UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Soluções analíticas e numéricas de equações polinomiais

Lívia Novaes Teixeira Passos

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Lívia Novaes Teixeira Passos

Soluções analíticas e numéricas de equações polinomiais

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Rolnik Artioli

USP – São Carlos
Janeiro de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Passos, Lívia Novaes Teixeira
P289s Soluções analíticas e numéricas de equações polinomiais / Lívia Novaes Teixeira Passos; orientador Vanessa Rolnik Artioli. -- São Carlos, 2017.
82 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

1. Equações polinomiais . 2. Equações algébricas. 3. Fórmulas resolventes. 4. Soluções numéricas. 5. Newton Bairstow. I. Artioli, Vanessa Rolnik, orient. II. Título.

Lívia Novaes Teixeira Passos

Analytical and numerical solutions of polynomial equations

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Profa. Dra. Vanessa Rolnik Artioli

USP – São Carlos
January 2018

Dedico este trabalho aos meus pais que sempre me incentivaram; ao meu esposo que me apoia, ajuda e me faz uma pessoa melhor a cada dia; ao meu filho que é um presente de Deus em minha vida.

AGRADECIMENTOS

A Deus por estar sempre presente em todos momentos de minha vida, tornando tudo possível.

Aos meus pais José Roberto e Goreti por se empenharem para proporcionarem melhores oportunidades na minha vida.

Ao meu esposo Wânder e filho Felipe, pelo apoio e incentivo, que tomavam sempre o cuidado de programar nossa rotina para assim facilitar meus estudos.

Ao meu irmão Lucas por ser pra mim um exemplo de dedicação aos estudos.

A minha irmã Letícia, meu cunhado Marcos e meus sobrinhos Vitor e Igor pelos momentos agradáveis em família, revigorando minhas forças.

A minha sogra Dulcimar, por se fazer presente cuidando de meu filho e esposo quando minha ausência se fazia necessária para dedicação ao trabalho.

A todos meus colegas do curso, pela amizade e companheirismo, em especial à Carla, Daniele, Diego, Paula e Rosa pelos momentos de estudos, descontrações e risadas.

Agradeço aos professores do PROFMAT, pelo conhecimento compartilhado, em especial a Prof.ª Dr.ª Vanessa Rolnik Artioli, pela dedicação, paciência que conduziu a orientação deste trabalho e por ser para mim um exemplo de dinamismo e competência. Muito obrigada!

Aos meus amigos da Escola Municipal Francisco Daniel e Escola Estadual Paraisense, em especial as professoras de matemática Flavia Aparecida Queiroz de Faria e Raquel Cristina Benassi Pereira, por compartilharem conhecimentos e me apoiarem no início de minha carreira.

Agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro.

"A álgebra é generosa: frequentemente ela dá mais que se lhe pediu."
(D'Alembert)

RESUMO

PASSOS, L. N. T. **Soluções analíticas e numéricas de equações polinomiais**. 2018. 82 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

As equações polinomiais são estudadas desde a antiguidade e atualmente são utilizadas, por exemplo, para modelar problemas do cotidiano nas mais variadas áreas do conhecimento. As técnicas de solução de equações polinomiais nem sempre são triviais, principalmente quando envolvem equações de alta ordem e raízes complexas. O ensino desse tema no Ensino Básico é limitado a equações de segundo ou terceiro grau e coeficientes inteiros, o que restringe a aplicação em problemas mais realistas. Assim, o objetivo deste trabalho é trazer uma contribuição aos estudantes, aos professores do Ensino Básico e aos demais interessados, apresentando um material que aborde técnicas de resolução para equação polinomial de diversas naturezas. Iniciamos por uma revisão dos números complexos e dos polinômios, suas operações e propriedades. Embasamos o trabalho com teoremas e permeamos de exemplos com um crescente grau de dificuldade. Dividimos as técnicas de resolução em analíticas e numéricas. Entre as primeiras, tratamos das relações de Girard, das fórmulas resolventes e de alguns casos particulares de equações. Entre as técnicas numéricas, estudamos o método de Newton, o método das secantes e o método de Newton-Bairstow, este último para encontrar raízes complexas.

Palavras-chave: Equações polinomiais, Equações algébricas, Fórmulas resolventes, Soluções numéricas, Newton Bairstow.

ABSTRACT

PASSOS, L. N. T. **Analytical and numerical solutions of polynomial equations**. 2018. 82 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Polynomial equations have been studied since antiquity and are currently used, for example, to model everyday problems in the most varied areas of knowledge. The solution techniques of polynomial equations are not always trivial, especially when they involve high order equations and complex roots. The teaching of this subject in Basic Education is limited to second or third degree equations and integer coefficients, which restricts the application to more realistic problems. Thus, the objective of this work is to bring a contribution to students, teachers of Basic Education and other interested parties, presenting a material that treats of resolution techniques for polynomial equation of different natures. We begin with a review of complex numbers and polynomials, their operations and properties. We support the work with theorems and permeate examples with an increasing degree of difficulty. We divide the techniques of resolution into analytical and numerical. Among the first, we deal with Girard's relations, the resolvent formulas, and some particular cases of equations. Among numerical techniques, we studied the Newton method, the secant method, and the Newton-Bairstow method, the last one to find complex roots.

Keywords: polynomial equations, algebraic equations, solving formulas, numerical solutions, newton bairstow.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

A necessidade de estudar equações polinomiais existe desde tempos remotos. Sabe-se que a civilização babilônica, cuja existência data do século XVI a.C. até VI d.C., já tinha o conhecimento de técnicas de resolução de algumas equações do primeiro e segundo grau que apareciam em problemas do cotidiano. Porém, o avanço teórico das equações polinomiais teve início com o Renascimento na Europa. Nos primórdios do século XVI François Viète (1540-1603) introduziu símbolos na matemática, utilizando letras para representar quantidades desconhecidas facilitando assim as manipulações (OLIVEIRA K. I. M.;FERNANDEZ, 2010).

Na mesma época, o desafio de solucionar uma equação do terceiro grau mexia com as mentes dos matemáticos, destacando-se entre eles Nicola Fontana, o Tartaglia (gago, em italiano)(1500-1557) e Girolamo Cardano (1501-1576). Durante um duelo, onde utilizavam seus conhecimentos em competições públicas desafiando-se uns aos outros na resolução de problemas, Tartaglia vence o matemático, Antônio Maria Fiore, ao resolver vários problemas que envolvia equações do terceiro grau, Cardano nota que Tartaglia tinha conhecimento da regra que solucionava tais equações. Posteriormente, Cardano entra em contato com Tartaglia com o intuito de obter tais conhecimentos sobre a regra utilizada, jurando não divulgá-la. Cardano recebe a regra de Tartaglia em forma de versos e sem nenhuma demonstração. Em conjunto com seu discípulo Ludovíco Ferrari (1522-1565), Cardano desenvolve a demonstração da regra de Tartaglia para solução de equação do tipo $x^3 + px = q$ (BOYER, 1974).

Quebrando o juramento feito a Tartaglia, Cardano publica o livro *Ars Magna* que continha, entre outras coisas, a solução da equação do terceiro grau, o que provocaria o descontentamento de Tartaglia. Na mesma obra é apresentada a solução de equação do quarto grau descoberta por Ferrari. A importância da publicação da obra *Ars Magna* está no impulso dado à pesquisa em álgebra. Uma das consequências, foi o surgimento do conjunto dos números complexos, que teve seu início através dos estudos do matemático Rafael Bombelli (1526-1573), motivado pelo trabalho de Cardano e pela dedicação em compreender as soluções das equações do terceiro grau

(BOYER, 1974), (HEFEZ A.;VILLELA, 2012).

Passado esse cenário das raízes das equações do terceiro e quarto grau, houve muita dedicação em busca de soluções de equações com grau maior ou igual a cinco. Muitos matemáticos talentosos, entre eles Euler e Lagrange, buscaram por soluções gerais de raízes das equações quínticas por fórmula (EVES, 2004). Somente em 1799 Paolo Ruffini apresentou uma demonstração , corrigida por Niels Henrik Abel (1802–1829) em 1824, sobre a impossibilidade de ter uma fórmula geral para resolver equação de grau superior a quatro por meio de transformações algébricas dos radicais. Este resultado ficou conhecido como insolubilidade da quíntica (ZOLADEK, 2000). Para finalizar, Évariste Galois (1811-1832) provou que era impossível encontrar uma fórmula geral para as raízes de uma equação de n-ésimo grau em termos de operações algébricas sobre os coeficientes, se n for qualquer inteiro maior que quatro.

Por outro lado, os matemáticos também buscaram por soluções aproximadas de equações polinomiais. Novamente, as pesquisas foram iniciadas pelos babilônicos que desenvolveram, por volta de 1500 a.C.,um algoritmo capaz de aproximar raízes quadradas de qualquer número positivo com um grande grau de precisão e com isso tornaram possível a solução de equações polinomiais de grau dois.

Outro relato da história trata de um desafio promovido pelo Imperador Frederico II, da Itália, em 1225, para testar as habilidades de Leonardo de Pisa (1175-1250) (também conhecido como Fibonacci, filho de Bonacci). Leonardo teria que encontrar um valor de x que satisfizesse a equação $x^3+3x^2+10x-20=0$. Por meio de um método numérico, deu uma solução aproximada, correta até a nona casa decimal: 1,3688081075 (GARBI, 2009).

Outro matemático famoso que contribuiu para o estudo das equações algébricas foi Isaac Newton (1642 -1716). Em 1664 Newton conhece o trabalho de Viète e em 1669 o aperfeiçoa, linearizando os sucessivos polinômios. Sendo assim, Newton desenvolve trabalhos em três grupos: métodos algébricos aproximados para o encontro de raízes reais de equações não lineares, um método aproximado não algébrico (utilizando elementos de Cálculo Diferencial e amplamente conhecido como Método de Newton) e um conjunto de critérios numéricos para a pesquisa de raízes, como determinação de números chamados cotas inferiores e superiores, abaixo e acima dos quais, respectivamente, não existem raízes reais de uma dada equação.

Por fim, a invenção do computador também influenciou a resolução de equações polinomiais, uma vez que cálculos maiores e mais complexos poderiam ser resolvidos. O método de Newton pode ser facilmente transformado em um algoritmo computacional e atualmente é uma das técnicas mais populares de determinar raízes de equações não lineares. Hoje em dia existem diversos softwares matemáticos, entre eles o gratuito wxMaxima, que calcula raízes de equações polinomiais reais ou complexas, exatas ou aproximadas, com apenas uma linha de comando.

Atualmente os polinômios são muito utilizados para modelar problemas reais de praticamente todas as áreas do conhecimento. Por exemplo, na Física, descrevem a trajetória de um projétil e servem para expressar conceitos como energia e inércia; no Mercado de ações, uma modelagem por meio de polinômios ajuda a prever como os preços podem variar ao longo do tempo, ou como o aumento e queda dos preços de determinado bem irá afetar sua venda; na área da Saúde, descreve o índice de massa corpórea usado para avaliar se o paciente está em seu peso ideal; na Geografia, estima a população futura de um local; na Indústria, a modelagem por polinômios auxilia na otimização de embalagens. Os polinômios, através de suas curvas, também auxiliam no projeto dos trilhos de montanhas-russas e no nosso dia-a-dia estão presentes em situações simples, como em postos de combustível, em que a bomba está programada para calcular o valor a ser pago por determinada quantidade de combustível, o mesmo acontecendo nas contas de energia, em que o valor a ser pago é calculado através de um polinômio onde sua variável é a quantidade de quilowatt consumida em um determinado período.

Apesar de ser um tema bastante antigo, ainda encontramos uma grande quantidade de estudos recentes nesta área. Em especial, dissertações do Profmat que tem como objetivo melhorar o ensino oferecido aos alunos do Ensino Básico. Por exemplo, Nascimento (2015) estudou como a articulação entre tratamentos analíticos, geométricos e numéricos podem auxiliar o estudo de raízes algébricas no ensino médio. Santos (2013) apresenta uma narrativa histórica da resolução das equações polinomiais do terceiro e quarto graus e explica em linguagem simples os métodos clássicos resolutivos dessas equações. Curti (2015) estudou resoluções de equações polinomiais cúbicas e quárticas com ênfase na conceituação com abordagem histórica e manipulação simples.

A razão dos polinômios serem bastante utilizados e estudados está na facilidade de manipulação. As operações elementares de soma, subtração e multiplicação de polinômios são bastante intuitivas. A divisão precisa de alguma técnica mas é relativamente simples. Já encontrar as raízes de equações polinomiais nem sempre é uma tarefa simples. As dificuldades surgem dependendo do grau do polinômio e da natureza dos coeficientes e das raízes. Na Educação Básica, normalmente se ensina como encontrar raízes reais de polinômios de até grau 3. Poucos cursos de Exatas contém esse tópico em sua estrutura curricular. Na disciplina de Cálculo Numérico são apresentados métodos numéricos para encontrar raízes de equações não lineares, o que inclui as equações polinomiais. Dificilmente é ensinado, em qualquer nível escolar, as fórmulas resolventes de ordem maior que dois, nem técnicas para encontrar as raízes complexas. Segundo Curti (2015) a impressão que temos é que existe uma lacuna entre o estudo de equações polinomiais e os números complexos. O mesmo autor, após analisar como os livros didáticos abordam as resoluções de equações, observa que esses materiais não dão suporte aos docentes. Assim, os professores que desejam abordar o assunto de forma mais aprofundada com seus alunos, devem buscar suporte em outras fontes bibliográficas.

Levando em consideração a importância do tema observamos que caberia mais estudo sobre o assunto. Assim surgiu o objetivo deste trabalho: preparar um material que explora técnicas analíticas e numéricas para encontrar raízes reais e complexas, embasado em teoremas e permeado de exemplos com um crescente grau de dificuldade. Esperamos contribuir com professores e alunos que queiram aprimorar seus conhecimentos.

Especificamente, o texto está dividido da seguinte maneira. O Capítulo 2 faz uma revisão do conjunto dos números complexos, suas operações básicas, forma polar, representação geométrica e propriedades, também revisa os polinômios e suas operações básicas. O Capítulo 3 trata das equações polinomiais (ou algébricas), dos teoremas que são embasamento teórico para as técnicas de resolução analítica apresentadas durante o capítulo, entre elas estão as Relações de Girard, Fórmulas Resolventes do segundo, terceiro e quarto graus e técnicas para algumas equações particulares. O Capítulo 4 apresenta alguns métodos numéricos, como o Método de Newton e o Método das Secantes para encontrar as raízes reais e o Método de Newton-Bairstow para o cálculo de raízes complexas. Esses métodos são iterativos, ou seja, fornece uma sequência de aproximações que sob algumas condições, converge para a solução. Afim de agilizar os cálculos e melhorar as aproximações apresentamos o algoritmo de Briot-Ruffini-Horner. Por fim, no Capítulo 5 são feitas considerações finais e propostas para trabalhos futuros.

CAPÍTULO

2

NÚMEROS COMPLEXOS E POLINÔMIOS

Neste capítulo tratamos de descrever o conjunto dos números complexos englobando as operações básicas, a forma polar e a representação geométrica. Damos ênfase à potenciação e à extração de raízes de números complexos, já com foco na resolução de equações polinomiais. Também introduzimos os polinômios e suas operações básicas. Em particular, é dada especial atenção à divisão, intensamente utilizada nos próximos capítulos.

2.1 Conceitos básicos de números complexos

Vamos introduzir os números complexos conforme (IEZZI, 1993), utilizando a estrutura do conjunto $\mathbb{R}^2$. Considere o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ dado por

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\},$$

isto é, $\mathbb{R}^2$ é o conjunto dos pares ordenados (x,y) em que x e y são números reais.

Dados (a,b) e $(c,d) \in \mathbb{R}^2$, podemos definir três operações em $\mathbb{R}^2$:

- Igualdade: $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$
- Adição: $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$
- Multiplicação $(a,b).(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$

O conjunto dos números complexos é formado pelos pares ordenados (x,y) com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ em que valem as equações de igualdade, adição e multiplicação como no $\mathbb{R}^2$. É usual representar esse conjunto por $\mathbb{C}$ e seus elementos (x,y) por z. Portanto

$$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = (x,y) \quad \text{sendo} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Veja Apêndice A para entender a imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$.

2.1.1 Operações algébricas

Definido $\mathbb{C}$ dessa forma, é imediato que as operações de adição e multiplicação neste conjunto satisfazem as propriedades básicas. Tomando três elementos quaisquer de $\mathbb{C}$, $z_1 = (a,b)$, $z_2 = (c,d)$ e $z_3 = (e,f)$ em que $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$, valem as quatro propriedades da adição indicadas por (A), as quatro propriedades da multiplicação indicadas por (M) e a distributiva (D) a seguir.

(A1) Associativa: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$;

(A2) Comutativa: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;

(A3) Existência do elemento neutro: $\exists e_a \in \mathbb{C} \mid z + e_a = z$; $\forall z \in \mathbb{C}$; de fato, $e_a = (0,0)$;

(A4) Existência do elemento simétrico: $\forall z = (a,b) \in \mathbb{C} \quad \exists z' \in \mathbb{C} \mid z + z' = e_a$, z' é usualmente indicado por $-z$ e possui a seguinte forma $-z = (-a,-b)$;

(M1) Associativa: $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$;

(M2) Comutativa: $z_1 z_2 = z_2 z_1$;

(M3) Existência do elemento neutro: $\exists e_m \in \mathbb{C} | z e_m = z, \forall z \in \mathbb{C}$; de fato, $e_m = (1,0)$;

(M4) Existência do elemento inverso: $\forall z = (a,b) \in \mathbb{C} - \{(0,0)\}$, $\exists z'' \in \mathbb{C} | z z'' = e_m$, z'' é usualmente denotado por z^{-1} e possui a seguinte forma $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$;

(D) Distributiva $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

A subtração é definida usando as propriedades da adição. Tomando $z_1 + z = z_2$, somamos o oposto de z_1, $-z_1$,em ambos os lados, $-z_1 + (z_1 + z) = -z_1 + z_2$, de onde vem que $(-z_1 + z_1) + z = z_2 + (-z_1)$ e $e_a + z = z_2 + (-z_1)$. Logo, $z = z_2 + (-z_1)$. Tal z é chamado diferença entre z_2 e z_1 e é indicado por $z_2 - z_1$. Para $z_1 = (a,b)$ e $z_2 = (c,d)$,

$$z_2 - z_1 = (c-a, d-b). \tag{2.1}$$

A divisão é definida usando as propriedades da multiplicação. Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq (0,0)$, existe um único $z \in \mathbb{C}$ tal que $z_2 z = z_1$ pois multiplicando ambos os lados pelo elemento inverso de z_2, z_2^{-1}, $z_2^{-1}(z_2 z) = z_2^{-1} z_1 \Rightarrow (z_2^{-1} z_2) z = z_1 z_2^{-1} \Rightarrow e_m z = z_1 z_2^{-1} \Rightarrow z = z_1 z_2^{-1}$. Esse número z é chamado quociente entre z_1 e z_2 indicado por $\frac{z_1}{z_2}$. Para $z_1 = (a,b)$ e $z_2 = (c,d) \neq (0,0)$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right). \tag{2.2}$$

2.1.2 Unidade imaginária

Chamamos de unidade imaginária o número i associado a $(0,1)$, isto é, $i=(0,1)$. Segue que $i^2 = i\cdot i = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$, ou seja,

$$i^2 = -1. \tag{2.3}$$

De onde vem que

$$\begin{aligned}
&i\\
&i^2 = -1\\
&i^3 = i^2\cdot i = -1\cdot i = -i\\
&i^4 = i^2\cdot i^2 = -1\cdot -1 = 1\\
&i^5 = i^2\cdot i^2\cdot i = -1\cdot -1\cdot i = i\\
&i^6 = i^2\cdot i^2\cdot i^2 = -1\cdot -1\cdot -1 = -1\\
&\vdots\\
&i^{4n} = 1\\
&i^{4n+1} = i\\
&i^{4n+2} = -1\\
&i^{4n+3} = -i,
\end{aligned}$$

para todo $n\in\mathbb{N}$.

A forma usual dos números complexos usa a unidade imaginária. Dado um número complexo qualquer $z=(x,y)$,

$$z=(x,y) \Rightarrow z=(x,0)+(0,y) \Rightarrow z=(x,0)+(y,0)\cdot(0,1).$$

Portanto,

$$z = x + y\cdot i.$$

Todo número complexo pode ser escrito dessa forma, chamada forma algébrica, onde x é a parte real e y a parte imaginária. Um número complexo é chamado real quando sua parte imaginária se anula, ou seja, $y=0$ em que $z=x+0i=x$. E é chamado imaginário puro quando sua parte real é nula, ou seja, $x=0$ em que $z=0+yi=yi$. Com a forma algébrica chegamos à definição usual do conjunto $\mathbb{C}$, ou seja,

$$\mathbb{C} = \left\{x+y\,i / x\in\mathbb{R},\, y\in\mathbb{R},\text{ e } i^2=-1\right\}.$$

A representação dos números complexos na forma algébrica facilita as operações, portanto iremos adotar essa forma durante todo o trabalho.

2.1.3 O plano complexo

Os elementos do conjunto $\mathbb{C}$ são representados geometricamente em um plano cartesiano xOy, como pontos do $\mathbb{R}^2$. O eixo horizontal representa os números reais e o vertical, os complexos puros. Veja Figura 1.

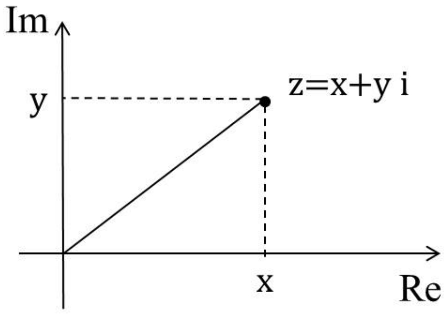

Figura 1 – Plano Complexo.

2.1.4 Complexo conjugado e módulo

A cada número complexo $z = x + yi$ está associado um outro número complexo, chamado conjugado e representado por

$$\bar{z} = x - yi. \tag{2.4}$$

As propriedades mais importantes que relacionam os números complexos e seus conjugados são as seguintes. Sejam z e w números complexos então,

i) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

ii) $\overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$

iii) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

iv) $w \neq 0, \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

v) Se z é real, $z = \bar{z}$

vi) $\bar{\bar{z}} = z$

vii) Se n é um inteiro positivo, $(\bar{z})^n = \overline{(z^n)}$

As demonstrações destas propriedades são encontradas, por exemplo, em (IEZZI, 1993).

O módulo, ou valor absoluto, de um número complexo z é dado por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.5}$$

e representa a distância entre os pontos $O = (0,0)$ e $P = (x,y)$ no plano complexo. A Figura 2 ilustra a interpretação geométrica do módulo e também o conjugado de um número complexo, como sendo o ponto simétrico em relação ao eixo real.

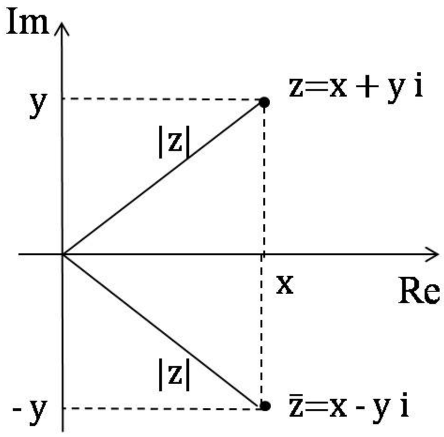

Figura 2 – Módulo e conjugado de um número complexo.

Com o conceito de número imaginário, as operações de soma e multiplicação de dois números complexos quaisquer $z = a + bi$ e $w = c + di$ ficam:

$$z + w = (a + c) + (b + d)i \tag{2.6}$$

$$z.w = (ac - bd) + (ad + bc)i \tag{2.7}$$

Também podemos explicitar o inverso multiplicativo de $z = a + bi$ como

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i.$$

Com isso, a divisão de dois números $z = a + bi$ e $w = c + di$ fica

$$\frac{z}{w} = zw^{-1} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

<u>Exemplo 2.1</u>: Sejam os números complexos $z = 6 + 2i$ e $w = 4 + 3i$, calcule $|z|$, $|w|$, $z + w$, $z - w$, $z.w$, $1/z$, z/w.

(i) $|z| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

(ii) $|w| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

(iii) $z + w = (6 + 2i) + (4 + 3i) = (6 + 4) + (2 + 3)i = 10 + 5i$

(iv) $z - w = (6 + 2i) - (4 + 3i) = (6 - 4) + (2 - 3)i = 2 - i$

(v) $z.w = (6 + 2i).(4 + 3i) = (24 - 6) + (18 + 8)i = 18 + 26i$

(vi) $\frac{1}{z} = \frac{1}{(6 + 2i)} . \frac{(6 - 2i)}{(6 - 2i)} = \frac{6 - 2i}{40} = \frac{3}{20} - \frac{1}{20} i$

(vii) $\frac{z}{w} = \frac{(6 + 2i)}{(4 + 3i)} . \frac{(4 - 3i)}{(4 - 3i)} = \frac{30 - 10i}{25} = \frac{6}{5} - \frac{2}{5} i$

2.1.5 Forma polar

Usando coordenadas polares $x = r\cos\,\theta$, $y = r\text{sen}\,\theta$, a forma polar de $z = x + iy \in \mathbb{C}$, é

$$z = r(\cos\,\theta + i\,\text{sen}\,\theta), \tag{2.8}$$

onde $r = |z|$ e $tg\,\theta = \frac{y}{x}$.

Qualquer número complexo $z = x + yi$ está associado a um raio e um ângulo, conforme mostra a Figura 3.

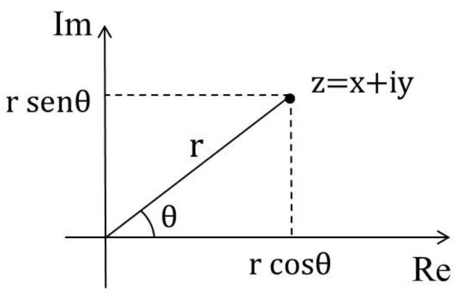

Figura 3 – Argumentos r e θ da forma polar de um número complexo.

Exemplo 2.2 (baseado em (HEFEZ A.;VILLELA, 2012)): Escreva na forma polar os números $z_1 = 2$, $z_2 = -1$, $z_3 = 2i$ e $z_4 = -1 - \sqrt{3}i$.

Representando os números no plano, Figura 4, observamos que

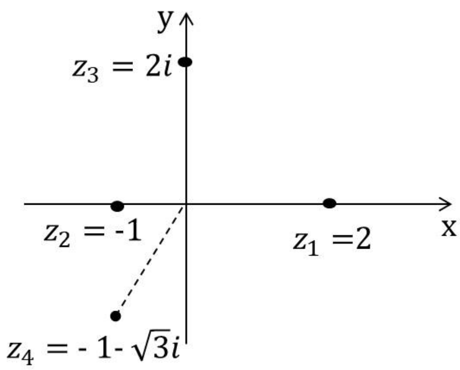

Figura 4 – Pontos no plano complexo referentes ao Exemplo 2.2.

(i) z_1 está situado sobre o eixo horizontal, seu raio é $r_1 = 2$ e seu ângulo é $\theta_1 = 0$. Logo, $z_1 = 2(\cos 0 + i\,\text{sen}\,0)$;

(ii) z_2 também está situado sobre o eixo horizontal com $r_2 = 1$ e $\theta_2 = \pi$. Logo, $z_2 = 1(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$;

(iii) z_3 é um imaginário puro e, portanto, está situado sobre o eixo vertical. Seu raio é $r_3 = 2$ e seu ângulo é $\theta_3 = \pi/2$. Logo, $z_3 = 2(\cos\pi/2 + i\,\text{sen}\,\pi/2)$;

(iv) z_4 está situado no 3^o quadrante, seu raio é $r_4 = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$. Já para calcular o ângulo, observamos que sen$\theta_4 = -\sqrt{3}/2$ e cos$\theta_4 = -1/2$ (divididos pelo raio), portanto, $\theta_4 = \frac{4\pi}{3}$. Logo, $z_4 = 2(\cos 4\pi/3 + i \text{ sen } 4\pi/3)$.

A forma polar simplifica a multiplicação e a divisão de números complexos, pois tomando $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \text{ sen } \theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \text{ sen } \theta_2)$,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2[(\cos\theta_1 + i \text{ sen } \theta_1)(\cos\theta_2 + i \text{ sen } \theta_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos\theta_1 \cos\theta_2 + i \cos\theta_1 \text{ sen } \theta_2 + i \text{ sen } \theta_1 \cos\theta_2 - \text{sen } \theta_1 \text{ sen } \theta_2] \\ &= r_1 r_2[\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \text{sen } \theta_1 \text{ sen } \theta_2 + i(\cos\theta_1 \text{ sen } \theta_2 + \text{sen } \theta_1 \cos\theta_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \text{ sen } (\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned},$$

ou seja, multiplica os raios e soma os ângulos.

De forma análoga, verificamos que a divisão fica

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \text{ sen } (\theta_1 - \theta_2)],$$

ou seja, divide os raios e subtrai os ângulos.

2.1.6 Potências e raízes

Da multiplicação, observamos que para $z = r\cos\theta + i \text{ sen } \theta$, $z^2 = r^2[\cos(2\theta) + i \text{ sen}(2\theta)]$, $z^3 = r^3[\cos(3\theta) + i \text{ sen } (3\theta)]$ e, por indução, obtemos o resultado conhecido como Teorema de DeMoivre: para $z = r\cos\theta + i \text{ sen } \theta$ e n inteiro, vale

$$z^n = r^n[\cos(n\theta) + i \text{ sen } (n\theta)]. \tag{2.9}$$

Em palavras, para obter a n-ésima potência de um número complexo, elevamos à n-ésima potência o raio e multiplicamos o ângulo por n.

Exemplo 2.3: Calcule $(-1 - \sqrt{3}i)^6$.

Do Exemplo 2.2 (iv), a forma polar de $z = -1 - \sqrt{3}$ é $z = 2(\cos 4\pi/3 + i \text{ sen } 4\pi/3)$. Pela fórmula (2.9), $z^6 = 2^6\left[\cos\left(6\frac{4\pi}{3}\right) + i \text{ sen } \left(6\frac{4\pi}{3}\right)\right]$. Reduzindo o ângulo à primeira volta do círculo unitário, $z^6 = 64[\cos(0) + i \text{ sen } (0)]$. Logo, $z^6 = 64$.

Da definição de função complexa e exponencial complexa (para mais detalhes, veja (CHURCHILL, 1975), destacamos a propriedade

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C} \tag{2.10}$$

e a fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\text{sen }\theta. \tag{2.11}$$

Substituindo (2.11) em (2.8), a forma polar de um número complexo também pode ser escrita como

$$z = re^{i\,\theta} \tag{2.12}$$

que combinada com (2.10) fica

$$e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x[\cos y + i\text{sen } y]. \tag{2.13}$$

Exemplo 2.4: Calcule $e^{-1+\frac{\pi}{2}i}$.

Temos que $e^{-1+\frac{\pi}{2}i} = e^{-1}[\cos \pi/2 + i\text{sen } \pi/2] = \dfrac{1}{e}i$.

O Teorema de DeMoivre também pode ser usado para achar raízes n-ésimas dos números complexos. Para calcular $z^{\frac{1}{n}}$, buscamos um número complexo $w^n = z$. Escrevendo esses dois números na forma polar $w = se^{\alpha\,i}$ e $z = re^{\theta\,i}$, com r e θ conhecidos, procuramos por s e α tais que $[se^{\alpha\,i}]^n = re^{\theta\,i}$, ou ainda,

$$s^n e^{n\alpha\,i} = re^{\theta\,i}. \tag{2.14}$$

Da igualdade (2.14), concluímos que $s^n = r$ e $n\alpha = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ou seja,

$$\begin{cases} s = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \end{cases} \tag{2.15}$$

De forma mais explícita, as raízes complexas de um número z são dadas por

$$\lambda_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2.16}$$

com $r = |z|$ e θ, o ângulo de z.

Observamos que para $k \geq n$, as raízes se repetem, de onde concluímos que, para cada número natural n, um número complexo $z \neq 0$ tem exatamente n raízes complexas.

Exemplo 2.5: Calcule $\sqrt[3]{-64}$ e $\sqrt{1+i}$.

(i) Chamando $z = -64$, observamos que $r = |z| = 64$ e $\theta = \pi$, fazendo $k = 0, 1, 2$ em (2.16),

$\lambda_0 = \sqrt[3]{64}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right] = 2 + 2\sqrt{3}i$

$\lambda_1 = \sqrt[3]{64}\,[\cos(\pi) + i\,\text{sen}(\pi)] = -4$

$\lambda_2 = \sqrt[3]{64}\left[\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)\right] = 2 - 2\sqrt{3}i$

(ii) Chamando $z = 1+i$, $r = |z| = \sqrt{2}$ e $\theta = \pi/4$, fazendo $k = 0, 1$ em (2.16),

$\lambda_0 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{8}\right)\right]$

$\lambda_1 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{8} + \pi\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{8} + \pi\right)\right]$

Observando que o arco metade de cosseno e seno são respectivamente $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ e $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ e $\frac{\pi}{8}$ é metade de $\frac{\pi}{4}$.

Temos que $\cos\,(\pi/8) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$ e $\text{sen}\,(\pi/8) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$. Logo,

$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i$ e $\lambda_1 = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i$.

As raízes de números complexos serão base para uma técnica de resolução de equação polinomial utilizadas na Seção 3.4.

2.2 Conceitos básicos de polinômios

Um polinômio $p(x)$ com coeficientes constantes em $\mathbb{C}$ é uma expressão do tipo

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n, \tag{2.17}$$

onde $n \in \{0,1,2,...\}$, $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 0,1,...,n$.

Os números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são denominados coeficientes e as parcelas a_0, a_1x, a_2x^2, ..., a_nx^n são chamados monômios. Se $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{C}$, chamamos p de polinômio nulo. Um polinômio é chamado de constante quando $p(x) = a_0$.

O grau de um polinômio $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j$ não nulo, denotado por $gr(p)$, é o número natural n tal que $a_n \neq 0$ e $a_j = 0$ para todo $j > n$. Neste caso a_n é denominado coeficiente líder de p. Os polinômios de grau n com coeficiente líder $a_n = 1$ são denominados polinômios mônicos. Não se define o grau do polinômio nulo. O grau de um polinômio $p(x)$ será igual a zero quando $p(x)$ for um polinômio constante.

Dois polinômios de mesmo grau, $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j$ e $q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_jx^j$, são iguais quando seus coeficientes correspondentes são iguais, isto é

$$p = q \Leftrightarrow a_j = b_j,\ j = 0,1,...,n. \tag{2.18}$$

2.2.1 Adição e multiplicação

Dados dois polinômios quaisquer

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j \tag{2.19}$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m = \sum_{j=0}^{m} b_jx^j \tag{2.20}$$

a soma de p e q é o polinômio

$$p(x) + q(x) = \sum_{j=0}^{M} (a_j + b_j)x^j, \quad M = max\{gr(p), gr(q)\}, \tag{2.21}$$

e o produto de p e q é o polinômio

$$p(x)\cdot q(x)=\sum_{j=0}^{n+m} c_j x^j, \tag{2.22}$$

sendo $c_0=a_0b_0$, $c_1=a_0b_1+a_1b_0$, $c_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0$, $\cdots$, $c_j=a_0b_j+a_1b_{j-1}+\ldots+a_jb_0=\sum_{\lambda+\mu=j}a_\lambda b_\mu$, $\cdots$, $c_{n+m}=a_nb_m$.

Observe que na adição, o grau do polinômio resultante da soma é o maior grau entre os polinômios p e q enquanto que na multiplicação, o grau do polinômio resultante é a soma do grau dos polinômios p e q.

Exemplo 2.6: Dados $f(x)=5+2x+3x^2$ e $g(x)=3+2x^3+x^4$, calcule a soma e o produto entre eles.

A soma é

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= (5+3)+(2+0)x+(3+0)x^2+(0+2)x^3+(0+1)x^4 \\ &= 8+2x+3x^2+2x^3+x^4 \end{aligned}$$

Para o produto, observamos que $a_0=5$, $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=0$, $a_4=0$, $b_0=3$, $b_1=0$, $b_2=0$, $b_3=2$ e $b_4=1$, assim,

$c_0=5\cdot 3=15,$

$c_1=5\cdot 0+2\cdot 3=6,$

$c_2=5\cdot 0+2\cdot 0+3\cdot 3=9,$

$c_3=5\cdot 2+2\cdot 0+3\cdot 0+0\cdot 3=10,$

$c_4=5\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 3=9,$

$c_5=2\cdot 1+3\cdot 2+0\cdot 0+0\cdot 0=8$

$c_6=3\cdot 1+0\cdot 2+0\cdot 0=3,$

de onde obtemos o polinômio $f(x)\cdot g(x)=15+6x+9x^2+10x^3+9x^4+8x^5+3x^6$.

Uma forma mais simples de realizar a multiplicação de polinômios é usar as propriedade, particularmente a distributiva (D). Retomamos esse exemplo abaixo.

Para a adição e multiplicação de polinômios valem as seguintes propriedades, para quaisquer $p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$, $q(x)=\sum_{i=0}^{m}b_ix^i$ e $w(x)=\sum_{i=0}^{l}c_ix^i$ com coeficientes em $\mathbb{C}$:

(A1) Comutativa: $p(x)+q(x)=q(x)+p(x)$, pois $a_i+b_i=b_i+a_i$ em $\mathbb{C}$

(A2) Associativa: $(p(x)+q(x))+w(x)=p(x)+(q(x)+w(x))$, pois $(a_i+b_i)+c_i=a_i+(b_i+c_i)$ em $\mathbb{C}$

(A3) Existência de elemento neutro: o polinômio identicamente nulo $0 = \sum_{i=0}^{n} 0x^i$ satisfaz $p(x) + 0 = 0 + p(x)$, pois $a_i = 0 + a_i = a_i + 0$ em $\mathbb{C}$

(A4) Existência de simétrico: dado $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, o polinômio $-p(x) = \sum_{i=0}^{n}(-aix^i)$ é simétrico de $p(x)$, sendo $p(x) + (-p(x)) = \sum_{i=0}^{n} 0x^i = 0$, pois $(a_i + (-a_i)) = 0$ em $\mathbb{C}$

(M1) Comutativa: $p(x) \cdot q(x) = q(x) \cdot p(x)$, pois $\sum_{\lambda+\mu=j} a_\lambda b_\mu = \sum_{\lambda+\mu=j} b_\mu a_\lambda$ em $\mathbb{C}$

(M2) Associativa: $(p(x) \cdot q(x)) \cdot w(x) = p(x) \cdot (q(x) \cdot w(x))$

(M3) Existência do elemento neutro multiplicativo: o polinômio constante 1 é tal que $1 \cdot q(x) = q(x)$, para qualquer polinômio $q(x)$ com coeficientes em $\mathbb{C}$

(D) Distributiva: $(p(x) + q(x)) \cdot w(x) = p(x) \cdot w(x) + q(x) \cdot w(x)$

Para demonstração detalhada dessas propriedades, veja, por exemplo (IEZZI, 1993), (HEFEZ A.;VILLELA, 2012).

Exemplo 2.7: Dados $f(x) = 5 + 2x + 3x^2$ e $g(x) = 3 + 2x^3 + x^4$, calcule produto entre eles, utilizando as propriedades.

Efetuando as operações seguindo as propriedades indicadas, obtermos

$$
\begin{aligned}
f(x) \cdot g(x) \quad &= (5 + 2x + 3x^2)(3 + 2x^3 + x^4) \\
\text{(D)} \quad &= 5(3 + 2x^3 + x^4) + 2x(3 + 2x^3 + x^4) + 3x^2(3 + 2x^3 + x^4) \\
\text{(D)} \quad &= 15 + 10x^3 + 5x^4 + 6x + 4x^4 + 2x^5 + 9x^2 + 6x^5 + 3x^6 \\
\text{(A1)} \quad &= 15 + 9x^2 + 10x^3 + 5x^4 + 4x^4 + 2x^5 + 6x^5 + 3x^6 \\
\text{(adição)} \quad &= 15 + 6x + 9x^2 + 10x^3 + 9x^4 + 8x^5 + 3x^6
\end{aligned}
$$

A subtração de polinômios, $p(x) - q(x)$ decorre da soma de $p(x)$ com o elemento simétrico de $q(x)$, $-q(x)$, ou seja,

$$p(x) - q(x) = p(x) + (-q(x)). \tag{2.23}$$

2.2.2 Divisão

Dados dois polinômios $p(x)$ e $g(x)$ com coeficientes em $\mathbb{C}$, sendo p o dividendo e $g \neq 0$ o divisor. Dividir p por g é determinar dois outros polinômios q (quociente) e r (resto) de modo que se verifiquem as duas condições

i) $q \cdot g + r = p$

ii) $gr(r) < gr(g)$ ou $r = 0$, caso em que a divisão é chamada exata.

Exemplo 2.8: Ao dividirmos $p(x) = 3x^5 + x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 3x - 9$ por $g(x) = x^3 + 2$, obtemos os polinômios $q(x) = 3x^2 + x - 5$ e $r(x) = x + 1$, tais que

i) $(3x^2+x-5)\cdot(x^3+2)+(x+1) = 3x^5+x^4-5x^3+6x^2+3x-9$

ii) $gr(r) = 1 < gr(g) = 3$

Há dois casos de divisões triviais, quando p é nulo, neste caso, $q = 0$ e $r = 0$; e quando $gr(p) < gr(g)$, neste caso $q = 0$ e $r = p$. Durante o trabalho não consideraremos tais casos, vamos nos ater nas divisões em que $gr(p) > gr(g)$.

A seguir apresentamos dois métodos clássicos de divisão de polinômios: método de Descartes e método da chave.

Método de Descartes

Este método busca identificar os coeficientes de $q(x)$ e $r(x)$ por meio da igualdade de polinômios e no fato do grau do resto ser sempre menor que o grau do divisor. Para isso, devemos seguir os seguintes passos:

1. identificamos os graus de q e r, caso exista mais de uma possibilidade para o grau de r, deve-se utilizar o maior possível;
2. construímos os polinômios q e r com coeficientes incógnitas;
3. estabelecemos a igualdade $qg+r = p$;
4. determinamos os coeficientes.

Exemplo 2.9: Dados $p(x) = x^3+2x-3$ e $g(x) = x^2+x$, efetue a divisão de p por g pelo método de Descartes.

Seguindo os passos acima, como $gr(p) = 3$ e $gr(g) = 2$, identificamos que $gr(q) = 1$, correspondendo à diferença entre os graus de p e g e, como $gr(r) < gr(g)$, $gr(r) = 1$. Em seguida, construímos os polinômios $q(x) = ax+b$ e $r(x) = cx+d$, ambos do 1º grau. Estabelecendo a igualdade $qg+r = p$, vem

$$\begin{aligned} (ax+b)\cdot(x^2+x)+(cx+d) &= x^3+2x-3 \\ ax\cdot(x^2+x)+b\cdot(x^2+x)+cx+d &= x^3+2x-3 \\ ax^3+ax^2+bx^2+bx+cx+d &= x^3+2x-3 \\ ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+d &= x^3+2x-3 \end{aligned}$$

Pela igualdade de polinômios, obtemos o sistema

$$\begin{cases} a = 1 \\ a+b = 0 \\ b+c = 2 \\ d = -3 \end{cases}$$

que tem como solução $a=1$, $b=-1$, $c=3$ e $d=-3$. Portanto $q(x)=x-1$ e $r(x)=3x-3$.

Exemplo 2.10: Dados $p(x)=5x^4-3x^2+1$ e $g(x)=x^3-x-2$, efetue a divisão de p por g pelo método de Descartes.

Sabemos que $gr(r)<gr(g)$, assim o grau de r poderia ser 2, 1 ou 0. No entanto, o método pede para tomarmos o maior possível, ou seja, r deve ser tomado de grau 2, e o tomamos da seguinte forma $r(x)=ax^2+bx+c$. Caso r seja realmente de grau 2, chegaremos a conclusão de que $a\neq 0$, se for de grau 1, $a=0$ e $b\neq 0$ e se for grau zero, $a=0$ e $b=0$. Estabelecendo a igualdade $qg+r=p$,

$$\begin{aligned}
(ax+b)\cdot(x^3-x-2)+(cx^2+dx+e) &= 5x^4-3x^2+1\\
ax^4-ax^2-2ax+bx^3-bx-2b+cx^2+dx+e &= 5x^4-3x^2+1\\
ax^4+(-a+c)x^2+(-b+d)-2b+e &= 5x^4-3x^2+1
\end{aligned}$$

Pela igualdade de polinômios, obtemos o sistema $a=5$, $b=0$, $c=2$, $d=0$ e $e=1$. Portanto, $q(x)=5x$ e $r(x)=2x^2+10x+1$.

A existência e a unicidade da divisão são enunciadas no seguinte teorema, seguido da demonstração da unicidade. Omitiremos a demonstração de existência que pode ser encontrada por exemplo em (IEZZI, 1993). "Dados os polinômios $p(x)$ e $g(x)$, existem um único $q(x)$ e um único $r(x)$, tal que $q\cdot g+r=p$ e $gr(r)<gr(g)$ ou $r=0$."

Para divisão de p por g admitamos que existam dois quocientes, q_1 e q_2, e dois restos r_1 e r_2, tais que $q_1g+r_1=p$ e $q_2g+r_2=p$. Segue que

$q_1g+r_1=q_2g+r_2 \Longrightarrow (q_1-q_2)\cdot g=r_2-r_1$. Se $q_1\neq q_2$ ou $r_2\neq r_1$ provemos que a igualdade $(q_1-q_2)\cdot g=r_2-r_1$ não se verifica. Vamos olhar para o grau dos polinômios

(I) $gr[(q_1-q_2)g]=gr(q_1-q_2)+gr(g)\geq gr(g)$

(II) $gr(r_2-r_1)=max\{gr(r_2),gr(r_1)\}<gr(g)$

Comparando (I) e (II), $gr[(q_1-q_2)g]\neq gr(r_2-r_1)$. Logo, para evitar a contradição, devemos ter que $q_1=q_2$ e $r_1=r_2$.

Método da chave

Vamos explicar o método por meio de um exemplo.

Exemplo 2.11: Divida $p(x)=2x^5+3x^4-30x^3-16x^2-35x-15$ por $g(x)=x^2+5x+2$.

Para iniciar a divisão, observamos que o monômio de maior grau de $p(x)$ é $2x^5$ e o monômio de maior grau de $g(x)$ é x^2. Ao dividirmos $2x^5$ por x^2 obtemos o quociente $q_1(x)=2x^3$. Precisamos obter o resto $r_1(x)$. Para facilitar a divisão, utilizamos a disposição prática semelhante a da divisão de números reais. Assim,

$$
\begin{array}{l|l}
2x^5+3x^4-30x^3-16x^2-35x-15 & x^2+5x+2 \\ \cline{2-2}
-2x^5-10x^4-4x^3 & 2x^3 \\ \cline{1-1}
-7x^4-34x^3-16x^2-35x-15 &
\end{array}
$$

Com isso, $r_1(x) - 7x^4 - 34x^3 - 16x^2 - 35x - 15$. Como $gr(r_1) = 4 \geq gr(g) = 2$, devemos agora dividir r_1 por g. O monômio de maior grau de r_1 é $-7x^4$ e o monômio de maior grau de g é x^2. Ao dividir $-7x^4$ por x^2 obtemos o quociente $q_2(x) = -7x^2$ e efetuamos a divisão

$$
\begin{array}{l|l}
2x^5+3x^4-30x^3-16x^2-35x-15 & x^2+5x+2 \\ \cline{2-2}
-2x^5-10x^4-4x^3 & 2x^3-7x^2 \\ \cline{1-1}
-7x^4-34x^3-16x^2-35x-15 & \\
+7x^4+35x^3+14x^2 & \\ \cline{1-1}
x^3-2x^2-35x-15 &
\end{array}
$$

obtendo $r_2(x) = x^3 - 2x^2 - 35x - 15$.

Novamente devemos continuar a divisão, pois $gr(r_2) = 3 \geq gr(g) = 2$. O monômio de maior grau de $r_2(x)$ é x^3 e o monômio de maior grau de $g(x)$ é x^2. Ao dividir x^3 por x^2 obtemos o quociente $q_3(x) = x$ e efetuamos a divisão

$$
\begin{array}{l|l}
2x^5+3x^4-30x^3-16x^2-35x-15 & x^2+5x+2 \\ \cline{2-2}
-2x^5-10x^4-4x^3 & 2x^3-7x^2+x \\ \cline{1-1}
-7x^4-34x^3-16x^2-35x-15 & \\
+7x^4+35x^3+14x^2 & \\ \cline{1-1}
x^3-2x^2-35x-15 & \\
-x^3-5x^2-2x & \\ \cline{1-1}
-7x^2-37x-15 &
\end{array}
$$

obtendo $r_3(x) = -7x^2 - 37x - 15$.

Dividindo agora $r_3(x)$ por $g(x)$ obtemos o quociente $q_4(x) = -7$ e

$$
\begin{array}{l|l}
2x^5+3x^4-30x^3-16x^2-35x-15 & x^2+5x+2 \\ \cline{2-2}
-2x^5-10x^4-4x^3 & 2x^3-7x^2+x-7 \\ \cline{1-1}
-7x^4-34x^3-16x^2-35x-15 & \\
+7x^4+35x^3+14x^2 & \\ \cline{1-1}
x^3-2x^2-35x-15 & \\
-x^3-5x^2-2x & \\ \cline{1-1}
-7x^2-37x-15 & \\
+7x^2+35x+14 & \\ \cline{1-1}
-2x-1 &
\end{array}
$$

$r_4(x) = -2x - 1$.

Como o $gr(r_4) = 1 < gr(g) = 2$, não é possível continuar a divisão. Com isso concluímos que o quociente de $p(x)$ por $g(x)$ é $q(x) = q_1(x) + q_2(x) + q_3(x) + q_4(x) = 2x^3 - 7x^2 + x - 7$ e o resto $r(x) = r_4(x) = -2x - 1$.

Em particular, quando $g(x)$ é de grau 1, o grau do resto é necessariamente zero ($r(x) = c_0$ constante) ou $r(x) = 0$, pois $gr(r) < gr(g)$.

Exemplo 2.12: Efetue a divisão de $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 11$ pelo polinômio de grau 1 $g(x) = x + 2$.

Pelo método da chave,

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +2x^2 & +3x & +11 & x+2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -2x^2 & & & x^2+3 \\ \cline{1-4}
& & 3x & +11 & \\
& & -3x & -6 & \\ \cline{3-4}
& & & 5 &
\end{array}
$$

Assim, $r(x) = 5$, um polinômio constante, conforme esperado.

No Capítulo 3 retomamos esse assunto, apresentando o Teorema do resto e o Teorema de D'Alembert, já direcionados especificamente para solução de equações polinomiais. No Capítulo 4 apresentamos um dispositivo prático para divisão de polinômios por $x - \alpha$, conhecido como Algoritmo de Briot-Ruffini, o qual é baseado no Método de Descartes e amplamente utilizado no Ensino Médio e nos cursos de graudação em exatas.

CAPÍTULO

3

EQUAÇÕES POLINOMIAIS E MÉTODOS ANALÍTICOS

Iniciamos este capítulo definindo equações polinomiais (ou algébricas) e apresentando alguns teoremas para embasar os métodos analíticos de solução apresentados. Entre os métodos estão as relações de Girard, que relacionam coeficientes e raízes das equações polinomiais; as fórmulas resolventes de equações do segundo, terceiro e quarto graus, conhecidas pelos nomes dos matemáticos que as inventaram, respectivamente, Bhaskara, Cardano e Ferrari. A história das descobertas dessas fórmulas é interessantíssima e pode ser encontrada em livros da História da Matemática e diversos outros materiais como (LIMA, 1987)(CURTI, 2015)(SANTOS, 2013). Terminamos o capítulo apresentando técnicas para algumas equações particulares, como as do tipo $x^n + k = 0$ e as recíprocas.

3.1 Equações polinomiais

Dados dois polinômios $p_1(x)$ e $p_2(x)$, chama-se equação polinomial ou equação algébrica a igualdade

$$p_1(x) = p_2(x). \tag{3.1}$$

Uma solução de uma equação polinomial é um valor x, neste trabalho $x \in \mathbb{C}$, que torna a igualdade (3.1) verdadeira. As soluções de uma equação polinomial são chamadas raízes. O conjunto de todas as raízes de uma equação polinomial é chamado conjunto solução. Com isso, estabelecemos que resolver uma equação polinomial é obter seu conjunto solução.

Duas equações polinomiais são equivalentes quando apresentam o mesmo conjunto solução. Existem duas operações elementares que podemos aplicar em uma equação polinomial e que não alteram seu conjunto solução. São elas:

- somar aos dois membros o mesmo polinômio, isto é, o conjunto solução de $p_1(x) = p_2(x)$ é o mesmo de $p_1(x) + h(x) = p_2(x) + h(x)$;

- multiplicar os dois membros pelo mesmo número complexo k, $k \neq 0$, isto é, o conjunto solução de $p_1(x) = p_2(x)$ é o mesmo de $kp_1(x) = kp_2(x)$.

Com as observações acima, podemos transformar a Eq. (3.1) em sua forma irredutível

$$p(x) = 0. \tag{3.2}$$

Muitas vezes é útil realizar manipulações (transformações) com a equação polinomial de modo a facilitar sua resolução. As transformações são aplicadas à variável da equação original $p_1(x) = 0$, que é transformada em $p_2(y) = 0$ por meio de uma lei $y = f(x)$ e de forma que as raízes das duas estejam relacionadas.

As mais conhecidas são as transformações aditiva e multiplicativa:

- Aditiva:
$$y = x + a, \quad a \in \mathbb{C}; \tag{3.3}$$
substituindo a variável x de $p_1(x) = 0$ por $y - a$ e fazendo as simplificações, obtemos a transformada $p_2(y) = 0$, cujas raízes são precisamente as raízes de $p_1(x) = 0$ acrescidas de a. A transformação aditiva é usada, por exemplo, na apresentação do método de Cardan, para eliminar o termo quadrático.

- Multiplicativa:
$$y = k \cdot x, \quad k \neq 0; \tag{3.4}$$
substituindo a variável x de $p_1(x) = 0$ por $\dfrac{y}{k}$ e fazendo as simplificações, obtemos a transformada $p_2(y) = 0$, cujas raízes são precisamente as raízes de $p_1(x) = 0$ multiplicadas por k.

Uma outra transformação é a recíproca, que será apresentada na Seção 3.5,quando falamos da técnica de resolução de equações recíprocas.

Sobre o grau da Eq. (3.2), diremos que uma equação polinomial da forma (3.2) tem grau n quando o polinômio $p(x)$ tiver grau n.

Sobre a quantidade de raízes que uma equação polinomial admite, temos o famoso **Teorema Fundamental da Álgebra** que nos diz que "Todo polinômio não constante com coeficientes complexos tem ao menos uma raiz complexa." Uma demonstração devida a D'Alembert-Argand (apresentada por D'Alembert em 1746 e melhorada por Argand em 1809 e 1814) é dada em (HEFEZ A.;VILLELA, 2012).

Desse teorema, segue que todo polinômio p de grau $n \geq 1$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, \tag{3.5}$$

pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau,

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)...(x - r_n), \tag{3.6}$$

onde r_1, r_2,..., r_n são as raízes de p. A menos da ordem dos fatores, tal decomposição é única, o que nos leva ao importante resultado de que toda equação polinomial de grau n, $n \geq 1$ admite n, e somente n, raízes complexas.

Exemplo 3.1: Fatore o polinômio $3x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 3x - 6$ sabendo que suas raízes são $-i$, i, -1 e 2.

Da Eq. (3.6) temos que a forma fatorada do polinômio dado é

$3(x+i)(x-i)(x+1)(x-2)$.

Na decomposição (3.6) podem aparecer fatores iguais que associados nos leva à decomposição

$$p(x) = a_n(x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2}...(x - r_p)^{m_p}, \tag{3.7}$$

onde $m_j \geq 1, \ j = 1, ..., p$; $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$ e $r_1, r_2, ..., r_p$ são raízes distintas. Neste caso, dizemos que a raiz r_j tem multiplicidade m_j.

Exemplo 3.2: Determine todas as raízes e respectivas multiplicidades da equação $2(x^2-4)^3(x+1)^2(x-7) = 0$.

Observe que para ficar na forma da Eq. (3.7), precisamos fatorar o termo $(x^2-4)^3$. Este termo se anula para $x = -2$ e $x = 2$, portanto -2 é raíz de multiplicidade 3 e 2 é raíz de multiplicidade 3.

Como a equação está na forma fatorada, temos que esse produto será igual a zero se, e somente se um de seus termos se anular. Daí temos que 7 é raíz de multiplicidade 1, -1 é raíz de multiplicidade 2.

Seguem mais quatro teoremas sobre raízes de equações polinomiais, são teoremas clássicos cujas demonstrações podem ser encontradas facilmente na literatura.

Teorema das raízes complexas conjugadas: Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite como raiz o número complexo $z = a + bi$, $b \neq 0$, então também admite como raiz o número complexo conjugado de $\bar{z} = a - bi$. Mais ainda, se $z = a + bi$, $b \neq 0$, é raiz de multiplicidade p então $\bar{z} = a - bi$ também é raiz com multiplicidade p.

Teorema do Resto: O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x - \alpha$ é igual ao valor numérico de p em α.

A demonstração deste teorema parte da definição de divisão, sendo que para a divisão de p por $x-\alpha$, temos um quociente q e um resto r, da forma

$$q(x)(x-\alpha)+r(x)=p(x). \tag{3.8}$$

Como $x-\alpha$ tem grau 1 e sabemos que $gr(r)<gr(x-\alpha)$, $gr(r)$ é zero, ou seja, r é um polinômio constante. Calculando (3.8) para $x=\alpha$, $q(\alpha).(\alpha-\alpha)+r(\alpha)=p(\alpha)$. Portanto, $r=r(\alpha)=p(\alpha)$. E essa é uma forma de calcular o valor de um polinômio em um dado ponto. Daqui segue o próximo teorema que relaciona um polinômio com sua raiz.

Teorema de D'Alembert: Um polinômio é divisível por $x-\alpha$ se, e somente se, α é raiz de p.

Para demonstrar esse teorema, observamos que do teorema do resto, $r=p(\alpha)$, então $r=0 \Leftrightarrow p(\alpha)=0$. Este resultado é muito importante, pois nos mostra que caso seja conhecida uma raiz α do polinômio $p(x)$ podemos dividi-lo por $x-\alpha$.

Exemplo 3.3: Encontre todas a raízes de $p(x)=3x^4-3x^3-3x^2-3x-6$ sabendo que i e -1 são raízes.

Como p possui coeficientes reais, o Teorema das raízes complexas conjugadas diz que se i é raíz $-i$ também é. Utilizando o Teorema de D'Alembert podemos dividir o polinômio por $(x-i)(x+i)(x+1)=x^3+x^2+x+1$.

$$\begin{array}{l|l}
3x^4-3x^3-3x^2-3x-6 & x^3+x^2+x+1 \\ \cline{2-2}
-3x^4-3x^3-3x^2-3x & 3x-6 \\ \cline{1-1}
-6x^3-6x^2-6x-6 & \\
6x^3+6x^2+6x+6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Então, $3x^4-3x^3-3x^2-3x-6=(x-i)(x+i)(x+1)(3x-6)$. A raíz que estava faltando é o valor de x que anula $3x-6$, ou seja, $x=2$.

Portanto as raízes de p são i, $-i$, -1 e 2.

O teorema a seguir se aplica apenas a equações com coeficientes inteiros mas como esse tipo é bastante comum, esse resultado é muito útil.

Teorema das raízes racionais: Se um número racional p/q, com p e q primos entre si, é raiz de uma equação polinomial de coeficientes inteiros do tipo $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_0=0$ então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

A demonstração consiste em supor que $\frac{p}{q}$ é uma raiz de $p(x)=0$. Assim,

$$p(x)=a_n\frac{p^n}{q^n}+a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+a_{n-2}\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}}+\ldots+a_0=0.$$

Multiplicando ambos os lados por q^n, temos

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + a_{n-2} p^{n-2} q^2 + ... + a_1 p^{n-1} q + a_0 q^n = 0.$$

Isolando $a_n p^n$ e, depois, $a_0 q^n$ obtemos duas expressões

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & a_n p^n = -q[a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + ... + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}] \\ \text{(II)} & a_0 q^n = -p[a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + ... + a_1 q^{n-1}] \end{array}$$

Como a_0, a_1, ..., a_n, p e q são todos inteiros, decorre que

$\alpha = [a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + ... + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}]$ é inteiro e

$\beta = [a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + ... + a_1 q^{n-1}]$ é inteiro.

Assim,

$\dfrac{a_n p^n}{q} = -\alpha \in \mathbb{Z}$, ou seja, $a_n p^n$ é divisível por q e, como p^n e q são primos entre si, a_n é divisível por q;

$\dfrac{a_0 q^n}{p} = -\beta \in \mathbb{Z}$, ou seja, $a_0 q^n$ é divisível por p e, como q^n e p são primos entre si, a_0 é divisível por p.

Exemplo 3.4: Resolva a equação $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = 0$.

Primeiramente, observamos que os coeficientes são todos inteiros, o que nos sugere buscar por soluções do tipo racional. As possíveis soluções são da forma $\dfrac{p}{q}$ onde p é divisor de 3 e q é divisor positivo de 2, ou seja, $p \in \{-3, -1, 1, 3\}$ e $q \in \{1, 2\}$.

Assim, as possíveis raízes racionais são $\left\{-3, -1, 1, 3, \dfrac{-3}{2}, \dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right\}$. Fazendo a verificação para cada elemento desse conjunto, encontramos o conjunto solução $\{-3, 1, \dfrac{1}{2}\}$.

Exemplo 3.5: Com o auxílio dos teoremas de D'Alembert e das raízes racionais, reduza o grau do polinômio $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = 0$.

Do Exemplo 3.4, as possíveis raízes racionais são $\left\{-3, -1, 1, 3, \dfrac{-3}{2}, \dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right\}$.

Verificando temos que 1 é raíz da equação, pelo Teorema de D'Alembert temos que $(x-1)$ divide o polinômio $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3+3x^2-8x+3 & x-1 \\ \cline{2-2}
-2x^3+2x^2 & 2x^2+5x-3 \\ \cline{1-1}
5x^2-8x+3 & \\
5x^2+5x & \\ \cline{1-1}
-3x+3 & \\
3x-3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Sendo assim $2x^3+3x^2-8x+3=(x-1)(2x^2+5x-3)$.

3.2 Relações entre coeficientes e raízes

Nesta seção vamos estabelecer as relações entre os coeficientes e as raízes de um polinômio, conhecidas como relações de Girard. Para uma equação de grau 2, essas relações são conhecidas como soma e produto. O que pouco se sabe é que há relações análogas para equações com grau maior que 2.

Considerando a equação do 2º grau

$$ax^2+bx+c=0, \quad a\neq 0 \tag{3.9}$$

cujas raízes são x_1 e x_2, podemos fatorá-la conforme (3.9)

$$a(x-x_1)(x-x_2)=0. \tag{3.10}$$

Igualando as Eqs. (3.9) e (3.10) temos

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

ou ainda,

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2.$$

Da igualdade de polinômios, tiramos as relações

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases} \tag{3.11}$$

Para a equação do 3ºgrau

$$ax^3+bx^2+cx+d=0, \quad a\neq 0, \tag{3.12}$$

cujas raízes são x_1, x_2 e x_3, sua forma fatorada é

$$a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0. \tag{3.13}$$

Igualando as Eqs. (3.12) e (3.13)

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

de onde vem

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3.$$

Portanto, as relações entre raízes e coeficientes são

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases} \tag{3.14}$$

Para uma equação de grau $n \geq 1$,

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0=0, \quad a_n \neq 0 \tag{3.15}$$

cujas raízes são x_1, x_2,..., x_n, sua forma fatorada é

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n) \\ &= a_nx^n - a_n(\underbrace{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}_{S_1})x^{n-1}+a_n(\underbrace{x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n}_{S2})x^{n-2} \\ &\quad -a_n(\underbrace{x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n}_{S3})x^{n-3}+\ldots \\ &\quad +(-1)^h a_nS_hx^{n-h}+\ldots+(-1)a_n(\underbrace{x_1x_2x_3\ldots x_n}_{S_n}) \end{aligned} \tag{3.16}$$

e da condição de igualdade,

$$S_1=x_1+x_2+\cdots+x_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$S_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$S_3=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$S_n=x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

Nem sempre as n relações de Girard para uma equação polinomial de grau n são suficientes para obter seu conjunto-solução como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 3.6: Resolva a equação $P(x) = x^3 + x^2 - 5x - 2 = 0$.

Das relações de Girard (3.14), obtemos

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 = -1 & (1) \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -5 & (2) \\ x_1x_2x_3 = 2 & (3) \end{array}$$

Isolamos $x_2 + x_3$ na Eq. (1) e x_2x_3 na Eq. (3), substituímos na Eq. (2) obtendo

$$x_1(-1 - x_1) + \frac{2}{x_1} = -5.$$

Multiplicando x_1 em ambos os lados,

$$x_1^2(-1 - x_1) + 2 = -5x_1$$

obtemos

$$\Rightarrow x_1^3 + x_1^2 - 5x_1 - 2 = 0$$

que é a equação original calculada em x_1.

É possível obter o conjunto solução quando é dada alguma condição para as raízes, como vemos nos três exemplos seguintes.

Exemplo 3.7: Resolva a equação $x^3 + x^2 - 5x - 2 = 0$, sabendo que a soma de duas raízes é -3.

Observando que se trata da mesma equação do Exemplo 3.6, então já temos as relações de Girard. Resta acrescentar a condição dada, para isso suponha $x_1 + x_2 = -3$. Com isso, o sistema fica:

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 = -1 & (1) \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -5 & (2) \\ x_1x_2x_3 = 2 & (3) \\ x_1 + x_2 = -3 & (4) \end{array}$$

Substituindo (4) em (2), obtemos $x_3 = 2$, que substituído em (2) e (3), reduz o sistema a

$$\begin{array}{ll} x_1x_2 = 1 & (5) \\ x_1 + x_2 = -3 & (6) \end{array}$$

cuja solução é $x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. Logo o conjunto solução é $S = \{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, 2\}$.

Exemplo 3.8: Se $\{x_1, x_2, x_3\}$ é o conjunto solução da equação $x^3 + 9x - 6 = 0$, calcular $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Completando todos os termos da equação, obtemos

$$x^3 + 0x^2 + 9x - 6 = 0$$

onde $a = 1$, $b = 0$, $c = 9$ e $d = -6$, utilizando as relações de Girard (3.14) obtemos o sistema

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 = 0 & (1) \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 9 & (2) \\ x_1x_2x_3 = 6 & (3) \end{array}$$

Ao desenvolver o quadrado do trinômio $(x_1 + x_2 + x_3)$ temos,

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3).$$

Isolando $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ e utilizando as igualdades (1) e (2)

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)^2}_{0} - 2\underbrace{(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)}_{9}$$

Logo, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -18$.

Observamos que este problema seria muito mais trabalhoso se fossemos calcular cada uma das raízes para somente depois encontrar o que foi pedido. O método para encontrar as raízes da equação $x^3 - 9x - 6 = 0$ é apresentado na Seção 3.3. O próximo exemplo mostra uma equação com coeficientes complexos, ele também será retomado na Seção 3.3.

Exemplo 3.9: Resolva $x^2 + (4 - 2i)x - 8i = 0$ sabendo que pelo menos uma raiz é real.

Supondo que x_1 seja a raiz real e $x_2 = x + yi$, as relações de Girard (3.11) ficam

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 = x_1 + x + yi = -(4 - 2i) & (1) \\ x_1x_2 = x_1(x + yi) = x_1x + x_1yi = -8i & (2) \end{array}$$

De (1), tiramos que $y = 2$, substituindo em (2), vem que $x_1x = 0$ e $x_1y = -8$ e, portanto, $x_1 = -4$ e $x = 0$. Logo, o conjunto solução procurado é $S = \{-4, 2i\}$.

Observe que, de acordo com o Teorema das raízes complexas conjugadas visto na Seção 3.1, quando pelo menos um dos coeficientes é complexo com parte imaginária não nula, não necessariamente as soluções complexas aparecem em pares conjugados.

3.3 Fórmulas resolventes

Nesta seção, vamos deduzir as fórmulas resolventes para equações de grau dois, três e quatro.

Equações de grau 2

Seja a equação polinomial (3.9), repetida aqui

$$ax^2+bx+c=0 \quad a,b,c,\in\mathbb{C},\ a\neq 0, \tag{3.17}$$

a qual vamos manipular os termos com objetivo de completar quadrado. Assim,

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a(x^2+\frac{b}{a}x)+c \\ &= a(x^2+\frac{2b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2})+c-\frac{b^2}{4a} \\ &= a(x+\frac{b}{2a})^2+c-\frac{b^2}{4a}=0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$a(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2}{4a}-c$$

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Passando raiz quadrada em ambos os lados,

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}},$$

de onde vem a fórmula resolvente, conhecida também como fórmula de Baskara

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{3.18}$$

O termo $\sqrt{b^2-4ac}$ é uma das raízes do número complexo $\Delta=b^2-4ac$, chamado usualmente de discriminante da equação.

No caso particular dos coeficientes a, b e c serem reais, temos o famoso resultado:

$\Delta>0$ se, e somente se, a equação tem duas raízes reais distintas;

$\Delta=0$ se, e somente se, a equação tem duas raízes reais iguais;

$\Delta<0$ se, e somente se, a equação tem duas raízes complexas distintas conjugadas;

Retomando a definição de número imaginário, Eq. (2.3), $i^2=-1$. Extraindo a raiz quadrada conforme Seção 2.1, concluímos que i e $-i$ são as duas raízes quadradas de -1 pois

$(i)^2 = -1$ e $(-i)^2 = i^2 = -1$). No entanto, dizemos que i é a raiz quadrada principal de -1 e escrevemos $\sqrt{-1} = i$ (STEWART, 2009). Em geral, se c é um número positivo, escrevemos $\sqrt{-c} = \sqrt{c}i$. Com essa convenção, podemos encontrar as raízes de uma equação polinomial $ax^2 + bx + c = 0$, mesmo que $b^2 - 4ac < 0$.

Exemplo 3.10: Encontre as raízes da equação $x^2 + x + 1 = 0$.

A fórmula resolvente nos dá

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

Exemplo 3.11: Resolva a equação do Exemplo 3.9, $x^2 + (4 - 2i)x - 8i = 0$.

Obtemos o discriminante $\Delta = (4-2i)^2 - 4(1)(-8i) = 16 - 16i + 4i^2 + 32i = 12 + 16i$.

Para extrair a raiz quadrada do discriminante, completamos quadrado $16 + 16i - 4 = 16 + 16i + 4i^2 = 4^2 + 2(4)(2i) + (2i)^2 = (4+2i)^2$. Assim,

$$x = \frac{-(4-2i) \pm (4+2i)}{2},$$

ou seja, o conjunto solução é $S = \{2i, -4\}$.

Equações de grau 3

Seja a equação polinomial (3.12), repetida aqui

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad a, b, c, d \in \mathbb{C},\ a \neq 0. \tag{3.19}$$

Para deduzir as fórmulas de Cardano, dividimos os dois membros da Eq. (3.19) por a, obtendo

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \tag{3.20}$$

e fazemos a transformação aditiva, conforme Eq. (3.3), $y = x + \frac{a_2}{3}$, de modo a anular o coeficiente do termo de grau dois. De fato, fazendo $x = y + k$ na Eq. (3.20)

$$(y+k)^3 + a_2(y+k)^2 + a_1(y+k) + a_0$$
$$= y^3 + (3k + a_2)y^2 + (3k^2 + 2ka_2 + a_1)y + (k^3 + k^2a_2 + ka_1 + a_0) = 0.$$

Para anular o termo de grau dois, $3k + a_2 = 0$, ou seja, $k = -\frac{a_2}{3}$. Dessa forma, a Eq. (3.20) fica

$$y^3 + py + q = 0, \quad y = x + \frac{a_2}{3}, \quad p = a_1 - \frac{a_2^2}{3}, \quad q = \frac{2a_2^3}{27} - \frac{a_1a_2}{3} + a_0. \tag{3.21}$$

Agora, para achar as raízes de (3.21), fazemos uma nova mudança de variável, $y = u + v$, obtendo

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = (u^3 + v^3 + q) + (u+v)(p + 3uv) = 0, \tag{3.22}$$

e da igualdade de polinômios, obtemos o sistema

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{cases} \tag{3.23}$$

Elevando ao cubo a segunda equação do sistema (3.23),

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases} \tag{3.24}$$

Comparando o sistema (3.24) com as fórmulas de soma e produto das raízes de um equação polinomial de grau 2, Eq. (3.11), observamos que u^3 e v^3 podem ser vistas como solução da equação polinomial

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{3.25}$$

O discriminante de (3.25) é $\Delta = q^2 + 4\dfrac{p^3}{27}$, de onde tiramos as raízes

$$z = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4\dfrac{p^3}{27}}}{2}, \tag{3.26}$$

ou ainda,

$$z_1 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \tag{3.27}$$

Como $u = \sqrt[3]{z_1}$ e $v = \sqrt[3]{z_2}$ são números complexos, extraímos as raízes cúbicas conforme visto ao final da Seção 2.1.

Começando por z_1, número real e positivo, observamos que $|z_1| = z_1$ e devido à geometria dos números complexos no plano $Re \times Im$, as raízes de z_1 encontram-se separadas por $\dfrac{2\pi}{3}$ radianos. Logo as três raízes cúbicas de z_1 são

$$u_0 = \sqrt[3]{z_1}\,[\cos 0 + i\text{sen } 0] = \sqrt[3]{z_1}$$

$$u_1 = \sqrt[3]{z_1}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = \sqrt[3]{z_1}\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$u_2 = \sqrt[3]{z_1}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right] = \sqrt[3]{z_1}\left(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Chamando $w = \left(\dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $w^2 = \left(\dfrac{-1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, segue que $u \in \left\{\sqrt[3]{z_1},\ w\sqrt[3]{z_1},\ w^2\sqrt[3]{z_1}\right\}$.

De maneira análoga $v \in \left\{\sqrt[3]{z_2},\ w\sqrt[3]{z_2},\ w^2\sqrt[3]{z_2}\right\}$

Como $y = u + v$, temos nove combinações possíveis para y.No entanto, apenas três satisfazem o produto $uv = \dfrac{-p}{3}$, no sistema (3.23).

Segue-se então, que a Equação (3.21) possui como solução

$$\begin{cases} y_1 = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}} \\ y_2 = w\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}}+w^2\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}} \\ y_3 = w^2\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}}+w\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}} \end{cases} \tag{3.28}$$

Finalmente, fazendo $x_1 = y_1 - a_2/3$, $x_2 = y_2 - a_2/3$ e $x_3 = y_3 - a_2/3$, obtemos o conjunto solução de (3.20).

Exemplo 3.12: Resolva a equação do Exemplo 3.8, $x^3 + 9x - 6 = 0$.

Observe que a equação é desprovida do termo de segundo grau, já estamos com uma equação do tipo da (3.21) em que $p = 9$ e $q = -6$. As raízes são fornecidas diretamente pela Fórmulas de Cardan, Eq.(3.28).

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{(-6)}{2}+\sqrt{\frac{(-6)^2}{4}+\frac{9^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{(-6)}{2}-\sqrt{\frac{(-6)^2}{4}+\frac{9^3}{27}}} = \sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3},$$

$$x_2 = w\sqrt[3]{-\frac{(-6)}{2}+\sqrt{\frac{(-6)^2}{4}+\frac{9^3}{27}}}+w^2\sqrt[3]{-\frac{(-6)}{2}-\sqrt{\frac{(-6)^2}{4}+\frac{9^3}{27}}} = w\sqrt[3]{9}-w^2\sqrt[3]{3},$$

$$x_3 = w^2\sqrt[3]{-\frac{(-6)}{2}+\sqrt{\frac{(-6)^2}{4}+\frac{9^3}{27}}}+w\sqrt[3]{-\frac{(-6)}{2}-\sqrt{\frac{(-6)^2}{4}+\frac{9^3}{27}}} = w^2\sqrt[3]{9}-w\sqrt[3]{3},$$

com $w = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $w^2 = -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Exemplo 3.13: Encontre as raízes da equação $x^3 + 3x^2 + 25x + 12 = 0$.

Para eliminar o termo do segundo grau, efetuamos a substituição $x = y + k$ em que $k = \dfrac{-a_2}{3} = \dfrac{-3}{3} = -1$, ou seja, $x = y - 1$, obtendo a equação $y^3 + 22y - 12 = 0$, onde $p = 22$ e $q = -12$.

Utilizando as fórmulas de Cardan temos,

$$y_1 = \sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{11620}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{11620}{27}}},$$

$$y_2 = w\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{11620}{27}}}+w^2\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{11620}{27}}} \text{ e}$$

$$y_3 = w^2\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{11620}{27}}} + w\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{11620}{27}}},$$

onde $w = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

Portanto, as raízes da equação original são

$$x_1 = y_1 - 1, \quad x_2 = y_2 - 1 \quad \text{e} \quad x_3 = y_3 - 1.$$

Equações de grau 4

Seja a equação geral do quarto grau com coeficientes complexos da seguinte forma

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0. \tag{3.29}$$

Para deduzir as fórmulas de Ferrari, observamos que $x^4 + a_3x^3 = -(a_2x^2 + a_1x + a_0)$ e completamos o quadrado no membro esquerdo desta equação. Assim,

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}a_3x\right)^2 = \left(\frac{1}{4}a_3^2 - a_2\right)x^2 - a_1x - a_0. \tag{3.30}$$

Agora, completamos quadrado no membro direito de (3.30), procurando por uma equação do tipo

$$\left[\left(x^2 + \frac{1}{2}a_3x\right) + y\right]^2 = (\alpha x + \beta)^2, \tag{3.31}$$

com α e β convenientes.

Somando a expressão $y^2 + 2y(x^2 + \frac{1}{2}a_3x)$ a ambos os membros de (3.30),

$$\left[\left(x^2 + \frac{1}{2}a_3x\right) + y\right]^2 = \left(2y + \frac{1}{4}a_3^2 - a_2\right)x^2 + (ya_3 - a_1)x + \left(y^2 - a_0\right). \tag{3.32}$$

Para determinar os valores de y, devemos ter o discriminante do membro direito de (3.31) nulo, ou seja, $(ya_3 - a_1)^2 - 4\cdot(2y + \frac{1}{4}a_3^2 - a_2)\cdot(y^2 - a_0) = 0$, ou ainda,

$$8y^3 - 4a_2y^2 + (2a_1a_3 - 8a_0)y + (4a_0a_2 - a_0a_3^2 - a_1^2) = 0. \tag{3.33}$$

de onde tiramos os valores para y.

Voltando à Eq. (3.31), extraindo a raiz quadrada, temos duas equações do segundo grau

$$(x^2 + \frac{1}{2}a_3x) + y = (\alpha x + \beta) \quad \text{e} \quad (x^2 + \frac{1}{2}a_3x) + y = -(\alpha x + \beta). \tag{3.34}$$

cujas raízes são as raízes da equação original (3.29).

Exemplo 3.14: Encontre as raízes da equação $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Determinamos y satisfazendo a Eq. (3.32), que nesse caso , toma a forma $4y^3 - 2y^2 - 3y + 1 = 0$. É fácil verificar que $y = 1$ é solução desta equação. Para este valor de y, a Eq. (3.33) passa a ser

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right)^2 = \frac{5}{4}x^2 + 0x + 0 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}x + 0\right)^2.$$

Portanto $\alpha = \sqrt{5}/2$ e $\beta = 0$. Da Eq. (3.34), as seguintes equações do segundo grau:

$$x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = \frac{\sqrt{5}}{2}x \quad \text{e} \quad x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = -\frac{\sqrt{5}}{2}x,$$

cujas raízes são as raízes da equação proposta. Assim, a nossa equação tem as raízes:

$$-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}{2}, \quad -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}{2},$$
$$-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}{2} \quad \text{e} \quad -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}{2}.$$

3.4 Equações do tipo $x^n + k = 0$

Sejam equações polinomiais do tipo

$$x^n + k = 0, \quad k \in \mathbb{C}. \tag{3.35}$$

Tal equação possui n soluções que satisfazem

$$x = \sqrt[n]{-k}. \tag{3.36}$$

Para obter as raízes complexas, podemos usar a álgebra complexa, especificamente, o teorema de DeMoivre (2.9) e a fórmula de Euler (2.11) vistas na Seção 2.1.

Exemplo 3.15: Resolva as equações $x^3 + 64 = 0$ e $x^2 - 1 - i = 0$.

Resolver a equação $x^3 + 64 = 0$ equivale a encontrar a raiz cúbica de -64 e resolver a equação $x^2 - 1 - i = 0$ equivale a encontrar a raiz quadrada de $1 + i$. Se voltarmos ao Exemplo 2.5 da Seção 2.1, veremos que o conjunto solução da primeira equação é $\{-4, 2 + 2\sqrt{3}i, 2 - 2\sqrt{3}\}$ e da segunda $\left\{\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i, -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i\right\}$.

Para equações que não estão na forma (3.35), em alguns casos é possível aplicar transformações aditivas e multiplicativas, conforme explicado na Seção 2.1, para recair em uma equação da forma $x^n + c = 0$ e procedemos como acima.

3.5 Equações recíprocas

A transformação recíproca é aquela que relaciona as variáveis da equação original $p_1(x) = 0$ e da equação transformada $p_2(y) = 0$ pela relação

$$y = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0. \tag{3.37}$$

As raízes de $p_2(y) = 0$ são precisamente os inversos das raízes de $p_1(x) = 0$.

Exemplo 3.16: Dada a equação $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$, obter sua transformada pela relação $y = \frac{1}{x}$.
$p_1(x) = p_1(\frac{1}{y}) = (\frac{1}{y})^3 - 2(\frac{1}{y})^2 + (\frac{1}{y}) + 1 = 0 \Longrightarrow p_2(y) = 1 - 2y + y^2 + y^3 = 0$

Observamos que, para obter a transformada recíproca, basta inverter totalmente a ordem dos coeficientes da equação primitiva e trocar x por y:

$$p_1(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$
$$p_2(y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \ldots + a_{n-1} y + a_n = 0$$

Uma aplicação para a transformação recíproca é identificar as equações recíprocas, facilitando sua resolução. Uma equação polinomial $p(x) = 0$ é chamada recíproca se, e somente se, é equivalente à sua transforma recíproca $p\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Por equivalente entendemos que ambas apresentam o mesmo conjunto solução, conforme definimos na Seção 3.1.

Exemplo 3.17: Verifique se $p(x) = 6\left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot (x+3) = 0$ é uma equação recíproca.

A resposta é sim, pois as duas equações abaixo são equivalentes.

$$p(x) = 6x^2 + 20x + 6 = 0 \tag{3.38}$$

$$p\left(\frac{1}{x}\right) = 6\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 20\left(\frac{1}{x}\right) + 6 = 0 \tag{3.39}$$

As equações recíprocas são classificadas de duas maneiras:

- tipo (I) aquelas em que os coeficientes equidistantes dos extremos são iguais, ou seja,

$$a_n = a_0,\, a_{n-1} = a_1,\, a_{n-2} = a_2,\, \ldots$$

- tipo (II) aquelas em que os coeficientes equidistantes dos extremos são simétricos, ou seja,

$$a_n = -a_0,\, a_{n-1} = -a_1,\, a_{n-2} = -a_2,\, \ldots$$

Um exemplo do tipo (I) é a Eq. (3.38) e um exemplo do tipo (II) é a equação

$$-6x^3 + 20x^2 - 20x + 6 = 0. \tag{3.40}$$

Seguem dois resultados principais. Primeiro, toda equação recíproca do tipo (II) de grau ímpar, admite a raiz 1.

De fato, seja a equação polinomial $p(x) = a_x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_i x + a + 0 = 0$,

$$\begin{aligned} p(1) \quad &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0 \\ &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots - a_{n-2} - a_{n-1} - a_n = 0 \end{aligned}$$

Portanto, 1 é raiz.

Além disso, a divisão de p por $x-1$ conduz a uma equação recíproca do tipo (I). De fato, pelo Teorema de D'Alembert, se 1 e raiz de p então p é divisível por $x-1$ e podemos escrever $p(x) = (x-1)\cdot Q(x)$. Realizando a divisão, obtemos

$$a_n x^n a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n =$$
$$(x-1)\underbrace{\left(a_n x^{n-1} + (a_n + a_{n-1})x^{n-2} + (a_n + a_{n-1} + a_{n-2})x^{n-3} + \cdots + (a_n + a_{n-1})x + a_n\right)}_{Q(x)}$$

Observamos que $Q(x)$ apresenta coeficientes equidistantes dos extremos iguais, portanto $Q(x) = 0$ é equação recíproca do tipo (I).

Exemplo 3.18: Verifique que a equação $-6x^3 + 20x^2 - 20x + 6 = 0$ admite a raiz 1 e divida o 1º membro por $x-1$.

De fato, 1 satisfaz a equação dada, pois $-6 + 20 - 20 + 6 = 0$. Logo, 1 e raiz da equação. Além disso, fazendo a divisão pelo método da chave, obtemos

$$\begin{array}{l|l} -6x^3 + 20x^2 - 20x + 6 & x - 1 \\ \cline{2-2} 6x^3 - 6x^2 & -6x^2 + 14x - 6 \\ \cline{1-1} 14x^2 - 20x + 6 & \\ -14x^2 + 14x & \\ \cline{1-1} -6x + 6 & \\ 6x - 6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

e $p(x) = (x-1)\underbrace{(-6^2+14x-6)}_{Q(x)}$ sendo $Q(x)$ do tipo (I).

O segundo resultado é que toda equação $p(x) = 0$, recíproca do tipo (I) e grau ímpar, admite a raiz -1 e a divisão de p por $x+1$ conduz a uma equação recíproca do tipo (I) e grau par. A demonstração é análoga à anterior.

Exemplo 3.19: Verifique que a equação $6x^3+26x^2+26x+6 = 0$ admite a raiz -1 e divida o 1º membro por $x+1$.

De fato, -1 satisfaz a equação dada, pois $-6+26-26+6 = 0$. Logo, -1 e raiz da equação. Além disso, fazendo a divisão obtemos $6x^3+26x^2+26x+6 = (x+1)\underbrace{(6x^2+20x+6)}_{Q(x)}$ sendo, portanto, $Q(x)$ do tipo (I) e grau par.

Podemos notar que ao identificarmos uma equação recíproca e aplicarmos as propriedades conseguimos recair sempre em uma equação recíproca do tipo (I) e grau par, então para solucionar uma equação recíproca basta saber solucionar uma equação recíproca do tipo (I) e grau par, para isso apresentaremos uma técnica a seguir.

Vamos resolver a equação $p(x) = 0$ onde $a_{n-k} = a_k$, $k = 0,1,...,n$ e $n = 2p$ (par) então

$a_0x^{2p}+a_1x^{2p-1}+a_2x^{2p-2}+\ldots+a_{p-2}x^{p+2}+a_{p+1}x^{p+1}+a_px^p+a_{p-1}x^{p-1}+a_{p-2}x^{p-2}+$
$\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0 = 0$

dividindo ambos os membros por x^p

$a_0x^p+a_1x^{p-1}+a_2x^{p-2}+\ldots+a_{p-2}x^2+a_{p+1}x+a_p+a_{p-1}\dfrac{1}{x}+a_{p-2}\dfrac{1}{x^2}+\ldots+a_2\dfrac{1}{x^{p-2}}+$
$a_1\dfrac{1}{x^{p-1}}+a_0\dfrac{1}{x^p} = 0,$

associando os pares de termo equidistantes dos extremos

$a_0(x^p+\dfrac{1}{x^p})+a_1(x^{p-1}+\dfrac{1}{x^{p-1}})+a_2(x^{p-2}+\dfrac{1}{x^{p-2}})+\ldots+a_{p-2}(x^2+\dfrac{1}{x^2})+a_{p-1}(x+\dfrac{1}{x})+$
$a_p = 0$

e adotando a incógnita auxiliar $y = x+\dfrac{1}{x}$, obtemos

$x_2+\dfrac{1}{x^2} = y^2-2,\ x^3+\dfrac{1}{x^3} = y^3-3y,\ x^4+\dfrac{1}{x^4} = y^4-4y^2+2,\ ...$

Portanto, a equação fica

$a_p+a_{p-1}y+a_{p-2}(y^2-2)+a_{p-3}(y^3-3y)+\ldots = 0,$

que é de grau $p = \dfrac{n}{2}$.

Exemplo 3.20: Resolva a equação $6x^6-13x^5-6x^4+26x^3-6x^2-13x+6 = 0$.

Observando que a equação dada é recíproca do tipo (I) e grau par, então dividindo ambos os membros por x^3, obtemos

$$6x^3-13x^2-6x+26-6\frac{1}{x}-13\frac{1}{x^2}+6\frac{1}{x^3}=0.$$

Agrupando os termos equidistantes dos extremos,

$$6(x^3+\frac{1}{x^3})-13(x^2+\frac{1}{x^2})-6(x+\frac{1}{x})+26=0$$

e fazendo a mudança de variável $y=x+\frac{1}{x}$, obtemos

$$6(y^3-3y)-13(y^2-2)-6y+26=0 \Longrightarrow 6y^3-13y^2-24y+52=0.$$

Como os coeficientes desta última equação são todos inteiros, utilizamos o teorema das raízes racionais e concluímos que as raízes são $y=2$ ou $y=-2$ ou $y=\frac{13}{6}$.

Se $x+\frac{1}{x}=2$, decorre $x=1$ é raiz dupla. Se $x+\frac{1}{x}=-2$, decorre $x=-1$ também raiz dupla. Se $x+\frac{1}{x}=\frac{13}{6}$, decorre $x=\frac{2}{3}$ ou $x=\frac{3}{2}$.

Portanto, o conjunto solução é $S=\left\{1,-1,\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right\}$.

Neste capítulo apresentamos fórmulas que generalizam a resolução de equações de até 4º grau e algumas técnicas que são utilizadas em um grupo restrito de equações. Tais técnicas tem mais interesse teórico e histórico do que prático. Além disso, foi demonstrado por Paolo Ruffini em 1799 e corrigido por Niels Henrik Abel em 1824 (ZOLADEK, 2000) a impossibilidade de ter uma fórmula geral para resolver equação de grau superior a 4, resultado conhecido como insolubilidade da quíntica.

Porém, isso não significa que não podemos resolver tais equações. Os métodos numéricos são bastante eficientes para calcular aproximações das raízes de uma equação polinomial. Este é o assunto do capítulo seguinte.

CAPÍTULO

4

METÓDOS NUMÉRICOS

Para diversas equações polinomiais, as técnicas apresentadas no Capítulo 3 não são suficientes, isto é, não é possível aplicar fórmulas resolventes, a fatoração não é trivial e não conseguimos reduzir facilmente o grau do polinômio, entre outras dificuldades. Em tais casos, uma alternativa é usar métodos numéricos e obter uma solução aproximada. As equações polinomiais podem ser resolvidas por qualquer método numérico para obtenção de zeros de funções. Neste capítulo, vamos apresentar o Método de Newton e o Método das Secantes para encontrar as raízes reais. Estes são métodos iterativos, ou seja, fornecem uma sequência de aproximações que sob algumas condições, converge para a solução do problema. Assim, conseguimos encontrar soluções aproximadas tão precisas quanto queiramos. Como os métodos estudados exigem a avaliação do polinômio em um ponto (e de sua derivada no caso do método de Newton) a cada iteração, utilizamos o algoritmo de Briot-Ruffini-Horner para esse fim. Por último, apresentamos o Método de Newton-Bairstow para o cálculo de raízes complexas.

4.1 Método de Newton

Dada uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o Método de Newton tem como objetivo encontrar os valores de x que anulam a função, ou seja, que satisfazem a equação

$$f(x) = 0. \tag{4.1}$$

Tais valores de x são chamados de zeros da função f ou raízes da Equação (4.1).

Partindo de uma aproximação inicial x_0 próxima à solução x^*, esse método gera uma sequência de aproximações $\{x_k\}$ por meio do processo iterativo

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, ... \tag{4.2}$$

Considerando as funções polinomiais com coeficientes reais e observando que a derivada do monômio $m(x) = cx^k$ é $m'(x) = ckx^{k-1}$, para um polinômio geral

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, \tag{4.3}$$

a derivada é

$$p'(x) = a_n n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + ... + a_1 \tag{4.4}$$

e o método se reduz a

$$x_k = x_{k-1} - \frac{p(x_{k-1})}{p'(x_{k-1})} = x_{k-1} - \frac{a_n x_{k-1}^n + a_{n-1}x_{k-1}^{n-1} + ... + a_1 x_{k-1} + a_0}{a_n n x_{k-1}^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x_{k-1}^{n-2} + ... + a_1}, \quad k = 1, 2, ... \tag{4.5}$$

Existem várias maneiras de deduzir o método de Newton. Optamos por apresentá-lo pela sua interpretação geométrica por ser a mais intuitiva. Dado x_{k-1}, o valor de x_k pode ser obtido graficamente traçando-se pelo ponto $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ a reta tangente à curva $y = f(x)$. O ponto de intersecção da reta com o eixo x determina x_k. Veja Figura 5. De fato, pela lei da tangente

$$\begin{aligned} f'(x_{k-1}) = tg\,\alpha = \frac{f(x_{k-1}) - 0}{x_{k-1} - x_k} \\ \Rightarrow x_{k-1} - x_k = \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \\ \Rightarrow x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \end{aligned}$$

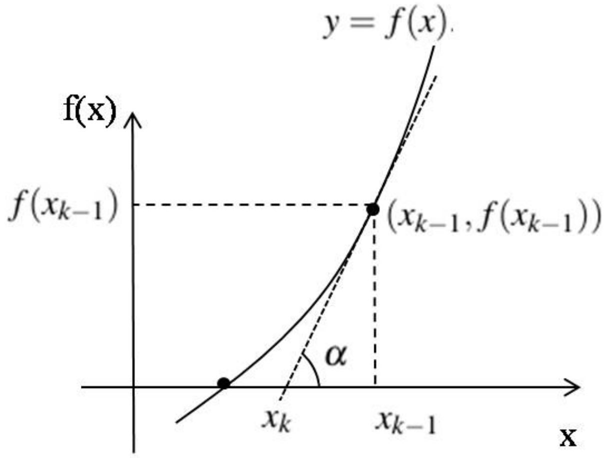

Figura 5 – Interpretação geométrica do Método de Newton

Pela construção acima, este método também é conhecido por Método das Tangentes.

O Método de Newton gera uma sequência que converge para a solução desde que f seja contínua em um intervalo em torno da raiz, f' e f'' existam e também sejam contínuas nesse intervalo e x_0 seja tomado nesse intervalo (FRANCO, 2006). Como as funções polinomiais atendem as exigências sobre f, f' e f'', sempre haverá convergência para a raiz desejada desde que x_0 seja tomada suficientemente próxima da raiz.

Exemplo 4.1: Obtenha todas as raízes de $5x^3+x^2-12x+4=0$.

Apesar dos coeficientes serem todos inteiros, a solução dessa equação não é trivial. Pelo Teorema das raízes racionais, verificamos que ela não possui raiz racional. De fato, as possíveis soluções racionais são $\left\{-4,-2,-1,\frac{-4}{5},\frac{-2}{5},\frac{-1}{5},1,2,4,\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right\}$ mas nenhum elemento deste conjunto é raiz.

Como se trata de um polinômio de grau 3, sabemos que ele terá no máximo três raízes reais. Além disso, como os coeficientes são todos reais, se houver raízes complexas, elas aparecerão aos pares conjugados, o que resta a opção de uma ou três raízes reais. Estudando o comportamento do sinal da $f(x)=5x^3+x^2-12x+4$, observamos pela tabela

x	-2	-1	0	1	2
Sinal da$f(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$

que a função troca de sinal de -2 a -1, de 0 a 1 e de 1 a 2.

Pelo *Teorema de Bolzano* (ÁVILA, 1999) que nos diz que "para uma função contínua em $[a,b]$, se $f(a)f(b)<0$ então existe pelo menos um ponto $c\in]a,b[$ tal que $f(c)=0$", concluímos que a equação possui três raízes reais e cada uma delas se encontra isolada em cada um dos intervalo $]-2,-1[$, $]0,1[$ e $]1,2[$.

Levando isso em consideração, aplicamos três vezes o Método de Newton começando pelos pontos médios dos intervalos, ou seja, aplicamos o método com $x_0=-1,5$, depois com $x_0=0,5$ e por último com $x_0=1,5$. Para cada raiz, realizamos quatro iterações.

- Para $x_0=-1,5$

$$x_1=-1,5-\left(\frac{7,375}{18,75}\right)=-1,89333$$

$$x_2=-1,89333-\left(\frac{-3,63043}{37,98382}\right)=-1,79775$$

$$x_3=-1,79775-\left(\frac{-0,24558}{32,88308}\right)=-1,79027$$

$$x_4=-1,79027-\left(\frac{-0,00137}{32,49546}\right)=-1,79023$$

Após aplicarmos 4 iterações observamos que a sequência $\{x_k\}$ está convergindo para $-1,79023$. Assim, tomamos $\bar{\alpha}_1=-1,79023$ como aproximação para $\alpha_1^*\in]-2,-1[$.

- Para $x_0=0,5$

$$x_1=0,5-\left(\frac{-1,125}{-7,25}\right)=0,34483$$

$$x_2 = 0,34483 - \left(\frac{0,18596}{-9,52672}\right) = 0,36435$$

$$x_3 = 0,36435 - \left(\frac{0,00239}{-9,28004}\right) = 0,36461$$

$$x_4 = 0,36461 - \left(\frac{-0,000022}{-9,276667}\right) = 0,36461$$

Após 4 iterações, observamos que o método está convergindo e tomamos $\bar{\alpha}_2 = 0,36461$ como uma aproximação para raíz $\alpha_2^* \in]0,1[$.

- Para $x_0 = 1,5$

$$x_1 = 1,5 - \left(\frac{5,125}{24,75}\right) = 1,29293$$

$$x_2 = 1,29293 - \left(\frac{0,96326}{15,66088}\right) = 1,23142$$

$$x_3 = 1,23142 - \left(\frac{0,07595}{13,20877}\right) = 1,22567$$

$$x_4 = 1,22567 - \left(\frac{-0,00006}{12,98534}\right) = 1,22566$$

Novamente aplicamos quatro iterações, observamos que o método está convergindo e tomamos $\bar{\alpha}_3 = 1,22566$ como uma aproximação para a raiz $\alpha_3^* \in]1,2[$.

Logo o conjunto solução encontrado é $\{-1,79023; 0,36461; 1,22566\}$.

4.2 Método das Secantes

Uma desvantagem do Método de Newton é a necessidade de se obter a derivada da f, bem como calcular seu valor numérico a cada passo. Uma maneira de contornar essa desvantagem é substituir a derivada pelo quociente das diferenças:

$$f'(x_{k-1}) \approx \frac{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}{x_{k-1} - x_{k-2}}, \tag{4.6}$$

onde x_{k-1} e x_{k-2} são duas aproximações iniciais para a raiz x^*. Note que $f'(x_{k-1})$ é o limite da relação (4.6) para $x_{k-2} \to x_{k-1}$.

Substituindo (4.6) em (4.2), obtemos o processo iterativo:

$$x_k = \frac{x_{k-2} f(x_{k-1}) - x_{k-1} f(x_{k-2})}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}, \quad k = 2,3,.... \tag{4.7}$$

Observe que devemos fornecer duas aproximações iniciais, x_0 e x_1, para que (4.7) possa ser usada.

Para este método também podemos fazer uma interpretação geométrica, Figura 6, semelhante à anterior, com a diferença de que as retas agora não são mais as tangentes e sim as secantes que passam pelos pontos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_{k-2}, f(x_{k-2}))$. Assim, a inclinação da reta secante é

$$tg\alpha = \frac{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}{x_{k-1} - x_{k-2}}. \tag{4.8}$$

Substituindo (4.8) na equação da reta que também passa pelo ponto $(x_k, 0)$, obtemos

$$\Rightarrow 0 - f(x_{k-1}) = \frac{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}{x_{k-1} - x_{k-2}}(x_k - x_{k-1})$$

$$\Rightarrow x_k = \frac{x_{k-2}f(x_{k-1}) - x_{k-1}f(x_{k-2})}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}.$$

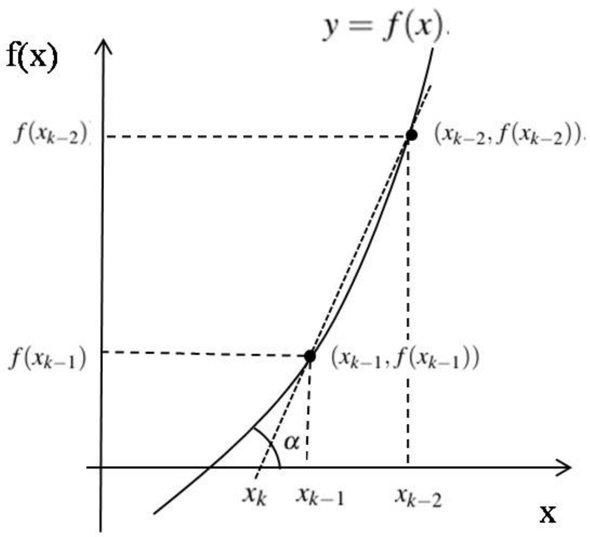

Figura 6 – Interpretação geométrica do Método da Secante

As condições para convergência do Método das Secantes são as mesmas do que para o Método de Newton e ambos são viáveis para o cálculo das raízes reais das equações polinomiais. A principal vantagem do Método das Secantes é que não precisa calcular e avaliar a derivada da f em cada passo. Já a principal desvantagem é que tem convergência um pouco mais lenta que o método de Newton, necessitando de mais iterações para chegar a mesma resposta.

Exemplo 4.2: Obtenha todas as raízes de $5x^3 + x^2 - 12x + 4 = 0$.

Como a equação é a mesma do Exemplo 4.1, sabemos que suas raízes estão isoladas nos intervalos $]-2,-1[$, $]0,1[$, $]1,2[$.

Para encontrar uma aproximação para a raíz que está no intervalo $]-2,-1[$ tomamos $x_0 = -2$ e $x_1 = -1$ e aplicando o Método das Secantes, Eq. (4.7), obtendo

$$x_2 = \frac{(-2)(12) - [(-1)(-8)]}{12 - (-8)} = -1,6$$

Para segunda iteração tomamos $x_1 = -1$ e $x_2 = -1,6$ e calculamos

$$x_3 = \frac{(-1)(5,8) - [(-1,6)(12)]}{5,28 - 12} = -2,07143$$

Para terceira iteração tomamos $x_2 = -1,6$ e $x_3 = -2,07143$ e calculamos

$$x_4 = \frac{(-1,6)(-11,29264) - [(-2,07143)(5,28)]}{-11,29264 - 5,28} = -1,7502$$

Prosseguimos assim até obtermos o mesmo valor encontrado no Exemplo 4.1, o que ocorre na sexta iteração. Assim, $\bar{\alpha}_1 = x_7 = -1,79023$

As outras raízes são encontradas de maneira análoga.

4.3 Algoritmo de Briot-Ruffini

No método de Newton, a cada iteração, é preciso calcular o valor numérico do polinômio e o de sua derivada em um ponto. Já no método das Secantes, calculamos o valor numérico do polinômio em dois pontos (ou em um, se aproveitarmos o cálculo da iteração anterior). Tais cálculos constituem a parte mais onerosa dos métodos, tanto em termos de tempo quanto na qualidade da solução que pode ficar comprometida pelos sucessivos arredondamentos durante o processo.

O objetivo do algoritmo de Briot-Ruffini é calcular o valor numérico do polinômio em um ponto z de maneira mais otimizada. Primeiramente, observamos que um polinômio de grau n qualquer pode ser escrito em sua forma canônica, Eq. (4.3), e também na forma concatenada, de parênteses encaixados:

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + ... + x(a_{n-1} + xa_n)...)). \tag{4.9}$$

Por exemplo, para $n = 4$, a forma canônica é $p_4(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ e a forma concatenada é

$$p_4(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + xa_4))). \tag{4.10}$$

Comparando as duas formas quanto a quantidade de operações de soma e multiplicação necessárias para avaliar p em um ponto z, a forma concatenada requer uma quantidade inferior de operações, portanto, agiliza os cálculos e, em geral, produz menos erros de arredondamento.

Chamando em (4.10) $b_4 = a_4$, $b_3 = b_4x + a_3$, $b_2 = b_3x + a_2$, $b_1 = b_2x + a_1$ e $b_0 = b_1x + a_0$, obtemos uma fórmula de recorrência, que generalizada para um polinômio de grau n fica

$$\begin{cases} b_n = a_n \\ b_{n-j} = b_{n-j+1}x + a_{n-j}, \quad j = 1, 2, ..., n \end{cases} \tag{4.11}$$

Assim, para calcular o valor numérico de um polinômio em um determinado ponto z, basta aplicar a fórmula (4.11) com $x = z$. Este é o método de Briot-Ruffini.

Por outro lado, retomando o teorema do resto, visto no Capítulo 3, o valor numérico de p em z é igual ao resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x-z$. Essa é outra utilização do método de Briot-Ruffini e vamos partir dessa ideia para explica-lo com mais detalhes.

Dividindo o polinômio $p(x)$ por $x-z$, obtemos o quociente $q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + b_2 x + b_1$ e o resto $r(x)$, isto é, $p(x) = q(x)(x-z) + r(x)$. Desenvolvendo o lado direito da igualdade obtemos

$$p(x) = b_n x^n + (b_{n-1} - zb_n)x^{n-1} + (b_{n-2} - zb_{n-1})x^{n-2} + \ldots + (b_1 - zb_2)x + (q(x) - zb_1) \tag{4.12}$$

e igualando aos coeficientes de p, chegamos ao processo iterativo (4.11) e além disso, concluímos que $r(x) = b_0$ e, portanto, $p(z) = b_0$. Mais ainda, b_i, $i = n, n-1, \ldots, 1$ são os coeficientes do quociente $q(x)$.

Os cálculos presentes na fórmula recursiva (4.11) são facilmente efetuados quando dispostos na forma de um esquema, mostrado a seguir, chamado dispositivo de Briot-Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline
z & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_2 & b_1 & b_0
\end{array}$$

Para detalhar o funcionamento desse dispositivo, considere a divisão de $p(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, um polinômio de grau 4, por $x - z$.

I) Construímos a tabela com os dados fornecidos, colocando os coeficientes em ordem decrescente.

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline
z & & & & &
\end{array}$$

II) Repetimos o primeiro coeficiente do dividendo obtendo $b_4 = a_4$.

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline
z & \downarrow & & & & \\ \hline
 & a_4 = b_4 & & & &
\end{array}$$

III) Multiplicamos o termo repetido no passo anterior b_4, pelo divisor z e somamos o produto com o próximo termo do dividendo.

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline
z & \downarrow & +zb_4 & & & \\ \hline
 & a_4 = b_4 & a_3 + zb_4 = b_3 & & &
\end{array}$$

IV) Repetimos o processo para obter o restante dos termos do quociente e por último o resto.

Assim, obtemos $q(x) = b_4 x^3 + b_3 x^2 + b_2 x + b_1$ e $r(x) = b_0$.

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
z	$\downarrow$	$+zb_4$	$+zb_3$	$+zb_2$	$+zb_1$
	$a_4 = b_4$	$a_3 + zb_4 = b_3$	$a_2 + zb_3 = b_2$	$a_1 + zb_2 = b_1$	$a_0 + zb_1 = b_0$

Exemplo 4.3: Efetue a divisão de $p(x) = 5x^3 + 2x^2 + 2$ por $g(x) = x - 2$ utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini.

Vamos preencher o dispositivo, observando primeiramente que o termo de grau 1 não configura sendo $a_1 = 0$, e prosseguindo conforme apresentado.

	5	2	0	2
2	$\downarrow$	$+(5 \times 2)$	$+(12 \times 2)$	$+(24 \times 2)$
	5	$2 + 5 \times 2 = 12$	$0 + 12 \times 2 = 24$	$2 + 24 \times 2 = 50$

Portanto, o quociente e o resto da divisão são respectivamente, $q(x) = 5x^2 + 12x + 24$ e $r = 50$.

Briot-Ruffini-Horner

O algoritmo de Briot-Ruffini-Horner é uma extensão do método de Briot-Ruffini e uma de suas utilidades é calcular, além do valor numérico do polinômio em um ponto, $p(z)$, o valor de suas derivadas (especificamente, $p'(z)/1!$, $p''(z)/2!$, $p'''(z)/3!$, ...) nesse mesmo ponto (HENRICE, 1977). O número de operações de adição e multiplicação é reduzido, o que acarreta em uma menor quantidade de arredondamento nos números e, consequentemente, os métodos de Newton e das Secantes caminham mais rapidamente para a solução.

Para calcular $p(z)$, utilizamos (4.11), de onde vem que $b_0 = p(z)$, ou seja, o valor de p calculado em z.

Derivando cada b_i de (4.11) em relação a z, obtemos uma fórmula recursiva semelhante a (4.11)

$$\begin{cases} b'_n = 0 \\ b'_{n-j} = zb'_{n-j+1} + b_{n-j+1}, \quad j = 1, 2, ..., n-1 \end{cases} \tag{4.13}$$

de onde segue que $b'_0 = p'(z)$, ou seja, o valor de p' calculado em z.

A dedução para as derivadas de ordem mais alta se estende de forma análoga. Porém, para o método de Newton, só a primeira derivada é necessária.

Segue um esquema prático para aplicar essas duas fórmulas de recorrência (4.11) e (4.13).

Como o interesse é obter uma raiz da equação polinomial $p(x) = 0$, o Método de Newton fica

$$x_k = x_{k-1} - \frac{p(x_{k-1})}{p'(x_{k-1})} = x_{k-1} - \frac{b_0(x_{k-1})}{b'_0(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, ... \tag{4.14}$$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
z	$\downarrow$	$+zb_n$	$+zb_{n-1}$	$\cdots$	$+zb_3$	$+zb_2$	$+zb_1$
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	$\cdots$	b_2	b_1	$\boxed{b_0 = p(z)}$
z	$\downarrow$	$+zb'_{n-1}$	$+zb'_{n-2}$	$\cdots$	$+zb'_2$	$+zb'_1$	
	b'_{n-1}	b'_{n-2}	b'_{n-3}	$\cdots$	b'_1	$\boxed{b'_0 = p'(z)}$	

Exemplo 4.4: Determine todas as raízes de $x^3 - 5x^2 + 1,75x + 6 = 0$, com precisão de 10^{-2}, usando o método de Newton e o algoritmo de Briot-Ruffini-Horner.

Ao estudarmos os sinais da função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 1,75x + 6$ temos Pelo *teorema de*

x	-1	0	1	2	3	4	5
Sinal da $p(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$

Bolzano, f tem três zeros reais, isolados cada um em um dos intervalos $]-1,0[$, $]1,2[$ e $]4,5[$.

O erro utilizado como critério de parada, também chamado de tolerância de erro para a solução x_k, será o erro relativo estimado, definido por

$$E_k = \left| \frac{x_k - x_{k-1}}{x_k} \right|. \tag{4.15}$$

Sendo assim iniciamos com um ponto inicial $x_0 = -0,5$ para encontrar a raiz pertencente ao intervalo $]-1,0[$. Utilizando o método de Briot-Ruffini-Horner para calcular os valores de $p(x_{k-1}$ e $p'(x_{k-1})$.

	1	-5	$1,75$	6
	$\downarrow$	$+$	$+$	$+$
$-0,5$		$-0,5$	$2,75$	$-2,25$
	1	$-5,5$	$4,5$	$\boxed{b_0(x_0) = 3,75}$
	$\downarrow$	$+$	$+$	
$-0,5$		$-0,5$	3	
	1	-6	$\boxed{b'_0(x_0) = 7,5}$	

$$x_1 = x_0 - \frac{b_0(x_0)}{b'_0(x_0)} = -0,5 - \frac{3,75}{7,5} = -1$$

O erro obtido é $\left| \dfrac{x_1 - x_0}{x_1} \right| = \left| \dfrac{-1-(-0,5)}{-1} \right| \approx 0,5 > 10^{-2}$ Sendo necessária uma nova iteração.

$$
\begin{array}{r|cccc}
 & 1 & -5 & 1,75 & 6 \\
\hline
 & \downarrow & + & + & + \\
-1 & & -1 & 6 & -7,75 \\
\hline
 & 1 & -6 & 7,75 & \boxed{b_0(x_1) = -1,75} \\
\hline
 & \downarrow & + & + & \\
-1 & & -1 & 7 & \\
\hline
 & 1 & -7 & \boxed{b_0'(x_1) = 14,75} &
\end{array}
$$

$$x_2 = x_1 - \frac{b_0(x_1)}{b_0'(x_1)} = -1 - \frac{-1,75}{14,75} = -0,8814$$

O erro obtido é $\left|\dfrac{x_2 - x_1}{x_2}\right| = \left|\dfrac{-0,8814-(-1)}{-0,8814}\right| \approx 0,134 > 10^{-2}$

$$
\begin{array}{r|cccc}
 & 1 & -5 & 1,75 & 6 \\
\hline
 & \downarrow & + & + & + \\
-0,8814 & & -0,8814 & 5,1839 & -6,1115 \\
\hline
 & 1 & -5,8814 & 6,9339 & \boxed{b_0(x_2) = -0,1115} \\
\hline
 & \downarrow & + & + & \\
-0,8814 & & -0,8814 & 5,9607 & \\
\hline
 & 1 & -6,7628 & \boxed{b_0'(x_2) = 12,8946} &
\end{array}
$$

$$x_3 = x_2 - \frac{b_0(x_2)}{b_0'(x_2)} = -0,8814 - \frac{-0,1115}{12,8946} = -0,8727$$

O erro obtido é $\left|\dfrac{x_3 - x_2}{x_3}\right| = \left|\dfrac{-0,8727-(-0,8814)}{-0,8727}\right| \approx 0,009 < 10^{-2}$

Como a precisão pedida foi atendida uma das raízes de p é aproximadamente $-0,8727$.

Para encontrar a segunda raiz iniciamos com um ponto inicial $x_0 = 1,5$.

$$
\begin{array}{r|cccc}
 & 1 & -5 & 1,75 & 6 \\
\hline
 & \downarrow & + & + & + \\
1,5 & & 1,5 & -5,25 & -5,25 \\
\hline
 & 1 & -3,5 & -3,5 & \boxed{b_0(x_0) = 0,75} \\
\hline
 & \downarrow & + & + & \\
1,5 & & 1,5 & -3 & \\
\hline
 & 1 & -2 & \boxed{b_0'(x_0) = -6,5} &
\end{array}
$$

$$x_1 = x_0 - \frac{b_0(x_0)}{b_0'(x_0)} = 1,5 - \frac{0,75}{-6,5} = 1,6154$$

O erro obtido é $\left|\dfrac{x_1 - x_0}{x_1}\right| = \left|\dfrac{1,6154-1,5}{1,6154}\right| \approx 0,07 > 10^{-2}$.

$$
\begin{array}{r|cccc}
 & 1 & -5 & 1,75 & 6 \\
\hline
 & \downarrow & + & + & + \\
1,6154 & & 1,6154 & -5,4675 & -6,005 \\
\hline
 & 1 & -3,3846 & -3,7175 & \boxed{b_0(x_1) = -0,005} \\
\hline
 & \downarrow & + & + & \\
1,6154 & & 1,6154 & 2,8580 & \\
\hline
 & 1 & -1,7692 & \boxed{b_0'(x_1) = -0,8595} &
\end{array}
$$

$$x_2 = x_1 - \frac{b_0(x_1)}{b_0'(x_1)} = 1,6154 - \frac{-0,005}{-0,8595} = 1,6095$$

O erro obtido é $\left|\dfrac{x_2 - x_1}{x_2}\right| = \left|\dfrac{1,6095 - 1,6154}{1,6095}\right| \approx 0,0035 < 10^{-2}.$

Como a precisão foi atendida uma das raízes de p é aproximadamente $1,6095$.

Para encontrar a terceira raíz iniciamos com o ponto inicial $x_0 = 4,5$

$$
\begin{array}{r|cccc}
 & 1 & -5 & 1,75 & 6 \\
\hline
 & \downarrow & + & + & + \\
4,5 & & 4,5 & -2,25 & -2,25 \\
\hline
 & 1 & -0,5 & -0,5 & \boxed{b_0(x_0) = 3,75} \\
\hline
 & \downarrow & + & + & \\
4,5 & & 4,5 & 1,8 & \\
\hline
 & 1 & 4 & \boxed{b_0'(x_0) = 17,5} &
\end{array}
$$

$$x_1 = x_0 - \frac{b_0(x_0)}{b_0'(x_0)} = 4,5 - \frac{3,75}{17,5} = 4,28$$

O erro obtido é $\left|\dfrac{x_1 - x_0}{x_1}\right| = \left|\dfrac{4,28 - 4,5}{4,28}\right| \approx 0,05 > 10^{-2}.$

$$
\begin{array}{r|cccc}
 & 1 & -5 & 1,75 & 6 \\
\hline
 & \downarrow & + & + & + \\
4,28 & & 4,28 & -3,0816 & -5,6992 \\
\hline
 & 1 & -0,72 & -1,3316 & \boxed{b_0(x_1) = 0,3008} \\
\hline
 & \downarrow & + & + & \\
4,28 & & 4,28 & 15,2368 & \\
\hline
 & 1 & 3,56 & \boxed{b_0'(x_1) = 13,9052} &
\end{array}
$$

$$x_2 = x_1 - \frac{b_0(x_1)}{b_0'(x_1)} = 4,28 - \frac{0,3008}{13,9052} = 4,2584$$

O erro obtido é $\left|\dfrac{x_2 - x_1}{x_2}\right| = \left|\dfrac{4,2584 - 4,28}{4,2584}\right| \approx 0,005 < 10^{-2}.$

assim como a precisão foi atendida, a aproximação da terceira raiz é $4,2584$.

Portanto, o conjunto solução procurado é aproximadamente $\{-0,872;\ 1,609\ ;\ 4,258\}$.

Uma alternativa para realização dos cálculos é utilzar o fato que da Eq. (4.12), sabemos que os números b_n, b_{n-1},..., b_1 são os coeficientes do polinômio $q(x)$ e, com isso, podemos aplicar novamente o método de Newton, agora para a equação $q(x) = 0$, para encontrar outra raiz de $p(x) = 0$, evitando que o processo iterativo convirja para a mesma raiz já encontrada.

4.4 Método de Newton-Bairstow

Para determinar as raízes complexas de uma equação polinomial, podemos aplicar o método de Newton ou das Secantes usando aritmética complexa (HENRICE, 1977), o que necessita de um estudo prévio de funções e derivadas de funções complexas. Optamos por apresentar o Método de Newton-Bairstow (FRANCO, 2006), que determina as raízes complexas de uma equação polinomial com coeficientes reais, usando aritmética real.

Observando que as raízes complexas da Eq. (4.3) ocorrem em pares conjugados, por exemplo, $z \pm iw$, p pode ser decomposto como

$$p(x) = (x-(z+iw))(x-(z-iw))q(x), \tag{4.16}$$

ou ainda,

$$p(x) = (x^2 - \alpha x - \beta)q(x), \tag{4.17}$$

com $\alpha = 2z$ e $\beta = -z^2 - w^2$, portanto, números reais.

De forma geral, podemos escrever a divisão de p por um fator $x^2 - \alpha x - \beta$ como

$$p(x) = (x^2 - \alpha x - \beta)q(x) + b_1(x-\alpha) + b_0, \tag{4.18}$$

que resulta em um polinômio de grau $n-2$

$$q(x) = b_n x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-3} + \ldots + b_2. \tag{4.19}$$

O objetivo do Método de Newton-Bairstow é encontrar os coeficientes α e β de tal forma que $b_1 = b_0 = 0$. Para uma escolha arbitrária de α e β, eles não se anularão, portanto, vamos procurar o fator quadrático que seja divisor exato de $p(x)$.

Desenvolvendo a multiplicação em (4.18), obtemos

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2(b_n x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-3} + \ldots + b_2) \\ &\quad -\alpha x(b_n x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-3} + \ldots + b_2) \\ &\quad -\beta(b_n x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-3} + \ldots + b_2) + b_1(x-\alpha) + b_0 \\ &= b_n x^n + (b_{n-1} - \alpha b_n)x^{n-1} + (b_{n-2} - \alpha b_{n-1} - \beta b_n)x^{n-2} \\ &\quad + \cdots + (b_1 - \alpha b_2 - \beta b_3)x + (b_0 - \alpha b_1 - \beta b_2). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Igualando os coeficientes de (4.20) com os coeficientes a_j de p e reagrupando os termos, obtemos as fórmulas de recorrência

$$\begin{aligned}
b_n &= a_n \\
b_{n-1} &= a_{n-1} + \alpha b_n \\
b_{n-2} &= a_{n-2} + \alpha b_{n-1} + \beta b_n \\
&\vdots \\
b_1 &= a_1 + \alpha b_2 + \beta b_3 \\
b_0 &= a_0 + \alpha b_1 + \beta b_2.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Observe em (4.21) que b_1 e b_0 são funções dos parâmetros que queremos determinar, assim, queremos que

$$\begin{cases} b_1(\alpha,\beta) = 0 \\ b_0(\alpha,\beta) = 0 \end{cases} \tag{4.22}$$

O sistema (4.22) pode ser reescrito como $F(b) = 0$, onde $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $b = (b_1, b_0)^t$ e podemos aplicar o Método de Newton para sistemas não linear, cuja processo iterativo equivalente à (4.2) é

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}^{-1}_{(x_1^{(k-1)},x_2^{(k-1)})} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}_{(x_1^{(k-1)},x_2^{(k-1)})}, \quad k = 1,2,\ldots \tag{4.23}$$

de onde vem

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{(x_1^{(k-1)},x_2^{(k-1)})} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}_{(x_1^{(k-1)},x_2^{(k-1)})}, \quad k = 1,2,\ldots \tag{4.24}$$

Para o problema de encontrar os zeros da função $F(b)$, observamos que $F_1 = b_1$, $F_2 = b_0$, $x_1 = \alpha$ e $x_2 = \beta$ e o processo iterativo fica:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial b_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial b_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial b_0}{\partial \alpha} & \frac{\partial b_0}{\partial \beta} \end{pmatrix}_{(\alpha^{(k-1)},\beta^{(k-1)})} \begin{pmatrix} \alpha^{(k)} - \alpha^{(k-1)} \\ \beta^{(k)} - \beta^{(k-1)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}_{(\alpha^{(k-1)},\beta^{(k-1)})}, \quad k = 1,2,\ldots \tag{4.25}$$

Fazendo $\alpha^{(k)} - \alpha^{(k-1)} = \Delta\alpha$ e $\beta^{(k)} - \beta^{(k-1)} = \Delta\beta$, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} \dfrac{\partial b_1}{\partial \alpha}\Delta\alpha + \dfrac{\partial b_1}{\partial \beta}\Delta\beta = -b_1(\alpha^{(k-1)},\beta^{(k-1)}) \\ \dfrac{\partial b_0}{\partial \alpha}\Delta\alpha + \dfrac{\partial b_0}{\partial \beta}\Delta\beta = -b_0(\alpha^{(k-1)},\beta^{(k-1)}) \end{cases} \tag{4.26}$$

Para encontrar as derivadas parciais de b_1 e b_0, devemos derivar todas as expressões de (4.21). No entanto, Bairstow propôs um método simples de calcular numericamente as derivadas parciais, cujos detalhes podem ser encontrados em (FRANCO, 2006). De forma resumida, fazendo $c_{j+1} = \frac{\partial b_j}{\partial \alpha}$, $j = n-1, n-2, ..., 1$,

$$\begin{aligned}
c_n &= b_n \\
c_{n-1} &= b_{n-1} + \alpha c_n \\
c_{n-2} &= b_{n-2} + \alpha c_{n-1} + \beta c_n \\
&\vdots \\
c_2 &= b_2 + \alpha c_3 + \beta c_4 \\
c_1 &= b_1 + \alpha c_2 + \beta c_3
\end{aligned} \tag{4.27}$$

de onde vem que $\frac{\partial b_0}{\partial \alpha} = c_1$ e $\frac{\partial b_1}{\partial \alpha} = c_2$.

Procedendo da mesma forma, chamamos $d_{j+2} = \frac{\partial b_j}{\partial \beta}$, $j = n-2, n-3, ..., 2$,

$$\begin{aligned}
d_n &= b_n \\
d_{n-1} &= b_{n-1} + \alpha d_n \\
d_{n-2} &= b_{n-2} + \alpha d_{n-1} + \beta d_n \\
&\vdots \\
d_3 &= b_3 + \alpha d_4 + \beta d_5 \\
d_2 &= b_2 + \alpha d_3 + \beta d_4
\end{aligned} \tag{4.28}$$

de onde vem que $\frac{\partial b_0}{\partial \beta} = d_2 = c_2$ e $\frac{\partial b_1}{\partial \beta} = d_3 = c_3$.

Podemos usar esquemas práticos para calcular os valores b_j, c_j e d_j, porém, no exemplo seguinte, deixaremos todas as contas explícitas.

Exemplo 4.5: Calcule as raízes da equação polinomial $x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 14x + 10 = 0$ sabendo de antemão que ela possui raízes complexas.

Inicialmente poderíamos pensar em utilizar a fórmula resolvente de equações de quarto grau, mas não seria o melhor caminho, pois durante a resolução é necessário resolver uma equação de terceiro grau com raízes nada trivial, ou seja, seriam necessários dois métodos e muitas contas sem nenhum dispositivo prático. Assim o método de Newton-Bairstow torna-se mais eficaz.

Aplicando o método de Newton-Bairstow iniciado em $(\alpha_0, \beta_0) = (1, -1)$,

- 1ª iteração $(\alpha_0, \beta_0) = (1, -1)$

Sendo $a_4 = 1$, $a_3 = -4$, $a_2 = 11$, $a_1 = -14$, $a_0 = 10$

$$
\begin{aligned}
&b_4 = a_4 = 1\\
&b_3 = a_3 + \alpha b_4 = (-4) + 1.1 = -3\\
&b_2 = a_2 + \alpha b_3 + \beta b_4 = 11 + 1.(-3) + (-1).1 = 7\\
&b_1 = a_1 + \alpha b_2 + \beta b_3 = -14 + 1.7 + (-1).(-3) = -4\\
&b_0 = a_0 + \alpha b_1 + \beta b_2 = 10 + 1.(-4) + (-1).7 = -1.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&c_4 = b_4 = 1\\
&c_3 = b_3 + \alpha c_4 = -3 + 1.1 = -2\\
&c_2 = b_2 + \alpha c_3 + \beta c_4 = 7 + 1.(-2) + (-1).1 = 4\\
&c_1 = b_1 + \alpha c_2 + \beta c_3 = (-4) + 1.4 + (-1).(-2) = 2
\end{aligned}
$$

Encontramos,

$\frac{\partial b_0}{\partial \alpha} = c_1 = 2$ e $\frac{\partial b_1}{\partial \alpha} = c_2 = 4.$

$\frac{\partial b_0}{\partial \beta} = c_2 = 4$ e $\frac{\partial b_1}{\partial \beta} = c_3 = -2.$

substituindo os valores no sistema 4.26 obtemos.

$$
\begin{cases}
4\Delta\alpha + (-2)\Delta\beta = -(-4)\\
2\Delta\alpha + 4\Delta\beta = -(-1)
\end{cases}
$$

Resolvendo o sistema encontramos $\Delta\alpha = 0,1$ e $\Delta\beta = 0,2$ e consequentemente $\alpha_1 = 1,1$ e $\beta_1 = -0,8$

O esquema prático para calcular os c_n e b_n nesta 1ª iteração é

	$a_4 = 1$	$a_3 = -4$	$a_2 = 11$	$a_1 = -14$	$a_0 = 10$
	$\downarrow$	+	+	+	+
$\alpha_0 = 1$		$\alpha_0 b_4 = 1$	$\alpha_0 b_3 = -3$	$\alpha_0 b_2 = 7$	$\alpha_0 b_1 = -4$
			+	+	+
$\beta_0 = -1$			$\beta_0 b_4 = -1$	$\beta_0 b_3 = 3$	$\beta_0 b_2 = -7$
	$b_4 = 1$	$b_3 = -3$	$b_2 = 7$	$b_1 = -4$	$b_0 = -1$
	$\downarrow$	+	+	+	
$\alpha_0 = 1$		$\alpha_0 c_4 = 1$	$\alpha_0 c_3 = -2$	$\alpha_0 c_2 = 4$	
			+	+	
$\beta_0 = -1$			$\beta_0 c_4 = -1$	$\beta_0 c_3 = 2$	
	$c_4 = 1$	$c_3 = -2$	$c_2 = 4$	$c_1 = 2$	

- 2ª iteração $(\alpha_1, \beta_1) = (1,1, -0,8)$

$$
\begin{aligned}
&b_4 = 1\\
&b_3 = -2,9\\
&b_2 = 7,01\\
&b_1 = -3,969\\
&b_0 = 0,0261.
\end{aligned}
$$

$c_4 = 1$
$c_3 = -1,8$
$c_2 = 4,23$
$c_1 = 2,124$

Econtramos,

$\frac{\partial b_0}{\partial \alpha} = c_1 = 2,124$ e $\frac{\partial b_1}{\partial \alpha} = c_2 = 4,23.$

$\frac{\partial b_0}{\partial \beta} = c_2 = 4,23$ e $\frac{\partial b_1}{\partial \beta} = c_3 = -1,8.$

substituindo os valores no sistema 4.26 obtemos.

$$\begin{cases} 4,23\Delta\alpha + (-1,8)\Delta\beta = -(-3,969) \\ 2,124\Delta\alpha + 4,23\Delta\beta = -0,0261 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos $\Delta\alpha = 1,1056$ e $\Delta\beta = 0,3933$ e consequentemente $\alpha_2 = 2,2056$ e $\beta_2 = -0,4067$

- 3ª iteração $(\alpha_2, \beta_2) = (2,2056, -0,4067)$

$b_4 = 1$
$b_3 = -1,7944$
$b_2 = 6,6356$
$b_1 = 1,3651$
$b_0 = 10,3122.$

$c_4 = 1$
$c_3 = 0,4112$
$c_2 = 7,1358$
$c_1 = 16,9366$

Encontramos,

$\frac{\partial b_0}{\partial \alpha} = c_1 = 16,9366$ e $\frac{\partial b_1}{\partial \alpha} = c_2 = 7,1358.$

$\frac{\partial b_0}{\partial \beta} = c_2 = 7,1358$ e $\frac{\partial b_1}{\partial \beta} = c_3 = 0,4112.$

substituindo os valores no sistema 4.26 obtemos.

$$\begin{cases} 7,1358\Delta\alpha + 0,4112\Delta\beta = -1,3651 \\ 16,9366\Delta\alpha + 7,1358\Delta\beta = -10,3122 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos $\Delta\alpha = -0,1251$ e $\Delta\beta = -1,1495$ e consequentemente $\alpha_3 = 2,0805$ e $\beta_3 = -1,5562$

- 4ª iteração $(\alpha_2, \beta_2) = (2,2056, -0,4067)$

$b_4 = 1$
$b_3 = -1,9195$
$b_2 = 5,4503$
$b_1 = 0,3264$
$b_0 = 2,1972.$

$c_4 = 1$
$c_3 = 0,161$
$c_2 = 4,2291$
$c_1 = 8,8745$

Encontramos,

$\frac{\partial b_0}{\partial \alpha} = c_1 = 8,8745$ e $\frac{\partial b_1}{\partial \alpha} = c_2 = 4,2291.$

$\frac{\partial b_0}{\partial \beta} = c_2 = 4,2291$ e $\frac{\partial b_1}{\partial \beta} = c_3 = 0,161.$

substituindo os valores no sistema 4.26 obtemos.

$$\begin{cases} 4,2291\Delta\alpha + 0,161\Delta\beta = -0,3264 \\ 8,8745\Delta\alpha + 4,2291\Delta\beta = -2,1972 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos que $\Delta\alpha = -0,0624$ e $\Delta\beta = -0,3886$ e consequentemente $\alpha_4 = 2,018$ e $\beta_4 = -1,9448$

- 5ª iteração $(\alpha_4, \beta_4) = (2,018, -1,9448)$

$b_4 = 1$
$b_3 = -1,982$
$b_2 = 5,0555$
$b_1 = 0,0566$
$b_0 = 0,2822.$

$c_4 = 1$
$c_3 = 0,036$
$c_2 = 3,1833$
$c_1 = 6,4105$

Encontramos,

$\frac{\partial b_0}{\partial \alpha} = c_1 = 6,4105$ e $\frac{\partial b_1}{\partial \alpha} = c_2 = 3,1833.$

$\frac{\partial b_0}{\partial \beta} = c_2 = 3,1833$ e $\frac{\partial b_1}{\partial \beta} = c_3 = 0,036.$

substituindo os valores no sistema 4.26 obtemos.

$$\begin{cases} 3,1833\Delta\alpha + 0,036\Delta\beta = -0,0566 \\ 6,4105\Delta\alpha + 3,1833\Delta\beta = -0,2822 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos que $\Delta\alpha = -0,0171$ e $\Delta\beta = -0,0542$ e consequentemente $\alpha_5 = 2$ e $\beta_5 = -2$

- 6ª iteração $(\alpha_5, \beta_5) = (2, -2)$

$$\begin{aligned} b_4 &= 1 \\ b_3 &= -2 \\ b_2 &= 5 \\ b_1 &= 0 \\ b_0 &= 0. \end{aligned}$$

Assim, os valores de α e β que torna $b_1 = 0$ e $b_0 = 0$ são respectivamente 2 e -2, de onde tiramos, por (4.17), que $z = 1$ e $w = \pm 1$ e, portanto, as duas raízes complexas procuradas são $1+i$ e $1-i$.

Para obter as outras duas raízes, dividimos $p(x)$ pelo fator quadrático $x^2 - 2x + 2$, obtendo o quociente $x^2 - 2x + 5$. Agora, utilizarmos a fórmula resolutiva apresentada na Seção 3.3, Eq. (3.18), encotramos as raízes $1+2i$ e $1-2i$.

Portanto, o conjunto solução é $\{1+i,\ 1-i,\ 1+2i,\ 1-2i\}$.

CAPÍTULO

5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação apresenta um conjunto de técnicas para resolução de equações polinomiais, de diversas ordens e características. Servindo de material de instrução para aperfeiçoamento de professores que desejam aprimorar suas aulas e alunos de ensino médio e superior que queiram ampliar seus conhecimentos.

Dividimos as técnicas em analíticas e numéricas. Nas primeiras, apresentamos as fórmulas resolventes de Baskhara, Ferrari e Cardan e tratamos de alguns casos particulares, como as equações do tipo $x^n + k = 0$ e as equações recíprocas.

Quanto às técnicas numéricas, apresentamos o método de Newton e o método das Secantes, métodos clássicos de solução de equações não lineares adaptados para equações polinomiais com coeficientes reais. São utilizados para encontrar raízes reais. Por último, apresentamos o método de Newton-Bairstow para encontra raízes complexas de equações polinomiais com coeficientes reais.

Tais técnicas resolvem a grande maioria das equações, no conjunto dos números complexos.

Uma proposta para trabalho futuro é estudar o método de Newton para tratar de equações polinomiais com coeficientes complexos. Para isso, é necessário estudar previamente funções de uma variável complexa e suas derivadas.

Outra proposta é desenvolver sequências didáticas para trabalhar com alunos do Fundamental II e Ensino Médio, em aulas regulares ou atividades extracurriculares.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da matemática**. 11. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. Citado nas páginas 19 e 20.

CHURCHILL, R. V. **Variáveis Complexas e Aplicações**. São Paulo: McGrawHill, 1975. Citado na página 29.

CURTI, M. A. **Soluções gerais de equações do terceiro e quarto graus e a relação entre números complexos e equações cúbicas**. Monografia (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -Profmat)) — Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, Rio de Janeiro, 2015. Citado nas páginas 21 e 39.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2004. Citado na página 20.

FRANCO, N. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Prentice-Hall, 2006. Citado nas páginas 60, 70 e 72.

GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas**. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. Citado na página 20.

HEFEZ A.;VILLELA, M. L. T. Polinômios e equações algébricas. In: **Coleção PROFMAT**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado nas páginas 20, 28, 33 e 40.

HENRICE, P. **Applied methods in computational complex analysis**. Nova York: John Wiley, 1977. Citado nas páginas 66 e 70.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar, 6: complexos, polinômios, equações**. São Paulo: Atual, 1993. Citado nas páginas 23, 26, 33, 35 e 82.

LIMA, E. L. A equação do terceiro grau. **Matemática Universitária**, n. 5, p. 9–23, 1987. Citado na página 39.

NASCIMENTO, D. A. **Métodos para encontrar raízes exatas e aproximadas de funções polinomiais até o 4^o grau**. Monografia (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -Profmat)) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015. Citado na página 21.

OLIVEIRA K. I. M.;FERNANDEZ, A. J. C. Iniciação à matemática: um curso com problemas e soluções. In: **Coleção Olimpíadas de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2010. Citado na página 19.

SANTOS, S. R. **As equações polinomiais do 3^o e 4^o graus: sua história e suas soluções**. Monografia (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -Profmat)) — Universidade Federal de Sergipe, São Cristovão, 2013. Citado nas páginas 21 e 39.

STEWART, J. **Cálculo - vol. 2**. São Paulo: Thomson Learning, 2009. Citado na página 49.

ÁVILA, G. **Introdução à análise matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1999. Citado na página 61.

ZOLADEK, H. The topological proof of the abel-ruffini theorem, topological methods in nonlinear algebra. **Journal of the Juliusz Schauder Center**, v. 16, p. 253–265, 2000. Citado nas páginas 20 e 57.

APÊNDICE

A

IMERSÃO DE $\mathbb{R}$ EM $\mathbb{C}$

Considerando $\mathbb{R}'$ subconjunto de $\mathbb{C}$ tal que $\mathbb{R}' = \{(a,b) \in \mathbb{C} | \, b = 0\}$, e a aplicação f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}'$, esquematizada na Figura 7 que leva cada $x \in \mathbb{R}$ ao par $(x,0) \in \mathbb{R}'$, isto é,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longmapsto \mathbb{R}' \\ x &\longmapsto (x,0) \end{aligned}$$

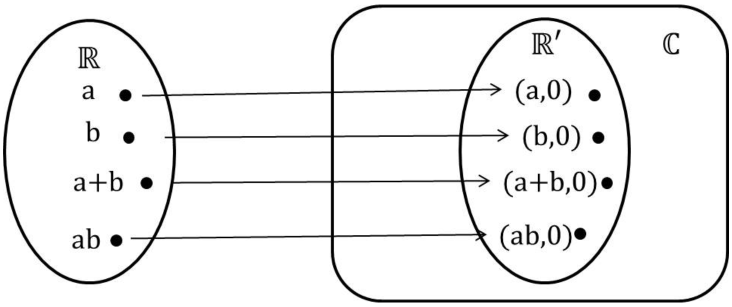

Figura 7 – Imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$

podemos verificar que

- f é bijetora

  De fato,
  $$\begin{cases} \forall (x,0) \in \mathbb{R}',\ \exists\, x \in \mathbb{R} \quad \text{(sobrejetora)} \\ \text{Seja } x_1 \neq x_2 \text{ então } (x_1,0) \neq (x_2,0) \quad \text{(injetora)} \end{cases}$$

- f conserva as operações de adição e multiplicação

  Sejam $a,b \in \mathbb{R}$,

  $f(a+b) = (a+b,0) = (a,0)+(b,0) = f(a)+f(b)$ e

  $f(ab) = (ab,0) = (ab-0\cdot 0, a\cdot 0+0b) = (a,0)(b,0) = f(a)f(b)$.

Devido ao fato de existir uma aplicação bijetora $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}'$ que conserva as operações de adição e multiplicação, dizemos que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}'$ são isomorfos (IEZZI, 1993) . Dessa forma o conjunto dos números reais pode ser visto como um subconjunto do conjunto dos números complexos, isto é, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

ICMC USP
SÃO CARLOS