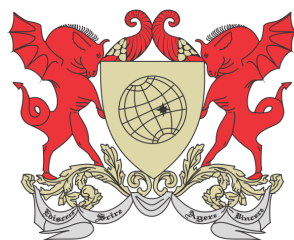


UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



LÍVIA NARCISO BEIRAL

A PROPORCIONALIDADE NO COTIDIANO: UMA
PROPOSTA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

FLORESTAL
MINAS GERAIS – BRASIL
2017

LÍVIA NARCISO BEIRAL

**A PROPORCIONALIDADE NO COTIDIANO: UMA
PROPOSTA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa,
como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional,
para obter o título *Magister Scientiae*.

FLORESTAL
MINAS GERAIS – BRASIL
2017

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Florestal

T

B422p
2017 Beiral, Lívia Narciso, 1982-
A proporcionalidade no cotidiano : Uma proposta para o ensino fundamental / Lívia Narciso Beiral. – Florestal, MG, 2017.
x, 55f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Mehran Sabeti.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f.54-55.

1. Matemática - Ensino fundamental. 2. Matemática - Proporcionalidade. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. II. Título.

CDD 22 ed. 372.72

LÍVIA NARCISO BEIRAL

**A PROPORCIONALIDADE NO COTIDIANO: UMA
PROPOSTA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa,
como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional,
para obter o título *Magister Scientiae*.

APROVADA: 30 de março de 2017.




Rodrigo Geraldo do Couto



Luis Alberto D'Afonseca



Elisângela Aparecida de Oliveira
(Coorientadora)



Mehran Sabeti
(Orientador)

Dedicatória

À minha mãe e aos meus alunos.

Agradecimentos

À Deus, que me capacita para alcançar meus objetivos, presente em todos os momentos transmitindo-me a força necessária para transpor todos obstáculos.

À minha família, especialmente minha mãe Luciene, pela confiança, por me incentivar no caminho que escolhi percorrer dando apoio e serenidade necessários para continuar nessa jornada.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Mehran Sabeti, pela atenção e paciência.

Ao Prof. Dr. Luis Alberto D'Afonseca, pela ajuda fundamental no Latex.

Aos professores do Profmat da UFV-Florestal pelos ensinamentos.

À minha amiga Karina, pelo apoio, compreensão, conselhos, por sempre ouvir todas minhas angústias e pela ajuda na construção deste trabalho.

Aos meus amigos e amigas da primeira turma do PROFMAT-UFV-Floretal, nossa dedicação, união e o bom humor que me fizeram seguir em frente e vencer.

Aos colegas da Escola Municipal Estudante Leonardo Sadra, em especial, a diretora Ângela Maria Susin Ballardin, pelo apoio, compreensão e liberação do tempo pedagógico.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Aos meus estimados alunos, que aceitaram participar desta pesquisa. Obrigada pela dedicação e carinho que demonstram por mim no dia a dia.

*“Só podemos aprender a voar
na proporção direta de nossa determinação
de nos elevarmos acima da dúvida
e de transcender as limitações.”
(David McNally)*

Lista de Figuras

2.1	Fragmento do Papiro de Rhind	3
2.2	Altura da pirâmide	7
2.3	Teorema de Tales	7
2.4	Pentágono $ABCDE$	8
2.5	Pentágono $ABCDE$ com suas 5 diagonais	8
2.6	Pentágono destacando os triângulos BCI e EBC	9
2.7	Pentágono $FGHIJ$ com suas 5 diagonais	9
2.8	Pentágono $KLMNO$ com suas 5 diagonais	10
3.1	Noções de quantidade, de comparação e de proporcionalidade nas “tirinhas” da personagem Mafalda	14
3.2	Razão	15
3.3	Barcos proporcionais	15
3.4	Os números (b_1, b_2, b_3, b_4) são proporcionais aos números (a_1, a_2, a_3, a_4) .	17
3.5	Diretamente proporcional	18
3.6	O comprimento n depende apenas de m	19
3.7	Construção de segmentos proporcionais	19
3.8	Inversamente proporcional	20
3.9	Gráfico de função diretamente proporcional	21
3.10	Ramo positivo do gráfico de função inversamente proporcional	22
4.1	Teorema de Tales	25
4.2	Demonstração Teorema de Tales	26
4.3	Triângulo ABC	26
4.4	Triângulo ABC e segmentos paralelos ao lado BC	27
4.5	Triângulo ABC e segmentos paralelos ao lado AB	27
6.1	Parte da matriz de referência do SAEB que mostra competências e habili- dades em relação à proporcionalidade	33
6.2	Parte da matriz de referência curricular de Contagem	34
6.3	Estudantes realizando da atividade de densidade demográfica	36
6.4	Resolução da atividade: Densidade demográfica	37
6.5	Resolução da atividade: Velocidade média dos atletas olímpicos	38
6.6	Estudantes realizando da atividade de velocidade média dos atletas olímpicos	38

6.7	Resolução da atividade: Densidade de uma solução	39
6.8	Tabela do IMC	40
6.9	Realizando medidas nos estudantes para o cálculo do IMC	41
6.10	Resultado do IMC de um estudante abaixo da faixa ideal	41
6.11	Resultado do IMC de um estudante acima da faixa ideal	41
6.12	Resolução da atividade: IMC	42
6.13	Estudantes resolvendo atividade sobre o número π	42
6.14	Etapas da construção do retângulo áureo	43
6.15	Construção do retângulo áureo	44
6.16	Resolução da atividade: Proporção áurea em objetos	45
6.17	Homem Vitruviano	46
6.18	Atividade da proporção áurea no corpo humano: Dois exemplos com com estudantes diferentes	47
6.19	Atividade sobre escala cartográfica no mapa da cidade Belo Horizonte-MG	48
6.20	Atividade sobre escala cartográfica no mapa da cidade Contagem-MG . .	49
6.21	Medidas reais da quadra poliesportiva da escola	52

Resumo

BEIRAL, Livia Narciso, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, março de 2017. **A proporcionalidade no cotidiano: Uma proposta para o Ensino Fundamental.** Orientador: Mehran Sabeti. Coorientadora: Elisângela Aparecida de Oliveira.

O conceito de Proporcionalidade é fundamental não só no contexto escolar, mas também no cotidiano das pessoas. Ele é importante para lidar com várias situações do mundo, para estudar e compreender outras áreas do conhecimento, além de contribuir para o desenvolvimento cognitivo dos indivíduos. Diante da importância desse conceito, esse trabalho apresenta algumas atividades para o Ensino Fundamental, chamando a atenção para a questão da compreensão adequada do tema. É utilizada a matemática aplicada permeada de uma prática pedagógica voltada para o cotidiano na eminência de desenvolver com maior facilidade o interesse dos estudantes. As etapas deste trabalho foram: um estudo do desenvolvimento desse conceito ao longo da história; em seguida, apresenta-se definições acerca do tema como grandezas diretamente e inversamente proporcionais; o Teorema Fundamental da Proporcionalidade e a regra de três. Dos resultados obtidos conclui-se que houve uma evolução significativa por parte dos estudantes, no entendimento do conceito de proporcionalidade, compreendendo a relação entre a constante de proporcionalidade e as variáveis dos problemas pelas aplicações em seu cotidiano.

Abstract

BEIRAL, Livia Narciso, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, March, 2017. **Proportionality in everyday life: A proposal for primary education.** Adviser: Mehran Sabeti. Co-adviser: Elisângela Aparecida de Oliveira.

The concept of proportionality is fundamental not only in school context, but also in people's daily life. It is important for dealing with various situations in the world, for studying and comprehending other areas of knowledge, besides contributing to the cognitive development of individuals. Through the importance of this concept, this essay presents some activities for Elementary School, focusing on the subject matter of a suitable comprehension of the theme. We utilize Applied Mathematics pervaded with pedagogical practice turned to daily life with the purpose of developing the interest of students. In this work we go through the following steps: a study about the development of this concept along history; definitions about the theme such as quantities directly and inversely proportional; Fundamental Theorem of Proportionality and the rule of three. From the results obtained, it can be concluded that there was a significant evolution from the students, in understanding the concept of proportionality, comprehending the relation between the constant of proportionality and the variables of the problems by the applications in their daily life.

Sumário

1	Introdução	1
2	Contexto Histórico	3
2.1	Egito Antigo	3
2.1.1	Problema 63	4
2.1.2	Problema 72	4
2.1.3	Problema 75	4
2.2	Mesopotâmia	6
2.3	Grécia Antiga	6
2.3.1	Tales de Mileto	6
2.3.2	Pitágoras	8
2.3.3	A Incomensurabilidade	10
2.3.4	Eudoxo	10
2.4	Os Árabes	12
2.5	Idade Média e Renascimento	12
3	Grandezas Proporcionais	13
3.1	Conceito de razão e proporção	14
3.1.1	Razão	14
3.1.2	Proporção	15
3.2	Grandezas Proporcionais	16
3.2.1	Grandezas diretamente proporcionais	16
3.2.2	Grandezas inversamente proporcionais	16
3.2.3	Grandeza proporcional a várias outras	16
3.3	Divisão em partes proporcionais	17
3.4	Exemplos de grandezas proporcionais	18
3.4.1	Exemplo 1: Segmentos proporcionais	18
3.4.2	Exemplo 2: Matemática financeira	19
3.4.3	Exemplo 3: Área de figuras	19
3.5	Proporcionalidade e funções	20
3.5.1	Proporcionalidade e gráfico de função	21

4	Teorema Fundamental da Proporcionalidade	23
4.1	Teorema Fundamental da Proporcionalidade	23
4.2	Teorema de Tales	25
5	Resolução de Problemas Envolvendo Proporcionalidade	29
5.1	Métodos para resolução de problemas	29
5.2	A Regra de Três	30
6	Aplicações em Sala de Aula	32
6.1	A Proporcionalidade no Currículo Escolar	32
6.1.1	Parâmetros Curriculares Nacionais	32
6.1.2	Matriz de Referência do SAEB	33
6.1.3	Matriz de Referência curricular do município de Contagem-MG	34
6.2	Atividades Realizadas	35
6.2.1	Densidade Demográfica	36
6.2.2	Velocidade Média	38
6.2.3	Densidade de uma solução	39
6.2.4	Índice de massa corporal	40
6.2.5	O número π	42
6.2.6	A Razão Áurea	43
6.2.7	Proporção áurea em objetos do cotidiano	45
6.2.8	A Proporção áurea no corpo humano	46
6.2.9	Escala Cartográfica	48
6.2.10	Realizando medidas reais e escala	50
7	Considerações Finais	53
	Bibliografia	54

Introdução

É notório que uma das principais falhas no ensino da Matemática é o conceito de proporcionalidade [11]. Tal conteúdo envolve tanto frações como multiplicação, está presente em todas as ciências e faz parte do dia a dia de qualquer pessoa, seja no trabalho, seja em casa. Ele é bastante simples na sua origem, nada mais é do que a relação entre duas variáveis.

As primeiras noções de proporção deveriam aparecer junto com os conceitos de multiplicação no início da escolarização. Muitos professores ensinam a multiplicação apenas como uma adição de parcelas iguais e não relacionam com a proporção. A adição repetida de parcelas não mostra o sentido de proporção que existe por trás dessa conta. Depois, só no 7º ano do ensino fundamental a proporção aparece, num capítulo isolado.

Sabe-se que a grande maioria dos alunos, mais tarde, saberão utilizar ou se lembrarão de apenas uma pequena parcela dos conhecimentos matemáticos ensinados nesse estágio de formação. Tendo em vista essa realidade, os professores devem valorizar o que ensinam utilizando práticas pedagógicas inovadoras na eminência de levar aos seus alunos, um conhecimento que seja ao mesmo tempo interessante, útil, estimulante e prazeroso.

O conceito de Proporcionalidade é fundamental não só no contexto escolar, mas também no cotidiano das pessoas. Ele é importante para lidar com várias situações do mundo, para estudar e compreender outras áreas do conhecimento, além de contribuir para o desenvolvimento cognitivo dos indivíduos.

Diante da importância desse conceito, este trabalho tem como objetivo propor algumas atividades chamando a atenção para a questão da compreensão adequada do tema, utilizando a matemática aplicada e buscando desenvolver com mais facilidade o interesse dos estudantes.

Para tanto, no Capítulo 2 tem-se o contexto histórico sobre como a proporção foi sendo utilizada ao longo dos anos pelos egípcios, babilônicos, gregos, árabes e renascentistas.

No Capítulo 3, apresenta-se o conceito de razão, proporção, grandezas diretamente e inversamente proporcionais, divisão em partes proporcionais e a relação entre proporcionalidade e funções.

O Capítulo 4 dedica-se ao Teorema Fundamental da Proporcionalidade apresentando sua demonstração e suas consequências, como por exemplo, o Teorema de Tales.

Os métodos de resolução de problemas envolvendo proporcionalidade é apresentado no Capítulo 5, dando ênfase ao método mais conhecido chamado Regra de Três.

O Capítulo 6 trata de como a proporcionalidade é apresentada nos Parâmetros Curriculares Nacionais, na matriz de referência do Saeb e na matriz de referência curricular do município de Contagem-MG, esse capítulo também apresenta-se as atividades realizada envolvendo o tema e os resultados obtidos.

Para finalizar, o Capítulo 7 é dedicado as considerações finais.

Não pretende-se com esse trabalho esgotar o tema, visto que é muito amplo e com diversas aplicações. O objetivo é reunir as informações centrais, fundamentadas em pesquisa bibliográfica e mostrar que com atividades simples pode-se estudar a proporcionalidade voltada para situações do cotidiano.

Contexto Histórico

Quando se volta a atenção para a história da matemática vê-se que os conceitos de razão e proporção tiveram dois papéis distintos e foram fundamentais no desenvolvimento da própria matemática, seja nos seus aspectos mais teóricos ou nos mais práticos. Além disso, tiveram uma importância na estruturação da compreensão de outras áreas de conhecimento pela matemática. Este capítulo tem o objetivo de apresentar como se desenvolveu e como foi aplicado o conceito de proporcionalidade no cotidiano de alguns povos ao longo dos anos.

2.1 Egito Antigo

A civilização egípcia foi formada por volta de 4000 a.C. estabelecendo-se às margens do rio Nilo. Era uma sociedade mais evoluída se comparada às civilizações neolíticas; caracterizou-se pelo uso da agricultura, do comércio, de questões ligadas à posse de terras, irrigação, construção de monumentos, dentre outros.

As informações sobre a Matemática egípcia são baseadas principalmente no papiro Rhind ou Ahmes que mede 5,5 m de comprimento por 0,32 m de largura, datado aproximadamente no ano 1650 a.C. nesse papiro encontra-se um texto matemático como um manual prático, com 87 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes. Há problemas que envolvem o conceito de proporcionalidade mostrando que os egípcios já faziam manipulações parecidas com a regra de três. A maioria desses problemas envolvem situações cotidianas dos egípcios [15].

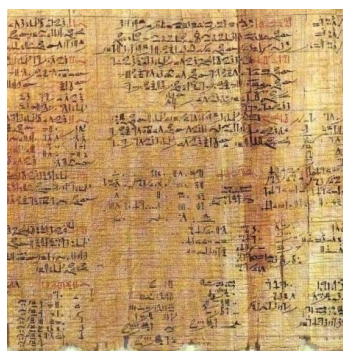


Figura 2.1: Fragmento do Papiro de Rhind [6]

Alguns exemplos de problemas apresentados no Papiro de Rhind envolvendo proporcionalidade [4].

2.1.1 Problema 63

Divisão proporcional de pães por um número de homens.

Reparta 700 pães entre quatro pessoas, sendo que as quantidades sejam distribuídas na proporção

$$\frac{2}{3} : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$$

Na solução desse problema Ahmes encontra as quantidades propostas no problema resolvendo a divisão do número de pães pela soma das frações na proporção então:

$$700 : \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = 700 : \left(\frac{7}{4} \right) = 700 \frac{4}{7} = 400$$

Depois disso, basta retirar a quantidade de pães para cada pessoa do valor encontrado:

$$\frac{2}{3} \text{ de } 400 = 266 + \frac{2}{3} \text{ de pães}$$

$$\frac{1}{2} \text{ de } 400 = 200 \text{ pães}$$

$$\frac{1}{3} \text{ de } 400 = 133 + \frac{1}{3} \text{ de pães}$$

$$\frac{1}{4} \text{ de } 400 = 100 \text{ pães}$$

Percebe-se que a resolução do problema é realizada de forma clara para o entendimento atual.

2.1.2 Problema 72

Qual é o número de pães de *pesu*¹ 45 que são equivalentes a 100 de *pesu* 10?

A solução é apresentada como

$$\frac{100}{10} \times 45 = 450$$

2.1.3 Problema 75

Qual é o número de pães de 30 *pesu* que podem ser feitos a partir da mesma quantidade de farinha de 155 pães com 20 *pesu*?

A solução realizada por Ahmes no Egito Antigo consiste na divisão de 155 por 20 e isso era feito do seguinte modo: Descobrir por quanto se deve multiplicar o 20 a fim de obter 155.

Os egípcios resolviam esse tipo de problema por duplicações sucessivas ou divisões

¹*pesu*: é a medida egípcia para a “consistência” inversa do pão, ou o inverso da densidade de grão. É expressa como a divisão entre a quantidade de pães e a quantidade de grãos.

por 2 do multiplicando. De modo que a solução desse problema é realizada da seguinte forma:

\	1	20
\	2	40
\	4	80
	2	40
	1	20
\	$\frac{1}{2}$	10
\	$\frac{1}{4}$	5
	$\frac{1}{20}$	1
	$7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	155

- Começa-se com 20.
- A segunda linha dobra o valor da primeira.
- A terceira linha dobra o valor da segunda linha.
- A quarta linha divide por 2 o valor da terceira linha.
- A quinta linha divide por 2 o valor da quarta linha.
- A sexta linha divide por 2 o valor da quinta linha.
- A sétima linha divide por 2 o valor da sexta linha.
- A oitava linha divide por 2 o valor da sétima linha.

Após fazer isso, marcavam com o símbolo “\”, os números da coluna da direita que somados dão 155, e somavam os números correspondentes na coluna da esquerda. Em seguida, para encontrar a resposta do problema, multiplica-se o resultado dessa soma por 30. Assim:

$$\left(7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \times 30 = 210 + 15 + 7 + \frac{1}{2} = 232 + \frac{1}{2}$$

Portanto, serão fabricados 232 pães e meio.

Em linguagem atual, o problema consiste em resolver a proporção $\frac{x}{30} = \frac{155}{20}$.

Percebe-se que se for utilizada a técnica atual de grandezas proporcionais para encontrar o valor pedido, será encontrada a mesma resposta.

2.2 Mesopotâmia

Por volta de 3000 a.C surgiu uma nova civilização às margens dos rio Tigre e Eufrates. Essa região conhecida como Mesopotâmia deu origem a civilização babilônica. Todo conhecimento matemático babilônico veio das tabletas de barro que eram cozidas no forno e secadas sob o sol e assim eram quase indestrutíveis.

Os babilônicos construíram tabelas contendo potências sucessivas de um dado número, parecidas com as tabelas logarítmicas.

Foram encontradas tabelas exponenciais (ou logarítmicas) para as bases 9, 16, 1,40 e 3,45 (todos quadrados perfeitos na base sexagesimal) que na base decimal são os números 9, 16, 100 e 225. Pois:

$$9 = 0.60 + 9$$

$$16 = 0.60 + 16$$

$$100 = 1.60 + 40$$

$$225 = 3.60 + 45$$

Essas tabelas tinham grandes lacunas, portanto os matemáticos babilônicos interpolavam por partes proporcionais para obter valores intermediários aproximados [15].

2.3 Grécia Antiga

A civilização grega desempenhou um papel importante no desenvolvimento da matemática dando significativas contribuições para modernizá-la. Principalmente no conceito de proporção, pois este foi objeto de estudo pelos gregos durante vários séculos.

A proporcionalidade era muito importante para os gregos que a utilizavam principalmente na agrimensura e arquitetura. Há indícios que foram eles que pela primeira vez sistematizaram a geometria em torno da proporcionalidade [15].

A seguir, apresenta-se alguns dos principais contribuidores da matemática grega.

2.3.1 Tales de Mileto

Tales nasceu na antiga colônia grega chamada Mileto, era um homem de alta inteligência é considerado o primeiro filósofo. Devido a várias viagens pelo Egito, adquiriu informações sobre astronomia e matemática, sendo considerado um discípulo dos egípcios e caldeus.

Tales usou seus conhecimentos sobre geometria e proporcionalidade para determinar a altura das pirâmides egípcias, para isso utilizou o que atualmente conhecemos como Teorema de Tales. Ele observou que os raios solares que chegam à Terra

estão na posição inclinada e são paralelos, dessa forma, ele concluiu que havia uma proporcionalidade entre as medidas da sombra e da altura das pirâmides [15].

Para resolver o problema da altura das pirâmides ele fincou uma estaca na areia, mediu as sombras respectivas da pirâmide e da estaca em uma determinada hora do dia.

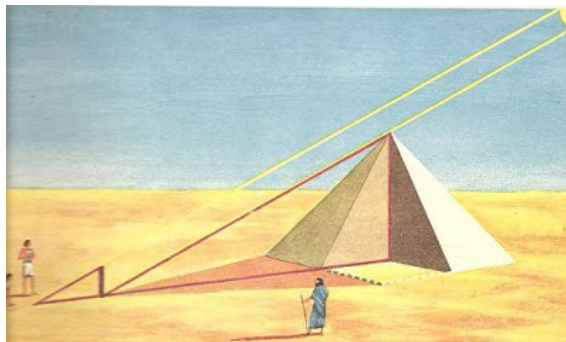


Figura 2.2: Cálculo da altura da pirâmide [13]

Algumas definições de Tales:

Definição 1: Duas ou mais retas de um mesmo plano formam um feixe de retas paralelas quando, tomadas duas a duas, são sempre paralelas.

Definição 2: Se uma reta corta uma das retas de um feixe de paralelas, então, ela corta também as demais. Dizemos que essa reta é transversal ao feixe de paralelas.

Conseqüentemente Tales escreveu o seguinte teorema:

Teorema 1: Um feixe de retas paralelas determina, sobre duas transversais, segmentos proporcionais.

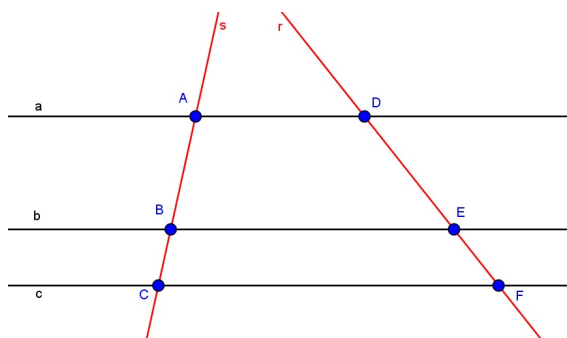


Figura 2.3: Feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais

Na Figura 2.3 de acordo com o Teorema de Tales, pode-se escrever as razões:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \qquad \frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE} \qquad \frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$$

Este é um dos teoremas mais importantes e utilizados na Matemática.

2.3.2 Pitágoras

A escola pitagórica recebeu esse nome derivado de seu fundador e principal representante: Pitágoras de Samos. Ele defendia que todas as coisas são números e o princípio fundamental de tudo seria a estrutura numérica. A geometria era baseada na teoria das proporções, sendo aplicada apenas aos comensuráveis.

Na Grécia, a palavra número somente era usada para os inteiros, uma vez que a fração era vista como relação entre inteiros ou como uma razão. A ideia da existência de quantidades que não podem ser expressas por números surge na matemática grega no contexto de alguns problemas geométricos que podem parecer elementares, como é o caso da diagonal de um quadrado ou do perímetro de uma circunferência.

No livro, “Os Elementos” XIII, de Euclides diz que os pitagóricos provavelmente conheciam as propriedades do pentágono regular. Uma das questões que mais encanta na geometria pitagórica diz respeito à construção do pentagrama ou pentágono estrelado [15].

Propriedade do pentágono regular

- Começando com um pentágono regular $ABCDE$ como na Figura 2.4

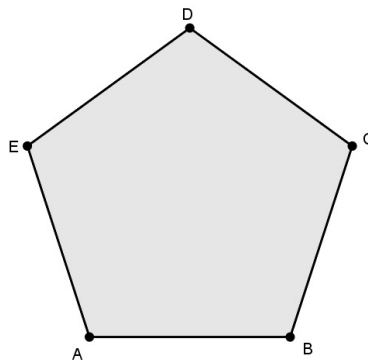


Figura 2.4: Pentágono $ABCDE$

- Traça-se suas diagonais, elas se cortam em pontos $FGHIJ$, que formam outro pentágono regular como na Figura 2.5.

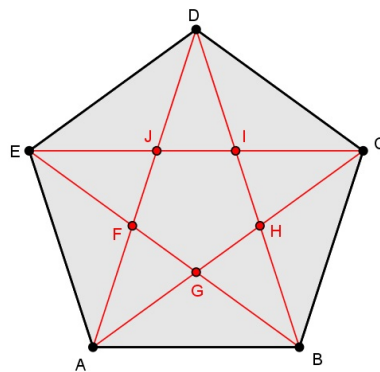


Figura 2.5: Pentágono $ABCDE$ com suas 5 diagonais

Observa-se que o triângulo BCI é semelhante ao triângulo EBC (isósceles) além desses, há muitos outros pares de triângulos semelhantes.

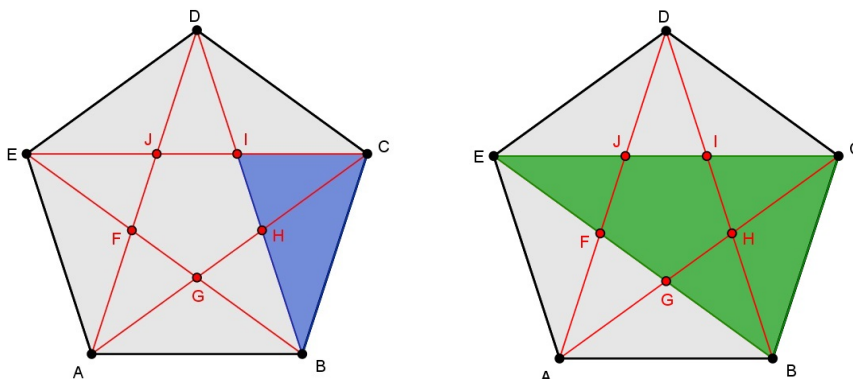


Figura 2.6: Pentágono destacando os triângulos BCI e EBC

Assim, é fácil ver que os pontos F, G, H, I e J dividem as diagonais em dois segmentos tais que a razão da diagonal toda para o maior segmento é igual à deste para o menor segmento. Algumas proporções que podem ser escritas:

$$\frac{AC}{GC} = \frac{GC}{AG} \qquad \frac{BD}{HD} = \frac{HD}{BH} \qquad \frac{CE}{IE} = \frac{IE}{CI}$$

$$\frac{DA}{JA} = \frac{JA}{DJ} \qquad \frac{EA}{FB} = \frac{FB}{EF}$$

Essa é a divisão de um segmento em média e extrema razão que se tornou muito familiar para os gregos. Por volta de dois mil anos mais tarde essa subdivisão ficou conhecida como “secção áurea” de um segmento.

- O processo pode ser repetido com o pentágono $FGHIJ$, suas diagonais se cortam nos pontos $KLMNO$ que formam outro pentágono regular como na Figura 2.7.

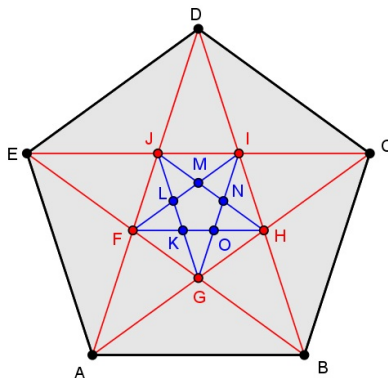


Figura 2.7: Pentágono $FGHIJ$ com suas 5 diagonais

- Traçando as diagonais do pentágono $KLMNO$ obtêm-se outro pentágono, como na Figura 2.8.

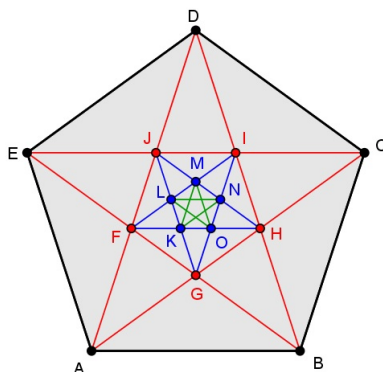


Figura 2.8: Pentágono $KLMNO$ com suas 5 diagonais

O processo é iterativo podendo ser repetido infinitamente e sempre obtêm-se diagonais que mantêm a propriedade de se dividirem em dois segmentos tais que a razão da diagonal toda para o maior é igual à deste para o menor segmento. Não se sabe se os pitagóricos observaram esse processo sem fim ou se fizeram conclusões importantes [15].

2.3.3 A Incomensurabilidade

A incomensurabilidade teria sido descoberta pela geometria grega antiga, na segunda metade do século V a.C. Um dos exemplos a apresentar grandezas incomensuráveis é o problema do lado e a diagonal de um quadrado que são incomensuráveis, isto é, quando a razão entre elas não é igual a razão de um número inteiro para outro número inteiro.

Um dos procedimentos que podem estar ligados às grandezas incomensuráveis é o da *antifarese* ou *subtrações recíprocas*. O objetivo da *antifarese* era definir e comparar razões sem a necessidade do conceito de um número racional, ou de fração, e independentemente da razão estar inserida numa relação de proporção, desse modo evita-se o problema de incomensurabilidade.

Euclides adiou o máximo que pode o tratamento de grandezas incomensuráveis em seu livro V de “Os Elementos” [15].

A consequência mais importante da descoberta da incomensurabilidade é o fato de ter separado o universo das grandezas e o universo dos números. Portanto, o fato de existirem grandezas incomensuráveis tornou-se necessária uma nova teoria das razões e proporções [18].

2.3.4 Eudoxo

Eudoxo (aprox.408-355 a.C.), um dos mais famosos matemáticos gregos da Academia de Platão, foi o descobridor da teoria das proporções usada no livro V de “Os elementos” de Euclides. Os enunciados do livro V não atribuem significados às razões separadamente, mas somente ao fato delas estarem numa relação de proporcionalidade e servirá para o estudo das proposições geométricas do livro VI.

O conceito de razão no livro de Euclides não é cronológico, uma vez que nos livros I a IV não é utilizada a ideia de proporção e que os livros VII a IX atribuídos aos pitagóricos sejam mais antigos.

No início do livro encontra-se as seguintes definições:

Definição 3: Uma razão é um tipo de relação que diz respeito ao tamanho de duas grandezas do mesmo tipo.

Essa definição deixa claro que o conceito de razão é aplicado a grandezas de mesma natureza. Não podendo haver, por exemplo, razão entre um comprimento e uma área.

Definição 4: Diz-se que duas grandezas possuem uma razão entre elas se estas grandezas, quando multiplicadas, podem se ultrapassar mutuamente.

Essa definição fornece um critério para determinar se duas grandezas possuem uma razão entre elas.

Definição 5: Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta se, quando equimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que, os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondente.

Essa definição apresenta o critério de comparação de duas razões de grandezas. Na linguagem atual pode ser escrita como:

Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então dados $m, n \in \mathbb{Z}$. Temos que

$$ma < nb \Rightarrow mc < nd$$

ou

$$ma = nb \Rightarrow mc = nd$$

ou

$$ma > nb \Rightarrow mc > nd$$

Definição 6: Grandezas que possuem a mesma razão são chamadas proporcionais.

Euclides desenvolveu toda a teoria das proporções no Livro V, já no Livro VI explorou-a provando teoremas relativos a razões e proporções em triângulos, paralelogramos e outros polígonos semelhantes [15].

2.4 Os Árabes

O desenvolvimento da Matemática teve contribuições dos árabes particularmente no que se refere ao conceito de proporcionalidade. Eles usavam a regra da falsa posição para resolver problemas algébricos.

Omar Khayyam, autor da obra *Álgebra*, contribuiu para acabar com a separação entre álgebra numérica e a geométrica o que somente aconteceu completamente, mais tarde com Descartes, mas Khayyam avançou nesta direção quando escreveu, “Quem quer que imagine que a álgebra é um artifício para achar quantidades desconhecidas pensou em vão. Não se deve dar atenção ao fato de a álgebra e a geometria serem diferentes na aparência. As álgebras são fatos geométricos que são provados”. Khayyam chegou perto da definição de números irracionais quando substituiu a teoria das proporções de Euclides por um método numérico e lutou com o conceito de número real em geral.

Khayyam expôs uma teoria elaborada sobre proporções, pois ele acreditava que Euclides no seu livro V não conseguiu exprimi a essência de uma razão, que é a média de uma grandeza por outra. Ele comparava razões decompondo-as em frações contínuas e verificava se elas eram comensuráveis. [15]

2.5 Idade Média e Renascimento

Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci foi um dos mais importantes matemáticos, estudou com um professor muçulmano e viajou com seu pai ao Egito, Síria e Grécia. Portanto, conhecia os métodos algébricos árabes. Sua obra *Liber abaci*, destacou-se durante a Idade Média pela sua riqueza de conhecimentos matemáticos.

Os problemas matemáticos do *Liber abaci* que foram utilizados por comerciantes e negociantes envolvia proporção. Na solução dos problemas era utilizado o método da falsa posição e da falsa posição dupla.

No período renascentista muitos dos estudiosos se dedicaram a escrever sobre matemática e é comum encontrar em suas obras o emprego do conceito de proporcionalidade. Thomas Bradwardine e Nicole Oresme foram os homens que deram uma visão mais ampla da proporcionalidade. Em *Tractatus de proportionibus* de 1328, Bradwardine desenvolveu a teoria de Boécio da proporção dupla, tripla em geral “n-upla”. Em *De proportionibus proportionum* de 1360, Oresme generalizou a teoria da proporção de Bradwardine incluindo qualquer potência de expoente racional e deu regras para combinar proporções que são equivalentes às nossas leis sobre expoentes.

Chuquet, Stifel e Tartaglia estudaram cálculos com números racionais e irracionais abordaram a teoria das equações e proporções [15].

O emprego das proporções durante esse período foi muito relevante para a arte, destaca-se a proporção áurea que encantou muitos artistas daquela época.

Grandezas Proporcionais

As noções de medida são muito antigas e estão presentes em nosso cotidiano. O vendedor da loja mede o comprimento, o funcionário do mercado mede a massa, uma pessoa mede o tempo, a médica mede a temperatura. Há várias situações que é necessário realizar medições.

Grandeza é tudo o que pode ser medido ou contado. Em algumas situações duas ou mais grandezas podem estar relacionadas, sendo essa relação diretamente ou inversamente proporcional.

A proporcionalidade é um conceito que o indivíduo constrói ao longo de sua vida e tem grande utilização na Matemática e nas Ciências, pois nos permite estabelecer relações entre grandezas.

Muitos aspectos da vida cotidiana são regidos de acordo com leis de proporcionalidade, tornando o desenvolvimento do raciocínio proporcional uma habilidade extremamente importante na interpretação de fenômenos do mundo real. Para compreendermos melhor a necessidade do estudo da proporcionalidade, vejamos as seguintes situações:

- O preço de alguns produtos varia com a quantidade comprada.
- O tempo gasto em uma viagem varia com a velocidade média do meio de locomoção utilizado.

A Figura 3.1, mostra a proporcionalidade presente em tirinhas da personagem Mafalda de Quinho.

Nelas a personagem está relacionando a quantidade de nomes Silva na Lista telefônica com o total de nomes e comparando o número de chineses com a população mundial e relacionando o tamanho da poça de água para o tamanho da formiga e o canal da mancha para o tamanho dos personagens. Mostrando que o conceito de proporcionalidade aparece nas situações simples do cotidiano.



Figura 3.1: Noção de proporcionalidade nas “tirinhas” da personagem Mafalda

3.1 Conceito de razão e proporção

Os conceitos de razão e proporção estão ligados ao quociente. A razão é o quociente de dois números, e a proporção é a igualdade entre duas razões.

3.1.1 Razão

A razão entre dois números a e b , com $b \neq 0$, é o quociente de $a : b$, que pode ser indicado por $\frac{a}{b}$ ou outra forma equivalente.

Alguns exemplos de razões:

1. Uma das maneiras de comparar números é calcular a razão entre eles. Imagine a seguinte situação: você tem R\$20,00 e eu tenho R\$4,00. Podemos comparar nossas quantias com a divisão

$$20 : 4 = 5$$

Dizemos então que você tem o quádruplo do que eu tenho, ou então, que a razão entre R\$20,00 e R\$4,00 é 5. Isso significa que a cada R\$1,00 meu você tem R\$5,00.

2. Na Figura 3.2 a razão que representa a quantidade de cadeiras pretas em relação ao total de cadeiras é $\frac{17}{70}$

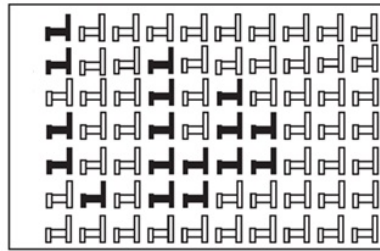


Figura 3.2: Razão entre cadeiras pretas e o total é $\frac{17}{70}$

3.1.2 Proporção

Se duas razões são iguais, elas formam uma proporção. Assim, se a razão entre os números a e b é igual à razão entre os números c e d dizemos que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

é uma proporção.

- Os números a , b , c e d são chamados termos da proporção.
- O primeiro e o último termos citados são os extremos da proporção (a e d). Os outros dois são os meios da proporção (b e c).

Alguns exemplos de proporções:

1. As razões $\frac{1}{5}$ e $\frac{6}{30}$ são iguais, então:

$$\frac{1}{5} = \frac{6}{30} = 0,2$$

Lemos essa expressão como: 1 está para 5 assim como 6 está para 30.

2. A Figura 3.3 mostra o desenho de dois barcos proporcionais se compararmos o comprimento e a altura deles.

$$\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Ou seja, para manter a proporção quando se dobra o comprimento do barco a altura também dobra.

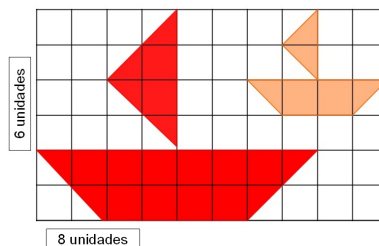


Figura 3.3: Barcos proporcionais

3.2 Grandezas Proporcionais

Sejam x e y dois tipos de grandezas. Dizemos que y é proporcional a x quando essas grandezas x e y estão de tal modo relacionadas que a cada valor de x corresponde um valor bem determinado de y .

Dizemos então que existe uma correspondência $x \rightarrow y$ e que y é função de x .

3.2.1 Grandezas diretamente proporcionais

Situações em que duas grandezas, x e y , variam sempre na mesma razão são diretamente proporcionais. Assim:

- Quanto maior for x , maior será y . Em linguagem matemática: se $x \rightarrow y$ e $x' \rightarrow y'$ então $x < x'$ implica $y < y'$.
- Se $x_0 \rightarrow y_0$ e seja c um número qualquer então $c.x_0 \rightarrow c.y_0$

3.2.2 Grandezas inversamente proporcionais

Há situações em que duas grandezas variam sempre uma na razão inversa da outra. Nesse caso, as grandezas são diretamente proporcionais.

- Quanto maior for x , menor será y . Em linguagem matemática: se $x \rightarrow y$ e $x' \rightarrow y'$ então $x < x'$ implica $y > y'$.
- Se $x_0 \rightarrow y_0$ e seja c um número qualquer então $c.x_0 \rightarrow \frac{1}{c}.y_0$

3.2.3 Grandeza proporcional a várias outras

Em muitas situações tem-se uma grandeza w , se relacionando a por exemplo três outras, x , y , z , que a cada escolha de valores para estas últimas corresponde um valor bem determinado para w . Então w é uma função das variáveis x , y , z e escreve-se $w = f(x, y, z)$

Nestas condições, diz-se que w é *diretamente proporcional* a x quando:

- Para quaisquer valores fixados de y e z a grandeza w é uma função crescente de x , isto é, se $x < x' \implies f(x, y, z) < f(x', y, z)$.
- Para todo $n \in \mathbb{N}$ e x , y e z quaisquer tem-se $f(nx, y, z) = nf(x, y, z)$.

Analogamente, diz-se que w é *inversamente proporcional* a x quando:

- Para quaisquer valores fixados de y e z a grandeza w é uma função crescente de x , isto é, se $x < x' \implies f(x, y, z) > f(x', y, z)$.
- Para todo $n \in \mathbb{N}$ e x , y e z quaisquer tem-se $f(nx, y, z) = \frac{1}{n}f(x, y, z)$.

3.3 Divisão em partes proporcionais

Dadas duas seqüências (a_1, a_2, \dots, a_n) e (b_1, b_2, \dots, b_n) , diz-se que os números b_1, b_2, \dots, b_n são proporcionais aos números a_1, a_2, \dots, a_n quando

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \dots = \frac{b_n}{a_n} = k$$

Então pode-se escrever,

$$b_1 = ka_1$$

$$b_2 = ka_2$$

...

$$b_n = ka_n$$

Portanto, os pontos do plano dados pelas coordenadas $P_1 = (a_1, b_1), P_2 = (a_2, b_2), \dots, P_n = (a_n, b_n)$ estão sobre a reta $y = kx$. Note que a ordem dos elementos nas seqüências proporcionais é fundamental.

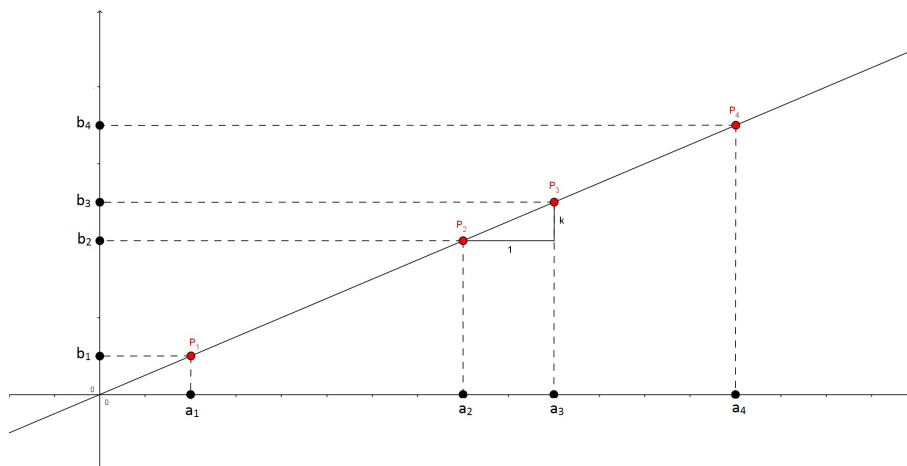


Figura 3.4: Os números (b_1, b_2, b_3, b_4) são proporcionais aos números (a_1, a_2, a_3, a_4)

Para realizar a divisão em partes proporcionais considere que:

Seja $x \rightarrow y$ uma proporcionalidade. Se $x_1 \rightarrow y_1, x_2 \rightarrow y_2, \dots, x_n \rightarrow y_n$. Então,

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \rightarrow y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

Como $y_1 = kx_1, y_2 = kx_2, \dots, y_n = kx_n$, segue-se que:

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = kx_1 + kx_2 + \dots + kx_n = k(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

Ou seja,

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \dots = \frac{y_n}{x_n} = k$$

Então,

$$\frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \dots = \frac{y_n}{x_n}.$$

Dividir um número a em partes proporcionais a a_1, a_2, \dots, a_n significa encontrar x_1, x_2, \dots, x_n , proporcionais a a_1, a_2, \dots, a_n e tais que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$.

Deve-se ter:

$$x_1 = ka_1, x_2 = ka_2, \dots, x_n = ka_n$$

$$a = x_1 + x_2 + \dots + x_n = k(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

$$k = \frac{a}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

Resulta em

$$x_1 = \frac{aa_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}, \quad x_2 = \frac{aa_2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}, \dots, \quad x_n = \frac{aa_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}.$$

3.4 Exemplos de grandezas proporcionais

Nesta seção será apresentada alguns exemplos de grandezas proporcionais na geometria e na matemática financeira.

3.4.1 Exemplo 1: Segmentos proporcionais

Consideremos no plano um ângulo $\angle AOB$ é uma reta r que não é paralela aos lados OA e OB (Figura 3.5). Dado qualquer segmento de reta de comprimento m , contido em OA , as paralelas a r traçadas por suas extremidades determinam sobre o lado OB um segmento de comprimento n .

Afirma-se que a correspondência $m \rightarrow n$ é uma proporcionalidade.

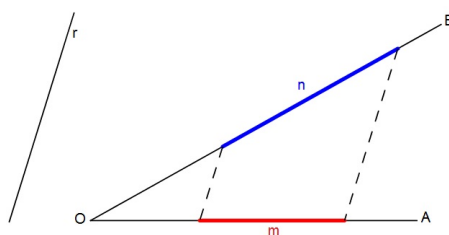


Figura 3.5: Diretamente proporcional

Para justificar esta afirmação deve-se mostrar que o comprimento n depende apenas de m mas não da posição do segmento que se toma no lado OA . Tome sobre o lado OA dois segmentos de mesmo comprimento m , como na Figura 3.6, construa HJ e LN são paralelos a OA , os triângulos HIJ e LMN são congruentes pois, $\hat{H} = \hat{L}$, $HJ = LN$ e $\hat{I} = \hat{M}$, caso (ALA).

Logo, $\overline{HI} = \overline{LM} = n$

Diante disso, sempre $m \rightarrow n$ e $m' \rightarrow n'$, para comparar n com n' pode-se supor que m e m' são medidas de segmentos com origem no vértice O . Então se $m < m' \Rightarrow n < n'$ e que $m < k.m' \Rightarrow n < k.n'$ como mostra a Figura 3.7.

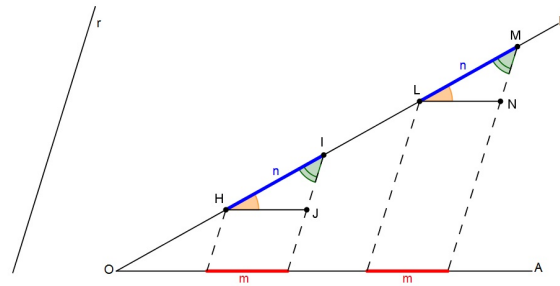


Figura 3.6: O comprimento n depende apenas de m

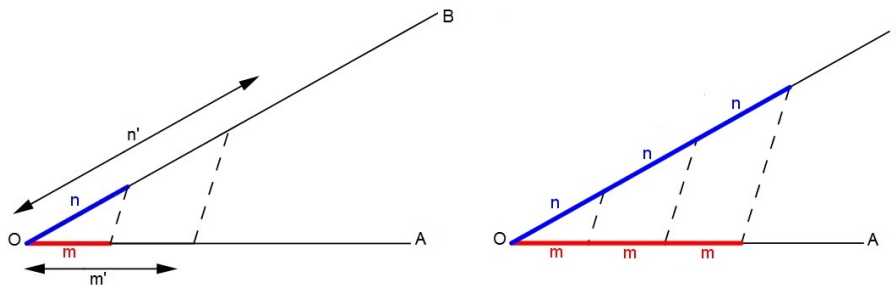


Figura 3.7: Construção de segmentos proporcionais

Exemplo retirado de Elon [19].

3.4.2 Exemplo 2: Matemática financeira

Investindo uma quantia c numa aplicação financeira, após decorrido um mês obtém-se um montante M . A correspondência $c \rightarrow M$ é uma proporcionalidade. O que se recebe no fim de um mês é proporcional ao que foi aplicado. Evidentemente, aplicando-se mais recebe mais e investindo uma quantia k vezes maior do que C , pode-se considerar essa operação como n investimentos iguais a c , logo o que se recebe é $k.M$.

Se uma quantia fixa gera, após um mês de investimento, um retorno M , não pode-se afirmar que após k meses essa quantia gere o retorno $k.M$, mesmo que a taxa de juros seja constante. Pois ao final de cada mês a quantia aplicada novamente é maior à existente no mês anterior mais os juros. Assim o retorno é proporcional ao capital inicial mas não é proporcional ao tempo de investimento.

Exemplo retirado de Elon [19].

3.4.3 Exemplo 3: Área de figuras

Entre retângulos de base x , altura h e área igual a 4, tem-se que a altura h é inversamente proporcional a x , com $h = \frac{4}{x}$.

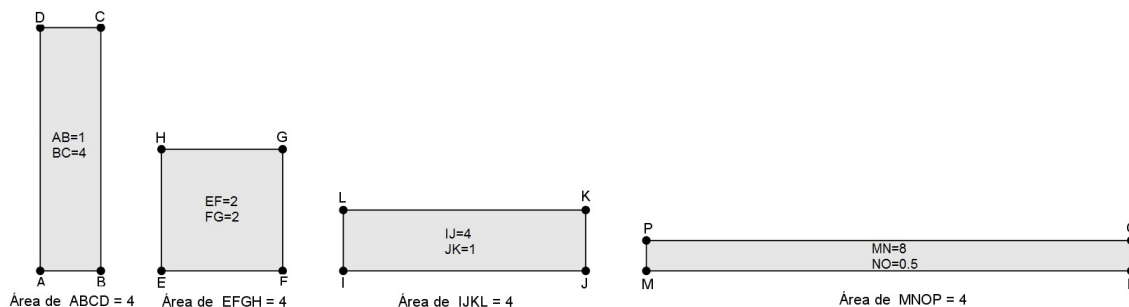


Figura 3.8: Retângulos com a mesma área: altura é inversamente proporcional ao comprimento

3.5 Proporcionalidade e funções

Até o momento a proporcionalidade foi definida utilizando grandezas, nessa seção será apresentada a relação da proporcionalidade com funções afins.

Substituindo as grandezas por suas medidas, que são números reais, pode-se escrever:

Uma proporcionalidade é uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer valores de $c, x \in \mathbb{R}$ tem-se $f(cx) = cf(x)$ (proporcionalidade direta) ou $f(cx) = \frac{f(x)}{c}$ se $a \neq 0$ (proporcionalidade inversa).

Se a função satisfaz a relação $f(cx) = cf(x) \quad \forall \quad c, x \in \mathbb{R}$

Então, escrevendo $a = f(1)$, tem-se

$$f(c) = f(c.1) = c.f(1) = c.a$$

Portanto, $f(x) = ax, \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}$.

Logo, f é uma *função linear*.

Pode-se concluir que: se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma proporcionalidade, então:

Para quaisquer x_1, x_2 com $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$, tem-se:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

Com efeito, ambos esses quocientes são iguais ao fator de proporcionalidade a .

A igualdade $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ chame-se proporção.

Para a proporcionalidade inversa tem-se, uma função $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ tal que, para quaisquer valores de $c, x \in \mathbb{R}$ tem-se $f(cx) = \frac{f(x)}{c}$.

Utilizando o mesmo raciocínio anterior, pode-se dizer que para qualquer $x \in \mathbb{R}^*$ tem-se que $f(x) = \frac{a}{x}$.

Em suma, a grandeza y é diretamente (ou inversamente) proporcional à grandeza x quando existe um número a tal que, $y = ax \quad \forall x \in \mathbb{R}$, ou $\left(y = \frac{a}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \right)$,

respectivamente.

O coeficiente a chama-se o *fator de proporcionalidade*. Em diversas situações em que usa-se a proporcionalidade, o fator de proporcionalidade a é irrelevante e/ou difícil de se calcular.

3.5.1 Proporcionalidade e gráfico de função

Essa seção apresenta alguns exemplos de Gráficos de funções e a relação com a proporcionalidade.

1. Quando existe proporcionalidade direta entre duas grandezas, o gráfico que une os pontos correspondentes é uma reta que contém a origem.

$$\begin{cases} y = 2.x \\ a = 2 \end{cases} \quad (3.1)$$

A Tabela 3.1 foi construída utilizando valores aleatórios para x substituindo na Equação 3.1 obtendo assim, os valores de y .

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y	2	3	4	5	6	7	8

Tabela 3.1: Proporcionalidade direta dada pela forma $y = 2.x$

Com base nos dados da Tabela 3.1 constrói-se o gráfico apresentado a seguir:

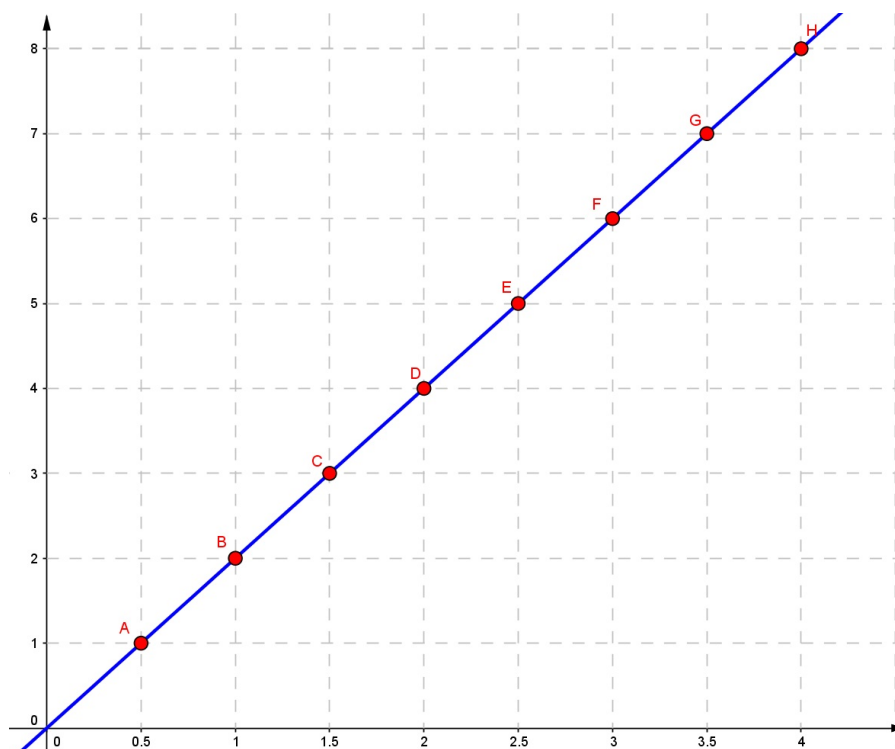


Figura 3.9: Gráfico de função diretamente proporcional: $f(x) = 2x$

2. Quando existe proporcionalidade inversa entre duas grandezas, o gráfico que une os pontos correspondentes é uma linha curva, dividida em dois ramos, a que se chama hipérbole. A curva aproxima-se cada vez mais dos eixos, conforme a se aproxima do zero, mas nunca lhe chega a tocar.

Utilizando os dados do Exemplo 3.4.3 sobre área de retângulos tem-se que:

$$\begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ a = \frac{1}{4} \end{cases} \quad (3.2)$$

Onde y é a altura, x é a base de um retângulo com área igual a 4.

A Tabela 3.2 foi construída utilizando valores aleatórios para x substituindo na Equação 3.2 obtendo assim, os valores de y .

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1

Tabela 3.2: Proporcionalidade inversa dada pela forma $y = \frac{4}{x}$

Com base nos dados da Tabela 3.2 constrói-se o gráfico apresentado a seguir:

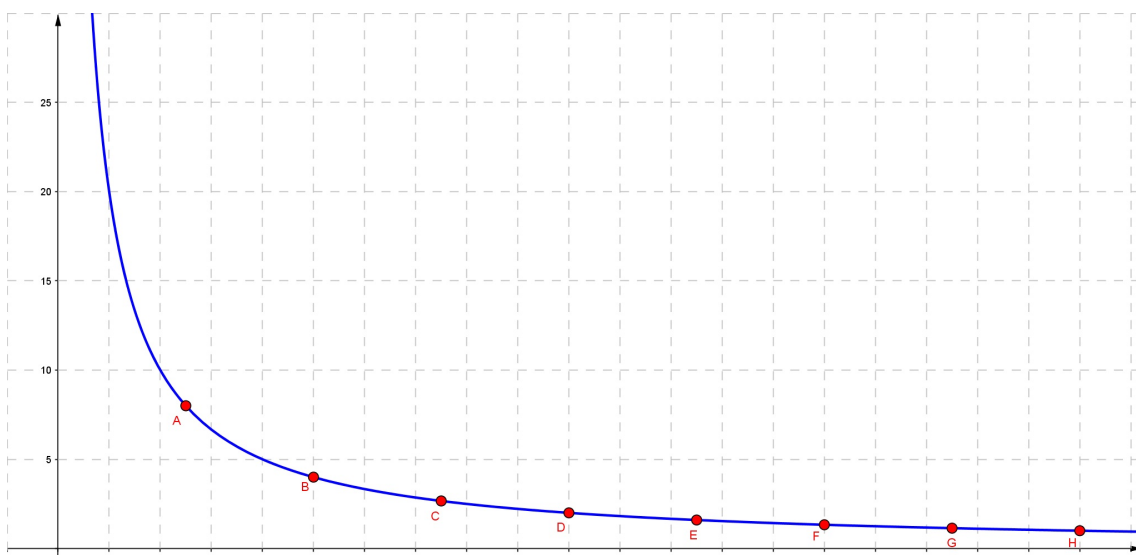


Figura 3.10: Ramo positivo do gráfico de função inversamente proporcional:

$$f(x) = \frac{4}{x}$$

Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Neste capítulo será abordada a demonstração do Teorema Fundamental da Proporcionalidade e suas implicações. A demonstração é baseada nos livros de Elon [17] e [19].

4.1 Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Para ter certeza de que a correspondência $x \rightarrow y$ é uma proporcionalidade como foi dito na Seção 3.2 deve-se mostrar que a definição:

Uma proporcionalidade é uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer valores de c , $x \in \mathbb{R}$ tem-se $f(cx) = cf(x)$ (proporcionalidade direta) ou $f(cx) = \frac{f(x)}{c}$ se $c \neq 0$ (proporcionalidade inversa).

Se a função satisfaz a relação $f(cx) = cf(x) \quad \forall \quad c, x \in \mathbb{R}$.

Que foi apresentada na Seção 3.5 vale para todos os valores reais de c e x .

O Teorema Fundamental da Proporcionalidade é a chave para determinar, em todas situações, se uma dada função é ou não linear.

Teorema 2: Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente (análogo para decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.
2. Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
3. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Provar que essas afirmações são equivalentes significa provar que (1) \Rightarrow (2), (2) \Rightarrow (3) e (3) \Rightarrow (1).

(1) \Rightarrow (2)

Inicialmente, sabe-se que para todo número racional $r = \frac{m}{n}$, com m e $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}$ temos que pela hipótese 1

$$nf(rx) = f(nrx) = f(mx) = mf(x),$$

logo

$$f(rx) = \frac{m}{n}f(x) = rf(x) \tag{4.1}$$

Como $a = f(1)$ e $f(0) = 0f(0) = 0$, e usando, o fato de f ser monótona conclui-se que $a = f(1) > f(0) = 0$. Assim, a é positivo. Além disso, temos que $f(r) = f(r1) = rf(1) = ra = ar$ para todo $r \in \mathbb{Q}$

Agora, para mostrar que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponha, por absurdo, que exista $a > 0$ irracional tal que $f(ax) \neq af(x)$ para algum $x \in \mathbb{R}$. Então, tem-se as condições:

$$f(ax) < af(x) \tag{4.2}$$

ou

$$f(ax) > af(x) \tag{4.3}$$

Considere o primeiro caso.

Então, $\frac{f(ax)}{f(x)} < a$. Se r é um valor racional próximo de a , de modo que $\frac{f(ax)}{f(x)} < r < a$. Logo,

$$f(ax) < rf(x) < af(x)$$

Como r é racional, vale $rf(x) = f(rx)$. Assim podemos escrever $f(ax) < f(rx) < af(x)$. Em particular $f(ax) < f(rx)$.

Mas com $r < a$, tem-se $rx < ax$ e como (4.2), obriga que $f(rx) < f(ax)$ e não $f(ax) < f(rx)$.

Esta contradição mostra que não é possível ter-se $f(ax) < af(x)$. Analogamente mostra-se que $f(ax) > af(x)$ é impossível.

Portanto, deve ser $f(ax) = af(x)$ para quaisquer $a, x \in \mathbb{R}$.

(2) \Rightarrow (3)

Sabe que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Deve mostrar que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. De fato, como $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$ com $a = f(1)$. Então,

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

(3) \Rightarrow (1)

Sabe-se que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Então,

$$f(\underbrace{x+x+\dots+x}_n) = \underbrace{f(x) + f(x) + \dots + f(x)}_n = nf(x)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e qualquer $x \in \mathbb{R}$. □

Esse Teorema é importante pois, para saber se uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é linear basta verificar apenas duas condições:

1. f deve ser monótona,
2. $f(nx) = nf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{Z}$.

4.2 Teorema de Tales

Um resultado básico de proporcionalidade em Geometria é o Teorema de Tales, que se apresenta a seguir, como exemplo de aplicação.

Teorema 3: Um feixe de retas paralelas determina, sobre duas transversais, segmentos de reta proporcionais.

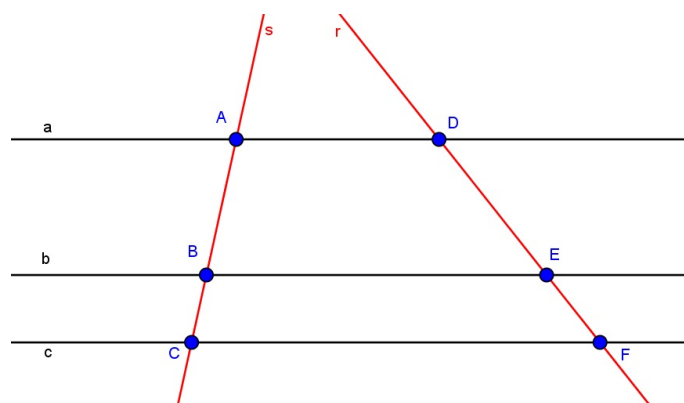


Figura 4.1: Feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais

De acordo com a Figura 4.1 de acordo com o Teorema de Tales, pode-se escrever as razões

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$$

Demonstração. Considere as retas paralelas a, b, c , que determinam sobre a transversal s os segmentos \overline{AB} e \overline{BC} , e sobre a transversal r os segmentos \overline{DE} e \overline{EF} . Mostrar que os segmentos \overline{AB} e \overline{BC} , que têm medidas racionais, são proporcionais aos segmentos de reta \overline{DE} e \overline{EF} , ou seja:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

Divide-se o segmento AB em p partes e o segmento BC em q partes, todas de medida x . Na Figura 4.2, por exemplo $p = 4$ e $q = 2$.

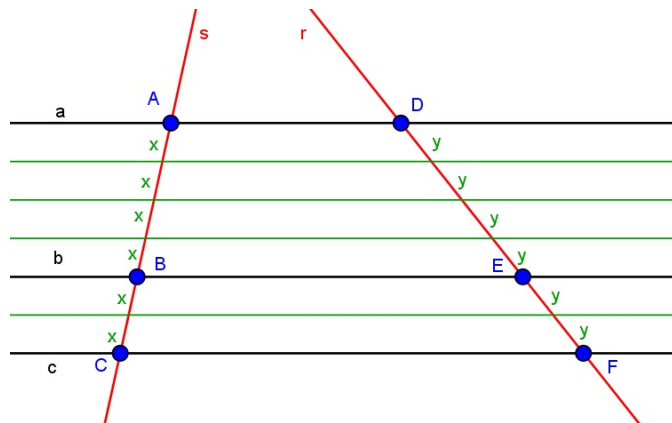


Figura 4.2: Demonstração Teorema de Tales

Ao traçar as retas paralelas indicadas em verde, elas determinam, na reta r , segmentos de reta de mesma medida. Nesse caso, indica-se essa medida por y .

Assim, tem-se:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{p \cdot x}{q \cdot x} = \frac{p}{q} \quad (4.4)$$

$$\frac{DE}{EF} = \frac{p \cdot y}{q \cdot y} = \frac{p}{q} \quad (4.5)$$

Comparando as Igualdades (4.4) e (4.5), pode-se escrever a proporção:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

□

O teorema a seguir é uma das consequências do Teorema de Tales.

Teorema 4: Toda paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros dois lados em segmentos proporcionais.

Demonstração. Seja o triângulo ABC.

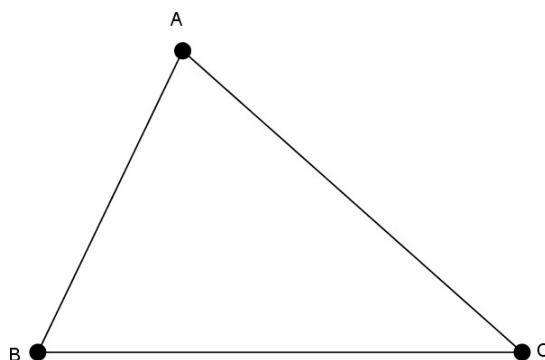


Figura 4.3: Triângulo ABC

Considere os pontos X , X_1 e X_2 no lado AB . Traça-se paralelas a BC passando pelos pontos X , X_1 e X_2 que cruzam AC , respectivamente, em Y , Y_1 e Y_2 .

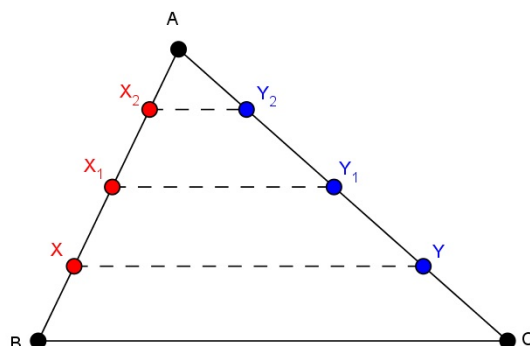


Figura 4.4: Triângulo ABC e segmentos paralelos ao lado BC

Deve-se mostrar que o comprimento XB é diretamente proporcional ao comprimento YC .

Como XY e X_1Y_1 são paralelos e se $XB < X_1B$ então $YC < Y_1C$. Pode-se escolher os pontos X , X_1 e X_2 em AB de tal forma que $XX_1 = X_1X_2$ nesse caso será mostrado que $YY_1 = Y_1Y_2$.

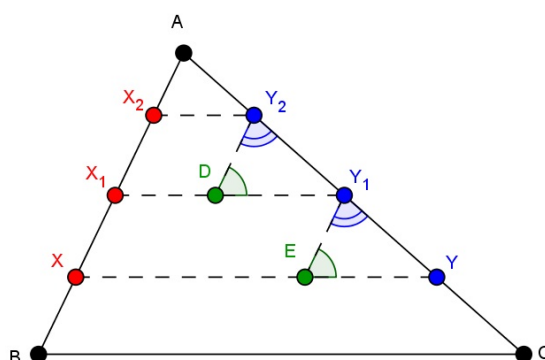


Figura 4.5: Triângulo ABC e segmentos paralelos ao lado AB

De fato, tome pontos D em X_1Y_1 e E em XY de modo que Y_2D e Y_1E sejam paralelos a AB . Como $\overline{Y_2D} = \overline{Y_1E}$, $\angle Y_2DY_1 = \angle Y_1EY_2$ e $\angle Y_1DY_2 = \angle Y_2EY_1$, pois são ângulos correspondentes. Então os triângulos Y_2DY_1 e Y_1EY_2 são congruentes. Logo $Y_2Y_1 = Y_1Y_2$.

Portanto, tem-se pelo Teorema 3 que YC é diretamente proporcional a XB e que existe uma contante k tal que, para todo ponto X do segmento AB tem-se

$$\overline{YC} = k\overline{XB} \tag{4.6}$$

Se $X = A$, então $Y = A$ e

$$\overline{AC} = k\overline{AB} \tag{4.7}$$

Subtraindo (4.6) de (4.7) tem-se

$$\overline{AY} = k\overline{AX} \quad (4.8)$$

Finalmente dividindo (4.8) por (4.6), tem-se

$$\frac{AY}{YC} = \frac{AX}{XB} \quad (4.9)$$

□

O que mostra que toda paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros dois lados em segmentos proporcionais.

Resolução de Problemas Envolvendo Proporcionalidade

Para resolver problemas envolvendo grandezas proporcionais existem três métodos:

- Método direto
- Redução à unidade
- Regra de três

O objetivo deste capítulo é apresentar esses métodos de resolução e mostrar como desenvolver melhor o raciocínio sobre proporcionalidade dos estudantes.

5.1 Métodos para resolução de problemas

Para melhor entendimento considere o problema proposto no ENEM 2012.

Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas. Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de:

- (a) 12 kg
- (b) 16 kg
- (c) 24 kg
- (d) 36 kg
- (e) 75 kg

1. Método direto

Esse método é aplicável apenas quando os dados são números pequenos ou “fáceis”. Como 30 gotas é 6 vezes 5 gotas, então a massa corporal do filho será 12 kg, pois 12 é igual a 2 vezes 6.

2. Redução à unidade

Se 5 gotas são ministradas para cada 2 kg de massa, 1 gota será para $\frac{2}{5}$ kg de massa. Então 30 gotas devem ser medicadas para uma pessoa com massa de $30 \times \frac{2}{5} = 12$ kg. Esquematicamente:

	gotas	massa	
	5	2	
$\div 5$			$\div 5$
	1	$\frac{2}{5}$	
$\times 30$			$\times 30$
	30	12	

3. Regra de três

Seja x a massa corporal da criança que se deseja saber. Então, 5 gotas estão para 2 kg assim como 30 gotas estão para x . Ou seja

$$\frac{5}{2} = \frac{30}{x}$$

Logo, $x = (30 \times 2) \div 5 = 12$

Seja qual for o método utilizado para resolver um problema deste tipo é necessário verificar se as grandezas envolvidas são proporcionais.

Dentre esses métodos, o mais utilizado pela maioria dos professores é o da regra de três, mas algumas vezes não é o mais apropriado, uma vez que os estudantes não têm hábito de verificar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais.

5.2 A Regra de Três

Aryabhata, um importante matemático hindu, em sua obra *Aryabhatiya* apresenta numa linguagem bastante floreada a solução para o problema de encontrar o quarto termo de uma proporção simples:

Na regra de três multiplica-se o fruto pelo desejo e divide-se pela medida. O resultado será o fruto do desejo [15].

Hoje chama-se regra de três e diz que se

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \text{ então, } x = \frac{bc}{a}$$

onde a é a “medida”, b o “fruto”, c o “desejo” e x o “fruto do desejo”.

Durante séculos a regra recebeu a mais alta consideração da parte dos mercadores. Ela era enunciada mecanicamente, sem nenhuma justificção, e seus vínculos com as proporções só foram conhecidos ao fim do século XIV. Eis como Brahmagupta enunciava a regra: “Na regra de três, os nomes dos termos são Argumento, Fruto e Requisito. O primeiro e último termos devem ser semelhantes. Requisito multiplicado por Fruto e dividido por Argumento é o Produto”[15].

Este é o método mais utilizado na resolução de problemas proporcionais ele consiste em resolver problemas que envolvam quatro valores, dos quais três são conhecidos e por meio deles determina-se o valor desconhecido.

A Regra de Três durante muito tempo foi abordada, exaustivamente, com métodos e algoritmos e dava-se uma grande importância a seu manuseio. Era considerada apenas como uma regra, sem fornecer maiores justificativas ou explicações. Ao longo dos anos foi-se adequando o modo de se ensinar problemas envolvendo razões e proporções, questionando bastante a eficiência da Regra de Três.

A maioria dos livros didáticos resolvem problemas envolvendo proporções utilizando a Regra de Três de forma mecanizada. Devido a isso se o professor quiser desenvolver o raciocínio proporcional em seus alunos deve recorrer a outros recursos.

Uma prática comum é ensinar o aluno a descobrir a equação de dependência entre as variáveis envolvidas com o auxílio da seguinte regra. Fixadas as variáveis envolvidas no problema, exceto duas delas, estas são diretamente proporcionais se aumentam ou diminuem simultaneamente, e inversamente proporcionais se uma aumenta enquanto a outra diminui. Mas, esta regra nem sempre produz resultados corretos.

É correto que duas variáveis diretamente proporcionais aumentam ou diminuem simultaneamente, mas duas variáveis podem aumentar ou diminuir simultaneamente sem que sejam proporcionais.

Veja a seguinte situação:

Um trabalhador gasta 5 horas para limpar um terreno circular de 7 metros de raio. Quanto tempo gastaria se o terreno tivesse 14 metros de raio? [9]

As variáveis envolvidas são o raio r do terreno e o tempo t que o trabalhador gasta para limpá-lo. A aplicação da regra acima nos levaria a dizer que r e t são diretamente proporcionais. Então, já que o raio dobra o trabalhador gastaria o dobro do tempo (10 horas) para limpar o terreno. Mas isto é falso!

Na verdade, t é proporcional à área do terreno, portanto proporcional a r^2 , isto é,

$$t = kr^2$$

onde k é uma constante.

Então, se t_0 é o tempo gasto para limpar o terreno maior. Tem-se, que

$$5 = k7^2 \Rightarrow k = \frac{5}{49}$$

e

$$t_0 = k14^2 \Rightarrow t_0 = \frac{5}{49}196 \Rightarrow t_0 = 20$$

Logo, o trabalhador gastará com o terreno maior 4 vezes o tempo que gasta com o menor, e não duas vezes.

Aplicações em Sala de Aula

A Matemática, na maioria das vezes é ensinada de forma mecânica e arcaica, onde o professor apenas reproduz o conteúdo do livro didático e enche os estudantes com uma série de atividades causando desinteresse dos mesmos, especialmente aqueles que têm dificuldades com o conteúdo [11]. Com a finalidade de identificar como os estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental utilizam o conhecimento intuitivo sobre proporcionalidade, através de sua experiência em situações do cotidiano esse trabalho apresenta algumas propostas de atividades para o ensino da proporcionalidade utilizando situações cotidianas.

6.1 A Proporcionalidade no Currículo Escolar

Esta seção apresenta como a proporcionalidade deve ser abordada no Ensino Fundamental, foram analisadas a proposta do MEC para o ensino no Brasil através dos PCN's e da Matriz de Referência do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), além da Matriz Curricular do município de Contagem-MG.

6.1.1 Parâmetros Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) norteiam a aprendizagem em matemática à compreensão dos conceitos e os relacionamentos deste entre os conteúdos deixando de lado a memorização. Eles propõem como um dos objetivos para do Ensino Fundamental no ensino da Matemática:

“Questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.”[16].

Esse documento apresenta como um dos objetivos a serem atingidos no ensino da Matemática, no terceiro e quarto ciclos, desenvolver:

“O raciocínio que envolva a proporcionalidade, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade.”[16].

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), deixa claro a importância da resolução de problemas utilizando a ideia de proporcionalidade, a compreensão de variável e as representações algébricas para generalizações, apresenta no bloco Conceitos e Procedimentos a

“Resolução de situações-problema que envolvem a ideia de proporcionalidade, incluindo os cálculos com porcentagens, pelo uso de estratégias não convencionais.” [16].

6.1.2 Matriz de Referência do SAEB

A matriz de referência do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) é um documento que descreve as linhas gerais o conteúdo a ser avaliado em cada disciplina e série, dando transparência e legitimidade ao processo de avaliação realizado pelo governo das escolas públicas.

A matriz foi desenvolvida pelo INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira) para o Ensino Fundamental e considera as competências relativas às áreas de conhecimento e as que expressam as possibilidades cognitivas de compreender e realizar tarefas relacionadas a essas áreas (competências do sujeito). Essa matriz norteia o ensino no Brasil para avaliações em larga escala

MATEMÁTICA – ENSINO FUNDAMENTAL

EIXOS COGNITIVOS COMPETÊNCIAS DE MATEMÁTICA	I - Dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica.	II - Construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.	III - Selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
F4 Construir e ampliar noções de variação de grandeza para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.	H15 - Identificar leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre duas grandezas.	_____	H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais.

Figura 6.1: Parte da matriz de referência do Saeb

A Figura 6.1 destaca os eixos cognitivos, as competências e habilidades matemáticas que os estudantes devem desenvolver no Ensino Fundamental.

Nessa matriz destaca-se com relação à proporcionalidade a seguinte competência:

F4-Construir e ampliar noções de variação de grandeza para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

E as habilidades:

H15-Identificar leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre duas grandeza.

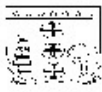
H16-Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais.

6.1.3 Matriz de Referência curricular do município de Contagem-MG

A matriz de referência curricular para o 3º Ciclo da Rede Municipal de Ensino de Contagem-MG é organizada em cinco temas:

1. Espaço e forma
2. Grandezas e medidas
3. Números e operações
4. Tratamento da informação

Cada tema é explicitado por descritores, que, por sua vez, traduzem uma associação entre os conteúdos curriculares e as operações mentais desenvolvidas pelos estudantes. Os descritores, portanto, especificam o que cada habilidade implica e são utilizados como base para a construção do planejamento de cada conteúdo.



SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO E CULTURA DE CONTAGEM
COORDENADORIA DE POLÍTICAS DA EDUCAÇÃO BÁSICA
DIRETORIA DE ENSINO FUNDAMENTAL

MATRIZ DE REFERÊNCIA CURRICULAR DE MATEMÁTICA – 3º CICLO – 2010

TEMA III – NÚMEROS E OPERAÇÕES/ALGEBRA E FUNÇÕES		
Nº	Descritor	Comentários
D91	Resolver problema que envolva variações proporcionais, diretas ou inversas entre grandezas.	Esse descritor deve verificar a habilidade de o estudante resolver problemas que apresentem proporcionalidade simples. Essa habilidade é avaliada por meio de situações problemas contextualizadas, nas quais ocorra a variação proporcional simples, bem como problemas onde não há variação proporcional.

Figura 6.2: Parte da matriz de referência curricular de Contagem

A Figura 6.2 destaca os descritores que devem ser tratados no 3º ciclo do Ensino Fundamental do município de Contagem-MG.

Nessa matriz destaca-se com relação à proporcionalidade o seguinte descritor:

D91-Resolver problema que envolva variações proporcionais, diretas ou inversas entre grandezas.

Em todas as propostas curriculares destaca-se a abordagem da proporcionalidade em situações contextualizadas e do cotidiano, o que é justamente um dos objetivos desse trabalho.

6.2 Atividades Realizadas

Nesta seção, são apresentadas algumas atividades para a sala de aula referentes a alguns dos conteúdos abordados neste trabalho e os resultados obtidos. Essas atividades fazem parte da pesquisa realizada na Escola Municipal Estudante Leonardo Sadra, no município de Contagem-MG. Participaram 20 estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental do turno vespertino. Optou-se por aplicar as atividades em aulas no contraturno do horário de aulas para que os estudantes pudessem comparar as maneiras diferentes de se abordar o conteúdo proporcionalidade. As atividades aconteceram no período de setembro a novembro de 2016, totalizando 12 horas de atividades.

TEMA: Razão e proporção

PÚBLICO ALVO: 7º ano do Ensino Fundamental

OBJETIVOS:

- Propor atividades chamando a atenção para a questão da compreensão adequada do tema.
- Utilizar a matemática aplicada e buscar desenvolver com mais facilidade o interesse dos estudantes uma vez que dará a oportunidade para que os mesmos possam construir seus conhecimentos.
- Desenvolver o senso crítico bem com o raciocínio lógico matemático.
- Proporcionar ao estudante a capacidade de analisar, reconhecer e relacionar razões à situações do dia a dia.
- Trazer a Matemática para o cotidiano do aluno e mostrar sua presença em várias situações de uma maneira clara e objetiva.
- Despertar a atitude positiva em relação à Matemática, valorizando sua lógica, sua utilidade e sua beleza.

Existem algumas razões especiais muito utilizadas em nosso cotidiano, dentre elas pode-se destacar: densidade demográfica, velocidade média, densidade de uma mistura, o índice de massa corporal, o número π , a razão áurea e escala cartográfica. As atividades apresentadas envolvem essas razões especiais.

6.2.1 Densidade Demográfica

As atividades foram desenvolvidas com os estudantes da seguinte maneira:

Explicação sobre densidade demográfica, o seu significado mostrando que o cálculo da densidade demográfica, também chamada de população relativa de uma região é considerada uma aplicação de razão entre duas grandezas. Ela expressa a razão entre o número de habitantes e a área ocupada em uma certa região.

Atividade 1: Questão prova do ENEM 2011. Foi proposto aos estudantes resolver a seguinte questão.

Cerca de 20 milhões de brasileiros vivem na região coberta pela caatinga, em quase 800 mil km^2 de área. Quando não chove, o homem do sertão e sua família precisam caminhar quilômetros em busca da água dos açudes. A irregularidade climática é um dos fatores que mais interferem na vida do sertanejo. Segundo este levantamento, a densidade demográfica da região coberta pela caatinga, em habitantes por km^2 , é de:

- (a) 250 (b) 25 (c) 2,5 (d) 0,25 (e) 0,025

Atividade 2: Comparação da densidade demográfica em algumas cidades

Esta atividade propõe que os estudantes utilizem a calculadora para o cálculo da densidade demográfica das capitais São Paulo, Rio de Janeiro e Belo Horizonte. Além dessas cidades foi incluído o município de Contagem-MG no qual a escola está situada.



Figura 6.3: Estudantes realizando da atividade de densidade demográfica

Densidade demográfica, densidade populacional ou população relativa é a medida expressada pela relação entre a população e a superfície do território, geralmente aplicada a seres humanos, mas também em outros seres vivos (comumente, animais). É geralmente expressada em habitantes por quilômetro quadrado.

SÃO PAULO

Área da unidade territorial (km²) = 1.521,110

População estimada 2016 12.038.175	População 2010 11.253.503
---------------------------------------	------------------------------

Densidade demográfica 2016 (hab/km²) 7.914,072	Densidade demográfica 2010 (hab/km²) 7.369,150
---	---

RIO DE JANEIRO

Área da unidade territorial 2015 (km²) = 1.200,179

População estimada 2016 6.498.837	População 2010 6.320.446
--------------------------------------	-----------------------------

Densidade demográfica 2016 (hab/km²) 5.414,889	Densidade demográfica 2010 (hab/km²) 5.266,252
---	---

BELO HORIZONTE

Área da unidade territorial 2015 (km²) = 331,401

População estimada 2016 2.513.451	População 2010 2.375.151
--------------------------------------	-----------------------------

Densidade demográfica 2016 (hab/km²) 7.584,319	Densidade demográfica 2010 (hab/km²) 7.167,000
---	---

CONTAGEM

Área da unidade territorial 2015 (km²) = 195,045

População estimada 2016 653.800	População 2010 603.442
------------------------------------	---------------------------

Densidade demográfica 2016 (hab/km²) 3.352,046	Densidade demográfica 2010 (hab/km²) 3.088,223
---	---

Figura 6.4: Resolução da atividade: Densidade demográfica

Os estudantes entenderam bem a atividade realizando-a com rapidez utilizando a calculadora para a resolução. Após a realização dessa, foi realizada uma discussão que se a população continuar aumentando a densidade demográfica também aumentará pois, a área territorial não mudará, ou seja, são grandezas diretamente proporcionais.

6.2.2 Velocidade Média

A atividade foi desenvolvida com os estudantes da seguinte maneira:

Explicação sobre o que representa a “velocidade média”, que é uma grandeza obtida pela razão entre uma distância percorrida (expressa em quilômetros ou metros) e um tempo por ele gasto (expresso em horas, minutos ou segundos).

Nesta atividade os estudantes calcularam a velocidade média de cada finalista da prova de 100 e 200 metros rasos das Olimpíadas Rio 2016, podendo comparar a velocidade média com distâncias diferentes. Optou-se por trabalhar com dados referentes às Olimpíadas pois, a atividade foi aplicada logo após o acontecimento da mesma gerando bastante interesse.

Para interpretarmos, de forma lógica, o movimento dos corpos é compreendermos o conceito de **velocidade** como a razão entre o deslocamento e o intervalo de tempo gasto pelo corpo que está sendo observado e estudado. Essa é uma definição que auxilia o estudo do movimento, pois produz uma relação matemática que indica qual distância um corpo percorre em determinada unidade de tempo. Podemos escrever v para representar a velocidade, d para o deslocamento e t para o intervalo de tempo, produzindo a seguinte expressão matemática:

$$v = \frac{d}{t}$$

Resultado final da prova de 100 m rasos da Olimpíada Rio 2016				Resultado final da prova de 200 m rasos da Olimpíada Rio 2016			
Colocação	Atleta	Tempo	Velocidade	Colocação	Atleta	Tempo	Velocidade
1	Usain Bolt Jamaica	9,81 s	20,293	1	Usain Bolt Jamaica	19,78 s	20,211
2	Justin Gatlin Estados Unidos	9,89 s	20,211	2	Andre De Grasse Canadá	20,02 s	9,990
3	André De Grasse Canadá	9,91 s	20,090	3	Christophe Lemaitre França	20,12 s	9,940
4	Yohan Blake Jamaica	9,93 s	20,070	4	Adam Gemili Grã-Bretanha	20,12 s	9,940
5	Akani Simbine África do Sul	9,94 s	20,060	5	Churandy Martina Países Baixos	20,13 s	9,935
6	Ben Youssef Meité Costa do Marfim	9,96 s	20,040	6	LaShawn Merritt Estados Unidos	20,19 s	9,905
7	Jimmy Vicaut França	10,04 s	9,960	7	Alonso Edward Panamá	20,23 s	9,886
8	Trayvon Bromell Estados Unidos	10,06 s	9,940	8	Ramil Guliyev Turquia	20,43 s	9,789

Figura 6.5: Resolução da atividade: Velocidade média dos atletas olímpicos



Figura 6.6: Estudantes realizando da atividade de velocidade média dos atletas olímpicos

Também utilizando a calculadora os estudantes não apresentaram dificuldades para realizar essa atividade. Ficou claro para eles que essa velocidade não é constante, que essa razão é uma velocidade média durante o trajeto dos atletas.

6.2.3 Densidade de uma solução

A densidade de uma solução é uma propriedade física que tem por função relacionar a massa da matéria e o volume que ela ocupa, o que resulta na seguinte equação:

$$d = \frac{m}{v}$$

Essa atividade foi realizada com a solução de água e suco em pó. Os estudantes fizeram misturas com várias medidas de água e suco, calculando a densidade de cada uma dessas medidas.

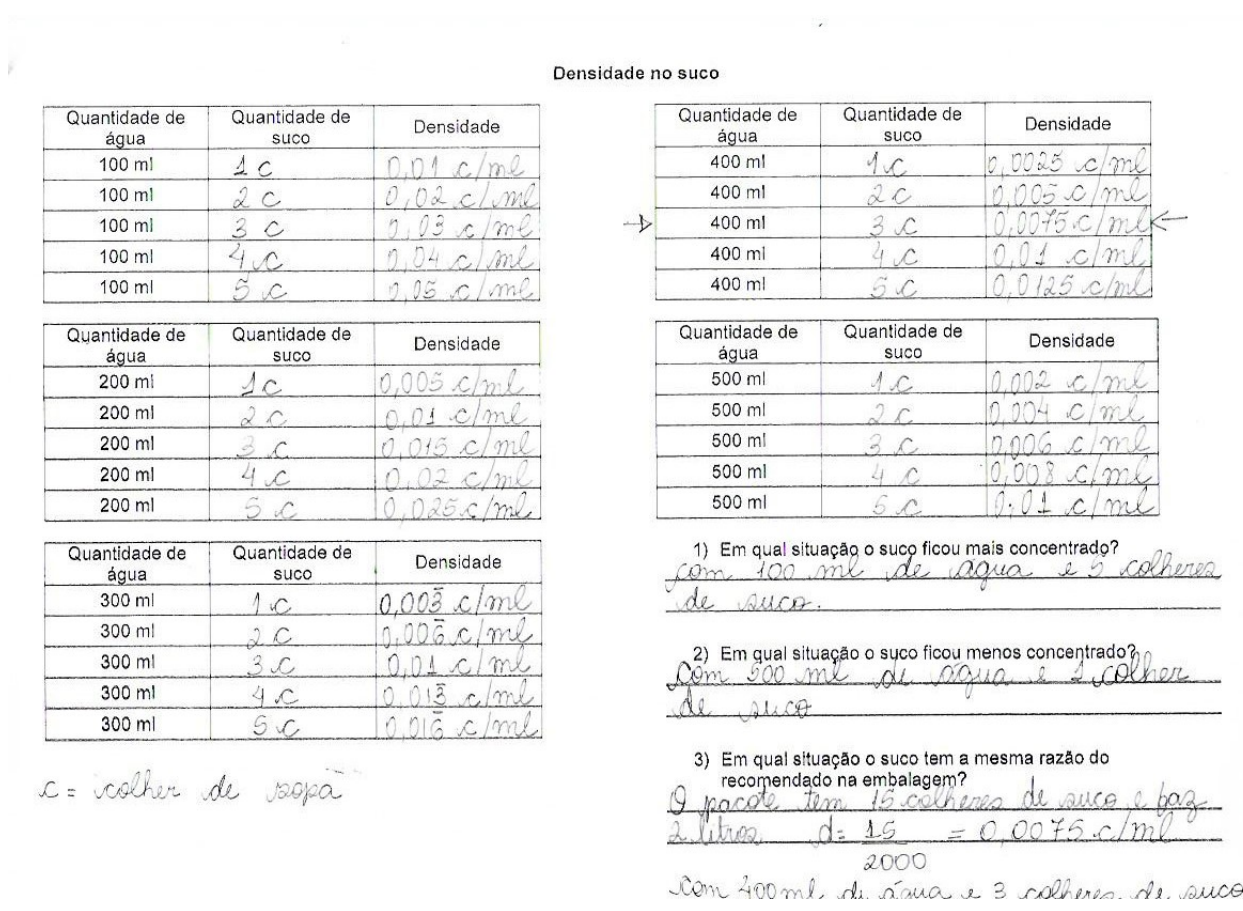


Figura 6.7: Resolução da atividade: Densidade de uma solução

Nessa atividade os estudantes trabalharam de forma prática fazendo a solução de suco em pó e água assim, puderam experimentar e verificar qual das misturas ficou mais ou menos concentrada.

6.2.4 Índice de massa corporal

O índice de massa corporal (IMC) é uma medida internacional usada para calcular se uma pessoa está no peso ideal. Trata-se de um método fácil e rápido para a avaliação do nível de gordura de cada pessoa, ou seja, é um preditor internacional de obesidade adotado pela Organização Mundial da Saúde (OMS). O IMC é determinado pela divisão da massa do indivíduo pelo quadrado de sua altura, em que a massa está em quilogramas e a altura em metros [14].

$$IMC = \frac{\text{massa}}{\text{altura} \times \text{altura}}$$

ESCOLA MUNICIPAL ESTUDANTE LEONARDO SADRA
PROJETO: A proporcionalidade no cotidiano
Atividade 3

IMC é a sigla para **Índice de Massa Corporal** que serve para avaliar o peso do indivíduo em relação à sua altura e assim indicar se está dentro do peso ideal, acima ou abaixo do peso desejado.

Estar dentro do peso certo é importante porque estar acima ou abaixo peso influencia na saúde, aumentando o risco de doenças como desnutrição quando se está abaixo do peso, e AVC e infarto, quando se está acima do peso. Assim, é comum os médicos, enfermeiros e nutricionistas avaliarem o peso da pessoa nas consultas de rotina para verificar a possibilidade de doenças que a pessoa pode estar predisposta.

Tabela de resultados

IMC	Categoria
abaixo de 16,00	Baixo peso Grau III
16,00 a 16,99	Baixo peso Grau II
17,00 a 18,49	Baixo peso Grau I
18,50 a 24,99	Peso ideal
25,00 a 29,99	Sobrepeso
30,00 a 34,99	Obesidade Grau I
35,00 a 39,99	Obesidade Grau II
40,0 e acima	Obesidade Grau III

Observação

A calculadora acima mede o IMC sem distinguir homens e mulheres, sendo o padrão adotado pela Organização Mundial da Saúde.

No entanto, estudos realizados nos Estados Unidos (NHANES II survey - National Health and Nutrition Examination Survey) apresentaram sugestão de alteração de método para medir o IMC, com cálculos distintos de acordo com o sexo.

Embora ainda não tenha sido oficialmente incorporada pela OMS, esta nova metodologia vem sendo cada vez mais aceita pelos profissionais da área de saúde.

Tabela de resultados Feminino

IMC	Categoria
Abaixo de 19,1	Abaixo do peso
19,1 a 25,8	Peso ideal
25,9 a 27,3	Pouco acima do peso
27,4 a 32,3	Acima do peso
32,4 e acima	Obesidade

Tabela de resultados Masculino

IMC	Categoria
Abaixo de 20,7	Abaixo do peso
20,7 a 26,4	Peso ideal
26,5 a 27,8	Pouco acima do peso
27,9 a 31,1	Acima do peso
31,2 e acima	Obesidade

Figura 6.8: Tabela do IMC

Nessa atividade calculou o IMC dos estudantes para isso, foram realizadas as medidas da altura e do peso de cada estudante após obter os resultados comparou-se com a tabela de referência e orientando-os sobre a importância dos hábitos saudáveis.



Figura 6.9: Realizando medidas nos estudantes para o cálculo do IMC

Nas Figuras 6.10 e 6.11 mostram exemplos que alguns estudantes ficaram da faixa ideal, principalmente as meninas.

TABELA DO IMC

Peso	Altura	Altura x Altura	$IMC = \frac{Peso}{Altura \times Altura}$
45,5	1,59	2,5281	17,99

Figura 6.10: Resultado do IMC de um estudante abaixo da faixa ideal

TABELA DO IMC

Peso	Altura	Altura x Altura	$IMC = \frac{Peso}{Altura \times Altura}$
72,0	1,52	2.3104	31,16

Figura 6.11: Resultado do IMC de um estudante acima da faixa ideal

6.2.5 O número π

O número π é o valor da razão entre a medida do comprimento de uma circunferência de qualquer tamanho e seu diâmetro, é a mais antiga constante matemática. Apesar do conhecimento do π ser muito antigo, ele ainda é fonte de pesquisas em diversas áreas. De fato, dentre os objetos matemáticos estudados pelos antigos gregos, há mais de 2 000 anos, o número π [3].

Nessa atividade, os estudantes mediram discos com tamanhos diferentes, utilizando uma fita métrica e régua.

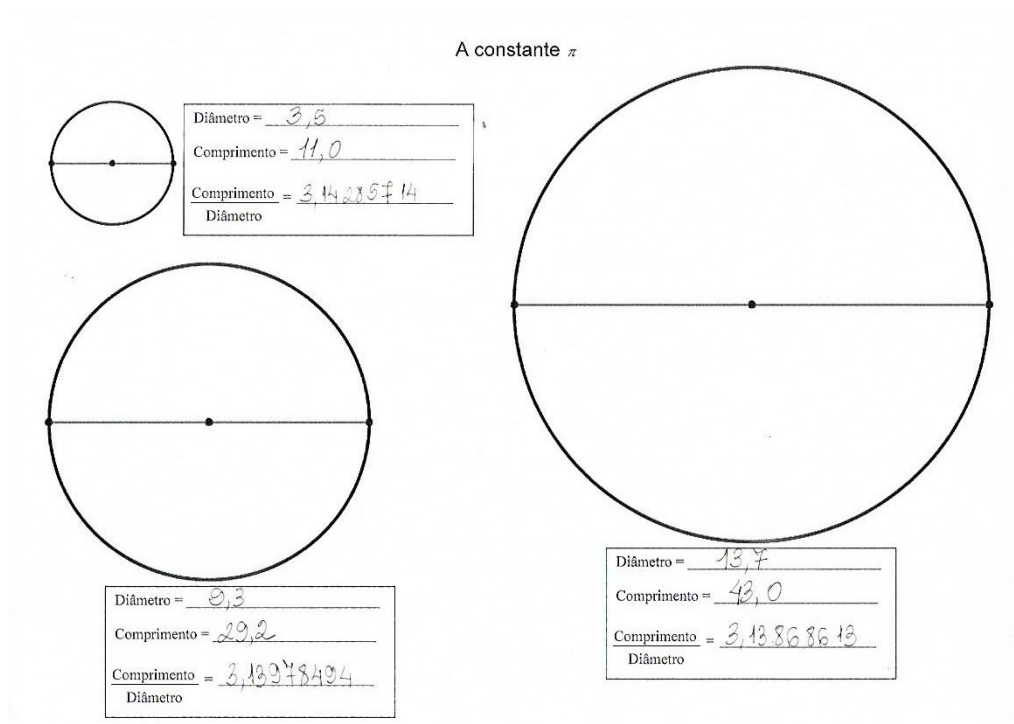


Figura 6.12: Resolução da atividade: IMC



Figura 6.13: Estudantes resolvendo atividade sobre o número π

A dificuldade dessa atividade foi com relação a precisão das medidas realizadas. Somente no primeiro desenho pode-se perceber que a razão do comprimento pelo diâmetro da circunferência ficou bem próxima do valor de $\pi = 3,141592654\dots$

6.2.6 A Razão Áurea

A razão áurea é um dos números mais famosos da matemática, há muito tempo os gregos atribuíam a essa razão propriedades mágicas e usavam-na nas construções de seus edifícios. É encontrada na ciência e na natureza, na arquitetura de forma geral e importante pelo seu valor estético.

A razão áurea é um número irracional denotado por uma letra grega, o ϕ . Conhecido desde a Antiguidade, o ϕ recebeu vários nomes: “Número Áureo”, “Razão Áurea”, “Seção Áurea” “Proporção Áurea”, “Proporção de Ouro”, “Número de Ouro”, “Média e Extrema Razão”, “Divisão de Extrema Razão”, “Razão de Phidias” e até “Proporção Divina”. A razão áurea é apenas um número e uma bela oportunidade de se estudar matemática [8]. Seu valor é dado por

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Atividade: Construção do retângulo áureo

Materiais: Uma folha de papel, lápis, compasso e régua ou esquadro.

- Desenhe um quadrado qualquer na folha (o lado desse quadrado será a largura do retângulo áureo).
- Marque os pontos médios de dois lados opostos do quadrado.
- Trace o segmento que passa pelos pontos médios (observe que o quadrado ficou dividido em dois retângulos congruentes).
- Num dos retângulos trace uma das suas diagonais, por exemplo, BE .

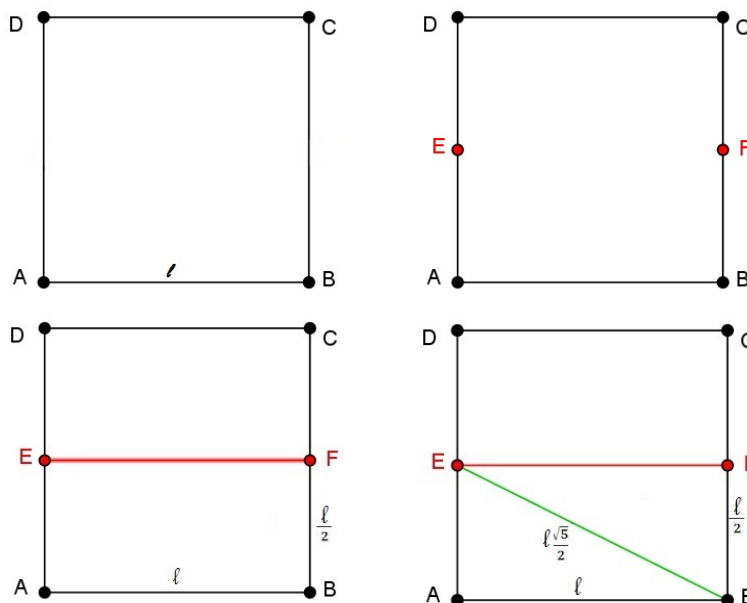


Figura 6.14: Etapas da construção do retângulo áureo

- Com o compasso desenhe a circunferência que tem centro no ponto B , e de raio igual ao comprimento da diagonal. Prolongue o lado do quadrado até encontrar a circunferência (este novo segmento é o comprimento do retângulo áureo).
- O retângulo $CDHG$ cujos lados são l e $l \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$ é um retângulo áureo.

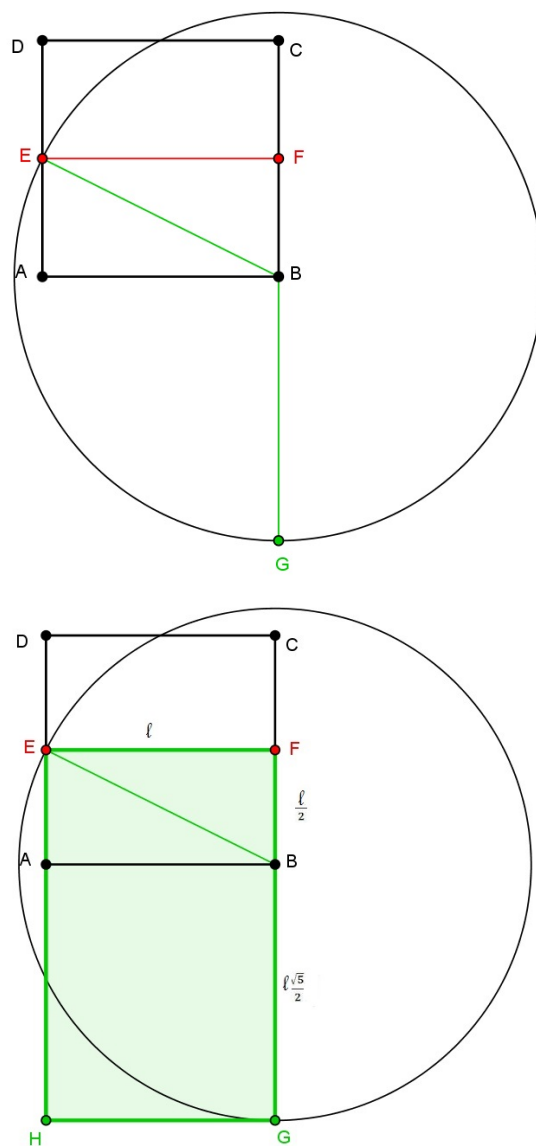


Figura 6.15: Construção do retângulo áureo

6.2.7 Proporção áurea em objetos do cotidiano

Nesta atividade os estudantes verificaram se objetos com formato retangular do seu cotidiano estão em proporção áurea. Para isso, realizou-se as medidas de cada objeto e calculou a razão entre as dimensões da parte retangular do objeto.

ESCOLA MUNICIPAL E STUDANTE LEONARDO SADRA
PROJETO: A proporcionalidade no cotidiano
Atividade 7
A razão áurea nos objetos

Estudante _____

Objeto	Comprimento (a)	Largura (b)	Razão (a/b)
Carteira de identidade	10,2	6,6	1,545
Carteira de motorista	8,5	6,0	1,416
Cartão de banco	8,6	5,4	1,57407
Cartão de CPF	8,9	6,1	1,45901...
Capa do livro de matemática	27,6	20,4	1,35294...
Capa de um caderno	27,6	19,8	1,39
Escrivaninha do aluno	66	39	1,6923...
Monitor do computador	31,6	17,4	1,81609...

Figura 6.16: Resolução da atividade: Proporção áurea em objetos

As medidas nessa atividade foram realizadas com precisão e verificou-se que apesar do retângulo áureo ser considerado de dimensões agradáveis poucos objetos possuem as dimensões proporcionais a razão áurea. Na verdade dos objetos listados somente o cartão do banco ficou próxima ao valor de $\phi = 1,618033989 \dots$

6.2.8 A Proporção áurea no corpo humano

Leonardo da Vinci, em seu desenho: “O Homem Vitruviano” apresenta um modelo ideal para o ser humano, cujas proporções entre as partes do corpo são perfeitas. Ele desenhou o corpo de um homem dentro de um círculo e de um quadrado, com braços e pernas estendidos, tendo o umbigo como o centro do círculo, demonstrando a proporcionalidade entre as partes do corpo. Tais proporções aparecem destacadas na Figura 6.17.

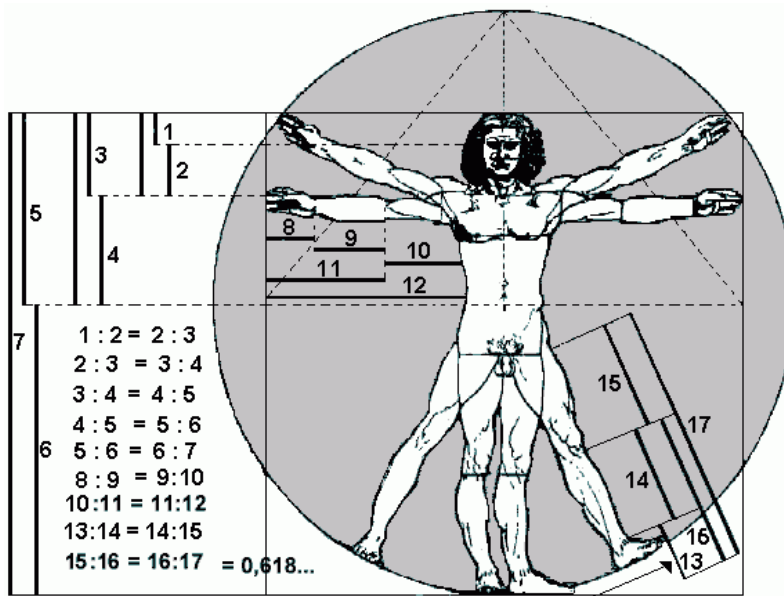


Figura 6.17: Homem Vitruviano [12]

Alguns acreditam que pessoas consideradas belas, apresentam proporções harmônicas entre as partes do corpo. Proporções estas, cujas razões muito se aproximam do número ϕ . Destaca-se aqui algumas destas razões:

- A razão entre a altura de uma pessoa e a medida do umbigo até o chão.
- A razão entre o comprimento do braço e a medida do cotovelo até a extremidade do dedo médio.
- A razão entre o comprimento do braço e a medida do cotovelo até a extremidade do dedo médio.
- A razão entre o comprimento da perna e a medida do joelho até o chão.

O objetivo desta atividade foi verificar a proporção áurea no corpo humano. Realizou-se as medidas das partes do corpo humano utilizando a fita métrica. Na Figura 6.18 tem-se a atividade realizada por estudantes com estruturas corporais diferentes afim de fazer comparação dos resultados.

A razão áurea no corpo humano		
A altura do corpo humano	Medida do umbigo até o chão	Razão
1,62	1,02	1,5882
A medida do seu quadril até o chão	A medida do joelho até o chão	Razão
0,88	0,50	1,76
A medida do ombro à ponta do dedo	A medida do cotovelo à ponta do dedo	Razão
0,71	0,42	1,6904
A medida da cintura até a cabeça	Tamanho do tórax	Razão
0,62	0,40	1,55

A razão áurea no corpo humano		
A altura do corpo humano	Medida do umbigo até o chão	Razão
1,48	0,90	1,6444
A medida do seu quadril até o chão	A medida do joelho até o chão	Razão
0,87	0,42	2,0714
A medida do ombro à ponta do dedo	A medida do cotovelo à ponta do dedo	Razão
0,65	0,37	1,7567
A medida da cintura até a cabeça	Tamanho do tórax	Razão
0,59	0,39	1,5128

Figura 6.18: Atividade da proporção áurea no corpo humano: Dois exemplos com com estudantes diferentes

Nessa atividade os valores encontrados foram bem diferentes do “número áureo”. Pode-se pensar que há três possibilidades para isso tenha ocorrido: as medidas não terem sido feitas com precisão, o instrumento de medida não ter precisão adequada ou que não existe a proporção de ouro no corpo humano. Na verdade, algumas pessoas acreditam que Leonardo forçou as proporções do homem para se encaixar nessas figuras geométricas [5].

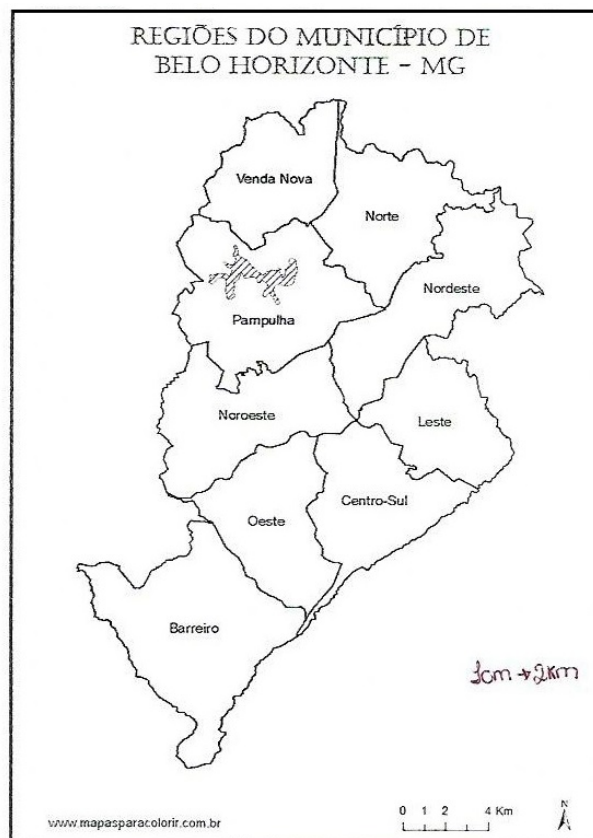
6.2.9 Escala Cartográfica

Uma escala é a razão constante entre qualquer grandeza física e/ou química que de forma qualitativa ou quantitativa, permite uma comparação.

No caso de um desenho ou mapa, a escala é a razão constante entre medidas de comprimento do que foi desenhado e o objeto real que está sendo representado, sempre tomadas na mesma unidade.

$$\text{Escala} = \frac{\text{medida do comprimento no desenho}}{\text{medida do comprimento do objeto real}}$$

As Figuras 6.19 e 6.20 são os mapas das cidades de Belo Horizonte-MG e Contagem-MG a atividade consiste em calcular a distância em linha reta entre dois pontos das cidades e depois transformar essas medidas para as medidas reais utilizando a escala cartográfica.



Qual é a distância no mapa do ponto mais ao norte até o ponto mais ao sul? 35,5cm	Qual é a distância real do ponto mais ao norte até o ponto mais ao sul? $\begin{array}{r} 35,5 \\ \times 2 \\ \hline 71,0 \end{array}$
Qual é a distância no mapa do ponto mais a oeste até o ponto mais a leste? 12,3	Qual é a distância real do ponto mais a oeste até o ponto mais a leste? $\begin{array}{r} 12,3 \\ \times 2 \\ \hline 24,6 \end{array}$

Figura 6.19: Atividade sobre escala cartográfica no mapa da cidade Belo Horizonte-MG



<p>Qual é a distância no mapa do ponto mais ao norte até o ponto mais ao sul?</p> <p>32,5 cm</p>	<p>Qual é a distância real do ponto mais ao norte até o ponto mais ao sul?</p> <p>$\times \frac{32,5}{6} = 5,4166$ Aproximadamente 23,43 km</p> <p>760,2 64 23,43 - 180 - 140 - 118 - 96 - 74 - 52 - 30 - 8</p>
<p>Qual é a distância no mapa do ponto mais a oeste até o ponto mais a leste?</p> <p>33,5</p>	<p>Qual é a distância real do ponto mais a oeste até o ponto mais a leste?</p> <p>$\times \frac{33,5}{6} = 5,5833$ Aproximadamente 21,5 km</p> <p>69,0 64 21,5 - 30 - 180 - 160 - 140</p>

Figura 6.20: Atividade sobre escala cartográfica no mapa da cidade Contagem-MG

Os estudantes entenderam e realizaram a atividade com rapidez. Discutiui-se que a distância calculada é numa linha reta não sendo a distância real, uma vez que no trajeto de um ponto a outro há obstáculos e não podemos seguir sempre numa única linha reta.

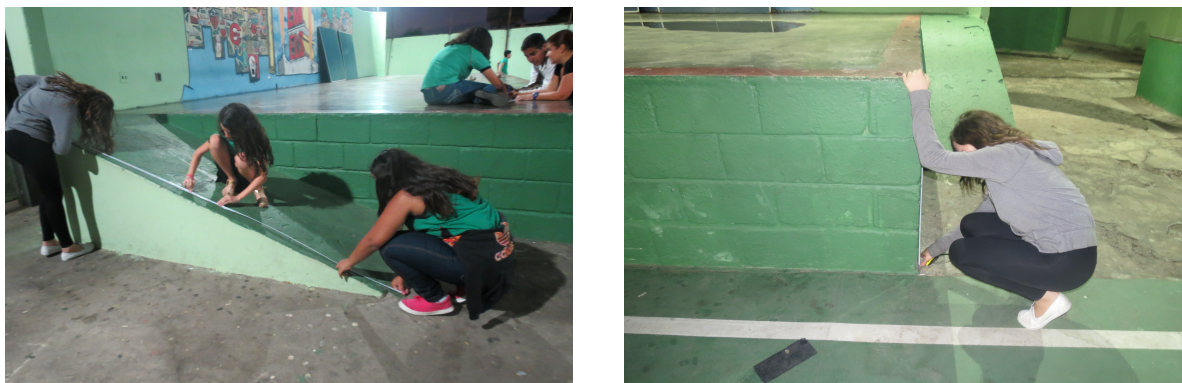
6.2.10 Realizando medidas reais e escala

Para concentrar os conhecimentos adquiridos com as atividades anteriores realizou-se esta atividade. Nessa atividade optou-se juntamente com os estudantes que seria realizada a medição da quadra poliesportiva da escola. Então, são necessárias as seguintes etapas:

- Realizar as medidas do ambiente real.

As fotos a seguir mostram os estudantes realizando a medição da quadra poliesportiva da escola.





- Discutir com os estudantes qual será a melhor escala para a construção da maquete.

Avaliando as medidas que eles fizeram primeiramente sugeriram que dividisse as medidas por 10. Alguns estudantes não concordaram pois mesmo assim as medidas ficariam grandes ainda então, chegou-se a conclusão que deveria dividir todas as medidas por 20.

- Transformar as medidas para a escala desejada.

A Figura 6.21 mostra as medidas realizadas pelos estudantes. Durante a realização dessa atividade eles ficaram livres para medir o que achassem necessário. Após realizar todas as medidas fizeram a conversão das dessas utilizando uma escala que eles acharam mais adequada.

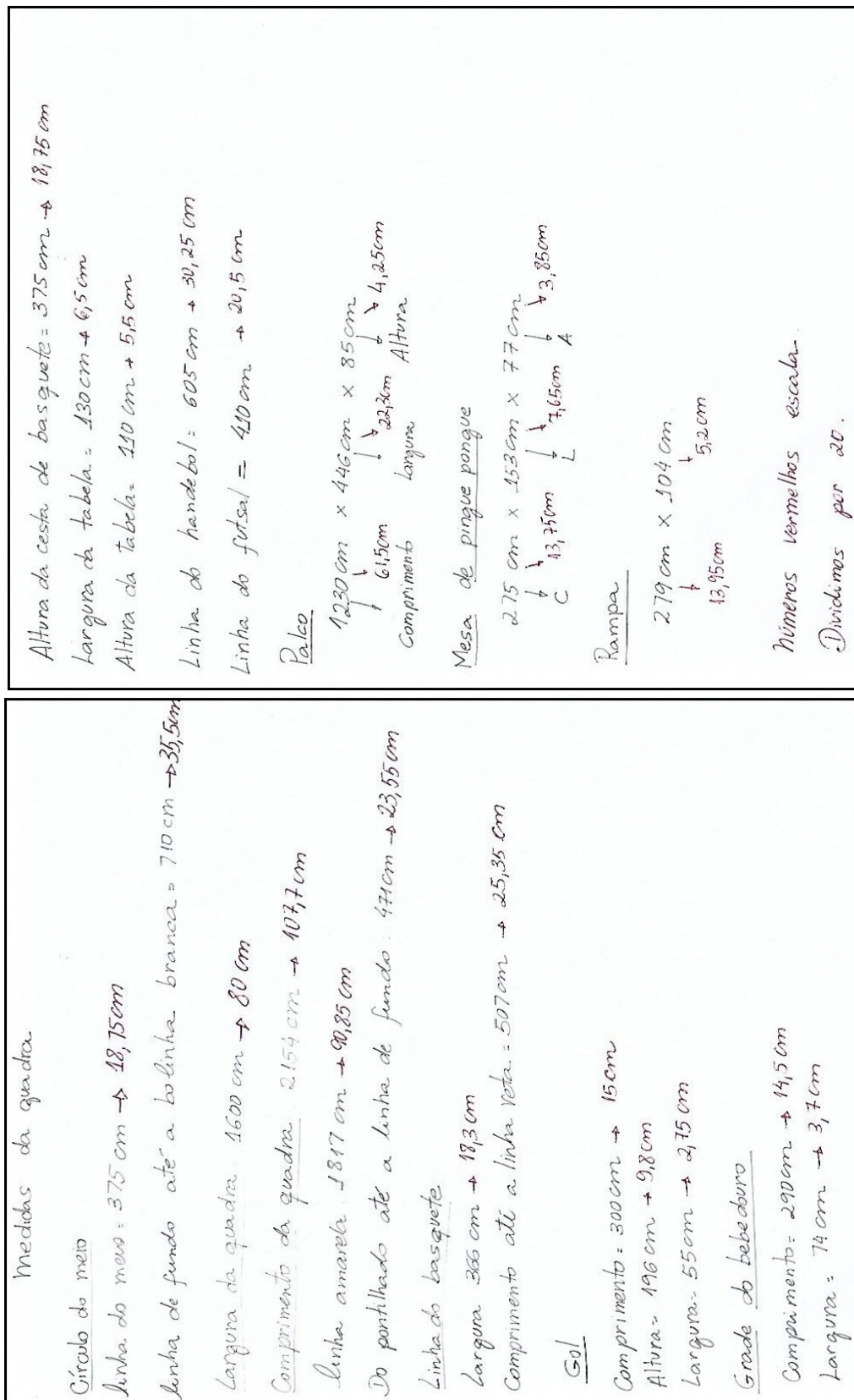


Figura 6.21: Medidas reais da quadra poliesportiva da escola

Considerações Finais

Sabe-se que a forma tradicional de se ensinar matemática obedece a seguinte sequência: definição, exemplos, exercícios de aprendizagem e fixação. Essa metodologia, atualmente nem sempre traz bons resultados.

A aprendizagem matemática está ligada à compreensão e apreensão do significado. O estudante deve entender a importância do assunto, discutir e tornar os conteúdos mais significativos.

Deve-se mesclar as atividades propostas com aulas expositivas, uma vez que construir um novo conceito a partir de exemplos e situações cotidianas leva muito tempo, já que o estudante não é trabalhado nesse sentido nas séries iniciais. Há estudantes que se apropriam do conhecimento de forma muito rápida e há aqueles que levam um tempo muito grande para a apropriação.

Pelos relatos feitos durante as aulas os estudantes entenderam a importância da proporcionalidade, perceberam que ela está presente em várias situações do cotidiano e construíram seus conhecimentos.

O objetivo do trabalho foi alcançado considerando que foi apresentada uma proposta de sequência didática que privilegia os conceitos em detrimento da simples memorização.

A proposta apresentada é mais uma ferramenta que o professor pode utilizar para contribuir com o processo ensino aprendizagem.

Bibliografia

- [1] *Clubes OBMEP*. <http://clubes.obmep.org.br/blog/atividade-a-razao-aurea/>. Acessado em 09/11/2016.
- [2] *Matrizes de referência*. <http://portal.inep.gov.br/matrizes-de-referencia>. Acessado em 16/01/2017.
- [3] *O número pi*. <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/aplcom1a.html>. Acessado em 15/09/2017.
- [4] *O segredo do papiro de Rhind*. <http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2011/06/o-segredo-do-papiro-de-rhind.html>. Acessado em 17/11/2016.
- [5] *Os mitos e verdades sobre a proporção áurea*. <http://gizmodo.uol.com.br/mitos-proporcao-aurea/>. Acessado em 09/02/2017.
- [6] *Os Papiros da Matemática Egípcia*. <http://matematicosdemogi.blogspot.com.br/2016/07/os-papiros-da-matematica-egipcia-rhind.html>. Acessado em 17/11/2016.
- [7] *Proporcionalidade*. <http://www.mat.uc.pt/~mat1043/Proporcionalidade.pdf>. Acessado em 17/01/2017.
- [8] *A prporção áurea*. <http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2008/03/phi-razo-area-e-curiosidades-matemticas.htm>. Acessado em 15/09/2017.
- [9] *Revista do Professor de Matemática*. <http://www.rpm.org.br/cdrpm/8/1.htm>. Acessado em 13/01/2017.
- [10] *Revista do Professor de Matemática*. <http://www.rpm.org.br/cdrpm/9/4.htm>. Acessado em 13/01/2017.
- [11] *Revista Nova Escola*. <https://novaescola.org.br/conteudo/958/e-hora-de-ensinar-proporcao>. Acessado em 15/01/2017.
- [12] *Sequências de Fibonacci: Aplicações*. <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib2.htm>. Acessado em 09/02/2017.
- [13] *Teorema de Tales*. <http://www.estudopratico.com.br/teorema-de-tales/>. Acessado em 17/11/2016.
- [14] *Wikipédia: Índice de massa corporal*. https://pt.wikipedia.org/wiki/Indice_de_massa_corporal. Acessado em 15/09/2017.
- [15] Boyer, Carl Benjamin: *História da Matemática*. Universidade de São Paulo, 1974.
- [16] BRASIL: *Parâmetros curriculares Nacionais: Matemática (3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental)*. MEC, 1998.
- [17] Lima, Elon Lages, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César de Oliveira Morgado: *A Matemática no Ensino Médio - volume 1*. SBM, 2004.
- [18] Pitombeira, João Bosco e Tatiana Marins Roque: *Tópicos de História da Matemática*. SBM, 2012.

- [19] Wagner, Eduardo, Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho e Augusto Cezar de Oliveira Morgado: *Temas e Problemas*. SBM, 2005.
- [20] Wagner, Eduardo, Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho e Augusto César de Oliveira Morgado: *Temas e Problemas Elementares*. SBM, 2010.