \end{vmatrix} = 0 \quad e \quad \begin{vmatrix} a & \beta \\ c & \alpha \end{vmatrix} = 0,$$

, logo

$$ad - bc = 0, \quad \beta d - \alpha b = 0 \quad e \quad a\alpha - \beta c = 0,$$

, então

$$ad = bc, \quad \beta d = \alpha b \qquad e \quad a\alpha = \beta c.$$

Portanto,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{c}{d} = \frac{\alpha}{\beta} \quad e \quad \frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}, \; onde \; b, d, \beta \; são \; não \; nulos. \tag{5.7}$$

Vimos na equação (5.7) que as razões $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ e $\frac{\alpha}{\beta}$ são iguais. Logo, podemos observar que os coeficientes das equações serão equivalentes, onde retas r e s serão coincidentes $r \equiv s$, pois todos os pares ordenados (x, y) irá sastifazer as duas equações. Mostraremos um exemplo para ilustrar essa situação.

Exemplo 34. *Analise o sistema de equações dado geometricamente*

$$\begin{cases} x & + & y & = & 2 \\ 2x & + & 2y & = & 4 \end{cases}. \tag{5.8}$$

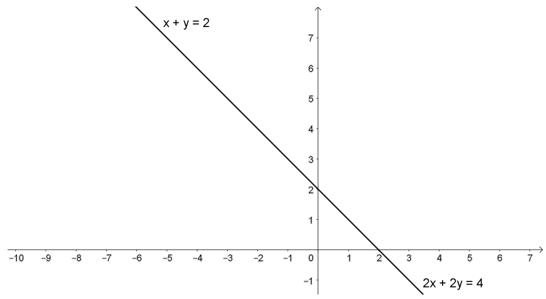


Figura 18 – Representação geométrica do sistema (5.8)

Como podemos observar a Figura 18 as retas irão ser coincidentes. Iremos resolver o sistema algebricamente, pelo método de adição. Vejamos:

$$\begin{cases} x & + & y & = & 2 \\ 2x & + & 2y & = & 4 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por -2,

$$\begin{cases} x & + & y & = & 2 & (-2) \\ 2x & + & 2y & = & 4 \end{cases}$$

então,

$$\begin{cases} -2x & - & 2y & = & -4 \\ 2x & + & 2y & = & 4 \end{cases}.$$

Somando a primeira equação com a segunda equação,

$$(-2x) + 2x + (-2y) + 2y = -4 + 4$$
$$0x + 0y = 0.$$

Portanto,isso implica que, existem infinitos pares ordenados (x, y) que satisfaz o sistema (5.8), logo a solução é $S = \mathbb{R}$.

3º Caso - Retas Paralela

Neste caso, temos que as retas r e s não se coincidirão em nenhum ponto. Logo, as equações em (5.1) não tem solução em comum, portanto não há solução para esse sistema e as retas r e s são paralelas distintas.

considerando, pelos coeficientes das equações temos, $D = 0$ e $D_1 \neq 0$ ou $D_2 \neq 0$, o sistema (5.4) não terá solução. Como podemos demonstrar através de:

$$D = 0, \quad D_1 \neq 0 \qquad ou \qquad D_2 \neq 0,$$
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \beta & b \\ \alpha & d \end{vmatrix} \neq 0 \quad ou \quad \begin{vmatrix} a & \beta \\ c & \alpha \end{vmatrix} \neq 0,$$
$$ad - bc = 0, \quad \beta d - \alpha b \neq 0 \quad ou \quad a\alpha - \beta c \neq 0,$$
$$ad = bc, \quad \beta d \neq \alpha b \qquad ou \quad a\alpha \neq \beta c,$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad \frac{b}{d} \neq \frac{\alpha}{\beta} \quad e \quad \frac{a}{c} \neq \frac{\alpha}{\beta}. \tag{5.9}$$

Vimos na (5.9) que as inclinações $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ são iguais e razão $\frac{\alpha}{\beta}$. Com isso, as equações não terão pares ordenados em comum, como ilustraremos através um exemplo essa situação.

Exemplo 35. - *Represente geometricamente o sistema*

$$\begin{cases} x & + & y & = & 2 \\ 2x & + & 2y & = & 6 \end{cases}. \tag{5.10}$$

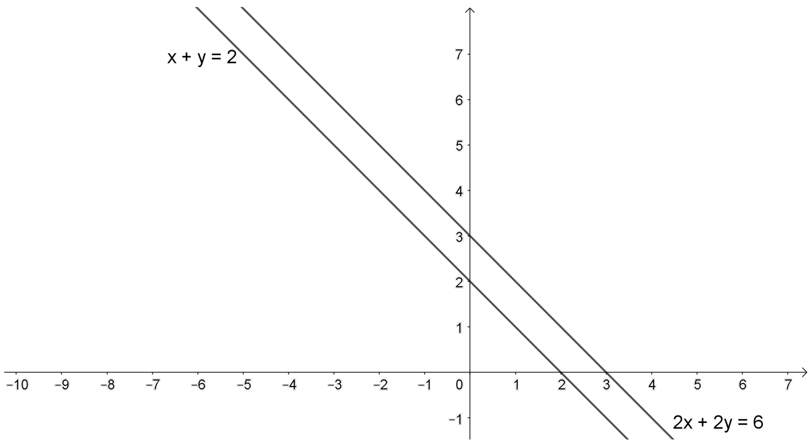


Figura 19 – Representação geométrica do sistema (5.10)

Como podemos observar a Figura 19 , as retas são paralelas distintas, com isso não há pontos em comum entre as duas retas. Logo, a solução do sistema (5.10) é $S = \emptyset$.

Resolveremos o sistema acima utilizando método de adição:

$$\begin{cases} x & + & y & = & 2 \\ 2x & + & 2y & = & 6 \end{cases}. \tag{5.11}$$

Multiplicando a primeira equação por -2:

$$\begin{cases} x & + & y & = & 2 \times (-2) \\ 2x & + & 2y & = & 6 \end{cases}$$

então,

$$\begin{cases} -2x & - & 2y & = & -4 \\ 2x & + & 2y & = & 6 \end{cases}.$$

Somando a primeira equação com a segunda equação,

$$(-2x) + 2x + (-2y) + 2y = -4 + 6$$
$$0x + 0y = 2.$$

Com isso podemos observar que não há par ordenado (x, y), que satisfaz as equações do sistema (5.11), logo sua solução é $S = \emptyset$.

Desta forma, concluímos que as retas r e s de um sistema linear de duas equações e duas incógnitas, podem assumir as seguintes posições:

- As retas serão concorrentes, se somente se, o sistema tiver uma única solução;
- As retas serão coincidentes, se somente se, o sistema ter infinitas soluções;
- As retas serão paralelas distintas, se somente se, o sistema não possuir nenhuma solução.

5.2 Representação Geométrica de um Sistema Linear em $\mathbb{R}^3$

Nosso objetivo nessa seção é estudar geometricamente sistemas lineares da forma

$$\begin{cases} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 & (\pi_1) \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2 & (\pi_2) \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & d_3 & (\pi_3) \end{cases}. \tag{5.12}$$

Uma solução deste sistema (5.12) é uma terna $S = (x, y, z)$, que sastifaz as três equações simultaneamente.

Para um estudo geométrico do sistema (5.12), precisamos conhecer que objeto geométrico é dado por cada equação que compõe o sistema.

Vimos no Capítulo 4 que a equação

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{5.13}$$

descreve um plano π no espaço tridimensional, além disso, o vetor normal ao plano π é dado por $\vec{n} = (a, b, c)$. Sendo assim, trabalhar com o sistema (5.12) é estudar a intersecção entre planos no $\mathbb{R}^3$, que é equivalente a estudar relações existentes entre os vetores normais e o termo independente de cada plano.

Desta forma vamos iniciar nossa análise, lidando primeiramente com duas equações da forma (5.13), ou seja, estudamos as possíveis relações entre dois planos e em seguida apresentamos resultados referentes ao três planos do sistema 5.12.

Consideremos então dois planos π_1 e π_2 cujas a equações são dadas pelo sistema (5.14).

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & (\pi_1) \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & (\pi_2), \end{cases} \tag{5.14}$$

Sabemos que $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ são vetores normais de π_1 e π_2 respectivamente, veja na Seção $4.4.4$. É importante ressaltar aqui que estamos interessados na situação em que $\vec{n}_1 \neq \vec{0}$ e $\vec{n}_2 \neq \vec{0}$.

Geometricamente, temos três possibilidades para os planos π_1 e π_2:

I - $\pi_1 = \pi_2$;

II - $\pi_1 \parallel \pi_2$ com $\pi_1 \neq \pi_2$, ou seja, $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$;

III - $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$, ou seja, $\pi_1 \cap \pi_2 = r$, onde r é uma reta.

As condições *I*, *II* e *III* podem ser expressas em função de $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ e os seus coeficientes independentes d_1 e d_2 de cada equação do sistema (5.14), como será mostrado nas Proposições $1, 2$ e 3.

Na prova dos resultados dados pelas proposições $1, 2, ..., 10$ e 11, faz-se necessário mostrar apenas uma das implicações, pois, as condições dadas sobre os planos são mutuamente excludentes, bem como as condições sobre os vetores normais.

Proposição 1. *Dados dois planos π_1 e π_2 com vetores normais $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$, respectivamente, temos que $\pi_1 = \pi_2$, se, e somente se, existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{n}_2 = \lambda\vec{n}_1$ e $d_2 = \lambda d_1$.*

Demonstração. Pela hipótese temos que $\vec{n}_2 = \lambda\vec{n}_1$ e $d_2 = \lambda d_1$.

Seja $P = \{(x_0, y_0, z_0)\} \in \pi_1$, então $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 = d_1$. Multiplicando-a por λ, temos $\lambda a_1x_0 + \lambda b_1y_0 + \lambda c_1z_0 = \lambda d_1$, podemos observar que $(\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1) = \vec{n}_2$ pela hipótese, temos que $\lambda d_1 = d_2$, logo $P \in \pi_2$. Portanto, esses planos são coincidentes, ou seja, $\pi_1 = \pi_2$. $\square$

Exemplo 36. *Determine a posição entre os planos abaixo:*

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 6 \end{cases} \tag{5.15}$$

Temos que a 1^a equação tem como vetor normal $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$ e já a 2^a equação tem como vetor normal $\vec{n}_2 = (3, 3, 3)$ e seus coeficientes independentes $d_1 = 2$ e $d_2 = 6$, logo podemos concluir que $\vec{n}_2 = 3.\vec{n}_1$ e $d_2 = 3.d_1$, os planos dados por esse sistema (5.15) *é coincidentes. Podemos observar também pela Figura 20, como ilustração geométrica.*

Proposição 2. *Sejam π_1 e π_2 dois planos com equações do sistema* (5.14). *Então $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, se somente se, existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{n}_2 = \lambda\vec{n}_1$ e $d_1 \neq \lambda d_2$.*

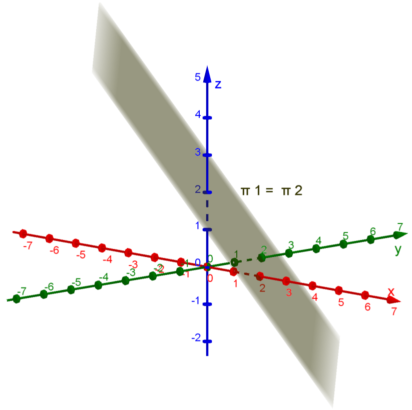


Figura 20 – Representação geométrica do sistema (5.15)

Demonstração. Seja $P = \{(x_0, y_0, z_0)\} \in \pi_1$, então $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 = d_1$. Multiplicando-a por λ, temos $\lambda a_1x_0 + \lambda b_1y_0 + \lambda c_1z_0 = \lambda d_1$, podemos observar que $(\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1) = \vec{n}_2$, mas pela hipótese $\lambda d_1 \neq d_2$ o que implica, que $P \notin \pi_2$. Portanto, esses planos são paralelos distintos, ou seja, $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$. □

Exemplo 37. *Determine a posição entre os planos abaixo:*

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 5 \end{cases}. \tag{5.16}$$

Temos que a 1^a *equação tem como vetor normal* $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$ *e já a* 2^a *equação tem como vetor normal* $\vec{n}_2 = (2, 2, 2)$ *e seus coeficientes independentes* $d_1 = 1$ *e* $d_2 = 5$*, logo podemos concluir que* $\vec{n}_2 = 2.\vec{n}_1$ *e* $d_2 = 5.d_1$ *concluímos que eles são múltiplos entre sim e seus coeficientes independentes não múltiplos, ou seja, os planos dados por esse sistema são paralelos distintos. Podemos observar também pela Figura 21, como demonstração geométrica.*

Proposição 3. *Consideremos dois planos* π_1 *e* π_2 *do sistema de equações* (5.14) *e* r *uma reta* . *Então,* $\pi_1 \cap \pi_2 = r$ *se, e somente se,* $\vec{n}_2 \neq \lambda \vec{n}_1$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Sejam $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ vetores normais de π_1 e π_2, respectivamente. Como $\vec{n}_2 \neq \lambda \vec{n}_1$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, temos que π_1 não é paralelo π_2, logo existe um ponto $P \in \pi_1 \cap \pi_2$.

Seja $\vec{w}$ o vetor $\vec{w} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$. Temos que $\vec{w} \neq \vec{0}$ e $\vec{w}.\vec{n}_1 = 0$ e $\vec{w}.\vec{n}_2 = 0$. Considere a reta r que passa por P tem direção $\vec{w}$. Logo, r é dada pela equação:

$$r : X = P + t\vec{w}. \tag{5.17}$$

Afirmamos que $r \in \pi_1 \cap \pi_2$. Para isto, basta provar que se $\vec{u}$ pertence a reta r então $\vec{u}.\vec{n}_1 = \vec{u}.\vec{n}_2 = 0$. Note que $\vec{u}$ pode ser escrito da forma $\vec{u} = \lambda \vec{w}, \lambda \in \mathbb{R}$. Segue daqui que $\vec{u} \cdot \vec{n}_i = 0, \quad \forall i = \{1, 2, ...\}$, pois $\vec{w}_i \cdot i = 0$. □

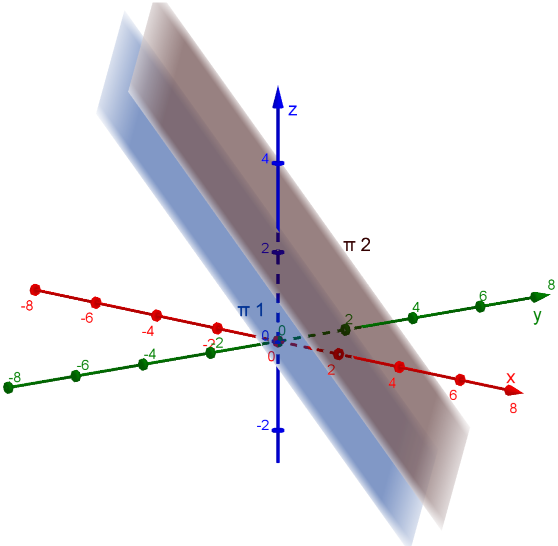


Figura 21 – Representação geométrica do sistema (5.16)

Exemplo 38. *Determine a posição entre os planos abaixo:*

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & - & 2y & + & z & = & 7 \end{array} \right. . \tag{5.18}$$

Pelo sistema a 1^a *equação tem como vetor normal* $\vec{n}_1 = (2, 1, 1)$ *e já a* 2^a *equação tem como vetor normal* $\vec{n}_2 = (1, -1, 1)$*, logo,* $\vec{n}_2 \neq \lambda \vec{n}_1$*, concluímos que eles não são múltiplos entre sim, ou seja, os planos dados por esse sistema são concorrentes. Podemos observar também pela Figura 22, como ilustração geométrica.*

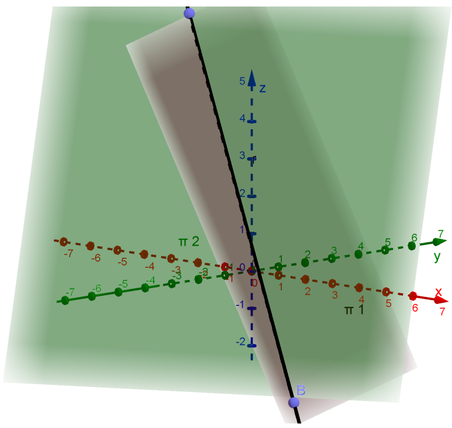


Figura 22 – Representação geométrica do sistema (5.18)

Para um sistema com três equações, no ponto de vista geométrico, temos as seguintes possibilidades para os planos, π_1, π_2 e π_3, onde as suas equações estão dispostas pelo sistema 5.12, as quais se excluem mutuamente, ou seja, se uma delas for verdadeira, as outras sete não ocorrem.

Proposição 4. *Os planos* π_1, π_2 *são paralelos entre si e o terceiro plano* π_3 *irá interceptar* π_1 *e* π_2*, formando duas retas paralelas, se somente se,* $\vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1$*,* $d_2 \neq \lambda d_1$ *e* $\vec{n}_3 \neq \lambda \vec{n}_1$*,* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Dados os vetores normais $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$, temos que $\vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1$ e $d_1 \neq \lambda d_2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Portanto pela Proposição **2** tem-se $\pi_1 \parallel \pi_2$, como $\vec{n}_3 \neq \vec{n}_1$, logo pela proposição **3**, temos que $\pi_3 \cap \pi_1 = r$, mas como $\pi_2 \parallel \pi_1$ isso implica que $\pi_3 \cap \pi_2 = s$, temos $r \parallel s$. □

Exemplo 39. *Dado o sistema*

$$\begin{cases} 2x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & + & 3y & + & z & = & 2 \\ 4x & + & 2y & + & 2z & = & -3 \end{cases}. \tag{5.19}$$

Pelo sistema (5.19) *temos que,* $\vec{n}_1 = (2,1,1)$*,* $\vec{n}_2 = (1,3,1)$ *e* $\vec{n}_3 = (4,2,2)$*, como podemos observar* $\vec{n}_3 = 2.\vec{n}_1$ *e* $d_3 \neq 2d_1$*, concluímos que* $\pi_1 \parallel \pi_3$ *e* $\vec{n}_2$ *não é múltiplo de* $\vec{n}_1$ *e* $\vec{n}_3$ *o que implica* $\pi_1 \cap \pi_2 = r$ *e* $\pi_2 \cap \pi_3 = s$*. Como podemos observar geometricamente pela Figura 23.*

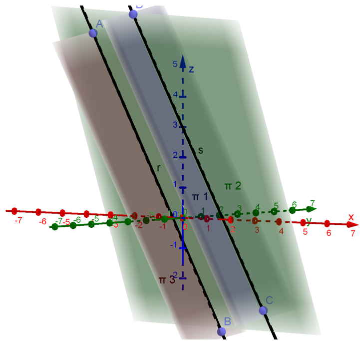


Figura 23 – Planos Paralelos e um Concorrente

Proposição 5. *Sejam os planos* π_1, π_2 *e* π_3*, temos* $\pi_1 = \pi_2$ *e* $\pi_3 \parallel \pi_1$*, se, e somente se, os vetores normais forem da forma* $\vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1$ *com* $d_2 = \lambda d_1$ *e* $\vec{n}_3 = \mu \vec{n}_1$*, com* $d_3 \neq \mu d_1$ *onde* λ*,* $\mu \in \mathbb{R}$.

Demonstração. De fato, pela Proposição **1**, temos que $\pi_1 = \pi_2$, como $\vec{n}_3 = \mu \vec{n}_1$ e $d_3 \neq \mu d_1$, pela Proposição **2** temos que $\pi_3 \parallel \pi_1$ o que implica que como $\pi_1 = \pi_2$, logo $\pi_3 \parallel \pi_2$. □

Exemplo 40. *Dado o sistema*

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 2 \\ 5x & + & 5y & + & 5z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 4 \end{cases}. \tag{5.20}$$

Pelo sistema (5.20) *temos que* $\vec{n}_1 = (1,1,1)$*,* $\vec{n}_2 = (5,5,5)$*,* $d_1 = 2$ *e* $d_2 = 3$*, ou seja,* $\vec{n}_1 = 5.\vec{n}_2$ *e* $d_1 \neq d_2$ *isso implica que* $\pi_1 \parallel \pi_2$*, logo* $\vec{n}_3 = (2,2,2)$ *e* $d_3 = 2.d_1$*, logo* $\pi_1 = \pi_3$*, portanto temos que* $\pi_3 \parallel \pi_2$*. Podemos observar geometricamente pela Figura 24.*

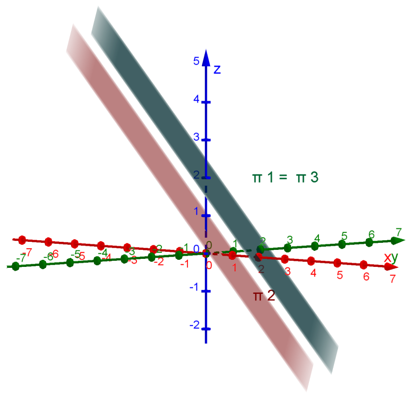


Figura 24 – Representação geométrica do sistema (5.20)

Proposição 6. *Sejam planos π_1, π_2 e π_3 distintos, temos que $\pi_1 \parallel \pi_2 \parallel \pi_3$, se, e somente se, existir um λ, $\mu \in \mathbb{R}$ que $\vec{n}_2 = \lambda\vec{n}_1$ com $d_2 \neq \lambda d_1$ e $\vec{n}_3 = \mu\vec{n}_1$ com $d_3 \neq \mu d_1$.*

Demonstração. Como $\vec{n}_2 = \lambda\vec{n}_1$ e $\vec{n}_3 = \mu\vec{n}_1$, e $d_2 = \lambda d1$ e $d_3 = \mu d1$, pela Proposição **2**, temos que, $\pi_1 \parallel \pi_2$ e $\pi_1 \parallel \pi_3$. Portanto, $\pi_1 \parallel \pi_2 \parallel \pi_3$. □

Exemplo 41. *Dado o sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 9 \\ 3x + 3y + 3z = -4 \end{cases} . \tag{5.21}$$

Pelo sistema (5.21)*, temos $\vec{n}_1 = (1,1,1)$, $\vec{n}_2 = (2,2,2)$, isso implica que $\vec{n}_2 = 2.\vec{n}_1$ e $d_2 \neq 2.d_1$, logo $\pi_1 \parallel \pi_2$. Agora, $\vec{n}_3 = (3,3,3)$ e $d_3 = -4$, podemos concluir que $\vec{n}_3 = 3.\vec{n}_1$ e $d_3 \neq 3.d_1$, portanto $\pi_3 \parallel \pi_1$. Como os vetores normais $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ e $\vec{n}_3$ são múltiplos entre si e seus coeficientes independentes não múltiplos temos que $\pi_1 \parallel \pi_2 \parallel \pi_3$.*

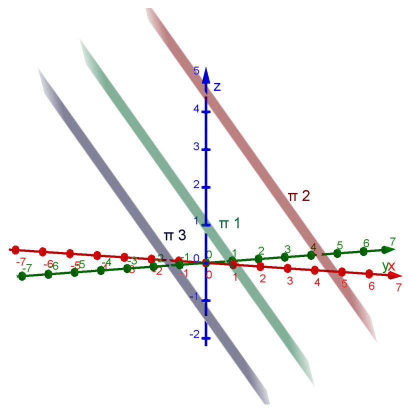


Figura 25 – Representação geométrica do sistema (5.21)

Proposição 7. *Sejam planos π_1, π_2 e π_3 do sistema de equações* (5.12)*, temos que $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$, se, e somente se, onde existi um λ, $\gamma \in \mathbb{R}$ que $\vec{n}_2 = \lambda\vec{n}_1$ com $d_2 = \lambda d_1$ e $\vec{n}_3 = \gamma\vec{n}_1$ com $d_3 = \gamma d_1$.*

Demonstração. Pela proposição **1** temos que $\pi_1 = \pi_2$, se, e somente se, existir $\vec{n}_2 = \lambda\vec{n}_1, \forall\lambda \in \mathbb{R}$ e $d_1 = \lambda d_2$. Pela proposição **1** temos que $\pi_1 = \pi_3$, se, e somente se, existir $\vec{n}_3 = \gamma\vec{n}_1$ e $d_3 = \gamma d_1$, $\forall\gamma \in \mathbb{R}$. Logo, segue o resultado. □

Exemplo 42. *Dado o sistema*

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 10 \\ -3x & - & 3y & - & 3z & = & -15 \end{cases}. \tag{5.22}$$

Pelo sistema temos que $\vec{n}_1 = (1,1,1)$, $\vec{n}_2 = (2,2,2)$ e $\vec{n}_3 = (-3,-3,-3)$, ou seja, $\vec{n}_2 = 2.\vec{n}_1$ e $\vec{n}_3 = -3.\vec{n}_1$, e seus coeficientes $d_1 = 5$, $d_2 = 10$ e $d_3 = -15$, ou seja, múltiplos entre si.Como podemos geometricamente pela Figura 26.

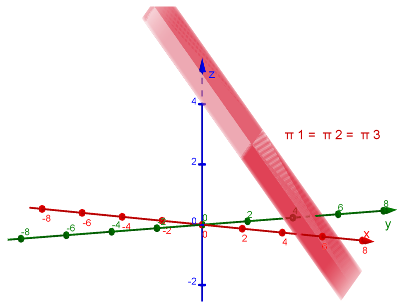


Figura 26 – Plano Coincidentes

Proposição 8. *Considere os planos π_1, π_2 e π_3 temos os planos π_1, π_2 são coincidentes e o plano π_3 intercepta π_1 e π_2 através de uma reta r, se, e somente se, existem λ, $\mu \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{n}_2 = \lambda\vec{n}_1$, $d_2 = \lambda d_1$ e $\vec{n}_3 \neq \mu\vec{n}_1$.*

Demonstração. Pela Proposição **1** temos que $\pi_1 = \pi_2$, se, e somente se, existir $\vec{n}_2 = \lambda\vec{n}_1$ e $d_1 = \lambda d_2$. Pela proposição **3** temos que $\pi_3 \cap \pi_1 = r \Leftrightarrow \exists \quad \mu \quad / \quad \vec{n}_3 \neq \mu\vec{n}_1$. Logo, segue o resultado. □

Exemplo 43. *Dado o sistema*

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 6 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 12 \\ -5x & - & 5y & + & 8z & = & 25 \end{cases}. \tag{5.23}$$

Pelo sistema (5.23) *temos que* $\vec{n}_1 = (1,1,1)$, $\vec{n}_2 = (2,2,2)$ *e* $\vec{n}_3 = (-5,-5,8)$. *Portanto podemos concluir que* $\vec{n}_1 = 2.\vec{n}_2$ *e* $\vec{n}_3 \neq \vec{n}_1$. *Como podemos observar geometricamente pela Figura 27.*

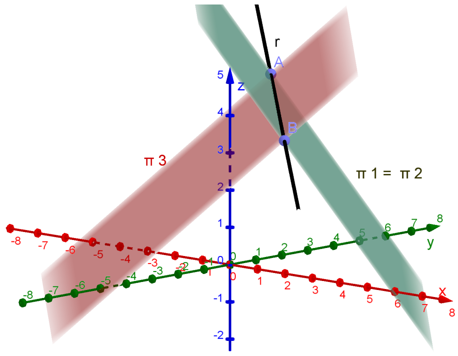


Figura 27 – Representação geométrica do sistema (5.23)

Proposição 9. *Três planos* π_1, π_2 *e* π_3*, são distintos e se interceptam ao longo de uma reta, se, e somente se, os respectivos vetores normais* $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ *e* $\vec{n}_3$*, são, dois a dois, não múltiplos e existem* λ, $\mu \in \mathbb{R}$ *tais que* $\vec{n}_3 = \lambda\vec{n}_1 + \mu\vec{n}_2$ *com* $d_3 = \lambda d_1 + \mu d_2$.

Demonstração. Nestas condições, os planos π_1 e π_2 se interceptam através de uma reta r, como foi provado na Proposição **3**, logo $\pi_1 \cap \pi_2 = r$. Os planos $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ e um ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ que pertença a r, existem um λ, $\mu \in \mathbb{R}$, tais que:

$$a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 = d_1 \quad e \quad a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 = d_2$$

$$\lambda a_1x_0 + \lambda b_1y_0 + \lambda c_1z_0 = \lambda d_1 \quad e \quad \mu a_2x_0 + \mu b_2y_0 + \mu c_2z_0 = \mu d_2.$$

Logo,

$$(\lambda a_1 + \mu a_2)x_0 + (\lambda b_1 + \mu b_2)y_0 + (\lambda c_1 + \mu c_2)z_0 = \lambda d_1 + \mu d_2$$

Pela hipótese, $(\lambda a_1 + \mu a_2) = a_3, (\lambda b_1 + \mu b_2) = b_3, (\lambda c_1 + \mu c_2)$ e $\lambda d_1 + \mu d_2 = d_3$, temos então,

$$a_3x_0 + b_3y_0 + c_3z_0 = d_3$$

donde, $P \in \pi_3 \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_3$. Portanto, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r$. □

Exemplo 44. *Represente geometricamente o sistema*

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + 4y + 3z = 4 \end{cases}. \tag{5.24}$$

De acordo com o sistema (5.24), $\vec{n}_1 = (1,1,2), \vec{n}_2 = (2,3,1) \Rightarrow \vec{n}_1 \neq \vec{n}_2$*, então* $\pi_1 \cap \pi_2 = r$*, já* $\vec{n}_3 = (3,4,3)$ *e* $d_3 = 4$ *o que implica, que* $\vec{n}_3 = \vec{n}_1 + \vec{n}_2$ *e* $d_3 = d_1 + d_2$*, ou seja, o vetor* *normal $\vec{n}_3$ é uma expressão construída a partir dos vetores $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ multiplicando cada termo por uma constante onde chamamos de combinação linear, onde os termos independentes também obedecem essa mesma combinação linear. Como podemos observar geometricamente pela Figura 28.*

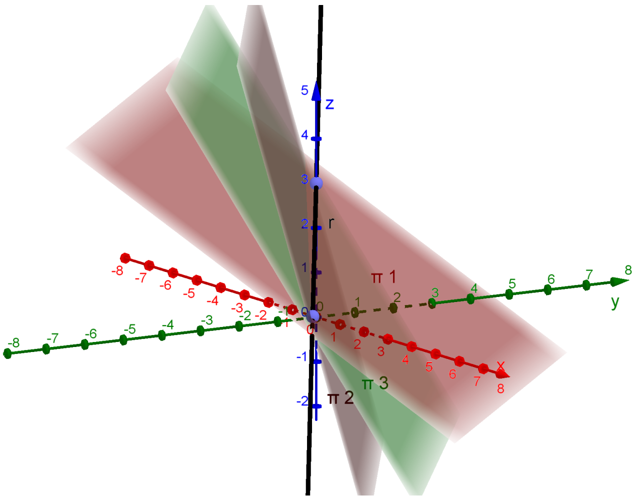


Figura 28 – Representação geométrica do sistema (5.24)

Proposição 10. *Os três planos π_1, π_2 e π_3 se interceptam, dois a dois, segundo retas paralelas, se, e somente se, os vetores normais $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ e $\vec{n}_3$, são, dois a dois, não múltiplos e existem λ, $\mu \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{n}_3 = \lambda\vec{n}_1 + \mu\vec{n}_2$ com $d_3 \neq \lambda d_1 + \mu d_2$.*

Demonstração. Como os vetores normais são, dois a dois, não multiplos, segue da proposição 3 que $\pi_1 \cap \pi_2 = r$, $\pi_1 \cap \pi_3 = s$ e $\pi_2 \cap \pi_3 = t$. Note que r não intercepta π_3 pois $\vec{n}_3 = \lambda\vec{n}_1 + \mu\vec{n}_2$ e $d_3 \neq \lambda d_1 + \mu d_2$, logo $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$. Com a mesma ideia, concluímos que $r \cap s = s \cap t = r \cap t = \emptyset$, então que essas retas são paralelas distintas duas a duas. $\square$

Exemplo 45. *Represente geometricamente o sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 5 \\ 4x & - & y & + & 2z & = & 3 \\ 6x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \end{array}\right. . \tag{5.25}$$

Temos que $\vec{n}_1 = (2,3,1), \vec{n}_2 = (4,-1,2) \Rightarrow \vec{n}_1 \neq \vec{n}_2, \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, logo $\pi_1 \cap \pi_2 = r$, já $\vec{n}_3 = (6,2,3)$ e $d_3 = 1$ o que implica, que $\vec{n}_3 = \vec{n}_1 + \vec{n}_2$ e $d_3 \neq d_1 + d_2$, ou seja, o vetor normal $\vec{n}_3$ é uma combinação linear dos vetores $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ mas não há uma combinação linear entre os termos independentes. Isto pode ser observado geometricamente na Figura 29.

Proposição 11. *Considere os planos π_1, π_2 e π_3, temos que $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{P\}$, se, e somente se, seus vetores normais forem linearmente independentes.*

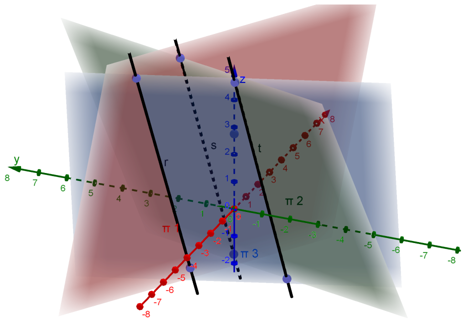


Figura 29 – Representação geométrica do sistema (5.25)

.

Demonstração. Pela proposição 3, temos que $\pi_1 \cap \pi_2 = r$, pois $\vec{n}_2 \neq \lambda \vec{n}_1, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, logo temos um ponto $P \in r$ e o vetor diretor dessa reta r dado por $\vec{w} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$. Como $\vec{n}_3 \neq \mu \vec{n}_1 + \lambda \vec{n}_2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ temos que $\vec{w}.\vec{n}_3 \neq 0$, então $\pi_3 \cap r = \{P\}$. De fato, pois

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

logo segue o que $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{P\}$. □

Exemplo 46. *Represente geometricamente o sistema*

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 6 \\ x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 9 \end{cases} . \tag{5.26}$$

Pelo sistema (5.26) *temos que* $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{n}_2 = (1, 2, -1)$ *e* $\vec{n}_3 = (2, -1, 3)$ *são linearmente independentes. De fato*

$$det = \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right|$$

$$det = 6 - 2 - 1 - 4 - 1 - 3 \Rightarrow det = -5.$$

Portanto, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{P\}$.*. Pela Figura 30 podemos observar essa situação geometricamente.*

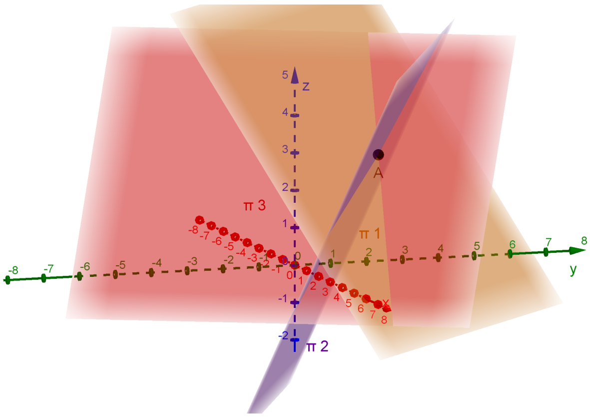


Figura 30 – Planos se interceptam através de um ponto

Após toda a discussão desta seção, podemos ter as seguintes relações entre as soluções de um sistema linear da forma (5.12) e as Proposições vistas:

1) Sob as condições da Proposição 11, o sistema tem uma única solução;

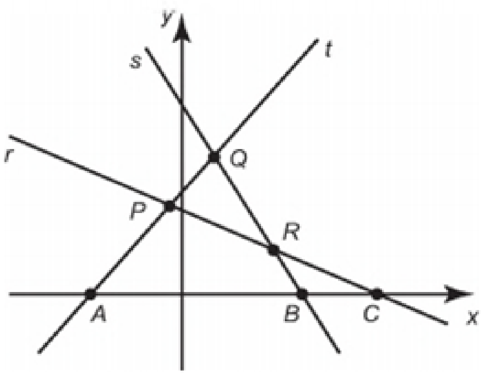
2) Sob as condições das Proposições 7, 8 ou 9, o sistema tem infinitas soluções;

3) Sob as condições das Proposições 4, 5, 6, ou 10 o sistema não tem solução.

6 Exercícios de Aplicação

Os gráficos são primordiais às representações visuais matemática, assim sendo elucidaremos de modo prático o processo de construção de gráficos que represente um sistema linear e bem como alguns exercícios de aplicação, tais situações tendem à trabalhar a capacidade de leitura e interpretação de problemas, os quais foram retirados de livros didáticos [3], [6], [5], provas de vestibulares e ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio).

Exercício 1. ***(ENEM 2016)*** *- Na figura estão representadas três retas no plano cartesiano, sendo P, Q e R os pontos de intersecções entre as retas, e A, B e C os pontos de intersecções dessas retas com o eixo x.*



Essa figura é a representação geométrica de um sistema linear de três equações e duas incógnitas que:

a) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos P, Q e R, pois eles indicam onde as retas se intersectam.

b) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos A, B e C, pois eles indicam onde as retas intersectam o eixo das abscissas.

c) possui infinitas soluções reais, pois as retas se intersectam em mais de um ponto.

d) não possui solução real, pois não há ponto que pertença simultaneamente às três retas.

e) possui uma única solução real, pois as retas possuem pontos em que se intersectam.

Resolução

*Pelo que foi demonstrado, na seção 5.1, essas retas concorrem em pontos distintos, logo, não existe solução para esse sistema. Com isso a letra correta é **"d"**.*

Exercício 2. *O sistema abaixo:*

$$\begin{cases} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 2x & - & 3y & + & 5z & = & 11 \\ x & - & 5y & + & 6z & = & 9 \end{cases}.$$

a) é impossível;

b) é possível e determinado;

c) é possível e indeterminado;

d) admite apenas a solução (1; 2; 3);

e) admite a solução (2; 0; 0).

Resolução

De acordo com o sistema temos que os vetores normais são $\vec{n}_1 = (1, 2, -1), \vec{n}_2 = (2, -3, 5)$ e $\vec{n}_3 = (1, -5, 6)$, pelo que foi mostrado na proposição 9, há uma combinação linear entre os vetores normais e seus termos independentes, ou seja, $\vec{n}_2 = \vec{n}_1 + \vec{n}_3$ e $d_2 = d_1 + d_3$, o que implica $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r$. Portanto há infinitas soluções para esse sistema, ou seja, o mesmo é possível e indeterminado.
Logo,
Letra "c".

Exercício 3. *Num quintal há galinhas e coelhos, há 7 cabeças e 22 patas. Quantas são as galinhas e os coelhos?*
Resolução algébrica: *Considere galinhas por g e coelhos por c, então*

$$\begin{cases} c & + & g & = & 7 \\ 4c & + & 2g & = & 22 \end{cases}. \tag{6.1}$$

Utilizando o método da substituição, isolando a variável c da 1^a equação temos,

$$\begin{cases} c = 7 - g \\ 4c + 2g = 22 \end{cases}. \tag{6.2}$$

Substituindo a 1^a equação do sistema (6.2) *na 2^a equação,*

$$\begin{aligned} 4(7-g) + 2g = 2228 - 4g + 2g &= 22 \\ -2g &= -4 \\ g &= \frac{-4}{-2} \\ g &= 2 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de g na equação (6.2)*:*

$$c = 7 - g = 7 - 2 = 5$$

Logo, a solução desse sistema (6.1)*, é dado por*

$$S = (5, 2).$$

Para construirmos os gráficos, primeiro precisamos analisar os resultados obtidos:

- *c + g = 7 é uma equação linear, logo, é representada geometricamente por uma reta;*
- *4c + 2g = 22 também é uma equação linear que também pode ser representada por 2c + g = 11;*
- *As variáveis desse sistema são c e g e consideraremos c (eixo x) e g(eixo y);*
- *O sistema acima é possível e determinado, por apresentar uma única solução, logo o par ordenado encontrado representa o ponto de interceptação das duas retas.*

Para construirmos a curva descrita pela 1^a *equação, nos contentaremos em achar as raízes dessa equação, à partir dos quais é possível delimitar a reta, bem como sua inclinação.*

Para desenhar a Figura 31, basta marcarmos os pares ordenados referente a tabela 2 e ligá-los

c	c + g = 7	g	par ordenado
0	0 + g = 7	7	(0,7)
7	c + 0 = 7	0	(7,0)

Tabela 2 – Pares Ordenados da equação c + g = 7

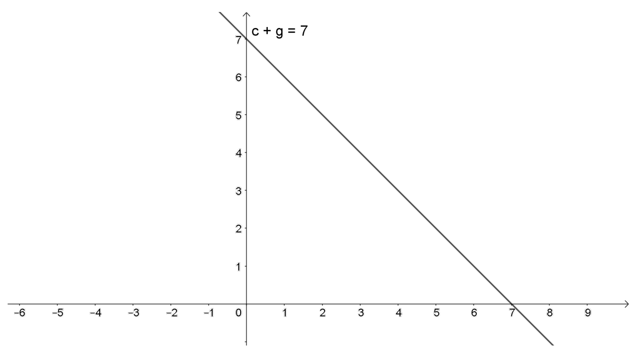


Figura 31 – Representação geométrica da equação c + g = 7

Para entender a Figura 32 da segunda equação o procedimento é o mesmo, basta aplicar os pares ordenados da tabela 3.

c	4c + 2g = 22	g	Par ordenado
0	0 + 2g = 22	11	(0,11)
5,5	4c + 0 = 22	0	(5,5; 0)

Tabela 3 – Pares Ordenados da equação 4c + 2g = 22

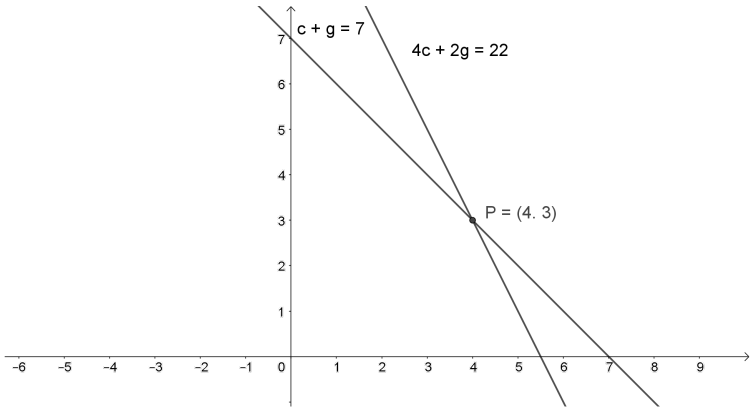


Figura 32 – Representação geométrica do sistema (6.1)

Com isso, podemos observar pela Figura 32 que a intersecção das retas é no ponto $P = (4, 3)$*, como* P *pertence as duas retas, logo podemos concluir que nesse quintal há* 4 *coelhos e* 3 *galinhas.*

Exercício 4. *A prefeitura de uma cidade, preocupada com o meio ambiente e com a falta de espaço físico adequado destinado à depósitos de lixo, criou uma cooperativa de reciclagem em parceria com os moradores de baixa renda. A Tabela 4 fornece os preços de venda (em reais) de cada quilograma de papel, vidro e plástico referente à primeira semana dos meses de setembro de 2009 e 2010; A Tabela 5 expressa quantidade total (em Kg) vendida desses três materiais na primeira semana dos meses mencionados acima e o rendimento (em reais) referentes à venda dos materiais reciclados, obtido nas referidas semanas.*

Mês	Papel	Vidro	Plático
Setembro/2009	0,30	0,20	0,50
Setembro/2010	0,40	0,30	1,00

Tabela 4 – Preços

Sabe-se que na primeira semana de setembro de 2010, foram vendidos 50 por cento a mais de papel do que o vendido na primeira semana 2009 e iguais quantidades, que aquelas comercializadas na primeira semana de 2009, de vidro e plástico. Interprete e analise o texto dado, descrevendo expressões matemáticas que conduzam ao valor de R. Determine-o.

Mês	Quantidade (Kg)	Rendimento (reais)
Setembro/2009	8000	2580
Setembro/2010	9000	R

Tabela 5 – Quantidades

Resolução:

Chamaremos de x, y, z as quantidade de papel, vidro e plástico, respectivamente, pelo enunciado podemos estabelecer o seguinte sistema (6.3)*:*

$$\begin{cases} x + y + z = 8000, \\ 0,3x + 0,2y + 0,5z = 2580, \\ 1,5x + y + z = 9000. \end{cases} \tag{6.3}$$

Chamaremos as equações do sistema (6.3) *de $L1, L2$ e $L3$, respectivamente, e utilizaremos o método de escalonamento para a resolução do mesmo. Sejam:*

$$\begin{cases} x + y + z = 8000, & (L1) \\ 0,3x + 0,2y + 0,5z = 2580, & (L2) \\ 1,5x + y + z = 9000. & (L3) \end{cases}$$

Multiplicando L1 por -0,3 e somando-se com L2, obtemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 8000, \times(-0,3) \\ 0,3x + 0,2y + 0,5z = 2580 \end{cases}$$

então

$$\begin{cases} -0,3x - 0,3y - 0,3z = -2400 \\ 0,3x + 0,2y + 0,5z = 2580 \end{cases} +$$

logo,

$$-0,1y + 0,2z = 180 \tag{6.4}$$

Substituindo L2 pela equação (6.4)*, obtemos o sistema* (6.5)

$$\begin{cases} x + y + z = 8000 \\ - 0,1y + 0,2z = 180 \\ 1,5x + y + z = 9000 \end{cases}. \tag{6.5}$$

Multiplicando L1 por -1,5 e somando-se com L3, obtemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 8000 \times (-1,5) \\ 1,5x + y + z = 9000 \end{cases}$$

então,

$$\begin{cases} -1,5x - 1,5y - 1,5z = -12000 \\ 1,5x + y + z = 9000 \end{cases}$$

Portanto

$$-0,5y - 0,5z = -3000 \tag{6.6}$$

Substituindo L3 pela equação (6.6)*, obtemos o sistema*

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 8000 \\ & - & 0,1y & + & 0,2z & = & 180 \\ & - & 0,5y & - & 0,5z & = & -3000 \end{cases} \tag{6.7}$$

Multiplicando a segunda equação do sistema (6.7) *por -5 e somando-se com a terceira. Temos:*

$$\begin{cases} - & 0,1y & + & 0,2z & = & 180 \times (-5) \\ - & 0,5y & - & 0,5z & = & -3000 \end{cases}$$

então,

$$\begin{cases} & 0,5y & - & 1z & = & -900 \\ - & 0,5y & - & 0,5z & = & -3000 \end{cases} +$$

portanto,

$$-1,5z = -3900. \tag{6.8}$$

Substituindo a terceira equação do sistema (6.7) *pela equação 6.8, obtemos o sistema* (6.9)*.*

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 8000 \\ & - & 0,1y & + & 0,2z & = & 180 \\ & & & - & 1,5z & = & -3900 \end{cases}. \tag{6.9}$$

Resolvendo a terceira equação do sistema (6.9)*, encontramos o valor de* z*:*

$$\begin{aligned} -1,5z &= -3900 \times (-1) \\ 1,5z &= 3900 \\ z &= \frac{3900}{1,5} \\ z &= 2600. \end{aligned}$$

Substituindo $z = 2600$*, na segunda equação do sistema* (6.9)*, temos:*

$$\begin{aligned} -0,1y + 0,2z &= 180 \\ -0,1y + 0,2(2600) &= 180 \\ -0,1y + 520 &= 180 \\ -0,1y &= 180 - 520 \\ -0,1y &= -340 \\ y &= \frac{-340}{-0,1} \\ y &= 3400. \end{aligned}$$

Substituindo $z = 2600$ *e* $y = 3400$*, na primeira equação do sistema 6.9, temos que:*

$$\begin{aligned} x + y + z &= 8000 \\ x + 3400 + 2600 &= 8000 \\ x + 6000 &= 8000 \\ x &= 8000 - 6000 \\ x &= 2000. \end{aligned}$$

Portanto, o rendimento R *pedido, de acordo com a Tabela* (5)*, será dado por:*

$$0,40.(3000) + 0,30.(3400) + 1,00.(2600) = 4820 \quad reais.$$

Exercício 5. *Uma pessoa consumiu na segunda-feira, no café da manhã, 1 pedaço de bolo e 3 pãezinhos, o que deu um total de 140 gramas. Na terça-feira, no café da manhã, consumiu 3 pedaços de bolo e 2 pãezinhos (iguais ao do dia anterior e de mesma massa), totalizando 210 gramas. A Tabela 6 a seguir fornece (aproximadamente) a quantidade de energia em quilocalorias (kcal) contida em cada 100 gramas do bolo e do pãozinho.*

Alimento	Energia
100g de bolo	420 kcal
100g de pãozinho	270 kcal

Tabela 6 – Calorias

Após determinar a quantidade em gramas de cada pedaço de bolo e de cada pãozinho, use a Tabela (6) *e calcule o total de quilocalorias (kcal) consumido pela pessoa, com esses dois alimentos, no café da manhã de segunda.*

Resolução:

Sejam x e y, respectivamente, a quantidade em gramas de cada pedaço de bolo e a quantidade em gramas de cada pãozinho. De acordo com o enunciado, temos

$$\begin{cases} x + 3y = 140 \\ 3x + 2y = 210. \end{cases} \tag{6.10}$$

Resolvendo o sistema 6.10 pelo método da substituição, isolando x da 1ª equação do sistema 6.11,

$$\begin{cases} x = 140 - 3y \\ 3x + 2y = 210 \end{cases} . \tag{6.11}$$

Substituindo a 1^a *equação do sistema* (6.11) *na* 2^a *equação temos,*

$$\begin{aligned}
3x + 2y &= 210\\
3.(140 - 3y) + 2y &= 210\\
420 - 9y + 2y &= 210\\
-7y &= 210 - 420\\
-7y &= -210 \times (-1)\\
7y &= 210\\
y &= \frac{210}{7}\\
y &= 30.
\end{aligned}$$

Substituindo $y = 30$ *na primeira equação do sistema 6.10, temos:*

$$\begin{aligned}
x + 3y &= 140\\
x &= 140 - 3.30\\
x &= 140 - 90\\
x &= 50.
\end{aligned}$$

Consultando a tabela 6, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
1.\frac{50}{100}.420kcal + 3.\frac{30}{100}.270kcal &= 210 + 243\\
&= 453kcal
\end{aligned}$$

consumidas no café da manhã de segunda-feira.

Exercício 6. *Em um estádio, são colocados à venda ingressos para arquibancada e cadeira. Em um jogo de futebol, o público total que pagou ingresso foi de 5715 pessoas. Desse total, 40 por cento pagaram meia-entrada, sendo que* $\frac{2}{3}$ *dos que compraram ingresso para arquibancada pagaram meia-entrada e* $\frac{1}{6}$ *dos que compraram ingressos para cadeira pagou meia-entrada. Considerando que o preço do ingresso da arquibancada era 20,00 e o de cadeira 30,00, calcule o valor total arrecadado com a venda de ingressos desse jogo.*

Resolução:

Sejam a *e* c *, respectivamente a quantidade de ingressos para arquibancada e cadeira. Sabemos que* $0,4.5715 = 2286$ *pessoas pagaram meia-entrada. Logo, devemos ter:*

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a & + & c & = & 5715\\ \dfrac{2a}{3} & + & \dfrac{c}{6} & = & 2286 \end{array}\right. . \tag{6.12}$$

Utilizando o método da substituição para a resolução do sistema (6.12)*, temos: Isolando a* $1^a equação$ *do sistema* (6.12) *e substituindo-á na* 2^a *equação temos*

$$\begin{aligned}
a + c &= 5715 \\
c &= 5715 - a \\
\frac{2a}{3} + \frac{c}{6} &= 2286 \\
\frac{2a}{3} + \frac{5717 - a}{6} &= 2286 \\
\frac{2.(2a)}{6} + \frac{5715 - a}{6} &= 2286 \\
\frac{4a + 5715 - a}{6} &= 2286 \\
\frac{3a + 5715}{6} &= 2286 \\
3a + 5715 &= 13716 \\
3a &= 13716 - 5715 \\
3a &= 8001 \\
a &= 2667.
\end{aligned}$$

Substituindo $a = 2667$ *na primeira equação do sistema* (6.12)*. Logo,*

$$\begin{aligned}
a + c &= 5715 \\
2667 + c &= 5715 \\
c &= 5715 - 2667 \\
c &= 3048.
\end{aligned}$$

Pelo enunciado do problema o ingresso para arquibancada custa R$ 20,00 e para a cadeira R$ 30,00, temos:

$$\frac{1}{3}.2667.20 + \frac{2}{3}.2667.10 + \frac{1}{6}.3048.15 + \frac{5}{6}.3048.30 = R\$ \quad 119.380,00.$$

Exercício 7. *Vicente, que tem o hábito de fazer o controle do consumo do combustível de seu carro, observou-se que com 33 l de gasolina, ele pode rodar 95 Km na cidade mais 276 km na estrada, e com 42 l de gasolina, ele pode rodar 190 km na cidade mais 264 Km na estrada.*
a) Quantos quilômetros Vicente pode rodar na cidade com 1 L de gasolina?
b) Sabendo que Vicente viajou 143,5km com 13 l, determine o comprimento do seu trajeto na estrada e o comprimento de seu trajeto na cidade
Resolução:
a) *Considere* x *o consumo de gasolina em litros a cada quilômetro na cidade e* y *o consumo em litros por quilômetro rodado na estrada, então temos o seguinte sistema:*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 95x & + & 276y & = & 33 \\ 190x & + & 264y & = & 42 \end{array} \right. . \tag{6.13}$$

Utilizando o método da adição para resolver o sistema (6.13)*, multiplicaremos a primeira equação por -2 logo a seguir a somaremos com a segunda equação.*

$$\begin{cases} 95x + 276y = 33 \quad (-2) \\ 190x + 264y = 42 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -190x - 552y = -66 \\ 190x + 264y = 42 \end{cases} \qquad +$$

portanto,

$$\begin{aligned} -552y + 264y &= -66 + 42 \\ -288y &= -24(-1) \\ 288y &= 24 \\ y &= \frac{24}{288} \\ y &= \frac{1}{12} l/km. \end{aligned}$$

Substituindo $y = \dfrac{1}{12}$ *na primeira equação do sistema* (6.13)

$$\begin{aligned} 95x + 276y &= 33 \\ 95x + 276.\frac{1}{12} &= 33 \\ \frac{95x.12 + 276}{12} &= 33 \\ 1140x + 276 &= 396 \\ 1140x &= 120 \\ x &= \frac{120}{1140} \\ x &= \frac{2}{19}\ l/km. \end{aligned}$$

Portanto ele poderá com 1 l de gasolina 9,5 Km na cidade e 12 Km na estrada

b) *Considere* e *o trajeto realizado na estrada e* c *o trajeto realizado na cidade*

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \frac{1}{12}e & + & \frac{2}{19}c & = & 13 \\ c & + & e & = & 143,5 \end{array} \right. .$$

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \frac{1}{12}e & + & \frac{2}{19}c & = & 13 \times (-12) \\ e & + & c & = & 143,5 \end{array} \right.$$

então,

$$\left\{ \begin{array}{lllll} -e & - & \frac{24}{19}c & = & -156 \\ e & + & c & = & 143,5 \end{array} \right.$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{24}{19}c + c &= -156 + 143,5 \\
\frac{-24c + 19c}{19} &= -12,5 \\
-24c + 19c &= -237,5 \\
-5c &= -237,5 \times (-1) \\
5c &= 237,5 \\
c &= \frac{237,5}{5} \\
c &= 47,5\ km.
\end{aligned}
$$

Substituindo $c = 47,5$ *na segunda equação*

$$
\begin{aligned}
e + c &= 143,5 \\
e &= 143,5 - c \\
e &= 143,5 - 47,5 \\
e &= 96\ km
\end{aligned}
$$

Dessa forma, concluímos que dos 143,5 km rodados com 13 litros de gasolina, 96 km foram na estrada e 47,5 km na cidade.

7 Considerações Finais

No presente trabalho demos destaque ao processo de ensino-aprendizagem da matemática com enfoque nos sistemas lineares e suas propriedades, ressignificando o modo como tal conteúdo é aplicado em sala de aula.

A matemática no ensino básico, atualmente está dividida em grandes áreas, por exemplo, álgebra, geometria, estatística, etc.., às quais compõem o todo. Assim sendo, ela deve ser trabalhada de modo contextualizado tornando-a mais atrativa e significativa.

A integração entre álgebra e geometria no ensino do conteúdo em questão, faz com que, aqueles resultados meramente numéricos ganhem interpretação visual, podendo desenvolver no aluno capacidades cognitivas essenciais à vida em sociedade como a construção e leitura gráfica e a utilização correta dos meios tecnológicos.

Tal prática rompe com o modo tradicionalista escolar, pois ao se propor tais atividades, o professor empodera os alunos, fazendo com que os mesmos se sintam agente ativo no processo de aprendizagem, transformando a prática escolar em experiência pessoal de demonstração de seus próprios limites e habilidades.

Referências

[1] Boldrini, J. L.; Costa, S. I.; Figueredo, V.; *et al.*. *Álgebra linear*. Harper & Row. 1980.

[2] Callioli, C. A.; Domingues, H. H.; & Costa, R. C. F. *Álgebra linear e aplicações*. Atual. 2007.

[3] Dante, L. R. *Projeto teláris–matemática*. Luiz Roberto Dante–9 ano, Band 1. 2012.

[4] Hefez, A. & Fernandez, C. d. S. *Introdução à álgebra linear*. Rio de Janeiro: SBM. 2012.

[5] Iezzi, G. *Fundamentos de matemática elementar, 7: geometria analítica*. Atual. 2013.

[6] Iezzi, G. & Hazzan, S. *Fundamentos de matemática elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas*. Atual. 2004.

[7] Loreto, A. & Loreto, A. C. d. C. *Vetores e geometria analítica–teoria e exercícios*. 2009.

[8] Nacionais, P. C. *ensino médio*. Brasília: Ministério da Educação, 538–545. 1999.

[9] Reis, G. L. d. & Silva, V. V. *Geometria analítica*. Rio de Janeiro: LTC. 1996.