



**Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ**

**Campus Alto Paraopeba - CAP**

**Eduardo Estevão Machado**

**Conjuntos de Julia Quadráticos**

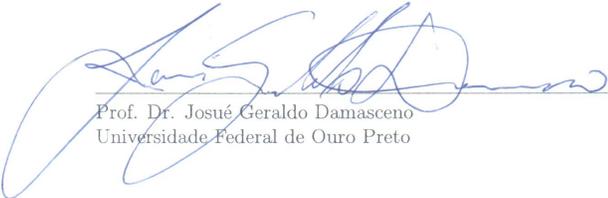
Dissertação apresentada ao Departamento de Física e Matemática da Universidade Federal de São João del-Rei como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em rede Nacional, PROFMAT.

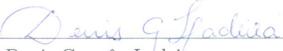
**Orientadora: Doutora. Mariana Garabini Cornelissen Hoyos**

**Ouro Branco  
2017**

Dissertação de Mestrado defendida em 01 de dezembro de 2017 e aprovada  
pela Banca Examinadora composta pelos Professores.

  
\_\_\_\_\_  
Profa. Dra. Mariana Garabini Cornelissen Hoyos  
Universidade Federal de São João del-Rei

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Josué Geraldo Damasceno  
Universidade Federal de Ouro Preto

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Denis Gouvêa Ladeira  
Universidade Federal de São João del-Rei

## RESUMO

Eduardo Estevão Machado<sup>1</sup>  
Mariana Garabini Cornelissen Hoyos<sup>2</sup>

Os conjuntos de Julia receberam esse nome em homenagem ao matemático francês Gaston Maurice Julia, quem estudou tais conjuntos e suas propriedades em 1915. Esses conjuntos são formados por pontos  $z$  no plano complexo cuja órbita por uma função complexa é limitada. Nesse trabalho, apresentamos um estudo sobre os conjuntos de Julia gerados pela função  $f_c(z) = z^2 + c$ , onde  $c$  uma constante complexa, chamados Conjuntos de Julia Quadráticos. Mostramos que, para cada  $c \in \mathbb{C}$  temos um conjunto de Julia associado, que pode ser uma figura simples como um círculo ou como um intervalo na reta real, como pode ser também um fractal, dependendo da constante  $c$  escolhida. Além disso, apresentamos também um algoritmo para gerar tais conjuntos de Julia com o uso do software Geogebra.

**Palavras-chave:** Conjunto de Julia. Fractal. Iteração.

---

<sup>1</sup>Aluno de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2015  
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ / Campus Alto Paraopeba - CAP  
E-mail: edu-machado@hotmail.com

<sup>2</sup>Orientadora do Trabalho de Conclusão de Curso  
Departamento de Física e Matemática - DeFim, UFSJ/CAP  
E-mail: mariana@ufsj.edu.br

## ABSTRACT

The sets of Julia were named after the French mathematician Gaston Maurice Julia, who studied such sets and their properties in 1915. These sets are formed by points  $z$  in the complex plane whose orbit by a complex function is limited. In this work, we present a study about the Julia sets generated by the function  $f_c(z) = z^2 + c$ , where  $c$  a complex constant, called Quadratic Julia Sets. We show that for every  $c \in \mathbb{C}$  we have a set of associated Julia, which can be a simple figure as a circle or as a range in the real line, as can be also a fractal, depending on the constant  $c$  chosen. In addition, we also present an algorithm to generate such sets of Julia using Geogebra software.

**Key words:** Julia Set. Fractal. Iteration.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos Preliminares</b>	<b>8</b>
2.1	Números Complexos . . . . .	8
2.2	Órbita de um ponto . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Conjuntos de Julia</b>	<b>16</b>
<b>4</b>	<b>Desenhando conjuntos de Julia</b>	<b>22</b>
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>27</b>
<b>6</b>	<b>Agradecimentos</b>	<b>28</b>

## Lista de Figuras

1	Conjunto de Julia preenchido:(a) $c = -0.74 + 0.12i$ (b) $c = 0.37 - 0.28i$ (c) $c = 0.27 + 0.01i$ (d) $c = 0.15$ (e) $c = i$ (f) $c = -1.312$ . . . . .	7
2	Representação Geométrica . . . . .	9
3	Transformação de $z = Re^{i\theta}$ por $f(z) = z^2$ com $R > 1$ . . . . .	11
4	Iterações do ponto $x_0 = 0.9$ . . . . .	13
5	Iteração do ponto $x_0 = 2.2$ . . . . .	14
6	Iteração do ponto $x_0 = 1.6$ . . . . .	14
7	Conjunto de Julia preenchido ( $c = 0$ ) . . . . .	17
8	Conjunto de Julia ( $c = -2$ ) . . . . .	19
9	Conjunto de Julia ( $c = -1$ ) . . . . .	19
10	Conjunto de Julia (avião) . . . . .	20
11	Conjunto de Julia (coelho) . . . . .	20
12	Conjunto de Julia preenchido:(a) $c = -0.687 + 0.312i$ (b) $c = 0.3 + 0.6i$ (c) $c = -0.75 + 0.1i$ (d) $c = 0.275$ (e) $c = -1.2$ (f) $c = -1.4$ . . . . .	20
13	Controle Deslizante . . . . .	23
14	Imagem da tela do Geogebra . . . . .	24
15	Conjunto de Julia ( $c = -0.75$ ) gerado pelo software Geogebra . . . . .	25
16	Tela inicial do ChaosPro . . . . .	25
17	Conjunto de Julia ( $c = -0.75$ ) gerado pelo software ChaosPro . . . . .	26

# 1 Introdução

Os conjuntos de Julia são conjuntos no plano complexo que surgem do estudo da dinâmica polinomial complexa. Os conjuntos de Julia receberam esse nome em homenagem a Gaston Julia. Gaston Maurice Julia foi um matemático francês que viveu entre 1893 a 1978 e foi quem descobriu essa família de conjuntos e primeiro explorou suas propriedades. O interesse de Julia nestes conjuntos originou-se de um artigo de Arthur Cayley intitulado de “The Newton-Fourier imaginary problem” ([1]) no qual Cayley estudou as raízes da função  $f(z) = z^3 + c$ , onde  $z \in \mathbb{C}$  e  $c$  é uma constante complexa. Julia estudou não apenas funções de grau 3 e sim funções polinomiais de vários graus e até funções racionais, como por exemplo a função  $f(z) = z^4 + \frac{z^3}{z+1} + \frac{z^2}{z^3+4z^2+5} + c$ . Seus estudos se basearam nas iterações destas funções e Julia percebeu vários comportamentos interessantes. Sua obra prima sobre esses conjuntos foi publicada em 1918 [2].

Nesta dissertação estudamos a família dos conjuntos de Julia gerados pela função quadrática  $f_c(z) = z^2 + c$  onde  $z$  é uma variável complexa e  $c$  é um parâmetro (constante fixa) complexo. O conjunto de Julia, denotado por  $J_c$ , gerado pela função  $f_c(z)$  é definido como sendo a fronteira do que chamamos de conjunto de Julia preenchido, denotado por  $K_c$ . Já o conjunto de Julia preenchido,  $K_c$ , é por definição o conjunto de pontos do plano complexo que possuem órbita limitada pela função  $f_c(z)$ . Tais conjuntos possuem comportamento bastante interessante e para cada  $c \in \mathbb{C}$  temos um conjunto de Julia  $K_c$  associado, como pode ser visto na figura abaixo.

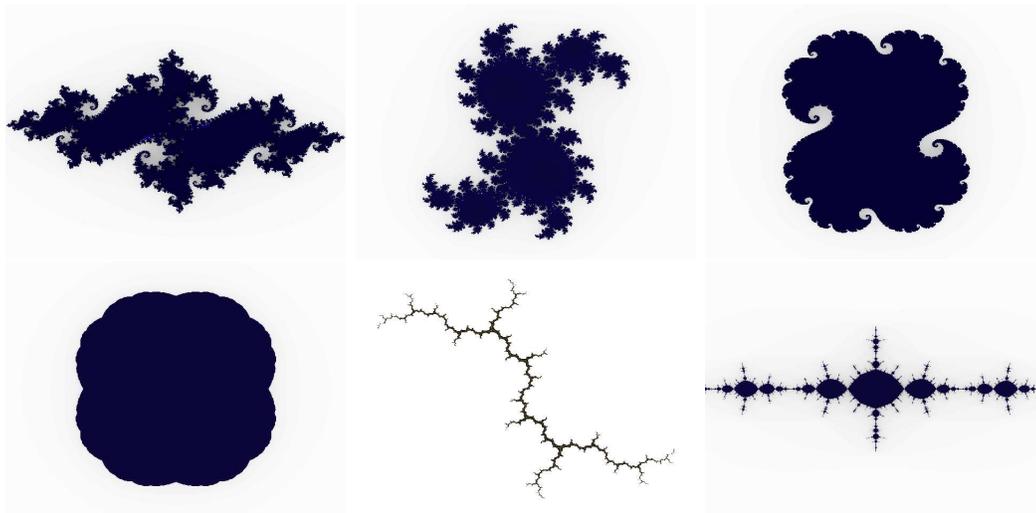


Figura 1: Conjunto de Julia preenchido:(a)  $c = -0.74 + 0.12i$  (b)  $c = 0.37 - 0.28i$  (c)  $c = 0.27 + 0.01i$  (d)  $c = 0.15$  (e)  $c = i$  (f)  $c = -1.312$

Na próxima seção, apresentamos as principais definições e resultados necessários para o entendimento deste trabalho. Na seção 3 definimos e exemplificamos os conjuntos de Julia originados do caso  $f_c(z) = z^2 + c$ . Na seção 4 descrevemos um algoritmo para construção dos Conjuntos de Julia e geramos imagens desses conjuntos com o auxílio dos softwares Geogebra e ChaosPro.

## 2 Conceitos Preliminares

Nesta seção introduzimos alguns conceitos e resultados que são utilizados no desenvolvimento desse trabalho. Iniciamos definindo o conjunto dos números complexos, que será o ambiente no qual trabalhamos.

### 2.1 Números Complexos

**Definição 2.1** (*Conjunto dos números complexos*) O conjunto dos números complexos, denotado por  $\mathbb{C}$ , é o conjunto

$$\mathbb{C} = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$$

munido das seguintes operações:

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

Note que a operação de multiplicação é comutativa, isto é,  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ .

**Exemplo 2.1** Se  $z_1 = (1, 2)$  e  $z_2 = (2, 0)$  então

$$z_1 + z_2 = (1, 2) + (2, 0) = (1 + 2, 2 + 0) = (3, 2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1, 2) \cdot (2, 0) = (1 \cdot 2 - 2 \cdot 0, 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2) = (2, 4)$$

Dizemos que dois números complexos  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$  são iguais se, e somente se, suas coordenadas são iguais, ou seja:  $z_1 = z_2 \iff (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2$  e  $y_1 = y_2$ . Portanto, o número complexo  $z = (x, y)$  será nulo se, e somente se,  $x = y = 0$ .

Dado  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ , temos a seguinte notação:

$$\begin{aligned} x &= \text{Re}(z) = \text{parte real de } z. \\ y &= \text{Im}(z) = \text{parte imaginária de } z. \end{aligned}$$

Fazendo a identificação dos pares ordenados da forma  $(x, 0)$  com o número real  $x$ , vemos que  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ . O par ordenado  $(0, y)$  é chamado de número imaginário puro.

**Observação 2.1** Observe que, de acordo com a definição de multiplicação de dois números complexos, temos:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$$

ou seja,  $(0, 1)^2 = -1$  (segundo nossa identificação  $(-1, 0) = -1$ ). O par ordenado  $(0, 1)$  será denotado por  $i$  e chamado de unidade imaginária. Observe ainda que

$$(0, y) = (y, 0) \cdot (0, 1) = (0, 1)(y, 0)$$

donde

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy$$

Essa outra maneira de representar o número complexo  $z = (x, y)$  vista acima, dada por  $x + iy$ , é mais utilizada ao realizar operações básicas com os números complexos, como a multiplicação. Com essa representação, podemos multiplicar dois números complexos utilizando a distributividade, lembrando que  $i^2 = -1$ .

**Exemplo 2.2** Considere os números complexos  $z_1 = (3, 2) = 3 + 2i$  e  $z_2 = (5, 6) = 5 + 6i$ . Assim,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (3, 2) \cdot (5, 6) = (3 + 2i) \cdot (5 + 6i) = \\ &= (3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot i^2) + (3 \cdot 6 + 2 \cdot 5)i = (15 - 12) + (18 + 10)i = 3 + 28i \end{aligned}$$

Os números complexos também podem ser representados geometricamente como pontos do plano cartesiano (figura abaixo).

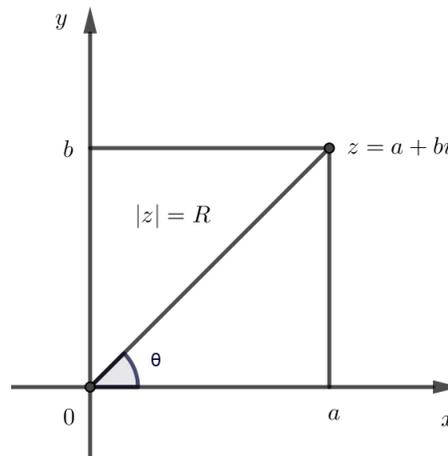


Figura 2: Representação Geométrica

Dessa forma, usando a mudança de coordenadas polares, temos:

$$z = (x, y) = (R \cos \theta, R \sin \theta)$$

onde  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$  é chamado de módulo de  $z$  e denotado por  $|z|$  e  $\theta$  é o ângulo orientado positivamente (sentido antihorário) entre o semieixo positivo do eixo  $x$  e o vetor  $(x, y)$ , chamado de argumento de  $z$ , denotado por  $\arg(z)$ . Assim,

$$z = x + iy = R \cos \theta + i R \sin \theta = R(\cos \theta + i \sin \theta)$$

que é conhecida como forma polar de  $z$ . Usando a fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

segue que

$$z = (x, y) = x + iy = R(\cos \theta + i \sin \theta) = R e^{i\theta}$$

Essa representação polar é muito útil ao realizarmos operações com números complexos, como potências.

O conjugado de um número complexo  $z = a + bi$  é definido por  $\bar{z} = a - bi$

**Proposição 2.1** No conjunto dos números complexos são válidas as seguintes propriedades:

$$(i) \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$(ii) \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$(iii) \overline{\overline{z_1}} = z_1$$

$$(iv) |z_1|^2 = z_1 \cdot \overline{z_1}$$

$$(v) |z_1| = |\overline{z_1}|$$

$$(vi) |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \text{ (desigualdade triangular)}$$

$$(vii) |z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$$

**Demonstração:** A demonstração dos itens (i), (ii) e (iii) seguem trivialmente da definição de conjugado de um número complexo. Os itens (iv) e (v) seguem do fato que  $|a+bi| = |a-bi|$  e  $(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$ . Para demonstrar a desigualdade triangular, item (vi), observe que:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

Logo,  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ . Já a demonstração do item (vii) segue da desigualdade triangular:

$$|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2| = |z_1 + z_2| + |z_2|$$

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$$

□

Abaixo, lembramos a definição de uma região circular no plano complexo.

**Definição 2.2 (Disco)** O disco de centro no ponto  $z_0$  e raio  $\rho > 0$  é o conjunto de pontos

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \rho\}.$$

A seguir, apresentamos a função quadrática complexa fundamental desse trabalho.

Uma função complexa nada mais é do que uma função definida no conjunto dos números complexos com imagens complexas, isto é:

$$f : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

que associa a cada número complexo  $z \in A$  um único número complexo  $w = f(z) \in \mathbb{C}$ .

**Exemplo 2.3** (*Função Quadrática*  $f_c(z) = z^2 + c, c \in \mathbb{C}$ )

$$f_c : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto z^2 + c$$

é uma função complexa.

Note que se  $z = Re^{i\theta}$  então  $z^2 = R^2e^{i2\theta}$ . Portanto, a função  $f(z) = z^2$  transforma o vetor  $z$  em um vetor  $f(z)$  cujo comprimento (módulo) é igual ao quadrado do comprimento de  $z$  e cujo argumento é o dobro de  $\arg(z)$ . Geometricamente, temos uma dilatação (se  $R > 1$ ) ou contração (se  $R < 1$ ) seguida de uma rotação de  $\theta$ , em sentido anti horário.

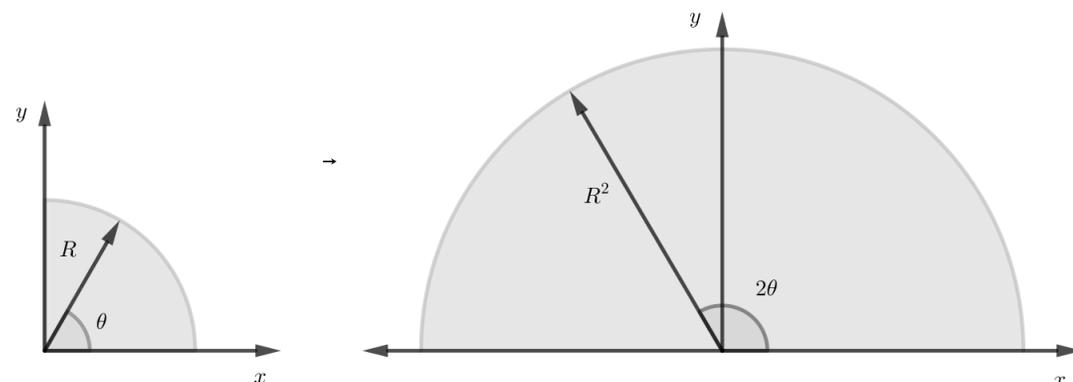


Figura 3: Transformação de  $z = Re^{i\theta}$  por  $f(z) = z^2$  com  $R > 1$

Já a função  $f_c(z) = z^2 + c$ , que usamos neste trabalho, onde  $c$  é uma constante complexa, nada mais é do que a função acima seguida de uma translação do vetor  $c$ .

Para entender os conjuntos de Julia, objeto de estudo desse trabalho, precisamos de mais alguns conceitos e definições que apresentamos abaixo.

## 2.2 Órbita de um ponto

Chamamos de órbita de um ponto  $z_0$  por uma função complexa  $f$  definida para todo  $\mathbb{C}$  a sequência de pontos dada por

$$z_0, f(z_0), f(f(z_0)), f(f(f(z_0))), \dots$$

Denotamos por  $f^n(z_0) = \underbrace{f(f(f(\dots, f(z_0))))}_{n \text{ vezes}}$ , onde  $n \in \mathbb{N}$ , e por  $O_f(z_0)$  a órbita do ponto  $z_0$  pela função  $f$ .

**Definição 2.3** (*Órbita limitada*) Dada uma função complexa  $f$  e um ponto  $z_0$ , dizemos que  $O_f(z_0)$  é limitada se existe  $M \in \mathbb{R}, M > 0$  tal que

$$|f^n(z_0)| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$$

Dizemos que a órbita escapa para infinito se  $|f^n(z_0)| \rightarrow +\infty$  se  $n \rightarrow +\infty$ .

Se  $f(x_0) = x_0$  então  $x_0$  é dito um *ponto fixo* de  $f$ . Note que se  $x_0$  é um ponto fixo então  $f^n(x_0) = x_0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $O_f(x_0)$  é limitada.

A seguir, temos dois exemplos de funções e as análises de algumas de suas órbitas. Inicialmente, exemplificamos a análise das órbitas de funções reais. Na próxima seção, faremos a análise das órbitas da função quadrática complexa  $f_c(z) = z^2 + c$ .

**Exemplo 2.4** *Considere a função real  $f(x) = 3x - 2$ . Como  $f(1) = 1$  temos que 1 é um ponto fixo de  $f$ ,  $O_f(1)$  é a sequência  $1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$  que é uma sequência limitada. Agora, vamos calcular a órbita de  $x_0 = 0.9$ :*

$$f^1(0.9) = f(0.9) = 0.7$$

$$f^2(0.9) = f(0.7) = 0.1$$

$$f^3(0.9) = f(0.1) = -1.7$$

$$f^4(0.9) = f(-1.7) = -7.1$$

$$f^5(0.9) = f(-7.1) = -23.3$$

Note que  $O_f(0.9)$  sempre diminui e, portanto, é uma órbita ilimitada. Podemos visualizar as iterações acima graficamente da seguinte forma:

1. Inicialmente traçamos os gráficos das retas  $f(x) = 3x - 2$  e  $g(x) = x$  (função identidade). O gráfico da função identidade permite uma melhor visualização das iterações.
2. Como nosso valor inicial é  $x_0 = 0.9$ , calculamos  $f^1(0.9) = 0.7$ , obtendo  $A = (0.9, 0.7)$ . Partindo deste ponto A, traçamos uma linha paralela ao eixo x e marcamos o ponto de interseção com a função identidade. A partir deste ponto, seguimos a linha vertical e marcamos no eixo das abcissas  $x_1 = 0.7$ .
3. Em seguida, calculamos  $f^2(0.9) = f(0.7) = 0.1$ , obtendo  $B = (0.7, 0.1)$ . Partindo deste ponto B, traçamos uma reta paralela ao eixo x e marcamos o ponto de interseção com a função identidade. A partir deste ponto, seguimos a linha vertical e marcamos no eixo das abcissas  $x_2 = 0.1$ .
4. O procedimento acima, repetido sucessivamente, representa graficamente as iterações do ponto  $x_0 = 0.9$ .

No gráfico abaixo, foram representadas as iterações  $x_1 = f(x_0)$ ,  $x_2 = f^2(x_0) = f(x_1)$  e  $x_3 = f^3(x_0) = f(x_2)$ .

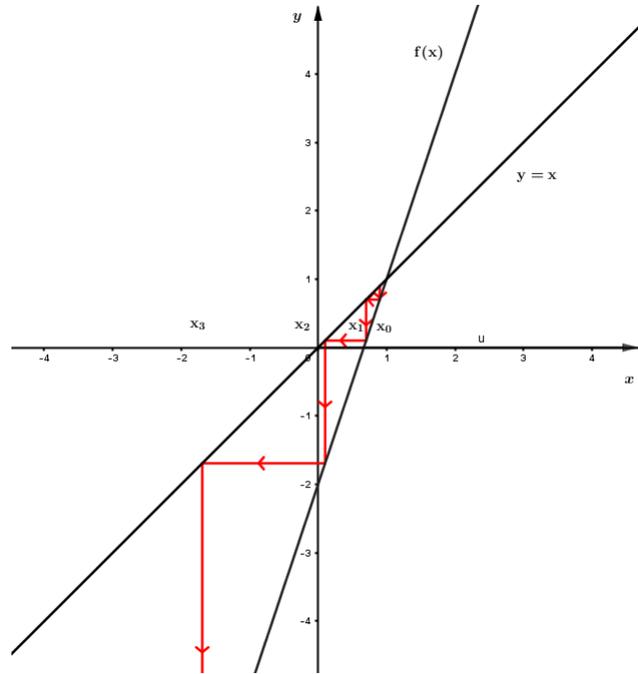


Figura 4: Iterações do ponto  $x_0 = 0.9$

**Exemplo 2.5** Considere agora a função quadrática  $u(x) = x^2 - 2$  e  $x_0 = 2,2$  (valor arbitrário). Então:

$$u^1(2.2) = u(2.2) = 2.84$$

$$u^2(2.2) = u(2.84) = 6.06$$

$$u^3(2.2) = u(6.06) = 34.72$$

$$u^4(2.2) = u(34.72) = 1203.47$$

Neste caso, a órbita do ponto  $x_0 = 2.2$  cresce indefinidamente donde  $O_u(2.2)$  é ilimitada.

Na figura abaixo, foram seguidos os passos do exemplo 4.1 e foi representada a sequência das três primeiras iterações do ponto  $x_0 = 2.2$ .

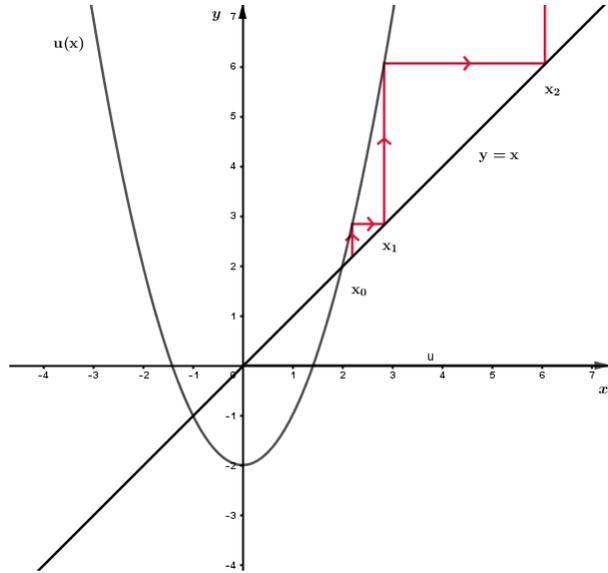


Figura 5: Iteração do ponto  $x_0 = 2.2$

Consideramos agora a órbita do ponto  $x_0 = 1.6$  (valor arbitrário):

$$\begin{aligned} u^1(1.6) &= u(1.6) = 0.56 \\ u^2(1.6) &= u(0.56) = -1.68 \\ u^3(1.6) &= u(-1.68) = 0.82 \\ u^4(1.6) &= u(0.82) = -1.32 \\ u^5(1.6) &= u(-1.32) = -0.25 \end{aligned}$$

Após sucessivas iterações o leitor percebe a dificuldade de elaborar uma conclusão. Traçando o gráfico da função  $u$  e da função  $g(x) = x$ , percebemos que as iterações sucessivas formam uma espiral retangular, onde pode-se mostrar que as iterações do ponto  $x_0 = 1.6$  produzem uma órbita limitada [3].

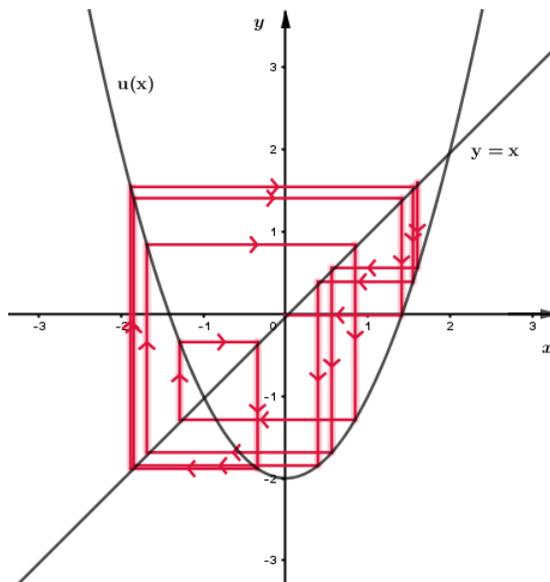


Figura 6: Iteração do ponto  $x_0 = 1.6$

Neste exemplo, verificamos que as iterações de distintos pontos através da função  $u(x) = x^2 - 2$  podem produzir órbitas limitadas ou ilimitadas.

Na seção seguinte estudamos as órbitas de números complexos pela função  $f_c(z) = z^2 + c$  e definimos os Conjuntos de Julia Quadráticos.

### 3 Conjuntos de Julia

Gaston Maurice Julia (1893-1978) foi um matemático francês, interessado no estudo de sistemas dinâmicos complexos. Julia pesquisou o comportamento de iterações de funções complexas racionais e polinomiais como fizemos nos exemplos da seção 2. Nesse trabalho, conforme já dito anteriormente, limitamos nossos estudos às iterações de funções quadráticas do tipo  $f_c(z) = z^2 + c$ , onde  $c$  é uma constante complexa.

Vimos no exemplo 2.5 que a órbita de um ponto por uma determinada função pode ficar limitada ou escapar para o infinito. Isso nos leva ao seguinte questionamento: para quais pontos iniciais  $z_0$  a órbita pela função  $f_c(z)$  será limitada e para quais pontos essa órbita irá escapar para o infinito?

**Definição 3.1 (Conjunto de Julia preenchido)** *O Conjunto de Julia preenchido da função complexa polinomial  $f_c(z) = z^2 + c$ , denotado por  $K_c$ , é o conjunto de pontos do plano complexo cuja órbita é limitada, isto é,*

$$K_c = \{z_0 \in \mathbb{C} \mid O_{f_c}(z_0) \text{ é limitada}\}.$$

Já o Conjunto de Julia, denotado por  $J_c$ , é a fronteira ou o bordo de  $K_c$ .

Abaixo apresentamos alguns exemplos de conjuntos de Julia quadráticos. Pode-se mostrar que se  $|c| > 2$  então  $J_c$  é um conjunto de Cantor [3]. Por isso, neste trabalho, estudamos apenas os casos  $|c| \leq 2$ . Iniciamos mostrando os casos  $c = 0$  e  $c = -2$ .

**Exemplo 3.1** *Considere a função  $f_0(z) = z^2$ , isto é,  $c = 0$ . Vamos mostrar agora que o conjunto de Julia preenchido, neste caso, nada mais é do que o disco de centro na origem e raio 1. Daí o conjunto de Julia  $J_c$  é a fronteira desse disco, que é a circunferência de centro na origem e raio 1.*

*Observe que a órbita de qualquer ponto  $z = Re^{i\theta}$  pela função  $f_0(z) = z^2$  é dada por:*

$$Re^{i\theta}, R^2e^{i2\theta}, R^4e^{i4\theta}, \dots, R^{2^n}e^{i2^n\theta}$$

*Portanto, temos três casos para analisar:*

- 1. Se  $R < 1$  temos que  $R^{2^n} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . Então  $|f_0^n(z)| \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ . Logo, pontos no interior do disco de centro na origem e raio 1 possuem órbitas limitadas e, portanto, pertencem à  $K_c$ .*
- 2. Se  $R > 1$  temos que  $R^{2^n} \rightarrow +\infty$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . Então  $|f_0^n(z_0)| \rightarrow +\infty$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ . E daí, pontos no exterior do disco de centro na origem e raio 1 geram órbitas que escapam para o infinito e, portanto, não pertencem à  $K_c$ .*
- 3. Se  $R = 1$  temos que  $|f_0^n(z)| = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Neste caso,  $O_{f_0}(z)$  permanece sobre a circunferência de raio 1, donde podemos concluir que tais pontos também pertencem à  $J_c$ .*

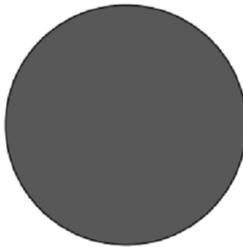


Figura 7: Conjunto de Julia preenchido ( $c = 0$ )

Passaremos agora para o caso  $f_c(z) = z^2 - 2$ , isto é,  $c = -2$ . Para exibir o conjunto de Julia neste caso precisamos de mais algumas definições que apresentamos abaixo.

**Definição 3.2 (Homeomorfismo)** Um homeomorfismo entre dois conjuntos  $X$  e  $Y$  é uma bijeção contínua  $h : X \rightarrow Y$  cuja inversa  $h^{-1} : Y \rightarrow X$  também é contínua.

**Definição 3.3 (Conjugação)** Duas funções  $f : X \rightarrow X$  e  $g : Y \rightarrow Y$  são ditas conjugadas se existe um homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$  tal que  $h \circ f = g \circ h$ .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Quando isso acontece  $X$  e  $Y$  são basicamente os mesmos espaços e possuem as mesmas propriedades.

**Exemplo 3.2** Considere agora a função  $f_{-2}(z) = z^2 - 2$ , caso  $c = -2$ . Vamos mostrar abaixo que a função  $f_{-2}(z) = z^2 - 2$  em  $\mathbb{C} - [-2, 2]$  é conjugada da função quadrática  $f_0(z) = z^2$  em  $R = \{z, |z| > 1\}$ , isto é, existe um homeomorfismo  $h : R = \{z, |z| > 1\} \rightarrow \mathbb{C} - [-2, 2]$ , tal que  $f_{-2} \circ h = h \circ f_0$ .

$$\begin{array}{ccc} R = \{z, |z| > 1\} & \xrightarrow{f_0} & R = \{z, |z| > 1\} \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \mathbb{C} - [-2, 2] & \xrightarrow{f_{-2}} & \mathbb{C} - [-2, 2] \end{array}$$

Considere  $h : R = \{z, |z| > 1\} \rightarrow \mathbb{C} - [-2, 2]$  dada por  $h(z) = z + \frac{1}{z}$ .

(i)  $h$  é injetora em  $R = \{z, |z| > 1\}$

Se  $h(z) = h(w)$  então

$$z + \frac{1}{z} = w + \frac{1}{w} \iff \frac{z^2 + 1}{z} = \frac{w^2 + 1}{w} \iff (z^2 + 1)w = z(w^2 + 1) \iff$$

$$z^2w + w = zw^2 + z \iff z^2w - zw^2 + w - z = 0 \iff$$

$$(z - w)(zw - 1) = 0 \iff z = w \text{ ou } zw = 1$$

Observe que, se  $|z| > 1$  e  $zw = 1$ , então temos que  $|w| = \frac{1}{|z|} < 1$ , ou seja,  $w \notin R$ .

Logo,  $z = w$ , donde  $h$  é injetora em  $R$ .

(ii)  $h$  é bijetora em  $\mathbb{C} - [-2, 2]$

Dado  $w \in \mathbb{C}$  seja  $z$  tal que  $h(z) = w$ .

$$z + \frac{1}{z} = w \iff \frac{z^2 + 1}{z} = w \iff z^2 - wz + 1 = 0 \iff z = \frac{w \pm \sqrt{w^2 - 4}}{2}$$

Sejam

$$z_1 = \frac{w + \sqrt{w^2 - 4}}{2} \text{ e } z_2 = \frac{w - \sqrt{w^2 - 4}}{2}$$

Como  $z_1 \cdot z_2 = 1$ , segue que ou  $z_1$  ou  $z_2$  está em  $R$ , ou ambos estão em  $|z| = 1$ .

Se ambos,  $z_1$  e  $z_2$ , estão em  $|z| = 1$  então vamos mostrar que  $w = h(z_1) = h(z_2) \in [-2, 2]$ , donde concluímos que  $h$  é bijetora em  $\mathbb{C} - [-2, 2]$ .

Como  $h(z) = z + \frac{1}{z} = w$ , se  $|z| = 1$  então

$$|h(z)| = |w| = \left| z + \frac{1}{z} \right| \text{ e utilizando a desigualdade triangular temos :}$$

$$|w| = \left| z + \frac{1}{z} \right| \leq |z| + \left| \frac{1}{z} \right| = 1 + 1 = 2$$

Logo,  $|w| \leq 2$ .

Agora, observe que  $Im(w) = Im\left(z + \frac{1}{z}\right) = Im(z) + Im\left(\frac{1}{z}\right)$ . Como  $Im\left(\frac{1}{z}\right) = -Im(z)$ , se  $|z| = 1$  então  $Im(w) = 0$ . Assim, concluímos que  $w \in [-2, 2]$ .

(iii)  $h$  é contínua e sua inversa também é contínua

A função  $h(z) = z + \frac{1}{z}$  é contínua, pois a mesma somente não seria contínua em  $z = 0$ , mas sabemos que  $|z| > 1$ . Analogamente a sua inversa também será contínua.

Portanto,  $h$  é homeomorfismo de  $R = \{z, |z| > 1\}$  em  $\mathbb{C} - [-2, 2]$ .

Agora, vamos mostrar que  $f_{-2} \circ h = h \circ f_0$ .

$$f_{-2} \circ h(z) = f_{-2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} - 2 = z^2 + \frac{1}{z^2}$$

$$h \circ f_0(z) = h(z^2) = z^2 + \frac{1}{z^2}$$

Portanto  $f_{-2}(z) = z^2 - 2$  em  $\mathbb{C} - [-2, 2]$  é conjugada da função quadrática  $f_0(z) = z^2$  em  $R = \{z, |z| > 1\}$ . Como todas as órbitas de  $f_0$  em  $R$  tendem ao infinito, segue que todas as órbitas de  $f_{-2}$  em  $\mathbb{C} - [-2, 2]$  também tendem ao infinito. Logo,  $K_2 \subseteq [-2, 2]$ .

Na verdade, mostra-se em [3] que  $K_{-2} = [-2, 2]$ , ou seja, o conjunto de Julia preenchido é o intervalo  $[-2, 2]$  na reta real. Como a fronteira deste conjunto em  $\mathbb{C}$  é ele mesmo, temos que  $K_{-2} = J_{-2} = [-2, 2]$ .

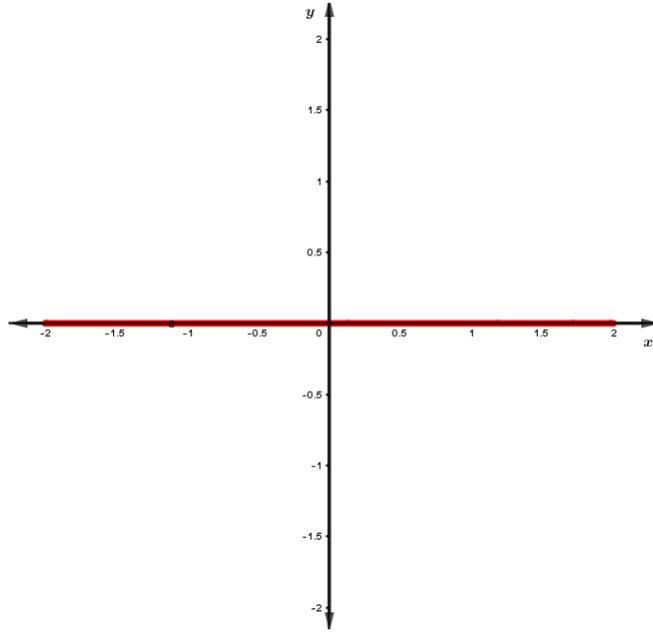


Figura 8: Conjunto de Julia ( $c = -2$ )

Nos próximos exemplos, os conjuntos de Julia foram gerados usando o software ChaosPro. Na próxima seção, é explicado como obter essas imagens através dessa ferramenta.

**Exemplo 3.3** Considere a função  $f_{-1}(z) = z^2 - 1$ , isto é,  $c = -1$ . Observe que,

$$z^2 - 1 = z \Leftrightarrow z^2 - z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

são pontos fixos dessa função e, portanto, esses dois pontos pertencem à  $K_c$ . Já a órbita de  $z_0 = 2i$ , dada por:

$$z_0 = 2i$$

$$z_1 = f^1(2i) = f(i) = -5$$

$$z_2 = f^2(2i) = f(-5) = 24$$

$$z_3 = f^3(2i) = f(24) = 575$$

$$z_4 = f^4(2i) = f(575) = 330624, \dots \text{ tende ao infinito e, portanto, não pertence à } K_c.$$

Este conjunto de Julia gerado pela função  $f_{-1}(z) = z^2 - 1$  é conhecido como *Basílica*, por motivo de sua semelhança com a Basílica de São Pedro situada no Vaticano.

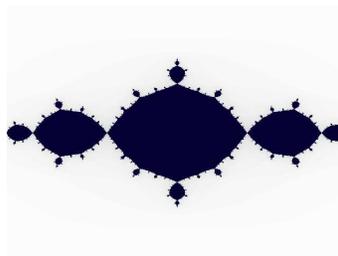


Figura 9: Conjunto de Julia ( $c = -1$ )

Destacamos os próximos exemplos como curiosidades visto que o matemático francês Adrien Douady [4], nomeou as imagens como coelho e avião.

**Exemplo 3.4** *Conjunto de Julia associado à função  $f_c(z) = z^2 + c$  onde  $c = -1.755$ .*

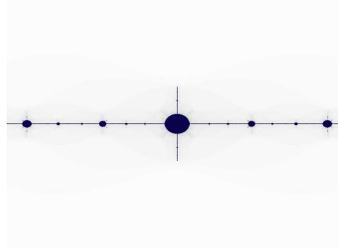


Figura 10: Conjunto de Julia (avião)

**Exemplo 3.5** *Conjunto de Julia associado à função  $f_c(z) = z^2 + c$  onde  $c = -0.123 + 0.745i$ .*

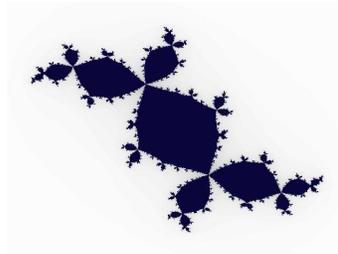


Figura 11: Conjunto de Julia (coelho)

**Exemplo 3.6** *Conjuntos de Julia associados à função  $f_c(z) = z^2 + c$ , com distintos valores de  $c$ .*

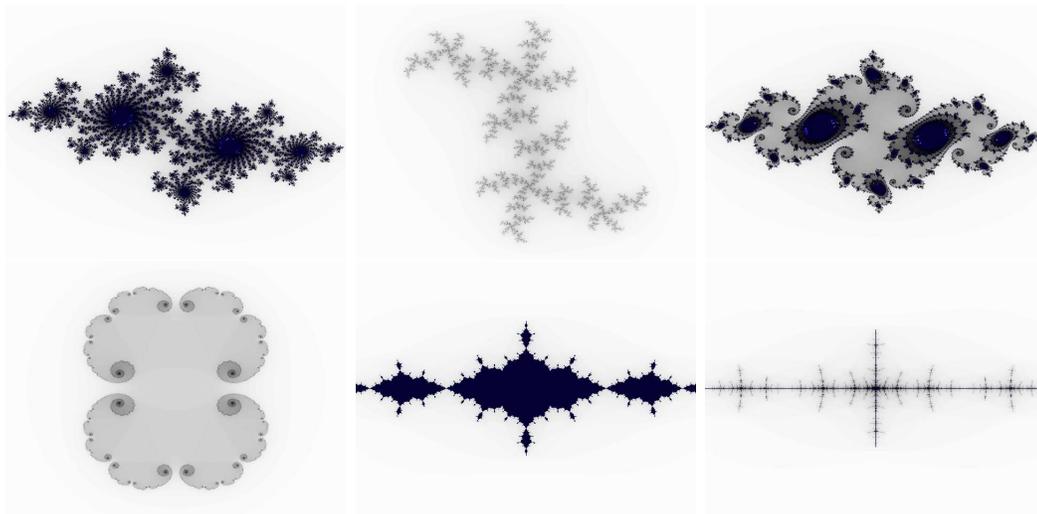


Figura 12: Conjunto de Julia preenchido: (a)  $c = -0.687 + 0.312i$  (b)  $c = 0.3 + 0.6i$  (c)  $c = -0.75 + 0.1i$  (d)  $c = 0.275$  (e)  $c = -1.2$  (f)  $c = -1.4$

Observe que se  $c \in \mathbb{R}$  então  $J_c$  ou  $K_c$  são simétricos em relação ao eixo  $\overrightarrow{x}$ , como pode ser visto nos exemplos 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4. Pode-se mostrar também que se  $c$  possui parte imaginária diferente de zero então  $J_c$  possui o que chamamos de simetria rotacional, isto é, o conjunto é dividido em partes por um eixo que passa pela origem do plano e, estas partes quando giradas em 180 graus irão se coincidir. O leitor interessado pode consultar tais demonstrações em [5].

O teorema abaixo nos fornece um algoritmo para computar o conjunto de Julia preenchido  $K_c$  para qualquer valor do parâmetro  $c$ .

**Teorema 3.1** *Se para algum  $p \in \mathbb{N}$  temos  $|f_c^p(z)| > \max\{|c|, 2\}$  então  $|f_c^n(z)| \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ .*

**Demonstração:** Seja  $z_p = f_c^p(z)$  e suponha  $|z_p| > |c|$  e  $|z_p| > 2$ . Pelo item (vii) da Proposição 2.1 segue que:

$$|f_c(z_p)| = |z_p^2 + c| \geq |z_p^2| - |c| = |z_p|^2 - |c| > |z_p|^2 - |z_p| = |z_p|(|z_p| - 1)$$

Como  $|z_p| > 2$ , existe  $t \in \mathbb{R}, t > 0$ , tal que  $|z_p| - 1 = 1 + t$ . Assim,

$$|f_c(z_p)| > (1 + t)|z_p| > |z_p|$$

Se iterarmos novamente a função, obtemos:

$$|f_c^2(z_p)| = |f_c(f_c(z_p))| > (1 + t)|f_c(z_p)| > (1 + t)^2|z_p|$$

Se repetirmos sucessivas iterações chegaremos em:

$$|f_c^n(z_p)| > (1 + t)^n|z_p|$$

Como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + t)^n = +\infty$ , podemos concluir que  $O_{f_c}(z_p)$  escapa para o infinito, o que completa a demonstração.  $\square$

Note que, como visto anteriormente nos exemplos, alguns conjuntos de Julia associados a função  $f_c(z)$ , são figuras fractais. Com o avanço da tecnologia, hoje já existem diversos softwares capazes de gerar tais conjuntos de Julia. Na próxima seção, fazemos uso do algoritmo acima para gerar conjuntos de Julia no Geogebra e apresentamos o software Chaospro.

## 4 Desenhando conjuntos de Julia

O método utilizado para desenhar conjuntos de Julia consiste em colorir com uma determinada cor os pontos de  $K_c$ , isto é, os pontos que possuem órbitas limitadas e colorir de uma outra cor distinta os pontos cujas órbitas escapam para o infinito. Observe que nos exemplos da seção anterior, colorimos de preto os pontos de  $K_c$  e de branco os pontos que não estavam em  $K_c$ .

Note que o teorema 3.1 nos fornece um algoritmo para gerar os conjuntos de Julia que queremos. Vimos nesse resultado que se  $z$  é tal que  $|f_c^p(z)|$  é maior que 2 e maior que  $|c|$  para algum  $p \in \mathbb{N}$  então a órbita desse  $z$  escapa para infinito e, portanto, esse ponto não pertencerá ao conjunto de Julia  $K_c$ . Desta maneira, podemos escolher um valor de  $p$  suficientemente grande e testarmos a condição  $|f_c^p(z)| > \max\{|c|, 2\}$ . Se isso não acontecer, dizemos que  $z \in K_c$ .

Com rigor teríamos que verificar isso para todo  $p \in \mathbb{N}$ , ou seja, para todos os pontos da órbita, o que é impossível em tempo finito. Desta forma, esse algoritmo não é infalível e sim um dispositivo útil para gerar uma figura aproximada do conjunto de Julia preenchido.

### Algoritmo para gerar o conjunto de Julia $K_c$

1. Inicialmente escolhemos um número  $N$  de iterações e para cada ponto  $z_0$  escrevemos os  $N$  primeiros pontos de sua órbita.
2. Se  $|f_c^i(z)| > \max\{|c|, 2\}$  para algum  $i \leq N$ , pare de iterar e atribua cor vermelha a  $z_0$ .
3. Se  $|f_c^i(z)| \leq \max\{|c|, 2\}$  para todo  $i \leq N$ , atribua cor preta a  $z_0$ .
4. As órbitas dos pontos de cor vermelha escapam e as órbitas dos pontos de cor preta ficam prisioneiras. Os pontos de cor preta são uma aproximação do conjunto de Julia  $K_c$ .

Existem diversos softwares capazes de gerar figuras fractais. Estes programas devem ser escolhidos de acordo com nossas necessidades e no sistema operacional disponível em nossos computadores. Neste trabalho optamos pelos softwares Geogebra e ChaosPro por serem ambos gratuitos e de fácil acesso.

O software Geogebra possui recursos de alto nível para o ensino de geometria e álgebra. O sistema de ajuda é simples e objetivo, o que facilita a utilização mesmo do leitor que não possui destreza com mídias e tecnologias. O arquivo executável está disponível para download no seguinte endereço: <https://download.geogebra.org>.

No exemplo abaixo, apresentamos como gerar o conjunto de Julia usando o software Geogebra. O programa recorre ao algoritmo citado acima para gerar a imagem do conjunto de Julia desejado.

**Exemplo 4.1** *Considere a função  $f_{-0.75}(z) = z^2 - 0,75$ . Seguem os passos para construção do conjunto de Julia associado à essa função utilizando o Geogebra:*

1. *Primeiramente devemos clicar em Exibir e selecionar Planilha. Em seguida, na célula A1 digitamos 0 e pressionamos Enter. Na célula A2 digitamos = A1 + 1 e apertamos Enter. Agora, selecionamos a célula A2 e clicamos no quadradinho do canto direito*

inferior e arrastamos a célula até a linha A101. Desta maneira, cada célula terá o valor da anterior somado com 1. Assim, as células serão preenchidas com os números 0 até 100. Estes valores serão utilizados para gerar o pincel de cores.

2. Da esquerda para direita, na barra de ferramentas, escolhemos Controle Deslizante e clicamos na área de trabalho. Em incremento, digitamos 0.01 e selecionamos Aplicar.

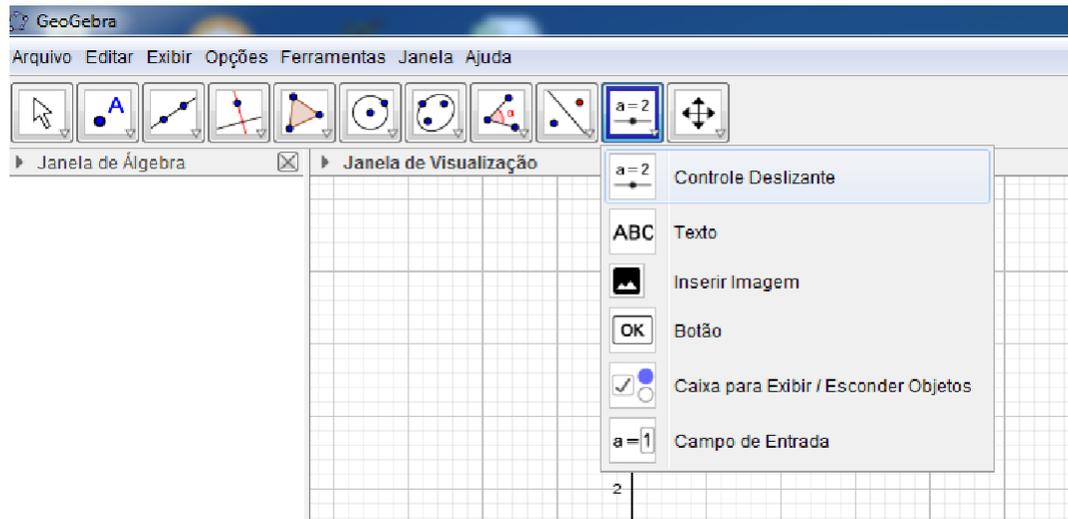


Figura 13: Controle Deslizante

3. Na célula B1, digitamos  $= (a, A1/100)$ . Devemos selecionar a célula B1 e copiar a mesma até a linha B101, para isto, basta clicarmos no quadradinho do canto inferior direito da célula e arrastar até a célula B101. Para desabilitar Rótulo selecionamos a coluna B clicando sobre a mesma e com o botão direito do mouse selecionamos Propriedades, Básico e desmarcamos Exibir Rótulo. Ainda em Propriedades clicamos em Álgebra e escolhemos Número Complexo. Com este comando, estamos representando os elementos das células como números complexos. Podemos também escolher o tamanho do ponto, para isto, ainda em Propriedades clicamos em Estilo, tamanho 3 para o ponto.
4. Digitamos na célula C1  $= B1 \wedge 2 - 0.75$ . Note que estamos entrando com a função  $f_c$  e o parâmetro é  $c = -0.75$ . Selecionamos a célula C1 e clicamos no quadradinho do canto inferior direito e arrastamos para direita até a célula Z1. Desta maneira o programa irá preencher as células D1 até Z1. Ainda com as células C1 até Z1 selecionadas clicamos duas vezes no quadradinho do canto inferior direito de Z1. Assim, o comando anterior preencherá todas as colunas de C até Z com números complexos. Neste momento o computador pode demorar alguns segundos para responder pois estará gerando muitos números complexos. Note que pode aparecer na planilha  $?-?i$ . Esta é a maneira do programa representar um complexo que possui parte real e parte imaginária com valores grandes.
5. Se os comandos Exibir Rótulo e Exibir Objeto estiverem ativados pode aparecer um número muito grande de pontos na tela do programa. Caso isto ocorra, devemos desabilitar os pontos das colunas C até Z. Para desabilitar selecionamos as colunas de C até Z e, clicamos com o botão direito do mouse, em seguida selecionamos Propriedades,

Básico e desmarcamos *Exibir Objeto* e *Exibir Rótulo*. Devemos aguardar alguns instantes pois o programa pode ficar lento devido ao grande número de informações presentes na tela.

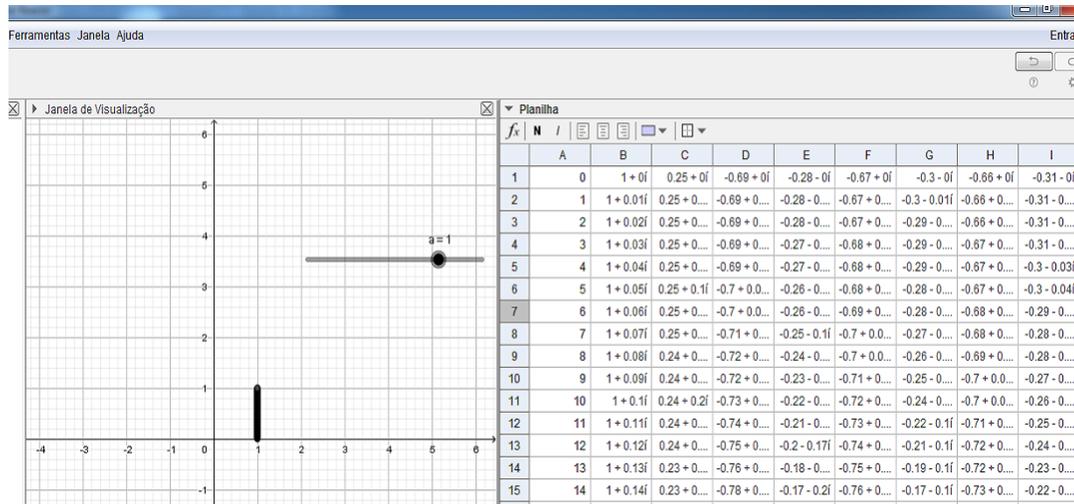


Figura 14: Imagem da tela do Geogebra

6. Para atribuírmos cores a sequência de pontos clicamos com o botão direito do mouse em B1, Propriedades, Avançado, Cores Dinâmicas e digitamos nas caixas os seguintes comandos: Red:  $Se[abs(Z1) \leq 2, 0, 1]$ , Green: 0 e Blue: 0. Desta maneira, se o módulo do complexo  $Z1$  for menor ou igual a 2 o ponto terá cor preta, caso contrário o ponto terá cor vermelha. Em seguida, selecionamos B1 novamente e clicamos duas vezes no quadradinho inferior direito da célula B1. Assim, o programa estará copiando a fórmula para toda a coluna B.
7. Vamos refletir os pontos da coluna B pelo eixo x. Para isto, clicamos na célula AA1 (localizada imediatamente após a célula Z1) e digitamos  $= Reflexão[B1, EixoX]$  e pressionamos Enter. (Caso o parâmetro  $c$  possua parte imaginária diferente de zero teremos uma simetria rotacional, neste caso, na célula AA1, digitamos  $= (-a, -A1/100)$ ). Agora, clicamos duas vezes sobre o quadradinho inferior no canto direito da célula AA1 e todos os pontos serão refletidos sobre o eixo X. Selecionamos novamente a coluna AA e clicamos em Propriedades, Básico e desmarcamos *Exibir Rótulo*. Na tela do programa irá aparecer um segmento, que será o nosso pincel de cores.
8. Após refletir os pontos precisamos atribuir cores. Para isto, clicamos na célula AA1 e seguimos os passos descritos no item 6. Para habilitar o rastro dos pontos selecionamos a coluna AA e clicamos com o botão direito do mouse, escolhemos Propriedades, Básico e marcamos *Exibir Rastro*. Devemos realizar o mesmo procedimento com a coluna B. Utilizando a ferramenta mover, movimentamos o cursor do Controle Deslizante. Note que o conjunto de Julia será gerado na tela. O cursor do Controle Deslizante pode ser programado para se mover sozinho. Para isto, clicamos com o botão direito do mouse sobre o Controle Deslizante, Propriedades, Básico e selecionamos Animar. Desta forma o cursor irá se mover automaticamente.

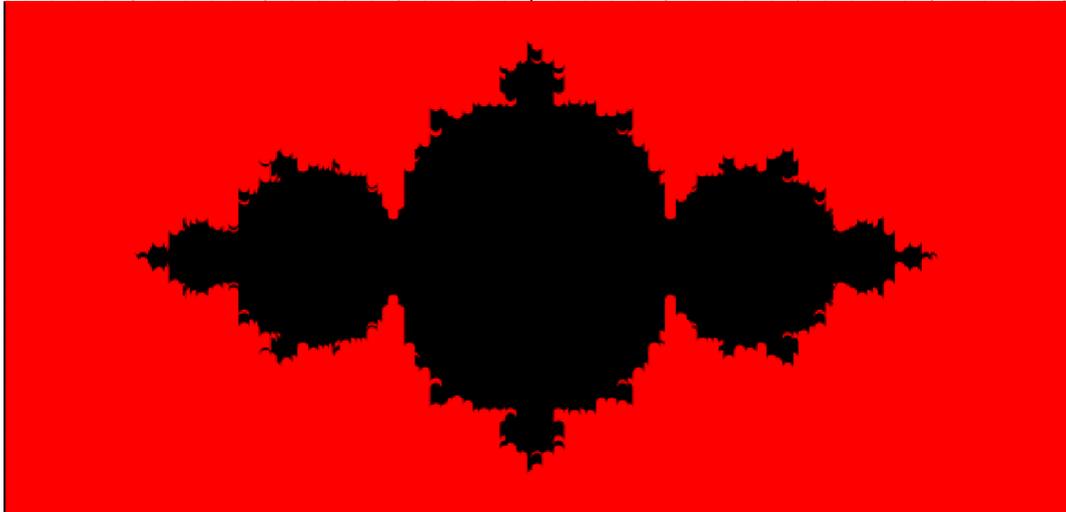


Figura 15: Conjunto de Julia ( $c = -0.75$ ) gerado pelo software Geogebra

O software ChaosPro nos permite criar conjuntos de Julia de forma rápida e eficaz. Possui suporte não apenas para gerar conjuntos de Julia e sim diversos tipos de fractais. O arquivo executável está disponível para download no seguinte endereço: <http://www.chaospro.de/download.php>.

**Exemplo 4.2** Voltamos à função  $f_{-0.75}(z) = z^2 - 0,75$ . Agora, apresentamos os passos para construção do conjunto de Julia gerado por essa função utilizando o ChaosPro:

1. Inicialmente fechamos a imagem que aparece na área de trabalho. Em seguida, clicamos em Fractal, New Defaulttype e Escape Time. O programa irá exibir na área de trabalho a imagem de um fractal.

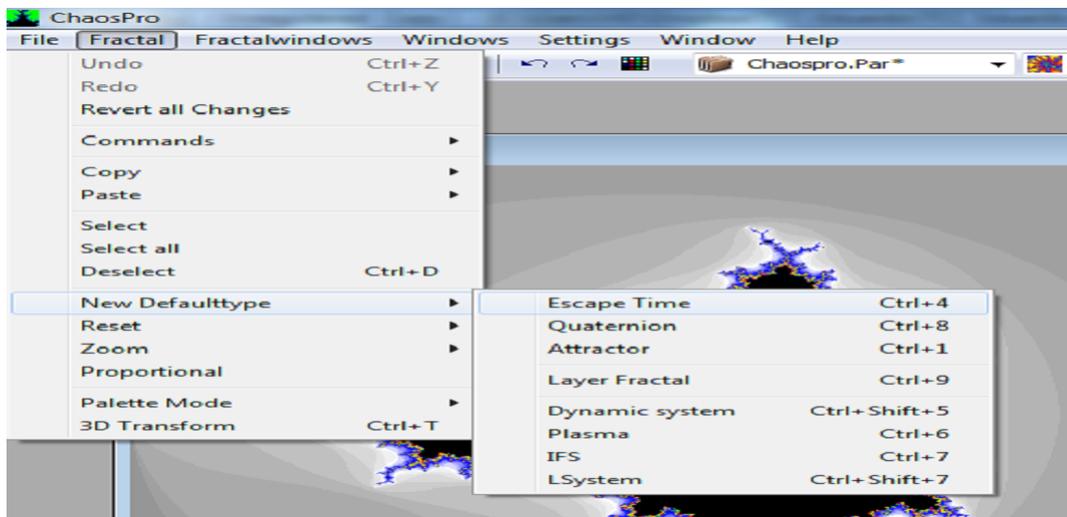


Figura 16: Tela inicial do ChaosPro

2. No canto superior direito será disponibilizado a coluna Parameters. Seleccionamos Fórmula e será exibido o nome do fractal gerado na área de trabalho (Mandelbrot). Clicamos na seta localizada do lado direito desta caixa e seleccionamos Select Julia.

3. Agora, arrastamos a barra de rolagem situada a direita para baixo e alteramos os parâmetros. Digite  $c = -0.75$  e  $0$ . Assim, estamos considerando  $c = -0.75 + 0i$ . Em seguida, arrastamos a barra até o final e marcamos Cycle. A figura será gerada na área de trabalho. As cores da imagem podem ser modificadas, para isto, clique no ícone de cores da barra de ferramentas ou clique em Fractal, Palette Mode.

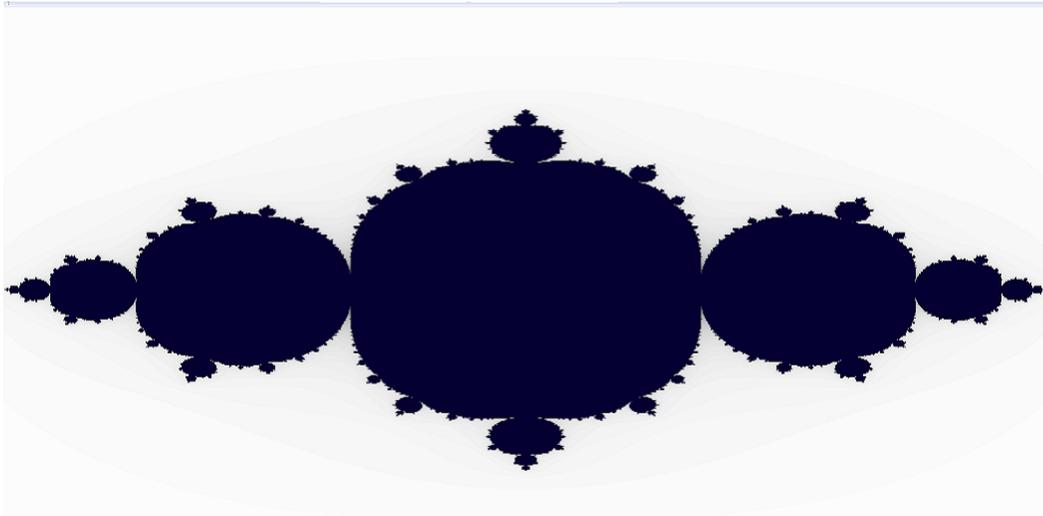


Figura 17: Conjunto de Julia ( $c = -0.75$ ) gerado pelo software ChaosPro

Todas as imagens geradas neste trabalho foram produzidas com o auxílio dos softwares Geogebra e ChaosPro.

## 5 Considerações Finais

Os números complexos são vistos no Ensino Médio, muitas vezes, apenas como o conjunto de números que permite o cálculo de raízes quadradas negativas. Isso possibilita uma boa compreensão da resolução de algumas equações polinomiais, mas, não mostra a beleza e outras propriedades desse conjunto. Procuramos neste texto apresentar ao leitor uma construção geométrica dos números complexos bem parecida com  $\mathbb{R}^2$  para que tanto professores quanto alunos do Ensino Médio possam aprofundar e melhorar seus conhecimentos básicos e introdutórios sobre esse conjunto de números. Além disso, ao definir e trabalhar com os Conjuntos de Julia, possibilitamos aos professores do Ensino Médio, após a leitura desse trabalho, apresentarem aos seus alunos aplicações de um caso particular de composição de funções, a composição de uma função com ela mesma diversas vezes, tais como a órbita de um ponto e os interessantes conjuntos que porventura podem surgir apenas desenhando órbitas de pontos, que podem ser até mesmo conjuntos fractais.

## 6 Agradecimentos

Agradeço a Deus, por ter guiado meus passos durante todo este percurso, à minha querida esposa Andreza, por estar sempre presente em todos os momentos me dando força e coragem, às minhas filhas Luiza e Laura, que sempre foram minha fonte de inspiração e motivação. Agradeço aos meus pais, pelo incentivo e confiança, à minha sogra Graciosa, pelo apoio e colaboração. Agradeço aos meus irmãos, cunhados e amigos que sempre acreditaram em mim. Agradeço aos colegas da turma do Profmat 2015 e, em especial, aos amigos Fernando Cigarra e Frederico Ferreira, que estiveram presentes durante todos os momentos. Agradeço à CAPES e SBM por tornarem possível a realização deste mestrado e, um agradecimento especial, à minha orientadora, Prof<sup>ª</sup>. Dra. Mariana Garabini Cornelissen Hoyos, pela paciência, dedicação e disponibilidade, pelos ensinamentos e contribuições que foram decisivos para a conclusão deste trabalho.

## Referências

- [1] CAYLEY, Arthur. The Newton-Fourier imaginary problem, Am. j . Math. II, 1997.
- [2] JULIA, Gaston., Sur'l'itération dès fonctions rationnelles,journal de Math. Pure et app., 8, 1918, p.47-245.
- [3] DEVANEY, R. L. A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment, Boston University (1992).
- [4] LEYS, Jos; GHYS, Étienne; ALVAREZ, Aurélien. Dimensions: Une promenade mathématique. Disponível em:< <http://www.dimensions-math.org>>. Acesso em: 15 junho. 2017.
- [5] DEVANEY, R. L. An introduction to chaotic dynamical systems. Reading: Addison-Wesley, 1989.
- [6] ARAÚJO, Luis Claudio Lopes de; NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa Nóbrega. Aprendendo Matemática com o Geogebra. - São Paulo: Editora Exato, 2010.
- [7] ÁVILA, Geraldo. Variáveis complexas e aplicações. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000.
- [8] GLENN, Elert; The Chaos Hypertextbook©1998–2016. Disponível em: <<https://hypertextbook.com/>>. Acesso em: 15 junho. 2017.
- [9] HOHENWARTERT, Markus; HOHENWARTER, Judith. Ajuda Geogebra: Manual Oficial da versão 3.2. Versão 3.2. Campo Mourão, 2009. Disponível em: <<http://www.GeoGebra.org>>. Acesso em: 15 junho. 2017.
- [10] JEWELS, Julia; An Exploration of Julia Sets by Michael McGoodwin (March 2000). Disponível em: <<https://www.mcgoodwin.net/julia/juliajewels.html>>. Acesso em: 15 junho. 2017.
- [11] JOYCE, David E.; Conjuntos de Julia e Mandelbrot. August, 1994. Disponível em: <<https://www.mcgoodwin.net/julia/juliajewels.html>>. Acesso em: 15 junho. 2017.
- [12] MANDELBROT, B.P.; The fractal Geometry of Nature. NY. Freeman, 1977.