

UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Bruce Franca Guimarães

UM ESTUDO SOBRE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Teófilo Otoni
2017

Bruce Franca Guimarães

UM ESTUDO SOBRE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, como requisito para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Henrique Alexandrino, ICET - UFVJM

Teófilo Otoni

2017

Ficha Catalográfica
Preparada pelo Serviço de Biblioteca/UFVJM
Bibliotecário responsável: Gilson Rodrigues Horta – CRB6 nº 3104

G963u Guimaraes, Bruce Franca.
2017 Um estudo sobre funções de várias variáveis. / Bruce Franca
Guimaraes. Teófilo Otoni: UFVJM, 2017.
52 f. ; il.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal dos
Vales do Jequitinhonha e Mucuri. Programa de Pós-Graduação em
Matemática, 2017.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Henrique Alexandrino.

1. Funções de várias variáveis. 2. Cálculo. 3. Derivadas parciais.
4. Limites. 5. Integrais múltiplas. I. Título.

CDD: 510

Um Estudo sobre Funções de Várias Variáveis

Dissertação apresentada ao
PROGRAMA DE MESTRADO
PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL – STRICTO SENSU,
nível de MESTRADO como parte dos
requisitos para obtenção do título de
MAGISTER SCIENTIAE EM
MATEMÁTICA

Orientador : Prof. Dr. Carlos Henrique
Alexandrino

Data da aprovação : 17/10/2017



Prof. Dr. Fábio Corrêa de Castro (UFES)



Prof. Dr. Carlos Alberto Mirez Tarrillo (UFVJM)



Prof. Dr. Carlos Henrique Alexandrino - UFVJM

Dedico esse trabalho à minha irmã Roberta
Franca Guimarães (*in memoriam*).

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos os professores do PROFMAT-UFVJM, que tive oportunidade de ser aluno: Todos vocês, contribuíram para que eu avançasse no conhecimento.

Aos colegas da turma PROFMAT/2015-UFVJM, por ter tornado as disciplinas cursadas um pouco mais leves, o companheirismo de vocês foi fundamental para que eu chegasse até aqui.

Aos meus pais e minhas irmãs, que sempre me apoiam em qualquer jornada.

À CAPES pela ajuda financeira.

Ao Prof. Dr. Carlos Henrique Alexandrino pela generosidade dessa orientação.

“Não tem nada tão complexo, que não exista
uma explicação simples que todos entendam”
George Pólya

RESUMO

O foco do presente trabalho é apresentar um estudo sobre funções reais de várias variáveis reais, bem como, estudar as principais técnicas envolvendo esse tipo de função. Convém destacar os conceitos de limites, derivadas parciais, máximos e mínimos e multiplicadores de Lagrange. Na parte final da dissertação, apresentamos uma aplicação na Engenharia.

Palavras chave: Funções de várias variáveis, Multiplicadores de Lagrange, Cálculo Diferencial Integral.

ABSTRACT

The focus of the present work is to present a study on the real functions of several real variables, as well as to study the main techniques involving this type of function. It is worth mentioning the concepts of limits, partial derivatives, maximum and minimum and Lagrange multipliers. In the final part of the dissertation, we present an application in Engineering.

Keywords: Keywords: Functions of several variables, Lagrange Multipliers, Integral Differential Calculus.

SUMÁRIO

1	Introdução	11
2	Glossário	12
3	Funções de Várias Variáveis Reais a Valores Reais	13
3.1	Funções de duas variáveis reais a valores reais	13
3.2	Gráfico e curvas de nível	13
4	Limite e Continuidade	17
4.1	Limites	17
4.2	Propriedades do limite	19
4.3	Continuidade	19
5	Derivadas Parciais e Curvas Parametrizadas no Espaço	20
5.1	Curvas Parametrizadas no Espaço	20
5.2	Derivadas Parciais	21
6	Funções Diferenciáveis	23
6.1	Plano Tangente e Reta Normal	26
6.2	Vetor Gradiente	27
6.3	Regra da Cadeia	28
6.4	Derivada Direcional	30
6.5	Derivadas Direcionais	30
7	Máximos e Mínimos	33
7.1	Multiplicadores de Lagrange	38
8	Integrais	43
8.1	Integrais Indefinidas	43
8.2	Teorema de Fubini para Retângulos	44
9	Aplicação	47
10	Conclusão	51

Introdução

Muitas vezes ao modelarmos problemas físicos e engenharias nos deparamos com funções que tem mais uma variável para ser analisada. Dessa feita, tem sua importância os estudos de funções de várias variáveis, bem como as várias técnicas que as envolvem, seja a técnica usada para obtenção de máximos e mínimos para essas funções, seja a técnica usada para obtenção de uma região de maior crescimento, ou várias outras que estudaremos nesse presente trabalho.

As funções de mais de uma variável despertaram interesse dos matemáticos por volta do século XVI, principalmente com intuito de resolver problemas físicos. O astrônomo, Matemático e Físico Johannes Kepler (1571-1630) fez grandes contribuições para a ciência com as suas três leis do movimento planetário, além disso, foi ele quem pavimentou o cenário para o surgimento do cálculo em várias variáveis.

Jean d'Alembert (1717-1783) foi precursor no desenvolvimento de métodos para esse cálculo, utilizando os trabalhos de Newton, L'Hospital e da família Bernoulli e estendendo os seus conceitos. Sua grande contribuição está no *Traité de dynamique* (1743), nele ele introduz o conceito de derivadas parciais, ferramenta importante no estudo de funções de várias variáveis que estudaremos no presente trabalho.

Outro grande matemático que se dedicou às funções de várias variáveis foi Gilles Personne de Roberval (1602-1675), ele explorou o Princípio de Cavalieri para encontrar área sob um arco de cicloide. Juntamente com Blaise Pascal (1623-1662) plotou as funções seno e cosseno e encontrou respectivas áreas dessas curvas (para o primeiro quadrante). Pascal aproximou integrais duplas e triplas usando soma triangulares e piramidais, e com elas, determinou o centro de gravidade de certos sólidos.

Muitos trabalhos de matemáticos e cientistas vieram no século XIX e no século XX com a ideias de refinar os resultados anteriores, muitas dessas nova técnicas sendo utilizadas em várias áreas da ciência e engenharia. O matemático italiano Guido Fubini (1879-1943) avançou ambos os aspectos aplicado e teórico do cálculo de várias variáveis. Ele provou o método de avaliar iteradas que tem o seu nome e utilizou resultados em Mecânica e Física.

O presente trabalho tem por objetivo apresentar os resultados relevantes em funções de várias variáveis, além disso, tem-se o objetivo de discutir algumas aplicações. No 1º capítulo, apresentaremos as definições e conceitos das funções de várias variáveis, destacando as ideias de curvas de níveis e o gráfico de uma função de duas variáveis; no 2º capítulo, será apresentado os conceitos de limites e continuidade, além disso, discutiremos parametrização de curvas no espaço. No 4º capítulo, discutiremos o conceito de Funções diferenciáveis para funções de várias variáveis, plano tangente e derivada direcional. No 5º capítulo dedicamos ao estudo de máximos e mínimos, destaque para os multiplicadores de Lagrange, onde se concentra inúmeras aplicações. No 6º capítulo, será apresentado as ideias de integrais de várias variáveis, com destaque para o teorema de Fubini para Retângulos. No 7º capítulo daremos ênfase às aplicações.

Glossário

- Uma bola aberta de centro a e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos do \mathbb{R}^2 cuja distância a a é menor do que r . Denotaremos tal bola aberta por $B(a, r)$. A bola fechada de centro a e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos do \mathbb{R}^2 cuja distância a a é menor do que ou igual a r . Denotaremos tal bola fechada por $B[a, r]$.
- Uma esfera aberta de centro a e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos do \mathbb{R}^3 cuja distância a a é menor do que r . Denotaremos tal esfera aberta por $S(a, r)$. A esfera fechada de centro a e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos do \mathbb{R}^3 cuja distância a a é menor do que ou igual a r . Denotaremos tal esfera fechada por $S[a, r]$.
- Considere um subconjunto X de \mathbb{R}^2 . Diremos que a é um ponto interior de X se existe uma bola aberta de centro em a inteiramente contida em X , ou seja, existe um $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset X$. Esta definição estende-se para um ponto do \mathbb{R}^3 , onde tomamos esferas abertas centradas em a .
- Um subconjunto X do \mathbb{R}^2 chama-se aberto quando todos os seus pontos são interiores. Analogamente definimos conjuntos abertos de \mathbb{R}^3 .

Funções de Várias Variáveis Reais a Valores Reais

A maioria dos problemas aplicados de matemática, dos problemas de física, economia, podem ser modelados por funções com duas, três ou mais variáveis reais; daí a justificativa para o estudo desse tema. Nesse capítulo, vamos estudar esses tipos de funções e nos próximos vamos estudar técnicas importantes que envolvem esse tipo de função. Doravante, ao falarmos “funções de várias variáveis” fica implícito que nos referimos a “funções de várias variáveis reais”.

Funções de duas variáveis reais a valores reais

Uma função de duas variáveis reais a valores reais é uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, onde A é subconjunto do \mathbb{R}^2 , ou seja, uma função que associa um par ordenado $(x, y) \in A$ a um único número $f(x, y) \in \mathbb{R}$. O conjunto A é o domínio de f e será indicado por D_f . O conjunto $Im(f) = \{f(x, y) \in \mathbb{R}; (x, y) \in D_f\}$ é a imagem de f .

Muitas vezes é deixado de especificar o domínio, ficando implícito, então, que se trata do “maior” subconjunto do \mathbb{R}^2 para o qual faz sentido a regra em questão.

Exemplo 1. Seja f a função de duas variáveis reais a valores reais dada por $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$. O domínio de f é o conjunto de todos os pares (x, y) de números reais com $x \neq -y$, isto é, $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq -y\}$. Essa função transforma o par (x, y) no número $\frac{x-y}{x+y}$.

Exemplo 2. Seja f a função do exemplo anterior. Vamos calcular $f(2, 3)$ e $f(a + b, a - b)$.

No primeiro caso temos $f(2, 3) = \frac{2-3}{2+3} = -\frac{1}{5}$ e no segunda caso $f(a + b, a - b) = \frac{a+b-(a-b)}{a+b+a-b} = \frac{b}{a}$

Exemplo 3. Vamos exibir quem é o domínio da função f dada por $f(x) = \sqrt{y-x} + \sqrt{1-y}$.

Ele é o conjunto de pares (x, y) que satisfaz $y - x \geq 0$ e $1 - y \geq 0$, ou seja, $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq x \text{ e } y \leq 1\}$.

Exemplo 4. Vamos representar graficamente o domínio da função $w = f(u, v)$ dado por $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, onde $w \geq 0$.

Escrevendo $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ segue que $w = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$ e que $w = f(u, v)$. Seu domínio é o conjunto de todos os pares (u, v) com $1 - u^2 - v^2 \geq 0$. O domínio de f é um círculo de raio 1, centrado na origem.

Gráfico e curvas de nível

Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$ uma função real de duas variáveis reais. O conjunto $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = f(x, y), (x, y) \in A\}$ denomina-se gráfico de f .

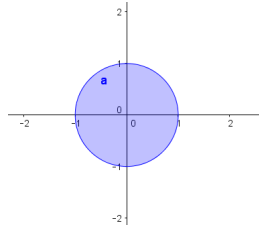


Figura 1: Circunferência de raio 1 com centro na origem

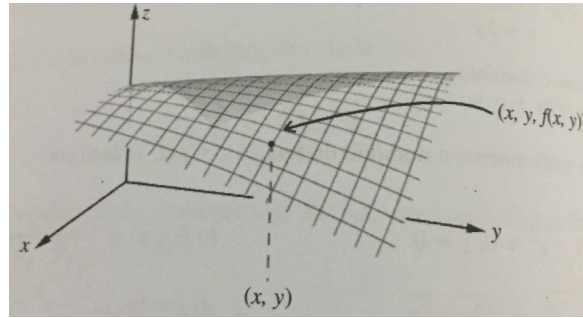


Figura 2: Gráfico da função

Representar graficamente funções de duas variáveis às vezes se torna bem difícil, pois trata-se de desenhar uma figura de três dimensões no plano. Para isso, foram criadas as curvas de nível, que são obtidas igualando a função a um número real $c \in Im(f)$. Graficamente, trata-se da interseção do gráfico da função com um plano paralelo ao plano xy . Ou seja, as curvas de nível são curvas contidas em um plano, o que facilita o seu esboço.

Exemplo 5. O gráfico da função constante $f(x, y) = 4$.

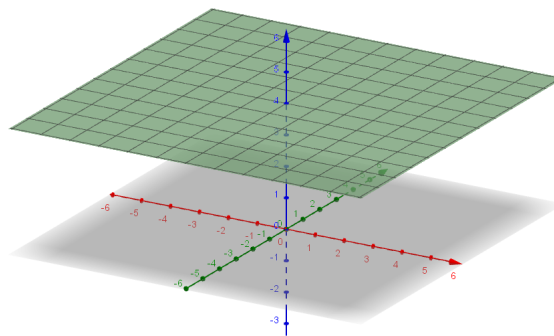


Figura 3: Gráfico da função

Na figura acima, temos o gráfico de $f(x, y) = 4$, para qualquer valor de (x, y) , o gráfico é um plano paralelo ao plano xy .

Exemplo 6. O gráfico da função linear dada por $z = 2x + y$ é um plano passando pela origem e normal ao vetor $\eta = (2, 1, -1)$. Pois, $z = 2x + y \Leftrightarrow 2x + y - z = 0 \Leftrightarrow (2, 1, -1) \cdot$

$[(x, y, z) - (0, 0, 0)] = 0$. Tal plano é determinado pelas retas

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = y \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 2x \end{cases}$$

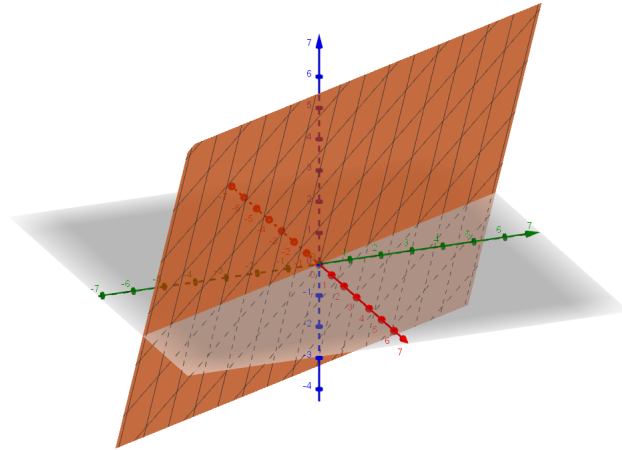


Figura 4: Plano gerado pela função

Exemplo 7. O gráfico da função afim f dada por $z = ax + by + c$ é um plano normal ao vetor $\eta = (a, b, -1)$. Tal plano é determinado pelas retas

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = by + c \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = ax + c \end{cases}$$

Exemplo 8. Vamos desenhar as curvas de nível de $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Observamos inicialmente que a imagem de f é o conjunto de todos os reais $z \geq 0$. Portanto para representar as curvas de nível precisamos tomar $c \geq 0$. A curva de nível corresponde a $z = c$ é $f(x, y) = c \Leftrightarrow x^2 + y^2 = c$. Dessa forma, a curva de nível é uma circunferência com centro na origem e raio \sqrt{c} .

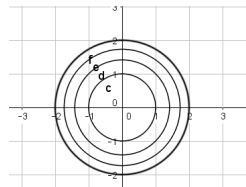


Figura 5: Curvas de nível concêntricas

Exemplo 9. Esboçemos o gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$.

No exemplo anterior, esboçamos as curvas de nível da função em questão, dessa forma, a interseção de planos com o gráfico da função são circunferências concêntricas na origem. A interseção com os planos xz e yz são parábolas.

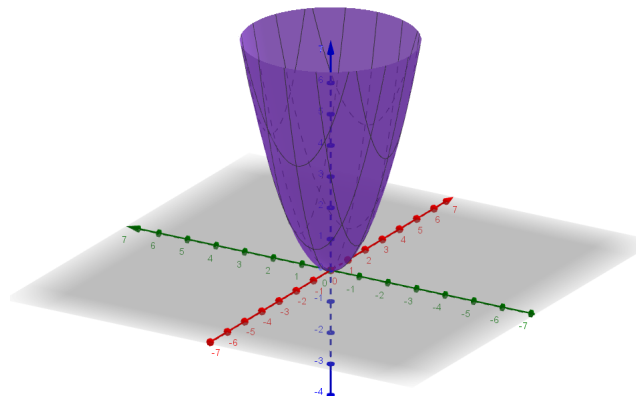


Figura 6: Paraboloides de rotação

Exemplo 10. Seja f a função dada por $z = \frac{1}{x^2+y^2}$. Vamos determinar o domínio e a imagem de f , desenhar suas curvas de nível e esboçar seu gráfico.

Seu domínio é dado por $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y) \neq (0, 0)\}$ e $Im(f) = \{z \in \mathbb{R}; z > 0\}$.

As curvas de nível correspondentes a $z = c$ são $\frac{1}{x^2+y^2} = c$ ou $x^2 + y^2 = \frac{1}{c}$.

O plano $x = 0$ intersecciona o gráfico segundo a curva $x = 0$ e $z = \frac{1}{y^2}$. Para $c > 0$, o plano $z = c$ intercepta o gráfico de f segundo a circunferência $z = c$ e $x^2 + y^2 = \frac{1}{c}$. O gráfico de f é obtido girando em torno do eixo z a curva $x = 0$ e $z = \frac{1}{y^2}$.

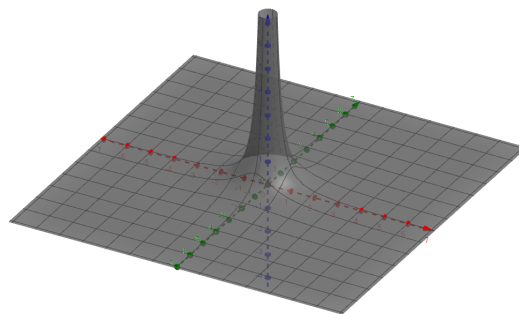


Figura 7: Gráfico da função

Limite e Continuidade

Limites

Nessa seção vamos falar sobre limites de funções de várias variáveis. Começamos pela definição de limites. A ideia será trabalhada em um domínio que é um subconjunto do \mathbb{R}^2 , mas que pode ser estendida facilmente para qualquer outro subconjunto do \mathbb{R}^n .

Definição 1. Sejam $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, (x_0, y_0) um ponto de acumulação de A e L um número real. Por definição, $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$ significa que para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, que depende de ϵ , tal que $(x, y) \in D_f, 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon$.

Exemplo 11. Se $f(x, y) = k$ é uma função constante, vamos verificar que para todo (x_0, y_0) em \mathbb{R}^2 tem-se $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = k$

Como $|f(x, y) - k| = |k - k| = 0$, então, dado $\epsilon > 0$, qualquer que seja $\delta > 0$ temos $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - k| < \epsilon$.

Logo $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} k = k$.

Exemplo 12. Se $f(x, y) = x$, para todo (x_0, y_0) pertencente a \mathbb{R}^2 vamos verificar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x = x_0$

Como $|x - x_0| \leq \|(x, y) - (x_0, y_0)\|$, então, dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \epsilon$ tem-se $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \epsilon$.

Ou seja, $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - x_0| < \epsilon$.

Logo, $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x = x_0$.

Calcular limites usando a definição é bastante trabalhoso. Por isso, vamos apresentar instrumentos que facilitam o cálculo desses limites. Antes disso, faremos uma discussão sobre ponto de acumulação necessária para o cálculo de limites.

Um ponto (x_0, y_0) é um ponto de acumulação de D_f se qualquer bola em torno de (x_0, y_0) contém pontos do domínio de f distintos de (x_0, y_0) .

Teorema 1. Seja (x_0, y_0) um ponto de acumulação de D_f , e suponha $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$. Suponha também que $\gamma(t) = (x(t), y(t)); t \in I$, seja uma curva com imagem no domínio de f . $x(t)$ e $y(t)$ são contínuas em t_0 e $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ e $\gamma(t) \neq (x_0, y_0)$ para $t \neq t_0$. Então $\lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma(t)) = L$.

Demonstração. De $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$ segue que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta_1 \Rightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon$. Sendo γ contínua em t_0 , para todo $\gamma_1 > 0$ acima, existe $\delta > 0$ tal que $|t - t_0| < \delta \Rightarrow \|\gamma(t) - (x_0, y_0)\| < \delta_1$ e portanto, tendo em vista $\gamma(t) \neq (x_0, y_0)$ para $t \neq t_0$, $0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow 0 < \|\gamma(t) - (x_0, y_0)\| < \delta_1$. Segue que $0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(\gamma(t)) - L| < \epsilon$. Ou seja, $\lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma(t)) = L$ \square

Obs: A grande utilidade desse teorema é que se “andarmos” por curvas γ_1 e γ_2 diferentes e se $\lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma_1(t)) = L_1$ e $\lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma_2(t)) = L_2$ com $L_1 \neq L_2$ então $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ não existirá.

Exemplo 13. A função $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ tem limite em $(0,0)$?

Tomemos $\gamma_1(t) = (t, 0)$ e $\gamma_2(t) = (0, t)$ então teremos $f(t, 0) = \frac{t^2 - 0}{t^2 + 0} = 1$, portanto $\lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma_1(t)) = 1$ e $f(0, t) = \frac{-t^2}{t^2} = -1$ dessa forma $\lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma_2(t)) = -1$.

Portanto $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ não existe.

Exemplo 14. A função $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ tem limite em $(0,0)$?

Tomemos $\gamma_1(t) = (t, 0)$ e observemos que $\gamma_1(0) = (0,0)$. Logo $\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$.

Tomemos $\gamma_2(t) = (t, t)$, e observemos que $\gamma_2(0) = (0,0)$. Logo $\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Como o limite é diferente por caminhos diferentes, então $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ não existe.

Teorema 2 (Confronto). Se $f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$ para $0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < r$ e se $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} h(x,y)$ então $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = L$.

Teorema 3. Se $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = 0$ e $|g(x,y)| \leq M$ para todo $0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < r$, então $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) \cdot g(x,y) = 0$.

Exemplo 15. Vamos calcular o limite da função $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$.

Observe que $\frac{x^2}{x^2 + y^2}$ é uma função limitada, pois, $0 \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1$ e com isso temos $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0$, pois temos uma função limitada multiplicada por uma função que tende a 0, dessa forma, o produto tende a 0.

Exemplo 16. Vamos calcular o limite da função $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$.

Tomemos $\gamma_1(t) = (0, t)$ e $\gamma_2(t) = (t, t)$. Dai $\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0^2}{0^2 + t^2} = 0$ e $\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2}$.

Logo, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ não existe.

Obs: $\frac{x^2}{x^2 + y^2}$ é limitada.

Propriedades do limite

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} |f(x,y)| = 0$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) - L = 0$
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(x_0 + h, y_0 + k) = L$
4. Se $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L_1$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = L_2$, então:
 - (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) + g(x,y) = L_1 + L_2$
 - (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} kf(x,y) = kL_1$
 - (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) \cdot g(x,y) = L_1 \cdot L_2$
 - (d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L_1}{L_2}$ desde que $L_2 \neq 0$ e $g(x,y) \neq 0$ em torno de (x_0, y_0) .

Continuidade

Definição 2. Seja f uma função de duas variáveis reais a valores reais e seja $(x_0, y_0) \in D_f$ com (x_0, y_0) ponto de acumulação de D_f . Diremos que f é contínua em (x_0, y_0) se, e somente se, $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$. Caso f for contínua em todos os pontos de um conjunto $A \subset D_f$, diremos que f é contínua em A . Diremos, simplesmente, que f é contínua se o for em todos os pontos de seu domínio.

Exemplo 17. A função $f(x, y) = k$ é contínua, pois, $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = k = f(x_0, y_0)$, para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 18. A função $f(x, y) = x$ é contínua, pois, $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x = x_0 = f(x_0, y_0)$, para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 19. Vejamos se a função $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ definida assim para todos os pontos $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(x, y) = 0$ se $(x, y) = (0, 0)$ é contínua em $(0, 0)$.

Tomando-se $\gamma_1(t) = (t, 0)$ e $\gamma_2(t) = (0, t)$ vem, $\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2} = 1$ e $\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t^2}{t^2} = -1$. Portanto, o limite não existe e f não é contínua em $(0, 0)$.

Derivadas Parciais e Curvas Parametrizadas no Espaço

Antes de falar de derivadas parciais, vamos falar um pouco sobre curvas parametrizadas no \mathbb{R}^3 , e retas tangentes à essas curva.

Curvas Parametrizadas no Espaço

Definimos curvas no \mathbb{R}^3 como sendo uma função $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ onde $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, sendo I um intervalo em \mathbb{R} .

Exemplo 20. Se $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ é uma curva, então trata-se de uma hélice, pois $x^2 + y^2 = \sin(t)^2 + \cos(t)^2 = 1$ é uma circunferência de raio 1 e a coordenada t representando z está livre. O traço está abaixo.

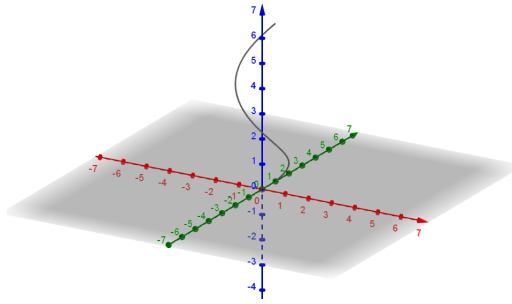


Figura 8: Hélice circular

Como fazer para determinar a reta tangente a uma curva em um determinado ponto da curva? Tomemos o vetor $\gamma(t) - \gamma(t_0)$. Dividindo esse vetor por $t - t_0$ obtemos $\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$, que é um vetor com a mesma direção de $\gamma(t) - \gamma(t_0)$.

Agora tomemos o $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$, a direção que é secante à curva ficará tangente à curva, caso o limite exista.

O limite acima vai existir, se e só se, o limite cada coordenada for derivável em t_0 . Vejamos.

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} &= \frac{(x(t), y(t), z(t)) - (x(t_0), y(t_0), z(t_0))}{t - t_0} = \\ &= \left(\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}, \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} \right). \end{aligned}$$

Se $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ forem deriváveis em t_0 , então

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}, \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} \right) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)).$$

Esse vetor é chamado de vetor tangente a γ no ponto t_0 .

Exemplo 21. Se $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, vamos encontrar a reta tangente a γ em $\frac{\pi}{3}$.

Temos que $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$ para $t = \frac{\pi}{3}$. Também $\gamma(\frac{\pi}{3}) = (\cos(\frac{\pi}{3}), \sin(\frac{\pi}{3}), 1) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3})$ e $\gamma'(\frac{\pi}{3}) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1)$.

Dessa forma, a equação da reta tem direção de $\gamma'(\frac{\pi}{3})$ passando pelo ponto $\gamma(\frac{\pi}{3})$, ou seja, $\gamma(t) = \gamma(\frac{\pi}{3}) + t \cdot \gamma'(\frac{\pi}{3}); t \in \mathbb{R}$.

Derivadas Parciais

Seja $z = f(x, y)$ uma função real de duas variáveis reais e seja $(x_0, y_0) \in D_f$. Fixado y_0 , podemos considerar a função g de uma variável dada por $g(x) = f(x, y_0)$.

A derivada dessa função no ponto $x = x_0$, caso exista é dada por

$$g'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Tal limite é chamado de derivada parcial de f em relação a x e é denotado por $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

Da mesma forma podemos definir $h(y) = f(x_0, y)$, fixando um ponto x_0 ; com isso, teremos

$$h'(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{h(y) - h(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Tal limite é chamado de derivada parcial de f em relação a y e é denotado por $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Exemplo 22. Se $f(x, y) = 3x^2y$, vamos calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x, 2) - f(1, 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 6}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} 6(x + 1) = 12$$

Uma maneira de calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ é fixando $y = y_0$ em $z = f(x, y)$ e calcular a derivada de $g(x) = f(x, y_0)$ em $x = x_0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0)$. Dessa forma, a função $g(x)$ é uma função de uma variável e basta usar o que foi aprendido no Cálculo 1.

Exemplo 23. Se $f(x, y) = 2xy - 4y$, vamos calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1)$.

Olhando y como constante e derivando em relação a x temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial(2xy - 4y)}{\partial x} = 2y$$

Olhando x como constante e derivando em relação a y temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial(2xy - 4y)}{\partial x} = 2x - 4$$

Tendo em vista os cálculos anteriores segue que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1) = -6$$

Exemplo 24. Considere a função $z = f(x, y)$ dada por $z = \tan^{-1}(x^2 + y^2)$. Vamos calcular $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$. Usaremos a regra da cadeia.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + (x^2 + y^2)^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1 + (x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + (x^2 + y^2)^2} \cdot 2y = \frac{2y}{1 + (x^2 + y^2)^2}$$

Exemplo 25. (Interpretação geométrica) Suponhamos que $z = f(x, y)$ admite derivadas parciais em $(x_0, y_0) \in D_f$. O gráfico da função $g(x) = f(x, y_0)$ é a interseção do plano $y = y_0$ com o gráfico de f . Daí, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ é, então, o coeficiente angular da reta tangente T no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, ou seja, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \tan \alpha$, onde α é o maior ângulo entre a reta $(x = t, y = y_0, z = 0), t \in \mathbb{R}$ e a reta tangente.

O próximo exemplo mostra que a existência de derivada parcial num ponto não implica a continuidade da função nesse ponto.

Exemplo 26. Considere $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 1$. Então, f admite derivadas parciais em $(0, 0)$ mas não é contínua em $(0, 0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{0 - y} = 0$$

O exemplo 14 mostrá-nos que o limite não existe.

O exemplo nos mostra que a mera existência de derivadas parciais de f não implica a derivabilidade em t_0 da composta $g(t) = f(\gamma(t))$, onde γ é uma curva suposta diferenciável em t_0 e $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$. Observe que, f admite derivadas parciais em $(0, 0)$, $\gamma(t) = (t, t)$ é diferenciável em $t = 0$, mas a composta $g(t) = f(\gamma(t))$ não é diferenciável em $t = 0$.

Funções Diferenciáveis

Uma função real de uma variável f é diferenciável se existir o limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, e se o mesmo for finito. Esta forma não é suficiente para o caso de duas variáveis, pois, caso f seja uma função de duas variáveis, h será um par ordenado e, então, a razão não fará sentido. Vamos encontrar uma forma equivalente à definição de diferenciabilidade que seja passível de generalização.

Supondo $f(x)$ diferenciável em x_0 , existe um número real v , $v = f'(x_0)$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = v$$

Temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = v \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - vh}{h} = 0$$

Como

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(h)}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(h)}{|h|} = 0$$

então temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = v \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - vh}{|h|} = 0$$

Dessa forma, f é diferenciável em x_0 se, e somente se, existir um único real v tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - vh}{|h|} = 0$$

Agora, vamos fazer uma extensão dessa ideia para funções de duas variáveis.

Definição 3. Sejam $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, A um aberto de \mathbb{R}^2 , e $(x_0, y_0) \in A$. Dizemos que f é diferenciável em (x_0, y_0) se, e somente se, existe um vetor $v \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - v \cdot (h, k)}{\|(h, k)\|} = 0$$

O vetor v é único. Vamos ver o primeiro teorema sobre função diferenciável.

Teorema 4. Se f for diferenciável em (x_0, y_0) então f será contínua em (x_0, y_0) .

Demonstração. Sendo $f(x, y)$ diferenciável em (x_0, y_0) , existem reais a e b tais que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0$$

onde $E(h, k)$ é a função dada por $f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + ah + bk + E(h, k)$.

Como $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (ah + bk) = 0$ e

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} E(h, k) = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\|(h, k)\| \cdot E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0$$

temos

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0)$$

e portanto, f é contínua. \square

No próximo teorema, iremos mostrar que se $f(x, y)$ for diferenciável em (x_0, y_0) então f admitirá derivadas parciais em (x_0, y_0) e

$$L(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k$$

será a única transformação linear que goza da propriedade

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Teorema 5. *Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, A aberto, e seja $(x_0, y_0) \in A$. Se f for diferenciável em (x_0, y_0) , então f admitirá derivadas parciais em (x_0, y_0) .*

Demonstração. Sendo $f(x, y)$ diferenciável em (x_0, y_0) , existem reais a e b tais que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0$$

com de $E(h, k)$ como já definido. Segue que, tomando $k = 0$,

$$\lim_{(h,0) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - ah}{|h|} = 0$$

Daí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - ah}{h} = 0$$

e portanto

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

De forma análoga, $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. \square

Exemplo 27. Vamos verificar que $f(x, y) = x^2y$ é diferenciável.

As derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0y_0 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = x_0^2$$

Por outro lado temos para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} E(h, k) &= f(x + h, y + k) - f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot k = \\ &= (x + h)^2(y + k) - x^2y - 2xyh - x^2k = 2xhk + h^2y + h^2k \end{aligned}$$

Como para $(h, k) \neq (0, 0)$, $\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{2xhk + h^2y + h^2k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} 2xh \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} + hy \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} + hk \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 \end{aligned}$$

Portanto, f é diferenciável em todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ou seja, f é uma função diferenciável.

Exemplo 28. Vamos verificar se $f(x, y) = \frac{2xy^2}{x^2 + x^4}$ quando $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = (0, 0)$ não é diferenciável.

Como f não é contínua em $(0, 0)$, então f não é diferenciável em $(0, 0)$.

Teorema 6. *Sejam $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, A aberto, e $(x_0, y_0) \in A$. Se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existirem em A e forem contínuas no ponto (x_0, y_0) , então f será diferenciável neste ponto.*

Demonstração. Como A é aberto, existe uma bola aberta B de centro (x_0, y_0) , contida em A . Sejam h e k tais que $(x_0 + h, y_0 + k) \in B$. Temos

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

Fazendo $G(x) = f(x, y_0 + k)$, pelo TVM existe um x' , entre x_0 e $x_0 + h$ tal que

$$I = G(x_0 + h) - G(x_0) = G'(x')h = \frac{\partial f}{\partial x}(x', y_0 + k) \cdot h$$

Da mesma forma, existe um y' entre y_0 e $y_0 + k$ tal que

$$II = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y') \cdot k$$

com isso,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x', y_0 + k) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y') \cdot k$$

Subtraindo em ambos os membros da igualdade acima o valor

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k$$

obtemos

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k = \\ & = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x', y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right) \cdot h + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y') - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \cdot k. \end{aligned}$$

Daí, temos

$$\begin{aligned} & \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k}{\|(h, k)\|} \leq \\ & \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x', y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right| \cdot \frac{|h|}{\|(h, k)\|} + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y') - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right| \cdot \frac{|k|}{\|(h, k)\|} \end{aligned}$$

Pela continuidade de $\frac{\partial f}{\partial x}$ e de $\frac{\partial f}{\partial y}$ em (x_0, y_0) as expressões

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x', y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right| \text{ e } \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y') - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right|$$

tendem a zero quando $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. Com isso,

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k}{\|(h, k)\|} = 0$$

Logo, f é diferenciável em $(0, 0)$. □

Corolário 1. Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, A aberto. Se f for de Classe C_1 em A , então f será diferenciável.

Exemplo 29. Se $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ então f é diferenciável. Pois

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos(x^2 + y^2) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \cos(x^2 + y^2)$$

são contínuas em todo \mathbb{R}^2 .

Plano Tangente e Reta Normal

Se $f(x, y)$ é diferenciável em (x_0, y_0) , temos

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k}{\|(h, k)\|} = 0$$

Fazendo-se $x = x_0 + h$ e $y = y_0 + k$ temos

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)}{\|(h, k)\|} = 0$$

Seja $E(x, y)$ o erro que se comete na aproximação de $f(x, y)$ por

$$T(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Assim, $f(x, y) = T(x, y) + E(x, y)$, onde

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(x, y)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0$$

Definição 4. Seja f diferenciável no ponto (x_0, y_0) . O plano

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

denomina-se plano tangente ao gráfico em f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Em notação escalar, escreve-se

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right) \cdot [(x, y, z) - (x_0, y_0, f(x_0, y_0))]$$

Segue que o plano tangente em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é perpendicular à direção do vetor $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right)$. Dessa forma a reta normal é dada por

$$\gamma(\alpha) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + \alpha \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right), \alpha \in \mathbb{R}$$

Exemplo 30. Se $f(x, y) = 3x^2y - x$, vamos determinar as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de f no ponto $(1, 2, f(1, 2))$.

Como $f(1, 2) = 5$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6xy - 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2$, então $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 11$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 2$.

Então a equação do plano tangente é dada por $z - 5 = 11(x - 1) + 3(y - 2)$ e a reta normal é dada por $(x, y, z) = (1, 2, 5) + \alpha(11, 3, -1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Vetor Gradiente

Seja $z = f(x, y)$ uma função que admite derivadas parciais em (x_0, y_0) . O vetor

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

é chamado de vetor gradiente de f em (x_0, y_0) .

Exemplo 31. Se $f(x, y) = 2x + y^2$, vamos calcular $\nabla f(1, 1)$.

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) = (2, 2y)$$

Logo $\nabla f(1, 1) = (2, 2)$.

Regra da Cadeia

Tomemos uma função $f(x, y)$ definida num aberto do \mathbb{R}^2 , $\gamma(t)$ uma curva definida em um intervalo $I \in \mathbb{R}^2$ tais que $\gamma(t) \in D_f$ para todo $t \in \mathbb{R}$. A ideia é prova que se f e γ forem diferenciáveis, então a composta $F(t) = f(\gamma(t))$ será, também, diferenciável e vale a regra da cadeia $F'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$, onde $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$ é o produto escalar dos vetores $\nabla f(\gamma(t))$ e $\gamma'(t)$.

Lema 1. Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, com A aberto, for diferenciável em A , então existirá uma função $\gamma(X)$ definida em A tal que $f(X) - f(X_0) = \nabla f(X_0)(X - X_0) + \gamma(X)(X - X_0)$ com $\lim_{X \rightarrow X_0} \gamma(X) = 0 = \gamma(X_0)$.

Demonstração. Sendo f diferenciável em X_0 tem-se $f(X) - f(X_0) = \nabla f(X_0)(X - X_0) + E(X)$, com $\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{E(X)}{\|X - X_0\|} = 0$.

Tomando-se $\gamma(X) = \frac{E(X)}{\|X - X_0\|}$ se $x \neq X_0$ e $\gamma(X) = 0$ se $X = X_0$, segue a nossa afirmação. Note que $\gamma(X)$ é contínua em X_0 . \square

Teorema 7. Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aberto e $\gamma(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tais que $\gamma(t) \in A$ para todo t no intervalo I . Nessas condições, se γ for diferenciável em t_0 e f em $X_0 = \gamma(t_0)$, então a composta $F(t) = f(\gamma(t))$ será diferenciável em t_0 e vale a regra da cadeia $F'(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0))\gamma'(t_0)$.

Demonstração. Pelo lema, para todo $X \in A$

$$f(X) - f(X_0) = \nabla f(X_0)(X - X_0) + \varphi(X)\|X - X_0\|$$

onde $\lim_{x \rightarrow X_0} \varphi(X) = 0 = \varphi(X_0)$. Como $X = \gamma(t)$ e $X_0 = \gamma(t_0)$, segue que

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))}{t - t_0} = \frac{\nabla f(\gamma(t_0))(\gamma(t) - \gamma(t_0))}{t - t_0} + \frac{\varphi(\gamma(t))\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}{t - t_0}$$

Observe que

$$\frac{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}{t - t_0} = \frac{|t - t_0|}{t - t_0} \left\| \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right\|$$

De

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(\gamma(t)) \frac{|t - t_0|}{t - t_0} = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow t_0} \left\| \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right\| = \|\gamma'(t)\|$$

resulta

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(\gamma(t)) \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = 0$$

Dessa forma

$$F'(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))}{t - t_0} = \nabla f(\gamma(t)) \gamma'(t)$$

A demonstração pode ser estendida facilmente para uma função de n variáveis. \square

Segue do teorema que se a função f for diferenciável em $A \subset \mathbb{R}^2$ e γ for diferenciável em I , então a composta $F(t) = f(\gamma(t))$ será diferenciável, e para todo $t \in I$

$$F'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \gamma'(t)$$

Fazendo $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ e lembrando que $\gamma'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$, resulta

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}$$

Podemos escrever

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

com as derivadas parciais de f sendo calculadas em $(x(t), y(t))$ quando F for calculada em t .

Exemplo 32. Se $z = xy$, com $x = e^{t^3}$ e $y = 3t + 1$, vamos calcular $\frac{dz}{dt}$.

Escrevendo z em função de t segue que $z = e^{t^3}(3t + 1)$ e conseqüentemente $\frac{dz}{dt} = e^{t^3}(9t^3 + 3t^2 + 3)$.

Podemos também usar a regra da cadeia.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

onde

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y, \frac{\partial z}{\partial y} = x, \frac{dx}{dt} = 3t^2 e^{t^3}, \frac{dy}{dt} = 3$$

Dai

$$\frac{dz}{dt} = y 3t^2 e^{t^3} + x 3 = (3t + 1) 3t^2 e^{t^3} + e^{t^3} 3 = e^{t^3} (9t^3 + 3t^2 + 3)$$

Exemplo 33. Se $F(t) = f(e^{t^2}, \sin(t))$ onde $f(x, y)$ é uma função dada e diferenciável em \mathbb{R}^2 . Vamos encontrar $F'(t)$ em termos das derivadas parciais de f e calcular $F'(0)$ sabendo que $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 5$.

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(e^{t^2}, \sin(t))2te^{t^2} + \frac{\partial f}{\partial y}(e^{t^2}, \sin(t)) \cos(t)$$

E

$$F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)0 + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)1 = 5$$

Derivada Direcional

Nós vimos que se f é diferenciável em (x_0, y_0) e $\gamma : I \rightarrow D_f$ é uma função diferenciável em algum intervalo $I \subset \mathbb{R}$ então $f(\gamma(t))$ é uma função diferenciável. Se $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$, temos

$$f'(\gamma(t_0)) = \nabla f(\gamma(t_0))\gamma'(t_0)$$

Seja $\hat{c} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$ uma curva de nível. Se $(x_0, y_0) \in \hat{c}$ e $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma parametrização de \hat{c} , então $f(\gamma(t)) = c$. Derivando essa expressão em relação a t segue que

$$\nabla f(\gamma(t))\gamma'(t) = 0$$

Geometricamente, isso significa que o gradiente é ortogonal ao vetor tangente, ou seja, $\nabla f(\gamma(t)) \perp \gamma'(t)$.

Exemplo 34. Vamos determinar a equação da reta tangente à curva γ em $\gamma(t_0) = (2, 5)$, sabendo que $\gamma(t) \neq (0, 0)$ e que a imagem de γ está contida na curva de nível 10 da função $f(x, y) = xy$.

Vamos encontrar a equação da reta tangente ao ponto $A = (2, 5)$. Temos que $\nabla f(x, y) = (y, x)$ e nesse caso $\nabla f(2, 5) = (5, 2)$. Como $\nabla f(2, 5)$ é ortogonal à tangente que passa por $(2, 5)$

$$(x-2, y-5) \cdot \nabla f(2, 5) = 0 \rightarrow (x-2, y-5) \cdot (5, 2) = 0 \rightarrow 5x-10+2y-10 = 0 \rightarrow 5x+2y-20 = 0$$

Derivadas Direcionais

Teorema 8. Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aberto, $(x_0, y_0) \in A$ e $\vec{u} = (a, b)$ um vetor unitário. Se $f(x, y)$ for um diferenciável em (x_0, y_0) , então f admitirá derivada direcional em (x_0, y_0) , na direção \vec{u} e

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}$$

Demonstração. Definimos $g(t) = f(x_0 + ta, y_0 + tb)$. Como f é diferenciável em (x_0, y_0) então g é diferenciável em $t = 0$. Pela regra da cadeia

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)b = \nabla f(x_0, y_0)(a, b)$$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = g'(0)$$

segue

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}$$

□

Destacamos que essa fórmula vale se (x_0, y_0) for diferenciável.

Exemplo 35. Se $f(x, y) = x^2 - 3y^3$ e \vec{u} é o versor de $(3, 4)$ vamos calcular $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2, 1)$.

Como $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 9y^2$ são funções contínuas, então f é diferenciável em \mathbb{R}^2 . Como \vec{u} é versor de $(3, 4)$, então $\vec{u} = \frac{(3, 4)}{\|(3, 4)\|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Logo

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2, 1) = (4, -9)\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{12}{5} + \frac{-36}{5} = \frac{-24}{5}$$

Exemplo 36. Se $f = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f = 0$, se $(x, y) = (0, 0)$ e $\vec{u} = (a, b)$, já calculamos anteriormente a $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$ e encontramos a^3 .

Por outro lado, $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) \cdot \vec{u} = (1, 0)(a, b) = a$, ou seja, basta que a seja diferente de 1, 0 ou -1 e que $a \neq a^3$. Ou seja, $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}$, vale somente quando (x_0, y_0) for diferenciável.

Uma outra forma de olhar para o produto escalar é $\|\nabla f(x_0, y_0)\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos(\theta)$, onde θ é o ângulo formado por $\nabla f(x_0, y_0)$ e \vec{u} . Como $\|\vec{u}\| = 1$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cdot \cos(\theta)$$

O valor de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ será máximo quando $\theta = 0$, ou seja, quando os vetores forem paralelos e tiverem mesmo sentido, e mínimo quando $\theta = \pi$, ou seja, quando os vetores forem paralelos e tiverem sentidos opostos.

Portanto o gradiente de f em (x_0, y_0) aponta para a direção e sentido de crescimento mais rápido de f a partir de (x_0, y_0) .

Exemplo 37. Suponha que $T(x, y) = 40 - x^2 - 2y^2$ represente a distribuição de temperatura no plano xy , com a distancia dada em quilômetros e a temperatura em graus Celcius. Um indivíduo encontra-se em $(3, 2)$ e deseja dar um passeio.

1. Descreva o lugar geométrico que ele deverá percorrer se quiser sempre desfrutar a mesma temperatura do ponto $(3, 2)$.
2. Qual direção e sentido deverá tomar se for seu desejo ir para a região de maior crescimento de temperatura?
3. De quanto a temperatura se elevará se ele caminhar 0,01 Km na direção encontrada no item b ?
4. De quanto a temperatura decrescerá se ele caminhar 0,01 Km na direção \vec{y} ?

Solução

1. Ele deve andar sobre a curva de nível $T(x, y) = T(3, 2)$, ou seja, $40 - x^2 - 2y^2 = 40 - 8 - 9 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 = 17$.]
2. Como $\nabla f(x, y) = (-2x, -4y)$, então $\nabla f(3, 2) = (-6, -8)$.
3. $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(3, 2) = \|\nabla f(3, 2)\| = \sqrt{36 + 64} = 10$. Isso significa que a temperatura se elevará $10^\circ C$ por quilômetro quando o indivíduo andar na direção de $\nabla f(3, 2)$. Caminhando 0,01 Km então a temperatura se elevará em $0,1^\circ C$.
4. $\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(3, 2) = \nabla f(3, 2) \cdot \vec{y} = (-6, -8) \cdot (0, 1) = -8$. Isso significa que a temperatura decresce $-8^\circ C$ por quilômetro na direção de \vec{y} . Caminhando 0,01 Km então a temperatura diminuirá $0,08^\circ C$.

Máximos e Mínimos

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. O ponto (x_0, y_0) é ponto de máximo absoluto da função f , ou máximo global, se

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in D$$

O ponto (x_0, y_0) é um ponto de máximo local se existir uma bola aberta B com centro em tal ponto e de raio $r > 0$ tal que

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in D \cap B$$

De forma análoga definimos mínimo absoluto e local.

Seja $A \subset \mathbb{R}^2$. Diremos que um ponto $(x_0, y_0) \in A$ é ponto interior se existir uma bola aberta B com centro em tal ponto e de raio $r > 0$ tal que $B \subset A$. Um conjunto A é aberto se todos os seus pontos são pontos interiores.

Exemplo 38. Se $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $D = \mathbb{R}^2$, então $f(0, 0) = 0 < f(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dai $(0, 0)$ é ponto de mínimo global de f .

Exemplo 39. Se $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $D = \{|x| \leq 2, |y| \leq 2\}$, então $(0, 0)$ é ponto de mínimo global de f e $(\pm 2, \pm 2)$ são pontos de máximo.

Exemplo 40. Se $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $D = \{|x| < 2, |y| < 2\}$, então $(0, 0)$ é ponto de mínimo global de f e não existem pontos de máximo.

Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ é limitado se existe uma bola B de raio $r > 0$ tal que $D \subset B$.

Um ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é dito ponto de fronteira de um conjunto D se todas as bolas abertas com centro em (x, y) e raio $r > 0$ contém pontos de D e pontos que não pertencem a D .

Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^2$ é dito fechado se ele contiver todos os seus pontos de fronteira.

Teorema 9. *Seja $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e (x_0, y_0) um ponto interior de D . Suponha que exista $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Se (x_0, y_0) é máximo ou mínimo, então $\nabla f(x_0, y_0) = 0$.*

Demonstração. Definimos $g(x) = f(x, y_0)$. Como (x_0, y_0) é ponto de máximo ou de mínimo, então x_0 é ponto de máximo ou de mínimo de g . Logo $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) = 0$.

Definindo $h(y) = f(x_0, y)$, de forma análoga acima, concluímos que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = h'(y_0) = 0$. □

Se f é diferenciável em (x_0, y_0) e (x_0, y_0) é interior ao domínio de f , então o plano tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é paralelo ao plano xy e a equação do plano tangente é dada por $f(x_0, y_0)$.

Diremos que (x_0, y_0) é ponto crítico de f se $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Então se D_f é aberto e f é diferenciável, os únicos candidatos a pontos críticos são os pontos críticos.

Exemplo 41. Se $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 8$ e $D = \mathbb{R}^2$, então $\nabla f(x, y) = (2x + 4, 2y - 2)$ e $\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (-2, 1)$. O único ponto crítico é $(-2, 1)$.

Podemos reescrever a expressão de f da seguinte forma: $f(x, y) = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + 8 - 5 = (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + 3$ e percebemos que $f(x, y) \geq 3$. Como $f(-2, 1) = 3$, então $(-2, 1)$ é ponto de mínimo de f .

Exemplo 42. Se $f(x, y) = x^2 - y^2$ e $D = \mathbb{R}^2$, então $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$ e $\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$. Porém tal ponto não é nem máximo e nem mínimo absoluto, pois $f(0, 1) = -1 < f(0, 0) = 0 < f(1, 0) = 1$.

Teorema 10 (Weierstrass). *Seja $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com D fechado e limitado. Então f assume um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em D .*

Exemplo 43. Vamos encontrar o máximo e mínimo absoluto de $f(x, y) = xy - x - y + 1$ definida em $D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } 2x + y \leq 6\}$.

Observe que D é o triângulo retângulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 6)$ e $(3, 0)$. Então D é fechado e limitado. Veja também que f é contínua. Segue pelo teorema de Weierstrass que f assumirá máximo e mínimo absolutos.

Para determinarmos os pontos críticos fazemos $\nabla f(x, y) = (y - 1, x - 1) = (0, 0)$. Logo $(x, y) = (1, 1)$ é ponto crítico.

Analisando a fronteira, segue que se $y = 0$ e $0 \leq x \leq 3$, então $f(x, 0) = -x + 1$ que possui mínimo em $x = 3$ e máximo em $x = 0$.

Se $x = 0$ e $0 \leq y \leq 6$, então $f(0, y) = -y + 1$ que possui mínimo em $y = 6$ e máximo em $y = 0$.

Se $\gamma(t) = (t, 6 - 2t)$, $t \in [0, 3]$, então

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) &= t(6 - 2t) - t - (6 - 2t) + 1 \\ &= 6t - 2t^2 - t - 6 + 2t + 1 \\ &= -2t^2 + 7t - 5. \end{aligned}$$

Derivando essa última expressão em relação a t temos $-4t + 7$ que se anula quando $t = \frac{7}{4}$. Segue que $f(\gamma(\frac{7}{4})) = \frac{9}{8}$. Temos também que $f(\gamma(0)) = f(0, 6) = -5$ e $f(\gamma(3)) = f(3, 0) = -2$.

Assim, concluímos que $(0, 6)$ é o ponto de mínimo de f e $(\frac{7}{4}, \frac{5}{2})$ é o seu ponto de máximo.

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e (x_0, y_0) um ponto interior de D tal que $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$, $\forall (x, y) \in B_r(x_0, y_0)$. Seja $g(x) = f(x, y_0)$, $\forall x \in I \subset \mathbb{R}$, I é aberto $\rightarrow x_0 \in I \rightarrow x_0$ é ponto de máximo local de g , e sendo g de classe $C^2 \rightarrow g'(x_0) = 0$ e $g''(x_0) \leq 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0$

Se tomarmos $h(y) = f(x_0, y)$, segue que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0$

Teorema 11. *Seja $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 com D aberto. Se (x_0, y_0) for ponto de máximo local de f então $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0$.*

Existe um teorema análogo para mínimo.

Teorema 12. *Seja $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 com D aberto. Se (x_0, y_0) for ponto de mínimo local de f então $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \geq 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \geq 0$.*

Exemplo 44. Vamos determinar os candidatos a extremante locais de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$.

Como $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3$, então $\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$ e $y^2 - 1 = 0$. Daí os pontos críticos são $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ e $(1, 1)$.

Também $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y$.

Calculando nos candidatos a ponto crítico

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 6 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) = -6 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, -1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -1) = 6 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -1) = -6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 1) = -6 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, 1) = 6$$

Assim $(1, 1)$ é candidato a mínimo, $(-1, -1)$ é candidato a máximo e $(-1, 1)$ e $(1, -1)$ são pontos de sela.

Teorema 13. *Considere a forma quadrática $Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$, onde a, b e c são constantes, $a \neq 0$. Então*

$$Q(h, k) = a \left(h + \frac{b}{a}k \right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}}{a} k^2$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} ah^2 + 2bhk + ck^2 &= a \left[h^2 + \frac{2bhk}{a} + \frac{ck^2}{a} \right] \\ &= a \left[h^2 + \frac{2b}{a}hk + \frac{b^2}{a^2}k^2 - \frac{b^2}{a^2}k^2 + \frac{c}{a}k^2 \right] \\ &= a \left[\left(h + \frac{b}{a}k \right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2}k^2 \right], \end{aligned}$$

ou seja,

$$Q(h, k) = a \left(h + \frac{b}{a}k \right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}}{a} k^2$$

□

Teorema 14. Considere a forma quadrática $Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$. Então

1. se $a > 0$ e $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$, então $Q(h, k) > 0$ para todo $(h, k) \neq (0, 0)$.
2. se $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} < 0$, então existem (h_1, k_1) e (h_2, k_2) tais que $Q(h_1, k_1) < 0$ e $Q(h_2, k_2) > 0$.

Demonstração. Como já demonstrado, se $a \neq 0$, podemos escrever

$$Q(h, k) = a \left(h + \frac{b}{a}k \right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}}{a} k^2$$

e a demonstração do primeiro item é imediata.

Para o segundo item considere $a = 0$. Então $b \neq 0$. Logo, existe α tal que $Q(\alpha, 1)$ e $Q(\alpha, -1)$ terão sinais contrários.

Considerando $a \neq 0$, então $Q(1, 0)$ e $Q(\frac{b}{a}, -1)$ terão sinais contrários, pois $Q(1, 0) = a$ e

$$Q\left(\frac{b}{a}, -1\right) = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}}{a}.$$

□

Teorema 15. Seja f de classe C^2 num aberto A de \mathbb{R}^2 e seja $(x_0, y_0) \in A$ um ponto crítico de f . Se

$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} < 0$$

então (x_0, y_0) não é extremante local de f .

Demonstração. Fazendo $\vec{v} = (h, k)$, então

$$g_{\vec{v}}^{(t)}(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt)$$

Pela regra da cadeia,

$$g_{\vec{v}}''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2$$

Pelo segundo item do teorema acima, existem $\vec{v}_1 = (h_1, k_1)$ e $\vec{v}_2 = (h_2, k_2)$ tais que $g''_{\vec{v}_1}(0) < 0$ e $g''_{\vec{v}_2}(0) > 0$.

Assim $t = 0$ é o ponto de máximo local de $g_{\vec{v}_1}(t)$ e ponto de mínimo local de $g_{\vec{v}_2}(t)$. Logo, (x_0, y_0) não é extremante local de f . \square

Seja $(x_0, y_0) \in D_f$ um ponto crítico de f . Dizemos que ele é *ponto de sela* se em toda bola aberta com centro nesse ponto existirem (x_1, y_1) e (x_2, y_2) com $f(x_1, y_1) < f(x_0, y_0)$ e $f(x_2, y_2) > f(x_0, y_0)$.

Seja f de classe C^2 num aberto A de \mathbb{R}^2 e seja $(x_0, y_0) \in A$ um ponto crítico de f . Se $H(x_0, y_0) < 0$ segue do último teorema que (x_0, y_0) será ponto de sela.

Teorema 16. *Sejam f de classe C^2 e (x_0, y_0) um ponto interior de D_f . Suponha também que (x_0, y_0) é ponto crítico de f . Então*

1. *se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ e $H(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) será um ponto de mínimo local de f .*
2. *se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ e $H(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) será um ponto de máximo local de f .*

Demonstração. Para demonstrar o primeiro item considere as hipóteses e lembre-se que as funções

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \text{ e } H(x, y)$$

são contínuas.

Segue pelo teorema da conservação de sinal que existe uma bola aberta B com centro em (x_0, y_0) inteiramente contida em D_f e tal que para todos os pontos $(x, y) \in B$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) > 0 \text{ e } H(x, y) > 0$$

Pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange, segue que para todo (h, k) com $(x_0 + h, y_0 + k) \in B$, existe (u, v) interno ao segmento cujos extremos são (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0 + k)$ tal que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, v)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u, v)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u, v)k^2 \right]$$

Como $(u, v) \in B$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, v) > 0 \text{ e } H(u, v) > 0$$

tendo em vista o penúltimo teorema, para todo $(h, k) \neq (0, 0)$ com $(x_0 + h, y_0 + k) \in B$,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) > 0,$$

ou seja, $f(x, y) > f(x_0, y_0)$.

Para verificarmos o segundo item, basta notar que (x_0, y_0) é mínimo local de $g(x, y) = -f(x, y)$. \square

Voltando ao exemplo onde $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$, havíamos concluído que $(1, 1)$ era candidato a mínimo local e $(-1, -1)$ era candidato a máximo local.

O determinante da matriz hessiana é dada por

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36xy$$

Logo, $H(1, 1) = 6 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 6 > 0$ e concluímos que $(1, 1)$ é mínimo local.

Também, $H(-1, -1) = 6 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) = -6 < 0$ e concluímos que $(-1, -1)$ é máximo local.

Multiplicadores de Lagrange

O objetivo central do estudo dos multiplicadores de Lagrange é encontrar máximos e mínimos de conjuntos do tipo

$$\{(x, y) | g(x, y) = 0\}, \{(x, y) | g(x, y) = 0\}, \{(x, y, z) | g(x, y, z) = 0\}$$

$$\{(x, y, z) | g(x, y, z) = 0 \text{ e } h(x, y, z) = 0\}.$$

Seja $f(x, y)$ diferenciável no aberto A e seja $B = \{(x, y) \in A | g(x, y) = 0\}$, onde g é de classe C^1 em A . Suponhamos também que $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$ em B . Vamos determinar uma condição necessária para que $(x_0, y_0) \in B$ seja um extremante local para f em B .

Sem perda de generalidade, suponhamos que $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ e que z cresce no sentido indicado ($c_1 < c_2 < c_3 < z_0$). Então, se (x_0, y_0) é um extremante local é razoável supor que a curva de nível de f que passa por esse ponto seja “tangente” nesse ponto à restrição $g(x, y) = 0$, isto é, $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ devem ser paralelos. E como $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, então deve existir λ_0 tal que $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)$.

Concluímos que uma condição necessária para que (x_0, y_0) seja um extremante local para f em B é que (x_0, y_0) torne compatível o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Esse processo é conhecido como multiplicadores de Lagrange. Os valores de λ que

tornam o sistema compatível são chamados de multiplicadores de Lagrange.

Teorema 17. *Seja $f(x, y)$ diferenciável no aberto A e seja $B = \{(x, y) \in A \mid g(x, y) = 0\}$, onde g é de classe C^1 em A e que $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$ em B . Uma condição necessária para que (x_0, y_0) seja extremante local para f em B é que exista um número real λ_0 tal que $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)$.*

Demonstração. Suponhamos que $(x_0, y_0) \in B$ seja um máximo local de f em B , ou seja, existe uma bola aberta V com centro em (x_0, y_0) tal que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ para todo $(x, y) \in B \cap V$. Note que $g(x, y) = 0$ se $(x, y) \in B \cap V$.

Consideremos uma curva diferenciável γ definida em um intervalo aberto I tal que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$, $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$ e $g(\gamma(t)) = 0$, para todo $t \in I$. Como γ é contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$$t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\Rightarrow \gamma(t) \in B \cap V.$$

Daí,

$$f(\gamma(t)) \leq f(\gamma(t_0))$$

para todo $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$. Logo, t_0 é ponto de máximo da função $F(t) = f(\gamma(t))$. Como t_0 é ponto interior de I , segue que $F'(t_0) = 0$, ou seja

$$\nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0.$$

Por outro lado, para todo $t \in I$ temos $g(\gamma(t)) = 0$ e conseqüentemente

$$\nabla g(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0.$$

Tendo em vista que $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$, as duas equações acima nos levam a concluir que existe λ_0 tal que

$$\nabla f(\gamma(t_0)) = \lambda_0 \nabla g(\gamma(t_0))$$

□

Exemplo 45. Vamos encontrar os extremantes de $f(x, y) = 3x + 2y$ com a restrição $x^2 + y^2 = 1$.

Considere $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Vamos encontrar os extremantes de f em $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$. Sendo g de classe C^1 e $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$, então $\nabla g(x, y)$ não se anula em B . Queremos os pontos (x, y) que tornem compatível o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

que neste caso

$$\begin{cases} (3, 2) = \lambda(2x, 2y) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} 3 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

sendo $\lambda \neq 0$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

Substituindo em $x^2 + y^2 = 1$, segue que $\lambda = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Então $M = (\frac{3\sqrt{13}}{3}, \frac{2\sqrt{13}}{13})$ e $N = (-\frac{3\sqrt{13}}{3}, -\frac{2\sqrt{13}}{13})$ são os candidatos a extremante locais. Sendo B compacto e $f(M) > f(N)$, resulta que M é ponto de máximo e N é ponto de mínimo de f em B .

Exemplo 46. Vamos determinar a equação da reta tangente a curva $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, x > 0, y > 0$ que forma com os eixos o triângulo de área mínima.

Se (a, b) é um ponto da elipse citada, então a equação da reta tangente a esse ponto é

$$(2a, \frac{b}{2}) \cdot [(x, y) - (a, b)] = 0 \text{ ou } ax + \frac{by}{4} = 1.$$

Se N é a interseção da reta com o eixo vertical, M com o eixo horizontal e O a origem, então a área do triângulo OMN é dada por $\frac{2}{ab}$. Então o problema consiste em minimizar $\frac{2}{ab}$ com a restrição $a^2 + \frac{b^2}{4} = 1$.

$$\begin{cases} (-\frac{2}{a^2b}, -\frac{2}{ab^2}) = \lambda(2a, \frac{b}{2}) \\ a^2 + \frac{b^2}{4} = 1 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} -\frac{1}{a^3b} = \lambda \\ -\frac{1}{ab^3} = \lambda \\ a^2 + \frac{b^2}{4} = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos a reta $2x + y = 2\sqrt{2}$ como a reta procurada.

O próximo teorema fornece-nos uma condição necessária para que (x_0, y_0, z_0) seja um extremante local para a função $f(x, y, z)$ com as restrições $g(x, y, z) = 0$ e $h(x, y, z) = 0$.

Para demonstrar-mos tal teorema vamos precisar do seguinte resultado: se u, v, w e c são vetores em \mathbb{R}^3 tais que $u \wedge v \neq 0, u \cdot c = 0, v \cdot c = 0$ e $w \cdot c = 0$, então existem reais não nulos λ_1, λ_2 tais que $w = \lambda_1 u + \lambda_2 v$.

Teorema 18. *Seja $f(x, y, z)$ uma função diferenciável no aberto $A \subset \mathbb{R}^3$ e $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0 \text{ e } h(x, y, z) = 0\}$ sendo g e h de classe C^1 no aberto A e $\nabla g(x, y, z) \wedge \nabla h(x, y, z) \neq 0$ em B . Nestas condições, uma condição necessária para que (x_0, y_0, z_0) seja um extremante local de f em B é que existam λ_1, λ_2 tais que $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_1 \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 \nabla h(x_0, y_0, z_0)$.*

Demonstração. Suponhamos que $(x_0, y_0, z_0) \in B$ seja um máximo local de f em B , ou seja, existe uma bola aberta V com centro em (x_0, y_0, z_0) tal que $f(x, y, z) \leq f(x_0, y_0, z_0)$ para todo $(x, y) \in B \cap V$. Note que $g(x, y) = 0$ se $(x, y) \in B \cap V$.

Consideremos uma curva diferenciável γ definida em um intervalo aberto I tal que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0), \gamma'(t_0) \neq \vec{0}$. Como γ é contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$$t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\Rightarrow \gamma(t) \in B \cap V.$$

Daí,

$$f(\gamma(t)) \leq f(\gamma(t_0))$$

para todo $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$. Logo, t_0 é ponto de máximo da função $F(t) = f(\gamma(t))$. Como t_0 é ponto interior de I , segue que $F'(t_0) = 0$, ou seja

$$\nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0. \quad (1)$$

Por outro lado, para todo $t \in I$ temos $g(\gamma(t)) = 0$ e $h(\gamma(t)) = 0$ conseqüentemente

$$\nabla g(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0 \text{ e } \nabla h(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0. \quad (2)$$

De 1 e 2 e das hipóteses do teorema, segue que existem λ_1 e λ_2 tais que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_1 \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 \nabla h(x_0, y_0, z_0)$$

□

Exemplo 47. Vamos encontrar os pontos mais afastados da origem cujas coordenadas estão sujeitos as restrições $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ e $x + y + z = 1$.

Trata-se do problema de maximizar a função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ que é o quadrado da distância de um ponto qualquer de \mathbb{R}^3 até o origem com as restrições $g(x, y, z) = x + y + z - 1$ e $h(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 4$.

Calculando $\nabla g(x, y, z) \wedge \nabla h(x, y, z)$ segue que

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 8y & 2z \end{vmatrix} = (2z - 8y, 2x - 2z, 8y - 2x) \neq 0.$$

O vetor acima é não nulo em B , sendo este último o conjunto dos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ e $x + y + z = 1$. Os candidatos a máximo de f são os pontos que tornam compatível o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

que resultam no sistema

$$\begin{cases} 2x(1 - \mu) = \lambda \\ 2y(1 - 8\mu) = \lambda \\ 2z(1 - \mu) = \lambda \\ x + y + z = 1 \\ x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

A primeira e a terceira equação do sistema nos dizem que $2x(1 - \mu) = 2z(1 - \mu)$. Se $\mu \neq 1$, então $x = z$. Substituímo nas duas últimas

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} y = 1 - 2x \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases}$$

que nos levam a uma equação quadrática em x cujas raízes são $x = 0$ e $x = \frac{8}{9}$. Dai os candidatos são $M = (0, 1, 0)$ e $N = (\frac{8}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$.

Se $\mu = 1$ então $\lambda = 0$ e $y = 0$. Analogamente acima, encontramos $M' = (\frac{1+\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{7}}{2})$ e $N' = (\frac{1-\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{7}}{2})$ como candidatos.

Logo, $f(M) = 1, f(N) = \frac{171}{81}, f(M') = f(N') = 4$. Sendo B compacto, basta verificar apenas nestes pontos. E assim, M' e N' são os mais afastados da origem e M é o mais próximo.

Integrais

Integrais Indefinidas

Considere o retângulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}$ com $a < b$ e $c < d$. Doravante, R indicará esse conjunto. Sejam $P_1 : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ e $P_2 : c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$ partições de $[a, b]$ e $[c, d]$ respectivamente. O conjunto $P = \{(x_i, y_j); i \in \{0, \dots, n\} \text{ e } j \in \{0, \dots, m\}\}$ chama-se partição do retângulo R . Observe que uma partição P de R determina mn retângulos. Seja $(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \in R$ um ponto escolhido aleatoriamente. Façamos

$$\sum f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \cdot \text{área de } R_{ij}$$

onde $f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) = 0$ se $(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \notin D_f$. Se existir e for finito o número

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i,j}^{m,n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \cdot \text{área de } R_{ij}$$

diremos que f é integrável em D .

Denotaremos a integral de f em D por

$$\iint_D f(x, y) \text{ ou } \iint_D f(x, y) dx dy$$

Se $\iint_B f(x, y) dx dy$ existe, diremos que f é integrável segundo Riemann, ou simplesmente integrável, em B . Definimos a área de B como

$$\text{área de } B = \iint_B dx dy$$

desde que a integral exista.

Se $f(x, y)$ é integrável em B , com $f(x, y) \geq 0$ em B e o conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in B \text{ e } 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ definimos o volume de A por

$$\text{volume de } A = \iint_B f(x, y) dx dy$$

Exemplo 48. Vamos mostrar que $f(x, y) = k$ é integrável em R . Além disso vamos calcular o valor dessa integral.

Para toda partição P de R

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m k \Delta x_i \Delta y_j =$$

$$= k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \Delta x_i \Delta y_j = k(b-a)(d-c)$$

logo

$$\iint_R k dx dy = k(b-a)(d-c)$$

Teorema de Fubini para Retângulos

Seja $f(x, y)$ definida e integrável em R . Se fixarmos $y_0 \in [c, d]$ e definirmos uma função $x \rightarrow f(x, y_0)$ uma função de uma variável. Se para cada $y \in [c, d]$, for integrável em $[a, b]$ podemos considerar a função dada por

$$\alpha(y) = \int_a^b f(x, y) dy; y \in [c, d].$$

$\alpha(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ é a área da região pertencente ao plano perpendicular ao plano xy e que contém a reta y fixada e que está entre $z = 0$ e $z = f(x, y)$ e entre $x = a$ e $x = b$.

Se $f(x, y)$ for integrável em R e se para todo $y \in [c, d]$, $\int_a^b f(x, y) dx$ existir, então $\alpha(y)$ será integrável em $[c, d]$ e

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

ou

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \alpha(y) dy$$

Teorema 19 (Fubini). *Seja $f(x, y)$ integrável em R e suponha que $\int_a^b f(x, y) dx$ exista para todo y e que $\int_c^d f(x, y) dy$ exista para todo $x \in [a, b]$. Então*

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Exemplo 49. Vamos calcular $\iint_D xy^2 dx dy$ onde $D = [0, 1] \times [1, 2]$.

$$\begin{aligned} \iint_D xy^2 dx dy &= \int_1^2 \int_0^1 xy^2 dx dy = \int_1^2 \frac{x^2 y^2}{2} \Big|_0^1 dy = \\ &= \int_1^2 \frac{y^2}{2} dy = \frac{y^3}{6} \Big|_1^2 = \frac{8}{6} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

Como estamos em um retângulo, podemos trocar a ordem de integração

$$\begin{aligned} \iint_D xy^2 dx dy &= \int_0^1 \int_1^2 xy^2 dy dx = \int_0^1 \frac{xy^3}{3} \Big|_1^2 dy = \\ &= \int_0^1 \frac{8x}{3} - \frac{x}{3} dx = \int_0^1 \frac{7x}{3} dx = \frac{7x^2}{6} \Big|_0^1 = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

Teorema 20 (Fubini Geral). *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, onde $D = [a, b] \times [g(y), h(y)]$ com g, h funções reais. Se f for contínua em D , temos*

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dy \right] dx$$

e a ordem de integração pode ser trocada

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

Exemplo 50. Vamos calcular $\iint_B x - y dx dy$ onde B é o semi círculo $x^2 + y^2 \leq 1; x \geq 0$

Para cada $x \in [0, 1]$, temos

$$\beta(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} x - y dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x - y dy = xy - \frac{y^2}{2} \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}$$

então

$$\iint_D x - y dx dy = \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2} dx$$

fazendo a mudança de variável

$$\begin{cases} u = 1 - x^2; du = -2x dx \\ x = 0 \rightarrow u = 1 \\ x = 1 \rightarrow u = 0 \end{cases}$$

logo

$$\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{u} du = \frac{2}{3}$$

$$\text{Portanto } \iint_B x - y dx dy = \frac{2}{3}.$$

Invertendo a ordem de integração, temos que $y \in [-1, 1]$ e

$$\alpha(y) = \int_0^b (y)x - y dx = \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (y)x - y dx = \left(\frac{x^2}{2} - xy \right) \Big|_0^{\sqrt{1-y^2}} =$$

$$= \frac{1-y^2}{2} - y\sqrt{1-y^2}$$

dai

$$\iint_B x - y dx dy = \int_{-1}^1 \alpha(y) dy = \int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x - y dx \right] dy$$

Observe que $\int_{-1}^1 y\sqrt{1-y^2} dy = 0$, pois o integrando é uma função ímpar. Como

$\frac{1-y^2}{2}$ é uma função par, segue que

$$\int_{-1}^1 \frac{1-y^2}{2} dy = \int_0^1 1 - y^2 dy = \frac{2}{3}$$

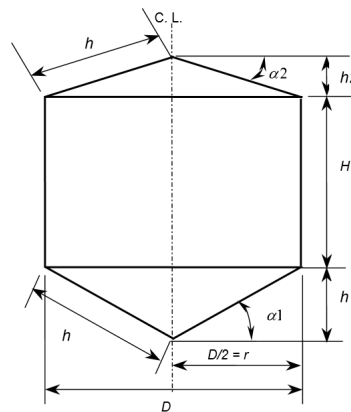
Logo $\iint_B x - y dx dy = \frac{2}{3}$.

Aplicação

Apresentaremos nesse capítulo, uma aplicação do método de Lagrange na análise econômica de reservatórios e vasos de pressão, teoria apresentada no capítulo 6. Além dessa aplicação direta apresentada, a Ferramenta possibilita outras tantas investigações com o objetivo de obter máximos e mínimos de função de uma ou mais condições desejadas.

A indústria sempre busca melhorar a eficiência dos seus equipamentos, levando em conta a viabilidade econômica. Por outro lado, a busca incessante de projetos de baixo custo não deve afetar o desempenho e demais itens de segurança. Com isso, esta análise exige uma visão global dos estudos técnico e econômico procurando a otimização do conjunto.

Exemplo 51. Reservatório cilíndrico Vertical com tampo inferior(fundo) e tampo superior (teto) do tipo cônico com ângulos distintos conforme norma API



Reservatório atmosférico construído conforme norma API.

Figura 9: Reservatório atmosférico construído conforme norma API

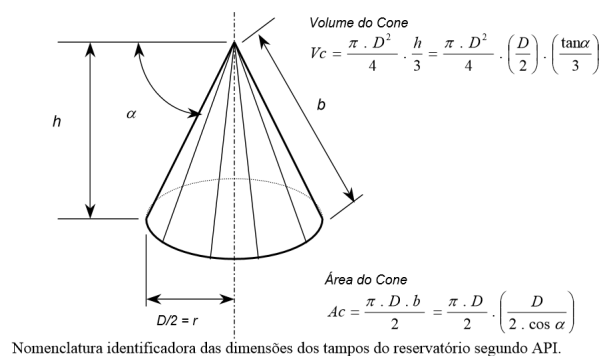


Figura 10: Nomeclatura identificadora das dimensões dos tampos do reservatório segundo API

1º Passo: Determinar a Função que se deseja minimização.

Nesse caso, deseja-se a mínima área do tanque para que contenha um determinado volume.

Função: Área Lateral = Área do Costado + Área dos Tamos (inferior e superior).

$$\text{Área Total } S = \pi DH + \frac{\pi D^2}{4} \left(\frac{1}{\cos(\alpha_1)} + \frac{1}{\cos(\alpha_2)} \right).$$

2º Passo: Determinar a condição para a função S seja atendida.

O que se deseja é que o tanque possua um determinado volume útil.

Volume útil = Volume da parte cilíndrica + Volume do Fundo

Neste caso, a ideia é que o tanque possua um determinado Volume útil igual ao Volume do fundo mais o Volume do Costado, portando teremos:

$$\text{Condição: Volume útil } \rightarrow V = \frac{\pi D^2}{4} \left(H + \frac{D}{6} \tan(\alpha_1) \right).$$

3º Passo: Determinar as dimensões do tanque no espaço se referenciando aos eixos ortogonais x , y e z . Determinação das dimensões básicas em Coordenadas Retangulares.

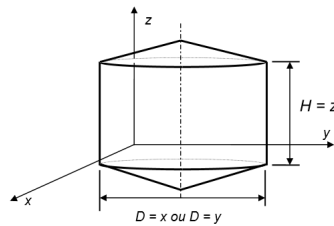


Figura 11: Coordenadas retangulares

Concluimos que $D = x$ ou $D = y$ e $H = z$.

4º Passo: Determinar a Função e a condição fornecidas no 1º Passo e no 2º Passo respeitando as dimensões do tanque se referenciando aos eixos ortogonais x , y e z .

$$\text{Função } \rightarrow \text{Área Total } \rightarrow S = \pi xz + \frac{\pi x^2}{4} \left(\frac{1}{\cos(\alpha_1)} + \frac{1}{\cos(\alpha_2)} \right).$$

$$\text{Condição } \rightarrow \text{Volume útil } \rightarrow V = \frac{\pi x^2}{4} \left(H + \frac{x}{6} \tan(\alpha_1) \right).$$

5º Passo: Determinar uma expressão que será chamada nesse caso de F , fazendo a soma da Função (Área Lateral) com a condição (Volume útil) está última multiplicada pelo multiplicador de Lagrange λ , deixando o Volume V como variável da expressão.

$$F = (\text{função área lateral}) + (\text{condição volume útil})\lambda.$$

$$F(x, y, z, \lambda) = \pi xz + \frac{\pi x^2}{4} \left(\frac{1}{\cos(\alpha_1)} + \frac{1}{\cos(\alpha_2)} \right) + \left[\frac{\pi x^2}{4} \left(H + \frac{x}{6} \tan(\alpha_1) \right) - V \right] \lambda.$$

Distribuindo

$$F(x, y, z, \lambda) = \pi x z + \frac{\pi x^2}{4} \frac{1}{\cos(\alpha_1)} + \frac{\pi x^2}{4} \frac{1}{\cos(\alpha_2)} + \frac{\pi x^2 z \lambda}{4} + \frac{\pi x^3 \tan(\alpha_1) \lambda}{24} - V \lambda.$$

6º Passo: Derive a expressão F em relação a x, y, z e λ , igualando as expressões a zero como segue.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \pi z + \frac{\pi 2x}{4 \cos(\alpha_1)} + \frac{\pi 2x}{4 \cos(\alpha_2)} + \frac{\pi x 2z \lambda}{4} + \frac{\pi 3x^2 \tan(\alpha_1) \lambda}{24} = 0. \quad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \pi x + \frac{x^2 \pi \lambda}{4} = 0. \quad (5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\pi x^2 z \lambda}{4} + \frac{\pi x^3 \tan(\alpha_1) \lambda}{24} - V \lambda. \quad (6)$$

7º Passo: Resolver o sistema do sexto passo, com quatro incógnitas, determinando x, y, z e λ . Isolando x em 5 temos

$$\frac{x^2 \pi \lambda}{4} = -\pi x \Leftrightarrow x = \frac{-4}{\lambda}. \quad (7)$$

Aplicando 6 em 3 e isolando z concluímos que

$$z = \frac{-2}{\lambda} \left(\frac{1}{\cos(\alpha_1)} + \frac{1}{\cos(\alpha_2)} - \frac{3}{2} \tan(\alpha_1) \right). \quad (8)$$

Aplicando 7 e 8 em 6 e isolando a incógnita λ temos

$$\frac{-8\pi}{\lambda^3} \left(\frac{1}{\cos(\alpha_1)} + \frac{1}{\cos(\alpha_2)} - \frac{3}{2} \tan(\alpha_1) \right) - \frac{8\pi \tan(\alpha_1)}{3\lambda^3} (-V) = 0.$$

Isolando V temos

$$V = \frac{-8\pi}{\lambda^3} \left(\frac{1}{\cos(\alpha_1)} + \frac{1}{\cos(\alpha_2)} \right) - \frac{7}{6} \tan(\alpha_1). \quad (9)$$

Ao resolver a equação 9 para uma determinada situação específica, informado o volume útil V desejado e os ângulos de inclinação do Fundo α_1 e do Teto α_2 , encontraremos o valor específico λ , e com isso teremos conhecidos os valores de:

$$\text{Diâmetro: } D = x = \frac{-4}{\lambda}.$$

$$\text{Altura: } H = z = \frac{-2}{\lambda} \left(\frac{1}{\cos(\alpha_1)} + \frac{1}{\cos(\alpha_2)} - \frac{3}{2} \tan(\alpha_1) \right).$$

Podemos determinar também a relação ideal entre H e D da seguinte forma:

Substituindo 7 em 8, teremos

$$z = \frac{-2}{\frac{-4}{x}} \left(\frac{1}{\cos(\alpha_1)} + \frac{1}{\cos(\alpha_2)} - \frac{3 \tan(\alpha_1)}{2\lambda^2} \right).$$

$$\frac{z}{x} = \frac{H}{D} = \left(\frac{1}{2 \cos(\alpha_1)} + \frac{1}{2 \cos(\alpha_2)} - \frac{3 \tan(\alpha_1)}{2} \right).$$

De onde seguem expressões para V , H e D :

$$V = \frac{-8\pi}{\lambda^3} \left(\frac{1}{\cos(\alpha_1)} + \frac{1}{\cos(\alpha_2)} \right) - \frac{7}{6} \tan(\alpha_1).$$

$$H = \frac{-2}{\lambda} \left(\frac{1}{\cos(\alpha_1)} + \frac{1}{\cos(\alpha_2)} - \frac{3}{2} \tan(\alpha_1) \right).$$

$$D = \frac{-4}{\lambda}.$$

Conclusão

Esperamos que com esse trabalho o leitor possa desenvolver um instrumental teórico acerca das funções de várias variáveis, bem como entender a importância desse tema no que diz respeito às aplicações na engenharia e na ciência de um modo geral. No capítulo 8, apresentamos uma aplicação da teoria de máximos e mínimos (Multiplicadores de Lagrange), minimizamos a área de um tanque, sujeito a um determinado volume.

Durante a realização desse trabalho, nos debruçamos sobre algumas aplicações da teoria de máximos e mínimos, que é muito rica em aplicações. Convém destacar, o problema sobre maximizar área de um quadrilátero: Dado quatro segmentos de reta fixos a formar um quadrilátero, qual os ângulos entre os segmentos do quadrilátero que maximizam área dessa figura. Fica uma possibilidade de estudar esse problema em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

H. L. Guidorizzi: **Um Curso de Cálculo**. Vol II, LTC, 5a. Edição, 2002.

J.Stewart:**Cálculo**. vol.2, 7a. ed. São Paulo, Thomson Learning.

T. Apostol:**Cálculo**. Vol 2. II Ed. Reverté Ltda, 1981.

G. S. Ávila: **Cálculo 3**. LTC, 3a Edição, 1982.

M. Spivak:**Cálculo Infinitesimal**. Editora reverté as 1977.

Lima, Elon L.:**Curso de Análise**. Volume II. Projeto Euclides, IMPA.