UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

PROGRAMA DE MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL PROFMAT

WILSON FRANCISCO DA ROCHA LIMA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE POLIEDROS EXPLORANDO O MOVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DO CONCEITO

SÃO CARLOS

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

PROGRAMA DE MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL PROFMAT

WILSON FRANCISCO DA ROCHA LIMA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE POLIEDROS EXPLORANDO O MOVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DO CONCEITO

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre.

Orientação: Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio

SÃO CARLOS

2017

Rocha Lima, Wilson Francisco

uma sequência didática para o ensino de poliedros explorando o movimento lógico-histórico do conceito / Wilson Francisco Rocha Lima. -- 2017.
96 f. : 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador: João Carlos Vieira Sampaio
Banca examinadora: Esther de Almeida Prado Rodrigues, Luciene Nogueira Bertoncello
Bibliografia

1. Poliedros . 2. Ensino de Matemática. 3. História da Matemática. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).
DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Wilson Francisco da Rocha Lima, realizada em 24/11/2017:

Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio
UFSCar

Profa. Dra. Esther de Almeida Prado Rodrigues
USP

Profa. Dra. Luciene Nogueira Bertoncello
UFSCar

RESUMO

O objetivo deste trabalho é compreender e levar para a sala de aula o movimento realizado pelo conceito de poliedro na história do conhecimento humano buscando responder a seguinte questão: Como seria uma sequência didática que aborde os conteúdos relacionados a poliedros que compõem o currículo de Matemática escolar atual de maneira crítica, contextualizando o conhecimento com o momento histórico no qual esse foi desenvolvido e articulando os conteúdos com pesquisas atuais da Matemática científica? Com base na Teoria Sócio-interacionista de Vygotsky e do Materialismo Dialético de Marx, exploramos neste trabalho a participação da História da Matemática no Ensino em uma perspectiva Sociocultural, a partir de situações de ensino-aprendizagem que proporcionam um diálogo entre duas culturas distintas: a) a cultura do ambiente escolar e b) a cultura na qual o conceito trabalhado foi concebido. Utilizando como metodologia a Engenharia Didática, foi elaborada e desenvolvida em uma turma de alunos do nono ano do Ensino Fundamental uma sequência didática, composta de três situações de ensino-aprendizagem, que aborda alguns conteúdos sobre poliedros que compõem o currículo da escola básica. A partir dos estudos acerca dos poliedros desenvolvidos pelos gregos Platão e Euclides e pelo matemático suíço Leonhard Euler, a sequência explora as principais características destas figuras geométricas e encerra-se nas origens da Topologia, explorando de maneira introdutória a concepção de objetos tridimensionais nesta área da Matemática.

Palavras-chave: Geometria; Poliedro; História da Matemática.

ABSTRACT

The purpose of this work is comprehend and bring to the classroom environment a trajectory of the polyhedron as a concept through the history of human knowledge seeking to answer the following question: How would a didactic sequence that addressed the contents related to polyhedra that make up the curriculum of current Mathematics classes in a critical way, contextualizing the knowledge with the historical moment in which it was developed and articulating the contents with current researches of Scientific Mathematics? With Vygotsky's socio interactionist theory and Marx's dialectical materialism as a background, this work explores the presence of History of Mathematics on education in a sociocultural perspective, considering teaching-learning situations that can provide means of dialogue between the school culture and the one which the concept being taught initially appeared. Using as methodology the Didactic Engineering, a didactic sequence divided into three teaching-learning situations about polyhedrons was elaborated according to the curriculum and applied to middle school students. Based on the works of Greek philosophers Plato and Euclid and the Swiss mathematician Leonhard Euler, the sequence explores from main aspects of geometrical figures to the origins of Topology as an introduction to the conception of tridimensional objects on that field of Mathematics

Keywords: Geometry, Polyhedron, History of Mathematics

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática é uma ciência que utiliza uma linguagem própria para descrever os fenômenos da natureza e encontrar características que possam ser generalizados em teorias abstratas. Essas teorias, por sua vez, muitas vezes revelam-se aplicáveis em diversas situações reais e estas aplicações concebem dinamismo às pesquisas em Matemática, impulsionando-a com novas interrogações e possibilidades.

Os resultados das pesquisas em Matemática na área de Topologia são utilizados em situações reais. Durante o curso de Licenciatura em Matemática, na Universidade de São Paulo, desenvolvi um projeto de iniciação científica no qual realizava uma aplicação do teorema do ponto fixo, conhecido como Teorema de Borsuk-Ulam, para demonstrar que na superfície terrestre sempre existem dois pontos antípodas com a mesma temperatura. Além disso, estudei diversas aplicações da Topologia em outras áreas da Matemática, como Análise e Álgebra.

Ainda durante o curso de Licenciatura, notei que a Topologia se relaciona com um conteúdo que faz parte do currículo da escola básica, a Relação de Euler para poliedros. Porém nos cinco anos posteriores, atuando como professor de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental, notei que a abordagem desses conteúdos por livros didáticos em geral é superficial e não se articula com os conhecimentos da área de Topologia. Além disso, a abordagem de poliedros pelos livros didáticos muitas vezes não é articulada com seu contexto histórico, o que pode gerar certa mistificação da matemática, ou seja, impressão de que conteúdos matemáticos não são resultados de pesquisas desenvolvidas por seres humanos.

Durante o primeiro ano do curso de mestrado, na Universidade Federal de São Carlos, tomei conhecimento do Projeto Klein. O objetivo do projeto é “relacionar uma visão ampla da área da Matemática com conteúdos e suas abordagens no ensino médio e na graduação universitária” (PROJETO KLEIN, 2017). Ao assistir uma palestra de divulgação do projeto, percebi que aproximar a Matemática acadêmica da Matemática escolar é um desafio para muitos professores do mundo.

Surgiu então a pergunta: **Como seria uma sequência didática que aborde os conteúdos relacionados a poliedros que compõem o currículo de Matemática escolar atual de maneira crítica, contextualizando o conhecimento com o momento histórico no qual esse foi desenvolvido e articulando os conteúdos com pesquisas atuais da Matemática científica?**

O objetivo deste trabalho é desenvolver esta sequência didática buscando compreender e levar para a sala de aula da educação básica o movimento realizado pelo conceito de poliedro na história do conhecimento humano. Ao desenvolver tal sequência buscamos também estabelecer conexões entre os conteúdos relacionados a poliedros e pesquisas atuais da Matemática científica, visando diminuir a distância entre a Matemática das pesquisas acadêmicas e a Matemática do currículo escolar.

Em consonância com atuais pesquisas da Educação Matemática, o conhecimento humano é concebido nesta pesquisa como resultado de interações sociais entre indivíduos inseridos em um contexto cultural e, assim como o conhecimento matemático, esse conhecimento humano é definido pela cultura em que se desenvolve e em que é subsumido (RADFORD, 1997). Dessa forma, este trabalho resgata a história do conhecimento matemático com o objetivo de compreender seu desenvolvimento e estabelecer um diálogo entre duas diferentes culturas: a) a cultura na qual surgiu o conhecimento matemático em questão e b) a cultura dos alunos do grupo escolar no qual este trabalho é realizado.

Partindo da Teoria Sócio-interacionista de Vygotsky e do Materialismo Dialético de Marx, foi explorada neste trabalho a participação da História da Matemática no ensino utilizando a Perspectiva Sociocultural (RADFORD, 1997), a partir de situações de ensino-aprendizagem que proporcionam diálogos relacionados ao Movimento Lógico-histórico, conforme teorizado por Kopnin (1972), do conceito de Poliedro. Essas situações foram elaboradas com base na Teoria dos Registros Semióticos no desenvolvimento de conceitos geométricos, conforme Almouloud (2010)

Utilizando a metodologia da Engenharia Didática, desenvolvemos e aplicamos em uma turma de alunos do nono ano do Ensino Fundamental uma sequência didática, composta por três situações de ensino-aprendizagem, que aborda conteúdos sobre poliedro indicados no currículo da escola básica. A partir dos estudos acerca dos poliedros desenvolvidos pelos gregos Platão e Euclides e pelo matemático suíço Leonhard Euler, a sequência explora as principais características destas figuras geométricas e encerra-se nas origens da Topologia, explorando de maneira introdutória a concepção de objetos tridimensionais nesta área da Matemática.

1 O PERCURSO DA PESQUISA

Nosso objetivo nessa pesquisa é investigar acerca de situações de ensino-aprendizagem que podem ser utilizadas para a exploração do conceito de poliedro no Ensino Fundamental, anos finais. Desenvolvemos a priori amplo estudo teórico om dimensões didáticas, epistemológicas e cognitivas relacionadas ao ensino de Geometria, seguido pela elaboração e aplicação de uma sequência didática para alunos do 9º ano (antiga 8ª série) de uma escola pública estadual localizada na cidade de São Carlos, interior de SP.

Neste primeiro capítulo apresentamos a metodologia utilizada, chamada Engenharia Didática, que emergiu na França ao final dos anos 80. Entre seus desenvolvedores destaca-se a pesquisadora de Didática da Matemática Michèle Artigue. Em seguida, relatamos o desenvolvimento desta pesquisa e seus referenciais teóricos. Para finalizar, descrevemos os contextos nos quais esta pesquisa se desenvolveu.

1.1 A Metodologia

A metodologia empregada na pesquisa é inspirada nos moldes propostos pela Engenharia Didática, termo utilizado por pesquisadores franceses da Didática da Matemática para descrever um método de trabalho didático que visa desenvolver, além de um material didático para determinado conteúdo, uma análise acerca deste desenvolvimento. Assim, a Engenharia Didática é instrumento para a concepção de uma sequência didática e também uma metodologia de pesquisa qualitativa (ALMOULOUD E COUTINHO, 2008).

Enquanto instrumento de produção o termo faz uma analogia entre o trabalho de um engenheiro e o trabalho de um professor. O primeiro, ao realizar determinada obra, é impossibilitado de utilizar-se apenas dos seus conhecimentos científicos, pois depara-se com situações complexas que não são amparadas pela ciência. Da mesma maneira, ao desenvolver um trabalho didático, o professor se depara com diversos fatores do mundo real e estes fatores interferem no processo de ensino/aprendizagem, tornando a elaboração do trabalho mais complexa e a teoria existente insuficiente para atingir seus objetivos. Assim, a Engenharia Didática propõe que o professor trabalhe como um engenheiro, construindo, experimentando, observando e analisando constantemente sua obra (ALMOULOUD E COUTINHO, 2008).

Utilizada como instrumento de pesquisa qualitativa, a Engenharia Didática possui como base a elaboração de uma situação de aprendizagem ou de uma sequência de situações de ensino-aprendizagem, também chamada de sequência didática, sobre determinado conteúdo, sua experimentação em sala de aula e a análise dos resultados obtidos. “Nessa linha, prática de ensino é articulada com prática de investigação. A teoria da Engenharia Didática pode ser vista como referencial para o desenvolvimento de produtos para o ensino, gerados na junção do conhecimento prático com o conhecimento teórico” (CARNEIRO, 2005, p.90).

Esta metodologia propõe que a pesquisa que resulta na elaboração de uma sequência didática seja realizada em quatro etapas: 1ª etapa, das análises prévias, 2ª etapa, da concepção e das análises a priori, 3ª etapa, da experimentação, e 4ª etapa, das análises posteriores e da validação. Essas etapas, em geral, não ocorrem de maneira linear, como salienta Pommer (2013, p.22). Em alguns momentos a elaboração do trabalho necessita de articulação, da antecipação e de superposição dos elementos caracterizadores das quatro etapas.

Na etapa das análises prévias, é realizada uma análise bibliográfica de elementos didáticos gerais relacionados ao conteúdo em questão, assim como um levantamento de conhecimentos específicos relacionados ao tema da pesquisa. Os estudos realizados nessa etapa distinguem três dimensões: dimensão epistemológica, associada às características do saber; dimensão didática, associada às características do funcionamento do sistema de ensino e dimensão cognitiva, associada às características do público ao qual se dirige o ensino. Essas análises podem ser retomadas em outros momentos da pesquisa, conforme a necessidade, e possibilitam a realização da próxima etapa, da concepção e das análises a priori da sequência didática desenvolvida(ALMOULOUD E COUTINHO, 2008, p.66).

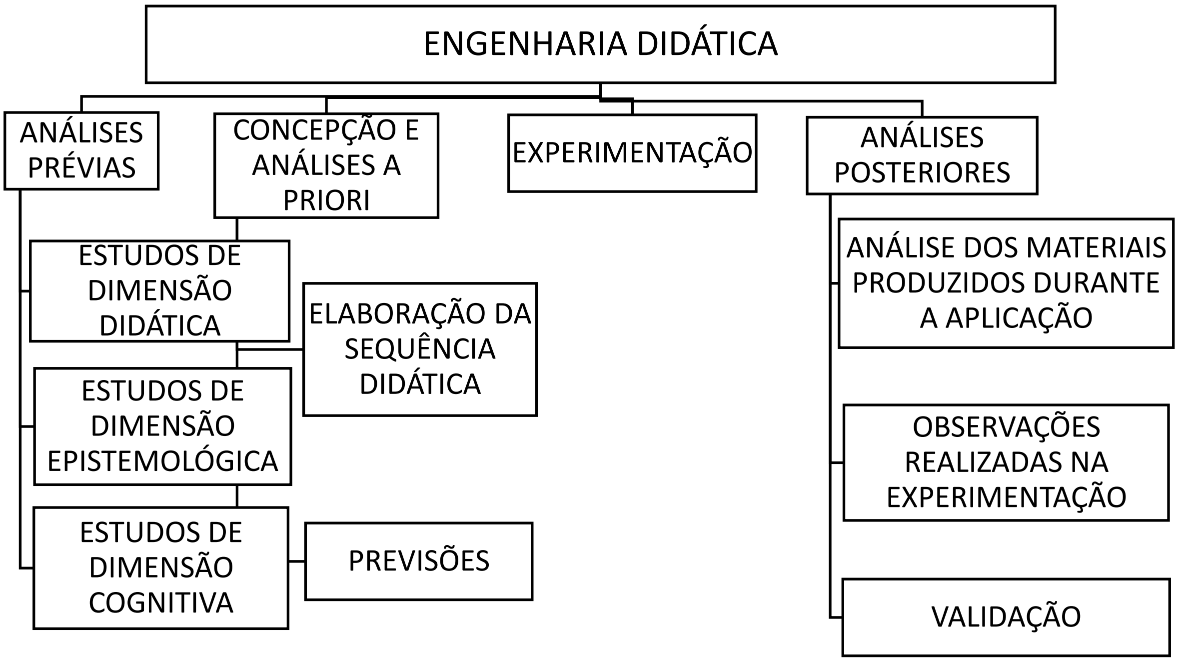
Na segunda etapa, da concepção e análises a priori, o pesquisador deve selecionar alguns tópicos relacionados ao conteúdo em questão e ao seu ensino, que serão consideradas no desenho da proposta didática. Estes tópicos podem ser de dois tipos: macrodidáticos ou globais, relativos à organização global da engenharia, e microdidáticos ou locais, relativos à organização local da engenharia, isto é, a organização de uma situação de ensino-aprendizagem ou de uma fase. Elabora-se nessa fase a sequência didática (Ibid., p.67)

A análise a priori assume um caráter descritivo e de previsão. Nesta fase, descreve-se as situações de aprendizagem e justifica-se as escolhas que levaram à elaboração de tais situações, relacionando o conteúdo estudado com as respostas que os alunos podem desenvolver, além dos desafios que podem ser encontrados no decorrer da experimentação. Em outras palavras, é feita uma previsão, diante das atividades, dos possíveis comportamentos dos alunos (Ibid., p.67).

Na terceira etapa é feita a experimentação empírica da sequência didática desenvolvida. Nessa etapa, através de um contato direto entre o pesquisador e alunos, os objetivos da pesquisa são explicitados. A partir da experimentação o pesquisador pode ampliar seus olhares sobre o objeto de pesquisa e obter registros que podem servir como instrumentos de análise na etapa posterior (Ibid., p.67).

Após a concepção e experimentação da sequência didática é elaborada uma análise dos resultados, que constitui a quarta etapa da pesquisa com moldes na engenharia didática. Chamada de análise a posteriori, essa etapa consiste na avaliação e validação da experiência, e tem como base dados recolhidos durante a aplicação da sequência de situações de ensino-aprendizagem, em geral observações feitas durante o desenvolvimento do trabalho em sala de aula e as produções realizadas pelos alunos durante as aulas ministradas pelo pesquisador (Ibid, p.68). A figura 1 mostra um mapa conceitual com as etapas da metodologia Engenharia Didática.

Figura 1: Mapa conceitual da Engenharia Didática



Fonte: o autor

1.2 O desenvolvimento da pesquisa

A pesquisa foi desenvolvida com base na Engenharia Didática e em sua primeira etapa, das análises prévias, envolveu estudos em três dimensões: didática, epistemológica e cognitiva.

Como objetos de estudos de dimensão didática analisamos os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) e a Proposta Curricular do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2014), com o objetivo de analisar quais são as expectativas de tais documentos no que diz respeito às competências e habilidades relacionadas ao conceito de poliedro que devem ser desenvolvidas por um estudante do Ensino Fundamental.

Também como estudos desta dimensão estão presentes nesta pesquisa os relacionados às principais participações da História da Matemática no Ensino, cuja principal obra de referência utilizada foi História na Educação Matemática: Propostas e Desafios, de Miguel e Miorim (2005), à participação da História da Matemática no Ensino sob a perspectiva sociocultural, com Radford (1997) e às abordagens de assuntos matemáticos em situações de ensino-aprendizagem explorando Movimento Lógico-Histórico do conceito, cuja fundamentação está no materialismo dialético de Kopnin (1972, 1978).

Como objetos de estudo de dimensão epistemológica utilizamos as obras “Introdução à História da Matemática” (EVES, 2004), “Timeu”(PLATÃO,2011), “Os Elementos” (EUCLIDES, 2009), “Euler’s Gem. The Polyhedron Formula and the Birth of Topology” (RICHESON, 2008) e artigos publicados por Euler (1758), Poincaré (2010), Sandifer (2004), Atiyah (2002), Lloyd (2012) e Reimann (2014) com o objetivo de analisar o Movimento Lógico-Histórico do conceito de poliedro na história da Matemática.

Na dimensão cognitiva utilizamos os artigos “Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática” (DUVAL, 2010) e “Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos” (ALMOULOUD, 2013) que teorizam sobre os processos cognitivos envolvidos na compreensão de conceitos geométricos por um indivíduo.

Os resultados dos estudos realizados na primeira etapa estão distribuídos neste trabalho da seguinte forma: os estudos que envolvem participações da História da Matemática no Ensino compõem o capítulo 2, a análise do Movimento Lógico-Histórico do conceito de poliedro compõe o capítulo 3.

As análises dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), da Proposta Curricular do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2011) e dos artigos relacionados à Teoria dos Registros de Representação Semiótica são expostos conforme fundamentam a concepção da sequência didática descrita no capítulo 4. Neste capítulo também se encontram as análises a priori das situações de ensino-aprendizagem elaboradas, elementos da segunda etapa da pesquisa conforme os moldes da Engenharia Didática.

Após realizar a experimentação, terceira etapa da pesquisa, foi elaborado o capítulo 5, no qual estão presentes as análises posteriores da sequência didática elaborada neste trabalho. Fatos observados pelo pesquisador e imagens capturadas com uma câmera durante a experimentação da sequência serviram como instrumentos de análise. Os registros realizados pelos alunos nos materiais impressos distribuídos e recolhidos pelo pesquisador também foram analisados posteriormente.

1.3 O contexto da pesquisa

Esta pesquisa foi desenvolvida como requisito para o Programa de Mestrado Profissionalizante em Rede Nacional PROFMAT. A origem desta pesquisa está diretamente relacionada com pesquisas que desenvolvi no período da graduação no Instituto de Matemáticas e da Computação, ICMC -USP. Estas pesquisas, na área de Topologia, constituíam basicamente em investigar uma aplicação do "Teorema de Borsuk-Ulam" (MUNKRES, 2000, p.256) resultado da área de Topologia, em meteorologia. Nessa época tive conhecimento de alguns conteúdos de Topologia Algébrica, entre eles o Teorema de Classificação de Superfícies Compactas (MUNKRES, 2000, p. 462) e a Característica de Euler de uma superfície (POINCARÉ, 2010, p. 2).

Na época foi possível perceber que a Geometria ensinada na Escola Básica não contempla um período de imensas descobertas em relação aos sólidos geométricos, gerando a impressão de que os estudos em Geometria Espacial estagnam ao final do século XVIII. Com os estudos em Topologia foi possível perceber que esta impressão é falsa, pois estes estudos continuam e assumem outra visão sobre a forma dos objetos tridimensionais.

Após concluir essas pesquisas e a graduação, as reflexões acerca do ensino de Geometria continuaram acompanhando a prática docente, iniciada em 2012 como professor de Matemática para o Ensino Fundamental, anos finais. A História da Matemática tornou-se parceira inseparável desta prática. No Programa de Mestrado PROFMAT da UFSCar, cursando a disciplina optativa História da Matemática, as ideias que baseiam esta pesquisa foram tornando-se cada vez mais claras, até que, no fim de 2016, sob orientação do então professor da disciplina Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio, este trabalho teve início.

A parte da pesquisa anterior à aplicação da sequência didática durou cerca de oito meses. Em maio de 2017 a sequência didática estava elaborada. Como eu não trabalhava com turmas de nono ano, foi necessário encontrar uma turma na qual fosse possível realizar a experimentação. Ao falar sobre a pesquisa para a prof. Nádia Stevanato, amiga e companheira de graduação, ela gentilmente me convidou para aplicar em uma de suas turmas, o nono ano B de uma escola estadual situada na cidade de São Carlos, interior de SP. Na turma estavam matriculados 25 alunos, que frequentavam a escola no período da manhã e possuíam, em sua maioria, 15 anos de idade. A experimentação foi realizada em junho deste mesmo ano.

Após a aplicação, as análises posteriores ocuparam os meses de julho e agosto de 2017, no qual a pesquisa foi finalizada e enviada ao Programa de Mestrado Profissionalizante em Rede Nacional da UFSCar.

2 A HISTÓRIA NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Pesquisas no campo da participação da História no processo de ensino-aprendizagem de Matemática fomentaram no Brasil recentemente. Os primeiros grupos interessados em estudar as relações existentes entre Pedagogia, História e Matemática surgiram no país no início da década de oitenta, período no qual houve grande interesse por mudança nos métodos e pedagogias utilizados para conceber o processo de educação matemática. Entretanto, a participação da história de conceitos matemáticos nesse processo é mais antiga. Nesta seção relataremos alguns momentos da trajetória desta participação e faremos uma breve análise das formas nas quais esta participação ocorre e da motivação didática que resulta nesta participação. Em seguida, caracterizaremos o uso da História na Educação Matemática sob a perspectiva sociocultural e uma de suas vertentes: o estudo do Movimento Lógico-Histórico do conceito (KOPNIN, 1972) no processo de construção do conhecimento matemático e suas possíveis utilizações em situações de aprendizagem.

2.1 História na Matemática Escolar do Brasil

Datam do início do século XX as primeiras aparições da história da Matemática nos processos de ensino-aprendizagem do Brasil das quais tem-se registro. De acordo com Miguel e Miorim (2013, p.20), a História da Matemática aparece de forma explícita em um documento oficial, talvez pela primeira vez, na Reforma do Ensino Secundário apresentada pelo Primeiro Ministro da Educação e Saúde Francisco Campos no Decreto n° 19890 de 18 de abril de 1931, consolidado no Decreto n° 21241 de 4 de abril de 1932. Este documento, que contemplou o ideário do que ficou conhecido como Movimento da Escola Nova, propõe a inclusão de ligeiras alusões a fatos da história da Matemática, bem como a biografia de matemáticos considerados importantes, com o intuito de aumentar o interesse do aluno: "[...] o curso será incidentalmente entremeado de ligeiras alusões a problemas clássicos e curiosos e aos fatos da história da matemática bem como à biografia dos grandes vultos desta ciência" (Portaria Ministerial de 30-06-1931 apud BICUDO, 1942, p.8).

Os autores de livros didáticos lançados no Brasil a partir das décadas de 20 e 30, por influência das ideias propostas pelo Movimento da Escola Nova, incluíram elementos da História da Matemática em suas obras. A pesquisa de Miguel e Miorim (2013) mostra que, apresentadas de maneira geral em notas de rodapé e textos informativos, essas aparições da história buscavam expor curiosidades e fatos históricos, podendo ou não ter relação direta com os conteúdos abordados. Há ainda apresentações de métodos históricos no desenvolvimento teórico ou em exercícios, aparentemente com a finalidade de destacar a importância destes métodos na Matemática.

A história da Matemática foi utilizada também, desde os primórdios do século XX, por autores de livros didáticos de maneira implícita como elemento orientador da seleção e sequenciamento dos conteúdos que são apresentados. Sobre essa última forma de utilização da história da Matemática, Miguel e Miorim (2013) apontam que a escolha dos tópicos e da sequência em que são apresentados muitas vezes está relacionada com a interpretação histórica que o autor possui a respeito da produção dos conhecimentos tratados, tanto em livros didáticos quanto nas propostas para o ensino de Matemática em programas oficiais de ensino. “De uma forma geral, podemos dizer que a história tem sido para muitos autores também uma fonte de seleção e constituição de sequências de tópicos de ensino por eles julgadas adequadas” (MIGUEL; MIORIM, 2013, p.47).

Pode ser citada a influência das ideias positivistas no país como uma das responsáveis por essas participações da história como fonte de ordenação das sequências dos tópicos em obras e propostas oficiais de ensino do século XX. A orientação positivista das relações entre a história e a educação orientou grande parte dos autores de livros didáticos da primeira metade do século XX, assim como o trabalho de educadores da época.

Autores de livros didáticos que articularam os conteúdos da maneira em que foram concebidos cronologicamente argumentaram que esse procedimento seria uma atitude sensata e natural, pois assim todo indivíduo, em sua construção particular de conhecimento, passaria pelos mesmos estágios que a humanidade teria passado na construção desse conhecimento. Esse argumento é baseado em uma versão pedagógica formulada para a “lei biogenética” de Haeckel (1834-1919) conhecida como “princípio genético” (ibid, p.43).

Na metade do século o ensino de Matemática do país passou por grandes mudanças em sua abordagem através do processo que ficou conhecido como Movimento da Matemática Moderna. Com as modificações, buscou-se um ensino axiomático da Matemática, utilizando uma linguagem rigorosamente formal e símbolos, baseando-se na Teoria de Conjuntos e em ideias cartesianas, conforme relata Soares (2009).

Nas décadas de 1980 e 1990, com o enfraquecimento das ideias do Movimento da Matemática Moderna e a propagação da Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel (1918-2008) no país, a História da Matemática passa a exercer a função pedagógica de auxiliar em um processo de ensino-aprendizagem baseado na compreensão e significação (VIANA NUNES; ALMOULOUD; GUERRA, 2010).

A teoria de Ausubel estabelece distinções entre formas de aprendizagem mecânica e de aprendizagem significativa. A primeira, nessa teoria, consiste em aprendizagens baseadas em associações arbitrárias e solicita ao aluno a reprodução fiel do que lhe foi ensinado. A segunda consiste em relacionar, de forma não-arbitrária, uma nova informação a outra com a qual o aluno já está familiarizado (Ibid, 2010).

Embora possa participar como orientadora na seleção e sequenciamento dos conteúdos, a história, nesse contexto, é responsável por conduzir um processo de ensino-aprendizagem que substitui a repetição mecânica dos conteúdos por um desenvolvimento baseado na aprendizagem significativa, agindo como organizador prévio dos conteúdos, ou seja, como fonte de significados para os assuntos abordados (Ibid, 2010).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) do fnal do século XX, vigentes atualmente, a participação da História da Matemática é entrelaçada com o a resolução de problemas. O Documento Oficial orienta que a utilização de problemas históricos como forma de aproximar a metodologia da matemática escolar da metodologia da matemática científica, argumentando que ao resolver um problema o aluno constrói conceitos e "[...] num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na história da Matemática" (BRASIL, 1998, p.33).

Além dos problemas históricos, a História da Matemática é indicada pelos elaboradores dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) como um recurso didático que pode oferecer diversas contribuições ao processo de ensino-aprendizagem. O documento propõe que a utilização de História da Matemática evidencia a Matemática como criação humana, desenvolvendo no aluno posturas favoráveis diante do conhecimento matemático e contribuindo para o desenvolvimento de um olhar mais crítico sobre estes conhecimentos. Assim, a utilização da História da Matemática seria um contraponto à impressão, causada pela maneira como em geral os cursos de Matemática são organizados, de que a Matemática é uma ciência sem contradições, que está pronta, acabada e tem fim em si mesmo (BRASIL, 1998).

A utilização da História da Matemática como elemento que favorece a desmistificação dessa ciência e a não-alienação do seu ensino é defendida por Miguel e Miorim (2013). Para os pesquisadores, é possível buscar na História da Matemática objetivos pedagógicos que levem os alunos a perceber, por exemplo:

> (1) A matemática como uma criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; (4) as conexões

> existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova (MIGUEL; MIORIM, 2011, p. 53).

Outro benefício da utilização da História da Matemática como recurso didático, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), é a relação que esta constrói entre os conteúdos e os valores culturais, sociais e antropológicos. Essas relações são de grande valor formativo e servem de instrumento de resgate da identidade cultural dos envolvidos no processo de ensino-aprendizagem. Este benefício colocado pelo documento está diretamente ligado à Etnomatemática, subárea da História da Matemática e da Educação Matemática que estuda a Matemática praticada por grupos culturais como: classes trabalhadoras, sociedades indígenas, comunidades rurais, entre outros.

A partir desta breve retrospectiva observamos que a participação da História da Matemática no ensino de Matemática ocorreu sob diversas formas e com objetivos distintos de acordo com o momento, transformando-se em consonância com pesquisas em outras áreas, como historiografia, psicologia e antropologia. De acordo com Miguel e Miorim (2013) com o crescente desenvolvimento das pesquisas relacionadas à participação da História da Matemática na Educação Matemática, é possível identificar algumas perspectivas teóricas educacionais nesse campo, denominado pelos pesquisadores como História na Educação Matemática: perspectiva Evolucionista Linear, perspectiva Estrutural-Construtivista Operatória, perspectiva Evolutiva Descontínua, perspectiva dos Jogos de Vozes e Ecos e perspectiva Sociocultural. Os autores atribuem à dois principais fatores condicionantes a existência dessa pluralidade de perspectivas: “ (1) a concepção que se adota em relação à natureza do conhecimento matemático; (2) a concepção que se adota em relação à natureza da aprendizagem matemática” (MIGUEL; MIORIM, 2013, p.83).

2.2 A história na educação matemática sob a perspectiva sociocultural

Radford concebe o conhecimento matemático como “manifestação simbólica de certas sensibilidades desenvolvidas pelos membros de uma cultura através de experiências compartilhadas e a partir das quais o significado dos produtos é produzido” (RADFORD, 1997, p.30).

A concepção do conhecimento como resultado de interações sociais entre indivíduos inseridos em um contexto cultural é pautada na teoria Leontiev S. Vygotsky (1896

- 1934). Conforme explica Oliveira (1993), o psicólogo russo estabeleceu que os processos pelos quais o indivíduo adquire informações, habilidades, atitudes, valores e outros componentes do seu desenvolvimento, ou seja, seus processos de aprendizagem, estão fortemente ligados às relações desse indivíduo com seu ambiente sociocultural e à sua situação de organismo que não se desenvolve plenamente sem o suporte de outros indivíduos.

Diferenciando processos psicológicos elementares, como ações mecânicas e associações simples entre objetos, dos superiores, como pensar objetos ausentes, imaginar situações nunca vivenciadas e planejar ações a serem realizadas em momentos posteriores, Vygostky propôs que, através de sua consciência individual, o indivíduo reconstrói e reelabora os significados que lhe são transmitidos pelo seu grupo cultural para atingir os processos psicológicos superiores (OLIVEIRA, 1993).

A transmissão e recepção de significados entre os indivíduos de determinado grupo cultural é mediada por signos, representações mentais da realidade exterior compartilhadas por esse grupo, conforme explica Oliveira (1993). Esses signos possibilitam a comunicação entre os membros do grupo, mediando e aprimorando suas relações interpessoais, ou ainda, suas interações sociais, seja com outros indivíduos ou com diversos elementos do ambiente culturalmente estruturado. A partir dessas interações sociais o indivíduo é capaz de interiorizar as formas culturalmente estabelecidas de funcionamento psicológico (OLIVEIRA, 1993).

Assim, conforme aponta Radford (1997), para a perspectiva sociocultural, o conhecimento matemático é definido pela cultura em que se desenvolve e em que é subsumido e está intimamente relacionado ao desenvolvimento desta cultura, que determina a organização da investigação científica, o tipo de argumentos que são socialmente aceitos, o tipo de evidência e o tipo de explicações que serão consideradas válidas. Sobre a relação entre conhecimento e cultura, Miguel e Miorim (2013, p.133) colocam que ao processar-se dentro de uma cultura, com lugar e tempo determinado, a manifestação de significados gera conhecimentos revestidos ou emoldurados pela racionalidade da cultura na qual teve origem.

Para Radford (1997), olhar para a história do conhecimento matemático buscando compreender seu desenvolvimento, nessa perspectiva, é um processo dialógico no qual dois pontos de vista se fundem: o ponto de vista da cultura na qual o conhecimento em questão foi desenvolvido e o ponto de vista do pesquisador atual, anacrônico à essa cultura e inserido em seu próprio contexto cultural. A partir desse choque de pontos de vista, este processo dialógico permite que o olhar vá além do conhecimento matemático, estabelecendose como diálogo entre distintas culturas, já que o conhecimento visto como manifestação cultural gerado e compartilhado por um grupo traz consigo muito mais que conceitos isolados.

A perspectiva sociocultural da História na Educação Matemática tenta evitar, ao conceber as relações entre cognição e cultura, reduzir a cognição à um mero reflexo da cultura, assim como reduzir a cultura à um mero gerador de estímulos para as mudanças e os desenvolvimentos conceituais. Conforme indicam Miguel e Miorim (2013) o estudo do desenvolvimento histórico do conhecimento matemático não deve ser reduzido à sociologia do conhecimento, e não pode ser realizado exclusivamente a partir da leitura de textos informativos, pois estes carregam consigo sedimentos da rede das significativas atividades humanas sociais e econômicas. Para compreender a racionalidade no interior da qual um conhecimento matemático foi desenvolvido, é necessário colocá-lo em seu próprio contexto e episteme.

Dessa maneira, a perspectiva sociocultural sugere a participação da História na Educação Matemática através de análises histórico-epistemológicas do desenvolvimento do conhecimento matemático como significados resultantes de negociações em determinada cultura e através de diferentes culturas. De acordo com Radford (1997) essas análises fornecem informações relacionadas ao surgimento destes significados e às suas transformações, possibilitando o entendimento das negociações e concepções culturais que sustentam tais significados.

Para Miguel e Miorim (2013) a História da Matemática é o campo que possibilita constituir as situações, contextos e circunstâncias culturais geradoras de conhecimentos matemáticos, assim como constituir as significações semióticas culturais produzidas e compartilhadas nos processos de circulação e transformação desses conhecimentos em outros contextos e épocas.

Para concluir, ressalta-se, com base nos argumentos de Miguel e Miorim (2013, p.135), que diferente de outras perspectivas, baseadas no evolucionismo já citado neste texto, para a perspectiva sociocultural de participação da História na Educação Matemática não é a realização de um mero movimento na direção do passado para o presente buscando transpor mecanicamente elementos da História da Matemática para o contexto social no qual ocorre o processo de ensino-aprendizagem. A participação da História na Educação Matemática na perspectiva sociocultural carrega consigo o pressuposto da busca por um diálogo entre passado e presente. Nesse diálogo, o passado não se subordina ao presente nem o presente se subordina ao passado, visto que as fontes que constituem os conhecimentos do passado e do presente encontram-se inseridas em diferentes culturas e devem ser lidas e interpretadas levando-se em consideração seu respectivo contexto cultural (MIGUEL; MIORIM, 2013. P.135).

2.3 O movimento lógico-histórico de conceitos

Entre as dificuldades de se utilizar a História na Educação Matemática, na perspectiva sociocultural e em outras perspectivas, são citadas por Miguel e Miorim (2011, p.66) a ausência de literatura adequada e a natureza imprópria da literatura disponível. De acordo com os autores, a literatura existente nessa área trata majoritariamente dos conhecimentos matemáticos concebidos nos dois últimos séculos e os conhecimentos matemáticos que usualmente compõem o currículo escolar é anterior a este período. Em sua maioria, as obras escritas nessa área, por historiadores e matemáticos, constitui-se de apanhados de descobertas matemáticas organizados de maneira linear de acordo com a data em que foram realizadas, desconsiderando completamente sua forma de produção. Assim, as partes históricas que poderiam contribuir mais intensamente para a composição de propostas didático-pedagógicas perderam-se e sua recomposição seria tarefa extremamente complexa, mesmo para um historiador profissional.

Além disso, para Saito e Dias (2013), a participação da História na Educação Matemática pode tornar-se um fator complicador do processo de ensino-aprendizagem, pois não basta apenas juntar história e matemática que surge a História da Matemática. A soma destas duas coisas resulta em uma terceira, muito distinta das que lhe deram origem e diferente da História de Matemática concebida por historiadores profissionais. A articulação da história no processo de ensino-aprendizagem pelo educador visando uma compreensão contextualizada dos objetos necessita de uma metodologia que viabilize uma proposta didático-pedagógica (SAITO; DIAS, 2013).

Uma abordagem teórico-metodológica que inclui a participação da História no processo de ensino-aprendizagem e busca superar os conflitos mencionados acima propõe estudar o Movimento Lógico-Histórico dos conceitos, conforme teorizado por Kopnin (1972). Através do materialismo dialético, que parte do pressuposto de que o universo e tudo o que há nele possui existência material, portanto, é passível de um estudo racional, essa abordagem busca estudar os conhecimentos matemáticos como objetos diretamente relacionados à época e ao contexto social no qual foram gerados.

Opondo-se à lógica clássica defendida por Hegel (1770 – 1831), as ideias do materialismo dialético têm origem com Marx (1818 - 1883) e Engels (1820 - 1895). Os filósofos propuseram que a produção das ideias e da consciência humana está diretamente entrelaçada à realidade material e o intercâmbio cultural do indivíduo. Ademais, as ideias, que são determinadas pelas condições do mundo material, constituem um objeto que pode ser material de estudo passível de racionalidade. Dessa forma, o conhecimento científico é visto como produção humana que reflete em determinado nível a posição social do ser, assim como suas percepções de realidade, sendo possível a utilização destes conhecimentos pelo indivíduo que busca determinadas respostas acerca do ser humano que as deu origem, seu contexto social e suas maneiras de conceber a realidade (LEANDRO; SOUZA, 2015). Segundo Kopnin:

> “Nos conceitos e categorias do materialismo dialético, a realidade objetiva está refletida segundo os objetivos da atividade prática do homem numa etapa do seu desenvolvimento. E quando se baseiam nas leis objetivas assimiladas, esses objetivos não perturbam o conhecimento do ser e suas formas tais quais existem na realidade, mas servem de premissa para esse conhecimento” (Kopnin, 1972, p.171).

A filosofia do materialismo dialético pontua que o conhecimento científico passa por transformações em diferentes contextos e épocas, visto que qualquer conhecimento é influenciado pelo que Kopnin (1972) denomina “fundo intelectual”. Esse fundo é composto, em sua maioria, pela ideologia dominante, ou seja, o sistema de conhecimento acerca da posição do indivíduo frente ao meio natural e social que o cerca, do seu lugar no mundo, assim como dos objetivos e sentidos de sua realidade. Assim, como colocam Leandro e Souza (2015), por estar diretamente relacionado à situação social da sociedade que o produz, o conhecimento científico se modifica constantemente, pois esta é a situação da sociedade, que se transforma através de seu processo histórico.

Saito e Dias (2013) esclarecem que, nesse contexto, o histórico do objeto é constituído pelo seu processo de mudança, ou seja, pelas etapas pelas quais passa em seu surgimento e desenvolvimento. O lógico é o meio pelo qual o pensamento realiza a reprodução do processo histórico desse objeto.

Leandro e Souza (2015) consideram que o materialismo dialético concebe o conhecimento científico inserido em um processo histórico que engendra diferenças, polaridades, problemas teóricos e práticos. Esses problemas podem ou não ser passíveis de resolução lógica. Ao estudar o movimento lógico-histórico dos conceitos matemáticos, através de elementos da História, é possível compreender as contradições, os embates, os conflitos, as tensões e rupturas pelas quais esses conceitos passaram durante seu desenvolvimento.

Para Saito e Dias (2013), a lógica referida no parágrafo anterior é a lógica dialética, mais ampla que a lógica formal. Cabe diferenciá-las aqui pois a relação da lógica formal com o conhecimento matemático tem se estreitado consideravelmente nas pesquisas recentes, e muitos matemáticos a concebem como a única existente, às vezes tomando Matemática por lógica formal ou vice-versa. Enquanto a lógica formal interessa-se por sua própria forma linguística para expressar uma ideia, como uma definição matemática, por exemplo, a lógica dialética estuda o conteúdo mental que se expressa por meio da linguagem, atentando-se para as relações que esse conteúdo possui com a realidade objetiva no processo de construção do conhecimento (SAITO; DIAS, 2013).

De acordo com Saito e Dias (2013), partindo da lógica dialética e do histórico como forma de pensamento, surge como possibilidade didática construir relações entre o histórico de conceitos e sua essência, o lógico, com o objetivo de formação do conceito pelo aluno. A reprodução do processo de criação e desenvolvimento dos conceitos proporciona ao indivíduo, além de compreensão das necessidades e das aptidões humanas nele sintetizadas, a capacidade de elaborar novos aspectos e novas relações de movimento para esses conceitos. A reprodução, porém, não se limita a reprodução mecânica dos fatos, pois neste processo de reprodução, o aluno cocria, recria e transforma os conceitos envolvidos, internalizando-os de maneira individual (SAITO; DIAS, 2013).

A reprodução do processo de desenvolvimento dos conceitos a que se referem Saito e Dias (2013) não necessita dar-se seguindo etapas cronológicas, baseada em uma vertente historiográfica tradicional, pois isso “tende a reforçar a linearidade do desenvolvimento do conceito” (SAITO; DIAS, 2013, p.95). Ao utilizar-se de historiografias pautadas no evolucionismo pode-se causar a impressão de que os conhecimentos matemáticos só poderiam ter seguido esse caminho e que todo conhecimento existente converge para o momento presente, que seria a etapa mais aprimorada de seu desenvolvimento.

Em contrapartida, os pesquisadores argumentam que ao enfocar aspectos externos ao conceito matemático, as historiografias com base em fatores socioculturais contribuem para a aproximação da Matemática aos aspectos ligados às necessidades humanas, evidenciando o papel da ciência na sociedade.

Contextualizar historicamente, para Saito e Dias (2013), não se limita a descrever e explicitar o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos, mas relacioná-los à natureza da Matemática no passado. As análises históricas dos conceitos e problemas matemáticos estudados em determinada época possibilitam a compreensão de como o conhecimento matemático se desenvolveu e institucionalizou em diferentes épocas. Ao analisar o passado no passado, é possível evidenciar no objeto de estudo diversas conexões que dão sentido à sua existência naquele momento histórico e abre um campo de possibilidades a ser explorados pelos educadores.

Para os autores, é necessário, para explorar estas conexões, ter em mente que a Matemática que se está ensinando foi escrita no século XXI, já que esta difere das matemáticas do passado em linguagem, métodos e outros componentes. Uma transposição de conceitos concebidos atualmente para o passado geraria diversas confusões do ponto de vista formal, devido à essas diferenças. Ao transpor a Matemática do passado para a atualidade, é impossível descartar o anacronismo que diminui o sentido da existência do objeto de estudo.

Através de uma abordagem que proponha estudar os conceitos em seus contextos históricos e os movimentos pelos quais passaram durante seu desenvolvimento histórico, os conflitos se dissipam, pois não há sentido em falar em história fragmentada de um conceito, visto que seu desenvolvimento está em um contexto maior, seja esse contexto econômico, social, político ou cultural, e este transforma-se de acordo com as necessidades dos indivíduos (SAITO; DIAS, 2013). Para Leandro e Souza (2015), essa abordagem contribui para o sentido da totalidade dos conhecimentos históricos, pois o refletir dialeticamente auxilia na compreensão de um fenômeno social ou o desenvolvimento de um conceito em um sentido de totalidade, ou seja, inserido em um contexto amplo que não deve ser desconsiderado.

3 MOVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DO CONCEITO DE POLIEDRO

Os registros mais antigos relacionados aos sólidos geométricos foram realizados por habitantes da Grécia antiga, cerca de dois mil e quatrocentos anos atrás. Desde então, o conceito de poliedro ocupou lugar entre os estudos de diversos matemáticos. Atualmente é componente do currículo da Matemática escolar e compõe o arsenal de conhecimentos básicos de um estudante de Matemática da escola básica.

Neste capítulo traçamos alguns momentos que marcaram o estudo destes objetos, acompanhados de seus respectivos contextos histórico-culturais. Dessa forma será possível compreendê-los como criações processadas dentro de uma cultura, com lugar e tempo determinado, ou seja, como conhecimentos revestidos ou emoldurados pela racionalidade da cultura na qual tiveram origem.

3.1 As ideias e as definições na matemática grega

Os gregos foram os primeiros seres humanos que se dedicaram aos conhecimentos matemáticos dos sólidos, especificamente os Pitagóricos. De acordo com Eves (2004), após o declínio do poder do Egito e da Babilônia, os hebreus, os assírios, os fenícios e os gregos passaram ao primeiro plano. Anunciava-se a Idade do Ferro, que abrange mudanças na maneira de organização da sociedade. Inventou-se o alfabeto, passou-se a utilizar moedas, incentivou-se o comércio e foram realizadas diversas descobertas geográficas.

O grande centro cultural e comercial do mundo grego era a cidade-Estado de Atenas. Após passar por guerras civis entre ricos e pobres, a cidade inaugura uma nova Constituição em 510 a.C., uma das mais democráticas no mundo antigo. Nessa época, a prosperidade e a democracia andaram juntas em Atenas. A vida intelectual girava em torno da Ágora. “Ali, agricultores do interior, mercadores e artesãos das lojas da cidade e mercadores e marinheiros recém-chegados do cais misturavam-se e conversavam” (EVES, 2004, p.92). Nesse momento da história surgiu o pensamento dedutivo nos conhecimentos humanos. “Os processos empíricos do Oriente antigo, suficientes para responder questões na forma de *como*, não mais bastavam para as indagações mais científicas na forma de *por quê*” (EVES, 2004, p.94).

A primeira aparição dos então chamados sólidos geométricos da qual se tem registro está na obra Timeu, um diálogo entre Sócrates, Hermócrates, Timeu e Crítias, escrita por um dos filósofos que marcaram presença na Ágora, Platão (428 - 348 a.C.), por volta de 360 a.C. Em uma fala de Timeu, Platão propõe que antes do processo de criação do universo, os elementos "estavam privados de proporção e de medida. [...] A partir deste modo e desta condição, começaram a ser configurados através de formas e de números" (PLATÃO, 2011, p.140). Após essa fala, Timeu anuncia que irá "esclarecer para vós a ordenação e a génese destes elementos por meio de um discurso insólito; mas como, graças à educação, partilhais dos métodos pelos quais se demonstra o que é necessário ser explicado, vós ireis acompanhar-me" (PLATÃO, 2011, p.140).

No trecho citado, Platão refere-se à educação e à partilha de métodos pelos quais se demonstra e enfatiza os conhecimentos matemáticos, em particular a Geometria, desenvolvida através das relações de proporção entre medidas. Estes conhecimentos foram amplamente difundidos em Atenas pela escola fundada por ele, a Academia. Richeson (2008) considera a Academia uma das mais importantes contribuições de Platão para o conhecimento. O objetivo dessa instituição era preparar jovens para o estudo das ciências, em especial a Matemática, para serem capazes de separar o intelecto das sensações e opiniões pessoais. A Academia de Platão durou cerca de novecentos anos e já foi considerada o mais memorável evento da História da Ciência do leste europeu.

Platão prossegue sua explicação dizendo "tudo o que é da espécie do corpo tem profundidade. Mas a profundidade envolve, necessariamente e por natureza, a superfície; e uma superfície plana é composta a partir de triângulos" (PLATÃO, 2011, p.140). Ao continuar, Timeu diz que "É necessário que se diga então como são esses quatro corpos mais belos, dissemelhantes uns em relação aos outros, e que têm a capacidade de se gerarem uns aos outros, se porventura forem dissolvidos" (ibid, p.140).

Discursando sobre estas formas, Timeu seleciona dois triângulos que utiliza para mostrar como se constroem as formas dos elementos: "um é isósceles, e, quanto ao outro, o seu lado maior será sempre o quadrado do triplo do mais pequeno" (ibid p.142). Timeu não justifica a escolha destes triângulos, mas argumenta que "os quatro géneros são gerados a partir dos triângulos que elegêramos, três dos quais a partir do único que tem os lados desiguais, e o quarto foi o único harmonicamente constituído a partir do triângulo isósceles" (ibid, p.142). Assim, seria possível decompor três deles um no outro, pois são gerados pelos mesmos triângulos.

Ele utiliza seis triângulos retângulos escalenos iguais ao que mencionou, os triângulos elementares, para construir um triângulo equilátero. A seguir, ele inicia uma descrição das quatro figuras sólidas mais belas, finalizando com a menção da existência, ainda, de uma quinta forma harmoniosa:

> Quatro desses triângulos constituídos por quatro lados iguais, unidos a três ângulos planos, formam um único ângulo sólido que é gerado imediatamente a seguir ao mais obtuso dos ângulos planos. Uma vez formados quatro ângulos desse tipo, está composta a primeira figura sólida, que divide um todo esférico em partes iguais e semelhantes. A segunda figura é formada a partir dos mesmos triângulos, combinando-se oito triângulos equiláteros que produzem um só ângulo sólido a partir de quatro ângulos planos; e quando se geram seis ângulos deste tipo, o segundo corpo está deste modo terminado. A terceira figura é constituída pela conjunção de cento e vinte triângulos elementares e de doze ângulos sólidos, cada um dos quais envolvido por cinco triângulos planos equiláteros, e é gerada com vinte bases que são triângulos equiláteros. Engendrados estes sólidos, o outro triângulo elementar foi deixado de parte, e o triângulo isósceles engendrou a natureza do quarto, constituindo quatro triângulos que coincidiram no centro os seus ângulos rectos, formando um único quadrilátero equilateral. Quando foram conjugados seis deste tipo, produziu oito ângulos sólidos, sendo cada um deles constituído pela harmonia de três ângulos planos rectos; a figura do corpo constituído foi a do cubo, que tem seis faces planas, quadrangulares e equilaterais. Visto que havia ainda uma quinta combinação o deus utilizou-a para pintar animais no universo (ibid p.142).

Após esta descrição, Timeu conclui sua teoria acerca da composição do universo e das coisas materiais associando ao elemento terra a forma cúbica, pela estabilidade do elemento e do sólido, “e, das que restam, a forma mais difícil de movimentar à água, a que se movimenta melhor ao fogo e a intermédia ao ar; o corpo mais pequeno ao fogo ,o maior à água, e o médio ao ar; o que é mais agudo ao fogo, o segundo mais agudo ao ar e o terceiro à água” (ibid, p. 145), referindo-se a figura sólida da pirâmide e relacionando ao fogo, e, na ordem de criação, a segunda é associada ao ar e a terceira à água.

O trecho que trata dos sólidos geométricos, aqui abordado, é pequeno em comparação com a obra completa. No livro, Platão discute diversos outros assuntos, como as órbitas dos planetas conhecidos na época, política, teologia, a alma e o corpo, as sensibilidades do ser humano para os cheiros, para os sabores, para os sons e para as cores, entre outros assuntos. Platão, que ficou famoso por suas obras filosóficas acerca do sensível e do abstrato, “era um amante da matemática, e tinha alta consideração por matemáticos” (RICHESON, 2008, p.41). Assim, em sua Academia, a Matemática gozava de alto prestígio. Embora não houvesse divisão especializada de carreiras na época, Platão ficou conhecido ”não como matemático, mas como “criador de matemáticos”” (BOYER, 1974, p.63). Os sólidos que são tratados no livro Timeu (PLATÃO, 2011) ficaram conhecidos, desde a publicação deste livro, como sólidos de Platão, de acordo com Richeson (2008).

Na época da publicação de Timeu as cidades-Estado gregas encontravam-se exauridas em virtude de quase cem anos de guerras. Conforme relata Eves (2004, p.162), dois anos depois de Alexandre, o Grande (356 - 336 a.C), assumir o império da Macedônia, que havia invadido e unificado a Grécia a seu território pouco tempo antes, e conduzir suas tropas em diversas invasões que resultariam na conquista do Império Persa, o imperador fundou

Alexandria, em 331 a.C., como sua capital ocidental. Essa época foi o início do que historiadores chamam de Era Helenística (338-31 a.C), que vai até a conquista de Alexandria pelos romanos.

Nessa Era, a ciência grega deixa de ser uma parte da filosofia e passa a ser um campo de conhecimento independente, alcançando seu apogeu entre 300 e 150a.C. "Embora os intelectuais atenienses continuassem a se concentrar em filosofia, história e literatura, os pensadores de Alexandria enfatizavam a ciência e a Matemática" (EVES, 2004, p. 163). Para Eves (2004), a astronomia, a biologia e a geografia desenvolveram-se ambiciosamente até o atingirem o apogeu possível para as tecnologias da época. Após culminar, sucede-se um longo e lento declínio até o encerramento das atividades científicas na Grécia com o fechamento da Academia de Atenas em 529 d.C.

O estudo dos sólidos é retomado pelo matemático grego Euclides de Alexandria, que, de acordo com Eves (2004), foi aluno da Academia de Platão e mudou-se para a capital quando a famosa biblioteca estava sendo construída, fundando a escola de Matemática de Alexandria. Ele escreveu diversos livros, dos quais o conjunto mais famoso se chama "Os Elementos" (EUCLIDES, 2009). Para os gregos, "elementos" de um estudo dedutivo eram os teoremas-chave. Deste livro foram realizadas diversas cópias manuscritas até a primeira cópia impressa em 1942, segundo Richeson (2008). Nessa obra, Euclides (2009) dispõe alguns resultados conhecidos na época envolvendo geometria, números e medidas. Iniciando com os postulados e demonstrando com implicações lógicas os teoremas e corolários, os sólidos aparecem na parte final da obra.

No início do Livro XI, o autor grego define que:

> 1. Sólido é o que tem comprimento e largura e profundidade. 2. E uma extremidade de um sólido é uma superfície. [...] 9. Figuras sólidas semelhantes são as contidas por planos semelhantes iguais em quantidade. 10. E figuras sólidas iguais e semelhantes são as contidas por planos semelhantes, iguais em quantidade e em magnitude. 11. Ângulo sólido é a inclinação por mais de duas retas que se tocam e que não estão na mesma superfície, relativamente a todas as retas. De outro modo: o ângulo sólido é o contido por mais de dois ângulos planos, que não estão no mesmo plano, construídos em um plano. [...] 25. Cubo é uma figura sólida contida por seis quadrados iguais. 26. Octaedro é uma figura sólida contida por oito triângulos iguais e eqüiláteros 27. Icosaedro é uma figura sólida contida por vinte triângulos iguais e eqüiláteros. 28. Dodecaedro é uma figura sólida contida por doze pentágonos iguais e eqüiláteros e eqüiângulos (EUCLIDES, 2009, p.481-483).

Embora desenvolva seu trabalho a partir de definições, método que foi adotado da matemática grega e é utilizado nos dias atuais, é possível notar que as definições de Euclides dão margem para diversas interpretações em algumas partes. Como escreve Richeson (2008), por muitos anos as definições dos sólidos careceram de precisão, o que dificultou o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos acerca destes objetos.

No Livro XIII Euclides (2009) mostra como construir os cinco sólidos de Platão, elaborando o que Richeson (2008) afirma ser a mais importante contribuição deste livro. Após as construções, que demonstram a existência destes cinco sólidos, o matemático escreve:

> Digo, então, que exceto as cinco ditas figuras não será construída outra figura, contida por eqüiláteras e também eqüiângulas entre si. Pois, um ângulo sólido não é construído, certamente, por dois triângulos ou, em geral, planos. Mas por três triângulos, o da pirâmide, e por quatro, o do octaedro, e por cinco, o do icosaedro; mas por seis triângulos tanto eqüiláteros quanto eqüiângulos, construídos junto a um ponto, não existirá um ângulo sólido; pois, sendo o ângulo de um triângulo eqüilátero dois terços de um reto, os seis serão iguais a quatro retos; o que é impossível; pois todo ângulo sólido é contido por um menor do que quatro retos. Pelas mesmas coisas, então, nem um ângulo sólido é construído por mais do que seis ângulos planos. Mas o ângulo do cubo é contido por três quadrados; e por quatro, é impossível; pois, de novo, será quatro retos. Mas por pentágonos eqüiláteros e eqüiângulos, certamente por três, o do dodecaedro; e por quatro, é impossível; pois sendo o ângulo do pentágono equilátero um reto e um quinto, os quatro ângulos serão maiores do que quatro retos; o que é impossível. Nem, por certo, por outras figuras poligonais será contido um ângulo sólido, pelo mesmo absurdo (EUCLIDES, 2009, p.592).

No livro XI Euclides enunciou e demonstrou que todo ângulo sólido é contido por ângulos planos menores que quatro retos, teorema que utiliza na demonstração acima. Em algumas passagens da demonstração, assim como nas definições, há margem para ambiguidades. O grego descarta a possibilidade de existirem dois diferentes poliedros com o mesmo polígono nas superfícies e o mesmo número de superfícies em cada ângulo sólido, como por exemplo, a existência de outro sólido, além do icosaedro, formado por triângulos equiláteros e com cinco superfícies em cada ângulo sólido. Euclides assume isso como verdade, pois os gregos assumiram que os sólidos eram convexos. O conceito de convexidade foi elaborado muito tempo depois, na Europa medieval, onde os poliedros voltaram a ocupar espaço nos estudos dos matemáticos dos quais existem registros atualmente (RICHESON, 2008, p.47).

3.2 As esferas de pedra esculpida da Escócia

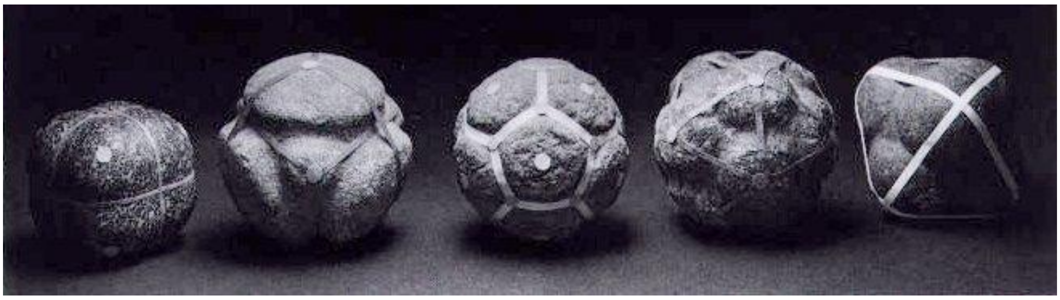
As esferas de pedra esculpida da Escócia são um conjunto de aproximadamente 425 esculturas de pedra encontradas em sua maioria no norte da Escócia, que datam do período Neolítico e compõem o acervo de museus do Reino Unido. Estimativas indicam que as esferas foram esculpidas entre 3200 a.C. e 2500 a.C. (figura 2). Muitas destas esferas possuem cerca de sete centímetros de diâmetro e protuberâncias esculpidas em suas superfícies. Embora a quantidade de protuberâncias varie entre três e cento e sessenta protuberâncias, aproximadamente metade das esferas possui seis protuberâncias (Reimann, 2014).

Figura 2 - Esferas de pedra esculpida.

Fonte: Ashmolean Museum website.

O cientista D. R. LLoyd em seu artigo "How old are the Platonic Solids? (2012), contesta as propostas do artista Keith Critchlow chamado "Time stands still: new light on megalithic science", originalmente publicado em 1979. Neste livro, em um capítulo chamado "Platonic Spheres - a millennium before Plato" (Critchlow, 1979 apud Reimann, 2014, o autor sugere que esses objetos remetem às ideias de poliedro, propondo que os habitantes da Escócia do período Neolítico desenvolveram pensamento matemático acerca dos objetos que posteriormente ficariam conhecidos como poliedros de Platão. O autor propõe que o topo das protuberâncias seriam os vértices dos poliedros, e utiliza fitas para exemplificar sua teoria (REIMANN, 2014). A fotografia da figura 3 é utilizada pelo autor para ilustrar suas ideias em seu livro. Após essa publicação, diversos outros matemáticos utilizaram esta imagem para atribuir conhecimentos matemáticos aos povos que esculpiram as esferas, alguns afirmando que estas seriam 'modelos' dos poliedros de Platão da época Neolítica (Lloyd, 2012).

Figura 3 - Foto utilizada por Critchlow e reproduzida por diversos livros de História da Matemática.



Fonte Lloyd (2012)

Lloyd investiga a proveniência das esferas utilizadas para compor a imagem elaborada por Critchlow e descobre que estes não foram encontrados no mesmo local e não possuem nenhuma ligação específica entre si que os remete aos cinco poliedros de Platão, pois fazem parte de uma coleção de mais de 400 esferas com quantidade de protuberâncias variável. Além disso, a utilização de fitas distorce a real percepção do objeto para próximo dos poliedros e são utilizadas de maneira inconsistente, visto que no segundo, quarto e quinto objetos, estas aparecem conectando o topo das protuberâncias, enquanto no terceiro as fitas aparecem entre as protuberâncias.

Apesar de não existir evidência de que as esferas encontradas na Escócia possuem relações com as ideias de poliedro que conhecemos atualmente, as simetrias encontradas em alguns objetos coincidem com as simetrias encontradas nestes objetos. Para

LLoyd (2012) essas simetrias sugerem a existência de algum tipo de competência matemática nessa época, mas não há evidências que comprovem a existência desta competência. Pode, da mesma maneira, haver razões não-matemáticas que justificam a criação desses objetos de forma simétrica. Assim, a visão histórica convencional de que a descoberta do conceito de conjunto de cinco sólidos regulares é contemporânea com Platão não é contestada pela existência desses objetos (LLOYD, 2012).

3.3 Euler e os vértices, as arestas e as faces

Com a ascensão da burguesia no século XVIII, que derrubou a antiga ordem aristocrática na Inglaterra, França e Estados Unidos, as ideias políticas, sociais e econômicas do feudalismo foram substituídas pela filosofia do liberalismo clássico. De acordo com Eves (2004, p. 456), o liberalismo clássico propugnava uma democracia, embora limitada a determinados membros da sociedade, a igualdade de oportunidades e a santidade da propriedade privada. Essa filosofia englobava anseios da classe social constituída de comerciantes, banqueiros, advogados, médicos, servidores civis, entre outros, que crescera em importância na Europa nos séculos anteriores, marcados por grande desenvolvimento comercial e êxodo dos camponeses para as cidades em busca de trabalho.

Conforme os trabalhadores migraram para as capitais europeias como Londres, Paris, Milão, Frankfurt, entre outras, muitos comerciantes e artesãos ampliaram seus negócios, tornando-se, conforme Eves (2004), ricos o suficiente para não mais precisar trabalhar. Esses comerciantes "desfrutavam de boa educação, conheciam a máquina estatal, dominavam profundamente todas as ramificações dos negócios mundiais e eram peritos em finanças públicas" (EVES, 2004, p. 457). Porém os cargos de governo eram todos exclusivos da aristocracia, que também era isenta de impostos, diferente da burguesia. Esta recém surgida classe social, amparada pelos ideais do liberalismo do filósofo inglês John Locke (1632-1704), apoderou-se do poder entre 1688 e 1825, com apoio das classes menos favorecidas, que mantinham sentimento de indignação com a aristocracia desde a Idade Média (EVES, 2004).

Neste contexto, no século XVIII os governos passam a atuar sistematicamente fomentando o desenvolvimento da ciência, ocupando o lugar dos mecenas. A comunidade científica passa a se organizar em academias criadas e mantidas pelo estado. De acordo com Mol (2013), ainda no século XVII já haviam sido criadas a Royal Society (1662), em Londres, e a Académie des Sciences (1666), em Paris. No século seguinte, a Academia de Berlim foi criada por Leibniz (1700) e na Rússia, o czar Pedro, o Grande (1672-1725), fundou a Academia de São Petersburgo (1724), como parte de seus esforços de modernização e ocidentalização do país.

Porém, conforme Richeson (2008, p.14), a Rússia não possuía cientistas devido à grande força da Igreja Ortodoxa, os russos acreditavam mais em explicações divinas que em explicações científicas. Pedro, o Grande, faleceu em 1725 deixando para sua segunda esposa, Catarina I, a tarefa de dar continuidade à recém-criada Academia, que inicialmente buscou nos países vizinhos cientistas e contratou treze alemães, um francês e dois suíços, estes da famosa família Bernoulli: Nicolaus (1695 - 1726) e Daniel (1700 - 1782). Estes suíços, naturais de Basel, tinham um amigo, Leonhard Euler (1707 - 1783), e assim que contratados conseguiram um lugar para este amigo na seção de fisiologia. Porém, ele nunca chegou a ocupar o posto por conta da morte de Daniel e da necessidade de um suplente para assumir seu lugar. Dessa maneira, Euler assume uma cadeira como professor de Matemática da Academia de São Petersburgo em 1726, com 20 anos de idade.

Quatorze anos depois, Euler aceitou o convite de Frederico, o Grande (1712 - 1786), e mudou-se para a Alemanha, assumindo uma cadeira na Academia de Berlim. Ali Euler permaneceu por 25 anos, e, de acordo com Richeson (2008), escreveu dois artigos que revolucionaram os estudos de poliedros: *Elementa Doutrinae Solidorum*, em 1750, e *Demonstratio nunnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sun praedita*, em 1751. Estes foram os únicos artigos publicados melo matemático que abordam os poliedros, e são importantes na história deste conceito.

No primeiro, “Elementa Doutrinae Solidorum” (EULER, 1758a), ou Elementos da Doutrina dos Sólidos, Euler inicia seus estudos sobre o que ele denomina Stereometria. Para Sandifer (2004a), tem-se a impressão de que Euler escreverá diversos artigos sobre esse novo assunto, mas, de fato, ele escreve apenas dois. Com uma analogia aos polígonos, que consistem em pontos e segmentos de reta, o artigo de Euler propõe o estudo dos sólidos vistos como pontos, segmentos e planos. Ele denomina os pontos de *anguli solidi*, e os representa pela letra S, e os planos de *hedra*, utilizando a letra H para representá-los. Os segmentos são por ele chamados de *acies*, representados pela letra A. Esses elementos, em geral, são traduzidos para o português, respectivamente, como vértices, faces e arestas.

Para Richeson (2008, p. 64), perceber que a superfície de um poliedro é composta por estes elementos foi brilhante. Antes disso, os estudos de poliedros, que existiam há quase dois mil anos, estavam focados exclusivamente nas propriedades métricas dos objetos, propriedades que podem ser medidas, como determinar comprimentos de lados e diagonais, áreas de superfícies e volumes dos sólidos. Euler, em contrapartida, buscou classificar estes objetos de acordo suas aparências. Porém apenas o número de faces não era suficiente, como nos polígonos, visto que dois poliedros com o mesmo número de faces podem ser bastante diferentes, sendo necessário, conforme escreve Euler em seu artigo, conhecer as quantidades dos três elementos citados acima para determinar completamente o sólido.

Uma parte do artigo é destinada a nomear sólidos que ainda não possuíam nome. Segundo Sandifer (2004a), Euler investe tempo desenvolvendo nomenclatura baseado no número de vértices, arestas e faces. Por exemplo, um prisma triangular, com cinco lados e seis vértices, é chamado por ele de pentaedrum hexagonum.

Sete páginas do artigo são destinadas a proposições relacionados aos sólidos. A grande proposição enunciada pelo suíço é:

"Propositio IV: In omni solido hedris planis incluso aggretatum ex numero angulorum solidorum et ex numero hedrarum binario excedit numerum acierum" (EULER, 1758a, p. 119)

"Proposição IV: Em todo sólido fechado por planos, a soma do número de ângulos sólidos [vértices] e do número de faces excede o número de arestas por 2" (SANDIFER, 2004, p.3, tradução nossa)

No entanto, o matemático não demonstra esta fórmula. Como escreve Sandifer (2004a), após afirmar que ainda não encontrou uma prova da afirmação, Euler trabalha demonstrando que a afirmação é válida para uma série de sólidos com nível crescente de complexidade e generalização, e encerra comprovando que a afirmação é válida para os sólidos platônicos.

Ao todo o artigo compreende nove proposições, entre as quais Sandifer (2004a) destaca a VII, cujo resultado é essencial aos estudos do Teorema das Quatro Cores[1]:

"Propositio VII. Nullum existere potest solidum, cuius omnes hedrae sint hexagonae, vel plurium laterum; neque vllum existere potest solidum, cuius omnes anguli solidi ex sex, pluribusue angulis planis sint formati." (EULER, 1758a, p. 131).

"Proposição VII. Não pode existir um sólido cujas faces tenham seis ou mais lados; nem pode existir um sólido cujos ângulos sólidos são formados por seis ou mais planos" (SANDIFER, 2004, p. 3, tradução nossa).

No segundo artigo, "Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita" (EULER, 1758b) ou Demonstração de algumas

[1] Teorema que diz que qualquer mapa pode ser colorido utilizando-se apenas quatro cores de forma a que regiões vizinhas não partilhem a mesma cor.

propriedades de sólidos fechados por planos, Euler propõe uma demonstração para a proposição IV do artigo “Elementa Doutrinae Solidorum” (EULER, 1758a). Conforme relata Sandifer (2004b), o matemático utiliza como base para sua demonstração a proposição:

“Propositio I. Proposito solidu quocunque hedris planis incluso inde datum angulum solidum ita resecare, vt in solido residuo numerus angulorum solidorum unitate sit minor” (EULER, 1758b, p.145).

“Proposição I: Dado qualquer sólido fechado por planos, então se um ângulo sólido é retirado, no sólido que sobra o número de ângulos sólidos será um a menos (SANDIFER, 2004b, p. 3, tradução minha).

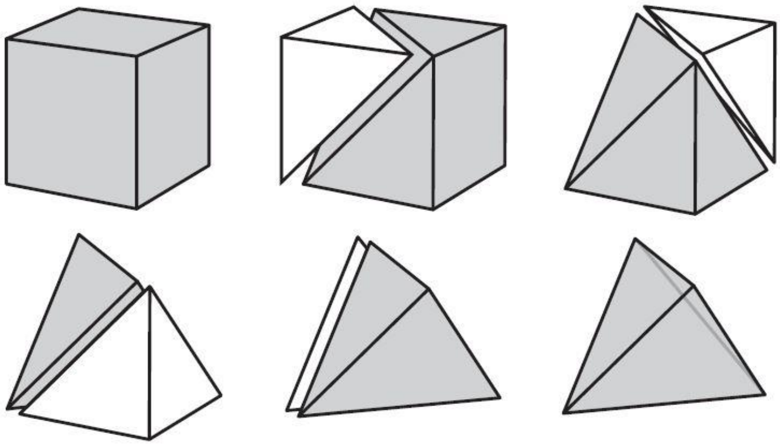
A partir da proposição I, Euler investiga quantas faces e arestas restam no sólido após a retirada deste vértice. Richeson (2008, p. 68) descreve o raciocínio utilizado por ele, que consiste em retirar sistematicamente os vértices dos sólidos, através do corte de pirâmides de bases triangulares. Conforme Richeson (2008) enfatiza, a demonstração de Euler não satisfaz os rigores atuais de uma demonstração matemática. Após uma análise dos casos que ocorrem ao retirar um vértice de um sólido com F faces e A arestas e obter com F' faces e A' arestas, através do corte de pirâmides triangulares, o matemático afirma que estes números satisfazem a relação $A' - F' = A - F - 1$.

Richeson (2008) exemplifica este fato utilizando um cubo (figura 4). Após os cortes, é possível observar o comportamento das quantidades de vértices, arestas e faces no sólido resultante na tabela 1.

Dessa maneira, supondo que de um sólido com V vértices, A arestas e F faces foram removidos, um de cada vez, n vértices, até restar uma pirâmide triangular, cuja diferença entre o número de arestas e faces é igual a dois, tem-se que, utilizando o mesmo raciocínio acima, que $A - F - n = 2$. Além disso, $V - n = 4$, ou seja, $n = V - 4$. Substituindo este valor de n na primeira equação, Euler obtém sua famosa relação, $V - A + F = 2$.

Nota-se que Euler afirma que o resultado é válido para todo sólido, sem mencionar convexidade. Richeson (2008) observa que, se o sólido em questão não for convexo surgiram diversos problemas ao aplicar a técnica de corte em pirâmides triangulares proposta pelo suíço. Mesmo considerando que o poliedro seja, de fato, convexo, este método resultou em problemas, pois Euler assumiu que qualquer decomposição funcionaria, o que Henri Lebesgue (1875 - 1941) demonstrou não ser verdade. Após a demonstração de Euler, diversas outras demonstrações foram elaboradas para esta proposição (Ibid., 2008).

Figura 4 - Cortes de pirâmides triangulares em um cubo



Fonte: RICHESON (2008) p. 67

Tabela 1 – Número de vértices, arestas, faces e arestas – faces no cubo após cada corte

	$Vértices$	$Arestas$	$Faces$	$Arestas - Faces$
Cubo	8	12	6	6
	7	12	7	5
	6	11	7	4
	5	9	6	3
Tetraedro	4	6	4	2

Fonte: RICHESON (2008) p.68

3.4 O século XX e o desenvolvimento da Topologia

O século XX é marcado pelas inúmeras transformações políticas e sociais que ocorreram de maneira vertiginosa. Primeira Guerra Mundial, Grande Depressão, Revolução Russa, Segunda Guerra Mundial e Guerra Fria são alguns dos principais conflitos que ocorreram neste século. Estes eventos transformaram globalmente a sociedade, desintegrando gradualmente os velhos impérios coloniais e econômicos do século XIX. Porém as ex-colônias iniciaram suas caminhadas em desvantagem e até hoje caminham a passos lentos, marcadas pela pobreza e pelo analfabetismo.

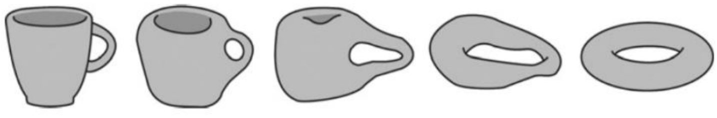
Para a ciência, o século XX foi marcado pelo crescimento vertiginoso de publicações e ramificações. Assim como escreve Durkheim "o jurista, o psicólogo, o antropólogo, o economista, o estatístico, o linguista, o historiador, procedem em suas investigações como se as diversas ordens de fatos que eles estudam formassem outros tantos mundos independentes" (DURKHEIM, 2011, p.40). Essas ramificações são observadas na Matemática, cujos pesquisadores possuem conhecimentos cada vez mais específicos, aprofundando-se em determinado tema que, embora relacionado com outras áreas da Matemática, constitui isoladamente um amplo campo de estudo.

Além disso, conforme escreve Atiyah (2002), no período clássico as pessoas estudaram assuntos em pequena escala, enquanto no final do século XIX e no século XX existe a necessidade de uma compreensão global dos assuntos. Nota-se esta necessidade de compreensão global refletindo-se na Matemática ao observar as recentes pesquisas nas diversas áreas desta ciência. Atiyah (2002) cita como exemplo dessa globalização dos assuntos na Matemática no século XX os estudos relacionados às funções. A Análise Complexa, ou Teoria de Funções, no século XIX, estudava o comportamento de funções descritas por fórmulas ou suas expansões em séries explícitas. No século XX tem-se estudos de propriedades globais de funções, como na Teoria de Singularidades, por exemplo.

Neste contexto surge a Topologia, área da Matemática que inicialmente era uma ramificação da Geometria, mas, de acordo com Eves (2004), devido ao seu grande desenvolvimento, pode ser considerada hoje uma das partes fundamentais da Matemática, ao lado da Geometria, da Análise e da Álgebra. Esta área da Matemática estuda as propriedades de um conjunto de pontos não-vazio de um espaço tridimensional, ou de dimensão superior, que permanecem invariantes sob aplicações contínuas com inversas contínuas, chamadas de transformações topológicas. Essas propriedades invariantes recebem o nome de propriedades topológicas, ou invariantes topológicos, do conjunto.

Para Richeson (2008), enquanto na Geometria é crucial que os objetos de estudo sejam rígidos, pois só assim é possível medir ângulos, comprimentos, deduzir congruências e calcular áreas e volumes, a Topologia descarta esta rigidez, pois esta obscurece outras propriedades matemáticas subjacentes ao objeto estudado. Para um geômetra dois triângulos são considerados iguais se são congruentes, ou, no mínimo, semelhantes. Já para um pesquisador da área de Topologia, dois objetos são considerados iguais se um pode ser

Figura 5 - Transformação entre espaços homeomorfos.



Fonte: https://julianpark.me

transformado no outro através de transformações contínuas, como flexão, torção e alongamento, por exemplo. Estes espaços, nestas condições, são ditos homeomorfos. Por exemplo, uma xícara e uma rosquinha, se estudados como um conjunto de pontos no espaço, são homeomorfos, como pode ser observado na figura 5.

Um dos primeiros trabalhos publicados na área de Topologia chama-se “Analisis Situs” (POINCARÉ, 2010) do matemático francês Henri Poincaré em 1895. Neste trabalho, Poincaré esquematiza sistematicamente os conhecimentos já desenvolvidos na área e desenvolve novos conceitos. Inicialmente, Poincaré define uma variedade de dimensão p da seguinte forma:

> Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ n variáveis, que podem ser consideradas como coordenadas de um ponto no espaço $n-$ dimensional. Por ora assumo que estas n variáveis são reais. Toda sequência de n variáveis será chamada $ponto$. Consideremos o seguinte sistema de p equações e q inequações:
>
> $$(1)\ \begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ F_p(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0 \\ \dots \\ \varphi_q(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0 \end{cases}$$
>
> Assumo que as funções F e φ são uniformes e contínuas e que possuem derivadas contínuas; além disso eu assumo que se tomarmos a matriz
>
> $$\begin{matrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_p}{\partial x_1} & \frac{\partial F_p}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_p}{\partial x_n} \end{matrix}$$
>
> e calcular os determinantes obtidos tomando quaisquer p colunas, então estes determinantes não são todos nulos simultaneamente. Devo dizer que o conjunto de pontos que satisfazem a condição (1) constituem uma variedade de dimensão $n - p$. (POINCARÉ, 2010, p.7, tradução nossa).

Dessa maneira, os poliedros são estudados como variedades de duas dimensões, também chamadas de superfícies. No capítulo 16 de Analysis Situs, chamado O Teorema de Euler, Poincaré generaliza a famosa relação de Euler para qualquer variedade de dimensão p:

> Suponha então que V é uma variedade $p-$dimensional. Nós subdividimos V em um certo número de variedades $p-$dimensionais v_p; as variedades v_p são não-fechadas, e suas fronteiras consistem em um certo número de variedades v_{p-1} de dimensão $p-1$. As fronteiras de v_{p-1}, por sua vez, consistem em um certo número v_{p-2} de variedades de dimensão $p-2$, e assim por diante; eu finalmente chego em um certo

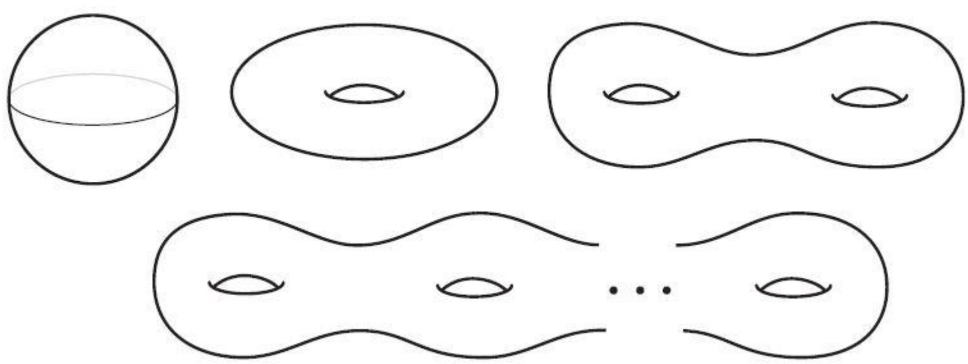
> número de variedades v_1 de uma dimensão, limitadas por um certo número de pontos isolados ou variedades de dimensão zero que chamo v_0. [...] Utilizo α_p, α_{p-1}, ..., α_0 para denotar os números de $v_p, v_{p-1}, \ldots, v_1$ e de v_0. A figura formada por todas estas variedades será chamada poliedro, pois a analogia com poliedros comuns é evidente. Um poliedro comum é de fato uma variedade fechada V de dimensão 2, subdividida em um certo número de variedades v_2, que são as faces. As faces são limitadas por um certo número de variedades v_1, que são arestas e que são limitadas por um certo número de variedades v_0 chamadas vértices. Eu proponho calcular o número
> $$N = \alpha_p - \alpha_{p-1} + \alpha_{p-2} - \cdots \mp \alpha_1 \pm \alpha_0$$
> (POINCARÉ, 2010, p.61, tradução minha)

Poincaré exibe uma maneira de calcular este número, e demonstra ainda que se dois poliedros são congruentes, ou seja, são obtidos a partir da subdivisão de uma mesma variedade. Para as superfícies, tem-se que estas são congruentes se uma pode ser transformada na outra através de transformações topológicas como as citadas anteriormente. Assim, pode-se concluir que para poliedros convexos este número, chamado de Característica de Euler da superfície, sempre será igual a 2, independente da forma do poliedro. Na verdade, "o fato que das faces serem planas é evidentemente sem importância [...] [o teorema] também é aplicável em subdivisões de qualquer superfície fechada em regiões conexas. Estas regiões correspondem às faces dos poliedros, suas fronteiras correspondem às arestas e as extremidades das linhas correspondem aos vértices" (POINCARÉ, 2010, p.61).

Os estudos com o objetivo de classificar superfícies, segundo Richeson (2008), foram iniciados por Bernhard Riemann (1826–1866) na década de 1850. Foi continuado por August Ferdinand Möbius (1790 - 1868) que demonstrou que qualquer superfície orientável compacta, ou seja, fechada e sem bordo, é homeomorfa a uma das formas que ele chama de formas normais e que estão ilustradas na figura 6. A demonstração do Teorema de Classificação das Superfícies Compactas, em sua versão completa, que inclui superfícies não orientáveis, foi concluída com rigor por Max Dehn (1878–1952) e Poul Heegaard (1871–1948) em 1907.

A partir deste Teorema, é possível determinar a Característica de Euler de poliedros não-convexos que possuem 'túneis' observando-se o número de 'túneis' que este

Figura 6 - As formas normais para superfícies compactas orientáveis: a esfera e os toros de gênero 1, 2 e g.



Fonte: RICHESON, 2008, p.184.

poliedro contém. Sabendo que $2 - 2g$ é a Característica de Euler de um toro de gênero g, se o poliedro em questão possui g ‘túneis’, pelo Teorema tem-se que este é homeomorfo a um toro de gênero g, portanto $V - A + F = 2 - 2g$. Se o poliedro é não-convexo, porém não possui ‘túneis’, este é homeomorfo à esfera e, portanto, $V - A + F = 2$.

4 CONCEPÇÃO E ANÁLISES A PRIORI DE UMA SEQUENCIA DIDÁTICA COM O TEMA POLIEDROS

Neste capítulo descrevemos o processo de concepção de uma sequência didática para o ensino de alguns tópicos relacionados a poliedros que compõem o currículo da escola básica.

A Teoria Sociocultural concebe o conhecimento matemático como manifestação simbólica desenvolvida pelos membros de uma cultura, ou seja, manifestação cultural gerado e compartilhado por um grupo. Ao analisarmos o Movimento Lógico-Histórico do conceito de poliedro, notamos que diversos grupos de diversas épocas históricas manifestaram compartilhar as ideias que envolvem este conceito.

Os gregos registraram suas ideias acerca dos sólidos em diversas obras nos períodos históricos Clássico e Helenístico. A visão dos gregos sobre estes objetos predomina no currículo da escola básica atual. Entre os conteúdos relacionados a poliedros desenvolvidos pelos gregos estão os poliedros regulares, a construção de poliedros com figuras planas, cálculos de áreas, volumes e razões entre medidas de componentes destes sólidos.

Existem, também, registros de estudos relacionados a poliedros por cientistas da Europa Medieval e Moderna, entre os quais destacamos Leonhard Euler, que na Idade Moderna mudou substantivamente a visão destes sólidos, definindo-os pela primeira vez como um conjunto de faces, vértices e arestas. O matemático suíço desenvolveu ainda alguns teoremas sobre os poliedros, entre os quais o mais famoso, chamado de Relação de Euler para poliedros convexos, compõe o currículo da escola básica do Brasil.

Os registros mais recentes do conceito são os relacionados à Topologia, área da Matemática que estuda as Variedades e, entre elas, as de duas dimensões, chamadas de Superfícies. Compartilhados por grupos acadêmicos e pesquisadores, os conhecimentos desta área desenvolveram-se historicamente a partir dos registros feitos por Euler. Estes conhecimentos foram publicados em artigos científicos em linguagem matemática formal, o que os torna inacessíveis a uma grande parcela da sociedade.

Porém, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), ao listar os princípios que regem o ensino de Matemática no Ensino Fundamental, enuncia “A Matemática precisa estar ao alcance de todos e a democratização do seu ensino deve ser meta prioritária do trabalho docente” (BRASIL, 1998, p.19). Este documento coloca ainda que “é fundamental não subestimar a capacidade dos alunos, reconhecendo que resolvem problemas, mesmo que razoavelmente complexos, lançando mão de seus conhecimentos sobre o assunto e buscando estabelecer relações entre o já conhecido e o novo" (BRASIL, 1998, p.29).

Assim, a análise do Movimento Lógico-Histórico do conceito de poliedro evidencia três momentos históricos e três construções lógicas deste conceito: na Grécia Helenística eram estudados os poliedros a partir de suas formas, suas construções e suas medidas. Na Europa do século XVIII Leonhard Euler estudou poliedros como um conjunto de vértices, arestas e faces, buscando relacionar estes componentes. Nos final do século XIX os poliedros foram estudados como variedades bidimensionais com o objetivo de estabelecer as características que permanecem no sólido após deformações contínuas, como inflar, esticar e encolher, chamadas de transformações topológicas.

A partir da análise do Movimento Lógico-Histórico do conceito de poliedro, selecionamos como ponto de partida para as atividades da sequência didática as obras Timeu, (Platão, 2011) e Os Elementos (EUCLIDES, 1999), ambas escritas por matemáticos gregos em torno de 1500 a.C. Selecionamos também dois artigos publicados pelo matemático suíço Leonhard Euler: Elementa Doutrinae Solidorum (EULER, 1758a) e Demonstratio nunnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sun praedita (EULER, 1758b). Para explorar o conceito com visão topológica, partimos da generalização da Relação de Euler para qualquer superfície feita por Henri Poincaré em seu artigo Analysis Situs (POINCARÉ, 2007) e o Teorema de Classificação de Superfícies Compactas desenvolvida por Riemann, Möebius, Max Dehn e Poul Heegaard nos séculos XIX e XX, cuja demonstração está em Munkres (2000).

Ao dispor sobre a seleção de conteúdos que compõem o bloco curricular Espaço e Forma, os Parâmetros Curriculares Nacionais ressaltam que "conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive" (BRASIL, 1998, p.40).

De acordo com a Proposta Curricular do Estado de São Paulo " a Geometria deve ser tratada, ao longo de todos os anos, em abordagem espiralada [...] sendo a diferença a escala do tratamento dada ao tema" (SÃO PAULO, 2011). No entanto, neste mesmo documento, a abordagem de poliedros aparece no Ensino Fundamental apenas no primeiro ciclo. No sexto ano, o documento propõe que sejam trabalhadas a habilidade de distinção entre figuras planas e figuras espaciais, a habilidade de planificar uma figura espacial e a de identificar uma figura espacial a partir de sua planificação. No sétimo ano, além de retomar a habilidade de planificação, o documento propõe que os alunos sejam capacitados a "saber identificar elementos de poliedros e classificar os poliedros segundo diversos pontos de vista" (SÃO PAULO, 2011, p. 59).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p. 55) observam que no segundo ciclo os alunos

> começam a estabelecer relações de causalidade, o que os estimula a buscar a explicação das coisas (porquês) e as finalidades (para que servem). O pensamento ganha maior flexibilidade, o que lhes possibilita perceber transformações. A reversibilidade do pensamento permite a observação de que alguns elementos dos objetos e das situações permanecem e outros se transformam. Desse modo, passam a descobrir regularidades e propriedades numéricas, geométricas e métricas (BRASIL, 1998, p. 56)

Partindo deste pressuposto, em conjunto com a ideia de abordagem espiralada sugerida pela Proposta Curricular do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2011), optamos por selecionar como público alvo de uma sequência de situações de aprendizagem com o tema Poliedros, na qual trabalha-se as transformações destes conceitos nos diferentes períodos históricos, alunos do nono ano do ensino fundamental.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais sugerem que, nos anos finais do Ensino Fundamental, seja estimulada “a observação de características das figuras tridimensionais e bidimensionais, o que lhes permite identificar propriedades e, desse modo, estabelecer algumas classificações” (BRASIL, 1998, p. 58). O documento oficial enfatiza ainda que “o segundo ciclo tem como característica geral o trabalho com atividades que permitem ao aluno progredir na construção de conceitos e procedimentos matemáticos” (ibid, p 58). Ao optar pelo nono ano, buscamos consolidar os conhecimentos e habilidades trabalhados no primeiro ciclo, trabalhar os conceitos de poliedro ainda no Ensino Fundamental de uma maneira relativamente mais aprofundada e introduzir alguns elementos que serão necessários para que o aluno seja capaz de assimilar e desenvolver estes conceitos de maneira formal no Ensino Médio. Como sugere a Proposta, neste ciclo a tônica é a “ênfase na construção de raciocínios lógicos, de deduções simples de resultados a partir de outros anteriormente conhecidos” (SÃO PAULO, 2011, p.41).

Ao elaborar as situações de aprendizagem consideramos as ideias acerca dos registros de representações semióticas e compreensão de conceitos geométricos. Saddo Ag Almouloud, partindo do artigo de Raymond Duval: Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuals[2], propõe que o pensamento geométrico envolve três processos cognitivos que preenchem específicas funções epistemológicas:

> a) *visualização* para a exploração heurística de uma situação complexa;
> b) *construção* de configurações, que pode ser trabalhada como um modelo, em que as ações realizadas representadas e os resultados observados são ligados aos objetos matemáticos representados;

[2] DUVAL, R. Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuals. Berna: Peter Lang, 1995.

> c) *raciocínio*, que é processo que conduz para a prova e a explicação (ALMOULOUD, 1998, p. 126).

Ainda segundo Almouloud, esses processos cognitivos são entrelaçados e necessários para a proficiência da Geometria. Em contrapartida, a heurística dos problemas de Geometria dá lugar a formas de interpretações autônomas, das quais o autor distingue quatro:

> 1. sequencial: é solicitada nas tarefas de construção ou nas tarefas de descrição com o objetivo de reproduzir uma figura;
> 2. perceptiva: é a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica;
> 3. discursiva: é a interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando a articulação dos enunciados, levando em consideração a rede semântica de propriedades do objeto;
> 4. operatória: está centrada nas modificações possíveis de uma figura de partida e na reorganização perceptiva que estas modificações sugerem (ALMOULOUD, 1998, p.127).

Ao elaborar as situações de aprendizagem levamos em consideração o que Almoouloud (1998) propõe como uma maneira de minimizar os problemas encontrados no ensino de Geometria atual. Para ele, as situações de aprendizagem que exploram conceitos geométricos devem evidenciar:

> - Figuras geométricas que tenham um papel heurístico, levando em conta suas diferentes apreensões: perceptiva, discursiva, operatória e sequencial;
> - Demonstração como parte integrante do processo de ensino e aprendizagem dos conceitos/habilidades geométricos e do raciocínio lógico-dedutivo;
> - A importância dos registros de representação (desenho/figura geométrica, linguagem natural, linguagem matemática) (ALMOULOUD, 1998, p.131).

4.1 Situação de Aprendizagem 1: Poliedros em registros gregos

Duração Prevista: 4 aulas

Habilidade e competências envolvidas:

- Construir sólidos geométricos a partir da planificação;
- Reconhecer semelhanças e diferenças entre poliedros (como os prismas, as pirâmides e outros);
- Comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão;
- identificar características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, percebendo semelhanças e diferenças entre elas (superfícies planas e arredondadas, formas das faces, simetrias);

Conteúdos: Poliedros, Poliedros Regulares.

Recursos didáticos utilizados: Lousa, material concreto: sólidos geométricos, material impresso: planificação de um dodecaedro.

4.1.1 Atividade 1: O dodecaedro do zodíaco

A primeira atividade da situação de aprendizagem 1, que recebeu o nome de Dodecaedro do Zodíaco, foi elaborada a partir da obra Timeu, de Platão (PLATÃO, 2011). No livro, o filósofo grego associa os poliedros regulares de quatro, seis, oito e vinte faces, respectivamente, aos elementos fogo, terra, ar e água. O sólido regular que resta, segundo o autor, foi utilizada por deus para pintar animais no universo. É interessante notar no trecho de Platão uma evidência de que a nomenclatura destes sólidos não era difundida em seu contexto histórico, pois o autor não a utiliza em nenhum momento. A ausência de nomenclatura, porém, não torna a obra de Platão menos inovadora, pois é o registro mais antigo da percepção humana relacionada aos sólidos regulares. A partir da publicação desta obra estes sólidos ficaram conhecidos como Poliedros de Platão e assim são conhecidos atualmente.

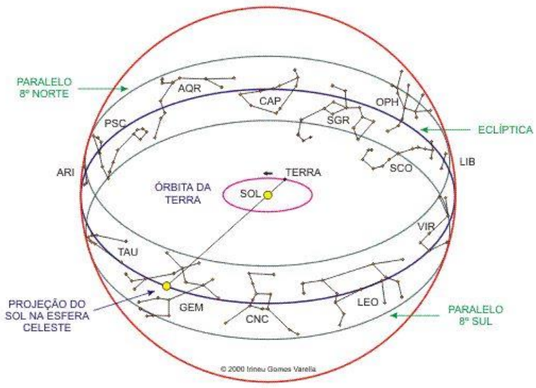
Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p.60) dispõem como conteúdo do segundo ciclo do ensino fundamental a exploração das planificações de algumas figuras tridimensionais. Um dos objetivos dessa atividade é explorar a planificação do dodecaedro, sólido formado por doze pentágonos regulares, de maneira descontraída e lúdica. Esta atividade articula no pensamento geométrico, conforme os termos utilizados por Duval (1995 apud ALMOULOUD, 1998), os processos cognitivos de visualização e construção. Será distribuído um modelo de planificação impresso de um dodecaedro (APÊNDICE 1) e exibido o objeto já construído. Os alunos devem recortar e construir o objeto a partir da planificação que receberam.

Conforme sugestão dos Parâmetros Curriculares Nacionais, esta atividade busca "estabelecer ligações entre a Matemática, as situações cotidianas dos alunos e as outras áreas do conhecimento" (BRASIL, 1988, p.40). O dodecaedro construído nessa atividade possui os símbolos e nomes dos doze signos do zodíaco ocidental, um em cada uma de suas faces. As origens destes símbolos para representar as casas do zodíaco residem nas doze constelações que se situam entre dois paralelos de latitude terrestre. Assim, a atividade, além de estabelecer ligações entre a Matemática e o horóscopo, elemento do cotidiano dos alunos, pois este é disponibilizado em diversos meios de comunicação atuais como internet, rádio, jornais impressos e televisão, possibilita a articulação entre os conhecimentos matemáticos e astronomia.

Os gregos estabeleceram um dos primeiros modelos de democracia que incluíam setores da sociedade menos favorecidos socialmente, como agricultores, artesãos e pequenos comerciantes. Estes se juntavam na Ágora para discutir diversos assuntos, entre eles, astronomia. Sabe-se que os gregos possuíam amplo conhecimento em astronomia. De acordo com Clávia (2010), das 88 constelações reconhecidas pela União Astronômica Internacional hoje, mais da metade era conhecida e foi catalogada pelo grego Hiparco (século II a.C.). Entre estas encontram-se as doze constelações do zodíaco.

A Eclíptica é o círculo máximo da Esfera Celeste e descreve a trajetória anual do Sol em seu movimento aparente ao redor da Terra. Este movimento aparente é uma consequência do movimento de translação da Terra, que neste período anual realiza uma órbita em torno da estrela. Neste movimento aparente, o Sol se desloca pela Eclíptica atravessando 13 constelações chamadas de constelações zodiacais, que são: Peixes, Áries, Touro, Gêmeos, Câncer, Leão, Virgem, Libra, Escorpião, Ofiúco, Sagitário, Capricórnio e Aquário. No entanto, uma destas constelações, Ofiúco, não ocupa lugar no zodíaco astrológico. A figura 7 mostra um modelo deste movimento através destas constelações. Os alunos receberão informações sobre estas constelações e esta imagem será exibida para facilitar a compreensão dos conceitos.

Figura 7 - Movimento aparente do sol pela eclíptica.



Fonte: http://www.uranometrianova.pro.br

Feita a construção do dodecaedro, cada grupo de alunos receberá uma folha impressa com as principais características de cada signo, suas combinações e descombinações astrológicas. Com estas informações, o aluno pode socializar e identificar algumas semelhanças que possui com outros colegas de sala e colaborando para um sentimento de pertencimento a um grupo social.

Para os alunos que gostam mais de filosofia, o assunto das conversas girará em torno do livro Timeu (PLATÃO, 2011) e as associações dos poliedros regulares com elementos da natureza. De acordo com Richeson (2008), Platão foi o primeiro pedagogo de quem se tem registros. Ele acreditava que através da educação seria possível ao homem controlar seus instintos, sua ganância e a violência. Fundador da Academia em Atenas, o filósofo defendia a educação pública, atribuindo ao estado a responsabilidade de educar a sociedade. O filósofo também foi o autor de diversos diálogos nos quais retrata temas de filosofia que ainda são deveras atuais, como política, epistemologia, teoria das ideias, entre outros.

4.1.2 Atividade 2: A busca de uma definição

A segunda atividade tem como pano de fundo os primeiros registros de definições de sólidos geométricos. Estas definições foram elaboradas por Euclides de Alexandria, que foi aluno de Platão e fundador da Escola de Matemática de Alexandria, e estão presentes em seu livro Os Elementos (EUCLIDES, 2009). O matemático atribuiu nomes aos poliedros regulares cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Aparentemente ele considerava o tetraedro uma pirâmide de base triangular, chamando-o de pirâmide em sua obra, assim como fazia Platão.

Um dos objetivos desta atividade é familiarizar o aluno com a linguagem matemática explorando o que é uma definição dentro desta ciência. Considerando a definição matemática como elemento básico de demonstrações dos resultados da Matemática, é importante que esta seja explorada no ensino fundamental, pois conforme pontua Almouloud (1998, p.132), a iniciação à demonstração tem um papel importante e pode levar os alunos dos anos finais do Ensino Fundamental a uma melhor aquisição dos conceitos geométricos e de habilidades geométricas.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, o aluno do ensino fundamental deve ser capaz de “comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão” (BRASIL, 1998, p.37). O documento diz ainda que, no segundo ciclo do ensino fundamental, deve ser trabalhada a habilidade de “recolher dados e informações, elaborar formas para organizá-los e expressá-los” (ibid, p.56) e, no caso específico das formas geométricas, a observação de suas características “permite identificar propriedades e, desse modo, estabelecer algumas classificações” (ibid, p. 58).

Em um primeiro momento, os alunos serão orientados a formar duplas. Cada dupla deve escolher um poliedro entre diversos tipos de poliedros diferentes dispostos pelo professor (FIGURA 8). As planificações destes objetos encontram-se disponíveis no APÊNDICE 2. Cada dupla receberá uma folha (APÊNDICE 4) na qual está impresso:

Definir um objeto matemático é descrevê-lo com exatidão a partir das características distintivas. Por exemplo:

- *Um triângulo: uma figura plana que tem três lados fechados por retas.*
- *Um quadrilátero: uma figura plana que tem quatro lados fechados por retas.*

Defina o objeto que você recebeu a partir das características que você observa. Desenhe o objeto.

Figura 8 - Poliedros utilizados na atividade 2.

Foto do autor

A partir da observação do sólido, este deve discutir com seu colega quais são as características que o definem. O primeiro objetivo desta atividade é explorar os conhecimentos prévios relacionados a poliedros que os alunos possuem. Os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam a importância da articulação do conhecimento prévio do aluno, além de outros fatores que são trabalhados nesta atividade:

> destaca-se a importância do conhecimento prévio do aluno como ponto de partida para a aprendizagem, do trabalho com diferentes hipóteses e representações que as crianças produzem, da relação a ser estabelecida entre a linguagem matemática e a língua materna e do uso de recursos didáticos como suporte à ação reflexiva do aluno (BRASIL, 1998, p.55).

Dessa maneira, para definir os objetos os alunos serão estimulados a acessar em sua memória os conhecimentos que já possuem sobre sólidos, ou na linguagem de Ausubel, seus organizadores prévios para a assimilação do conhecimento que será articulado. A atividade utiliza um material introdutório que articula as novas ideias a serem assimiladas com alto nível de generalidade e poder de inclusão, o que proporciona uma aprendizagem significativa segundo Viana Nunes, Almouloud e Guerra (2010).

Espera-se nesta etapa que o aluno recorde ou elabore questões sobre as características e elementos de poliedros, como faces, arestas e vértices, entre outros, que em geral são trabalhados no primeiro ciclo. O "reconhecimento de semelhanças e diferenças entre poliedros (como os prismas, as pirâmides e outros) e identificação de elementos como faces, vértices e arestas" (BRASIL, 1998, p. 60) é também conteúdo do segundo ciclo do Ensino Fundamental, conforme disposto pelos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Outro objetivo desta etapa, ao solicitar ao aluno que desenhe o poliedro na folha, é trabalhar a habilidade de representar figuras geométricas. Esperamos que, ao realizar esta representação, o aluno seja estimulado a identificar as faces do poliedro com polígonos, os quais ele terá que representar de maneira indireta em seu desenho. Conforme propõem os Parâmetros Curriculares Nacionais, neste ciclo

> espera-se que o aluno identifique características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, percebendo semelhanças e diferenças entre elas (superfícies planas e arredondadas, formas das faces, simetrias) e reconhecendo elementos que as compõem (faces, arestas, vértices, lados, ângulos) (BRASIL, 1998, p. 64).

Nesta atividade são articulados os processos cognitivos de visualização e raciocínio, conforme os termos utilizados por Duval (1995 apud ALMOULOUD, 1998). O aluno parte da simples observação de um objeto para elaborar um texto, ou seja, elaborar registros semióticos que traduzem as ideias que possui em um discurso explicativo.

Após concluírem as representações e definições dos poliedros, as definições serão compartilhadas oralmente. Será realizado um bate-papo sobre a atividade, no qual todos devem se sentir à vontade para expor suas linhas de raciocínio que levaram a construir as definições. Em seguida, serão lidas as seguintes definições de Euclides presentes no livro Os Elementos:

> 1. Sólido é o que tem comprimento e largura e profundidade.
> 2. Uma extremidade do sólido é uma superfície.
> 3: Pirâmide é uma figura sólida contida por planos, construída a partir de um ponto até um plano.
> 4: Prisma é uma figura sólida contida por planos, dos quais os dois opostos são tanto iguais quanto também semelhantes e paralelos, e os restantes são paralelogramos.
> 5: Cubo é uma figura sólida contida por seis quadrados iguais.
> 6: Octaedro é uma figura sólida contida por oito triângulos iguais e equiláteros.
> 7: Icosaedro é uma figura sólida contida por vinte triângulos iguais e equiláteros.
> 8: Dodecaedro é uma figura sólida contida por doze pentágonos iguais e equiláteros e equiângulos (EUCLIDES, 2009, p.481-483).

Conforme a leitura das definições ocorre, será localizado o sólido definido e feita uma comparação entre a definição de Euclides com a do aluno, apontando as concordâncias e disparidades. É importante que neste momento o professor enfatize que não existe uma única definição certa e a escolha das palavras é tarefa de quem define, e que uma boa definição deve ser escolhida de maneira a não gerar ambiguidades. Será ressaltado que na obra de Euclides existem definições que atualmente são consideradas vagas e que o conhecimento matemático está em constante transformação e reconstrução.

É possível construir uma definição que englobe todos os objetos estudados nesta aula, chamados na matemática de poliedros (palavra de origem grega que pode ser traduzida como *várias faces*). Em conjunto com a sala e partindo das ideias dos alunos, será escrita no quadro uma definição para estes objetos. A definição de poliedros em geral utilizada na atualidade é a seguinte, disposta no livro A Matemática do Ensino Médio, de Elon Lages Lima:

> Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces onde:
> a) cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um outro polígono.
> b) a interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia. Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro
> c) é sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas). Todo poliedro (no sentido da definição acima), limita uma região do espaço chamada de interior desse poliedro. Aqui, polígono plano está significando o polígono e a região poligonal (região interna do polígono) (LIMA, et al., 2006, p. 232-233).

4.2: Situação de aprendizagem 2: Os poliedros a partir das definições de Leonhard Euler

Duração Prevista: 5 aulas

Habilidade e competências envolvidas:

- identificar elementos de um poliedro como faces, vértices e arestas;
- coletar, organizar e descrever dados, estabelecer relações entre acontecimentos e fazer previsões;
- identificar diferentes possibilidades na composição e decomposição de figuras tridimensionais;
- representar e resolver problemas por meio de equações de 1º grau;

Conteúdos: Poliedros, Relação de Euler.

Recursos didáticos utilizados: Lousa, material concreto, material impresso.

4.2.1 Atividade 1: Vértices, Arestas e Faces

Essa atividade buscará ancoragem nas anteriores para desenvolver o resultado da Relação de Euler de maneira significativa. Os alunos devem formar duplas e receber um poliedro entre os ilustrados na figura 7. Serão revisados os conceitos explorados na última aula relacionados aos elementos de um poliedro na visão do matemático suíço Leonhard Euler, ou seja, um conjunto de vértices, arestas e faces, e explorar as diferenças entre os estudos de Euler com os estudos desenvolvidos pelos gregos cerca de dois mil anos antes.

Devem ser tecidos comentários sobre o matemático que revolucionou os estudos sobre os sólidos geométricos, assim como sobre o contexto político, histórico e social no qual ele vivia. Será exibida uma foto de Euler com o objetivo de ressaltar a importância de suas contribuições para a Matemática, na área de Geometria e em outras áreas. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, “a História da Matemática, mediante um processo de transposição didática e juntamente com outros recursos didáticos e metodológicos, pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem em Matemática” (BRASIL, 1998, p. 35).

Os alunos serão orientados a contar o número de vértices, faces e arestas do poliedro e devem anotar os dados dos objetos. Os Parâmetros Curriculares Nacionais ressaltam a “importância do desempenho de um papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento” (BRASIL, 1998, p. 21). Comentários posteriores e correção de eventuais equívocos que podem ocorrer nessa etapa serão mais eficientes para uma aprendizagem significativa, pois ao desenvolver papel ativo nesta etapa da atividade desenvolvida o aluno sentir-se-á mais envolvido pela situação e, consequentemente, assumirá uma postura mais participativa.

Conforme proposto nos Parâmetros Curriculares Nacionais, nessa atividade, assim como nas outras, “além de organizador, o professor também é consultor nesse processo. Não mais aquele que expõe todo o conteúdo aos alunos, mas aquele que fornece as informações necessárias, que o aluno não tem condições de obter sozinho” (BRASIL, 1998, p. 31).

Após a coleta de dados, estes serão organizados em uma tabela. Será utilizado o software Microsoft Excel e projetor multimídia. Os alunos podem acompanhar a construção da tabela e familiarizar-se com o software. A utilização da tecnologia para realizar a construção da tabela tem por objetivo “levar o aluno a perceber a importância do uso dos meios tecnológicos disponíveis na sociedade contemporânea” (BRASIL, 1998, p. 35), conforme a proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais. O documento propõe que

> o computador pode ser usado como elemento de apoio para o ensino (banco de dados, elementos visuais), mas também como fonte de aprendizagem e como ferramenta para o desenvolvimento de habilidades. O trabalho com o computador pode ensinar o aluno a aprender com seus erros e a aprender junto com seus colegas, trocando suas produções e comparando-as (BRASIL, 1998, p. 36).

Nessa etapa da atividade são trabalhadas habilidades relativas ao bloco Tratamento da Informação. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> o trabalho a ser desenvolvido a partir da coleta, organização e descrição de dados possibilita aos alunos compreenderem as funções de tabelas e gráficos, usados para comunicar esses dados: a apresentação global da informação, a leitura rápida e o destaque dos aspectos relevantes. Lendo e interpretando dados apresentados em tabelas e gráficos, os alunos percebem que eles

> permitem estabelecer relações entre acontecimentos e, em alguns casos, fazer previsões (BRASIL, 1998, p. 58).

Almejamos estas previsões ao propor esta atividade. O objetivo de se organizar os dados dos poliedros em uma tabela é evidenciar que nos poliedros convexos é válida a relação de Euler. Construída a tabela, esperamos que ela evidencie que nos poliedros existe uma relação entre o número de vértices, arestas. Retornando ao viés histórico da aula, será retomado que Euler foi o primeiro matemático que percebeu que os elementos dos poliedros convexos seguem esta regularidade. Essa percepção de Euler transformou os estudos na área de Geometria.

Para demonstrar que isso sempre ocorre Euler propôs que fossem retirados os vértices de um poliedro genérico, um a um, através do corte de pirâmides triangulares. Após uma análise dos casos que ocorrem ao retirar um vértice de um sólido com F faces e A arestas e obter com F' faces e A' arestas, o matemático constata que estes números satisfazem a relação $A' - F' = A - F - 1$. Dessa maneira, supondo que de um sólido com V vértices, A arestas e F faces foram removidos, um de cada vez, n vértices, até restar uma pirâmide triangular, cuja diferença entre o número de arestas e faces é igual a dois, tem-se que, utilizando o mesmo raciocínio acima, que $A - F - n = 2$. Além disso, $V - n = 4$, ou seja, $n = V - 4$. Substituindo este valor de n na primeira equação, Euler obtém sua famosa relação, $V - A + F = 2$.

Para explorar a demonstração realizada por Euler será utilizado um cubo disponível em material concreto (FIGURA 9) para exibir como funcionavam os cortes que Euler utiliza na demonstração e a obtenção de um tetraedro após certo número de cortes. Essa etapa da atividade auxilia a compreensão do que é uma demonstração matemática, pois conforme escreve Duval, a "tomada de consciência [do que é uma demonstração] surge da interação entre a representação não discursiva produzida e a do discurso expresso" (ALMOULOUD, 1998, p.128). A planificação utilizada para construir o objeto encontra-se no APÊNDICE 3.

Subjetivamente, o material concreto utilizado trabalha a reconfiguração de um sólido, visto que o cubo é decomposto em quatro pirâmides e um tetraedro. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, a "composição e decomposição de figuras tridimensionais, identificando diferentes possibilidades" (BRASIL, 1998, p. 60) constitui o conteúdo do segundo ciclo do Ensino Fundamental.

Figura 9 - Obtendo um tetraedro a partir de um cubo cortando seus vértices da maneira proposta por Euler na demonstração de sua Relação.

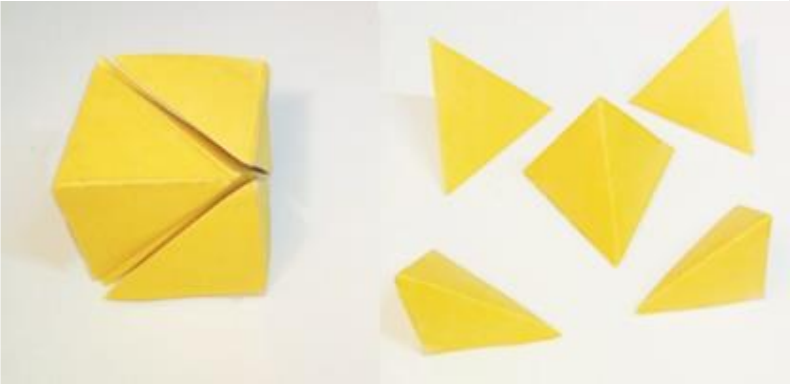


Foto do autor.

4.2.2 Atividade 2: Convertendo diferentes representações matemáticas

Essa atividade propõe a resolução de três questões retiradas do SARESP - Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo. De acordo com a página da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, "o Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) [...] é aplicado com a finalidade de produzir um diagnóstico da situação da escolaridade básica paulista" (disponível em http://www.educacao.sp.gov.br/saresp Acesso em Junho/2017). O sistema de avaliação possui foco nas habilidades e competências que o aluno deve desenvolver no ambiente escolar.

As três questões propostas serão distribuídas aos alunos em material impresso (APÊNDICE 4). Eles devem juntar-se em duplas para discutir as questões e assinalar a as alternativas corretas. Todas tratam o conceito de poliedro a partir das ideias desenvolvidas por Leonhard Euler, e aprofundam o tratamento dado aos objetos pela atividade anterior.

Nessa atividade os alunos articulam as funções epistemológicas de visualização e construção, conforme os termos definidos por Almouloud (1998). De acordo com o autor, o processo cognitivo de construção se dá no momento que o aluno liga as ações e os objetos concretos aos objetos matemáticos representados. Nesse caso, os alunos receberão questões que possuem poliedros representados para que observem características dos objetos em sua representação matemática.

Na primeira questão proporemos ao aluno observar a representação matemática de uma pirâmide de base hexagonal e responda quantos vértices este objeto possui. Na segunda questão, o aluno deve observar a representação matemática de um prisma pentagonal e responder qual é o número de arestas deste objeto.

Forneceremos também os modelos dos sólidos envolvidos em material concreto. Assim, duas formas de representação das figuras geométricas estão envolvidas nas questões, os modelos matemáticos e as representações que ilustram as questões. Conforme escreve Almouloud (1998), mesmo em um curso que mobilize distintas formas de representação, a coordenação destes diferentes registros não se dá espontaneamente pelo aluno. O professor deve auxiliar os alunos a perceber que são diferentes maneiras de se representar o mesmo objeto.

O processo de transição entre as diferentes formas de representação envolvidas no processo de ensino-aprendizagem das formas geométricas deve acontecer no ensino fundamental, pois no Ensino Médio e em estudos posteriores estas representações matemáticas são muito utilizadas e o aluno deve estar familiarizado com tais representações. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais “o segundo ciclo tem como característica geral o trabalho com atividades que permitem ao aluno progredir na construção de conceitos e procedimentos matemáticos” (BRASIL, 1998, p. 85).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) propõem como conteúdo do segundo ciclo do Ensino Fundamental, no bloco Espaço e Forma, a “representação de figuras geométricas” (BRASIL, 1998, p.60). As questões que compõem atividade incluem-se no desenvolvimento deste conteúdo e envolvem a representação da pirâmide de base hexagonal, do prisma pentagonal e dos poliedros regulares.

Na terceira questão o aluno deve descobrir qual o poliedro de Platão que possui 20 vértices e 30 arestas. O enunciado sugere a utilização da Relação de Euler para poliedros, que pode ser utilizada para se obter uma equação de primeiro grau cujo resultado é o número de faces do poliedro em questão. A questão foi modificada com a adição de uma representação gráfica dos cinco poliedros regulares que podem servir como objetos de verificação de hipóteses. Assim como na atividade anterior, os alunos receberão os modelos dos poliedros de Platão para auxiliar na visualização e compreensão dos modelos matemáticos ilustrados e articular diferentes formas de representação dos objetos.

A possibilidade de resolver a questão utilizando-se de uma equação de primeiro grau gera uma relação entre Geometria e Álgebra. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> nas séries finais do ensino fundamental que os trabalhos algébricos serão ampliados; trabalhando com situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da álgebra (como modelizar, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar), representando problemas por meio de equações (identificando parâmetros, variáveis e relações e tomando contato com fórmulas, equações, variáveis e incógnitas) e conhecendo a “sintaxe” (regras para resolução) de uma equação (BRASIL, 1998, p. 39).

Após a realização da atividade, serão exibidos os principais métodos utilizados pelos alunos na resolução das questões propostas. Esperamos que na terceira questão o método de resolução através da utilização da Relação de Euler para obter-se uma equação de primeiro grau seja utilizado, explorando assim o conteúdo de equações de primeiro grau e as regras de resolução para este tipo de equação.

4.2.3: Atividade 3: Reconfigurando poliedros

As formas de apreensão *sequencial*, *perceptiva* e *discursiva* de conceitos geométricos foram articuladas nas atividades anteriores. Nesta atividade pretende-se trabalhar a forma de apreensão *operatória*, nos termos de Duval (1995, apud ALMOULOUD, 1998). Essa forma de apreensão depende das modificações que a figura pode sofrer, as quais o autor classifica como:

> - Modificação mereológica: a figura pode separar-se em partes que são subfiguras da figura dada, fracionando-se e reagrupando-se, isto é, uma relação da parte e do todo;
> - Modificação ótica: é a transformação de uma figura em outra considerando sua imagem;
> - Modificação posicional: é o deslocamento em relação a um referencial (DUVAL, 1995, apud ALMOULOUD, 1998, p.127).

De acordo com Almouloud (1998), a reconfiguração é a operação que permite obter figuras diferentes a partir de uma figura dada. As partes obtidas por fracionamento podem ser reagrupadas em diversas outras subfiguras, todas dentro da figura de partida. Dessa maneira, essa operação permite engrenar diversos tipos de tratamento, como medidas de áreas e volumes por soma de partes elementares, por exemplo, ou a equivalência de reagrupamentos intermediários. Embora já tenha sido trabalhada subjetivamente na atividade 1 desta situação de aprendizagem, nesta atividade a possibilidade de reconfiguração é evidenciada e possibilita tomada de consciência da modificação mereológica de uma figura geométrica espacial.

A atividade consiste em resolver uma questão retirada do Banco de Questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (ASSIS et al, 2015, p.46). Os alunos devem juntar-se em grupos e receberão material impresso (APÊNDICE 5) a questão a ser resolvida. Chamada de Cubo Cortado, a questão enuncia uma situação hipotética na qual Francisco acaba de aprender em sua aula de geometria espacial a Relação de Euler para poliedros convexos $V + F = A + 2$, e é verificado que a Relação de Euler é válida no cubo. A questão então exibe a representação matemática do cubo e, em seguida, propõe uma situação na qual João decide verificar a Relação de Euler para outro poliedro, obtido a partir de um cubo.

João marcou os pontos médios de cada aresta, e em cada face os uniu, formando quadrados. Ao cortar as oito pirâmides formadas em torno de cada vértice João obteve o novo sólido, ilustrado na questão com uma representação dos cortes realizados por João. É solicitado ao aluno que determine o número de arestas, vértices e faces do novo sólido. Um novo item foi adicionado à questão da OBMEP na elaboração da atividade, questionando se a Relação de Euler é válida para o novo poliedro.

Inicialmente os alunos terão acesso apenas à esta representação matemática e devem resolver a questão em equipe. Cada membro do grupo deve opinar, expor seus argumentos de maneira clara para que os outros possam concordar ou discordar. Como dispõem apenas da representação matemática do poliedro em questão, ilustrada na questão, é esperado que estes recorram à imaginação a fim de criar uma representação tridimensional imaginária deste sólido.

Prevemos que nessa etapa alguns alunos podem apresentar dificuldades para visualizar o novo sólido. A estes alunos forneceremos o modelo em material concreto que permite visualizar os cortes realizados em um cubo e o novo sólido obtido (figura 10). Com a manipulação do material, os grupos terão à duas maneiras distintas de representação de um mesmo registro semiótico, que no caso é a reconfiguração de um poliedro em outro a partir da decomposição deste.

Figura 10 - Material concreto auxiliar da atividade.

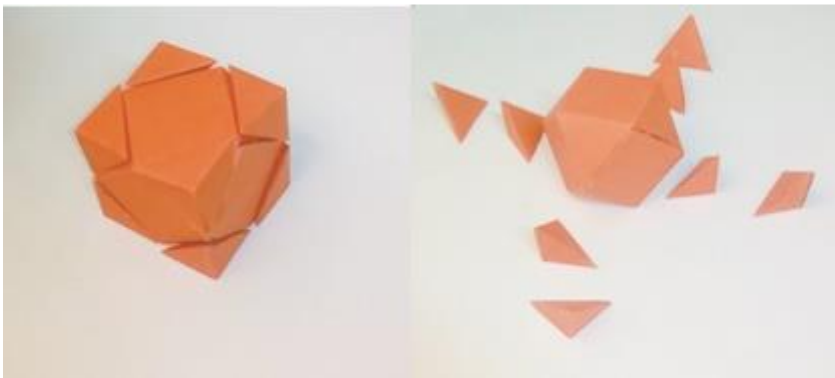


Foto do autor

Com a manipulação do objeto, esperamos que os grupos sejam capazes de resolver a questão proposta. A planificação utilizada para construir este material encontra-se no APÊNDICE 6.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais dispõem que:

> o ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam

> a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios (BRASIL, 1998, p. 26).

Assim, o trabalho em equipe, a abertura para argumentação e discussão de possibilidades e a etapa na qual os alunos não acessam nenhuma outra representação do sólido além da disposta na questão, elementos que compõem esta atividade, baseiam-se no que é proposto pelo documento oficial.

4.3 Situação de Aprendizagem 3: O nascimento da Topologia

Duração Prevista: 1 aulas

Habilidade e competências envolvidas:

- coletar, organizar e descrever dados, estabelecer relações entre acontecimentos e fazer previsões;
- identificar diferentes possibilidades na composição e decomposição de figuras tridimensionais;

Conteúdos: Poliedros, Relação de Euler generalizada para qualquer poliedro

Recursos didáticos utilizados: Lousa, material concreto, material impresso.

4.3.1 Atividade 1: Generalizações de Euler e introdução à Topologia das formas

Avançando no estudo do movimento lógico-histórico do conceito de poliedro, essa atividade visa desenvolver uma equação similar à Relação de Euler válida em poliedros não-convexos que possuem um túnel que atravessa seu interior, como alguns poliedros da figura 7. Em um poliedro desse tipo, com V vértices, F faces e A arestas, a equação que relaciona estes elementos é $V + F = A$. A atividade também visa explorar de maneira introdutória a generalização desta Relação para qualquer poliedro e o surgimento de uma nova área da Matemática, que assim como a Geometria, tem como objeto de estudo formas de objetos que compõem o espaço, porém como uma abordagem diferente.

Ao expor algumas ideias da área de Topologia, estudada usualmente apenas em cursos de Matemática de nível superior, deivulgamos uma área da Matemática na qual são realizadas inúmeras pesquisas atualmente e abrimos diversos caminhos ao aluno que deseja continuar seus estudos em Matemática.

Na primeira etapa da atividade será construída a equação que relaciona os números de vértices, arestas e faces em poliedros com um túnel. No desenvolvimento das atividades 2 da primeira situação de aprendizagem e 1 desta situação, os alunos foram orientados a escolher um entre diversos tipos de poliedros, entre os quais haviam poliedros com um túnel (figura 7). Nessa atividade estes sólidos serão retomados e uma nova tabela será elaborada, na qual constarão os números de arestas, vértices e faces destes poliedros.

Será então adicionada à esta tabela uma coluna com os valores da soma do número de vértices e faces destes poliedros, e comparada com a coluna na qual estão os números de arestas. Novamente desejamos que o aluno note a relação entre estes números.

Feito isso, com o auxílio dos alunos e em linguagem acessível a eles, o professor deve construir a equação, similar à Relação de Euler, que relaciona os números de faces, arestas e vértices de poliedros com um túnel. Acreditamos que essa atividade torna-se interessante ao retomar os poliedros com túneis, já utilizados no início desta sequência e incluí-los no estudo de poliedros. Em geral o estudo de poliedros em livros didáticos limita-se apenas ao estudo de poliedros convexos. Ao explorar outros tipos de poliedros, essa atividade "comporta um amplo campo de relações, regularidades e coerências que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico" (BRASIL, 1998, p. 24).

Na segunda etapa desta atividade visamos explorar introdutoriamente algumas ideias da Topologia. Após falar do contexto histórico do século XX, no qual os estudos de Matemática se transformaram vertiginosamente, diversos resultados foram generalizados e novas áreas surgiram, o professor deve falar da Topologia, uma dessas áreas que foram criadas nessa época. Enquanto na Geometria é crucial que os objetos de estudo sejam rígidos, pois só assim é possível medir ângulos, comprimentos, deduzir congruências, calcular áreas, volumes, contabilizar vértices, arestas, faces e estudar outras configurações dos objetos, na Topologia esta rigidez é deixada de lado a fim de estudar outras características, intrínsecas ao objeto e independentes da forma.

Serão então expostas em material concreto dois exemplos das principais formas estudadas em Topologia: a esfera e o toro (figura 11). Os alunos devem manipular os objetos, explorando a visualização, conforme os termos de Almouloud (1998). Após a visualização, o professor abordará introdutoriamente o Teorema de Classificação das Superfícies, explorando os materiais utilizados nessa sequência de situações de aprendizagem e a ideia de inflar estes objetos. Ao serem inflados, poliedros sem túneis transformam-se em esferas, enquanto os poliedros com um túnel transformam-se em toros.

Para encerrar, será constatado que as equações que relacionam os vértices, arestas e faces dos poliedros podem ser generalizadas para os objetos estudados em Topologia. Deve-se desenhar uma partição qualquer na esfera, e comprovar empiricamente que ao considerar o número de linhas desta partição como arestas, o número de regiões como faces e o número de intersecções das linhas como vértices, estes elementos obedecem a Relação de Euler. Analogamente, no toro qualquer partição obedece a relação estudada na outra etapa desta atividade.

Figura 11 - Objetos utilizados para exemplificar as formas da esfera e do toro.

Foto do autor.

Serão citados os matemáticos Henri Poincaré e Bernhard Riemann, que desenvolveram grande parte dos estudos que serviram de base para estes resultados nessa importante e atual área da Matemática. Estudar os objetos descartando a ideia de rigidez gerou diversos resultados que são muito utilizados no desenvolvimento de tecnologias, na meteorologia, entre outras. Os alunos poderão fazer perguntas sobre o assunto e encerra-se a sequência didática com um momento de conversa sobre os principais conhecimentos abordados, esclarecimento de dúvidas e compartilhamento de sensações que foram percebidas no desenvolvimento das aulas sobre poliedros.

5 ANÁLISES POSTERIORES DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Após a elaboração da sequência de situações de aprendizagem descrita no capítulo 4, esta sequência foi desevolvida em uma turma de alunos do nono ano do Ensino Fundamental. Neste capítulo faremos uma análise qualitativa dos materiais produzidos, dos momentos considerados relevantes e dos resultados obtidos durante a aplicação da sequência.

A turma escolhida tem como professora de Matemática a prof. Nádia Stevanato. Esta professora me cedeu dez aulas, no final do semestre letivo, para a aplicação da sequência didática. O número de alunos presentes variou muito e apenas uma parcela da turma participou de todas as situações de aprendizagem que compõem a sequência didática proposta neste trabalho. Todavia, essa participação discreta não gerou grandes conflitos no desenvolvimento da sequência, pois as situações não são completamente conexas e nenhuma delas constitui pré-requisito para as posteriores.

Todas as situações de aprendizagem propostas deveriam ser realizadas em duplas ou grupos. De acordo com a Teoria Sócio-interacionista de Vygotsky, os processos pelos quais o indivíduo adquire informações, habilidades, atitudes, valores e outros componentes do seu desenvolvimento, estão fortemente ligados às relações desse indivíduo com seu ambiente sociocultural e à sua situação de organismo que não se desenvolve plenamente sem o suporte de outros indivíduos (OLIVEIRA, 1993). Durante a aplicação, este método de trabalho mostrou-se muito eficiente, pois facilitou a socialização dos conhecimentos prévios dos alunos, que juntos puderam recordar diversos tópicos de Geometria. Além disso, notamos que a realização das atividades de maneira coletiva auxiliou o compartilhamento dos conhecimentos gerados durante o desenvolvimento das situações. Alguns alunos, ao compreenderem os assuntos abordados, passaram a dialogar sobre estes assuntos, auxiliando os outros alunos a compreenderem e fortalecendo a própria assimilação dos novos conhecimentos.

A aplicação da sequência de situações durou duas semanas e ocupou as dez horas-aula cedidas pela professora da turma. Essa duração mostrou-se eficiente ao proporcionar aos alunos tempo necessário para assimilação e compreensão das transformações pelas quais o conceito de poliedro passou na história do conhecimento humano e na história da Matemática.

A utilização de materiais concretos mostrou-se de extrema importância no desenvolvimento das situações de aprendizagem propostas, pois sem a possibilidade de manipulação e visualização dos objetos tridimensionais, os objetivos das situações de aprendizagem certamente não seriam atingidos. Conforme Almouloud (1998) uma boa sequência didática para o ensino de conceitos geométricos deve conter “figuras geométricas que tenham um papel heurístico, levando em conta suas diferentes apreensões: perceptiva, discursiva, operatória e sequencial". (ALMOULOUD, 1998, p.131). Concordamos com o autor e consideramos que neste trabalho tais materiais são indispensáveis. Os objetos elaborados para a sequência de situações de aprendizagem que elaboramos contribuíram notavelmente para a construção dos conhecimentos acerca da forma, da composição e da reconfiguração dos sólidos estudados.

5.1 Análise da situação de aprendizagem 1: Poliedros em registros gregos

5.1.1 Atividade 1: O dodecaedro do zodíaco

Os alunos demonstraram interesse na realização desta atividade. Após ouvirem com atenção a introdução ao assunto, propus que formassem grupos para a construção do dodecaedro do zodíaco. Eles moveram suas carteiras e formaram cinco grupos. Cada aluno recebeu uma planificação impressa do objeto (APÊNDICE 1), tesoura e cola.

A primeira orientação foi que recortassem a planificação. Em seguida, iniciei a construção de um objeto junto com os alunos, visando exemplificar as etapas de construção. Coloquei-me à disposição dizendo que poderia ser solicitado por qualquer aluno que necessitasse de alguma informação. Durante a construção do sólido notei que muitos alunos falavam sobre seu signo no zodíaco ocidental e perguntavam aos colegas se eles sabiam seus signos. A ligação entre a atividade e a Astrologia mostrou-se bastante eficiente para despertar o interesse dos alunos e também para integrá-los no grupo, evidenciando suas semelhanças e diferenças. Consideramos, com perspectiva sociocultural do processo de ensino-aprendizagem, que as interações sociais possibilitam ao indivídio assimilar as formas culturalmente aceitas de funcionamento psicológico, conforme Oliveira (1993). A figura 12 mostra alguns grupos de alunos realizando o recorte da planificação do dodecaedro do zodíaco durante a aplicação desta atividade.

Ao lado da planificação do dodecaedro estava disponível uma tabela com os elementos associados a cada signo do zodíaco (APÊNDICE 1). Um grupo de alunas, muito próximas e amigas, perceberam que todas eram de signos regidos pelo elemento fogo e ficaram animadas com a informação, que aparentemente as aproximou ainda mais. Em vários grupos os alunos teceram comentários acerca dessas informações, aproveitei o ensejo para comentar sobre a obra de Platão e as associações que ele fazia entre sólidos geométricos e os quatro elementos

Figura 12 - Grupos de alunos realizam a construção do dodecaedro do zodíaco e socializam seus conhecimentos sobre Astrologia.

Foto do autor

da natureza, assim como comentar que a fala de Platão é vista por muitos como a primeira visão de um modelo atômico da matéria. Os alunos, todavia, não estudaram os conteúdos relacionados ao átomo e esse comentário figurou como uma curiosidade sobre um assunto que estudarão posteriormente.

Alguns alunos não sabiam seu signo e demonstraram grande interesse em saber. Foi então distribuída a folha na qual constam os períodos do ano associados a cada signo (APÊNDICE 2), e esses alunos puderam descobrir seus signos a partir de suas datas de nascimento. Enquanto alguns alunos continuaram a construção do sólido, alguns pararam para ler as informações que constavam na folha. Os alunos estavam bastante descontraídos enquanto construíam os sólidos, o que auxiliou no caráter lúdico proposto pela atividade.

Apesar do conteúdo de planificação e construção de poliedros ser conteúdo dos anos finais do Ensino Fundamental, conforme os Parâmetros Curriculares (BRASIL, 1998), muitos alunos declararam nunca ter realizado alguma atividade similar à esta. Questionei sobre a construção do cubo, pois essa em geral é realizada no primeiro ciclo do Ensino Fundamental, e a turma ficou dividida entre os que conheciam tal construção e os que declararam nunca ter tido contato com planificações de figuras sólidas. Acreditamos que o ensino de Geometria Espacial pautado apenas em conteúdos teóricos, sem objetos manipuláveis ou situações que envolvem a construção de sólidos, dificultam a assimilação dos conceitos envolvidos. Sem a possibilidade de visualizar tais formas o aluno será impossibilitado de criar registros mentais que possibilitam operar estas formas, habilidade esta que deve ser desenvolvida na escola básica.

Construídos os sólidos, os alunos passaram a inventar situações lúdicas com os objetos. Muitos alunos lançavam o dodecaedro como se lança um dado e verificavam qual face ficava voltada para cima. Um aluno disse que o signo associado à tal face era o signo do amor da vida de quem arremessou e logo vários alunos estavam utilizando o objeto como um oráculo amoroso. Aproveitei para comentar sobre a astronomia grega, os conhecimentos que possuíam e as relações entre o desenvolvimento desta ciência e a astrologia atual. Foi exibida a imagem (FIGURA 7) que ilustra o movimento aparente do sol através da eclíptica e seu deslocamento pelas doze constelações do zodíaco em determinadas épocas do ano.

A conexão de áreas de conhecimento científico com um elemento da cultura popular, a astrologia, provocou muito interesse nos alunos, que demonstraram atenção e

Figura 13 - Objetos construídos por dois alunos durante a atividade.

Foto do autor

participação ativa nas conversas realizadas durante esta atividade. Uma aluna demonstrou enorme satisfação em saber por que cada época do ano é associada à um signo, e um grupo ficou muito curioso acerca da astronomia desenvolvida pelos gregos, questionando se estes possuíam tecnologia que permitiam tais conhecimentos, como telescópios e lunetas. Ao saberem que os gregos desenvolveram muito destes conhecimentos com base em observações a olho nu e em experimentos empíricos, demonstraram grande admiração e certo espanto. No final da atividade foi disposto um tempo para que os alunos continuassem a interação lúdica com o objeto construído. Fiquei disponível para eventuais dúvidas, mas nenhum aluno manifestou nenhuma incerteza. A figura 13 mostra os objetos construídos por dois alunos durante a realização da atividade.

5.1.2 Atividade 2: A busca de uma definição

A segunda atividade da situação de aprendizagem 1 da sequência didática elaborada neste trabalho envolve a concepção do que é uma definição na Matemática. Essa atividade deve ser realizada em dupla. Adotando a perspectiva sociocultural do processo de ensino-aprendizagem, visamos potencializar a eficácia da atividade possibilitando diálogos entre os alunos. Após escolherem seus parceiros, cada dupla foi orientada a selecionar um objeto entre os sólidos geométricos dispostos, ilustrados na figura 8. Foi interessante observar os critérios que cada dupla utilizou para selecionar o objeto. Alguns escolheram aleatoriamente, outros analisaram todos os objetos minuciosamente e escolheram o que mais atraiu a ambos. Uma dupla escolheu o cubo e alegou que este sólido era o único que conheciam pelo nome.

Feita a escolha dos objetos, a dupla recebeu uma folha que propunha definir o objeto escolhido e representá-lo com um desenho (APÊNDICE 4). Li em voz alta a proposta do material impresso e conversei com a turma visando esclarecer a proposta da situação de aprendizagem. Os alunos afirmaram ter compreendido a tarefa a ser realizada e puseram-se a trabalhar, analisando o objeto e discutindo as ideias que surgiam com os companheiros de trabalho. A figura 14 mostra duas duplas trocando informações e desenvolvendo a atividade em conjunto.

Após algum tempo fui solicitado para esclarecer algumas questões. Os alunos resgataram em suas memórias os nomes dos componentes dos sólidos conforme a definição de Euler e questionaram se poderiam definir o objeto a partir do número de vértices, arestas e faces. Foi a primeira vez que esses elementos surgiram na sequência didática, e esse fato era esperado pelo professor, pois conforme descrito no capítulo anterior um dos objetivos desta atividade é reconhecer os conhecimentos prévios dos alunos e estabelecer elos entre estes conhecimentos e os que serão trabalhados em momentos posteriores.

Figura 14 - Duas duplas de alunos realizam a atividade em conjunto.

Foto do autor.

As estratégias criadas pelos alunos para definir os objetos foram basicamente partir do número de vértices, arestas e faces e das formas geométricas de cada face. Todos os alunos da turma demonstraram estar familiarizados com figuras geométricas planas, e conseguiram identificar nos sólidos faces triangulares, quadradas, hexagonais, entre outras. A figura 15 estão o objeto selecionado, a definição e a ilustração elaboradas por uma dupla de alunos. Nota-se indícios de familiaridade com a nomenclatura de figuras planas e com alguns componentes dos poliedros, como faces e vértices. A dupla reconhece o vértice como um ponto, mas enuncia de maneira confusa a definição, sem mencionar as arestas e reconhecendo apenas o vértice como interseção das faces.

Figura 15 - Ilustração e definição do objeto do canto superior esquerdo feitos por uma dupla de alunos.

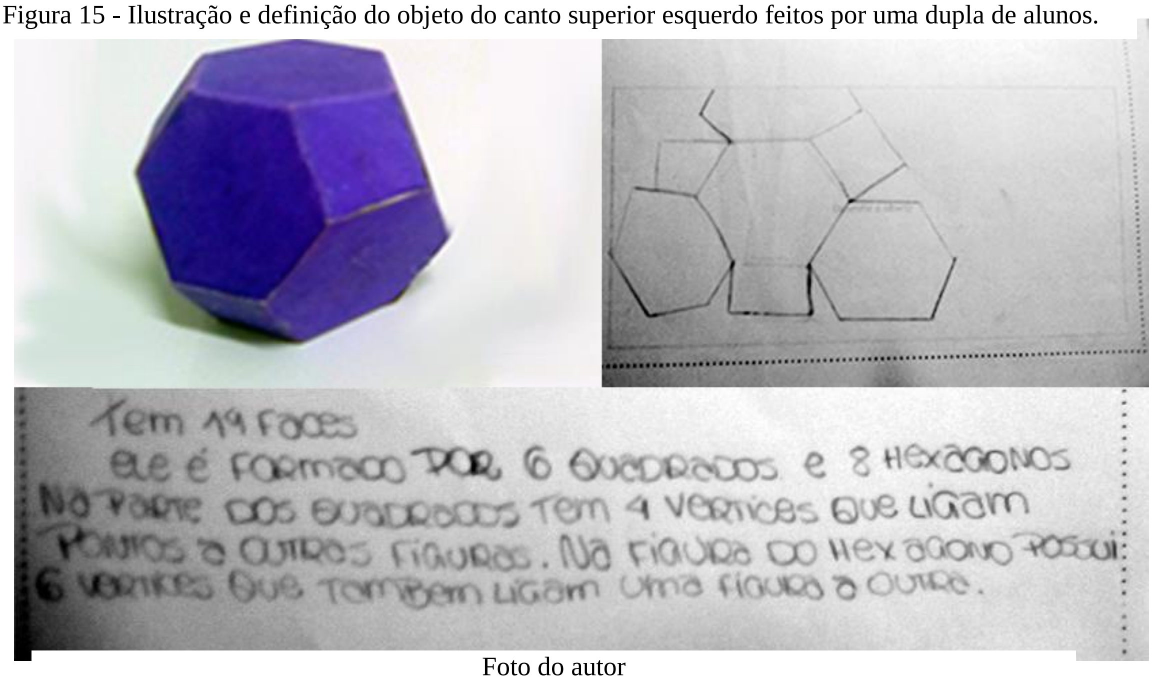


Foto do autor

Alguns alunos confundiram figuras bidimensionais e tridimensionais, revelando ausência da habilidade de reconhecer as diferenças entre os dois tipos de figuras geométricas, como nota-se, por exemplo, na figura 16, na qual constam o sólido geométrico escolhido, a definição e a ilustração elaboradas por uma das duplas. O sólido é chamado de figura plana com cinco lados fechados por retas e um lado aberto. O professor não interferiu nas definições que os alunos elaboraram durante a atividade, e solicitou apenas que todos redigissem a definição do objeto de maneira concisa. Dessa forma, foi possível identificar as principais confusões conceituais feitas pelos alunos e tecer comentários na próxima etapa da atividade.

Figura 16 - Ilustração e definição do objeto do canto superior esquerdo feitos por uma dupla de alunos.

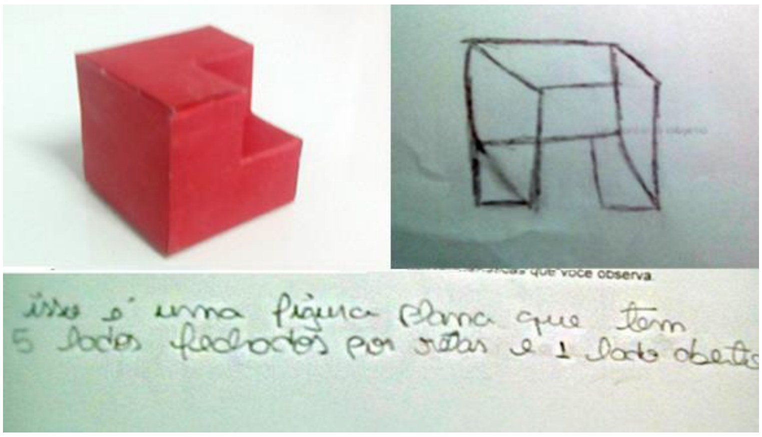


Foto do autor

Um aluno definiu o icosaedro como vinte triângulos idênticos, demonstrando certa falta de familiaridade com os componentes do poliedro e com sua forma tridimensional. Uma outra dupla demonstrou grande habilidade para representar sólidos geométricos, desenhando a vista superior e lateral da pirâmide pentagonal. A dupla também mostra familiaridade com os sólidos piramidais, pois aponta de maneira correta a base do sólido. Porém não demonstram conhecer o nome do sólido, e chamam suas faces de áreas, possivelmente por conta de certa confusão entre as figuras planas em si e a área de uma figura plana, conceitos já trabalhados em anos anteriores do ensino fundamental. Essa definição pode ser observada na figura 17.

Os alunos ocuparam uma aula de cinquenta minutos para concluírem as definições. Analisei os trabalhos fora da sala e no dia seguinte dei continuidade à atividade, iniciando com um discurso sobre Euclides de Alexandria e seu livro Os Elementos (EUCLIDES, 2009), considerado o registro mais antigo de definições de figuras geométricas existente no mundo. Foram lidas as definições elaboradas pelo matemático grego conforme disposto na elaboração da situação de aprendizagem 2, e em seguida registrei no quadro os nomes dos sólidos de Platão e a quantidade de faces que cada um possui.

Conversei com os alunos sobre o conceito de definição na Matemática, que deve ser concisa e não deixar espaço para ambiguidades. Redigi no quadro a definição dada por Euclides para um sólido geométrico, que para o grego é um objeto com altura, largura e profundidade, e em seguida realizou-se um pequeno debate sobre a concisão das definições de Euclides. Os alunos puderam consultar o livro Os Elementos e observar suas características ludicamente.

Figura 17 - Definição e ilustração da pirâmide com base pentagonal feita por uma dupla de alunos.

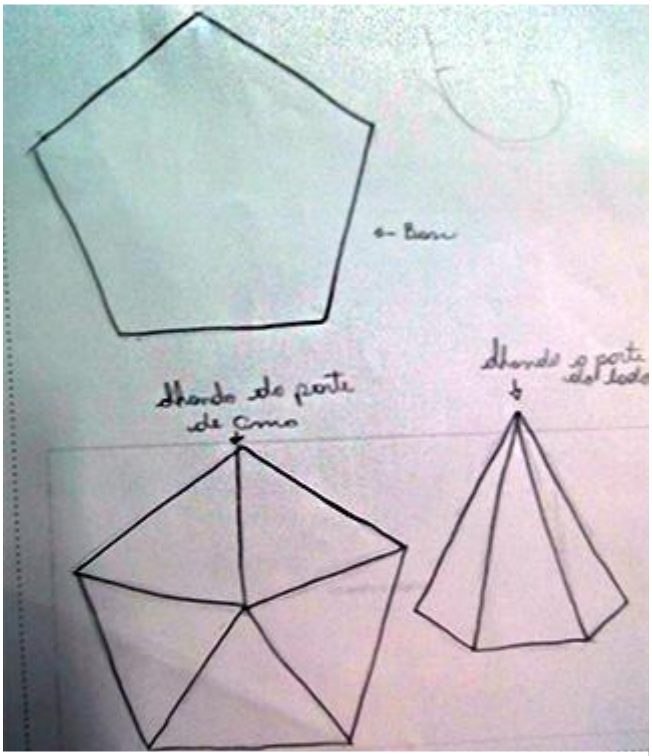


Foto do autor

Comentei que muitos alunos da turma demonstraram, em seus registros escritos na aula passada, confusão conceitual em relação aos sólidos geométricos e às figuras planas, sendo apontada como diferença primordial entre esses dois tipos de figuras geométricas a existência de profundidade nos sólidos, enquanto nas figuras planas existem apenas largura e altura. Os alunos afirmaram ter compreendido a diferença. Os registros do quadro podem ser observados na figura 18.

Aproveitou-se o momento de esclarecer as diferenças entre sólidos geométricos e figuras planas para comentar sobre as diferenças de nomenclaturas entre seus componentes. Enquanto a figura plana possui lados, o sólido possui faces. Essa confusão foi notada na análise das definições produzidas pelos alunos na aula anterior.

Figura 18 - Registros feitos durante a atividade

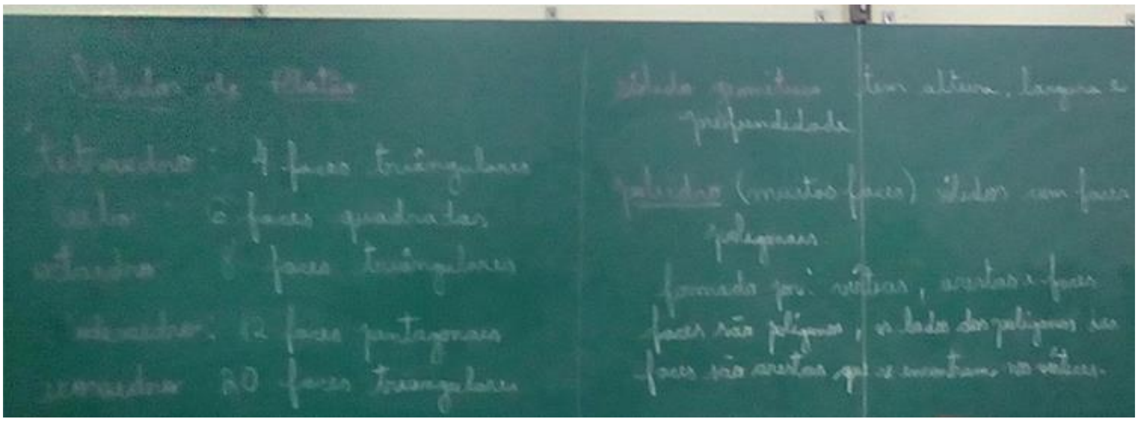


Foto do autor

Para finalizar, elaboramos uma definição para os sólidos estudados na situação de aprendizagem. Ao questionar se os alunos notaram alguma semelhança entre todos eles, nenhum aluno respondeu que a semelhança entre os sólidos estudados na presente situação é que todos são formados por faces poligonais, diferentes do cilindro e da esfera, por exemplo. Após mostrar essa semelhança, falei que os sólidos que possuem tal característica são chamados de poliedros, nome dado por matemáticos gregos da época de Euclides, e em conjunto com a turma elaboramos a seguinte definição: *Poliedros (muitas faces): sólidos com faces poligonais, formados por vértices, arestas e faces. As faces são polígonos, os lados dos polígonos das faces são as arestas que se encontram nos vértices*.

Não aprofundei a concisão desta definição por receio de possível confusão conceitual devido à informação em excesso, visto que os alunos estavam diferenciando pela primeira vez poliedros de outros sólidos geométricos.

5.2 Análise da situação de aprendizagem 2: Os poliedros a partir das definições de Leonhard Euler

5.2.1 Atividade 1: Vértices, Arestas e Faces.

Antes de iniciar a situação de aprendizagem 2 foi realizada uma conversa com o objetivo de melhor situar em qual período histórico se desenvolveram os estudos de Platão, Euclides e Euler. Os alunos declararam já ter estudado a cultura grega em História, porém não se lembravam muito bem. Foram então tecidos comentários gerais sobre esta cultura com foco na relação que os gregos possuíam com o conhecimento e como estes foram os primeiros seres humanos a investirem em locais de criação, propagação e transformação de conhecimentos científicos.

Em relação aos sólidos geométricos, os estudos dos gregos ocupam-se basicamente em medir distâncias entre dois pontos do sólido, medir determinados ângulos, calcular áreas e volumes e estabelecer relações métricas entre diferentes sólidos. Muitos declararam ter dificuldades no assunto, mas se recordam de ter estudado áreas e volumes nos prismas no final do ano anterior. Foi então contextualizado que todos as abordagens de sólidos geométricos que envolvem medidas, cálculo de áreas, volumes e ângulos tem como base os conhecimentos geométricos desenvolvidos pelos gregos.

Para destacar quão importantes e avançados eram os estudos dos gregos, o professor falou sobre os poliedros que aparecem na obra de Platão, que foram estudados nas aulas anteriores. Definiu oralmente que poliedros que possuem como faces um único tipo de polígono regular, ou seja, um polígono cujos lados possuem o mesmo tamanho, são chamados de poliedros regulares, e relembrou que Platão conhecia cinco destes poliedros. Feito isso, perguntou aos alunos quantos poliedros regulares eles acreditavam existir. A resposta mais aproximada foi *em torno de cem*, e todos ficaram surpresos ao ouvir que existiam apenas estes cinco que Platão cita em sua obra. Euclides demonstrou que existem apenas estes cinco em seu livro Os Elementos (EUCLIDES, 2009) e outras demonstrações vieram posteriormente.

Em outro período histórico, em outro contexto cultural, os estudos que abordam os sólidos como um conjunto de vértices, arestas e faces foram desenvolvidos pelo matemático Leonhard Euler, que nasceu na Suíça em 1707. Comentou-se, neste momento, sobre alguns aspectos da vida deste matemático, a mudança para a Rússia, sua importância na matemática, a perda da visão, sua relação com os Grandes Imperadores e, com maior foco, seus dois artigos sobre poliedros que transformaram completamente os estudos destes objetos na Matemática. Foi exibida uma foto do matemático que nomeou os componentes dos poliedros conforme os alunos declararam conhecê-los: vértices, arestas e faces.

Um dos resultados demonstrados por Euler sobre os poliedros é a equação que relaciona a quantidade de vértices, arestas e faces do sólido, abordada nesta situação de aprendizagem. Para iniciá-la, solicitei aos alunos que formassem duplas e novamente selecionassem um poliedro entre os disponíveis, os quais podem ser vistos na figura 7.

Feita a seleção, cada dupla deve contar a quantidade de vértices, arestas e faces que o poliedro possui e anotar no caderno. Foi interessante observar que durante a contagem, alguns alunos tiveram a possibilidade de solidificar os conhecimentos acerca destes componentes, pois ao iniciá-la faziam certa confusão conceitual, confundindo arestas com faces, por exemplo, e ao final declararam ter entendido melhor estas nomenclaturas e foram capazes de relacioná-las com os componentes de maneira correta. Esse momento da atividade pode ser observado na figura 19.

Figura 19 - Aluno investiga o número de vértices, arestas e faces de um poliedro.

Foto do autor

A falta de equipamento me obrigou a fazer uma mudança na forma de realizar a atividade. A tabela que seria construída com a utilização do software Microsoft Excel teve que ser construída no quadro, pois a escola não dispunha de um projetor multimídia funcionando no dia da realização da aula. Desenhei a tabela no quadro e, em seguida, fui anotando nas respectivas colunas o número de vértices, arestas e faces dos poliedros analisados pelos alunos. Identifiquei pelo nome apenas os poliedros de Platão, cujos nomes foram estudados na aula anterior. Após tabelar todos os valores encontrados pelos alunos, comentei que Leonhard Euler notou que os números de vértices e faces, quando somados, possuem uma relação com o número de arestas do sólido. Para auxiliar na percepção de tal relação, acrescentei à tabela uma coluna na qual listou os valores desta soma, como pode ser visto na figura 20. Note que alguns valores encontrados pelos alunos não estão corretos. Interferi conforme necessitava do valor da soma do número de vértices e faces destes poliedros, solicitando aos alunos que conferissem os resultados.

Construída a coluna, os alunos foram orientados a observar os valores obtidos e os comparar os valores da coluna $Vértices + Faces$ com os valores da coluna $Arestas$. Após

Figura 20 - Tabela com as informações dos sólidos obtidas pelos alunos

Foto do autor

algum tempo, uma aluna afirmou que o valor da soma era sempre dois números a mais que o de arestas, conforme o esperado.

Foi então registrado no quadro:

$$Relação\ de\ Euler: Em\ um\ poliedro\ com\ V\ vértices, A\ arestas\ e\ F\ faces, que\ não\ possui\ túneis, vale\ a\ equação\ V + F = A + 2.$$

Retornando ao debate sobre o matemático autor da relação, comentei que o artigo no qual ele demonstrou a relação foi de grande impacto na Geometria, pois, conforme dito no início da aula, Euler inovou ao conceber os poliedros de maneira distinta da concepção grega destes objetos.

Os estudos posteriores acerca destes objetos basearam-se nas ideias de Euler e culminaram no surgimento de uma maneira completamente nova de conceber as formas em uma nova área da Matemática, a Topologia. Algumas ideias da Topologia serão abordadas ao final desta sequência didática.

Também foram tecidos comentários sobre o que é uma demonstração matemática, que foi interpretada por mim como uma prova de que tal fato sempre ocorre, utilizando a lógica. Foi exibido o material que exemplifica as ideias utilizadas por Euler para demonstrar que sua relação sempre é válida e os alunos puderam manipular este objeto, conforme pode ser observado na figura 21.

Ao dispor o material para observação e manipulação, comentei que a demonstração de Euler possuía falhas e que a relação estudada na aula foi demonstrada muitos anos depois pelo matemático Henry Poincaré, com a utilização de outra linguagem e raciocínio. Em seguida, abri espaço para eventuais comentários e dúvidas, porém nenhum aluno expôs dúvida.

Figura 21 - Aluno manipula material concreto que exemplifica o raciocínio utilizado por Euler para demonstrar a relação entre os vértices, arestas e faces de um poliedro.

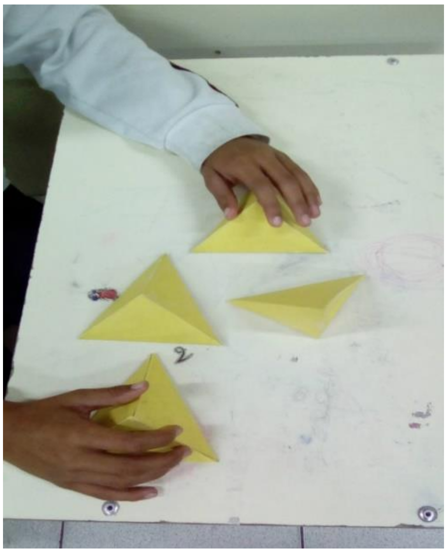


Foto do autor

5.2.2 Atividade 2: Convertendo diferentes representações matemáticas

Nesta atividade os alunos tiveram contato com a representação matemática dos sólidos geométricos com o objetivo de transitar da representação concreta para estas representações, que em geral são utilizadas ao se fazer um tratamento formal da geometria espacial.

Os alunos foram orientados a formarem duplas e cada dupla recebeu em material impresso (APÊNDICE 4) três questões retiradas das avaliações SARESP, aplicadas pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo para diagnosticar a aquisição de determinadas habilidades pelos alunos da escola básica.

As questões possuem as representações matemáticas dos sólidos envolvidos. Na primeira questão os alunos devem responder quantos vértices possui uma pirâmide de base hexagonal a partir da observação desta representação. Na segunda, os alunos devem responder quantas arestas possui o prisma pentagonal que está representado matematicamente na questão. Os alunos devem discutir com o colega de dupla e tentar resolver as questões utilizando as representações dispostas pelas questões.

Após certo tempo, observei que alguns alunos conseguiram resolvê-las, porém grande parte da turma estava com dificuldades para contar as arestas do prisma pentagonal, demonstrando falta de familiaridade com a representação pontilhada das arestas que se encontram ocultas pela posição do sólido na imagem.

Com meu auxílio e recorrendo aos modelos em material concreto dos sólidos, toda a turma pode concluir as resoluções das duas primeiras questões. Conforme Almouloud (1998), em um curso que mobilize distintas formas de representação, a coordenação destes diferentes registros não se dá espontaneamente pelo aluno. O professor deve auxiliar os alunos a perceber que são diferentes maneiras de se representar o mesmo objeto.

Os alunos foram orientados a comparar as representações em material concreto com as representações matemáticas ilustradas nas questões com o objetivo de assimilar as características de cada tipo de representação. Na figura 22 pode-se observar uma dupla de alunos comparando os materiais concretos e suas representações matemáticas no material impresso.

Figura 22 - Dupla de alunos comparam as representações dos sólidos em material concreto com as representações ilustradas nas questões.

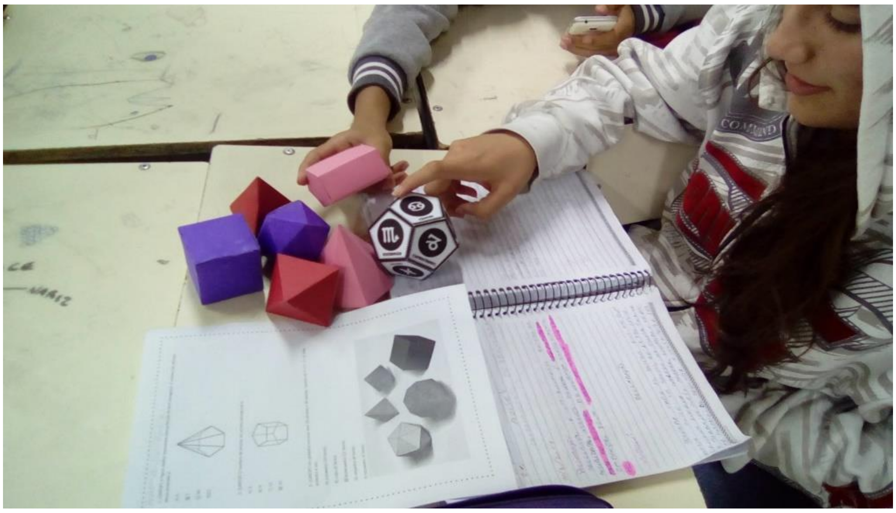


Foto do autor

A terceira questão consiste em descobrir qual poliedro regular possui 20 vértices e 30 arestas. A questão sugere que seja utilizada a Relação de Euler e a resposta pode ser obtida a partir da substituição dos valores dados pela questão na Relação. Porém nenhum aluno cogitou resolver a questão dessa forma, pois na resolução das primeiras questões tinham que contar os componentes dos poliedros e intuitivamente iniciaram tentando resolver a terceira questão da mesma forma. Todos os alunos contaram os vértices e arestas nas imagens, e poucos necessitaram das representações em material concreto para resolver a terceira questão. Muitos utilizaram a Relação de Euler para conferir se o resultado estava correto, concluindo com segurança que o poliedro em questão é o dodecaedro.

Sem demonstrar grandes dificuldades todos concluíram a resolução das questões e puderam manipular os objetos ludicamente e compará-los com as representações matemáticas ilustradas no material impresso. Alguns alunos, em conversa posterior à realização da atividade, declararam que o material concreto auxiliou muito na compreensão das representações matemáticas impressas e na resolução da questão.

5.2.3 Atividade 3

No início desta atividade aludi aos cortes que Euler propôs como base da demonstração de sua Relação e anunciei que nesta aula iam trabalhar com ideias semelhantes para resolver uma questão da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP. Os alunos demonstraram grande interesse em participar da situação de aprendizagem, evidenciando que a realização da Olimpíada nas escolas públicas é de grande importância e desperta nos alunos maior interesse pela Matemática.

Eles foram então informados que a questão deveria ser resolvida em grupos e formaram cinco grupos com quatro ou cinco alunos cada. Cada grupo recebeu a questão em material impresso (APÊNDICE 5) e pode iniciar discussões com o objetivo de compreendê-la. Coloquei-me à disposição para auxiliar no que fosse necessário. Passado algum tempo, os alunos começaram a solicitar ajuda. Notei então que todos compreenderam a maneira que João cortou o cubo, mas tinham muita dificuldade para visualizar o sólido obtido.

A existência desta dificuldade revela que os alunos não desenvolveram as habilidades relativas às interpretações operatórias de uma figura geométrica espacial, ou seja, não são capazes de processar mentalmente as modificações, nesse caso específico uma modificação mereológica, conforme Almouloud (1998), sofridas pelos objetos e visualizar o resultado desta modificação.

Após certo tempo todos os alunos estavam exaustos e não conseguiam obter respostas para as questões. Alguns grupos passaram então a inventar resultados aleatórios. Foi interessante notar que embora não conseguissem visualizar o sólido obtido por João para obter os números de vértices, arestas e faces desse sólido, todos os alunos sabiam que os números de vértices, arestas e faces desse sólido necessariamente deveriam satisfazer a Relação de Euler. Dessa maneira, muitos concluíam que as respostas que deram não estavam corretas pois não satisfaziam tal Relação.

Disponibilizei para consulta o material concreto que permite visualizar a transformação do cubo realizada por João (figura 9). Todos os grupos manifestaram necessidade de manipular o material para resolver a questão ou para conferir se as respostas estavam corretas. Nenhum grupo havia respondido à questão corretamente até este momento e com o auxílio do material puderam contar com facilidade os números de arestas, vértices e faces do sólido após os cortes. Na figura 23 observa-se um grupo discutindo os resultados enquanto analisa o material concreto.

Figura 23 - Grupo de alunas discutem os resultados observando o material concreto.

Foto do autor

Muitos alunos passaram um tempo manipulando o material, o que certamente auxiliou na compreensão da operação mereológica que o sólido sofreu e trabalhou a forma de apreensão operatória, conforme Almouloud (1998). Trabalhar esta forma de apreensão era o objetivo principal desta situação de aprendizagem, e pode-se afirmar que este objetivo foi atingido. Na figura 24 pode-se observar um aluno manipulando ludicamente o material

Figura 24 - Aluno manipula o material concreto após utilizá-lo para resolver a questão.

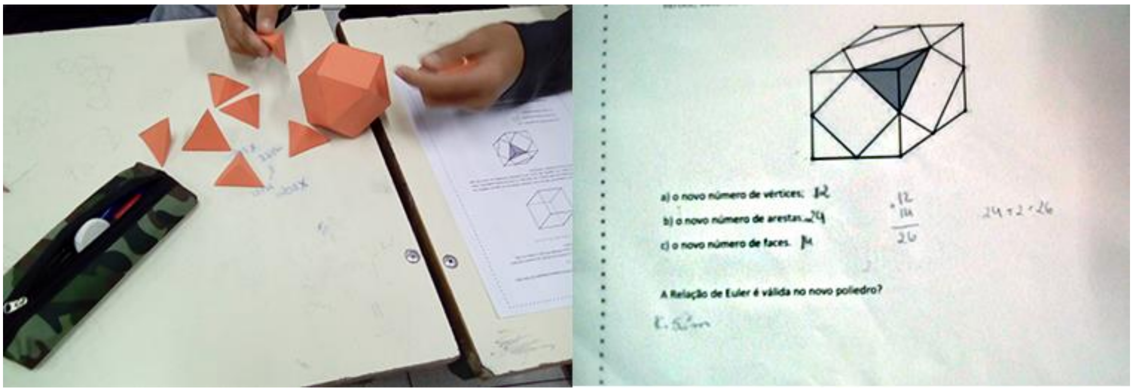


Foto do autor.

concreto, após a realização da situação de aprendizagem, e as respostas dadas à questão por um dos grupos de alunos.

5.3 Análise da situação de aprendizagem 3

5.3.1 Atividade 1

Esta foi a última atividade aplicada aos alunos da turma. Iniciei com uma revisão da aula anterior, na qual foi visto que em todo poliedro que não contém túneis é válida a Relação de Euler, que relaciona suas quantidades de vértices, faces e arestas.

A aplicação desta atividade ocorreu em uma véspera de feriado e isto acarretou em baixo número de alunos presentes. Optei então por formar um grande grupo e realizar a situação de atividade coletivamente, visando facilitar as trocas de informações e obter maior interação de todos os alunos presentes.

Propus aos alunos que analisassem os três poliedros que contém túneis disponíveis para estudo desde o início desta sequência didática e ilustrados na figura 25. Os alunos, em grupo, contaram as quantidades de vértices, arestas e faces dos poliedros e me auxiliaram na construção da tabela exibida na figura 26.

Figura 25 - Objetos utilizados na primeira etapa da atividade.

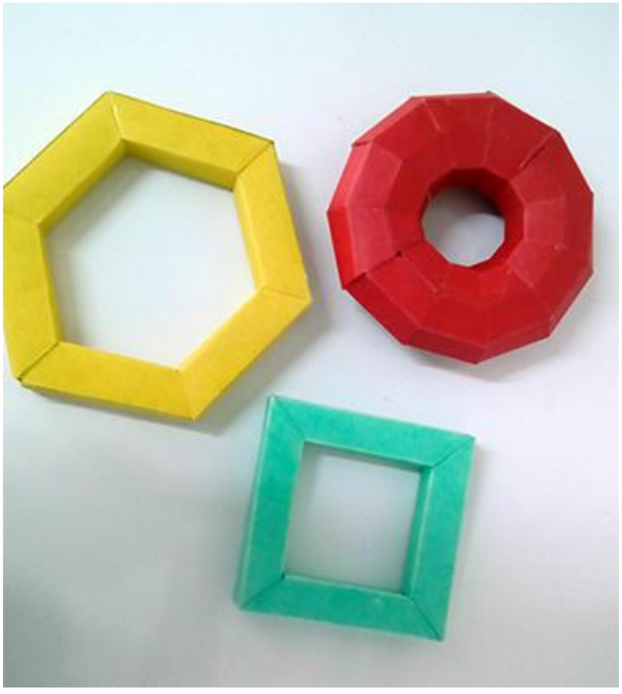


Foto do autor

Figura 26 - Tabela elaborada com os dados dos poliedros.

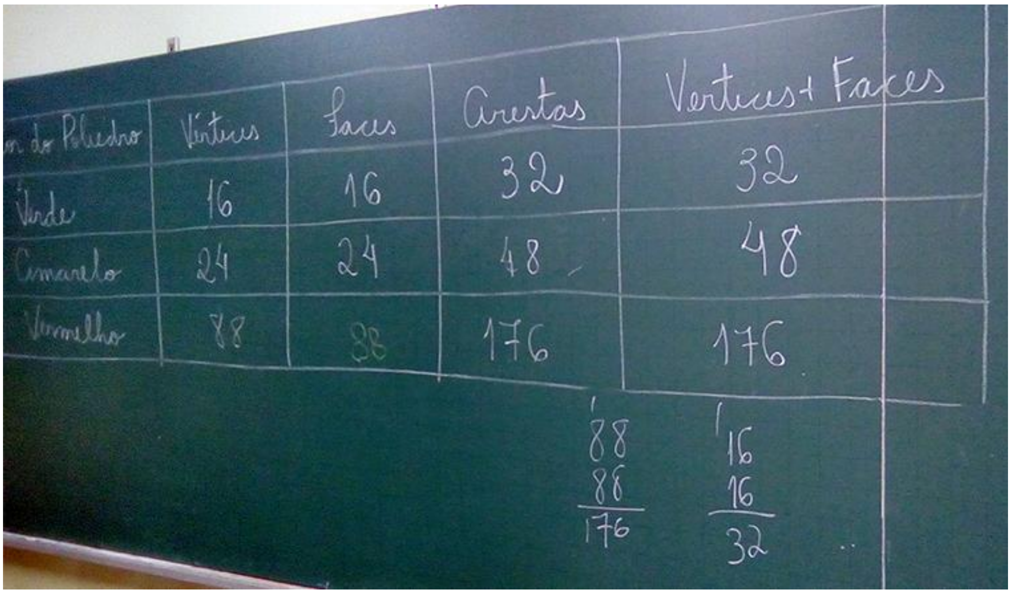


Foto do autor

Rapidamente um aluno notou que os valores da coluna Arestas eram iguais aos da coluna Vértices + Faces. Ao propor a generalização da Relação de Euler para os poliedros que contém um túnel, como os estudados em sala, uma aluna declarou: Se um poliedro possui um buraco vale a relação V + F = A. Todos concordaram com a aluna e esta generalização foi registrada no quadro, conforme a figura 26.

A notação "buraco" ou "túnel" está sendo utilizada apenas para tornar a linguagem acessível e não foi definida previamente. O objetivo da atividade é construir registros semióticos que auxiliem em uma compreensão crítica dos conceitos trabalhados, portando o termo utilizado não é de grande relevância neste momento.

Feita a generalização da Relação de Euler para poliedros com um túnel, falei que o matemático Henri Poincaré, no final do século XIX, generalizou a Relação de Euler para qualquer tipo de poliedro e mostra que, além de relacionar o número de vértices, arestas e faces do objeto com número de túneis que o poliedro possui. Poincaré concluiu neste artigo que se um poliedro com um número V de vértices, um número F de faces e um número A arestas possui um número g de túneis, vale a relação $V + F = A - 2g$.

Os estudos de Euler, continuados por Poincaré, marcaram o início dos estudos da área da Matemática chamada Topologia. Foi comentado sobre a maneira como a Topologia estuda os objetos considerando seus aspectos de maneira distinta da Geometria. Foi exibida, em seguida, uma animação da transformação de uma rosquinha em uma xícara, para ilustrar que na Topologia todos os objetos que contém um túnel são considerados equivalentes, pois é possível transformar um no outro sem necessitar de cortes ou colagens de pontos.

Foram expostos objetos com a forma da esfera e do toro (figura 10) para exemplificar alguns dos principais objetos de estudo da Topologia. Falei que as relações estudadas nas últimas aulas também eram válidas para estes objetos e todos ficaram curiosos, pois os objetos não possuem vértices, faces e arestas. Na figura 27 pode-se observar um aluno manipulando ludicamente o objeto que representa o toro, exibindo-o para a turma.

Figura 27 - Aluno exibe o objeto com forma de toro para a turma.

Foto: Wilson Lima

Expliquei que podemos particionar estes objetos, ou seja, dividir suas superfícies em partes traçando linhas. Foi solicitado aos alunos que, com um marcador permanente, realizassem essa divisão nos objetos da figura 11.

Feitas as partições, pode-se comprovar empiricamente que, se considerarmos o número de regiões como faces, o número de linhas que limitam essas regiões como arestas e o número de intersecções das linhas como vértices, a partição da esfera obedece a Relação de Euler para poliedros sem túneis e a partição do toro obedece a generalização da Relação de Euler para poliedros com um túnel.

Os alunos ficaram muito entusiasmados com os resultados, afirmando que nunca imaginaram que isso aconteceria. Foi generalizado oralmente que agora seria mais fácil recordar-se dos conteúdos aprendidos, pois basta imaginar que o poliedro estudado é inflado e observar em qual objeto ele se transforma. Se o objeto inflado for uma esfera, vale a Relação de Euler para o poliedro. Em contrapartida, se o objeto inflado for um toro, vale a Relação generalizada para poliedros com um túnel. Essa generalização oral visou introduzir os conceitos de homeomorfismo de superfícies e os resultados do Teorema de Classificação de Superfícies Compactas. Alguns alunos demonstraram grande satisfação e afirmaram ter aprendido o nome de uma nova forma: o toro.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho propõe uma sequência didática para o ensino de poliedros com a participação da História da Matemática sob uma perspectiva sociocultural. Baseando-se no materialismo dialético de Marx e na teoria sociointeracionista de Vygotsky, buscamos compreender a concepção de poliedros por indivíduos de diferentes culturas em diferentes momentos históricos e levar para a sala de aula situações de aprendizagem que possibilitem diálogos entre a cultura do ambiente escolar e as culturas nas quais os conhecimentos foram concebidos.

A exploração das transformações do conceito ao longo da história, ou ainda, a exploração do Movimento Lógico-Histórico do conceito, conforme Kopnin (1978), foi desenvolvida considerando os registros de representação semiótica e suas transformações no estudo de um conceito geométrico, conforme Almouloud (2010). Através do contato com diferentes maneiras de se representar um objeto geométrico possibilitamos ao aluno articular diferentes processos cognitivos que preenchem específicas funções epistemológicas relacionadas à compreensão do conceito de poliedro. À medida que os alunos realizavam as atividades propostas, habituaram-se a trabalhar com os diferentes registros e com suas transformações. Uma vez que iniciaram com representações concretas dos sólidos, criaram suas próprias representações, misturando registros distintos de forma a facilitar o entendimento, e puderam estudar outras representações, que envolvem maior capacidade de abstração, foi possível notar que esta abordagem auxiliou na compreensão dos conceitos abordado.

A exploração do Movimento Lógico-Histórico do conceito de poliedro mostrou-se adequada para tratar os assuntos relacionados ao conceito de poliedro. Através de uma abordagem que evidencia as transformações na maneira de se conceber um poliedro em diferentes épocas e por indivíduos de diferentes culturas, contextualizando historicamente e socialmente estes estudos, foi possível compreender a Matemática como ciência desenvolvida por seres humanos, passível de equívocos e em constante transformação.

A introdução dos conceitos topológicos e a verificação empírica de que as relações entre os componentes de um poliedro são válidas em determinadas partições da esfera e do toro particionados auxiliaram na compreensão dos conceitos trabalhados e despertaram nos alunos interesse pela Matemática científica. Durante a aplicação da sequência didática desenvolvida neste trabalho foi possível notar que a aproximação entre a Matemática científica e a Matemática escolar resultou em maior proximidade entre a o aluno e a ciência.

Durante a experimentação desta sequência didática, foi possível observar diversos aspectos relevantes. A abordagem do conceito de poliedro no período da Grécia Antiga pode ser ampliada com outras situações de ensino-aprendizagem, pois diversos resultados relacionados aos sólidos geométricos dessa época compõem o currículo de Matemática atual, como o cálculo de áreas e volumes de determinados sólidos, por exemplo.A incompletude pode ser vista como uma característica muito interessante do conhecimento. Sendo o conhecimento infinito, sempre é possível ir além. Partindo desta premissa, este trabalho abre possibilidades para novas pesquisas, dentre elas algumas que podem ser aqui consideradas:

- É possível explorar outros conceitos geométricos do currículo em uma perspectiva sociocultural, articulada com pesquisas atuais em matemática, através da análise do movimento lógico-histórico do conceito?
- A sequência didática aqui proposta pode ser ampliada e desenvolvido com alunos do ensino médio?

De um ponto de vista mais particular, considero que o desenvolvimento deste trabalho consistiu em uma etapa importante de minha vida profissional, pois possibilitou a reflexão sobre a prática docente de forma geral. Apesar das dificuldades – que são comuns - enfrentadas no decorrer da pesquisa, este trabalho me proporcionou a compreensão de que, como professor, preciso estar atento à capacidade criativa de meus alunos, valorizando sempre o conhecimento que possuem, a importância do papel participativo dos mesmos na construção do conhecimento e a importância da reflexão da prática docente para elaborar situações de aprendizagem.

Para encerrar, destacamos a crescente necessidade de se estar atento às pesquisas desenvolvidas no campo educacional, uma vez que as mesmas possibilitam incorporar novas metodologias e repensar a prática docente. Só dessa forma é possível atuar de forma a favorecer o processo de ensino-aprendizagem dos diversos conteúdos matemáticos, promovendo o desenvolvimento da capacidade crítica dos alunos e, consequentemente, proporcionando-lhes a utilização desta atitude reflexiva para o exercício de sua cidadania.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, S. Ag. Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos. IN: Machado, Silvia Dias Alcântara (org.). Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica- Campinas, São Paulo. Papirus, pp. 125- 148. 2010

ALMOULOUD, S. Ag. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática. V. 3.6. p. 62 – 67. UFSC, 2008.

ASSIS, C. BARBOSA, R. FEITOSA, S. MIRANDA, T. OBMEP - Banco de questões 2015. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. Disponível em < http://www.obmep.org.br/bq/bq2015.pdf> Acesso Junho/2017.

ATIYAH, M. Mathematics on the 20th century. In Bulletin of the London Mathematical Society v. 34. Jan. 2002. Disponível em <https://www.lms.ac.uk/publications/blms> Acesso em Maio/2017.

BICUDO, J. C. O ensino secundário no Brasil e sua atual legislação (de 1931 a 1941 inclusive). São Paulo: s.n, 1942.

BOYER, C. B. História da Matemática. São Paulo: Edgard Blücher. Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Brasilia: MEC/SEF, 1998.

CARNEIRO, V. C. G. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. ZETETIKÉ. v.13, n. 23. P. 87 – 120. Campinas: UNICAMP, 2005.

CLÁVIA, A. F. Conhecendo as constelações. Maio/2010. Disponível em < http://www.observatorio.ufmg.br/dicas13.htm> Acesso Junho/2017.

D'AMBRÓSIO, U. A História da Matemática: Questões Historiográficas e Políticas e Reflexos na Educação Matemática. In: Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas, org. Maria Aparecida Viggiani Bicudo, Editora UNESP, São Paulo, 1999; pp. 97-115.

DURKHEIM, E. Fato social e divisão do trabalho. Apresentação e comentários Ricardo Musse. Tradução Cilaine Alves Cunha e Laura Natal Rodrigues. São Paulo : Ática, 2011.

EUCLIDES. Os Elementos. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EULER, L. Elementa doctrinae solidorum. Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 4 (1752/3) 1758a, p. 109-140. Disponível em <http://eulerarchive.maa.org//docs/originals/E230.pdf> Acesso em Maio/2017.

EULER, L., Demonstratio nonnullarum insignum proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita. Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 4 (1752/3)

1758b, p. 140-160. Disponível em <http://eulerarchive.maa.org//docs/originals/E231.pdf> Acesso em Maio/2017.

EVES, H. Introdução à História da Matemática. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

KOLL, Marta de Oliveira. Vygotsky: Aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histórico. São Paulo: Scipione, 1993.

KOPNIN, P. V. Fundamentos lógicos da ciência. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1972.
______________ A dialética como lógica e teoria do conhecimento. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

LEANDRO, E. G., SOUZA. M. C. Contribuições do Marxismo para a Atividade de Pesquisa da Educação Matemática na Perspectiva Lógico Histórica. VII EMEM – Encontro Mineiro de Educação Matemática. Disponível em: <ww.ufjf.br/emem/files/2015/10/CONTRIBUIÇÕES-DO-MARXISMO-PARA-A-ATIVIDADE-DE-PESQUISA-DA-EDUCAÇÃO-MATEMÁTICA-NA-PERSPECTIVA-LÓGICO-HISTÓRICA.pdf> Acesso em Maio/2017.

LIMA, E.L., CARVALHO, P. C.P.WAGNER, E. & MORGADO, A. C. A Matemática do Ensino Médio – Vol. 02. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro : IMPA, 2003

LLOYD, D. R. How old are the Platonic Solids?, BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics, 27:3, 131-140, Londres: British Society for the History of Mathematics, 2012.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. História na educação matemática: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2005

MOL, R. S. Introdução à história da matemática. Belo Horizonte : CAED-UFMG, 2013.

MUNKRES, James R.. Topology, second edition. New Jersey: Prentice Hall, 2000.

PLATÃO. Timeu-Crítias. Tradução de Rodolfo Lopes. Coimbra: Centro de Estudos Clássicos e Humanísticos da Universidade de Coimbra, 2011.

POINCARÉ, H. Papers in Topology: Analysis Situs and Its Five Supplements. Trad. de John Stillwell. Providence, RI: American National Society, 2010.

POMMER, W. M. A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares, 2013. 72 p. Disponível em http://stoa.usp.br/wmpommer/files/ Acesso: Fevereiro/2017.

PROJETO KLEIN. Objetivos. Disponível em https://klein.sbm.org.br/objetivos Acesso em Novembro/2017.

RADFORD, L. On Psychology, Historical Epistemology, and the Teaching of Mathematics: towards a Socio-Cultural History of Mathematics. For the Learning of Mathematics 17, 1, p. 26-33, february, 1997.

REIMANN, D, A. Art and Symmetry of Scottish Carved Stone Balls, Proceedings of Bridges Conference, Seoul, 2014, p.441-444.

RICHESON, D. S. Euler's Gem. The Polyhedron Formula and the Birth of Topology. Princeton: Princeton University Press, 2008.

SAITO, F. DIAS, M. S. Interface entre História da Matemática e Ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. Ciência & Educação, v. 19, n. 1, p. 89-111. Bauru: UNESP, 2013.

SANDIFER, E. V, E, and F, Part I. In: How Euler did it, The Mathematical Association of America. Junho, 2004a. Disponível em <http://www.maa.org/news/howeulerdidit.htm> Acesso em Maio/2017.

SANDIFER, E. "V, E, and F, Part II". In: How Euler did it, The Mathematical Association of America. Julho, 2004b. Disponível em <http://www.maa.org/news/howeulerdidit.htm> Acesso em Maio/2017.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo - SEE. Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática. 2014.

SOARES, E. T. P. Teoria dos Conjuntos: Matemática Moderna? In: X EPREM – Encontro Paranaense de Educação Matemática, 2009, Guarapuava. Anais X EPREM – Encontro Paranaense de Educação Matemática. Guarapuava – PR. Editora Unicentro, 2009. p. 411 – 430

VIANA NUNES, J. M; ALMOULOUD, S. A.; BORGES GUERRA, R. O Contexto da História da Matemática como Organizador Prévio. Bolema, vol. 23, núm. 35, p. 537 – 561. Rio Claro: IGCE/UNESP, 2010.