



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS**

**Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional  
PROFMAT**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**AS FUNÇÕES QUADRÁTICAS E SUAS  
APLICAÇÕES**

**Max Cavalcante da Silva**

**Maceió, Agosto de 2017**



Instituto de Matemática



**PROFMAT**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MAX CAVALCANTE DA SILVA

**AS FUNÇÕES QUADRÁTICAS E SUAS APLICAÇÕES**

MACEIÓ

2017

MAX CAVALCANTE DA SILVA

## **AS FUNÇÕES QUADRÁTICAS E SUAS APLICAÇÕES**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luis Guillermo Martinez

Maceió

2017

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**

Bibliotecário Responsável: Janaina Xisto de Barros Lima

S586f Silva, Max Cavalcante da Silva.  
As funções quadráticas e suas aplicações / Alex Cavalcante da Silva. – 2018.  
60 f. : il.

Orientador: Luiz Guilherme Martinez.  
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2017.

Bibliografia: f. 41.  
Apêndices: f. 45-50.  
Anexos: f. 51-60

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Funções quadráticas. 3. Parábola. 4. Ensino fundamental. I. Título.

CDU: 511.55:37

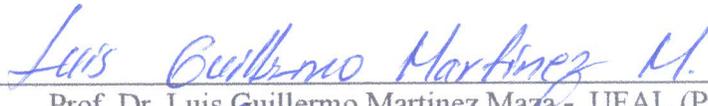
**Folha de Aprovação**

MAX CAVALCANTE DA SILVA

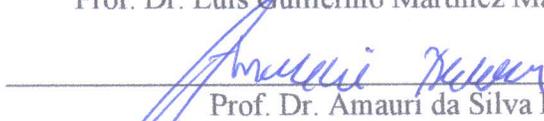
**FUNÇÕES QUADRÁTICAS E SUAS APLICAÇÕES**

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 18 de agosto de 2017.

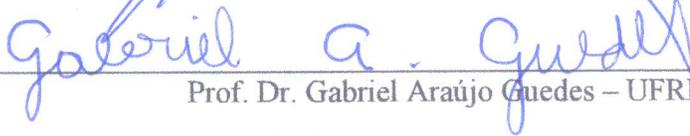
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Luis Guillermo Martinez Maza - UFAL (Presidente)



Prof. Dr. Amauri da Silva Barros - UFAL



Prof. Dr. Gabriel Araújo Guedes - UFRPE

MACEIÓ - 2017

Este trabalho é dedicado a minha família, que tantas vezes penou com minha ausência, por me dedicar ao curso durante os dois anos.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente, quero agradecer a Deus, por me ter dado forças e não ter deixado desistir, mesmo diante de todas as dificuldades que passei.

Gostaria de agradecer a Geraldo Perreira, por ter me apresentado o curso e ter me convencido a realizá-lo.

Gostaria de agradecer também aos meus professores, que de uma forma ou de outra, contribuíram significativamente para o meu desenvolvimento profissional, ao longo desses dois anos de curso.

Meus agradecimentos ao meu orientador Prof. Dr. Luis Guillermo Martinez, pela paciência e direcionamentos, na realização dessa dissertação.

Meus sinceros agradecimentos aos meus colegas de sala e amigos, Ane, Juvino, Camila, Eduarda, Luana, Josivaldo, Peixoto, Newton, Henrique, Humberto, Leandro, Givaneide, Wilson, Roberto, Fabiano, Cristiano, Fernando e Erlando, que tantas vezes me ajudaram ao longo da nossa jornada.

Em especial gostaria de agradecer a Ane, pelo carinho, palavras de apoio e incentivos, ao Peixoto pela confiança em me indicar para o Colégio Madalena Sofia e ao Josivaldo pela cumplicidade/amizade durante o curso.

*Matemática da vida: A amizade "soma".*

*O amor "multiplica". O ódio "divide".*

*A inimizade "diminui".*

*Alvaro Granha Loregian*

## RESUMO

É de grande importância para a educação matemática, que seja feito um trabalho de valorização dos conteúdos abordados em sala de aula. Temos atualmente uma grande necessidade de inserir a matemática no cotidiano do aluno, para que a mesma faça sentido, e para que o aluno sintá-se motivado a estudar. A proposta dessa dissertação é mostrar que boa parte dos conteúdos podem ser contextualizados, mostrando aplicações das funções quadráticas nas ciências, sem perder todo o rigor e a elegância da matemática, e dando como exemplos questões de vestibulares, para aumentar mais ainda o interesse do aluno pela disciplina, uma vez que boa parte dos alunos estudam com um direcionamento para fazer a prova de um vestibular.

**Palavras Chaves:** Funções Quadráticas, equações do 2º grau, parábola, funções do 2º grau.

## ABSTRACT

There is a great importance for a mathematical education that a valuing work has done about the subject learned in classroom. We need to insert mathematics into the student's routine, to make sense and to the student feels motivated to study. The propose of this essay is to show that a part of the contents can be contextualized, showing applications of quadratic functions in the sciences, without losing all rigor and elegance of mathematics, and giving as vestibular example, to increase even more in interest of the student by the discipline, since a good part of the students study with an orientation to do a vestibular test.

**Keywords:** Quadratic functions, equations of the 2nd . degree, parable, functions 2o. degree.

## Sumário

	<b>Sumário</b> . . . . .	<b>7</b>
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>8</b>
	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>UM POUCO DE HISTÓRIA</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>2.1</b>	<b>As equações do 2º grau</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>2.2</b>	<b>Contexto histórico das funções</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>2.3</b>	<b>Contexto histórico das funções quadráticas</b> . . . . .	<b>10</b>
<b>3</b>	<b>AS EQUAÇÕES DO 2º GRAU E SUAS RAÍZES</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>3.1</b>	<b>As soluções da equação</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>3.2</b>	<b>Os tipos e as resoluções das equações</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>3.2.1</b>	<b>Tipo 1</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>3.2.2</b>	<b>Tipo 2</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>3.2.3</b>	<b>Tipo 3</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>3.2.4</b>	<b>Tipo 4</b> . . . . .	<b>13</b>
<b>3.2.4.1</b>	<b>Fatoração</b> . . . . .	<b>13</b>
<b>3.2.4.2</b>	<b>Completar o quadrado</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>3.2.4.3</b>	<b>Bhaskara</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>3.3</b>	<b>Problemas e equações do 2º grau</b> . . . . .	<b>16</b>
<b>3.3.1</b>	<b>Problema 1</b> . . . . .	<b>16</b>
<b>3.3.2</b>	<b>Problema 2</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>3.3.3</b>	<b>Problema 3</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>4</b>	<b>AS FUNÇÕES QUADRÁTICAS</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>4.1</b>	<b>A função</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>4.2</b>	<b>Raízes da função</b> . . . . .	<b>20</b>
<b>4.3</b>	<b>Representação gráfica</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>4.3.1</b>	<b>A construção da parábola</b> . . . . .	<b>22</b>

4.3.2	As raízes da função e a parábola. . . . .	25
4.4	Máximos e mínimos da função . . . . .	27
5	<b>APLICAÇÕES</b> . . . . .	29
5.1	Física . . . . .	29
5.2	Química . . . . .	30
5.3	Biologia . . . . .	33
5.4	Dia a dia . . . . .	34
6	<b>RELATO DE AULAS</b> . . . . .	38
6.1	1ºDia . . . . .	38
6.2	2ºDia . . . . .	39
6.3	3ºDia . . . . .	40
	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	41
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	42
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	43
	Apêndice A - Questionário . . . . .	43
	Apêndice B - Questionário . . . . .	45
	Apêndice C - Questionário . . . . .	47
	<b>ANEXOS</b> . . . . .	49
	Anexo A - Foto 1 aula 1 . . . . .	49
	Anexo B - Foto 2 aula 1 . . . . .	50
	Anexo C - Foto 3 aula 1 . . . . .	51
	Anexo D - Foto 4 aula 1 . . . . .	52
	Anexo E - Foto 5 aula 1 . . . . .	53
	Anexo F - Foto 6 aula 2 . . . . .	54

---

<b>Anexo G - Foto 7 aula 2 . . . . .</b>	<b>55</b>
<b>Anexo H - Foto 8 aula 3 . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>Anexo I - Foto 9 aula 3 . . . . .</b>	<b>57</b>
<b>Anexo J - Foto 10 aula 3 . . . . .</b>	<b>58</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O ensino da matemática na educação básica, vêm enfrentado grandes dificuldades. A maior dificuldade pode ser atribuída a grande falta de interesse do aluno pela ciência que é a matemática. É muito comum escutarmos de alunos que a matemática que ele está estudando não vai lhe servir para nada na sua vida, e com isso não vê sentido em estudá-la.

Diante desse quadro de desinteresse, se faz necessário uma abordagem dinâmica, buscando sempre mostrar que ela é importante como ciência e serve de base para muitos conhecimentos científicos, lhes fornecendo ferramentas para o seu desenvolvimento.

Para que um conceito matemático (objeto matemático) faça sentido, é necessário relatar aos alunos a sua origem histórica e o contexto em que foi desenvolvido, mostrando que o conceito não é vazio, que tem uma importância (ou teve), buscando assim desfazer a concepção de que não faz sentido estudá-lo.

Um outro ponto importante para estimular o interesse do aluno, é usar sempre que possível, contextualizações do seu cotidiano, mostrando para ele a aplicabilidade do que está estudando.

Uma vez de posse do interesse do aluno, é necessário que a aprendizagem dele seja concreta e duradoura, pensando nisso adotamos nessa dissertação o referencial teórico das Representações Semióticas, usando como uma forma de facilitar o aprendizado em matemática. Segundo Raymond Durval para se ter um aprendizado concreto em matemática é necessário que o indivíduo consiga fazer com facilidade as transições entre as possíveis representações semióticas de um conhecimento. Com base nessa visão, sempre que possível serão feitas representações semióticas diferentes dos objetos matemáticos aqui citados.

## 2 UM POUCO DE HISTÓRIA

### 2.1 As equações do 2º grau

Convém destacar que as equações do 2º grau estão intimamente relacionadas com as funções quadráticas, veremos por isso agora, um breve contexto histórico dessas equações.

Atualmente para resolvermos uma equação do 2º grau, usamos com muita frequência uma fórmula conhecida como fórmula de Bháskara, onde Bháskara é um matemático indiano. Más historicamente falando, diversos outros nomes são ligados a uma maneira prática de resolver equações deste tipo.

Sabe-se que Egípcios, Gregos e Babilônios apresentavam maneiras diferentes para a resolução destas equações muito antes da era comum.

A título de informação, sabemos que os gregos usavam um método geométrico para resolver tais equações, em quantos Babilônicos e os Egípcios utilizavam símbolos e textos.

A utilização de letras no modo de resolução das equações do 2º grau é atribuída a um matemático francês chamado Viète, conhecido como pai da Álgebra Moderna.

O modelo mais usado nas resoluções de equações do 2º grau é o mostrado abaixo, conhecido como fórmula de Bháskara.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde, } \Delta = b^2 - 4ac$$

Contudo, convém destacar que existem varias outras formas de resolver estas equações.

### 2.2 Contexto histórico das funções

A concepção de função que temos atualmente foi construída ao longo de vários séculos. Sabemos que existia uma ideia vaga de dependência de grandezas entre os

povos mais antigos, onde podemos destacar os babilônicos, de onde temos conhecimento de tábuas de quadrados, cubos e de raízes quadradas.

Contudo foi a partir do século XVII onde começou a surgir o desenvolvimento da noção de função, estimulado pela procura em estabelecer as leis do movimento, destacamos nesta procura Kepler(1571-1630), Galileo(1564-1642).

Já no século XVIII a partir da análise matemática, o matemático Alemão Leibniz usa pela primeira vez o termo função para designar a relação de dependência entre termos. A nova noção de função foi publicada por Bernoulli em um artigo no ano de 1718 em Paris com a seguinte definição "Chamamos função de uma grandeza variável uma quantidade composta, de um modo qualquer, desta grandeza variável e de constantes"(Opera Omnia Vol.II, p. 241).

Mais tarde em 1748 Euler (1707-1783) propõe a seguinte definição "Se  $x$  é uma quantidade variável, então toda quantidade que depende de  $x$  de qualquer maneira, ou seja, determinada por aquela, chama-se função da dita variável"(Opera Omnia, ser. I Vol.III, p. 17)

Somente no século XIX apareceu o significado mais amplo dado por Peter Dirchlet, Dedekind e Cantor, que é semelhante a definição que temos atualmente, a função como uma relação entre os elementos de dois conjuntos satisfazendo determinadas condições.

### **2.3 Contexto histórico das funções quadráticas**

Historicamente podemos destacar as tentativas de explicar o movimento de queda livre de um corpo ou ainda a trajetória de um corpo em lançamento oblíquo, como propulsores para o desenvolvimento das funções quadráticas. Diversos estudiosos tentaram explicar essa trajetória sem obter a parábola, essas tentativas foram aperfeiçoadas, até que essa curva fosse associada a uma equação do 2º grau, isso aumentou a necessidade de se relacionar curvas a equações, o que mais tarde originou o estudo das funções do 2º grau, relacionando-as com curvas parabólicas.

### 3 AS EQUAÇÕES DO 2º GRAU E SUAS RAÍZES

É um fato a necessidade de dominar a resolução de equações quadráticas e a resolução de problemas envolvendo às mesmas, para entender e desenvolver alguns conceitos das funções quadráticas. Pensando nisso, mostraremos abaixo algumas maneiras de resolver uma equação polinomial do 2º grau.

**Definição 3.1.** Chamamos de equação polinomial do 2º grau, toda equação do tipo  $ax^2 + bx + c = 0$ , com  $a, b$  e  $c \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ , onde os valores de  $a, b$  e  $c$  são chamados de coeficientes e  $x$  é a incógnita.

**Exemplo 3.1.** A equação  $2x^2 + 3x - 10 = 0$  é uma equação polinomial do 2º grau em que  $a = 2, b = 3$  e  $c = -10$ .

**Exemplo 3.2.** A equação  $-3x^3 + 4x^2 - 3x + 2 = 0$ , não é uma equação do 2º grau.

#### 3.1 As soluções da equação

Quando falamos em equações quadráticas podemos ter até duas soluções reais distintas. E essas soluções podem ser encontradas de varias maneiras a depender do tipo da equação. Convém destacar que os valores dos coeficientes  $b$  e  $c$  podem ser iguais a zero, fazendo com que a equação receba o nome de incompleta. Para efeito de resolução é muito importante identificar o tipo, para escolher o método mais prático de resolvê-la.

#### 3.2 Os tipos e as resoluções das equações

##### 3.2.1 Tipo 1

São as equações em que  $b$  e  $c$  são iguais a zero, o que implica na solução  $x' = x'' = 0$  independente do valor de  $a$ .

**Exemplo 3.3.** Qual o conjunto solução da equação  $\frac{1}{10}x^2 = 0$  em  $\mathbb{R}$  ?

**Solução:** Tomando  $\frac{1}{10}x^2 = 0$ , temos que  $x^2 = 0$ , e com isso  $x \cdot x = 0$ , o que ocorre se, e somente se  $x = 0$ .

### 3.2.2 Tipo 2

São as equações em que  $b = 0$  e  $c \neq 0$ , ou seja possuem o formato  $ax^2 + c = 0$ . Podemos determinar uma forma prática para a resolução de equações dessa forma. Seja  $ax^2 + c = 0$ , temos que  $ax^2 = -c$ , e com isso  $x^2 = \frac{-c}{a}$ , aplicando raiz quadrada em ambos os lados da igualdade teremos  $\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}}$ , sabemos que  $\sqrt{x^2} = |x|$ , temos que  $|x| = \sqrt{\frac{-c}{a}}$  e com isso  $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$ , temos que observar que a existência da solução dentro dos números Reais, está condicionada ao fato de  $\frac{-c}{a} \geq 0$ .

**Exemplo 3.4.** Qual o conjunto solução da equação  $2x^2 - 8 = 0$  em  $\mathbb{R}$ ?

**Solução:** Na equação dada  $a = 2$  e  $c = -8$ , assim temos  $x = \pm\sqrt{\frac{-(-8)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{8}{2}} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ , logo  $S = \{-2, 2\}$ .

**Exemplo 3.5.** Qual o conjunto solução da equação  $9x^2 + 16 = 0$  em  $\mathbb{R}$ ?

**Solução:** Na equação dada  $a = 9$  e  $c = 16$ , assim  $x = \pm\sqrt{\frac{-16}{9}}$ , onde observamos que  $\sqrt{\frac{-16}{9}} \notin \mathbb{R}$ , logo  $S = \emptyset$ .

### 3.2.3 Tipo 3

São as equações em que  $c = 0$  e  $b \neq 0$ , ou seja possuem o formato  $ax^2 + bx = 0$ . Também podemos encontrar uma forma prática de resolver equações deste tipo, vejamos abaixo.

Seja  $ax^2 + bx = 0$ , por fatoração temos que  $x(ax + b) = 0$ , analisando o produto no primeiro membro da equação, temos o produto de dois números igual a zero e com isso:

$x' = 0$  e  $(ax + b) = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x'' = \frac{-b}{a}$ , encontrando assim a forma prática para as equações do tipo 3.

**Exemplo 3.6.** Qual o conjunto solução da equação  $-5x^2 + 8x = 0$ .

**Solução:** Na equação dada  $a = -5$  e  $b = 8$ , assim temos que  $x' = 0$  e  $x'' = \frac{-8}{-5} = 1,6$ , e  $S = \{0; 1,6\}$ .

**Exemplo 3.7.** Qual o conjunto solução da equação  $\sqrt{2}x^2 + 10x = 0$  em  $\mathbb{R}$

**Solução:** Na equação dada  $a = \sqrt{2}$  e  $b = 10$ , assim temos que:  $x' = 0$  e  $x'' = \frac{-10}{\sqrt{2}}$ , racionalizando temos  $x'' = \frac{-10}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-10\sqrt{2}}{2} = -5\sqrt{2}$ , e com isso  $S = \{-5\sqrt{2}, 0\}$ .

### 3.2.4 Tipo 4

São as equações completas ou seja  $b$  e  $c$  são diferentes de zero. Para a resolução das equações completas vamos apresentar métodos adequados aos valores de  $a, b$  e  $c$  e enfatizar suas aplicações.

#### 3.2.4.1 Fatoração

Quando  $a$  é igual a 1 e são solicitadas raízes inteiras, podemos usar a fatoração do polinômio associado a equação como produto de dois binômios do 1º grau, ou seja  $x^2 + bx + c = (x - k_1)(x - k_2)$ .

Vejamos como encontrar a fatoração:

Ao desenvolvermos o produto  $(x - k_1)(x - k_2) = 0$ , obteremos  $x^2 + bx + c = x^2 - (k_1 + k_2)x + k_1 \cdot k_2$ . Comparando os coeficientes das potências correspondentes temos,  $(k_1 + k_2) = -b$  e  $k_1 \cdot k_2 = c$ .

**Exemplo 3.8.** Determine o conjunto solução da equação  $x^2 + 7x + 12 = 0$  sabendo que suas raízes são inteiras.

**Solução:** Podemos observar que para a equação dada  $k_1 + k_2 = -7$  e  $k_1 \cdot k_2 = 12$ , analisando o produto  $k_1 \cdot k_2$  temos como alternativas  $(-1$  e  $-12)$ ,  $(1$  e  $12)$ ,  $(-2$  e  $-6)$ ,  $(2$  e  $6)$ ,  $(-4$  e  $-3)$  e por fim  $(3$  e  $4)$ . Das alternativas apresentadas a única que satisfaz a soma  $k_1 + k_2 = -7$  é  $(-4$  e  $-3)$ . Portanto o conjunto solução da equação dada é  $S = \{-4, -3\}$ .

Quando as soluções são números racionais ou irracionais não convém usar a fatoração, usamos então o método de completar o quadrado.

### 3.2.4.2 Completar o quadrado

Completar o quadrado consiste em escrever a equação do 2 grau na forma  $(x + k)^2 = m$ , com  $m \geq 0$ , e então concluir que  $x' = -\sqrt{m} - k$  e  $x'' = \sqrt{m} - k$ .

**Exemplo 3.9.** Determine o conjunto solução da equação  $x^2 + 8x + 10 = 0$  em  $\mathbb{R}$ .

**Solução:** Para completar o quadrado observamos que  $\frac{8}{2} = 4$  e que  $4^2 = 16$ , logo se acrescentarmos 6 a ambos os membros da equação temos:

$$\begin{aligned} x^2 + 8x + 10 = 0 &\Rightarrow x^2 + 8x + 10 + 6 = 6 \\ &\Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 6 \\ &\Rightarrow (x + 4)^2 = 6. \end{aligned}$$

De onde temos que  $x' = -\sqrt{6} - 4$  e  $x'' = \sqrt{6} - 4$ .

Como dito anteriormente, uma das maneiras mais utilizadas na resolução de equações do segundo grau é a fórmula resolutive conhecida como fórmula de Bháskara.

### 3.2.4.3 Bháskara

Ao aplicarmos o método de completar o quadrado numa equação com coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ , encontramos a forma resolutive conhecida como fórmula de Bháskara, vejamos: Seja  $ax^2 + bx + c = 0$ , ao dividirmos toda a equação por  $a$ , teremos  $x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$ , para obtermos um trinômio quadrado perfeito nesta expressão, teríamos que ter  $\frac{b^2}{4a^2}$  no lugar de  $\frac{c}{a}$ , para isso basta adicionarmos simultaneamente  $\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)$  a ambos os lados da igualdade  $x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$ , ou seja,

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Simplificando ambos os lados teremos

$$\begin{aligned}x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}, \\x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.\end{aligned}$$

Podemos agora observar que o primeiro membro da igualdade é um trinômio quadrado perfeito

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Aplicando raiz quadrada em ambos os membros da igualdade, aplicando as definições de módulo de um número real e isolando o valor de  $x$  no primeiro membro da igualdade teremos

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} &= \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}, \\|x + \frac{b}{2a}| &= \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\x + \frac{b}{2a} &= \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\x &= \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} \\x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\end{aligned}$$

Sua aplicação consiste em identificar os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  da equação e substituí-los na fórmula resolvente

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

e com isso encontrar as soluções da equação.

É muito comum o desmembramento do termo  $\sqrt{b^2 - 4ac}$ , uma vez que o mesmo dá uma condição para a existência ou não das soluções em  $\mathbb{R}$ , sendo ele chamado de discriminante ( $\Delta$ ).

**Exemplo 3.10.** Determine em  $\mathbb{R}$  o conjunto solução da equação  $2x^2 + 3x - 10 = 0$ .

**Solução:** Temos na equação dada  $a = 2$ ,  $b = 3$  e  $c = -10$ , assim temos o discriminante como sendo  $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49$ , como o discriminante é positivo

e diferente de zero teremos duas soluções reais, continuando a fórmula resolutiva temos:

$$x = \frac{+b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-3 \pm 7}{4} \Rightarrow$$

$$x' = \frac{-3 + 7}{4} = 1 \text{ e}$$

$$x'' = \frac{-3 - 7}{4} = \frac{-5}{2}.$$

Convém salientar, a fórmula resolutiva de Bháskara pode ser utilizada em qualquer um dos tipos de equações mostrados anteriormente, tendo apenas os devidos cuidados com os coeficientes ausentes.

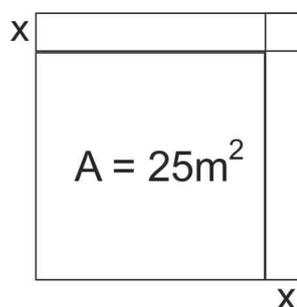
### 3.3 Problemas e equações do 2º grau

Como visto, na história há diversos problemas que são resolvidos a partir da resolução de equações quadráticas, vejamos agora a resolução de alguns problemas de caráter algébrico ou geométrico.

#### 3.3.1 Problema 1

Tem-se uma sala quadrada de área  $25m^2$ . Deseja-se ampliar a mesma para que tenha uma área de  $30m^2$ , quais serão as novas dimensões dessa sala?

Figura 1 – Área da sala.



Fonte: Autor, 2017

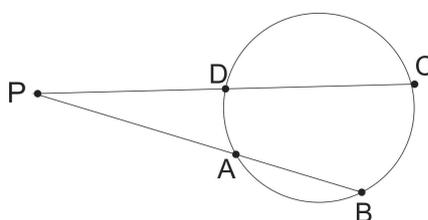
**Solução:** Como a sala era quadrada e tinha área de  $25m^2$  podemos concluir que o comprimento do lado da sala é de  $5m$ , como será ampliada, teremos que o novo comprimento será  $(5 + x)$ , e atendendo ao desejado, sua área deve ser  $30m^2$ ,

assim termos  $(5 + x)^2 = 30$ , que tem o formato apresentado no método de completar o quadrado mostrado acima, logo as soluções são  $x' = \sqrt{30} - 5$  e  $x'' = -\sqrt{30} - 5$ , como  $x$  é um comprimento, não convêm ser negativo e com isso o aumento no comprimento da sala será de  $\sqrt{30} - 5 \cong 0,48m$ , e portanto a sala deverá ter aproximadamente  $5,48m$  de comprimento para ter uma área de  $30m^2$ .

### 3.3.2 Problema 2

Antes de enunciar o problema 2, vejamos uma das propriedades das relações métricas nas circunferências.

Figura 2 – **Duas secantes de mesma origem a uma circunferência.**



Fonte: Autor, 2017

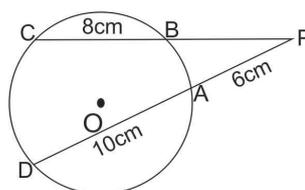
Quando temos duas secantes de mesma origem a uma mesma circunferência como mostra a figura acima, é válida a seguinte propriedade:

$$\overline{PC} \cdot \overline{PD} = \overline{PB} \cdot \overline{PA}$$

Vejamos agora o enunciado.

Na figura abaixo temos uma circunferência e duas secantes de mesma origem. Qual o comprimento da segmento  $\overline{PC}$ ?

Figura 3 – **Secantes de mesma origem.**



Fonte: Autor, 2017

**Solução:** Aplicando as propriedades das relações métricas na circunferência teremos:

$$(x + 8) \cdot x = (10 + 6) \cdot 6$$

$$x^2 + 8x = 96$$

$$x^2 + 8x - 96 = 0, \text{ completando o quadrado temos}$$

$$x^2 + 8x + 16 = 112$$

$$(x + 4)^2 = 112, \text{ logo } x = \pm\sqrt{112} - 4 = \pm 4\sqrt{7} - 4.$$

Como  $x$  é uma distância temos  $x = 4\sqrt{7} - 4 \cong 6,58\text{cm}$

### 3.3.3 Problema 3

Qual o conjunto solução da equação trigonométrica  $2\cos^2(x) + \cos(x) = 0$ , com  $0 \leq x \leq 2\pi$ ?

**Solução:** Aplicando a mudança de parâmetro  $y = \cos(x)$ , teremos  $y^2 + 2y = 0$ , como a equação obtida é do tipo 3 mostrada acima temos,  $a = 2$  e  $b = 1$  e com isso  $y' = 0$  e  $y'' = \frac{-1}{2}$ , como  $\cos(x) = y$  temos:

$$(I) \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2}$$

$$(II) \cos(x) = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3}$$

Portanto o conjunto solução da equação trigonométrica é  $S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2} \right\}$ .

## 4 AS FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Faremos agora uma apresentação formal das funções quadráticas em relação as definições, escrita e representação gráfica.

### 4.1 A função

**Definição 4.1.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se quadrática quando são dados números reais  $a, b$  e  $c$ , com  $a \neq 0$ , tais que  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Convém salientar que as funções quadráticas podem ser identificadas por trinômios do segundo grau, mesmo havendo uma sutil diferença entre os dois conceitos. Isso nos permite observar que os coeficientes  $a, b$  e  $c$  de uma função quadrática ficam inteiramente identificados pelos valores que a função assume.

**Exemplo 4.1.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , tal que  $f(1) = 1$ ,  $f(-2) = -2$  e  $f(3) = 23$ , determinemos  $f$  encontrando os valores de  $a, b$  e  $c$ .

Como  $f(1) = 1$ , temos que  $a \cdot (1)^2 + b \cdot (1) + c = 1$ , o que implica em  $a + b + c = 1$ .

Do mesmo modo, como  $f(-2) = -2$ , temos que  $a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = -2$ , o que implica em  $4a - 2b + c = -2$ .

Temos ainda que  $f(3) = 23$  e com isso  $a \cdot (3)^2 + b \cdot (3) + c = 23$ , o que implica em  $9a + 3b + c = 23$ .

Podemos portanto montar um sistema com os coeficientes  $a, b$  e  $c$  e assim determinar seus valores.

Usando a regra de Cramer para o sistema abaixo

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a - 2b + c = -2 \\ 9a + 3b + c = 23 \end{cases}, \text{temos que:}$$

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 30, \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 23 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 60,$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 9 & 23 & 1 \end{vmatrix} = 90, \text{ e } \det C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 9 & 3 & 23 \end{vmatrix} = -120.$$

$$\text{Logo } a = \frac{\det A}{\det D} = \frac{60}{30} = 2,$$

$$b = \frac{\det B}{\det D} = \frac{90}{30} = 3 \text{ e}$$

$$c = \frac{\det C}{\det D} = \frac{-120}{30} = -4.$$

Sabendo que  $a = 2$ ,  $b = 3$  e  $c = -4$ , determinamos assim a função  $f$ , ou seja,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$ , é a função quadrática que satisfaz  $f(1) = 1$ ,  $f(-2) = -2$  e  $f(3) = 23$  como queríamos.

## 4.2 Raízes da função

**Definição 4.2.** Um número real  $x_0$  é chamado raiz de uma função se e somente se  $f(x_0) = 0$ .

**Exemplo 4.2.** O número  $-3$  é raiz da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2 + 7x + 12$ , pois  $f(x) = (-3)^2 + 7(-3) + 12 = 0$ .

**Exemplo 4.3.** O número  $4$  não é raiz da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 2x^2 - 3x$ , pois  $f(x) = 2(4)^2 - 3(4) = 32 - 12 = 20$ .

As funções quadráticas podem ter até 2 raízes reais distintas, a maneira mais prática de determiná-las é fazer  $f(x) = 0$  e resolver a equação do 2º grau resultante por um dos métodos apresentado anteriormente.

**Exemplo 4.4.** Determine caso haja as raízes da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 3x^2 - 16x$ .

**Solução:** Fazendo  $f(x) = 0$  temos  $3x^2 - 16x = 0$ , uma equação do tipo 3, sendo  $a = 3$  e  $b = -16$ , as raízes de  $f$  serão  $x' = 0$  e  $x'' = \frac{16}{3}$ . Podemos perceber que de fato  $f(0) = 3 \cdot 0^2 - 16 \cdot 0 = 0$  e que  $f\left(\frac{16}{3}\right) = 3\left(\frac{16}{3}\right)^2 - 16\left(\frac{16}{3}\right) = \frac{16^2}{3} - \frac{16^2}{3} = 0$

**Exemplo 4.5.** Determine caso haja as raízes da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2 + 4x + 4$ .

**Solução:** ao fazermos  $f(x) = 0$  temos  $x^2 + 4x + 4 = 0$ , uma equação do tipo 4, podemos resolvê-la facilmente por fatoração, uma vez que o primeiro membro é um trinômio quadrado perfeito, assim temos  $x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x + 2) = 0$  e assim  $x' = x'' = -2$ , dizemos que a função  $f$  possui duas raízes reais iguais.

**Exemplo 4.6.** Determine caso haja as raízes da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 2x^2 - x + 1$ .

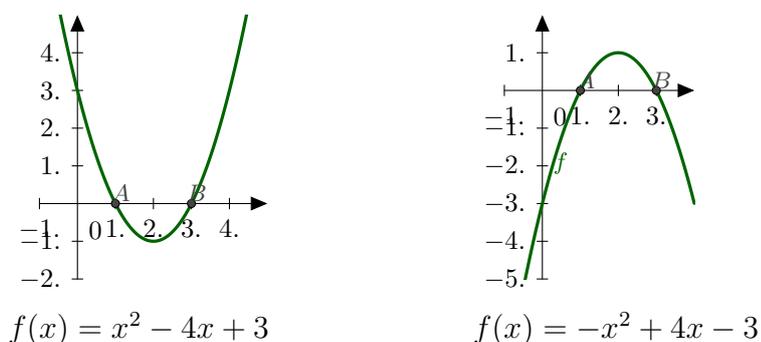
**Solução:** Fazendo  $f(x) = 0$  temos  $2x^2 - x + 1 = 0$ , uma equação do tipo 4, usando a fórmula resolvente de Bháskara teremos,  $a = 2$ ,  $b = -1$  e  $c = 1$ , assim  $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -7$ , como dito, quando o valor do discriminante é negativo a equação do 2º grau não possui solução real e com isso a função também não terá raízes.

Na próxima seção mostraremos a representação gráfica das funções quadráticas e o significado geométrico das raízes, os pontos de máximos e mínimos, conceitos esses de extrema importância para a resolução de situações contextuais envolvendo as funções quadráticas.

### 4.3 Representação gráfica

As funções quadráticas possuem como representação gráfica uma curva chamada de Parábola, curva essa que possui propriedades geométricas bastante interessantes e está associada a representação de vários fenômenos.

Figura 4 – A curva Chamada Parábola.



### 4.3.1 A construção da parábola

Estudaremos agora algumas propriedades geométricas da parábola e a sua representação algébrica.

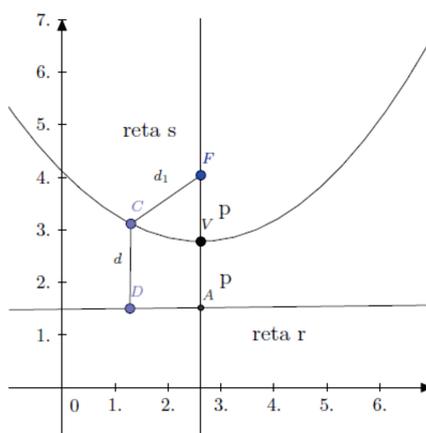
Geometricamente a parábola possui como elementos importantes o vértice(V), o foco (F), a diretriz(r) e a reta focal(s).

**Definição 4.3.** *O conjunto de pontos do plano que equidistam de uma reta(diretriz) e de um ponto(Foco) fora dela chama-se Parábola.*

A reta s que passa por  $F=(x_f, y_f)$  e é perpendicular a diretriz r é chamada de reta focal, e intercepta a parábola no ponto  $V=(x_0, y_0)$  chamado vértice da parábola.

Segue da definição que  $d_{F,V} = d_{V,r} = p$ , o número  $2p$  é chamado de parâmetro da parábola.

Figura 5 – Elementos da Parábola.



Fonte: Autor, 2017

Podemos observar que a parábola sempre será simétrica em relação a sua reta focal.

Demonstraremos que é possível associar uma equação do 2º grau a uma parábola em função das coordenadas de seu vértice  $V = (x_0, y_0)$  e de seu parâmetro  $2p$ .

Por simplicidade consideraremos o caso em que a diretriz da parábola é paralela ao eixo das abscissas e o vértice está acima da reta diretriz.

Sendo  $C(x, y)$  um ponto qualquer da parábola, temos que

$$\begin{aligned}
d_{C,f} &= d_{C,r} \\
\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-(y_0+p))^2} &= (y-(y_0-p)) \\
(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-(y_0+p))^2})^2 &= (y-(y_0-p))^2 \\
(x-x_0)^2 + (y-(y_0+p))^2 &= (y-(y_0-p))^2 \\
(x-x_0)^2 &= (y-(y_0-p))^2 - (y-(y_0+p))^2.
\end{aligned}$$

Desenvolvendo todos os quadrados e simplificando o possível temos

$$\begin{aligned}
(x-x_0)^2 &= (y-(y_0-p))^2 - (y-(y_0+p))^2 \\
(x-x_0)^2 &= y^2 - 2y(y_0-p) + (y_0-p)^2 - (y^2 - 2y(y_0+p) + (y_0+p)^2) \\
(x-x_0)^2 &= \cancel{y^2} - 2y(y_0-p) + (y_0-p)^2 - (\cancel{y^2} - 2y(y_0+p) + (y_0+p)^2) \\
(x-x_0)^2 &= -2y(y_0-p) + 2y(y_0+p) + (y_0-p)^2 - (y_0+p)^2 \\
(x-x_0)^2 &= 2y(-y_0+p+y_0+p) + y_0^2 - 2y_0p + p^2 - y_0^2 - 2y_0p - p^2 \\
(x-x_0)^2 &= 2y(-\cancel{y_0} + p + \cancel{y_0} + p) + \cancel{y_0^2} - 2y_0p + \cancel{p^2} - \cancel{y_0^2} - 2y_0p - \cancel{p^2} \\
(x-x_0)^2 &= 2y(2p) - 4y_0p \\
(x-x_0)^2 &= 4yp - 4y_0p \\
(x-x_0)^2 &= 4p(y-y_0)
\end{aligned}$$

Portanto, equação da parábola de vértice  $V = (x_0, y_0)$  e parâmetro  $2p$  é dada por

$$4p(y-y_0) = (x-x_0)^2$$

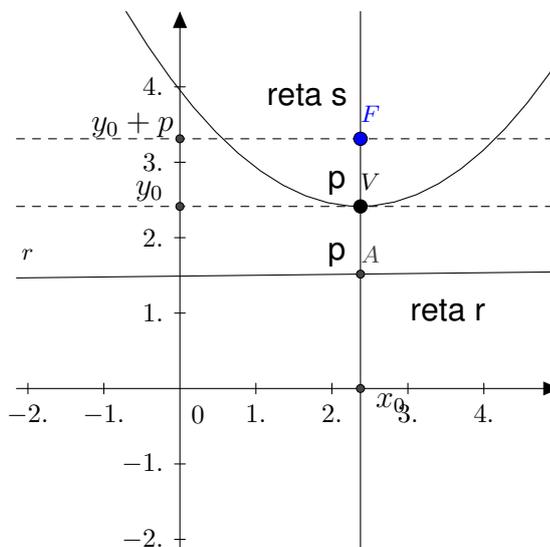
.

De modo análogo, podemos determinar a equação associada a parábola no caso em que a diretriz é paralela ao eixo das ordenadas.

$$4p(x-x_0) = (y-y_0)^2$$

As equações mostradas acima são conhecidas como equações canônicas da parábola.

Figura 6 – A Equação da Parábola  $4p(y - y_0) = (x - x_0)^2$ .



Fonte: Autor, 2017

Podemos observar na figura acima que  $F = (x_0, y_0 + p)$ ,  $r : y = y_0 + p$  e  $s : x = x_0$ .

Ao isolarmos  $y$  na forma canônica da parábola teremos

$$y = \frac{1}{4p}(x - x_0)^2 + y_0$$

$$y = \frac{x^2}{4p} - \frac{x_0x}{2p} + \frac{x_0^2}{4p} + y_0.$$

Se tratarmos  $y$  como uma função de  $x$ , então  $y = f(x)$  e com isso encontraremos a função quadrática associada a parábola.

$$f(x) = \frac{x^2}{4p} - \frac{x_0x}{2p} + \frac{x_0^2}{4p} + y_0,$$

**Exemplo 4.7.** Determine a função associada a parábola que tem vértice  $V=(2,3)$  e parâmetro 6.

**Solução:** Sendo  $f(x) = \frac{x^2}{4p} - \frac{x_0x}{2p} + \frac{x_0^2}{4p} + y_0$ ,  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = 3$  e  $2p = 6$ , temos

$$f(x) = \frac{x^2}{12} - \frac{2x}{6} + \frac{9}{12} + 3$$

$$f(x) = \frac{x^2}{12} - \frac{x}{3} + \frac{15}{4}.$$

**Exemplo 4.8.** Determine o vértice e o parâmetro da parábola cuja função associada a ela é dada por  $f(x) = 2x^2 + 6x - 3$ .

**Solução:** Fatorando a função temos

$$f(x) = 2 \left( x^2 + 3x - \frac{3}{2} \right), \text{ Completando o quadrado temos,}$$

$$f(x) = 2 \left( x^2 + 3x - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \right) + \frac{3}{4}$$

$$f(x) = 2 \left( x^2 + 3x + \frac{9}{4} \right) + \frac{3}{4} + \frac{9}{8}$$

$$f(x) = 2 \left( x^2 + 3x + \frac{9}{4} \right) + \frac{15}{8}, \text{ comparando temos,}$$

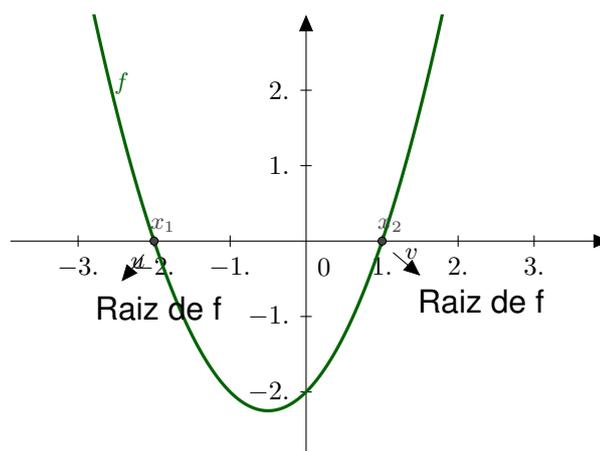
$$\frac{1}{4p} = 2 \Rightarrow p = \frac{1}{8}.$$

$$x_0 = \frac{-3}{2} \text{ e } y_0 = \frac{-15}{8}.$$

#### 4.3.2 As raízes da função e a parábola.

Como sabemos um número real  $x_0$  é chamado de raiz da função se e somente se  $f(x_0) = 0$ , temos assim que o ponto da forma  $(x_0, 0)$  graficamente está sobre a reta  $y = 0$  ou eixo das abcissas, podemos assim concluir que graficamente as raízes representam a interseção do gráfico com o eixo das abcissas ( $x$ ).

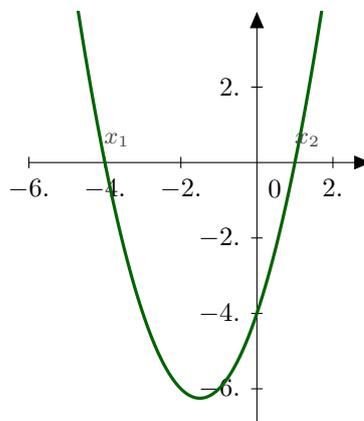
Figura 7 – Raízes da Função.



Fonte: Autor, 2017

**Exemplo 4.9.** Dada  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2 + 3x - 4$ , suas raízes são  $x' = 1$  e  $x'' = -4$ , sua representação gráfica é dada por

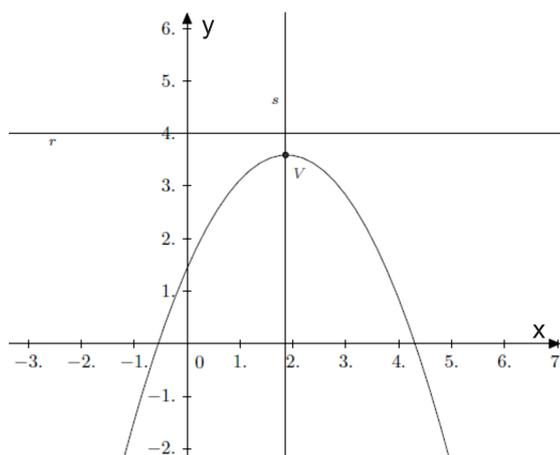
Figura 8 – A função quadrática  $f(x) = x^2 + 3x - 4$



Fonte: Autor, 2017

**Observação 4.1.** Quando o valor de  $a$  na função quadrática é negativo a parábola que representa a função tem o vértice abaixo da reta diretriz e por consequência a concavidade da parábola será para baixo.

Figura 9 – A Concavidade da Parábola.



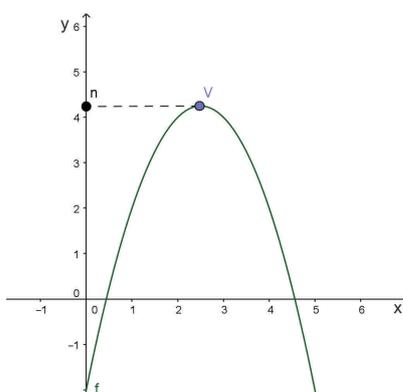
Fonte: Autor, 2017

#### 4.4 Máximos e mínimos da função

O conceito de máximos e mínimos da função do 2º grau é muito empregado na resolução de problemas. Mostraremos a seguir a definição e a relação desses valores com o vértice da parábola.

**Definição 4.4.** Um número real  $n$  é dito máximo de uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  quando  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq n$ .

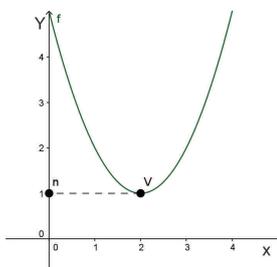
Figura 10 – Valor Máximo da Função.



Fonte: Autor, 2017

**Definição 4.5.** Um número real  $n$  é dito mínimo de uma  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  quando  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq n$ .

Figura 11 – Valor Mínimo da Função.



Fonte: Autor, 2017

É possível observar que os valores máximos e mínimos de uma função quadrática estão diretamente relacionados com a coordenada  $y_0$  do vértice da parábola.

Em termos práticos, é conveniente ter uma maneira de determinar o valor máximo ou mínimo ( $y_0$ ) da função através dos coeficientes da função quadrática, vejamos:

Temos que  $f(x) = \frac{x^2}{4p} - \frac{x_0x}{2p} + \frac{x_0^2 - 4py}{4p}$ , e temos também que  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , fazendo comparações teremos

$$a = \frac{1}{4p} \Rightarrow p = \frac{1}{4a}$$

$$b = \frac{-x_0}{2p} = \frac{-x_0}{2 \cdot \frac{1}{4a}} \Rightarrow b = -2ax_0 \Rightarrow x_0 = \frac{-b}{2a}$$

$$c = \frac{x_0^2 - 4py_0}{4p} = \frac{x_0^2}{4p} - y_0 \Rightarrow y_0 = c - x_0^2 \cdot a, \text{ com isso,}$$

$$y_0 = c - \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 \cdot a = c - \frac{b^2}{4a^2} \cdot a = c - \frac{b^2}{4a},$$

$$y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}.$$

Podemos agora dada uma função quadrática, determinar seu valor máximo ou mínimo através de seus coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

## 5 APLICAÇÕES

### 5.1 Física

**Exemplo 5.1.** Um foguete caiu depois de lançado, devido a uma pane no sistema de navegação, a trajetória do foguete até sua queda e representada pela função  $h = 12,5 + 30t - 2,5t^2$ . *Pede-se:*

- a) a altura máxima (m) atingida pelo foguete, após quanto tempo (min) isso ocorreu?
- b) Ao partir, qual a altura do foguete em relação ao solo
- c) Após quantos minutos, ao partir, o foguete atingiu o solo.

**Solução:** Alternativa (a), comparando a função dada com a função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , temos que  $a = -2,5$ ;  $b = 30$  e  $c = 12,5$ , logo a altura máxima sera dada por  $y_0 = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(30^2 - 4 \cdot (-2,5) \cdot 12,5)}{4 \cdot (-2,5)} = 102,5m$ . O tempo que o foguete precisou para chegar na altura máxima é dado por  $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-30}{2 \cdot (-2,5)} = 6s$ .

Alternativa (b), ao partir temos  $s = 0$ , e substituindo na função temos  $h(0) = 12,5 + 30(0) - 2,5(0)^2 = 12,5m$ .

Alternativa (c), quando o foguete toca o solo sua altura é nula logo  $h = 0$ , igualando a função a zero temos  $12,5 + 30t - 2,5t^2 = 0$ , que é uma equação do 2 grau completa, usando a formula resolutive de Bháskara temos:

$$a = -2,5; b = 30 \text{ e } c = 12,5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 30^2 - 4(-2,5)12,5 = 1025,$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-30 \pm \sqrt{1025}}{2(-2,5)}$$

$$\text{Considerando } \sqrt{1025} \approx 32,01, \text{ teremos } x = \frac{-30 \pm 32,01}{-5} \Rightarrow$$

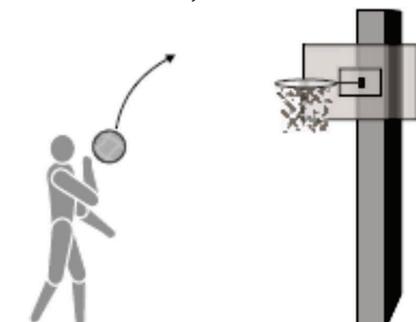
$$x_1 = 12,4s \text{ e } x_2 = -0,4s, \text{ portanto o foguete}$$

tocou o solo 12,4s depois que decolou.

**Exemplo 5.2.** (FMTM-MG) Na figura, o plano vertical que contém o garoto, a bola e o aro é um sistema de coordenadas cartesianas, com as unidades dadas em metros, em que o eixo  $x$  está no plano do chão. A partir da posição  $(0,1)$  o garoto joga uma

bola para o alto. Esta descreve uma parábola, atinge a altura máxima no ponto (2,5) e atinge exatamente o centro do aro, que está a 4 m de altura. Desprezando as dimensões próprias da bola e do aro, a coordenada  $x$  da posição do aro é igual a:

- a) 2,5
- b) 3,0
- c) 3,5
- d) 4,0
- e) 4,5



**Solução:** Como a bola descreve uma parábola seu movimento pode ser estudado por uma função do segundo grau  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Lendo atentamente o enunciado percebemos que

$$f(0) = 1 \Rightarrow c = 1, \text{ e que } f(2) = 5 \Rightarrow a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 1 = 5 \Rightarrow 2a + b = 2.$$

Uma outra informação importante é que o ponto (2,5) é o vértice (Altura máxima), com isso temos que o  $x_v = 2$  e assim obtemos  $2 = \frac{-b}{2a} \Rightarrow 4a = -b \Rightarrow 4a + b = 0$ , motamos agora um sistema nas incógnitas  $a$  e  $b$ .

$$\begin{cases} 2a + b = 2 \\ 4a + b = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos  $a=-1$  e  $b=4$ . Assim a função que representa o movimento da bola será  $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ , fazendo  $f(x)=4$  temos  $-x^2 + 4x + 1 = 4 \Rightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0$  resolvendo a equação resultante, observamos que  $a'=-1, b'=4$  e  $c'=-3$ . Logo  $\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = 4$  e com isso  $x = \frac{-4 \pm 2}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow x' = 1$  e  $x'' = 3$ .

Como o aro está depois do ponto (2,5) podemos concluir que a coordenada de sua abscissa é 3m.

## 5.2 Química

**Exemplo 5.3.** (UNI-RIO) Num laboratório é realizada uma experiência com um material volátil, cuja velocidade de volatilização é medida pela sua massa, em gramas, que decresce em função do tempo  $t$ , em horas, de acordo com a fórmula  $m = -3^{2t} - 3^{t+1} + 108$ . Assim sendo, o tempo máximo de que os cientistas dispõem para utilizar

este material antes que ele se volatilize totalmente é:

- a) inferior a 15 minutos.
- b) superior a 15 minutos e inferior a 30 minutos.
- c) superior a 30 minutos e inferior a 60 minutos.
- d) superior a 60 minutos e inferior a 90 minutos.
- e) superior a 90 minutos e inferior a 120 minutos.

**Solução:** Aparentemente a função dada acima não é uma função do segundo grau, mas se aplicarmos uma mudança de parâmetro teremos  $3^t = x, 3^{2t} = x^2$  e  $3^{t+1}$ . Assim a função pode ser representada por  $m = -x^2 - 3x + 108$ . Como a questão pede o tempo máximo antes que o material se volatilize temos que a volatilização total ocorrerá quando  $m = 0$ , com isso,  $-x^2 - 3x + 108 = 0$ , resolvendo a equação temos

$$a = -1, b = -3 \text{ e } c = 108$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(-1)(108) = 441$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{441}}{2(-1)} = \frac{3 \pm 21}{-2}$$

$$x_1 = -12 \text{ e } x_2 = 9, \text{ votando para variável } t \text{ temos}$$

$$3^t = 9 \Rightarrow t = 2, \text{ Portanto os cientistas têm entre 90min e 120min.}$$

**Exemplo 5.4.** (ITA) Os dados experimentais da tabela a seguir correspondem as concentrações de uma substância química medida em intervalos de 1s. Assumindo que a linha que passa pelos três pontos experimentais é uma parábola, tem-se que a concentração (em mols) após 2,5s é:

Tempos	Concentração
1	3
2	5
3	1

**Solução:** Como foi dito que a linha que passa pelos pontos é uma parábola, a função que representa a relação é uma função do 2º grau, logo  $C(t) = at^2 + bt + c$ , onde  $C$  é a concentração em  $t$  segundos. Para encontrarmos a concentração em  $t=2,5s$  precisamos determinar o valor dos coeficientes  $a, b$  e  $c$ .

Para os pontos dados temos:

$$C(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 3 \Rightarrow a + b + c = 3$$

$$C(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 5 \Rightarrow 4a + 2b + c = 5$$

$$C(3) = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 1 \Rightarrow 9a + 3b + c = 1$$

Resolvendo o sistema pela regra de Cramer teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 9 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ como sendo a matriz do sistema.}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ como matriz dos coeficientes, cujo determinante é } -2.$$

$$D_a = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ como matriz dos coeficientes aplicada a (a), cujo determinante é 6.}$$

$$D_b = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 9 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ como matriz dos coeficientes aplicada a (b), cujo determinante é } -22.$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ como matriz dos coeficientes aplicada a (c), cujo determinante é 10.}$$

Pela regra de Cramer temos que os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$  que satisfazem o sistema é dado por:

$$a = \frac{D_a}{D} = \frac{6}{-2} = -3, b = \frac{D_b}{D} = \frac{-22}{-2} = 11 \text{ e } c = \frac{D_c}{D} = \frac{10}{-2} = -5.$$

Temos com isso que a função que representa a concentração é dada por  $C(t) = -3t^2 + 11t - 5$ , como a questão pediu o valor da concentração em  $t=2,5s$ , basta fazer

$C(2,5)$ .

$$C(2,5) = -3 \cdot (2,5)^2 + 11 \cdot (2,5) - 5 = 3,75, \text{ portanto a resposta é } 3,75 \text{ mols.}$$

### 5.3 Biologia

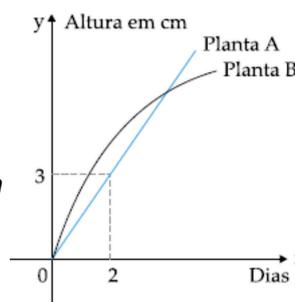
**Exemplo 5.5.** (UFSM) Um laboratório testou a ação de uma droga em uma amostra de 720 frangos. Constatou que a lei de sobrevivência do lote de frangos era dada pela relação  $V(t) = at^2 + b$ , onde  $V(t)$  é o número de elementos vivos no tempo  $t$ (meses). Sabendo-se que o ultimo frango morreu quando  $t=12$  meses após o inicio da experiência, a quantidade de frangos que ainda estava viva no décimo mês é:

**Solução:** Como inicialmente tinham 720 animais temos que,  $V(0) = 720 \Rightarrow a \cdot 0 + b = 720 \Rightarrow b = 720$ , a outra informação dada diz que todos os animais morreram depois de 12 meses, com isso  $V(12) = 0 \Rightarrow a \cdot 12^2 + b = 0$ , como  $b = 720$ , temos que,  $a \cdot 144 + 720 = 0 \Rightarrow a = -5$ . Portanto  $V(t) = at^2 + b$  pode ser expressa por  $V(t) = -5t^2 + 720$ , podemos agora determinar o número de animais no décimo mês fazendo  $V(10) = -5(10)^2 + 720 \Rightarrow V(10) = 220$ . Assim o número de animais vivos no décimo mês era de 220.

**Exemplo 5.6.** (Vunesp) Duas plantas de mesma espécie A e B, que nasceram no mesmo dia, foram tratadas desde o início com adubos diferentes. Um botânico mediu todos os dias o crescimento, em centímetros, dessas plantas. Após 10 dias de observação, ele notou que o gráfico que representa o crescimento da planta A é uma reta passando por  $(2, 3)$  e o que representa o crescimento da planta B pode ser descrito pela lei matemática  $y = \frac{24x - x^2}{12}$ . Um esboço desses gráficos está representado na figura a seguir.

Determine:

- a equação da reta;
- o dia em que as plantas A e B atingiram a mesma altura e qual foi essa altura.



**Solução:**

- Para determinarmos a equação da reta, basta observar que ela passou pelos pon-

tos  $(0,0)$  e  $(2,3)$ , assim temos que  $y = ax + b$  para os pontos dados, resulta em  $0 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 0$ ,  $3 = a \cdot 2 + 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$  e com isso obtemos  $Y = \frac{3}{2}x = f(x)$ .

b) (I) Para descobrir em que dia atingiram a mesma altura basta igualar as funções que representam as alturas e resolver a equação decorrente da igualdade, assim temos  $\frac{24x - x^2}{12} = \frac{3x}{2} \Rightarrow -2x^2 + 48x = 36x \Rightarrow -2x^2 + 12x = 0$ .

Resolvendo a equação do 2º grau Tipo 2 teremos  $a=-2$  e  $b=12$ , logo  $x' = 0$  e  $x'' = \frac{-12}{-2} = 6$ .

Portanto as plantas atingiram a mesma altura no dia 6.

(II) Para determinar a altura basta fazer  $x=6$  na função que descreve o crescimento da planta B, assim  $f(6) = \frac{24 \cdot 6 - 6^2}{12} = 9m$ .

#### 5.4 Dia a dia

**Exemplo 5.7.** Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada passageiro R\$ 800,00 mais R\$ 10,00 por cada lugar vago. Para que número de passageiros a rentabilidade da empresa é máxima?

#### Solução:

Seja  $n$  o número de passageiros que participarão da excursão,  $(100 - n)$  será o número de lugares vagos. O valor pago por cada passageiro que participar será R\$ 800 + R\$ 10,00 · (100 - n), e com isso o valor da receita  $R$  arrecadada pela empresa para  $n$  pessoas participantes será  $R(n) = n(800 + 10(100 - n))$ . Desenvolvendo os produtos teremos

$$R(n) = n(800 + 10(100 - n))$$

$$R(n) = n(800 + 1000 - 10n)$$

$$R(n) = n(1800 - 10n)$$

$$R(n) = 1800n - 10n^2$$

$$R(n) = -10n^2 + 1800n$$

Como podemos perceber a receita arrecadada pela empresa é uma função quadrática do número de pessoas participantes da excursão, logo para determinar o número de pessoas que irá gerar a maior receita devemos encontrar o valor de  $n$  do vértice da função, sendo assim  $n = \frac{-b}{2a}$  onde  $a = -10$  e  $b = 1800$ , obtemos com isso  $n = \frac{-1800}{2(-10)} = 90$ . A título de informação a máxima receita arrecadada será  $R(90) = -10 \cdot 90^2 + 1800 = 81000$ .

**Exemplo 5.8.** O diretor de uma orquestra percebeu que, com o ingresso a R\$ 9,00, em média 300 pessoas assistem aos concertos e que, para cada redução de R\$ 1,00 no preço dos ingressos, o público aumenta de 100 espectadores. Qual deve ser o preço do ingresso para que a receita seja máxima?

**Solução:**

Seja  $x$  o valor em reais diminuído do preço do ingresso,  $100x$  será o aumento de espectadores no concerto, logo o valor da receita obtida em função do valor  $x$  de desconto será de  $R(x) = (9 - x)(300 + 100x)$ , desenvolvendo o produto teremos

$$R(x) = (9 - x)(300 + 100x)$$

$$R(x) = 2700 + 900x - 300x - 100x^2$$

$$R(x) = -100x^2 + 600x + 2700$$

Como podemos observar, o valor da receita é uma função quadrática do desconto  $x$  dado, logo para determinar a máxima receita temos de encontrar o desconto  $x$  que vai gerar a maior receita e o substituir na função da receita  $R(x)$ . O valor  $x$  que gera a maior receita é  $x = \frac{-b}{2a}$  onde  $a = -100$  e  $b = 600$ , assim teremos  $x = \frac{-600}{2(-100)} = 3$ , ao fazermos  $R(3)$  encontraremos a máxima receita arrecadada, assim

$$R(3) = -100(3)^2 + 600(3) + 2700$$

$$R(3) = -900 + 1800 + 2700$$

$$R(3) = 900 + 2700$$

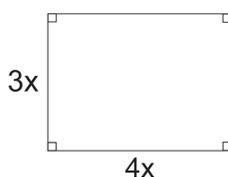
$$R(3) = 3600$$

Portanto a maior receita arrecadada no concerto será de R\$ 3600,00, que ocorrerá quando o desconto dado no valor do ingresso for de R\$3,00.

**Exemplo 5.9.** Um prédio de 1 andar, de forma retangular, com lados proporcionais a 3 e 4, vai ser construído. O imposto predial é de 7 reais por metro quadrado, mais uma taxa fixa de 2.500 reais. A prefeitura concede um desconto de 60 reais por metro linear do perímetro, como recompensa pela iluminação externa e pela calçada em volta do prédio. Quais devem ser as medidas dos lados para que o imposto seja o mínimo possível? Qual o valor desse imposto mínimo?

**Solução:**

Como os lados são proporcionais a 3 e 4 temos que a largura será  $3x$  e o comprimento  $4x$ , onde  $x$  é a constante de proporcionalidade. Vejamos a figura abaixo.



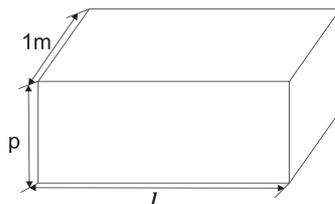
É possível observar que a área do terreno do prédio será  $12x^2$  e que o perímetro do mesmo será de  $14x$ . Com base nas informações sobre o imposto fornecidas pelo enunciado da questão, teremos o imposto em função da constante de proporcionalidade  $x$  dado por  $I(x) = 12x^2 \cdot 7 + 2500 - 14x \cdot 60 = 84x^2 - 880x + 2500$ . Como podemos observar o valor do imposto é uma função quadrática da constante  $x$  de proporcionalidade, para obter o mínimo imposto devemos encontrar a constante de proporcionalidade  $x$  que gere o menor imposto, ou seja  $x = \frac{-b}{2a}$ , onde  $a = 12$  e  $b = -880$ , com isso  $x = \frac{-(-880)}{2 \cdot 84} \approx 5,238$ .

Portanto as dimensões do prédio para que o imposto a ser pago seja mínimo é  $3 \cdot 5,238 = 15,714m$  e  $4 \cdot 5,238 = 20,952m$ , e o valor mínimo do imposto será  $I(5,238) = 84(5,238)^2 - 880(5,238) + 2500 = 195,23$ .

**Exemplo 5.10.** Deseja-se cavar um buraco de  $1m$  de largura e modo que o volume cavado seja de  $300m^3$ . Sabendo que cada metro quadrado de área cavada custa R\$ 10,00 e cada metro de profundidade custa R\$ 30,00, determinar as dimensões do buraco de modo que seu custo seja mínimo.

**Solução:**

Para facilitar a resolução da questão vejamos a ilustração abaixo.



Com base no enunciado do problema, o volume do buraco deve ser de  $300\text{m}^3$ , logo pela ilustração  $1 \cdot p \cdot l = 300$ , ainda com base no enunciado e na ilustração o valor gasto para fazer o buraco será  $C(p, l) = 30p + 10l$ , convém salientar que a área cavada será dada por  $1 \cdot l$  e que essa área terá um custo de R\$ 10,00 o metro quadrado. Podemos observar que o valor mínimo da função quadrática  $q(x) = x^2$  é zero, se tomarmos  $x = \sqrt{30p} - \sqrt{10l}$ , então  $0 \leq (\sqrt{30p} - \sqrt{10l})^2 = 30p - 2(30p \cdot 10l)^{\frac{1}{2}} + 10l$ , donde

$$\begin{aligned} 2(300pl)^{\frac{1}{2}} &\leq 30p + 10l, \text{ substituindo } pl \text{ temos} \\ 2(300 \cdot 300)^{\frac{1}{2}} &\leq C(p, l) \\ 2 \cdot 300 &\leq C(p, l) \\ 600 &\leq C(p, l). \end{aligned}$$

Concluimos assim que o custo mínimo para fazer o buraco é de R\$600,00.

Com isso temos  $30p + 10l = 600$  e  $pl = 300$ , substituindo uma na outra temos

$$\begin{aligned} 30 \left( \frac{300}{l} \right) + 10l &= 600, \text{ multiplicando por } l \\ 9000 + 10l^2 &= 600l \end{aligned}$$

$$10l^2 - 600l + 9000 = 0, \text{ Resolvendo a equação temos}$$

$$l^2 - 60l + 900 = 0$$

$$\Delta = (-60)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 900$$

$$\Delta = 3600 - 3600 = 0, \text{ logo}$$

$$l = \frac{-(-60)}{2} = 30, \text{ Substituindo } l \text{ em } pl = 300 \text{ temos}$$

$$p \cdot 30 = 300$$

$$p = 10$$

Portanto as dimensões do buraco para obter o menor custo são 10 de profundidade e 30 de comprimento.

## 6 RELATO DE AULAS

As funções quadráticas fazem parte da grade curricular do ensino médio atualmente, e está dentro do eixo principal chamado funções.

O ensino das funções assim como de outros conteúdos, enfrenta um dilema "por que estudar isso?", com as funções quadráticas não é diferente, tentei nessas aulas que irei descrever abaixo, sempre mostrar a importância das funções quadráticas, dando sempre que possível aplicações para o que estava sendo mostrado.

As aulas foram dadas para a turma do 3º Ano B vespertino do Colégio Estadual Professor Theonilo Gama. Geralmente o conteúdo funções quadráticas é dado no 1º Ano do ensino médio, mas depois de uma pesquisa com os próprios alunos, descobri que eles ficaram sem professor de matemática no 1º Ano, o que impossibilitou que os alunos estudassem as funções quadráticas, por isso a escolha dessa turma. As aulas foram dadas em sequências de três aulas seguidas, de 50 min cada uma, totalizando 9 horas aulas, dadas em três semanas.

### 6.1 1º Dia

No primeiro dia fiz uma sondagem com os alunos e constatei que eles tinham uma boa noção a respeito do que é uma função, o que facilitou um pouco o desenrolar das aulas.

No segundo momento, falei um pouco da história da matemática no que se refere a as funções quadráticas e chamou-me a atenção a curiosidade dos alunos em saber como surgiu esse conteúdo, o que despertou o interesse do aluno foi a descrição que dei, afirmando que o conteúdo foi desenvolvido a partir da tentativa de entender fenômenos naturais ou resolver problemas físicos (ver Anexos A, B e C).

Como bem sabemos é imprescindível para o aluno entender funções do 2º grau, dominar a resolução de equações do 2º grau, com base nisso, mostrei aos alunos várias formas de resolver uma equação do 2º grau, a depender do tipo da equação. Percebi que os alunos já haviam estudado as equações e sua resolução pelo método resolutivo de Bháskara. Foi com grande satisfação que eles receberam as novas

formas resolução da equação do 2º grau, em especial ficaram impressionados com o método de completar o quadrado, foi o mais elogiado pelos alunos (ver Anexos D e E).

Após mostrar as resoluções da equação quadrática, eu propus aos alunos a resolução de algumas situações problemas envolvendo equações quadráticas. Durante o tempo em que estavam resolvendo os problemas eu pude perceber a dificuldade que os alunos sentem em interpretar os problemas e representar algebricamente a linguagem verbal. Uma outra coisa que chamou-me a atenção é que alguns problemas necessitavam de conhecimentos prévios, e que os alunos não os tinham, o que fez com que em certo momento os alunos não conseguissem desenvolver os problemas, eu tive que dar uma breve explanação sobre alguns conhecimentos, como por exemplo, a relação entre os seguimentos determinados por duas secantes de mesma origem em uma circunferência.

Logo depois da resolução dos problemas, pude perceber que os alunos sentiram mais confiança em encontrar as raízes de uma equação do 2º grau, o que no meu ponto de vista foi um grande avanço.

## 6.2 2º Dia

Apresentei formalmente as funções quadráticas, mostrando a definição de função do 2º grau (ver Anexo F), comentei com os alunos que a lei de formação de uma função fica definida de forma única, quando se conhece algumas associações que essa função faz.

Na continuidade, defini o que seria a raiz de uma função e qual a sua importância para a mesma (ver Anexo G). Mostrei para os alunos que a determinação das raízes de uma função quadrática recai na resolução de uma equação do 2º grau e por isso a importância de conhecer bem essas resoluções, como aplicação citei o movimento de um projétil lançado obliquamente e que para determinar a distância percorrida e o tempo de permanência, podemos recorrer a função horária da altura do projétil, que é uma função quadrática.

Logo em seguida iniciei a representação gráfica das funções quadráticas.

Apresentei formalmente a curva chamada de parábola com seus pontos notáveis (vértice e foco) e mostrei a relação de distância de um ponto qualquer da parábola. Mostrei rapidamente para os alunos como obtemos a equação da parábola e

como fazemos a relação da equação com a lei de formação de uma função quadrática, mostrando assim para os alunos a relação entre os coeficientes  $a, b$  e  $c$  e as coordenadas do vértice e o valor do parâmetro  $p$  da parábola. Percebi nesse momento que as caras de surpresos dos alunos em ver como se dá a relação entre a lei de formação e a representação gráfica das funções.

Mostrei para os alunos pontos importantes para a função no gráfico como a interseção da parábola com o eixo  $y$  (termo independente de  $x$ ), e as interseções da parábola com o eixo  $x$  (as raízes da função).

Em relação a interseção com o eixo  $x$ , foi destacado as três possíveis posições da parábola, que mostram se a função representada pela parábola tem ou não raízes reais.

Na sequência mostrei que a parábola pode aparecer com sua concavidade voltada para cima ou para baixo, e que isso pode ser observado através do coeficiente do termo  $x^2$  na lei de formação da função.

### 6.3 3ºDia

Após ter apresentado a representação gráfica das funções quadráticas(ver Anexo H), fiz a relação entre o vértice e a parábola, enfatizando que a coordenada de  $y$  do vértice tem uma grande importância para a função(ver Anexo I e J), pois representa o valor máximo ou mínimo que a função pode assumir.

Em seguida sistematizei com os alunos uma forma prática de encontrar as coordenadas do vértice, usando os coeficientes  $a, b$  e  $c$  da lei de formação da função, e estabeleci que o  $y_v$  seria máximo caso  $a < 0$  e que  $y_v$  seria mínimo caso  $a > 0$ . Como aplicação citei a função lucro de uma empresa em relação a quantidade de peças produzidas  $L(x) = -10x^2 + 500x - 200$ .

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino da matemática dando ênfase na sua aplicação, mostrou-se muito motivante para os alunos, uma vez que enfrentamos uma grande onda de desmotivação por parte deles. Essa com certeza é mais uma forma de trazer verdadeiramente o aluno para o campo da matemática.

Outro aspecto interessante da realização desse trabalho foi, sempre que possível, a utilização de representações semióticas, possibilitando um aprendizado concreto para os alunos, representações essas que deram em vários momentos significados aos conceitos de funções quadráticas que estavam sendo trabalhados.

Com a realização dessa dissertação, eu me convenci que é possível sim, tornar a matemática, de forma geral, atrativa e de fácil entendimento, basta para isso utilizar mecanismos e estratégias adequadas a realidade dos alunos, para que o mesmo motive-se e aprenda com profundidade os conceitos.

## Referências

- [1] SILVA, Marcos Noé Pedro da. "O Surgimento da Equação do 2º Grau "; Brasil Escola. Disponível em <<http://brasilecola.uol.com.br/matematica/o-surgimento-equacao-2-o-grau.htm>>. Acesso em 25 de novembro de 2015.
- [2] ROQUE, Tatiana; PITOMBEIRA, J. Bosco, Tópicos de História da Matemática, 1ª edição, Rio de Janeiro, 2012, SBM.
- [3] LIMA, Elon lages, Números e Funções Reais, 1ª edição, Rio de Janeiro, 2013, SBM.
- [4] DELGADO, jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla, Geometria Analítica 1ª edição, Rio de Janeiro, 2013, SBM
- [5] MORAES FILHO, Daniel Cordeiro de, Manual de Redação Matemática, 1ª edição, Rio de Janeiro, 2014, SBM
- [6] BOYER, Carl B. História da Matemática / Carl B. Boyer; tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1974.

## APÊNDICES

### APÊNDICE A - Questionário

Questionário para auto avaliação das aulas ministradas sobre as funções quadráticas... Página 1 de 2

Responses cannot be edited

#### Questionário para auto avaliação das aulas ministradas sobre as funções quadráticas e suas aplicações.

As técnicas utilizadas durante as aulas ajudaram no entendimento dos conteúdos?

Sem sombra de dúvidas, as técnicas utilizadas pelo professor Max auxiliaram na didática e na compreensão do conteúdo que envolve funções quadráticas. durante as aulas foram mostradas algumas técnicas e procedimentos, que ajudaram bastante na hora de resolver problemas.

---

O professor demonstrou domínio do conteúdo funções quadráticas?

Sim, o Professor teve uma excelente didática e se mostrou apto ao que se refere ao assunto de funções quadráticas, promovendo explicações de fácil entendimento e compreensão, mostrando como as funções quadráticas foram descobertas e como é aplicada no nosso dia a dia.

---

O conteúdo funções quadráticas foi desenvolvido de forma organizada?

Sim, o conteúdo foi otimizado e desenvolvido de forma organizada, aprofundada e esquematizada, com vários conceitos e vários exercícios, tudo muito organizado e de fácil aprendizagem.

---

Como você avalia o seu aprendizado sobre as funções quadráticas e suas aplicações depois das aulas ministradas pelo professor?

Posso avaliar que as aulas ministradas pelo professor auxiliou bastante na forma como aplicamos as funções quadráticas no cotidiano, também posso afirmar que hoje posso solucionar problemas e ter um pouco de percepção de como é aplicada as funções quadráticas no nosso dia a dia.

Na sua opinião, qual a importância de estudar as funções quadráticas?

Quando se estuda Funções quadráticas podemos aprender que há várias utilidade em que algumas estão no nosso dia a dia, como antenas parabólicas, fogões solares, economia, faróis de carros que possuem respetivamente uma lâmpada que é colocada no foco da superfície parabólica. emfim, há várias aplicações e problemas a serem resolvido no nosso dia a dia, e as funções quadráticas podem auxiliar e ajudar nos problemas que a vida cotidiana apresenta. A importância de estudar funções quadráticas é que ela é importante e útil para solucionar alguns tipo de embrulhada.

This content is neither created nor endorsed by Google.

Google Forms

## APÊNDICE B - Questionário

Questionário para auto avaliação das aulas ministradas sobre as funções quadráticas... Página 1 de 2

Responses cannot be edited

### Questionário para auto avaliação das aulas ministradas sobre as funções quadráticas e suas aplicações.

As técnicas utilizadas durante as aulas ajudaram no entendimento dos conteúdos?

Sim

O professor demonstrou domínio do conteúdo funções quadráticas?

Sim

O conteúdo funções quadráticas foi desenvolvido de forma organizada?

Sim

Como você avalia o seu aprendizado sobre as funções quadráticas e suas aplicações depois das aulas ministradas pelo professor?

Ótimo

Na sua opinião, qual a importância de estudar as funções quadráticas?

Obter mais conhecimento

---

This content is neither created nor endorsed by Google.

Google Forms

## APÊNDICE C - Questionário

Questionário para auto avaliação das aulas ministradas sobre as funções quadráticas... Página 1 de 2

Responses cannot be edited

### Questionário para auto avaliação das aulas ministradas sobre as funções quadráticas e suas aplicações.

As técnicas utilizadas durante as aulas ajudaram no entendimento dos conteúdos?

Sim, pois com as técnicas utilizadas, ficou melhor o aprendizado do conteúdo aplicado. Com diferentes formas de ensino para um mesmo foco, absorvemos melhor os assuntos da própria matéria.

---

O professor demonstrou domínio do conteúdo funções quadráticas?

Sim, pois mostrou diversas maneiras e práticas para aprender-mos e dominarmos o assunto. Demonstrou também, rapidez e eficácia ao ensinar o conteúdo.

---

O conteúdo funções quadráticas foi desenvolvido de forma organizada?

Sim, com cautela e cuidado pelo professor, para que nós acompanhasse, entende e aprende o assunto dado. Cada tópico do tema estava bem estruturado e completo.

---

Questionário para auto avaliação das aulas ministradas sobre as funções quadráticas... Página 2 de 2

**Como você avalia o seu aprendizado sobre as funções quadráticas e suas aplicações depois das aulas ministradas pelo professor?**

Bom, o professor Max mostrou diversas maneiras de se aprender e resolver ás funções quadráticas, maneiras que eu pensei que nem existiam. Com isso digo que meu conhecimento sobre esse assunto, depois dessas aulas, está melhor, além de eu ter aprendido o assunto de forma descontraida e eficaz.

**Na sua opinião, qual a importância de estudar as funções quadráticas?**

Por que vimos que ela está presente no dia a dia, e que eatamos olhando para ele em nosso meio, de certa forma. A matemática é linda, e puxando para ás funções quadráticas, vimos que ela está nos projetos e construções que ajudaram e ajudam a forma de vida das pessoas. Dessa forma, é importante.

This content is neither created nor endorsed by Google.

Google Forms

**ANEXOS****Anexo A - Foto 1 aula 1**

Fonte: Autor, 2017

**Anexo B - Foto 2 aula 1**

Fonte: Autor, 2017

**Anexo C - Foto 3 aula 1**

Fonte: Autor, 2017

## Anexo D - Foto 4 aula 1

Aplicação das equações.

- ▶ Problema 1
- ▶ Problema 2
- ▶ Problema 3

Tipo 4:  $ax^2 + bx + c = 0$

Fatoração:

$$(x - x_0') \cdot (x - x_0'') = 0$$

Ex.:  $x^2 + 7x + 12 = 0$

$$x^2 + 3x + 4x + 12 = 0$$
$$x(x+3) + 4(x+3) = 0$$
$$(x+3) \cdot (x+4) = 0$$
$$x' = -3$$
$$x'' = -4$$

Fonte: Autor, 2017

## Anexo E - Foto 5 aula 1

As equações do 2º grau e suas raízes

►  $ax^2 + bx + c = 0$

► Tipos e resoluções das equações.

- i. Tipo 1
- ii. Tipo 2
- iii. Tipo 3
- iv. Tipo 4

Tipo 4:  $ax^2 + bx + c = 0$

Ex.: Completar quadrado

$$x^2 + 6x + 10 = 0$$

$$\frac{6}{2} = 3$$

$$3^2 = \textcircled{9}$$

$$x^2 + 6x + 9 + 1 = 0$$

$$x^2 + 6x + 9 = -1$$

$$\sqrt{(x+3)^2} = \sqrt{-1}$$

$$|x+3| = \sqrt{-1} = 1$$

$$x+3 = \pm 1$$

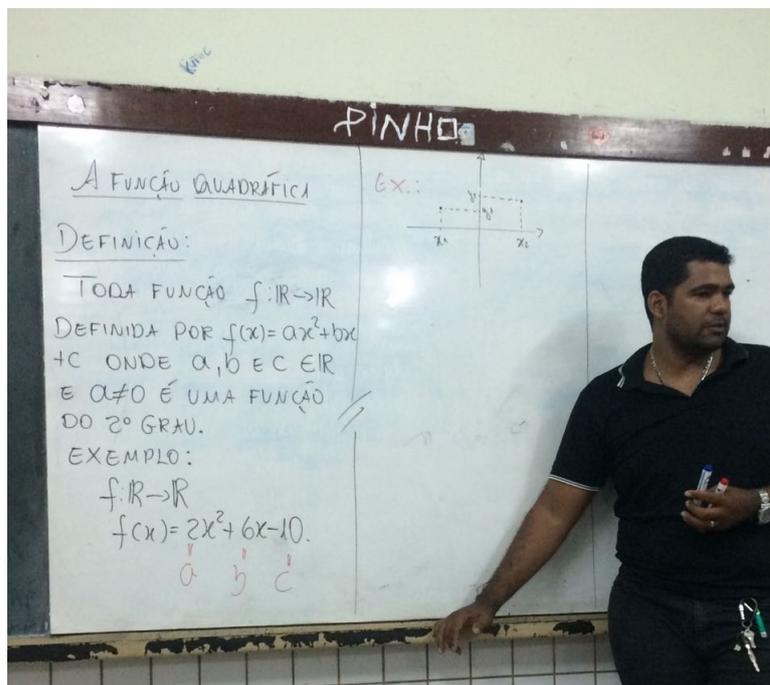
$$x = \pm 1 - 3$$

$$x' = -3 - 1$$

$$x'' = -3 + 1$$

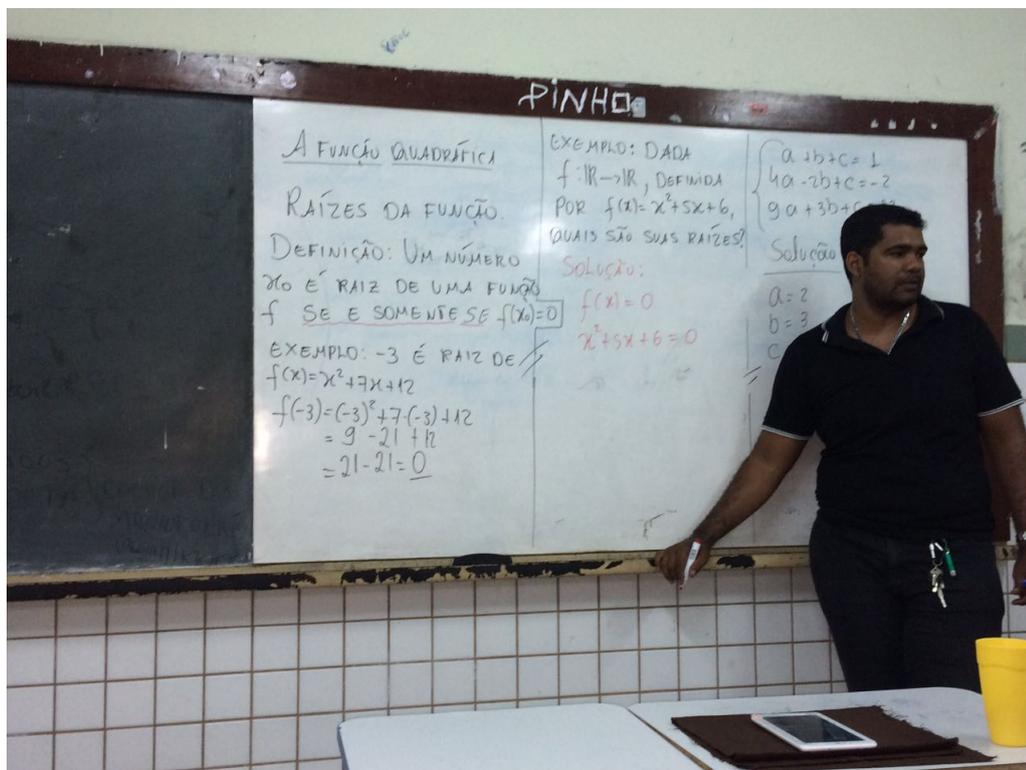
Fonte: Autor, 2017

## Anexo F - Foto 6 aula 2



Fonte: Autor, 2017

## Anexo G - Foto 7 aula 2



Fonte: Autor, 2017

## Anexo H - Foto 8 aula 3



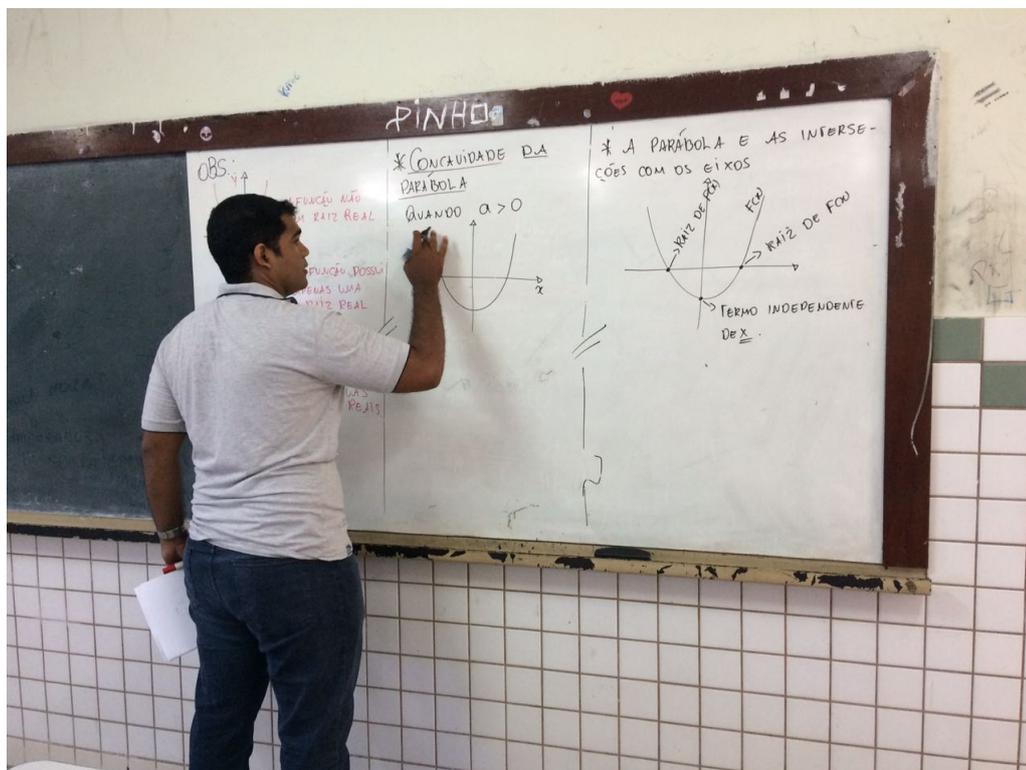
Fonte: Autor, 2017

## Anexo I - Foto 9 aula 3



Fonte: Autor, 2017

## Anexo J - Foto 10 aula 3



Fonte: Autor, 2017