

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**Cálculo de áreas sem o uso do Teorema Fundamental do Cálculo**

**Bruno Donadelli Trajano Mattos**

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)



SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Bruno Donadelli Trajano Mattos**

## Cálculo de áreas sem o uso do Teorema Fundamental do Cálculo

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Casassola Gonçalves

**USP – São Carlos**  
**Janeiro de 2018**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi  
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,  
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

MM444c      Mattos, Bruno Donadelli Trajano  
c              Cálculo de áreas sem o uso do Teorema  
                Fundamental do Cálculo / Bruno Donadelli Trajano  
                Mattos; orientador Alexandre Casassola Gonçalves. --  
                São Carlos, 2018.  
                97 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação  
em Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de  
Computação, Universidade de São Paulo, 2018.

1. Soma de séries simples. 2. Limites. 3.  
Regiões delimitadas por curvas. 4. Gráficos. 5.  
Funções. I. Casassola Gonçalves, Alexandre, orient.  
II. Título.

**Bruno Donadelli Trajano Mattos**

Measuring areas without the Fundamental Theorem of  
Calculus

Master dissertation submitted to the Institute of  
Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in  
partial fulfillment of the requirements for the degree of  
Mathematics Professional Master's Program. *FINAL  
VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree  
Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Alexandre Casassola Gonçalves

**USP – São Carlos**  
**January 2018**



*A minha mãe Patrícia Donadelli Mecatti por me incentivar ao estudo e à pesquisa de forma contínua e a Deus pela vida.*



# RESUMO

MATTOS, B. D. T. **Cálculo de áreas sem o uso do Teorema Fundamental do Cálculo**. 2018. 97 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Desenvolvemos uma estratégia natural e acessível aos estudantes do Ensino Médio para o cálculo de áreas planas sem as ferramentas mais avançadas do Cálculo Diferencial e Integral

**Palavras-chave:** Soma de séries simples, Limites, Regiões delimitadas por curvas, Gráficos, Funções.



# ABSTRACT

MATTOS, B. D. T. **Measuring areas without the Fundamental Theorem of Calculus**. 2018. 97 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

We developed a natural strategy, achievable by high school students, for the computation of area of limited regions of the cartesian plane, without making use of more advanced resources of Differential and Integral Calculus.

**Keywords:** Sum of simple series, Limits, Region defined by curves, Graphs, Functions.



# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

---

---

Figura 1 – Polígonos regulares por construção . . . . .	17
Figura 2 – Relações métricas . . . . .	18
Figura 3 – Retificação da circunferência $\lambda$ . . . . .	19
Figura 4 – Aproximação de $\pi$ . . . . .	21
Figura 5 – Gráfico de domínio real . . . . .	24
Figura 6 – Gráfico de domínio natural . . . . .	25
Figura 7 – Trajeto sugestivo 1 . . . . .	25
Figura 8 – Trajeto sugestivo 2 . . . . .	25
Figura 9 – Aplicação das séries . . . . .	28
Figura 10 – Gráfico de $a_n = \frac{1}{n}$ . . . . .	31
Figura 11 – Mapa do arquiteto . . . . .	33
Figura 12 – Modelagem matemática . . . . .	34
Figura 13 – Repartição intervalar . . . . .	35
Figura 14 – área aproximada por trapézios . . . . .	35
Figura 15 – Área aproximada por retângulos . . . . .	40
Figura 16 – Plantação devastada por incêndio . . . . .	42
Figura 17 – Área líquida . . . . .	44
Figura 18 – Área contendo o camarote . . . . .	44
Figura 19 – Camarote: Ponto de vista matemático . . . . .	45
Figura 20 – Somando por colunas . . . . .	57
Figura 21 – Gráfico aproximação área $A^{x^k}, [\alpha, \beta]$ . . . . .	57
Figura 22 – Diferença entre áreas . . . . .	59
Figura 23 – Gráfico de $f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$ . . . . .	63
Figura 24 – Gráfico das funções $f$ e $g$ . . . . .	63
Figura 25 – Desigualdade no ciclo trigonométrico . . . . .	65
Figura 26 – Proporcionalidade entre comprimento e área . . . . .	66
Figura 27 – Dilema da movimentação . . . . .	67
Figura 28 – Área de funções inversas . . . . .	76
Figura 29 – Diferença entre áreas por exponencial . . . . .	80
Figura 30 – Escada de Fermat . . . . .	84
Figura 31 – Fermat: Diferença entre áreas 1 . . . . .	87
Figura 32 – Fermat: Diferença entre áreas 2 . . . . .	87
Figura 33 – Superfície de revolução . . . . .	90

Figura 34 – Caixa de água . . . . .	94
Figura 35 – Elipsóide: Superfície de revolução . . . . .	95

# SUMÁRIO

---

---

1	A IDÉIA INTUITIVA DE LIMITE DE UMA FUNÇÃO DE NÚMEROS REAIS . . . . .	23
1.1	Limites . . . . .	26
1.2	Um limite fundamental . . . . .	31
2	UM EXEMPLO MOTIVADOR . . . . .	33
3	RETÂNGULOS, UM FACILITADOR DE CÁLCULOS . . . . .	39
3.1	Expansão do conceito de área . . . . .	42
4	DEMONSTRAÇÃO POR INDUÇÃO . . . . .	47
5	CÁLCULO DE ÁREAS DELIMITADAS POR GRÁFICOS POLINOMIAIS . . . . .	53
5.1	Conjecturando e provando uma fórmula geral para a área polinomial	56
6	ÁREAS DELIMITADAS POR GRÁFICOS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS. . . . .	65
7	CÁLCULO DE ÁREAS COM O AUXÍLIO DA FUNÇÃO INVERSA	75
8	FERMAT-POTÊNCIAS RACIONAIS . . . . .	83
9	VOLUME DE SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO . . . . .	89
	REFERÊNCIAS . . . . .	97



# INTRODUÇÃO

---



---

No ensino fundamental e médio, os alunos lidam constantemente com problemas envolvendo o cálculo de áreas de figuras notáveis como, por exemplo, triângulo, quadrado, retângulo, paralelogramo, losango e trapézio. Geralmente, recorre-se ao uso de fórmulas particulares para cada uma dessas classes de polígonos. Assim, por exemplo, a área de qualquer triângulo é sempre dada pelo semiproduto da medida de sua base pela sua altura.

É habitual em vestibulares e em concursos públicos, questões envolvendo o cálculo de áreas de polígonos não regulares com número de lados maior do que ou igual a quatro. Nestas, algumas vezes, a determinação pode ser feita através da decomposição da figura em triângulos justapostos, donde a soma das áreas de cada um deles resulta na área total da figura pedida

Mas o que torna o assunto tão extenso e muitas vezes difícil? Será que é a grande quantidade de fórmulas que são apresentadas no ensino deste tema? A segunda pergunta, por ser mais simples, será respondida primeira. As fórmulas existem, geralmente, para facilitar a vida das pessoas. Com elas, agiliza-se o tempo gasto na resolução de diversos tipos de problemas similares uns aos outros. Entretanto, se a primeira delas fosse feita a um engenheiro agrimensor, talvez o mesmo não demorasse a responder:

“Penei muito na universidade com uma matéria chamada Cálculo Diferencial e Integral, mas hoje, não sei o que seria de mim sem ela. Além de aprender a calcular as taxas de variações das funções, aprendi também a lidar com áreas e volumes de figuras não poligonais e nem planas.”

Por esta fala do engenheiro, fica claro que nem sempre é fácil determinarmos áreas delimitada por fronteiras curvas, isto é, aquelas cuja formação não depende apenas da união de segmentos de retas. Um exemplo disso, é a determinação da área do círculo.

Visando uma maneira precisa e mais lucrativa na cobrança de seus impostos (EVES, 2004), os egípcios faziam a distribuição de suas terras através de diferentes tipos de figuras geométricas planas. Fez-se então, por necessário, a criação de diversas fórmulas matemáticas para o cálculo das áreas mais usuais daquela época. Dentre elas, o círculo. Por volta de 1750 a.C., embora não fizessem ideia da existência do valor irracional  $\pi$  (pi), inconscientemente (e de forma implícita) faziam seu uso aproximado <sup>1</sup> na fórmula por eles deduzida  $A = (d - \frac{d}{9})^2$ , onde A: área do círculo e d: diâmetro (dobro do raio).

---

<sup>1</sup> Nota: Este valor racional periódico pode ser encontrado fazendo:  $(d - \frac{d}{9})^2 = \pi r^2 \Leftrightarrow (2r - \frac{2r}{9})^2 = \pi r^2 \Leftrightarrow (\frac{16r}{9})^2 = \pi r^2 \Leftrightarrow \pi = \frac{256}{81} \cong 3,160493\dots$

Não menos importante, por procedimentos empíricos, os Babilônios também desenvolveram sua própria fórmula para a área do círculo. Representada sobre a forma  $A = \frac{c^2}{12}$ , onde  $c$  é o comprimento da circunferência e  $A$  sua área, podemos perceber o quão grande eram as dificuldades computacionais por ela apresentada, visto que a formalização matemática para o comprimento de qualquer circunferência ainda não havia sido solidificado. Ainda que ambos os povos tenham desenvolvido suas próprias fórmulas, há uma proximidade relativa entre seus resultados<sup>2</sup>.

O que teria acontecido se cada civilização tivesse criado sua própria fórmula para o cálculo da área do círculo? Haveria algum problema futuramente?

Sem dúvidas que sim! Imagine só a quantidade de discórdia que isso poderia acarretar. Com a expansão marítima (século XV), povos de diferentes regiões do planeta aprenderam novos hábitos, fizeram trocas culturais, expandiram seus territórios, adquiriram novas fontes de matérias primas e também trocavam informações comerciais, dentre outros. Por estes fatos, era prático por conveniência, a padronização entre dialetos, números, sistema monetário, etc. Embora necessário, alguns deles não sofreram modificações por intervenções culturais, preservando-se até nos dias atuais. Entretanto, grande parte da matemática não pôde dar-se a este luxo. As discórdias entre símbolos e valores eram mais frequentes do que se possa imaginar. Ninguém queria sair no prejuízo! Mesmo havendo acordo entre o sistema monetário, o valor proporcional de um terreno circular em função de sua área, por exemplo, poderia variar para mais ou para menos conforme a fórmula escolhida não é mesmo? Assim, alguém sempre levaria desvantagem.

Relatos históricos (EVES, 2004) afirmam que o grego Arquimedes (287-212 a.C.) foi o primeiro a *perceber e definir* a existência do número  $\pi$ . Conforme veremos mais adiante, tal valor era substancial para a determinação da área do círculo e sua emergência manifestou-se através do quociente  $\frac{C}{d}$ , em que  $C$  é o comprimento da circunferência e  $d$  o seu diâmetro. Naquela época, o comprimento de qualquer circunferência era algo desconhecido e, por este fato, Arquimedes utilizou polígonos regulares inscritos e circunscritos a fim de aproximá-lo e, com isso, obter as primeiras casas decimais para  $\pi$ . Tendo em vista a precariedade computacional e escrita daquela época, Arquimedes utilizou apenas 5 pares de polígonos regulares. Estes possuíam 6, 12, 24, 48 e 96 lados. Na verdade, os valores 12, 24, 48 e 96 são derivados da belíssima fórmula de recorrência por ele conhecida

$$l_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}}, \quad (1)$$

onde  $l_n$  e  $l_{2n}$  são os lados dos polígonos de  $n$  e  $2n$  lados inscritos na *circunferência unitária*.<sup>3</sup>

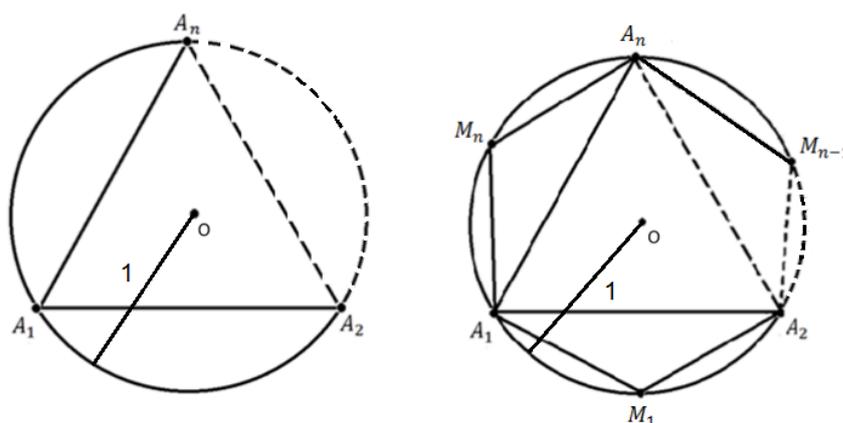
<sup>2</sup> A diferença entre os resultados apresentados pelos egípcios e pelos babilônicos está na aproximação implícita feita para  $\pi$ . Os Babilônicos usavam  $\pi \cong 3$  (igual a fórmula  $\frac{c^2}{12}$  com  $\pi r^2$  para encontrá-lo!).

<sup>3</sup> O raio unitário foi escolhido de forma proposital uma vez que, conforme sabido, duas circunferências quaisquer são sempre semelhantes. Posto isso, independente da escolha do raio, teremos sempre que  $\pi = \frac{C}{D}$ .

Com intuito de fornecer as ideias essenciais da demonstração feita por Arquimedes, faremos apenas uma simulação para os polígonos regulares inscritos, mas antes, mostraremos como podemos obter a fórmula matemática 1.

Sejam  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  os vértices do polígono regular inscrito  $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$  na circunferência  $\lambda$  de raio unitário. Por construção, se tomarmos os pontos médios  $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$  dos arcos  $A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_4, \dots, A_n A_1$  obteremos o polígono regular (inscrito)  $A_1 M_1 A_2 M_2 A_3 M_3 \dots A_n M_n$  de  $2n$  lados, conforme indica a Figura 1.

Figura 1 – Polígonos regulares por construção



Fonte: Elaborada pelo autor.

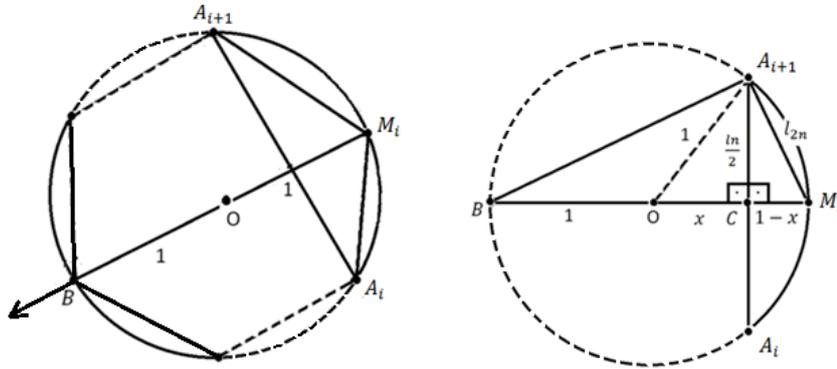
Consideremos os vértices consecutivos  $A_i, M_i$  e  $A_{i+1}, i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$  do polígono de  $2n$  lados, em que o símbolo  $\in$  indica pertinência. Tracemos o diâmetro definido pelos pontos  $M_i$  e  $B$ , em que  $B$  foi obtido pela intersecção da semi-reta  $M_i O$  com  $\lambda$ . Perceba que o ponto  $B$  incide sobre um dos vértices do polígono  $A_1 M_1 A_2 M_2 \dots A_n M_n$  e que, além disto,  $B$  será distinto de  $A_i, M_i$  e  $A_{i+1}$ . Demonstra-se ainda, por congruência de triângulos, que o segmento  $A_i A_{i+1}$  é perpendicular ao segmento  $M_i B$  no ponto de intersecção  $C$ . Daí, inferimos a congruência entre os segmentos  $A_i C$  com  $C A_{i+1}$ . Sabemos que  $A_i A_{i+1}$  e  $M_i A_{i+1}$  são os lados  $l_n$  e  $l_{2n}$  dos respectivos polígonos regulares construídos. O triângulo  $B M_i A_{i+1}$  é inscrito em uma semicircunferência. Logo, é retângulo em  $A_{i+1}$ . Tendo em vista que  $l_n$  pode ser representado pela soma de  $A_i C$  com  $C A_{i+1}$ , segue que a medida do segmento  $C A_{i+1}$  é dada pela razão  $\frac{l_n}{2}$ . Da mesma forma, podemos constatar que o raio de  $\lambda$  pode ser representado pela adição de  $OC$  com  $C M_i$ . Chamemos de  $x$  a medida de  $OC$ . Posto isto, teremos que o comprimento do segmento  $C M_i$  será dado por  $1 - x$ . Estas informações nos levam a construção da Figura 2.

Dentre as relações métricas existentes nos triângulos retângulos, duas delas serão fundamentais para a dedução de 1. A primeira refere-se ao:

**Teorema 1.** Em todo triângulo retângulo cada cateto é a média geométrica entre sua projeção sobre a hipotenusa e a hipotenusa,

e, a segunda, ao

Figura 2 – Relações métricas



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Teorema 2 (de Pitágoras).** Em todo triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

Tratando-se de dois resultados muito utilizados no ensino básico, omitiremos aqui, suas demonstrações. Desta maneira, se aplicarmos o Teorema 1 no triângulo retângulo  $BM_iA_{i+1}$ , ficaremos com a igualdade:

$$l_{2n} = \sqrt{2 \cdot (1-x)}. \quad (2)$$

Nesta, devemos eliminar a variável  $x$  dentro do seu radical. Para tanto, façamos a aplicação do Teorema 2 no triângulo retângulo  $OCA_{i+1}$  gerando, assim que:

$$1 = \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 + x^2,$$

ou ainda,

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{4 - l_n^2}. \quad (3)$$

Finalmente, substituindo a equação (3) em (2), ficamos com:

$$l_{2n} = \sqrt{2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{4 - l_n^2}\right)} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}},$$

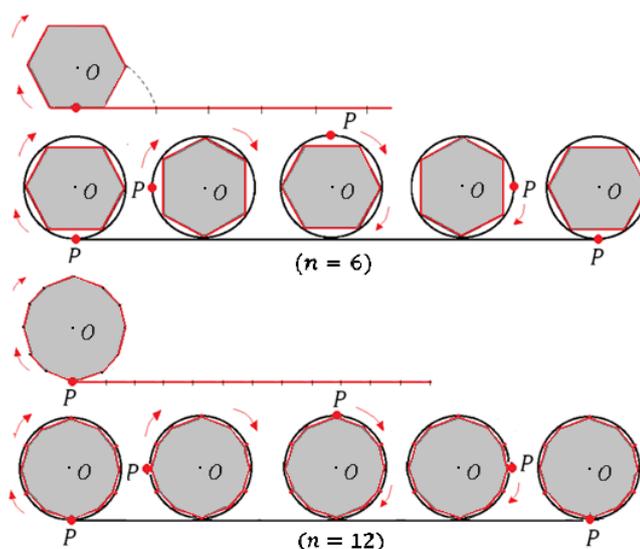
que é o que queríamos demonstrar.

Segundo a definição feita por Arquimedes, o quociente  $\frac{C}{d}$  ( $= \frac{C}{2r}$ ) representa o valor de  $\pi$ , para qualquer que seja o raio  $r$  escolhido. Com um olhar clínico para a Figura 3, podemos

perceber que conforme o número de lados  $n$  do polígono regular cresça, sem que um valor máximo possa ser atingido, o seu perímetro  $p_n$  tenderá cada vez mais ao comprimento  $C$  da circunferência. Fundamentado nestes argumentos, é correto afirmarmos que a diferença  $C - p_n$  aproxima-se cada vez mais de zero. Justifica-se, então, a aproximação

$$C \cong p_n. \quad (4)$$

Figura 3 – Retificação da circunferência  $\lambda$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Se considerarmos  $p_{2n}$ , como sendo o perímetro de um polígono regular com  $2n$  lados inscrito em uma circunferência de raio unitário, então podemos aproximar o valor de  $\pi$  fazendo

$$\pi = \frac{C}{2} \cong \frac{p_{2n}}{2} = \frac{(2n) \cdot l_{2n}}{2} = n \cdot l_{2n}, \quad n \geq 3. \quad (5)$$

Em palavras, isto equivale a dizermos:

*Para um número  $2n$  (par) de lados de um polígono regular, podemos aproximar  $\pi$  através do produto de  $n$  (metade da quantidade de lados) por  $l_{2n}$ . Este, poderá ser determinado somente se soubermos o valor do  $l_n$  (lado do polígono regular que possui a metade da sua quantidade de lados).*

É importante relatarmos que a igualdade  $\pi = \frac{C}{2}$ , vista em 5, nos informa ainda que o comprimento de qualquer circunferência unitária será sempre obtida através do produto  $2\pi$ . Tal fato, será crucial para a determinação da área do círculo unitário conforme veremos mais adiante.

Portanto, com a utilização da fórmula 5, Arquimedes pôde determinar as primeiras casas decimais de  $\pi$  efetuando

$$\begin{aligned}
 n = 6 &\Rightarrow l_6 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_3^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (\sqrt{3})^2}} = 1 \Rightarrow \pi \cong 3 \cdot 1 = 3, \\
 n = 12 &\Rightarrow l_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_6^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \Rightarrow \pi \cong 6 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} \cong 3,10582854, \\
 n = 24 &\Rightarrow l_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_{12}^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \Rightarrow \pi \cong 12 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cong \\
 &\cong 3,1326286.
 \end{aligned}$$

Procedendo da mesma forma para os casos  $l_{48}$  e  $l_{96}$ , chegaríamos as aproximações  $\pi \cong 3,1393502$  e  $\pi \cong 3,1410320$ . Apesar de grandes esforços, Arquimedes encontrou apenas as duas primeiras casas decimais corretas para  $\pi$ . Anos mais tarde, utilizando este mesmo algoritmo, o holandês Ludolph Von Ceulen<sup>4</sup> (1 540-1 610) pôde encontrar as primeiras 35 primeiras casas decimais, entretanto, o número de lados necessários para este cálculo foi de  $2^{62}$ ! Este fato foi considerado tão fantástico que após seu falecimento a viúva mandou escrever em sua lápide<sup>5</sup>

$$\pi \cong 3,14159265358979323846264338327950288.$$

Levando em consideração a estratégia por Arquimedes desenvolvida, intuitivamente, podemos perceber também que para  $n$  cada vez maior, a área do polígono regular inscrito em um círculo *unitário* tende a confundir-se, cada vez mais, com a área do próprio círculo nele circunscrito, Figura 4. Em consequência, o apótema<sup>6</sup>  $a$  assumirá o papel do raio *unitário*, fazendo com que a área do círculo seja encarada por<sup>7</sup>  $A_\lambda = \frac{2\pi}{2} 1 = \pi$ .

O que aconteceria se o raio do círculo não fosse *unitário*?

Se usarmos a notação  $C_r$ , para indicar o comprimento de uma circunferência de raio  $r$ , e levando em conta que duas circunferências quaisquer são sempre semelhantes, podemos dizer que

$$\frac{C_1}{2} = \pi = \frac{C_r}{2 \cdot r}.$$

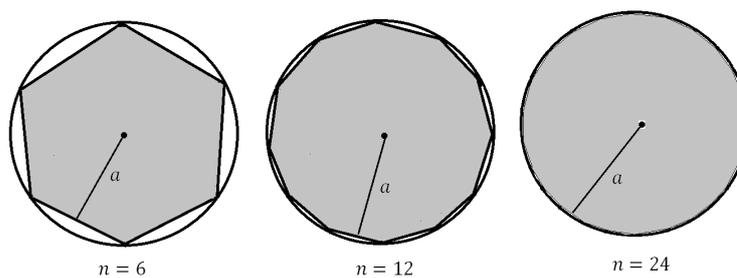
Daí, segue que  $C_r = 2\pi r$ . Assim, por analogia a última demonstração, tomando  $a = r$  segue finalmente que a área do círculo é  $A_\lambda = \frac{2\pi r}{2} r = \pi r^2$ .

<sup>4</sup> A escolha da letra grega  $\pi$ , para a definição de Arquimedes, não era usada nem por ele e nem por Ceulen. Isso apenas se solidificou quando o grande matemático Leonard Euler (1 707-1 783) passou a usá-la (IEZZI G. E DOLCE, 2007).

<sup>5</sup> Devido a modernização dos computadores já se pode encontrar aproximações para  $\pi$  com mais de cinco bilhões de casas decimais! (WAGNER, 2015)

<sup>6</sup> Segmento com uma extremidade no centro da circunferência e a outra no ponto médio do lado do polígono regular.

<sup>7</sup> Da geometria Euclidiana é sabido que em todo polígono regular a sua área é sempre calculada pelo produto do seu semiperímetro por seu apótema.

Figura 4 – Aproximação de  $\pi$ 

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em virtude da grande multiplicidade de curvas existentes, procuramos desenvolver um método geral ao qual possamos utilizá-lo em diversas ocasiões. Contudo, é bom deixar claro que todas as figuras aqui presentes estarão contidas sobre o plano cartesiano  $xOy$ , visto que as mais elementares presentes em todo ensino básico, como também algumas bem complexas do ensino superior, podem ser vistas e resolvidas sobre outro ponto de vista: o das funções. Sempre que possível, procuraremos estabelecer uma relação (seja ela funcional ou não) entre as variáveis  $x$  e  $y$  dos pontos de formação da figura em pauta. Porém, antes disto, é necessário iniciarmos nossos estudos através da ideia intuitiva de limite de uma função para que em seguida, através de um exemplo motivador, possamos desenvolver uma teoria mais abrangente envolvendo áreas.

### Atividades propostas

1. Considere dois polígonos regulares de  $n$  lados, um inscrito e o outro circunscrito a uma circunferência de raio unitário. Chamando de  $L_n$  o lado do polígono regular circunscrito,  $l_n$  e  $a_n$  o lado do polígono regular inscrito e o seu respectivo apótema, responda os itens abaixo.
  - a) Usando semelhança de triângulos, mostre que  $L_n = \frac{l_n}{a_n}$ .
  - b) Prove, usando o Teorema de Pitágoras, que  $a_n = \frac{1}{2}\sqrt{4 - l_n^2}$ .
  - c) Mostre, utilizando os itens 1a e 1b, que o perímetro  $P_n$  do polígono regular circunscrito a circunferência unitária é dado por  $P_n = \frac{2n \cdot l_n}{\sqrt{4 - l_n^2}}$ .
  - d) Determine as primeiras aproximações decimais para  $\pi$  tomando os valores de  $n$  como sendo 6, 12 e 24 na relação  $\pi \cong \frac{P_n}{2}$ .

**Sugestão:** Use uma calculadora.



# A IDÉIA INTUITIVA DE LIMITE DE UMA FUNÇÃO DE NÚMEROS REAIS

---



---

Começamos por lembrar a definição matemática de *função*: uma função entre dois conjuntos não vazios  $A$  e  $B$  é uma *lei de associação* que vincula a cada elemento de  $A$  um único elemento de  $B$ . Se denotamos a função pela letra  $f$ , a notação  $f : A \rightarrow B$  explicita que  $A$  é o *domínio* para a função  $f$ , enquanto  $B$  é seu *contradomínio*.

A *imagem* de  $f$  é o conjunto  $\text{Im}_f = \{y \in B \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$ . Já o *gráfico* de  $f$  é definido por  $G_f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$ . A simbologia  $\mid, \exists$  e  $\times$ , usada acima, significa respectivamente *tal que*, *existe*, e *produto cartesiano*. Notamos que por esta definição, o gráfico de uma função é um subconjunto de um produto cartesiano entre dois conjuntos, o que não reporta a idéia natural que temos de gráfico, qual seja, um *desenho*. Essa dificuldade é superada quando nos restringimos às *funções de variável real com valores reais*. Nesse caso os conjuntos  $A$  e  $B$  são subconjuntos de números reais, e mais tipicamente intervalos da reta  $\mathbb{R}$ . O gráfico de  $f$  ganha então o significado que usualmente atribuímos, ao menos para funções contínuas: uma curva esboçada no plano cartesiano sem que o lápis seja retirado do papel. Daqui em diante, todas as funções que tratarmos serão deste tipo.

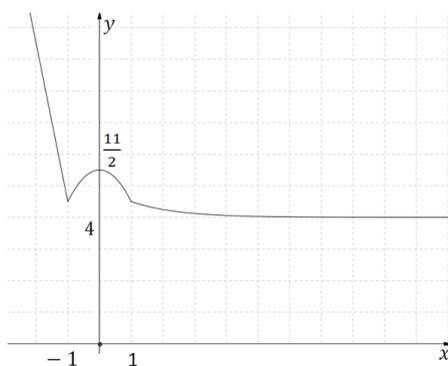
Um caso particular dessas funções merece ser destacado: são as *sequências* de números reais. Para essas o domínio é o conjunto de números naturais  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \subset \mathbb{R}$ . Se  $a$  é uma sequência, as notações  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a(n) \in \mathbb{R}$  continuam valendo, mas é mais comum usarem-se as notações  $\{a_n\}$  ou  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Uma função pode ou não ter uma regra de formação explícita, ou seja, ter sua lei de associação descrita com uma fórmula aritmética simples. Aquelas que possuem essa fórmula simples são mais fáceis de trabalhar, e muitas já foram trabalhadas durante o ensino médio. Dentre os diversos tipos, as mais familiarizadas pelos alunos são as funções reais de variáveis reais cuja lei de formação segue um dos modelos: afins, quadráticos, exponenciais trigonométricos e outros

derivados das suas respectivas inversas. Há porém tantas mais que, embora pouco apresentadas pelos currículos atuais, são de uso comum na matemática aplicada. Estamos nos referindo as regras que são expressas através da combinação de duas ou mais já existentes como, por exemplo:

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid h(x) = \begin{cases} -5x - \frac{1}{2} & x \leq -1 \\ -x^2 + \frac{11}{2} & -1 < x < 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x + 4 & x \geq 1 \end{cases} .$$

Figura 5 – Gráfico de domínio real



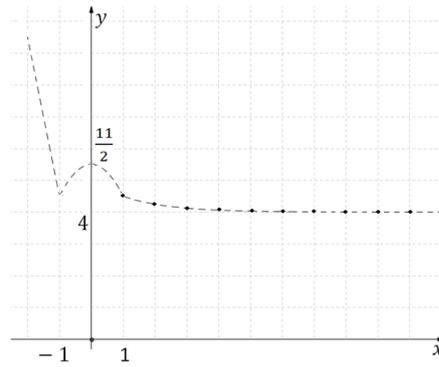
Fonte: Elaborada pelo autor.

Pela forma com que o domínio e a lei de  $h$  foram definidos, podemos esboçar sua representação gráfica de forma contínua. Mesmo apresentando este comportamento, por vezes, faz-se necessário uma restrição bem específica em seu conjunto de partida acarretando, portanto, mudanças expressivas em sua construção geométrica. Nesse contexto, mudar sua construção não significa alterar o seu caminho de percurso, mas sim, limitar as partes que serão percorridas. Assim, por exemplo, se alterássemos para  $\mathbb{N}$  o domínio de  $h$ , sua representação cartesiana seria marcada por infinitos pontos característicos que estão contidos sobre a curva primária indicada pela Figura 6.

Vale a pena frisarmos que a recíproca do exemplo acima não é verdadeira, pois os pontos provindos da sequência  $\frac{9}{2}, \frac{17}{2}, \frac{33}{2}, \frac{65}{2}, \dots$  poderão sugerir diferentes tipos de trajeteto quando o seu domínio é expandido para os reais. Dois deles poderiam ser exemplificados através das figuras 7 e 8.

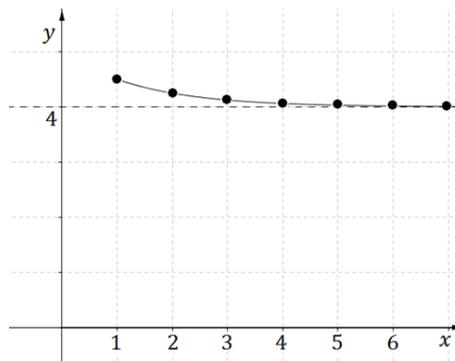
Perceba como as duas figuras sugeridas apresentam diferentes tipos de comportamentos. Na primeira, há um decrescimento previsível limitado por uma barreira intitulada "assíntota horizontal". Esta, nos afirma que as imagens da função adaptativa jamais poderá ser numericamente igual a quatro ou qualquer outro valor menor. Em contra partida, os mesmos pontos poderão sugerir também um gráfico mais sutil, elaborado por movimentos ondulatórios, cujas imagens oscilam entre 3 e 5.

Figura 6 – Gráfico de domínio natural



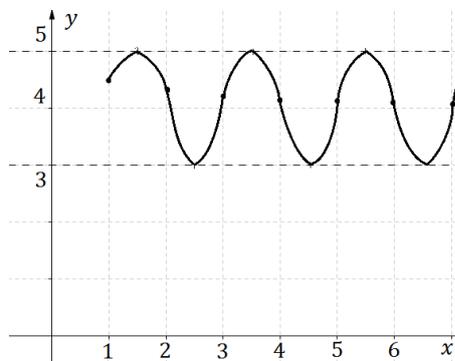
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 7 – Trajeto sugestivo 1



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 8 – Trajeto sugestivo 2



Fonte: Elaborada pelo autor.

Logo, precisamos compreender o comportamento das sequências infinitas.

## 1.1 Limites

O *limite* de uma função de números reais é um dos conceitos mais importantes já introduzidos na Matemática. Sua utilização fundamentou o início e o desenvolvimento de uma diversidade de áreas de estudo, como o Cálculo Diferencial e Integral, a Análise, a Geometria Diferencial, entre outras. A idéia do limite é considerada das mais difíceis pelos estudantes universitários dos cursos de Cálculo ou de Análise, principalmente pela sua notação e formalização, que envolve abstrações com as quais os estudantes, usualmente não utilizaram durante sua formação no ensino fundamental e médio.

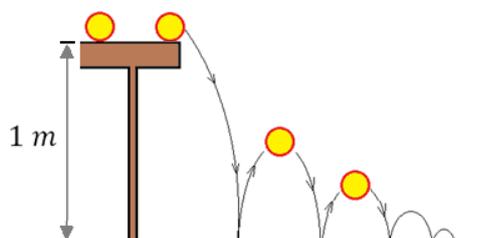
Neste trabalho não enfatizamos os elementos formais na definição dos limites. Para este fim há um grande número de livros-textos de excelente qualidade, entre os quais recomendamos (LIMA, 2016; GUIDORIZZI, 2015). Portanto nos restringimos a apresentação de alguns exemplos de limites de funções simples, com gráficos imediatos, e que são suficientes para trazer ao leitor a idéia essencial do conceito, sem o ônus das demonstrações abstratas que para o propósito deste trabalho - cálculo de áreas - iriam mais atrapalhar do que auxiliar a compreensão. Vale notar que essa abordagem *intuitiva* foi aquela adotada com sucesso por grandes matemáticos do passado, como Arquimedes, Fermat, Wallis, Barrow, Newton,...

Atualmente, a ideia intuitiva de limite é implementada no primeiro ano do ensino médio das escolas públicas do estado de São Paulo. Implicitamente, nas séries finais do ensino fundamental, surgem problemas sugestivos de sua existência. Estes, apresentam-se nas transformações de decimais periódicos para frações geratrizes. Um exemplo clássico é o tão polêmico decimal  $0,999\dots$ . Em virtude das poucas ferramentas matemáticas dispostas pelos alunos, quase sempre, o professor consegue postergar sua noção intuitiva usando, para isso, algum "truque algébrico". Por este motivo, os mesmos são retomados posteriormente sobre um ponto de vista mais técnico e abrangente. O ensino médio fornece os primeiros detalhes, mas é somente na graduação que alguns alunos poderão aprofundar-se neste tema ao estudarem as séries.

Mesmo não fazendo um estudo rigoroso sobre limites, apresentaremos exemplos sobre o assunto e, com traquejo matemático, juntamente com o apelo intuitivo de gráficos e tabelas, levantaremos as possíveis conjecturas sobre o resultado almejado em cada situação. A criatividade e também originalidade serão nossas armas principais, pois são elas que sustentam a Matemática desde o seu surgimento. Posto isso, vejamos o seguinte exemplo:

**Exemplo 1.** Uma pequena esfera de borracha encontra-se inerte sobre uma mesa de madeira que se encontra a 1 metro do solo. Entretanto, por um forte vento, a mesma começa a mover-se. A esfera ao perder contato com a madeira, atinge o solo pela primeira vez invertendo, portanto, seu sentido até atingir a metade da sua altura inicial. Este procedimento repete-se sempre nas mesmas condições, isto é, atingindo, após cada batida, a metade da altura que atingiu após a batida imediatamente anterior. A Figura 9 ilustra esta situação. Tendo em vista estas hipóteses, responda:

Figura 9 – Aplicação das séries



Fonte: Elaborada pelo autor.

Qual será a distância vertical total percorrida pela bola até parar?

### Solução

Pelas hipóteses do problema, estamos interessados na determinação da soma de  $1 + 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right)$ . Nesta, a segunda parcela contém um fator 2 multiplicativo. Este, deve-se ao fato de que cada arco de parábola, com exceção do primeiro, é obtido pela subida seguido da descida da pequena esfera.

Usamos a palavra série ao invés de soma, pois a série é uma soma, porém uma soma especial com infinitas parcelas! Portanto, ao invés de dizermos sempre que necessário "A soma das infinitas parcelas ...", simplesmente diremos "A série ..." subentendendo, de agora em diante, este fato.

Ao longo de todo o trabalho aqui desenvolvido, estaremos interessados apenas nas séries que tendem a um único número real (séries convergentes). Há porém, diversas outras em que isso não ocorre (séries divergentes). Um exemplo é a famosa série harmônica  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$  que será descrita no Exemplo 3. No caso da primeira delas, quando for o caso, determinarmos o seu valor seguindo as etapas

- (1) Transformar a série dada em uma soma parcial contendo  $n$  termos,
- (2) Encontrar (se possível) uma fórmula fechada<sup>1</sup> em  $n$  para a soma  $S_n$ ,
- (3) Analisar o que ocorre com a soma  $S_n$  a medida que  $n$  cresce,
- (4) Conjecturar a partir de (3) um único valor para  $S_n$  supondo  $n$  muito grande.

Vamos seguir o roteiro acima para a série desejada  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ . Primeiramente, devemos limitá-la nos seus  $n$  primeiros termos, ou seja,

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n}. \quad (1.1)$$

Nesta, fazamos a multiplicação de ambos os membros por  $q = \frac{1}{2}$ , visto que estamos diante de

<sup>1</sup> Fórmula fechada: Expressão algébrica desprovida das reticências "...".

uma soma geométrica. Posto isso, temos que

$$\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}. \quad (1.2)$$

Logo após, subtraímos membro à membro as equações 1.1 e 1.2. Esta, resulta em  $S_n - \frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$ , ou ainda,  $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ . Finalmente, façamos o estudo do comportamento de  $S_n$  para alguns valores crescentes de  $n$  conforme indica a tabela:

$n$	$S_n$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{7}{8}$
4	$\frac{15}{16}$
$\vdots$	$\vdots$
10	$\frac{1023}{1024}$

Pela tabela acima, é razoável conjecturarmos que a soma  $S_n$  tende a 1, visto que para valores crescentes de  $n$  a exponencial  $2^n$  também cresce, fazendo com que o quociente  $\frac{1}{2^n}$  esteja cada vez mais próximo de zero. Justifica-se, portanto, que para  $n$  muito grande,  $S_n$  estará muito próximo de 1. Uma maneira matematicamente usual de encurtarmos tal ideia é dado através da simbologia  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ , que pode ser lida como

"Limite da soma  $S_n$  quando  $n$  tende ao infinito positivo"

Em meio a situações similares, usaremos frequentemente esta notação combinado? Além disso o índice:  $n \rightarrow \infty$  ( $n$  tende ao infinito positivo), é uma forma resumida de dizermos:

Para qualquer real  $M$  que escolhermos, por maior que possa ser, sempre existirá um natural  $n$  tal que  $n > M$ .

Feito estas análises, podemos concluir que a distância vertical percorrida pela esfera de borracha foi de  $1 + 2.1 = 3$  metros.

**Exemplo 2.** Seja  $a$  um elemento do conjunto  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Prove que o decimal periódico  $a, 999\dots$  é igual ao inteiro  $a + 1$ .

*Demonstração.* Com efeito, notemos a princípio que o decimal  $a, 999\dots$  pode ser escrito sobre a forma conveniente  $a + 0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots$ , isto é,  $a + \frac{9}{10^1} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots$ , ou ainda,  $a + 9 \left( \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots \right)$ . Chamemos de  $S_n$  a soma parcial  $\frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^n}$ . Por tratar-se de uma soma geométrica cuja razão é  $q = \frac{1}{10}$ , a diferença

$$S_n - \frac{1}{10} S_n, \quad (1.3)$$

nos trás a subtração simplificada  $\frac{1}{10} - \frac{1}{10^{n+1}}$ . Isolando  $S_n$  em 1.3, deduzimos a fórmula fechada

$$S_n = \frac{1}{9} \left( 1 - \frac{1}{10^n} \right),$$

responsável pela transformação  $a + 9 \left[ \frac{1}{9} \left( 1 - \frac{1}{10^n} \right) \right] = a + 1 - \frac{1}{10^n} = a, \underbrace{999 \dots 9}_{n \text{ 9's}}$ .

Consideramos então a sequência  $b_n = a + 1 - \frac{1}{10^n}$ . Devemos mostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + 1$ . Contudo, isto equivale a provarmos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{10^n} \right) = 0$ . Este último fato decorre que:

1.  $\left\{ \frac{1}{10^n} \right\}$  é monótona decrescente e estritamente positiva,
2.  $\frac{1}{10^n}$  pode ficar *menor* que qualquer número positivo, desde que tomemos  $n$  *grande*, ou seja  $\frac{1}{10^n} \rightarrow 0$  (leia:  $\frac{1}{10^n}$  tende a zero) quando  $n \rightarrow \infty$ .

□

**Exemplo 3.** Prove que a série harmônica  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$  cresce ilimitadamente.

*Demonstração.* No século XIV, anteposto a invenção do Cálculo Diferencial e Integral, o bispo francês Nicole Oresme (1323-1382) mostrou (em notação moderna) que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right) = \infty$ . Tratando-se de uma prova elementar, porém engenhosamente bem produzida, faremos aqui uma simulação da formalização rigorosa proposta pelo francês.

Provavelmente, depois de muita experimentação por procedimentos empíricos, Oresme pôde construir as desigualdades

$$\begin{aligned} S_2 &= S_{2^1} = 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2}, \\ S_4 &= S_{2^2} = \left( 1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = S_2 + \frac{1}{2} > \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \\ S_8 &= S_{2^3} = \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + \underbrace{\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}}_{4 \text{ parcelas iguais}} > \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2}. \end{aligned}$$

Analisando minuciosamente os resultados obtidos, o próprio confrontou os expoentes dos índices de cada soma parcial com os numeradores das frações geradas. Percebeu então que estes eram dados pelos seus sucessores e que os denominadores não podiam ser outro a não ser o dobro da unidade. Nasce então a bela conjectura  $S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} > \frac{n+1}{2} = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$ .

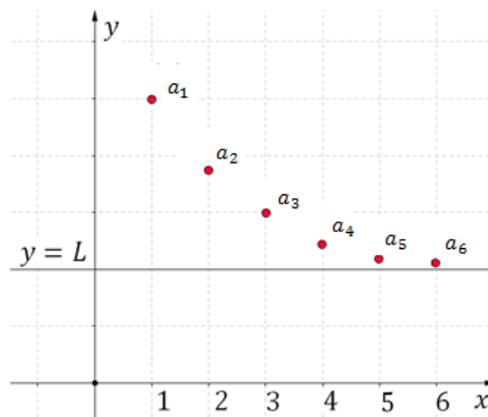
Finalmente, apurou que as imagens da sequência  $y = S_{2^n}$  são limitadas inferiormente pelas imagens correspondentes da sucessão  $a_n = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$ , cujo limite é  $\infty$  encerrando, portanto, a demonstração. □

## 1.2 Um limite fundamental

Nos capítulos posteriores o leitor irá deparar-se, por diversas vezes, com o limite da sequência  $a_n = \frac{1}{n^r}$  ( $r \in \mathbb{N}$ ), para  $n \rightarrow \infty$ . Sendo assim, é de fundamental importância que saibamos o valor limite desta sequência.

Por argumentos algébricos, podemos provar a monotonicidade estrita de  $a_n$ , bastando para isso mostrarmos que a diferença  $a_{n_2} - a_{n_1} = \frac{1}{n_2^r} - \frac{1}{n_1^r}$  sempre será negativa em todo seu domínio. Notemos que a queda sofrida por  $a_n$ , em tempo algum, deixará pontos do seu gráfico abaixo da reta  $y = 0$ , já que devido ao fechamento multiplicativo nos naturais<sup>2</sup> o quociente  $\frac{1}{n^r}$  é (estritamente) positivo. Em vista destas hipóteses conjecturamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^r}\right) = 0$ . Todavia poderá existir uma reta  $y = L > 0$  tal que  $a_n > L$ .

Figura 10 – Gráfico de  $a_n = \frac{1}{n}$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Mostremos através do próximo teorema que tal existência é impossível.

**Teorema 3.** Seja  $a_n$  uma sequência tal que  $a_n = \frac{1}{n^r}$ , com  $r \in \mathbb{N}$ .

Para toda reta de equação  $y = L > 0$ , existem infinitos valores de  $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  tais  $\frac{1}{n^r} < L$ .

*Demonstração.* Devemos exibir (ao menos) um natural  $n$  para o qual a desigualdade

$$\frac{1}{n^r} < L, \tag{1.4}$$

é satisfeita. Segue da desigualdade 1.4 que

$$\frac{1}{n^r} < L \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \sqrt[r]{L} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt[r]{L}},$$

<sup>2</sup> O fechamento multiplicativo dos naturais nos afirma que se  $A_1$  e  $A_2 \in \mathbb{N}$ , então  $A_1 \cdot A_2 \in \mathbb{N}$ . O mesmo vale para um número finito de fatores.

ou seja, se  $n > \frac{1}{\sqrt[r]{L}}$ , então  $\frac{1}{n^r} < L$ , isto é, a desigualdade é satisfeita para todo natural  $n$  tal que  $n > \frac{1}{\sqrt[r]{L}}$ .  $\square$

Analogamente provamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n^r} = 0$  para todo número inteiro  $k$ .

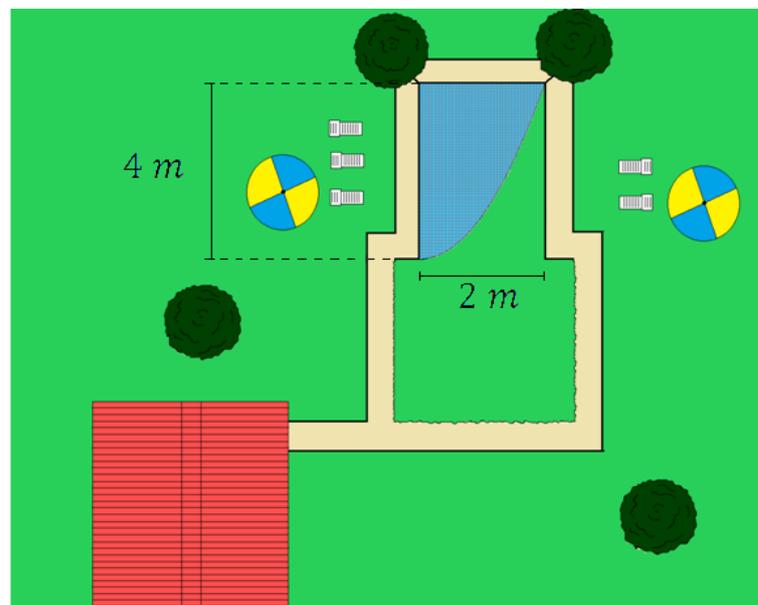


## UM EXEMPLO MOTIVADOR

Levados a motivação da determinação de áreas de regiões delimitadas por curvas, iniciemos nossos estudos através do

**Exemplo 4.** Um jovem arquiteto apreciador das obras de Oscar Niemeyer, resolveu inovar o design da sua pequena piscina retângular de seu condomínio residencial. Situada na área externa, decidiu moldá-la em uma de suas laterais segundo o modelo matemático da função  $f : \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2\} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^2$  conforme ilustra a Figura 11.

Figura 11 – Mapa do arquiteto



Fonte: Elaborada pelo autor.

Estabeleceu ainda que os ladrilhos internos deveriam ser trocados por outros mais modernos em forma de quadrado de lado medindo 10 centímetros. Sabendo que o preço da caixa contendo 7 unidades é de R\$ 32,50, determine

1. O número mínimo de caixas necessárias,
2. O capital que deverá ser investido em ladrilhos para que a condição do item 1 seja respeitada.

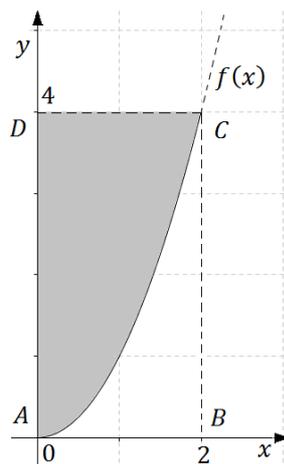
### Solução

No cotidiano dos engenheiros e também dos arquitetos, problemas como este ou similares são mais frequentes do que se imagina. Aparentemente simples, não podemos nos esquecer de que uma das laterais da piscina é descrita por um arco de parábola. Mesmo não havendo uma fórmula específica para a área de todos os tipos de curvas, aquelas delimitadas pelas funções polinomiais, trigonométricas, inversas e raízes  $n$ -ésimas podem ser encontradas utilizando, para isso, a noção intuitiva de limite e áreas geométricas elementares. Assim, vejamos como devemos proceder na resolução dos itens 1 e 2.

1. Para resolvermos este problema, faz-se por necessário determinarmos a área da piscina. Entretanto, devido a sua forma irregular caracterizada pelo arco de parábola  $f(x) = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 2$ , será primordial elaborarmos uma solução diferente daquelas discutidas no ensino básico. Para tanto, vamos utilizar o cálculo das áreas de figuras geométricas como, por exemplo, trapézio e retângulo.

Inicialmente, façamos a modelagem matemática da Figura 11 sobre o ponto de vista analítico cartesiano, isto é,

Figura 12 – Modelagem matemática



Fonte: Elaborada pelo autor.

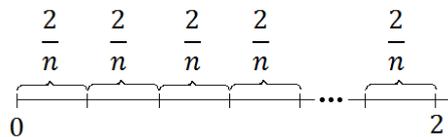
Atentos a representação acima, podemos perceber que a área pretendida é dada pela diferença entre a área do retângulo ABCD e a região delimitada pela curva com vértices em A, B e C. Apesar de ser conhecida a fórmula para a área do retângulo, o mesmo não pode ser dito a outra região envolvida. Diante deste impasse, em situações similares, podemos recorrer a seguinte estratégia:

Começamos por repartir o intervalo  $I = [0, 2]$  em um número  $n$  de partes. Apesar das múltiplas maneiras com que isso pode ser feito tomemos, por conveniência, o conjunto  $\mathcal{P}$  (pê) das repartições cujos elementos sejam os intervalos  $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$ , satisfazendo as condições

- (1)-  $I_1 \equiv I_2 \equiv I_3 \equiv \dots \equiv I_n$ ,
- (2)-  $I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap \dots \cap I_n = \emptyset$ ,
- (3)-  $I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \dots \cup I_n = I = [0, 2]$ ,

sendo que os símbolos  $\equiv$ ,  $\cap$ ,  $\cup$  e  $\emptyset$  significam respectivamente congruente, interseção, união e conjunto vazio. A simbologia utilizada acima apenas nos afirma que os  $n$  subintervalos prescritos são de mesmo comprimento, distintos dois a dois (não há números comuns em nenhum deles) e que a união de todos fornece  $I$ . Realizada esta divisão, concluímos que a medida de cada um deles é igual a  $\frac{2}{n}$  e, conseqüentemente,  $I_1 = [0, 1 \cdot \frac{2}{n}]$ ,  $I_2 = [1 \cdot \frac{2}{n}, 2 \cdot \frac{2}{n}]$ ,  $I_3 = [2 \cdot \frac{2}{n}, 3 \cdot \frac{2}{n}]$ ,  $\dots$ ,  $I_n = [(n-1) \cdot \frac{2}{n}, n \cdot \frac{2}{n}]$ .

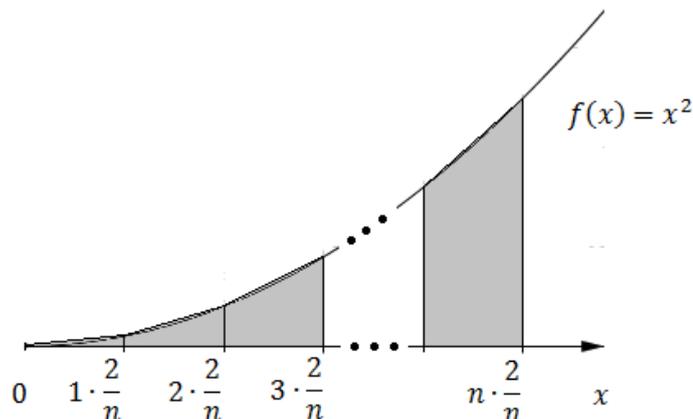
Figura 13 – Repartição intervalar



Fonte: Elaborada pelo autor.

Sobre cada intervalo de  $\mathcal{P}$ , fazamos a construção de  $n$  trapézios retângulos de tal maneira que lados oblíquos, perpendiculares as bases, sejam representados por  $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$  e, lados paralelos, sejam obtidos através das imagens de  $f$  nos pontos  $0, 1 \cdot \frac{2}{n}, 2 \cdot \frac{2}{n}, \dots, n \cdot \frac{2}{n}$ .  
Figura 14.

Figura 14 – área aproximada por trapézios



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, seja  $A_n^{x^2, [0, 2]}$  a soma das áreas de todos os  $n$  trapézios retângulos em  $I$  e, seja ainda,  $A^{x^2, [0, 2]}$  a área *exata* da região delimitada pelas curvas  $y = x^2$ ,  $y = 0$  e  $x = 2$ . Sabemos da Geometria que a área do trapézio é dada pelo produto de sua altura pela semi-soma das bases. Por estas informações, podemos afirmar que a igualdade

$$A_n^{x^2, [0, 2]} = \frac{(f(1 \cdot \frac{2}{n}) + f(0)) \frac{2}{n}}{2} + \frac{(f(2 \cdot \frac{2}{n}) + f(1 \cdot \frac{2}{n})) \frac{2}{n}}{2} + \dots + \frac{(f(n \cdot \frac{2}{n}) + f((n-1) \cdot \frac{2}{n})) \frac{2}{n}}{2}, \quad (2.1)$$

certamente será válida. Evidenciando em 2.1 o fator  $\frac{1}{n}$  e simplificando as parcelas semelhantes do fator gerado, obtemos que

$$A_n^{x^2, [0, 2]} = \frac{1}{n} \left( f(0) + 2 \left( f\left(1 \cdot \frac{2}{n}\right) + f\left(2 \cdot \frac{2}{n}\right) + \dots + f\left((n-1) \cdot \frac{2}{n}\right) \right) + f(2) \right),$$

ou ainda,

$$A_n^{x^2, [1, 2]} = \frac{1}{n} \left( \frac{8}{n^2} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2) + 4 \right). \quad (2.2)$$

Não devemos deixar de perceber que a área  $A_n^{x^2, [0, 2]}$  pode ser encarada como uma sequência  $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  em que a cada natural  $n$  associa o número real  $A_n^{x^2, [0, 2]}$ . Além disto, conforme  $n$  cresça (sem que exista um real  $M$  que não possa ser superado), sua correspondência  $A_n^{x^2, [0, 2]} = A_1^{Trapezio} + A_2^{Trapezio} + A_3^{Trapezio} \dots + A_n^{Trapezio}$  estará cada vez mais próxima da área  $A^{x^2, [0, 2]}$  almejada. Tal fato deve-se a aproximação dos vértices dos trapézios retângulos inseridos sobre a curva  $y = x^2$ . Perceba ainda que, em virtude destas hipóteses, a forma geométrica de cada trapézio retângulo estará cada vez mais próxima de um segmento de reta. A notação simbólica de limite sintetiza, de forma precisa, as informações acima, ou seja:

$$A^{x^2, [0, 2]} = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_1^{Trapezio} + A_2^{Trapezio} + \dots + A_n^{Trapezio}).$$

Será que é possível encontrarmos uma expressão matemática para a soma infinita discutida acima? Note que temos uma progressão aritmética de segunda ordem<sup>1</sup> e, por este fato, suas somas parciais são dadas pelo quociente  $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$  fazendo com que 2.2 seja dado por

$$A_n^{x^2, [0, 2]} = \frac{4}{3} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \left( 2 - \frac{1}{n} \right) + \frac{4}{n}. \quad (2.3)$$

<sup>1</sup> Para mais informações vide (MATTOS, 2017).

De acordo com as sugestões anteriores, juntamente com o Teorema 3, a área delimitada pelas curvas com vértices em  $A$ ,  $B$  e  $C$  é obtida fazendo

$$A^{x^2, [0, 2]} = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n^{x^2, [0, 2]}) = \frac{4}{3} \cdot 1 \cdot 2 + 0 = \frac{8}{3} m^2.$$

Portanto, o número mínimo de caixas necessárias é dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{7} \cdot (\text{Quantidade de ladrilhos necessarios}) &= \frac{1}{7} \cdot \left( \frac{A_{ABCD} - A_{ABC}}{A_{ladrilho}} \right) = \frac{1}{7} \cdot \left( \frac{8 - \frac{8}{3}}{\frac{1}{100}} \right) = \\ &= \frac{1}{7} \cdot \left( \frac{1600}{3} \right) = \frac{1600}{21}, \end{aligned}$$

resultando então em 77 caixas.

**Nota:** A simbologia  $A_{ladrilho}$  significa área de cada ladrilho unitário.

2. Pelas hipóteses do item 1, o valor total gasto em ladrilhos é de R\$2502,50 ( $= 32,50 \cdot 77$ ).

Problemas análogos ao acima, podem fazer uso do mesmo raciocínio como os abaixo descritos:

1. Determine a área da região delimitada pelas curvas  $y = 2x$ ,  $x = 2$ ,  $x = 3$  e  $y = 0$ .
2. Prove que a área da região delimitada pelas curvas  $y = x^2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$  e  $y = 0$  é menor do que a área delimitada por  $y = x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$  e  $x = 2$ .
3. Prove que a área da região delimitada pelas curvas  $y = x^2$ ,  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$  e  $y = 0$  é sempre dada por  $\frac{1}{2} (\beta^2 - \alpha^2)$ .



## RETÂNGULOS, UM FACILITADOR DE CÁLCULOS

No exemplo anterior, vimos que o cálculo da área delimitada pela curva  $y = x^2$ ,  $1 \leq x \leq 2$ , pôde ser feito através do limite da soma das áreas dos  $n$  de trapézios retângulos, quando  $n \rightarrow \infty$ . Entretanto, nada nos impede de utilizarmos outras figuras geométricas como, por exemplo, o retângulo ou o triângulo. Aliás, o cálculo da área do retângulo é indiscutivelmente uma das mais simples, bastando multiplicar a medida de sua base pela medida de sua altura. Por estes argumentos, de agora em diante, estaremos encontrando as áreas solicitadas através do limite da soma das áreas de  $n$  retângulos, para  $n \rightarrow \infty$ . É importante deixar claro também que, os retângulos utilizados no cálculo da área solicitada não possuem necessariamente as mesmas dimensões. Porém, a fim de facilitar os cálculos algébricos, manteremos constantes as larguras dos retângulos variando, portanto, somente sua altura. Doravante, em cada exercício, usaremos as seguintes etapas de resolução:

1<sup>a</sup>) Tomemos o intervalo fornecido  $I = [\alpha, \beta]$  do domínio de  $f : (I \subset) D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid y = f(x)$ , definido pelos pontos extremos  $B(\alpha, 0)$  e  $C(\beta, 0)$  e mostremos, por argumentos algébricos, que  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in I$ .

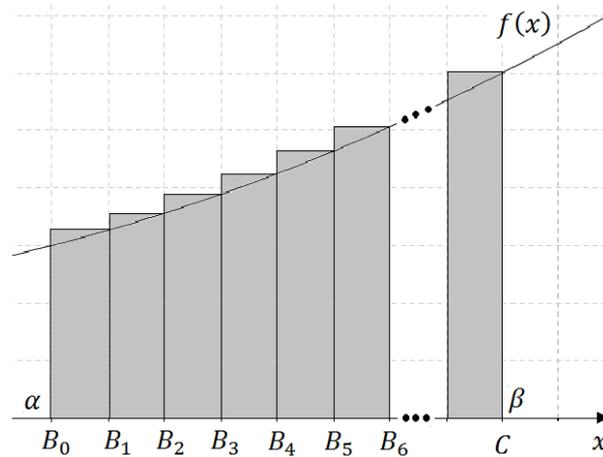
2<sup>a</sup>) Nele façamos a inserção dos pontos consecutivos e equidistantes  $B_0 = B, B_1, B_2, B_3, \dots, B_{n-1}$  e  $B_n = C$  de tal forma que os intervalos definidos por  $I_1 = [B, B_1], I_2 = (B_1, B_2], I_3 = (B_2, B_3], \dots, I_n = (B_{n-1}, C]$  satisfaçam, simultaneamente, as condições

1.  $I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \dots \cup I_{n-1} \cup I_n = I$  e
2.  $I_r \cap I_s = \emptyset, \forall r, s \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, r \neq s$ .

Justifica-se daí, que o valor absoluto da medida desses  $n$  intervalos expressa-se igualmente através da fração algébrica  $\frac{\beta - \alpha}{n}$  ( $\beta > \alpha$ ).

3ª) Procurando padronizar um critério de escolha para as  $n$  alturas de cada um dos  $n$  retângulos de bases  $B_0 B_1, B_1 B_2, \dots, B_{n-2} B_{n-1}$  e  $B_{n-1} C$  associaremos, a cada uma delas, os valores correspondentes das imagens de  $f$  para  $x$  incidindo sobre as abscissas dos pontos  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$  conforme indica a Figura 15.

Figura 15 – Área aproximada por retângulos



Fonte: Elaborada pelo autor.

4ª) Chamando de  $A_1^{Retangulo}, A_2^{Retangulo}, A_3^{Retangulo}, \dots, A_n^{Retangulo}$  as áreas dos retângulos construídos, a soma

$$A_n^{f(x), [\alpha, \beta]} = A_1^{Retangulo} + A_2^{Retangulo} + \dots + A_n^{Retangulo}, \quad (3.1)$$

estará encarregada em fornecer-nos as diversas variações aproximadas que se movem, cada vez mais, as margens da área da região delimitada pelas curvas  $x = \alpha, x = \beta, y = 0$  e  $y = f(x)$  conforme  $n$  assume valores cada vez maiores. Se utilizarmos a simbologia dos conjuntos para representarmos esta região  $\mathfrak{R}^{f(x), [\alpha, \beta]}$ , podemos defini-la da seguinte forma:

**Definição 1.**

$$\mathfrak{R}^{f(x), [\alpha, \beta]} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [\alpha, \beta] \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Por simplificação de escrita, nos referirmos a área desejada como sendo  $A^{f(x), [\alpha, \beta]} = \text{Area da região } \mathfrak{R}^{f(x), [\alpha, \beta]}$ . Esta, por sua vez, só poderá ser determinada se o limite <sup>1</sup>:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( A_n^{f(x), [\alpha, \beta]} \right),$$

existir e for finito.

<sup>1</sup> O limite de uma função existe se, e somente se, o seu valor numérico for um elemento dos reais ou um símbolo  $\pm\infty$ .

Para exemplificarmos as quatro etapas propostas neste capítulo, mostremos que a área  $A^{ABC}$  determinada no Capítulo 2 não poderá ser outra a não ser  $\frac{8}{3}$ .

De fato, note que para todo  $x \in \mathbb{R}$  a função  $f$ , definida pela lei  $f(x) = x^2$ , é positiva. Logo, também o será para  $x \in I = [0, 2]$ . Além disso, podemos tomar a mesma partição  $\mathcal{P} = \{[0, 1 \cdot \frac{2}{n}], [1 \cdot \frac{2}{n}, 2 \cdot \frac{2}{n}], \dots, [(n-1) \cdot \frac{2}{n}, n \cdot \frac{2}{n}]\}$  utilizada na resolução do capítulo anterior pois, sendo assim, estaremos obedecendo a segunda condição proposta acima. Perceba ainda que, de acordo com a condição três, as alturas de cada retângulo são obtidas pelas imagens de  $f$  quando  $x$  assume separadamente os seguintes valores  $0, 0 + 1 \cdot \frac{2}{n}, 0 + 2 \cdot \frac{2}{n}, \dots, 0 + n \cdot \frac{2}{n}$ . Mediante a tais fatos, temos que as igualdades  $A_1^{Retangulo} = \frac{2}{n} f(1 \cdot \frac{2}{n}), A_2^{Retangulo} = \frac{2}{n} f(2 \cdot \frac{2}{n}), \dots, A_n^{Retangulo} = \frac{2}{n} f(n \cdot \frac{2}{n})$ , quando substituídas a (3.1), nos conduzem a

$$A_n^{x^2, [1, 2]} = \frac{2}{n} f\left(1 \cdot \frac{2}{n}\right) + \frac{2}{n} f\left(2 \cdot \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{2}{n} f\left(n \cdot \frac{2}{n}\right),$$

ou ainda,

$$A_n^{x^2, [0, 2]} = \left(\frac{2}{n}\right)^3 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2). \quad (3.2)$$

Porém, de acordo com a identidade  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$  vista no Capítulo 2, é correto permutarmos a soma  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$  pelo quociente  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , cujas simplificações em (3.2) resultam em

$$A_n^{x^2, [0, 2]} = \frac{4}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Finalmente, ao inscrevermos  $A_n^{x^2, [0, 2]}$  no limite  $\lim_{n \rightarrow \infty}$ , deduzimos o valor pretendido, pois:

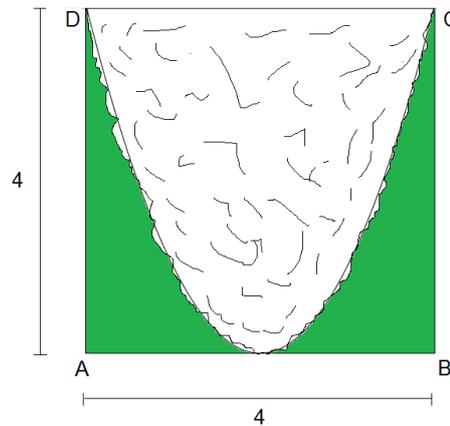
$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{x^2, [0, 2]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{4}{3} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{8}{3}.$$

**Exemplo 5.** Visando ampliar sua renda mensal, um fazendeiro decidiu cultivar a plantação da cana de açúcar em uma região plana quadrada de suas terras. Devido ao calor abusivo, parte de seu investimento transformou-se em despesa já que um incêndio acidental ocorreu pouco antes da primeira colheita. Vide Figura 16.

Supondo que a linha de contorno entre a região devastada e a preservada seja bem representada pelo gráfico da função  $f: [0, 4] \rightarrow [0, 4]$   $f(x) = (x-2)^2$  e que a escala do mapa seja  $1 : 10^5$  (ou seja, cada 1 centímetro no papel corresponde a  $10^5$  centímetros, que equivalem a 1000 metros, na realidade), determine a área incendiada.

**Solução**

Figura 16 – Plantação devastada por incêndio



Fonte: Elaborada pelo autor.

Mediante as informações apresentadas devemos calcular o valor entre a diferença da área do quadrado  $ABCD$  com a área  $A^{(x-2)^2, [0, 4]}$ , isto é,  $A^{ABCD} - A^{(x-2)^2, [0, 4]}$ . Contudo, para determinarmos  $A^{(x-2)^2, [0, 4]}$  é preciso seguirmos as 4 etapas propostas no roteiro anterior.

Com efeito, a primeira delas está satisfeita já que  $(x-2)^2 \geq 0$  para  $x \in \mathbb{R}$ . Prosseguindo, temos que cada uma das  $n$  larguras dos  $n$  retângulos são dadas pelo quociente  $(\frac{4-0}{n} =) \frac{4}{n}$ , cujas alturas obtém-se fazendo  $f(\frac{1 \cdot 4}{n}), f(\frac{2 \cdot 4}{n}), f(\frac{3 \cdot 4}{n}), \dots, f(\frac{n \cdot 4}{n})$ . Assim, estas hipóteses nos permite afirmarmos que  $A_1^{Retangulo} = \frac{4}{n} f(\frac{1 \cdot 4}{n}), A_2^{Retangulo} = \frac{4}{n} f(\frac{2 \cdot 4}{n}), \dots, A_n^{Retangulo} = \frac{4}{n} f(\frac{n \cdot 4}{n})$  gerando, portanto, a soma parcial  $A_n^{(x-2)^2, [0, 4]} = \frac{4}{n} (f(\frac{1 \cdot 4}{n}) + f(\frac{2 \cdot 4}{n}) + \dots + f(\frac{n \cdot 4}{n}))$ , isto é  $A_n^{(x-2)^2, [0, 4]} = \frac{4}{n} \left( (\frac{4}{n})^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 4n - \frac{16}{n} (1 + 2 + 3 + \dots + n) \right)$ , ou ainda,  $A_n^{(x-2)^2, [0, 4]} = \frac{32}{3} (1 + \frac{1}{n}) (2 + \frac{1}{n}) + 16 - 32 (1 + \frac{1}{n})$ . Nesta, ao circunscrevermos o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  decorrerá que  $A^{(x-2)^2, [0, 4]} = \frac{32}{3} \cdot 2 + 16 - 32 = \frac{16}{3}$  implicando, finalmente, no valor aproximado  $(16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} =) \cong 10, 67 \text{ cm}^2$ , o que fornece como área incendiada a aproximação  $10\ 670\ 000 \text{ m}^2$ .

### 3.1 Expansão do conceito de área

Procurando sintetizar de maneira equivalente as ideias propostas no início deste capítulo, veremos abaixo uma importante definição que será, por diversas vezes, utilizada nas futuras demonstrações. Diante desta necessidade, enunciamos a seguinte

**Definição 2.** Seja  $f$  uma função real de variável real tal que  $y = f(x) \geq 0$  para  $x \in I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$  com  $\alpha < \beta$ .

A área aproximada da região  $\mathfrak{R}^{f(x), [\alpha, \beta]}$ , em função de um número  $n$  de retângulos, é

dada através da **soma de Riemann**<sup>2</sup>(1826-1866):

$$A_n^{f(x),[\alpha,\beta]} = \left( \frac{\beta - \alpha}{n} \right) \left( f \left( \alpha + 1 \left( \frac{\beta - \alpha}{n} \right) \right) + \dots + f \left( \alpha + n \left( \frac{\beta - \alpha}{n} \right) \right) \right). \quad (3.3)$$

Com efeito, executando a construção de  $n$  retângulos justapostos de bases definidas pelas extremidades dos intervalos  $I_1 = \left[ \alpha, \alpha + 1 \cdot \frac{\beta - \alpha}{n} \right]$ ,  $I_2 = \left[ \alpha, \alpha + 2 \cdot \frac{\beta - \alpha}{n} \right]$ ,  $\dots$ ,  $I_n = \left[ \alpha, \alpha + n \cdot \frac{\beta - \alpha}{n} \right]$  e de alturas expressas pelas respectivas imagens correspondentes  $f \left( \alpha + 1 \cdot \frac{\beta - \alpha}{n} \right)$ ,  $f \left( \alpha + 2 \cdot \frac{\beta - \alpha}{n} \right)$ ,  $\dots$ ,  $f \left( \alpha + n \cdot \frac{\beta - \alpha}{n} \right)$ , os valores  $A_1^{Retangulo}$ ,  $A_2^{Retangulo}$ ,  $\dots$ ,  $A_n^{Retangulo}$ , são dados pelos produtos de

$$\left( \frac{\beta - \alpha}{n} \right) f \left( \alpha + 1 \cdot \frac{\beta - \alpha}{n} \right), \left( \frac{\beta - \alpha}{n} \right) f \left( \alpha + 2 \cdot \frac{\beta - \alpha}{n} \right), \dots, \left( \frac{\beta - \alpha}{n} \right) f \left( \alpha + n \cdot \frac{\beta - \alpha}{n} \right).$$

Concluí-se, através a evidenciação do fator comum  $\frac{\beta - \alpha}{n}$ , que a soma  $A_n^{f(x),[\alpha,\beta]} = A_1^{Retangulo} + A_2^{Retangulo} + \dots + A_n^{Retangulo}$  representa, na verdade, a expressão sugerida nesta definição.

**Observação:** A última fórmula demonstrada poderia ser simplificada através da notação *somatório*:

$$A_n^{f(x),[\alpha,\beta]} = \frac{\beta - \alpha}{n} \sum_{i=1}^n f \left( \alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n} \right).$$

Perceba que a fórmula 1 continua válida mesmo naqueles casos em que exista algum subintervalo  $I^*$  de  $I$  tal que  $f(x) < 0$  para todo  $x \in I^*$ . Contudo, o resultado final apresentado por ela não indica a área da região procurada e sim uma diferença entre as áreas das regiões situadas nos quadrantes 1 ou 2 com aquelas situadas no quadrantes 3 ou 4. A este valor (que pode ser positivo ou negativo) daremos o nome de *área líquida* ou *área com sinal*. De agora em diante, havendo a necessidade de calcular a área de alguma região do plano  $\mathbb{R}^2$  definida em um certo intervalo  $I$ , devemos verificar em quais subintervalos de  $I$  a função  $f$  assume valores positivos e em quais deles  $f$  assume valores negativos. Naqueles em que os sinais são negativos, devemos tomar o valor absoluto da fórmula 1 e, naqueles em que os sinais são positivos devemos simplesmente aplicá-la. A área procurada será obtida pela soma de cada um dos valores encontrados.

**Exemplo 6.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \text{sen}x$ . Sem calcular a área, determine uma soma mediante a aplicação da fórmula 1 para  $A^{\text{sen}x,[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]}$ .

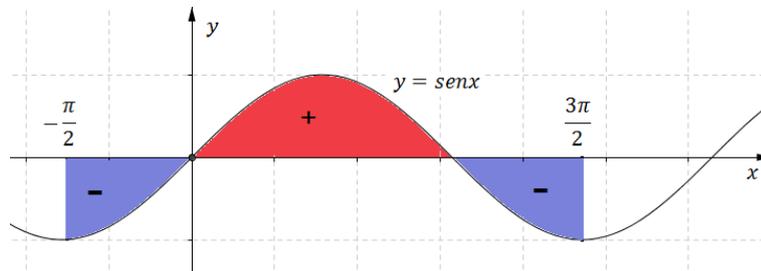
### Solução

Com efeito, temos que os intervalos  $I_1 = [-\frac{\pi}{2}, 0] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}]$  e  $I_2 = [0, \pi]$  estão contidos em  $\mathbb{R}$ . Além disso, comprova-se que as implicações  $x \in I_1 \Rightarrow \text{sen}x < 0$  e  $x \in I_2 \Rightarrow \text{sen}x > 0$  são verdadeiras. Verifique tal fato analisando a Figura 17. Desta maneira, devemos ter que

<sup>2</sup> A soma representada pela definição 2 é um caso particular de uma soma de Riemann. Para melhores informações vide (GUIDORIZZI, 2015)

$$A^{\text{sen}x, [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]} = \left| A^{\text{sen}x, [-\frac{\pi}{2}, 0]} \right| + A^{\text{sen}x, [0, \pi]} + \left| A^{\text{sen}x, [\pi, \frac{3\pi}{2}]} \right|.$$

Figura 17 – Área líquida

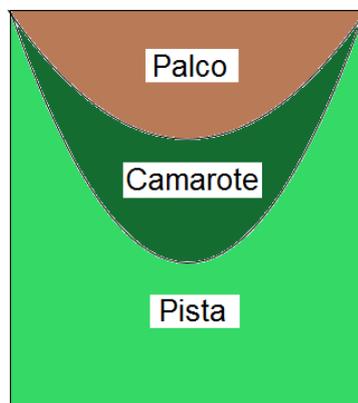


Fonte: Elaborada pelo autor.

Feito estas observações, vamos a um exemplo de aplicação da Definição 2.

**Exemplo 7.** Visando promover um grande encontro musical da banda Calmat, os organizadores desenvolveram uma grande área destinada ao camarote, conforme ilustra a Figura 18:

Figura 18 – Área contendo o camarote



Fonte: Elaborada pelo autor.

Sabendo que a região que delimita o camarote está compreendida entre as curvas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\frac{1}{2}g(x) = x^2 + 1$  e que a relação de comparação entre a figura e a realidade segue a escala 1 : 10000, determine a quantidade máxima de pessoas presentes no camarote, visto que cada uma delas ocupará uma área de aproximadamente  $1 \text{ m}^2$ .

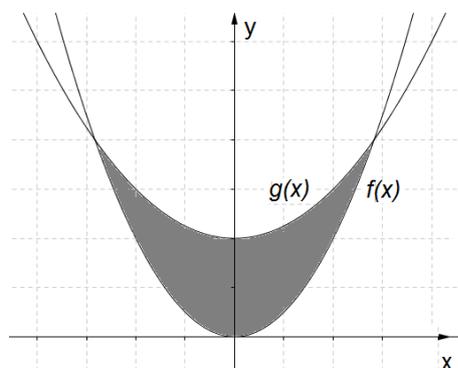
**Sugestão:** Use aproximação  $\sqrt{2} \cong 1,41$ .

### Solução

Inicialmente, façamos a modelagem matemática do problema através da representação geométrica dada pela Figura 19. Nela, podemos constatar que as abscissas dos pontos de interseção são encontradas fazendo  $x^2 = \frac{1}{2}x^2 + 1$  gerando, portanto, os valores  $x = -\sqrt{2}$  ou  $x = \sqrt{2}$ . Por

estas informações, devemos encontrar a diferença entre as áreas  $A^{\frac{1}{2}x^2+1, [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]} - A^{x^2, [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]}$ . Esta, por sua vez, pode ainda ser calculada através do produto  $2 \cdot \left( A^{\frac{1}{2}x^2+1, [0, \sqrt{2}]} - A^{x^2, [0, \sqrt{2}]} \right)$  (perceba a simetria geométrica existente). Contudo, pela Definição 2, temos que

Figura 19 – Camarote: Ponto de vista matemático



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\begin{aligned} A^{\frac{1}{2}x^2+1, [0, \sqrt{2}]} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{\sqrt{2}-0}{n} \right) \sum_{i=1}^n f \left( 0 + i \left( \frac{\sqrt{2}-0}{n} \right) \right) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\sqrt{2}}{n} \right)^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \right) + n \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{2}}{6} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \left( 2 + \frac{1}{n} \right) + \sqrt{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Analogamente, podemos constatar que  $A^{x^2, [0, \sqrt{2}]} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ , fazendo com que o produto procurado seja expresso pelo decimal  $1,88 \text{ cm}^2$  cuja conversão, para metros quadrados, nos fornece  $18800 \text{ m}^2$ .

Portanto, a quantidade máxima de pessoas que poderão frequentar o camarote neste dia é de 18800.

### Atividades propostas

1. Usando o método de construção de retângulos para a determinação de áreas, refaça os exercícios do Capítulo 2.
2. Construa o gráfico da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = 2x + 5$ . Em seguida, determine  $A^{2x+5, [1, 2]}$ .
3. Construa o gráfico da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = x^2 + 5x + 6$  e, em seguida, determine  $A^{x^2+5x+6, [-3, -2]}$ .

4. Usando a Definição 2, juntamente com o fato da série harmônica  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$  crescer ilimitadamente, prove que  $A_{\frac{1}{x}, [0, 1]} = +\infty$ .
5. Encontre<sup>3</sup>  $A_{x^{\frac{1}{2}}, [1, 2]}$ .

**Sugestão:** Escolha cada uma das  $n$  alturas dos  $n$  retângulos como sendo as imagens das médias geométricas das abscissas das extremidades de suas bases. Use a identidade:

$$\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}.$$

<sup>3</sup> Exercício adaptado de (STEWART, 2016)

## DEMONSTRAÇÃO POR INDUÇÃO

Enunciaremos, logo abaixo, três princípios que são utilizados para demonstrar a validade de diversos tipos de *sentenças abertas*<sup>1</sup> nos naturais  $\mathbb{N}$ . Estas, após serem comprovadas, servirão como ferramentas essenciais nas demonstrações das fórmulas dos diversos tipos de áreas dos demais capítulos. Demonstraremos ainda a equivalência existente entre tais princípios e, finalmente, veremos algumas de suas aplicações.

Seja  $X$  um conjunto cujos elementos são os números naturais  $n$  que tornam a sentença aberta  $P(n)$  verdadeira, isto é,  $X = \{n \in \mathbb{N}, P(n) \text{ é verdadeira}\}$ .

Nestas condições, *enunciamos*:

**PBO (Princípio da boa ordenação):** Todo subconjunto não vazio dos naturais possui um menor elemento.

**PIF (Princípio da indução finita):** Verifique se  $1 \in X$ . Caso a implicação  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$  seja verdadeira, tem-se que  $X = \mathbb{N}$ .

**PIC (Princípio da indução completa):** Apure se  $1 \in X$ . Caso a implicação  $(P(i) \text{ é verdadeira para todo } i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}) \Rightarrow P(n+1)$  seja verdadeira, tem-se que  $X = \mathbb{N}$ .

**Teorema 4.** Os princípios PBO, PIF e PIC são equivalentes, ou seja,  $PBO \Leftrightarrow PIF \Leftrightarrow PIC$ .

*Demonstração.* Para provarmos as equivalências existentes entre os três princípios, devemos mostrar, de forma separada, as implicações:  $PBO \Rightarrow PIF$ ,  $PIF \Rightarrow PIC$  e  $PIC \Rightarrow PBO$ .

$(PBO \Rightarrow PIF)$ : Vamos supor, por absurdo, que  $X \neq \mathbb{N}$ . Seja  $Y$  o complemento de  $X$  em relação aos naturais  $\mathbb{N}$  definido por  $Y = \mathbb{N} - X$ . Podemos afirmar que  $Y \neq \emptyset$  já que, por hipótese,  $X \neq \mathbb{N}$ . Tome  $a \in Y$  seu menor elemento, o que é assegurado pelo PBO. Então  $a$  é maior do que 1 pois,  $1 \in X$ . Daí, inferimos que os elementos  $1, 2, 3, \dots, a-2$  e  $a-1$  pertencem ao conjunto

<sup>1</sup> Estamos supondo que o leitor já esteja familiarizado com o significado matemático de *sentenças abertas*. Caso haja necessidade, indicamos (FILHO, 2015)

$X$ . Contudo, devido a sentença  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ , é correto afirmarmos que se  $a-1 \in X$ , então o seu sucessor  $a = (a-1) + 1$  também pertencerá. Para evitar a contradição de  $a \in X$  e  $a \notin X$ , temos que o conjunto  $X$  contém todos os números naturais ( $X = \mathbb{N}$ ).

(*PIF*  $\Rightarrow$  *PIC*): Devemos provar que  $X = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ . Por hipótese, o conjunto  $X$  não poderá ser vazio visto que  $P(1)$  é uma sentença verdadeira. Sabemos também, que os elementos  $1, 2, 3, \dots, n-1$  e  $n$  satisfazem  $P(i)$ , ou seja, as proposições  $P(1), P(2), P(3), \dots, P(n-1)$  e  $P(n)$  são verdadeiras implicando, portanto, na expansão de  $X = \{1\}$  para  $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Tal fato, quando articulado a validade condicional  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$  é que nos permite dizermos que  $n+1 \in X$ . Sobre estas condições, não restará dúvidas de que  $X = \mathbb{N}$ .

(*PIC*  $\Rightarrow$  *PBO*): Precisamos demonstrar que o conjunto  $X (\neq \emptyset)$  possui um elemento mínimo. Vamos supor, por absurdo, que  $X$  não possua tal elemento. Tomemos  $Y$  como sendo o complemento de  $X$ , ou seja,  $Y = \mathbb{N} - X = \{n \in \mathbb{N}, P(n) \text{ e falsa}\}$ . Notemos que  $1 \in Y$  pois, caso contrário, teríamos a pertinência contraditória  $1 \in X$ . Da mesma forma, procurando evitar situações similares, podemos afirmar que os elementos  $2, 3, \dots, n-1$  e  $n$  também fazem parte de  $Y$ , isto é,  $Y = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Por satisfazer as hipóteses da indução completa, inferimos que  $n+1 \in Y$  acarretando a contradição  $X = \emptyset$  e  $X \neq \emptyset$ .  $\square$

Compreendido estas demonstrações, vejamos algumas de suas aplicações.

**Exemplo 8.** Prove que  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  é válida para todo natural  $n \geq 1$ .

*Demonstração.* Seja  $X$  o conjunto formado pelos naturais  $n$  que tornam a sentença aberta  $P(n) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  verdadeira, isto é,  $X = \{n \in \mathbb{N} | P(n) \text{ verdadeira}\}$ . Mostremos, pelo princípio da indução finita, que  $X = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$ .

1. Repare que  $1 \in X$ , pois  $P(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ .
2. Devemos provar que se  $P(n) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  é válida para algum natural  $n$ , então também o será para o seu sucessor, ou seja,  $P(n+1) : 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ .

De fato, a soma  $S_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1)$  permanece inalterada quando associada convenientemente sob a forma

$$S_{n+1} = (1 + 2 + 3 + \dots + n) + (n+1). \quad (4.1)$$

Por hipótese, perceba que a fração algébrica  $\frac{n(n+1)}{2}$  cumpre o mesmo significado matemático da soma parcial  $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$  presente em (4.1). Justifica-se então, a igualdade

$$(1 + 2 + 3 + \dots + n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$

Observa-se porém, que o quociente procurado  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$  provêm da evidenciação dos fatores comuns  $\frac{1}{2}$  e  $n+1$  em  $\frac{(n+1)(n+2)}{2} + (n+1)$  encerrando, portanto, a demonstração. □

**Exemplo 9.** Prove a variação do princípio da indução finita cujo enunciado é dado por:

Sejam  $a \in \mathbb{N}$  e  $P(n)$  uma sentença aberta que define o conjunto  $X = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ e verdadeira}\}$ . Suponha que:

(i)  $P(a)$  é verdadeira, e que;

(ii) a implicação  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$  seja verdadeira para todo  $n \geq a$ ,

então  $X$  conterá o conjunto  $\{a, a+1, a+2, \dots\}$ .

*Demonstração.* De fato, suponha que  $Y = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ falsa}, n \geq a\} \neq \emptyset$ . Contudo, pelo princípio da boa ordenação, é correto afirmarmos existe (pelo menos) um natural  $b (> a)$  tal que  $b \in Y$ . Sendo assim, devemos ter que os elementos  $a+1, a+2, a+3, \dots, b-2$  e  $b-1$  pertencem a  $X$ . De acordo com a implicação:  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ , o sucessor de  $b-1$  deverá estar presente no conjunto  $X$ , isto é,  $b \in X$ . Então para evitar a contradição deve-se ter  $Y = \emptyset$ . □

**Exemplo 10.** Prove a validade da sentença:

$$\sum_{i=1}^n \text{sen}(x+i r) = \frac{\cos(x-\frac{r}{2}) - \cos(x+n r + \frac{r}{2})}{2 \text{sen}\frac{r}{2}},$$

para todo natural  $n \geq 0$ , onde  $r \neq 2 k \pi$  para  $k$  inteiro.

*Demonstração.* Seja  $X$  o conjunto formado pelos naturais que tornam a sentença aberta  $P(n) : \text{sen}(x) + \text{sen}(x+r) + \text{sen}(x+2r) + \dots + \text{sen}(x+n r) = \frac{\cos(x-\frac{r}{2}) - \cos(x+n r + \frac{r}{2})}{2 \text{sen}(\frac{r}{2})}$  verdadeira. Mostremos, pela variação do princípio de indução finita, que  $X = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

- De fato,  $P(n)$  é satisfeita para  $n=0$  pois, pela fórmula de prostaférese  $\cos A - \cos B = -2 \text{sen}(\frac{A+B}{2}) \text{sen}(\frac{A-B}{2})$ , decorre que

$$\begin{aligned} P(0) : \frac{\overbrace{\cos(x-\frac{r}{2}) - \cos(x+\frac{r}{2})}^{\text{Prostaferese}}}{2 \text{sen}\frac{r}{2}} &= \frac{-2 \text{sen}\left(\frac{(x-\frac{r}{2})+(x+\frac{r}{2})}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{(x-\frac{r}{2})-(x+\frac{r}{2})}{2}\right)}{2 \text{sen}\frac{r}{2}} = \\ &= \frac{\text{sen}(x) \overbrace{\text{sen}\left(\frac{-r}{2}\right)}^{\text{Funcao impar}}}{\text{sen}\frac{r}{2}} = \text{sen}(x). \end{aligned}$$

2. Devemos provar que se  $P(n)$  é satisfeita para algum natural  $n$ , então também o será para o seu sucessor  $n + 1$ , ou seja,  $P(n + 1) : \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x + 1 r) + \operatorname{sen}(x + 2 r) + \cdots + \operatorname{sen}(x + (n + 1) r) = \frac{\cos(x - \frac{r}{2}) - \cos(x + (n + 1) r + \frac{r}{2})}{2 \operatorname{sen}(\frac{r}{2})}$ .

Com efeito, podemos escrever a soma  $\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(x + 1 r) + \operatorname{sen}(x + 2 r) + \cdots + \operatorname{sen}(x + n r) + \operatorname{sen}(x + (n + 1) r)$  sobre a forma conveniente

$$(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x + 1 r) + \operatorname{sen}(x + 2 r) + \cdots + \operatorname{sen}(x + n r)] + \operatorname{sen}(x + (n + 1) r),$$

pois, sendo assim, segundo a hipótese acima poderemos permutá-la por

$$\frac{\cos(x - \frac{r}{2}) - \cos(x + n r + \frac{r}{2})}{2 \operatorname{sen}(\frac{r}{2})} + \operatorname{sen}(x + (n + 1) r). \quad (4.2)$$

Nesta, a parcela  $\operatorname{sen}(x + (n + 1) r)$  pode ser expressa pela fração algébrica  $\frac{2 \operatorname{sen}(x + (n + 1) r) \operatorname{sen}(\frac{r}{2})}{2 \operatorname{sen}(\frac{r}{2})}$  que, por sua vez (segundo a fórmula de reversão trigonométrica  $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = -\frac{1}{2} (\cos(A + B) - \cos(A - B))$ ), passa a ser escrita como  $\frac{\cos(x + n r + \frac{r}{2}) - \cos(x + (n + 1) r + \frac{r}{2})}{2 \operatorname{sen}(\frac{r}{2})}$ , cuja substituição em (4.2) nos conduz a igualdade desejada.

Pelo princípio da indução finita,  $X = \mathbb{N}$ .

□

**Nota:** O quociente encontrado  $\frac{\cos(x - \frac{r}{2}) - \cos(x + n r + \frac{r}{2})}{2 \operatorname{sen}(\frac{r}{2})}$  também poderá ser indicado sob a forma  $\frac{\operatorname{sen}(\frac{2x + nr}{2}) \operatorname{sen}((n + 1)\frac{r}{2})}{\operatorname{sen}(\frac{r}{2})}$  bastando, para isso, recorrermos as fórmulas  $\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen}(\frac{p + q}{2}) \operatorname{sen}(\frac{p - q}{2})$  e  $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen} \theta$ , pois

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x - \frac{r}{2}) - \cos(x + n r + \frac{r}{2})}{2 \operatorname{sen}(\frac{r}{2})} &= \frac{-2 \operatorname{sen}\left(\frac{(x - \frac{r}{2}) + (x + n r + \frac{r}{2})}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(x - \frac{r}{2}) - (x + n r + \frac{r}{2})}{2}\right)}{2 \operatorname{sen}(\frac{r}{2})} = \\ &= \frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{2x + nr}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{-r - nr}{2}\right)}{\operatorname{sen}(\frac{r}{2})} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2x + nr}{2}\right) \operatorname{sen}\left((n + 1)\frac{r}{2}\right)}{\operatorname{sen}(\frac{r}{2})}. \end{aligned}$$

### Atividades propostas

1. Prove a validade da sentença aberta:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6},$$

para todo natural  $n \geq 1$ .

2. Prove, por indução em  $n \geq 1$ , a validade das seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i. \\ \text{b)} \quad & \sum_{i=1}^n k a_i = k \sum_{i=1}^n a_i. \\ \text{c)} \quad & \sum_{i=1}^n k = k n. \end{aligned}$$

3. Prove a validade da sentença aberta:

$$\cos(1x) + \cos(2x) + \cos(3x) + \dots + \cos(nx) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2},$$

para todo natural  $n \geq 1$ .

4. Mostre, pelo princípio da indução finita, que em toda progressão geométrica a soma dos seus primeiros  $n$  termos é dada por  $\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ , onde  $a_1$  é o primeiro termo e  $q \neq 1$  é a razão da progressão. Em seguida aplique esta fórmula para comprovar que:

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + x^1y^{n-2} + y^{n-1}),$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$  e  $y \in \mathbb{R}$ .

5. Prove por indução em  $n$  que dado  $p$  natural maior do que ou igual a 1, existe um polinômio  $g$  de grau  $p + 1$ , dependendo apenas de  $p$ , tal que:

$$1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p = g(n).$$

**Observação:** A resolução deste exercício pode ser encontrada em (MATTOS, 2017)

6. Considere  $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$  e  $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ ,  $n \geq p$ . Prove, por indução, que a igualdade:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{n-1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n,$$

é válida para todo  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$  com  $x$  e  $y \in \mathbb{R}$ .



## CÁLCULO DE ÁREAS DELIMITADAS POR GRÁFICOS POLINOMIAIS

Neste capítulo, desenvolveremos um método que nos permitirá encontrar as mais variadas áreas delimitadas por curvas como  $y = 0$ ,  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$  e  $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$ , onde  $a_i$ , para  $1 \leq i \in \mathbb{N} \leq n$ , é um valor real sendo que  $a_n \neq 0$ . Em vista do arduo trabalho algébrico que a Definição 2 nos traz, vamos estudar outras estratégias de resolução do problema.

Fermat (1 601 – 1 665) e Pascal (1 623 – 1 662), em estudos independentes, apresentaram duas belas e distintas maneiras de se construir a fórmula  $\frac{1}{n+1} \alpha^{n+1}$  associada a área  $A^{x^n}, [0, \alpha]$  com  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Daí, não deve ter sido difícil perceber que para  $0 < \alpha < \beta$  a diferença  $A^{x^n}, [0, \beta] - A^{x^n}, [0, \alpha]$  só poderia tratar-se de  $A^{x^n}, [\alpha, \beta]$ . Embora a potência  $x^i$ ,  $1 \leq i \in \mathbb{N} \leq n$ , seja apenas um fator das  $n$  últimas parcelas do polinômio  $P$ , mostraremos mais adiante que  $A^P, [\alpha, \beta]$  poderá ser determinado em função dos coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  e também das áreas  $A^{a_0}, [\alpha, \beta], A^{x^1}, [\alpha, \beta], \dots, A^{x^n}, [\alpha, \beta]$  pela relação  $\frac{a_n}{n+1} (\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}) + \frac{a_{n-1}}{n} (\beta^n - \alpha^n) + \dots + \frac{a_1}{2} (\beta^2 - \alpha^2) + a_0 (\beta - \alpha)$ .

Consoante as informações do último parágrafo, já sabemos que existe uma regra para a determinação de  $A^{x^n}, [\alpha, \beta]$ . Por outro lado, motivados pela descoberta, iremos conjecturá-la através da experimentação dos primeiros casos  $A^x, [\alpha, \beta]$  e  $A^{x^2}, [\alpha, \beta]$  para que, logo após, sejamos capazes de demonstrá-la como um teorema. Em consequência, será possível obtermos uma fórmula para  $A^{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0}, [\alpha, \beta]$ .

### Aplicação 1

Se  $f$  uma função real de variável real tal que  $f(x) = x \geq 0$ , então  $A^x, [\alpha, \beta] = \frac{1}{2} (\beta^2 - \alpha^2)$ .

*Demonstração.* Inicialmente, notemos que a imagem de  $f$  para os pontos da forma  $x = \alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n}$ ,  $0 \leq i \leq n$ , é numericamente igual a este mesmo valor. Inscrevendo-o sob o símbolo  $\sum_{i=1}^n$ , podemos

aplicar as propriedades vistas no Capítulo 4 justificando, portanto, as igualdades

$$\sum_{i=1}^n \left( \alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n} \right) = \sum_{i=1}^n \alpha + \sum_{i=1}^n \frac{\beta - \alpha}{n} i = n \alpha + \frac{\beta - \alpha}{n} \sum_{i=1}^n i. \quad (5.1)$$

Em consequência da identidade  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ , é possível expressar (5.1) através da soma

$$n \alpha + \frac{1}{2} (\beta - \alpha) (n + 1),$$

ou ainda, como o produto:

$$n \left( \alpha + \frac{1}{2} (\beta - \alpha) \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right).$$

Nestas circunstâncias, pela Definição 2, não restará dúvidas de que

$$\begin{aligned} A_n^{x, [\alpha, \beta]} &= \alpha (\beta - \alpha) + \frac{1}{2} (\beta - \alpha)^2 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \\ &= (\beta - \alpha) \left( \alpha + \frac{1}{2} (\beta - \alpha) \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right). \end{aligned}$$

Daí, concluímos que a área pretendida é

$$\begin{aligned} A^{x, [\alpha, \beta]} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( A_n^{x, (\alpha, \beta)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (\beta - \alpha) \alpha + \frac{1}{2} (\beta - \alpha) \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \\ &= (\beta - \alpha) \left( \alpha + \frac{1}{2} (\beta - \alpha) \right) = \frac{1}{2} (\beta - \alpha) (\beta + \alpha) = \frac{1}{2} (\beta^2 - \alpha^2), \end{aligned}$$

que é o que queríamos demonstrar. □

**Exemplo 11.** Determine  $A^{x, [1, 4]}$ .

### Solução

Antes da aplicação do fato anterior, é preciso constatar se  $f$  é positiva para todo  $x \in [1, 4]$ . Neste caso, não resta dúvidas que sim, visto que a implicação  $1 \leq x \leq 4 \Rightarrow 0 < 1 \leq x = f(x) \leq 4$  certamente é verdadeira. Assim, pela fórmula deduzida anteriormente, inferimos que

$$A^{x, [1, 4]} = \frac{1}{2} (4^2 - 1^2) = \frac{1}{2} \cdot 15 = 7,5.$$

Logo, a área pedida é 7,5 unidades de área.

### Aplicação 2

Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = x^2$ , então  $A^{x^2, [\alpha, \beta]} = \frac{1}{3} (\beta^3 - \alpha^3)$ .

*Demonstração.* Começamos por encontrar a imagem de  $f$  associada a variável  $x = \alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n}$ . Esta, será obtida com o auxílio da identidade  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$  considerando  $A = \alpha$  e  $B = \frac{\beta - \alpha}{n} i$ . Sendo assim, deduzimos que

$$f\left(\alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n}\right) = \left(\alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n}\right)^2 = \alpha^2 + \left(2\alpha \frac{\beta - \alpha}{n}\right) i + \left(\frac{\beta - \alpha}{n}\right)^2 i^2.$$

Nesta, ao circunscrevermos a notação  $\sum$  será possível, por meio das propriedades vistas no Capítulo 4, transcrevê-la como

$$\alpha^2 n + 2\alpha \left(\frac{\beta - \alpha}{n}\right) \sum_{i=1}^n i + \left(\frac{\beta - \alpha}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^n i^2. \quad (5.2)$$

Conforme sabido, as adições  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  e  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$  podem ser representadas pelas respectivas frações algébricas correspondentes  $\frac{n(n+1)}{2}$  e  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  acarretando, portanto, que

$$\sum_{i=1}^n f\left(\alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n}\right) = \alpha^2 n + \alpha (\beta - \alpha) (n+1) + \frac{1}{6} (\beta - \alpha)^2 (n+1) \left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Observa-se então, que o produto  $\left(\frac{\beta - \alpha}{n}\right) \sum_{i=1}^n f\left(\alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n}\right)$  é uma abreviação da escrita  $(\beta - \alpha) \left(\alpha^2 + \alpha (\beta - \alpha) \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6} (\beta - \alpha)^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)\right)$  e, sendo assim, temos que

$$\begin{aligned} A^{x^2, [\alpha, \beta]} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(A_n^{x^2, (\alpha, \beta)}\right) = (\beta - \alpha) \left(\alpha^2 + \alpha (\beta - \alpha) + \frac{(\beta - \alpha)^2}{3}\right) = \\ &= \frac{1}{3} (\beta - \alpha) (\alpha^2 + \alpha \beta + \beta^2) = \frac{1}{3} (\beta^3 - \alpha^3). \end{aligned}$$

□

**Exemplo 12.** Determine  $A^{x^2, [-2, 0]}$ .

### Solução

De fato, pela aplicação anterior, segue de imediato que

$$A^{x^2[-2, 0]} = \frac{1}{3} (0^3 - (-2)^3) = \frac{8}{3}.$$

Logo, a área solicitada é  $\frac{8}{3}$  unidades de área.

## 5.1 Conjeturando e provando uma fórmula geral para a área polinomial

Vimos anteriormente, que as áreas  $A^{k, [\alpha, \beta]}$ ,  $A^{x^1, [\alpha, \beta]}$  e  $A^{x^2, [\alpha, \beta]}$  são dadas respectivamente por  $k(\beta - \alpha)$  (problema 1.4.),  $\frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2)$  e  $\frac{1}{3}(\beta^3 - \alpha^3)$ . Assim, somos levados a crer que se expandíssemos o cálculo de áreas para a função real de variável real  $f(x) = x^n$  teríamos que

$$A^{x^n, [\alpha, \beta]} = \frac{1}{n+1} (\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}).$$

Desta forma, provemos utilizando a identidade de Pascal, que tal conjectura trata-se, na verdade, de um teorema.

**Teorema 5 (Identidade de Pascal).** Para todo  $n$  e  $k$  naturais não nulos, tem-se que

$$(n+1)^{k+1} = \binom{k+1}{1} S_k + \binom{k+1}{2} S_{k-1} + \dots + \binom{k+1}{k} S_1 + (n+1), \quad (5.3)$$

onde  $S_i$  é dado pela soma  $1^i + 2^i + 3^i + \dots + n^i$  tal que  $1 \leq i \in \mathbb{N} \leq k+1$ ,

*Demonstração.* Sabemos, pelo binômio de Newton, que

$$(x+1)^{k+1} = \binom{k+1}{0} x^{k+1} + \binom{k+1}{1} x^k + \dots + \binom{k+1}{k} x + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nesta, se fizermos a substituição de  $x$  pelos naturais  $1, 2, 3, \dots, n-1$  e  $n$  e, logo após, adicionarmos cada uma das  $n$  linhas em  $k+3$  pacotes retangulares sobrepostos nas respectivas colunas obtidas teremos

Figura 20 – Somando por colunas

$$\begin{array}{l}
 (1+1)^{k+1} = \binom{k+1}{0} \cdot 1^{k+1} + \binom{k+1}{1} \cdot 1^k + \dots + \binom{k+1}{k} \cdot 1 + 1 \\
 (2+1)^{k+1} = \binom{k+1}{0} \cdot 2^{k+1} + \binom{k+1}{1} \cdot 2^k + \dots + \binom{k+1}{k} \cdot 2 + 1 \\
 (3+1)^{k+1} = \binom{k+1}{0} \cdot 3^{k+1} + \binom{k+1}{1} \cdot 3^k + \dots + \binom{k+1}{k} \cdot 3 + 1 \\
 \vdots \\
 (n+1)^{k+1} = \binom{k+1}{0} \cdot n^{k+1} + \binom{k+1}{1} \cdot n^k + \dots + \binom{k+1}{k} \cdot n + 1
 \end{array}$$

+

---

Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\begin{aligned}
& 2^{k+1} + 3^{k+1} + 4^{k+1} + \dots + n^{k+1} + (n+1)^{k+1} = \\
& \binom{k+1}{0} \overbrace{(1^{k+1} + 2^{k+1} + 3^{k+1} + \dots + n^{k+1})}^{S_{k+1}} + \binom{k+1}{1} \overbrace{(1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k)}^{S_k} + \dots + \\
& + \binom{k+1}{k} \overbrace{(1 + 2 + 3 + \dots + n)}^{S_1} + \overbrace{(1 + 1 + 1 + \dots + 1)}^{n \text{ somas iguais a } 1}.
\end{aligned}$$

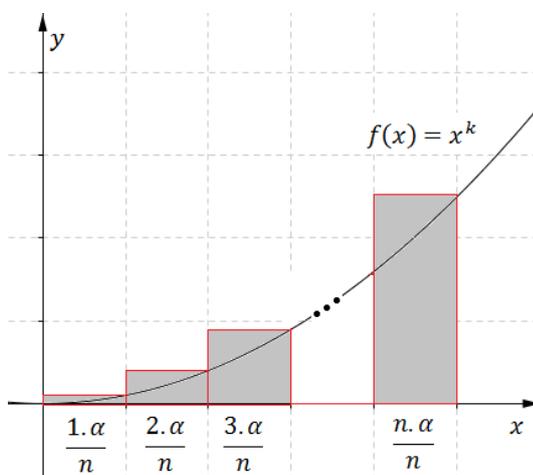
Efetuada as simplificações das parcelas comuns  $2^{k+1}, 3^{k+1}, \dots, n^{k+1}$  distribuídas em ambos os membros da igualdade acima, encontramos uma nova igualdade cuja ordenação de seus termos nos leva a equação (5.3).

□

**Teorema 6 (Pascal).** Se  $f$  uma função real de variável real tal que  $f(x) = x^k$ , com  $k \in \mathbb{N}$ , então  $A^{x^k, [0, \alpha]} = \frac{1}{k+1} \alpha^{k+1}$ , para  $\alpha > 0$ .

*Demonstração.* Aplicando a Definição 2, neste caso, obtemos

Figura 21 – Gráfico aproximação área  $A^{x^k, [\alpha, \beta]}$



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\begin{aligned}
A_n^{x^k, [0, \alpha]} &= \frac{\alpha}{n} \sum_{i=1}^n f\left(i \frac{\alpha}{n}\right) = \frac{\alpha}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\alpha^k}{n^k} i^k = \frac{\alpha}{n} \frac{\alpha^k}{n^k} \sum_{i=1}^n i^k = \frac{\alpha^{k+1}}{n^{k+1}} (1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k) = \\
&= \left( \frac{1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} \right) \alpha^{k+1}.
\end{aligned}$$

A área da região de interesse é calculada pelo limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n^{x^k, [0, \alpha]})$ . Todavia, recapitulando a identidade de Pascal,

$$(n+1)^{k+1} = \binom{k+1}{1} S_k + \binom{k+1}{2} S_{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{k} S_1 + (n+1),$$

e dividindo ambos os membros por  $n^{k+1}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} &= \underbrace{\binom{k+1}{1} \frac{S_k}{n^{k+1}} + \binom{k+1}{2} \frac{S_{k-1}}{n^{k+1}} + \cdots + \binom{k+1}{k-1} \frac{S_2}{n^{k+1}} + \binom{k+1}{k} \frac{S_1}{n^{k+1}}}_{k+1} + \\ &+ \frac{n+1}{n^{k+1}}. \end{aligned}$$

Ressaltamos que os quocientes  $\frac{S_{k-1}}{n^{k+1}}, \dots, \frac{S_2}{n^{k+1}}$  e  $\frac{S_1}{n^{k+1}}$  se aproximam de zero a medida que  $n \rightarrow +\infty$ . Para justificar esta afirmação, tomemos a fração genérica  $\frac{S_{k-i}}{n^{k+1}}$  para  $1 \leq i \in \mathbb{N} \leq k-1$ . Conforme sabido, o numerador é um polinômio da forma  $(s_{(k-i)+1}) n^{(k-i)+1} + (s_{k-i}) n^{k-i} + \cdots + (s_1) n^1 + s_0$ , onde  $s_{k-i}, s_{(k-i)-1}, \dots, s_1$  e  $s_0$  são valores reais tal que  $s_{(k-i)+1} \neq 0$ . Por estas hipóteses, decorre que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{S_{k-i}}{n^{k+1}} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{(s_{(k-i)+1}) n^{(k-i)+1} + (s_{k-i}) n^{k-i} + \cdots + (s_1) n^1 + s_0}{n^{k+1}} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{s_{(k-i)+1}}{n^i} + \frac{s_{k-i}}{n^{i+1}} \cdots + \frac{s_1}{n^k} + \frac{s_0}{n^{k+1}} \right) = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0. \end{aligned}$$

Além disso, o leitor deverá perceber que, sobre estas mesmas condições, a divisão  $\frac{n+1}{n^{k+1}}$  ( $= \frac{1}{n^k} + \frac{1}{n^{k+1}}$ ) também tenderá a zero. Nestas circunstâncias, não restará dúvidas de que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( (k+1) \frac{S_k}{n^{k+1}} + \cdots + \binom{k+1}{k} \frac{S_1}{n^{k+1}} + \frac{n+1}{n^{k+1}} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1+0)^{k+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (k+1) \frac{S_k}{n^{k+1}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (k+1) \frac{1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} \right) = \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

E, finalmente:

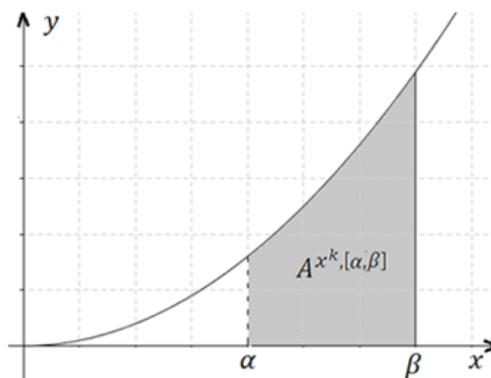
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( A_n^{x^k, [0, \alpha]} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^{k+1} \left( \frac{1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} \right) = \frac{1}{k+1} \alpha^{k+1}.$$

□

**Corolário 1.** Se  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = x^k$ , com  $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ , então  $A^{x^k, [\alpha > 0, \beta > 0]} = \frac{1}{k+1} (\beta^{k+1} - \alpha^{k+1})$ .

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, façamos a construção da Figura 22 que representa a área da região  $\mathfrak{R}^{x^k, [\alpha > 0, \beta > 0]}$ .

Figura 22 – Diferença entre áreas



Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos perceber que a área pretendida  $A^{x^k, [\alpha, \beta]}$  pode ser encontrada pela diferença  $A^{x^k, [0, \beta]} - A^{x^k, [0, \alpha]}$ . Contudo, pelo teorema 6, sabemos que  $A^{x^k, [0, \beta]} = \frac{1}{k+1} \beta^{k+1}$  e  $A^{x^k, [0, \alpha]} = \frac{1}{k+1} \alpha^{k+1}$ , justificando, portanto, as igualdades

$$A^{x^k, [\alpha, \beta]} = \frac{1}{k+1} \beta^{k+1} - \frac{1}{k+1} \alpha^{k+1} = \frac{1}{k+1} (\beta^{k+1} - \alpha^{k+1}).$$

□

Em Matemática, um *operador* é uma função cujo domínio (ou parte dele) é um conjunto de funções. Nesse sentido, podemos dizer que o símbolo  $A^{f(x), [\alpha, \beta]}$  é um *operador* sobre o conjunto das funções  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ . Um importante ressalvo, que facilita inúmeros casos, é dado pelo teorema:

**Teorema 7 (Linearidade).** O operador  $A^{f(x), [\alpha, \beta]}$  goza das seguintes propriedades:

1. Se  $k \in \mathbb{R}$  e  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , então

$$A_n^{k f(x), [\alpha, \beta]} = k A_n^{f(x), [\alpha, \beta]}.$$

2. Se  $f$  e  $g$  são funções com domínio em  $[\alpha, \beta]$  a valores reais positivos, então

$$A_n^{f(x)+g(x), [\alpha, \beta]} = A_n^{f(x), [\alpha, \beta]} + A_n^{g(x), [\alpha, \beta]}.$$

*Demonstração.* 1. Seja  $F : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  a função de lei  $F(x) = k f(x)$ . Por hipótese, sabemos que a imagem de  $F$  para os pontos da forma  $x = \alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n}$  são obtidos pela substituição  $F\left(\alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n}\right) = k f\left(\alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n}\right)$ . Segundo a Definição 2, este valor deverá ser inscrito na notação  $\Sigma$  conforme segue  $\sum_{i=1}^n f\left(\alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n}\right)$ . Porém, de acordo com as propriedades vistas no Capítulo 4, podemos transformá-la no produto  $k \sum_{i=1}^n f\left(\alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n}\right)$ , fazendo com que  $A_n^{F(x), [\alpha, \beta]}$  seja expressa como

$$\begin{aligned} A_n^{F(x), [\alpha, \beta]} &= A_n^{k f(x), [\alpha, \beta]} = \frac{\beta - \alpha}{n} \left( k \sum_{i=1}^n f\left(\alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n}\right) \right) = \\ &= k \left( \frac{\beta - \alpha}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n}\right) \right) = k A_n^{f(x), [\alpha, \beta]}, \end{aligned}$$

que é o que queríamos demonstrar. □

*Demonstração.* 2. Seja  $G : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função cuja lei expressa-se por  $G(x) = f(x) + g(x)$ . Inicialmente, vamos encontrar a imagem de  $G$  para  $x = \alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n}$ . Por hipótese, devemos ter que  $G(x) = G\left(\alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n}\right) = f\left(\alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n}\right) + g\left(\alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n}\right)$ . Esta, de acordo com a Definição 2 deverá ser inscrita em  $\Sigma$  assumindo, portanto, a forma

$$\sum_{i=1}^n \left( f\left(\alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n}\right) + g\left(\alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n}\right) \right).$$

Daí, a área  $A_n^{G(x), [\alpha, \beta]}$  poderá ser transcrita como

$$\begin{aligned} A_n^{G(x), [\alpha, \beta]} &= A_n^{f(x)+g(x), [\alpha, \beta]} = \\ &= \frac{\beta - \alpha}{n} \left( \sum_{i=1}^n f\left(\alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n}\right) + \sum_{i=1}^n g\left(\alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n}\right) \right) = \\ &= \frac{\beta - \alpha}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n}\right) + \frac{\beta - \alpha}{n} \sum_{i=1}^n g\left(\alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n}\right) = \\ &= A_n^{f(x), [\alpha, \beta]} + A_n^{g(x), [\alpha, \beta]}, \end{aligned}$$

que é o que queríamos demonstrar. □

**Corolário 2.** Nos problemas em que as hipóteses 1 do Teorema 7 estão satisfeitas, temos que

$$A^{F(x), [\alpha, \beta]} = A^{k f(x), [\alpha, \beta]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( A_n^{k f(x), [\alpha, \beta]} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( k A_n^{f(x), [\alpha, \beta]} \right) = k A^{f(x), [\alpha, \beta]}.$$

Por outro lado, para aqueles que obedecem às condições 2 do Teorema 7, é válido que

$$\begin{aligned} A^{G(x), [\alpha, \beta]} &= A^{f(x)+g(x), [\alpha, \beta]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( A_n^{f(x)+g(x), [\alpha, \beta]} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( A_n^{f(x), [\alpha, \beta]} + A_n^{g(x), [\alpha, \beta]} \right) = A^{f(x), [\alpha, \beta]} + A^{g(x), [\alpha, \beta]}. \end{aligned}$$

**Corolário 3.** Seja a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 \geq 0$ .

A área da região delimitada pelas curvas  $y = 0$ ,  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$  e  $y = f(x)$  é dada por

$$A^{f(x), [\alpha, \beta]} = \frac{a_n}{n+1} (\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}) + \frac{a_{n-1}}{n} (\beta^n - \alpha^n) + \dots + \frac{a_1}{2} (\beta^2 - \alpha^2) + a_0 (\beta - \alpha).$$

*Demonstração.* A cargo do leitor. □

Entusiasmados pelas informações anteriores, vejamos a resolução de alguns exemplos.

**Exemplo 13.** Determine  $A^{2x+1, [2, 5]}$ .

**Solução**

De fato, a função  $f$  é positiva para todo  $x$  pertencente ao intervalo  $I = [2, 5]$ , visto que

$$2 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow 4 \leq 2x \leq 10 \Leftrightarrow 5 \leq f(x) = 2x + 1 \leq 11.$$

Posto isso, pelo Corolário 3, é correto afirmarmos que

$$A^{2x+1, [2, 5]} = \frac{2}{2} [5^2 - 2^2] + 1 (5 - 2) = 21 + 3 = 24.$$

Portanto, a área solicitada é dada por 24 unidades de área.

**Exemplo 14.** Quanto vale  $A^{x^2-5x+6, [0, 1]}$ ?

**Solução**

Perceba que a função  $f$  é positiva para elemento  $x$  pertencente ao intervalo  $A = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$ . Contudo, como  $I = [0, 1] \subset A$ , o Corolário 3 é aplicável gerando, assim, as igualdades

$$A^{x^2-5x+6, [0, 1]} = \frac{1}{3} (1^3 - 0^3) + \frac{-5}{2} (1^2 - 0^2) + 6 (1 - 0) = \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 6 = \frac{23}{6}.$$

Então, a área almejada é  $\frac{23}{6}$  unidades de área.

**Exemplo 15.** Determine  $A^{x^3+x^2-x-1, [1, 2]}$ .

**Solução**

A função  $f$  pode ser fatorada se fizermos a seguinte manipulação

$$x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x+1) + (-1)(x+1) = (x+1)(x^2 - 1) = (x+1)^2(x-1).$$

Por ser verdade que a potência  $(x+1)^2$  é sempre positiva, não deverá restar dúvidas de que o sinal de  $f$  dependerá apenas do fator  $x-1$ . Desta forma, por ser verdade que  $f(x) \geq 0, \forall x \in [1, 2]$ , podemos aplicar o Corolário 3 inferindo, portanto, que

$$\begin{aligned} A^{x^3+x^2-x-1, [1,2]} &= \frac{1}{4}(2^4 - 1^4) + \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) + \frac{(-1)}{2}(2^2 - 1^2) + (-1)(2 - 1) = \\ &= \frac{15}{4} + \frac{7}{3} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{43}{12}. \end{aligned}$$

Logo, a área solicitada é  $\frac{43}{12}$  unidades de área.

### Atividades propostas

1. Sabemos pelo Teorema de Pascal que a área delimitada pelas curvas  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | y = x^3, y = 0, x = \alpha$  e  $x = \beta$  pode ser calculada por  $A^{x^3, [\alpha, \beta]} = \frac{1}{4}(\beta^4 - \alpha^4)$ . Comprove a veracidade desta fórmula articulando a Definição 2 com o Exercício 5 do Capítulo 4.
2. Determine  $A^{x^3, [3, 5]}$ .
3. Sejam as funções contínuas

$$\begin{aligned} f_1, f_2, \dots, f_n: [\alpha, \beta] (\subset \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \text{ e } F(x): [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R} | F(x) = \\ &= f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x). \end{aligned}$$

Prove, por indução em  $n$ , que

$$A_n^{F(x), [\alpha, \beta]} = A_n^{f_1(x), [\alpha, \beta]} + A_n^{f_2(x), [\alpha, \beta]} + \dots + A_n^{f_n(x), [\alpha, \beta]}.$$

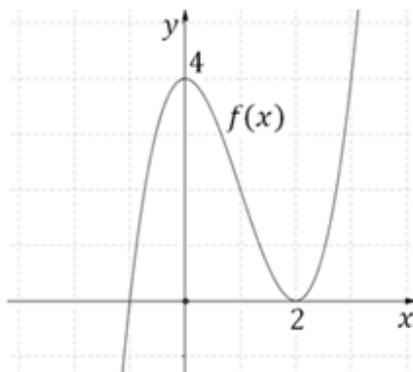
4. Sejam as funções contínuas

$$\begin{aligned} f_1, f_2, \dots, f_n: [\alpha, \beta] (\subset \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}, F(x): [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } k_i \neq 0, \\ i \in \{1, 2, 3, \dots, n\} | F(x) &= k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \dots + k_n f_n(x). \end{aligned}$$

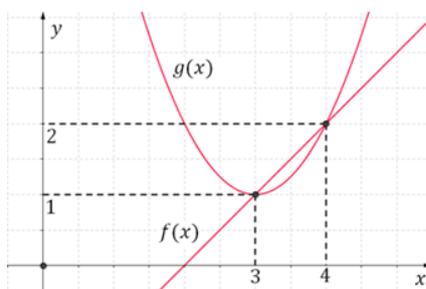
Prove, por indução em  $n$ , que

$$A_n^{F(x), [\alpha, \beta]} = k_1 A_n^{f_1(x), [\alpha, \beta]} + k_2 A_n^{f_2(x), [\alpha, \beta]} + \dots + k_n A_n^{f_n(x), [\alpha, \beta]}.$$

5. Na Figura 23, tem-se o gráfico da função contínua  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  em que  $a, b, c$  e  $d$  são valores reais com  $a \neq 0$ . Determine  $A^{f(x), [0, 2]}$ .

Figura 23 – Gráfico de  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 24 – Gráfico das funções  $f$  e  $g$ 

Fonte: Elaborada pelo autor.

6. Sejam as funções contínuas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid g(x) = cx^2 + dx + e$ , dadas pela Figura 24 em que  $a, b, c$  e  $d$  são valores reais com  $a$  e  $d$  não nulos. Determine a área da região delimitada por  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$ .



## ÁREAS DELIMITADAS POR GRÁFICOS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.

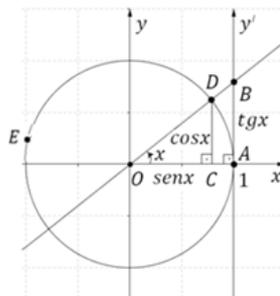
Iniciamos este capítulo com um importante resultado sobre limites, que pode ser encontrado em (GUIDORIZZI, 2015; ANTON H. E BIVENS, 2007).

**Teorema 8 (Limite fundamental trigonométrico).** Se  $f : \mathbb{R}/\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \frac{\text{sen}x}{x}$ , então  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

*Demonstração.* Inicialmente, investigamos o comportamento de  $f(x)$  a medida que  $x \rightarrow 0$ . Há, portanto, dois casos a serem analisados:  $x \rightarrow 0^+$  ( $x$  tende a zero pela direita) ou  $x \rightarrow 0^-$  ( $x$  tende a zero pela esquerda). Por serem análogos, mostraremos apenas o primeiro deles deixando o segundo como exercício para o leitor.

Seja  $x^2 + y^2 = 1$  a equação da circunferência unitária  $\Lambda$  com centro  $O$  sobreposto sobre a origem do plano cartesiano  $xOy$ . Seja ainda  $x \in I = (0, \frac{\pi}{2})$  uma medida (em radianos) arbitrária inserida sobre o arco correspondente de  $\Lambda$ . Pela forma como definiu-se as razões trigonométricas de seno, cosseno e tangente, não resta dúvidas de que a Figura 25

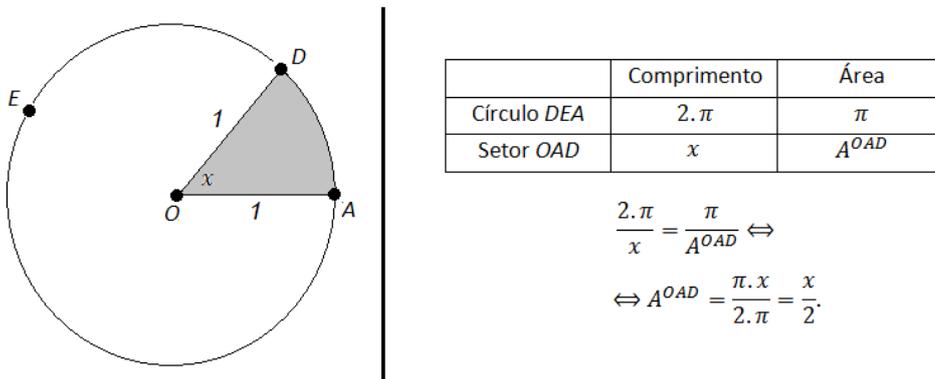
Figura 25 – Desigualdade no ciclo trigonométrico



Fonte: Elaborada pelo autor.

representa perfeitamente as condições descritas anteriormente. Definiremos  $A^{OCD}$ ,  $A^{OAD}$  e  $A^{OAB}$  como sendo, respectivamente, a área do triângulo menor  $OCD$ , do setor circular  $OAD$  e do triângulo maior  $OAB$ . Da geometria euclidiana podemos afirmar que  $A^{OCD} = \frac{\text{sen}x \cos x}{2}$  e  $A^{OAB} = \frac{1 \tan x}{2} = \frac{\tan x}{2}$ . Por outro lado, notemos que a área do setor circular  $OAD$  está contida sobre a área do círculo  $DEA$ , Figura 26. Desta forma, devido à proporcionalidade direta existente entre ambas, justificam-se as equivalências

Figura 26 – Proporcionalidade entre comprimento e área



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em consequência, podemos afirmar que para  $x$  pertencente a  $I$  a desigualdade  $A^{OCD} < A^{OAD} < A^{OAB}$  certamente ocorrerá. Assim, por substituição, temos que

$$\frac{\text{sen}x \cos x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\text{tg}x}{2} \Leftrightarrow \text{sen}x \cos x < x < \frac{\text{sen}x}{\cos x}. \quad (6.1)$$

Diante destes fatos, percebemos que não somente  $\text{sen}x$  é positivo, mas também os membros da desigualdade 6.1. Posto isso, justifica-se também que

$$\frac{\cos x}{\text{sen}x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\text{sen}x \cos x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\text{sen}x}{x} = f(x) < \frac{1}{\cos x} = \sec x.$$

Finalmente, pedimos para que o leitor que ouse de sua imaginação!

Suponha que você<sup>1</sup> esteja localizado (no lugar da função  $f$ ) sobre a reta real  $\mathbb{R}$  e ocupe a posição do valor unitário. Seu caminho de percurso limita-se por duas imensas paredes situadas: uma no zero (representando a função  $\cos x$ ) e outra no dois (representando a função  $\sec x$ ). Para piorar a situação, as paredes começam a mover-se lentamente em sua direção, sem que nenhuma delas possa atingir o valor numérico 1. Agora responda:

Em qual número desse intervalo você deverá ficar para que não seja atingido, em momento algum, por nenhuma delas? Vide Figura 27.

<sup>1</sup> Despreze a sua espessura.

Figura 27 – Dilema da movimentação



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por estas condições, não restará dúvidas de que você (o nosso  $\frac{\text{sen}x}{x}$ ) só poderá ficar estabilizado em cima da unidade correto? Tal fato deve-se a ideia intuitiva de limite, pois embora ambas as paredes possam estar cada vez mais próximas de 1, jamais irão atingi-las. Em consequência, podemos afirmar que o limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x}$  será igual a unidade.  $\square$

### Aplicação

Seja  $f$  uma função real de variável real tal que  $f(x) = \text{sen}(ax + b) \geq 0$ .

A área delimitada pelas curvas  $y = 0$ ,  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$  e  $f(x) = \text{sen}(ax + b)$  é dada por

$$A^{\text{sen}(ax+b), [\alpha, \beta]} = \frac{1}{a} (\cos(a\alpha + b) - \cos(a\beta + b)). \quad (6.2)$$

*Demonstração.* De fato, a imagem de  $f$  para  $x = \alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n}$  pode ser indicada por

$$\text{sen} \left( (a\alpha + b) + i \left( \frac{\beta - \alpha}{n} a \right) \right),$$

bastando para isso fazermos

$$\begin{aligned} f(x) &= f \left( \alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n} \right) = \text{sen} \left( a \left( \alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n} \right) + b \right) = \\ &= \text{sen} \left( a\alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n} a + b \right) = \text{sen} \left( (a\alpha + b) + i \left( \frac{\beta - \alpha}{n} a \right) \right). \end{aligned} \quad (6.3)$$

O termo geral obtido em (6.3), quando inserido sobre a notação  $\Sigma$  nos fornece uma soma parcial  $S_n$  que, segundo o Exemplo 10 do Capítulo 4, pode ser expressa por

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{i=1}^n f\left(\alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n}\right) &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2(a\alpha + b) + n\left(\frac{\beta - \alpha}{n}\right)a}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(n+1)\left(\frac{\beta - \alpha}{n}\right)a\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\beta - \alpha}{n}\right)a\right)} = \\
&= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a(\alpha + \beta)}{2} + b\right) \operatorname{sen}\left(\frac{a(\beta - \alpha)}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\beta - \alpha}{n}\right)a\right)}.
\end{aligned}$$

Nestas circunstâncias, de acordo com a Definição 2, deverá estar claro que as igualdades

$$\begin{aligned}
A_n^{\operatorname{sen}(ax+b), [\alpha, \beta]} &= \left(\frac{\beta - \alpha}{n}\right) \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a(\alpha + \beta)}{2} + b\right) \operatorname{sen}\left(\frac{a(\beta - \alpha)}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\beta - \alpha}{n}\right)a\right)} = \\
&= \frac{2}{a} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\beta - \alpha}{n}\right)a\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{\beta - \alpha}{n}\right)a}} \operatorname{sen}\left(\frac{a(\alpha + \beta)}{2} + b\right) \operatorname{sen}\left(\frac{a(\beta - \alpha)}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right),
\end{aligned}$$

são todas verdadeiras. Daí, devemos perceber que para  $n \rightarrow \infty$ , o produto  $\frac{1}{2}\left(\frac{\beta - \alpha}{n}\right)a$  ( $= \frac{a(\beta - \alpha)}{2} \frac{1}{n}$ ) indubitavelmente tenderá a zero acarretando, pelas hipóteses do Teorema 8 que

$$\begin{aligned}
A^{\operatorname{sen}(ax+b), [\alpha, \beta]} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(A_n^{\operatorname{sen}(ax+b), [\alpha, \beta]}\right) = \\
&= \frac{1}{a} \left(2 \operatorname{sen}\left(\frac{a(\beta + \alpha)}{2} + b\right) \operatorname{sen}\left(\frac{a(\beta - \alpha)}{2}\right)\right). \quad (6.4)
\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando a identidade

$$2 \operatorname{sen}(A) \cdot \operatorname{sen}(B) = \cos(A - B) - \cos(A + B), \quad (6.5)$$

para  $A = \frac{a(\beta + \alpha)}{2} + b$  e  $B = \frac{a(\beta - \alpha)}{2}$  em 6.4, decorre o resultado almejado.  $\square$

**Corolário 4.** Seja  $f$  uma função real de variável real tal que  $f(x) = \cos(ax + b) \geq 0$ .

A área delimitada pelas curvas  $y = 0$ ,  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$  e  $y = f(x)$  é

$$A^{\cos(ax+b), [\alpha, \beta]} = \frac{1}{a} (\operatorname{sen}(a\beta + b) - \operatorname{sen}(a\alpha + b)).$$

*Demonstração.* Da trigonometria é sabido que

$$\cos \theta = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad (6.6)$$

$$\operatorname{sen} \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad (6.7)$$

para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ . Por 6.6, podemos permutar o valor de  $\theta$  pela expressão aditiva  $ax + b$  implicando, desta maneira, que  $\cos \theta = \cos(ax + b) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (ax + b)\right) = \sin\left((-a)x + \left(\frac{\pi}{2} - b\right)\right)$ . Portanto,  $A^{\cos x, [\alpha, \beta]} = A^{\sin\left((-a)x + \left(\frac{\pi}{2} - b\right)\right), [\alpha, \beta]}$  que, de acordo com a fórmula 6.2, nos conduzem as igualdades

$$\begin{aligned} A^{\cos x, [\alpha, \beta]} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( A_n^{\sin\left((-a)x + \left(\frac{\pi}{2} - b\right)\right), [\alpha, \beta]} \right) = \\ &= \frac{1}{a} \left( \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a\beta + b)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a\alpha + b)\right) \right). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Todavia, o produto 6.8 nada mais é do que o resultado aguardado, uma vez que estamos supondo a validade da identidade 6.7.  $\square$

**Exemplo 16.** Seja  $f$  uma função real de variável real. Qual é o valor de  $A^{\text{sen} x, [0, \frac{\pi}{2}]}$ ?

### Solução

Devemos primeiramente perceber que para todo  $x \in I = [0, \frac{\pi}{2}]$  tem-se  $\text{sen} x \geq 0$ . Assim, pelas informações obtidas anteriormente, é correto afirmarmos que

$$A^{\text{sen}(1x+0), [0, \frac{\pi}{2}]} = \frac{1}{1} \left( \cos(0+0) - \cos\left(1 \cdot \frac{\pi}{2} + 0\right) \right) = 1 - \cos \frac{\pi}{2} = 1 - 0 = 1.$$

Logo, a área solicitada é 1 unidade de área.

**Exemplo 17.** Prove que  $A^{1+2 \text{sen}(2x-\pi), [-1, 0]}$  é aproximadamente igual a 2,42.

*Demonstração.* Para  $x \in I = [-1, 0]$ , obtemos  $f(x) = 1 + 2 \text{sen}(2x - \pi) \geq 0$ . Diante desta hipótese, em vista dos Teoremas 1 e 2 aplicados a  $f$ , segue de imediato que

$$A_n^{1+2 \text{sen}(2x-\pi), [-1, 0]} = A_n^{1, [-1, 0]} + 2 A_n^{\text{sen}(2x-\pi), [-1, 0]}$$

Logo

$$\begin{aligned} A^{f(x), [-1, 0]} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( A_n^{1+2 \text{sen}(2x-\pi), [-1, 0]} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( A_n^{1, [-1, 0]} + 2 A_n^{\text{sen}(2x-\pi), [-1, 0]} \right) = \\ &= A^{1, [-1, 0]} + 2 A^{\text{sen}(2x-\pi), [-1, 0]} = \\ &= 1 \cdot (0 - (-1)) + \cos(2 \cdot (-1) - \pi) - \cos(2 \cdot 0 - \pi) = \\ &= 2 + \cos(2 + \pi) \cong 2,42. \end{aligned}$$

$\square$

**Exemplo 18.** Determine  $A^{\text{sen}x \cos x, [0, \frac{\pi}{6}]}$ .

**Solução**

Vamos transformar o produto  $\text{sen}x \cos x$  para alguma representação da forma  $f(x) = A + B \text{sen}(Cx + D)$ , pois com isto, será possível (após provarmos que  $f(x) \geq 0$  para  $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$ ) aplicarmos os teoremas já estudados.

De fato, sabemos da trigonometria que  $\text{sen}(2x) = 2 \text{sen}x \cos x$ . Daí, pode-se isolar o produto desejado  $\text{sen}x \cos x$  obtendo-se, portanto, a lei  $f(x) = \frac{1}{2} \text{sen}(2x)$ . Além disto, podemos constatar que a desigualdade  $\frac{1}{2} \text{sen}(2x) \geq 0$  é satisfeita se, e somente se,  $x \in A = \{x \in \mathbb{R} : k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . E, como o intervalo  $I = [0, \frac{\pi}{6}]$  está contido em  $A$ , os Teoremas 1 e 2 podem ser utilizados, justificando-se então que

$$\begin{aligned} A^{\text{sen}x \cos x} &= A^{\frac{1}{2} \text{sen}2x, [0, \frac{\pi}{6}]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( A_n^{\frac{1}{2} \text{sen}(2x), [0, \frac{\pi}{6}]} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} A_n^{\text{sen}(2x), [0, \frac{\pi}{6}]} \right) = \\ &= \frac{1}{2} A^{\text{sen}(2x), [0, \frac{\pi}{6}]} = \frac{1}{4} \left( \cos 0 - \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) \right) \cong 0,125. \end{aligned}$$

Logo, a área da região é 0,125 unidades de área.

**Exemplo 19.** Determine a área líquida  $A^{\text{sen}^4(x), [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]}$ .

**Solução**

A lei de formação de  $f$  é definida por uma potência de expoente par com domínio real. Sendo assim, é claro que  $\text{sen}^4x \geq 0$ . Por outro lado, o modelo matemático de  $f$  não se enquadra nos moldes sugeridos pelas hipóteses dos Teoremas 1 e 2. Nestas circunstâncias, se formos capazes de encontrar uma identidade que reverta esta situação, podemos calcular a área pretendida utilizando a fórmula 6.2. Façamos então

$$\text{sen}^4x = \text{sen}^2x \text{sen}^2x = (1 - \cos^2x) \text{sen}^2x = \text{sen}^2x - (\text{sen}x \cos x)^2.$$

Nesta, podemos permutar a potência  $\text{sen}^2x$  e o produto  $\text{sen}x \cos x$ , respectivamente, pelos valores  $\frac{1}{2} (1 - \cos(2x))$  e  $\frac{1}{2} \text{sen}(2x)$  acarretando que

$$\text{sen}^4x = \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) - \left( \frac{1}{2} \text{sen}(2x) \right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) - 1 \cdot \frac{1}{4} \text{sen}^2(2x). \quad (6.9)$$

Analogamente, em (6.9), façamos a substituição  $\text{sen}^2(2x) = \frac{1}{2} (1 - \cos(4x))$  obtendo, portanto, as igualdades

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^4 x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} (1 - \cos(4x)) \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos(4x) = \\
&= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - 2x \right) + \frac{1}{8} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - 4x \right) = \\
&= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( 2x - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{8} \operatorname{sen} \left( 4x - \frac{\pi}{4} \right).
\end{aligned}$$

Tratando-se apenas de uma expressão aditiva com parcelas envolvendo produtos, pelos Teoremas 1 e 2 e pela aplicação da fórmula 6.2, justifica-se que

$$\begin{aligned}
A^{\operatorname{sen}^4 x, [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( 2x - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{8} \operatorname{sen} \left( 4x - \frac{\pi}{2} \right) \right) = \\
&= A^{\frac{3}{8}, [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]} - \frac{1}{2} A^{\operatorname{sen}(2x - \frac{\pi}{2}), [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]} - \frac{1}{8} A^{\operatorname{sen}(4x - \frac{\pi}{2}), [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]} = \\
&= \frac{\pi}{16} - \frac{\sqrt{3}}{32} \cong 0,14.
\end{aligned}$$

Logo, a área pretendida é aproximadamente igual a 0,14 unidades de área.

**Exemplo 20.** Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x$ . Mostre que

$$A^{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x, [\alpha, \beta]} = \frac{3}{4} (\beta - \alpha) + \frac{1}{16} \cdot (\operatorname{sen}(4\beta) - \operatorname{sen}(4\alpha)).$$

*Demonstração.* Tendo em vista que as parcelas  $\operatorname{sen}^4 x$  e  $\cos^4 x$  de  $f$  são estritamente positivas para  $x \in [-\infty, +\infty]$ , segundo o Teorema 2, obtemos

$$A^{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x, [\alpha, \beta]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( A_n^{\operatorname{sen}^4 x, [\alpha, \beta]} + A_n^{\cos^4 x, [\alpha, \beta]} \right) = A^{\operatorname{sen}^4 x, [\alpha, \beta]} + A^{\cos^4 x, [\alpha, \beta]}.$$

Contudo, pelo exemplo anterior, constatamos o quão trabalhoso foi determinar  $A^{\operatorname{sen}^4 x, [\alpha, \beta]}$ . Percebemos portanto que, embora possível, tal sugestão de resolução torna-se inviável, uma vez que faz-se por necessário encontrarmos ainda uma identidade conveniente para  $\cos^4 x$ . Em consequência a tamanha dificuldade, procuramos apresentar uma nova identidade algébrica para  $f$ .

De fato, se fizermos  $A = \operatorname{sen}^2 x$  e  $B = \cos^2 x$  em  $A^2 + B^2 = (A + B)^2 - 2AB$ , teremos que

$$\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 - 2(\operatorname{sen} x \cos x)^2 = 1 - 2(\operatorname{sen} x \cos x)^2.$$

Sabemos da trigonometria que  $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ ,  $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x)$  e  $\operatorname{sen}^2(2x) = \frac{1}{2} (1 - \cos(4x))$ , justificando assim as igualdades

$$1 - 2 (\operatorname{sen} x \cos x)^2 = 1 - 2 \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2(2x) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} (1 - \cos(4x)) \right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos(4x).$$

Esta identidade, nos permite afirmarmos que  $A^{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x, [\alpha, \beta]} = A^{\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos(4x), [\alpha, \beta]}$ . Desta forma, pelo Teorema 7, tem-se a igualdade

$$A^{\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos(4x), [\alpha, \beta]} = \frac{3}{4} \cdot (\beta - \alpha) + \frac{1}{4} A^{\cos(4x), [\alpha, \beta]}. \quad (6.10)$$

Para encerrar a demonstração, basta aplicarmos o Corolário 4 em 6.10 implicando, portanto, no resultado proposto pelo problema.  $\square$

**Exemplo 21.** Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x$ . Mostre que

$$A^{\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x, [\alpha, \beta]} = \frac{5}{8} \cdot (\beta - \alpha) + \frac{3}{32} \cdot (\operatorname{sen}(4\beta) - \operatorname{sen}(4\alpha)).$$

*Demonstração.* Orientados pelas ideias do problema anterior, vamos encontrar uma identidade para  $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x$ . Para tanto, notemos que  $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = (\operatorname{sen}^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3$ . Esta, conforme nos ensina o binômio de Newton  $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 + B^2 - AB)$ , poderá ser indicada como

$$\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) (\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x - (\operatorname{sen} x \cos x)^2). \quad (6.11)$$

Por outro lado, sabemos que  $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ ,  $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2(2x)$  e  $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x)$ , fazendo com que 6.11 assumia a forma simplificada

$$\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2(2x) - \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2(2x) = 1 - \frac{3}{4} \operatorname{sen}^2(2x),$$

ou ainda:

$$\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \left( \frac{1}{2} (1 - \cos(4x)) \right) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos(4x).$$

Daí, temos que  $A^{\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x, [\alpha, \beta]} = A^{\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos(4x), [\alpha, \beta]}$ . Para finalizarmos, convidamos o leitor a deduzir o resultado final bastando para isso aplicar o Teorema 7 e o Corolário 4 em  $A^{\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos(4x), [\alpha, \beta]}$ .  $\square$

### Atividades propostas

1. Suponha que  $a \in \mathbb{R}/\{0\}$ . Explique intuitivamente o porquê da validade da igualdade

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\beta - \alpha}{n}\right) a\right)}{\frac{1}{2} \left(\frac{\beta - \alpha}{n}\right) a} \right) = 1.$$

2. Qual é o inteiro mais próximo de  $A^{\sin^2(2x)}$ ,  $[-\pi, \pi]$ ?
3. Determine  $A^{\sin^2(x) \cdot \cos^2(x)}$ ,  $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ .
4. Considere a função contínua  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$ . Mostre que  $f$  é positiva para todo  $x \in [-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi]$ . Em seguida, determine  $A^{f(x)}$ ,  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ .
- Sugestão:** Transforme  $f$  em produto e utilize a identidade trigonométrica  $\cos(2A) = \cos^2 A - \sin^2 A$ .
5. Prove que a função contínua  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = \sin^3 x$  é sempre positiva para todo  $x$  pertencente ao conjunto  $P = \{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leq x \leq (1 + 2k)\pi\}$ . Em seguida, determine  $A^{f(x)}$ ,  $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ .
6. É possível calcularmos  $A^{\sin(2x) \cos x}$ ,  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ? Em caso positivo, determine o valor desta.
- Sugestão:** Use a fórmula de reversão  $\sin A \cos B = \frac{1}{2} (\sin(A + B) + \sin(A - B))$ .
7. Construa o gráfico das funções  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$  e  $g(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$ . Qual é da região delimitada pelas curvas  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$ ?
- Sugestão:** Use a diferença entre áreas.
8. Determine  $A^{x^4 + x^2 - 2x + 3 + \sin^2 x - \cos^2 x}$ ,  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ?
- Sugestão:** Lembre-se que  $\sin^2 x - \cos^2 x = -\cos(2x)$ .



## CÁLCULO DE ÁREAS COM O AUXÍLIO DA FUNÇÃO INVERSA

Seja  $f$  uma função real de variável real, estritamente monótona <sup>1</sup> em um intervalo  $I = [\alpha, \beta]$ . Nem sempre, através da definição de área, é possível (e fácil) encontrarmos uma fórmula fechada envolvendo os valores numéricos do intervalo e os coeficientes da função inicial. Muitas vezes, podemos calcular a área desejada através da diferença entre duas outras utilizando, para isto, o conceito de função inversa.

**Teorema 9.** Seja  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \mid y = f(x)$  e  $I = [\alpha, \beta]$  um subconjunto de  $A$ .

Se  $f$  é monótona para todo  $x \in I$ , então

- 1)  $A^{f(x), [\alpha, \beta]} = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) - A^{f^{-1}(x), [f(\alpha), f(\beta)]}$ , para  $f(\alpha) < f(\beta)$ ,
- 2)  $A^{f(x), [\alpha, \beta]} = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) + A^{f^{-1}(x), [f(\beta), f(\alpha)]}$ , para  $f(\alpha) > f(\beta)$ .

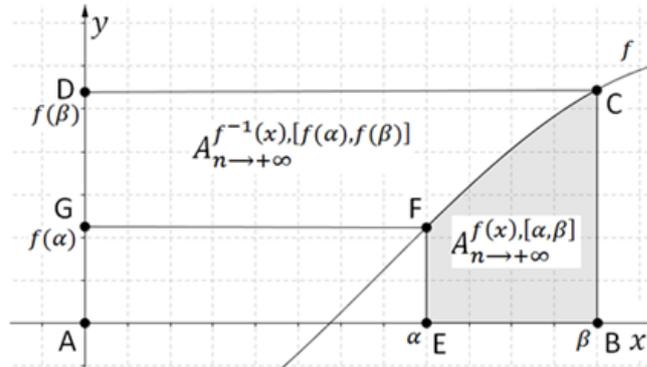
*Demonstração.* Tratando-se de provas análogas, faremos apenas a primeira delas deixando a segunda<sup>2</sup> como exercício para o leitor.

Com efeito, vamos supor que para  $x \in I$  o gráfico de  $f$  esteja inserido no 1º quadrante do sistema  $xOy$ . Os pontos  $E = (\alpha, 0)$ ,  $B = (\beta, 0)$ ,  $C = (\beta, f(\beta))$  e  $F = (\alpha, f(\alpha))$  definem a figura  $EBCF$  de área  $A^{f(x), [\alpha, \beta]}$ . Esta, conforme veremos na Figura 28, poderá ser determinada pelas diferenças  $A_{ABCD}^{Retangulo} - A_{AEFG}^{Retangulo} - A^{f^{-1}(x), [f(\alpha), f(\beta)]}$ , onde  $f^{-1}$  é a lei da função inversa de  $f$  e  $f(\alpha)$  e  $f(\beta)$  são as imagens de  $f$  quando  $x$  assume os respectivos valores  $\alpha$  e  $\beta$ . Por sua vez, podemos ainda representá-la sob a forma  $\beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) - A^{f^{-1}(x), [f(\alpha), f(\beta)]}$ , já que  $A_{ABCD}^{Retangulo} = (\beta - 0) f(\beta) = \beta f(\beta)$  e  $A_{AEFG}^{Retangulo} = (\alpha - 0) f(\alpha) = \alpha f(\alpha)$  consolidando, portanto, a prova almejada.

<sup>1</sup> Uma função  $f$  é dita estritamente monótona em um subconjunto  $I$  de seu domínio se, e somente se, for estritamente crescente ou estritamente decrescente em  $I$ .

<sup>2</sup> Dica: Basta usar a definição:  $A^{f(x), [\beta, \alpha]} = -A^{f(x), [\alpha, \beta]}$ , para  $\alpha < \beta$ .

Figura 28 – Área de funções inversas



Fonte: Elaborada pelo autor.

□

### Aplicação

Seja  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que  $f(x) = \sqrt[n]{x}$ .

A área delimitada pelas curvas  $y = 0$ ,  $x = \alpha$  ( $\in \mathbb{R}_+$ ),  $x = \beta$  ( $\in \mathbb{R}_+$ ) e  $f$  é dada por

$$A^{\sqrt[n]{x}, [\alpha, \beta]} = \frac{n}{n+1} \left( \beta^{\frac{n+1}{n}} - \alpha^{\frac{n+1}{n}} \right).$$

*Demonstração.* Inicialmente, devemos perceber que a função de lei  $f(x) = \sqrt[n]{x}$  é estritamente monótona em todo o seu domínio, uma vez que a sua inversa  $f^{-1}(x) = x^n$  (cuja área é conhecida) também o é<sup>3</sup>, ou seja, a implicação  $x_1 - x_2 < 0 \Rightarrow f^{-1}(x_1) = x_1^n < f^{-1}(x_2) = x_2^n$  é, de fato, verdadeira para  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ . Nestas circunstâncias, podemos aplicar o Teorema 9, obtendo

$$\begin{aligned} A^{\sqrt[n]{x}, [\alpha, \beta]} &= \beta \sqrt[n]{\beta} - \alpha \sqrt[n]{\alpha} - \frac{1}{n+1} \left[ (\sqrt[n]{\beta})^{n+1} - (\sqrt[n]{\alpha})^{n+1} \right] = \\ &= \beta \sqrt[n]{\beta} - \frac{1}{n+1} (\sqrt[n]{\beta})^{n+1} - \alpha \sqrt[n]{\alpha} + \frac{1}{n+1} (\sqrt[n]{\alpha})^{n+1} = \\ &= \frac{n+1}{n+1} \sqrt[n]{\beta^{n+1}} - \frac{1}{n+1} \sqrt[n]{\beta^{n+1}} - \frac{n+1}{n+1} \sqrt[n]{\alpha^{n+1}} + \frac{1}{n+1} \sqrt[n]{\alpha^{n+1}} = \\ &= \frac{n}{n+1} \beta^{\frac{n+1}{n}} - \frac{n}{n+1} \alpha^{\frac{n+1}{n}} = \frac{n}{n+1} \left( \beta^{\frac{n+1}{n}} - \alpha^{\frac{n+1}{n}} \right). \end{aligned}$$

□

**Corolário 5.** Seja  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , tal que  $F(x) = \sqrt[n]{x} + \sqrt[n-1]{x} + \sqrt[n-2]{x} + \dots + \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$ .

A área da região delimitada pelas curvas  $y = 0$ ,  $x = \alpha > 0$ ,  $x = \beta > 0$  e  $y = F(x)$  com  $\alpha < \beta$  é dada por

<sup>3</sup> Para demonstrar a monotonicidade estrita de uma função  $f$ , sugerimos que o leitor utilize o seguinte Teorema: Se  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função bijetiva, então  $f^{-1}$  mantém a mesma monotonicidade de  $f$ .

$$A^{F(x),[\alpha,\beta]} = \sum_{i=2}^n \frac{i}{i+1} \left( \beta^{\frac{i+1}{i}} - \alpha^{\frac{n+1}{n}} \right).$$

*Demonstração.* A cargo do leitor. □

**Exemplo 22.** Seja  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que  $f(x) = \sqrt{x}$ . Determine a área aproximada da região delimitada pelas curvas  $y = 0$ ,  $x = 4$ ,  $x = 7$  e  $y = f(x)$ .

### Solução

De fato, as hipóteses apresentadas neste exemplo enquadram-se naquelas exigidas pela aplicação do Teorema 9. Logo

$$A^{\sqrt{x},[4,7]} = \frac{2}{2+1} \left( 7^{\frac{2+1}{2}} - 4^{\frac{2+1}{2}} \right),$$

cujo valor aproximado é 7,01.

**Exemplo 23.** Seja  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , tal que  $f(x) = 3 \sqrt[3]{x} + x^2 + 5x + 6 - \cos x$ . Prove que a área da região delimitada pelas curvas  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$  e  $y = f(x)$  é aproximadamente 19,19.

*Demonstração.* Conforme podemos constatar, para  $x \in I = [1, 2]$ , a implicação  $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(x) \geq 0$  certamente estará satisfeita (verifique!). Sendo assim, de acordo com os Teoremas 1 e 2 justifica-se que

$$\begin{aligned} A^{f(x),[1,2]} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( A_n^{f(x),[1,2]} \right) = \\ &= 3 A^{\sqrt[3]{x},[1,2]} = A^{x^2,[1,2]} + 5 A^{x,[1,2]} + A^{6,[1,2]} + (-1) A^{\cos x,[1,2]}. \end{aligned}$$

Nesta, já sabemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( A_n^{\sqrt[3]{x},[1,2]} \right) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{2}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( A_n^{x^2,[1,2]} \right) = \frac{7}{3}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( A_n^{x,[1,2]} \right) = \frac{3}{2}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( A_n^{6,[1,2]} \right) = 6$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( A_n^{\cos x,[1,2]} \right) = -2 \sin\left(\frac{3-\pi}{2}\right) \sin\frac{1}{2}$ . Daí, por substituição, provêm o resultado almejado. □

No capítulo anterior, encontramos uma fórmula para a área  $A^{\sin(ax+b),[\alpha,\beta]}$  e, conseqüentemente, se fizermos  $a = 1$  e  $b = 0$ , teremos a sua particularização para  $A^{\sin x, [\alpha, \beta]}$ . Por outro lado, sabemos pelos anos finais do ensino médio, que as funções de leis  $\sin x$  e  $\arcsen x$  são inversas uma das outra. Assim, sob ambas as condições apresentadas, a área  $A^{\arcsen x, [\alpha, \beta]}$  poderá ser encontrada bastando, para isso, transferirmos estas informações para o Teorema 9 apresentado anteriormente. Diante destas condições, enunciamos a seguinte

### Aplicação:

Seja  $f : I = [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  tal que  $f(x) = \arcsen x$ .

A área delimitada pelas curvas  $y = 0$ ,  $x = \alpha$  ( $\in I$ ),  $x = \beta$  ( $\in I$ ) e  $y = f(x)$  é dada por

$$A^{\text{arcsen}x, [\alpha, \beta]} = \sqrt{1 - \beta^2} - \sqrt{1 - \alpha^2} + (\beta \text{arcsen}\beta - \alpha \text{arcsen}\alpha).$$

*Demonstração.* De acordo com as hipóteses da proposição apresentada, para todo  $x_1$  e  $x_2$  em  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , sempre ocorrerá de  $f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$  o que, de fato, nos garante a monotonicidade estrita de  $f$  em  $I$ . Sobre estas condições, para  $f^{-1} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  tal que  $f^{-1}(x) = \text{sen}x$ , temos que

$$A^{\text{arcsen}x, [\alpha, \beta]} = \beta \text{arcsen}\beta - \alpha \text{arcsen}\alpha - A^{\text{sen}x, [\text{arcsen}\alpha, \text{arcsen}\beta]}.$$

Para simplificar a igualdade acima, começamos por determinar  $A^{\text{sen}x, [\text{arcsen}\alpha, \text{arcsen}\beta]}$ . Esta, segundo o Capítulo 6, é dada  $2 \text{sen}\left(\frac{\text{arcsen}\beta + \text{arcsen}\alpha}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\text{arcsen}\beta - \text{arcsen}\alpha}{2}\right)$ . Aplicando a fórmula trigonométrica  $2 \text{sen}A \text{sen}B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$  deduzimos a diferença  $\cos(\text{arcsen}\alpha) - \cos(\text{arcsen}\beta)$  que ainda pode ser expressa pela subtração dos radicais  $\sqrt{1 - \beta^2}$  e  $\sqrt{1 - \alpha^2}$ , pois

$$\begin{aligned} \begin{cases} \text{arcsen}\alpha = r \\ \text{arcsen}\beta = s \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \text{sen}r = \alpha \\ \text{sen}s = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos r = \sqrt{1 - \alpha^2} \\ \cos s = \sqrt{1 - \beta^2} \end{cases} \Rightarrow \cos r - \cos s = \\ &= \cos(\text{arcsen}\alpha) - \cos(\text{arcsen}\beta) = \sqrt{1 - \beta^2} - \sqrt{1 - \alpha^2}, \end{aligned}$$

finalizando, portanto, a demonstração.  $\square$

Motivados pelo interesse de encontrarmos áreas de regiões delimitadas por leis logarítmicas, vejamos primeiramente a aplicação da Definição 2, em funções do tipo exponencial, para que, em seguida, possamos articular a fórmula encontrada no Teorema 9.

### Aplicação

Seja a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = a^c x$ , onde  $0 < a (\in \mathbb{R}) \neq 1$ .

A área delimitada pelas curvas  $y = 0$ ,  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$  e  $y = f(x)$  é dada por

$$A^{a^c x, [\alpha, \beta]} = \frac{1}{c \ln a} (a^c \beta - a^c \alpha). \quad (7.1)$$

*Demonstração.* Tendo em vista que o domínio de  $f$  é dado pelo conjunto  $\mathbb{R}$ , sempre será possível encontrarmos cada uma das imagens  $\alpha + \frac{\beta - \alpha}{n} i$  para  $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$ . Assim, temos que

$$f\left(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{n} i\right) = a^c \left(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{n} i\right) = a^c \alpha + a^c \left(\frac{\beta - \alpha}{n} i\right) = a^c \alpha \left(a^c \frac{\beta - \alpha}{n}\right)^i.$$

Nesta, tomando o somatório  $\sum$  e, aplicando as propriedades do Exercício 2 vistas no Capítulo 4, justificam-se as igualdades

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left( \alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n} \right) &= \sum_{i=1}^n a^c \alpha \left( a^c \frac{\beta - \alpha}{n} \right)^i = a^c \alpha \sum_{i=1}^n \left( a^c \frac{\beta - \alpha}{n} \right)^i = \\ &= a^c \alpha \left( \left( a^c \frac{\beta - \alpha}{n} \right)^1 + \left( a^c \frac{\beta - \alpha}{n} \right)^2 + \left( a^c \frac{\beta - \alpha}{n} \right)^3 + \dots + \left( a^c \frac{\beta - \alpha}{n} \right)^n \right). \end{aligned}$$

Este produto possui, em seu segundo fator, uma soma geométrica. Então, diante da aplicação da fórmula obtida no Exercício 4 do Capítulo 4, segue que

$$a^c \alpha \sum_{i=1}^n \left( a^c \frac{\beta - \alpha}{n} \right)^i = a^c \alpha \left( \frac{a^c \frac{\beta - \alpha}{n} \left( 1 - \left( a^c \frac{\beta - \alpha}{n} \right)^n \right)}{1 - a^c \frac{\beta - \alpha}{n}} \right) = a^c \alpha \left( a^{c(\beta - \alpha)} - 1 \right) \frac{a^c \frac{\beta - \alpha}{n}}{a^c \frac{\beta - \alpha}{n} - 1}.$$

Concluimos, portanto, que

$$A_n^{a^c x, [\alpha, \beta]} = a^c \alpha a^{c(\beta - \alpha) - 1} (\beta - \alpha) \frac{\frac{1}{n} \left( a^{c(\beta - \alpha)} \right)^{\frac{1}{n}}}{\left[ a^{c(\beta - \alpha)} \right]^{\frac{1}{n} - 1}},$$

cujo limite<sup>4</sup>  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( A_n^{a^c x, [\alpha, \beta]} \right)$  nos conduz ao resultado 7.1.

□

### Consequência fundamental:

Seja  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = \log_a x \geq 0$  e  $0 < a \neq 1$ .

A área delimitada pelas curvas  $y = 0$ ,  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$  e  $y = f(x)$  é dada por

$$A^{\log_a x, [\alpha, \beta]} = \log_a x \left( \frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha e^{(\beta - \alpha)}} \right).$$

*Demonstração.* Começamos por lembrar das propriedades básicas logarítmicas estudadas no ensino médio, que são:

1.  $\gamma \log_A B = \log_A B^\gamma$ ,
2.  $\frac{1}{\log_B A} = \log_A B$ ,
3.  $\log_A B - \log_A C = \log_A \left( \frac{B}{C} \right)$ ,

<sup>4</sup> Pode-se provar através da regra de L'Hospital (1 661 – 1 704) que o limite do quociente  $\frac{\frac{1}{n} \left[ a^{c(\beta - \alpha)} \right]^{\frac{1}{n}}}{\left[ a^{c(\beta - \alpha)} \right]^{\frac{1}{n} - 1}}$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , é dado por  $\frac{1}{c(\beta - \alpha) \ln a}$ . (LIMA, 2016).

onde  $0 < a \neq 1$ ,  $B, C \in \mathbb{R}_+ / \{0\}$  e  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Devemos ressaltar que tanto para  $a > 1$  quanto para  $0 < a < 1$ ,  $f$  é estritamente monótona. Havendo dois casos cujas demonstrações são análogas, provaremos apenas aquele em que  $a > 1$ . O outro será deixado como exercício para o leitor.

Começamos por lembrar que a função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ | g(x) = a^x$  nada mais é do que a inversa de  $f$ . Portanto

$$A^{\log_a x, [\alpha, \beta]} = \beta \log_a \beta - \alpha \log_a \alpha - A^{a^x, [\log_a \alpha, \log_a \beta]}. \quad (7.2)$$

Contudo, pela Aplicação 7.1,  $A^{a^x, [\log_a \alpha, \log_a \beta]} = \frac{1}{\ln a (\beta - \alpha)}$ . Finalmente, fazendo esta substituição em (7.2), deduzimos que

$$\begin{aligned} A^{\log_a x, [\alpha, \beta]} &= \beta \log_a \beta - \alpha \log_a \alpha - \frac{1}{\ln a} (\beta - \alpha) = \log_a \left( \frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha} \right) - (\beta - \alpha) \log_a e = \\ &= \log_a \left( \frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha} \right) - \log_a e^{(\beta - \alpha)} = \log_a \left( \frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha e^{(\beta - \alpha)}} \right). \end{aligned}$$

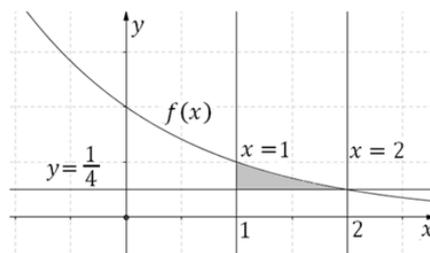
□

**Exemplo 24.** Determine a área da região delimitada pelas curvas  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$  e  $y = \frac{1}{4}$ .

### Solução

Neste problema, a Figura 29 mostra que a área pretendida obtém-se fazendo a diferença  $A^{\left(\frac{1}{2}\right)^x, [1, 2]} - A^{\frac{1}{4}, [1, 2]}$ , isto é,

Figura 29 – Diferença entre áreas por exponencial



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\begin{aligned} A^{\left(\frac{1}{2}\right)^x, [1, 2]} - A^{\frac{1}{4}, [1, 2]} &= \frac{1}{1 \ln(2^{-1})} \left( \left( \frac{1}{2} \right)^{1 \cdot 2} - \left( \frac{1}{2} \right)^{1 \cdot 1} \right) - \frac{1}{4} (2 - 1) = \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\ln 2} - 1 \right) = \frac{1}{4} (\log_2 e - 1). \end{aligned}$$

Portanto, a área solicitada é dada pelo produto  $\frac{1}{4} (\log_2 e - 1)$ .

**Exemplo 25.** Determine a área da região delimitada pelas curvas  $A^{\ln(2x-1), [1, 2]}$ .

**Solução**

Primeiramente, devemos perceber que se  $f(x) = \ln(2x-1)$ , então  $f$  pode ser indicado sob a forma  $f(x) = \ln 2 + \ln(x - \frac{1}{2})$ . Observa-se ainda, que a mudança de variável  $u = x - \frac{1}{2}$  gera as seguintes cadeias de equivalências

$$\begin{cases} f(x) = \ln 2 + \ln\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(u) = \ln 2 + \ln u \\ 1 \leq u + \frac{1}{2} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(u) = \ln 2 + \ln u \\ \frac{1}{2} \leq u \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Portanto,

$$A_n^{f(x), [1, 2]} = A_n^{g(u), [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]} = A_n^{\ln 2 + \ln u, [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]} = A_n^{\ln 2, [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]} + A_n^{\ln u, [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]}.$$

Assim, a área aproximada obtém-se fazendo

$$A^{f(x), [1, 2]} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( A_n^{\ln(2), [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]} + A_n^{\ln(u), [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]} \right) = \ln 2 \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) + \ln \left( \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)} \right),$$

cujo valor aproximado é 0,65.

**Atividades propostas**

1. Mostre que a área da região delimitada pelas curvas  $y = 0$ ,  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$  e  $f : \{x \in \mathbb{R} | x \geq -\frac{b}{a}\} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $y = \sqrt{ax+b}$  é dada por  $\frac{2}{3a} \left( (\alpha\beta + b)^{\frac{3}{2}} - (a\alpha + b)^{\frac{3}{2}} \right)$ .
2. Seja a função  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \arccos x$ . Prove que

$$A^{\arccos x, [\alpha, \beta]} = \frac{\pi}{2} (\beta - \alpha) + (\alpha \arcsen \alpha - \beta \arcsen \beta) - \left( \sqrt{1 - \beta^2} + \sqrt{1 - \alpha^2} \right).$$

**Sugestão:** Use a identidade trigonométrica  $\cos \theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ .

3. Prove que a  $A^{\arccos x, [0, \pi]}$  é dada pela unidade.
4. Determine  $A^{3^{2x-1}, [-2, 1]}$ .
5. Determine  $A^{\sqrt{x} + \ln(-1+3x), [2, 5]}$ .
6. Qual é o valor numérico da área da região delimitada pelas curvas  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} | y = x^2 + \sqrt{x} + \arcsen x + \ln x, x = \frac{1}{2}, x = 1$  e  $y = 0$ ?



## FERMAT-POTÊNCIAS RACIONAIS

O problema do cálculo da área da região delimitada pelas curvas  $y = x^k$ ,  $x = 0$ ,  $x = \alpha$  ( $> 0$ ) e  $y = 0$  estava realmente preocupando os grandes matemáticos do século XVI e XVII. Não só Pascal pôde demonstrá-la, conforme vimos no capítulo 5, mas também o matemático francês Pierre de Fermat (BOYER, 2012). Embora ambos tenham chegado ao mesmo resultado, a prova rigorosa feita por cada um deles, segue raciocínios ligeiramente distintos. Tendo em vista que ambas produzem o mesmo resultado, o método desenvolvido por Fermat permite expandir o valor de  $k$  para qualquer valor racional. Por este fato é que iremos estudá-la. Sem dúvidas, o maior mérito desta demonstração está na forma com que o intervalo  $[0, \alpha]$  foi repartido. Lembre-se que a maneira escolhida para a partição de um intervalo afeta diretamente os comprimentos das bases de cada um dos  $n$  retângulos que serão construídos.

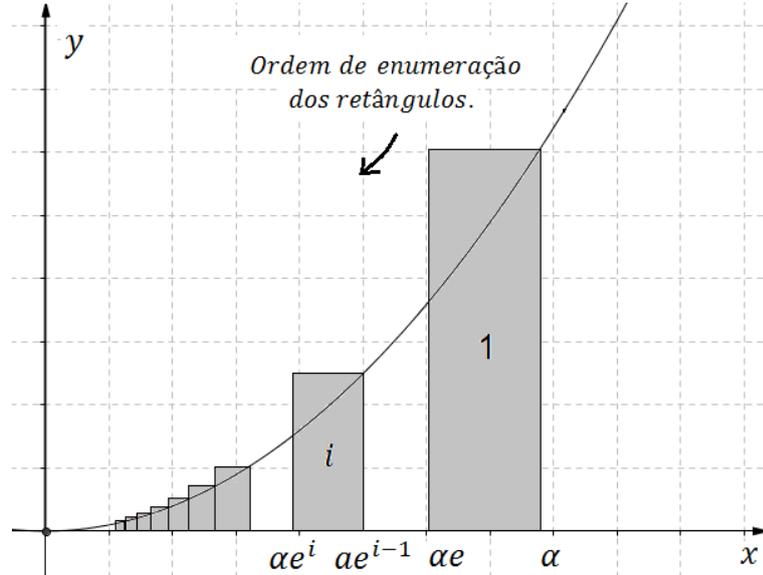
Fermat deve ter ficado horas, ou até mesmo dias, na busca de uma partição intervalar perfeita, isto é, aquela responsável pela produção do resultado esperado. Por persistência, após diversas tentativas, chegou a conclusão de que as bases dos  $n$  retângulos deveriam ser construídas sobre os intervalos  $I_1 = [\alpha e^n, \alpha e^{n-1}]$ ,  $I_2 = [\alpha e^{n-1}, \alpha e^{n-2}]$ ,  $\dots$ ,  $I_n = [\alpha e, \alpha]$  e que, além disto, os cálculos tornariam-se mais simples se os pés de suas alturas fossem tomados como sendo as extremidades direitas de cada um dos intervalos. Definiu ainda que  $0 < e < 1$ . É importante observarmos que a sequência dos comprimentos das bases dos  $n$  retângulos assim obtidos é crescente, uma vez que a razão entre os termos  $x_{r+1} = \alpha e^{n-r}$  e  $x_r = \alpha e^{n-r+1}$  da progressão geométrica  $(\alpha e^n, \alpha e^{n-1}, \alpha e^{n-2}, \dots, \alpha e, \alpha)$  para  $1 \leq r \leq n$  é maior do que um. Tais hipóteses nos permitem enunciarmos o

**Teorema 10 (Fermat).** Sejam  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}_+$  e  $y = x^k$ . A área da região delimitada pelas curvas  $y = 0$ ,  $y = x^k$  e  $x = \alpha > 0$  é dada por

$$A^{x^k, [0, \alpha]} = \frac{1}{k+1} \alpha^{k+1}.$$

*Demonstração.* Façamos, por construção,  $n$  retângulos sobre o intervalo  $[0, \alpha]$  cujas extremidades de cada base são definidas pelas extremidades de cada um dos intervalos  $I_{i+1} = [\alpha e^{n-i}, \alpha e^{n-i-1}]$  para  $0 \leq i \leq n-1$ ,  $\alpha > 0$  e  $0 < e < 1$ . Tomamos suas alturas como sendo as imagens  $f(\alpha e^{n-i-1})$ . A Figura 30 caracteriza os retângulos obtidos

Figura 30 – Escada de Fermat



Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos perceber que a área do retângulo genérico  $i$ , indicada por  $A_i^R$ , é expressa por  $A_i^R = (\alpha e^{i-1} - \alpha e^i) f(\alpha e^{i-1})$ . Esta, por sua vez, ainda pode ser escrita como  $A_i^R = (1 - e) e^{(k+1)(i-1)} \alpha^{k+1}$ . Se fizermos  $i$  variar no conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ , deduzimos que  $A_1^R = (1 - e) \alpha^{k+1}$ ,  $A_2^R = (1 - e) e^{1(k+1)} \alpha^{k+1}$ ,  $A_3^R = (1 - e) e^{2(k+1)} \alpha^{k+1}$ ,  $\dots$ ,  $A_n^R = (1 - e) e^{(n-1)(k+1)} \alpha^{k+1}$ . Nestas condições, a área aproximada  $A_n^{[0, \alpha], x^k}$  é dada pela soma das áreas dos  $n$  retângulos, isto é:

$$\begin{aligned} A_n^{[0, \alpha], x^k} &= A_1^R + A_2^R + A_3^R + \dots + A_n^R = \\ &= (1 - e) (1 + e^{1(k+1)} + e^{2(k+1)} + e^{3(k+1)} + \dots + e^{(n-1)(k+1)}) \cdot \alpha^{k+1}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

O fator central  $1 + e^{1(k+1)} + e^{2(k+1)} + e^{3(k+1)} + \dots + e^{(n-1)(k+1)}$  de 8.1 é uma soma geométrica de razão  $q = e^{k+1}$ . Por esta hipótese, podemos representá-la na forma de quociente por  $\frac{1 - (e^{k+1})^n}{1 - e^{k+1}}$ . Logo, realizando esta substituição em (8.1), decorre que

$$A_n^{[0, \alpha], x^k} = (1 - e) \left( \frac{1 - (e^{k+1})^n}{1 - e^{k+1}} \right) \alpha^{k+1}.$$

Se fizermos  $n \rightarrow \infty$ , teremos uma extensão infinita da quantidade de retângulos presentes na Figura 30. Entretanto, isso nos fornecerá apenas uma aproximação (por sobre) da área pretendida. Buscando encontrar o valor exato, podemos completar raciocínio se tomarmos as abscissas dos

pés das alturas próximas umas das outras. Basta então que se tenha  $e \rightarrow 1$ . Assim, justifica-se que

$$A^{x^k, [0, \alpha]} = \lim_{e \rightarrow 1} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{x^k, [0, \alpha]} \right) = \lim_{e \rightarrow 1} \left( \left( \frac{1-e}{1-e^{k+1}} \right) \alpha^{k+1} \right). \quad (8.2)$$

Pelo Problema 3 do Capítulo 4, sabemos que  $1 - e^{k+1}$  é idêntico ao produto  $(1 - e)(1 + e^1 + e^2 + e^3 + \dots + e^k)$ . Finalmente, efetuando esta substituição em 8.2 encontramos o resultado pretendido, pois

$$A^{x^k, [0, \alpha]} = \lim_{e \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1 + e^1 + e^2 + \dots + e^k} \alpha^{k+1} \right) = \frac{1}{k+1} \alpha^{k+1}.$$

□

Em sua demonstração, Fermat simplesmente fez a substituição de  $e = 1$  no quociente  $\frac{1}{1+e^1+e^2+e^3+\dots+e^k}$ . Embora tenha omitido muitas etapas, a engenhosidade e brilhantismo intelectual por ele apresentado é indiscutivelmente formidável! Além disto, esta técnica demonstrativa permitiu enunciar o

**Corolário 6.** A área da região delimitada pelas curvas  $x = \alpha > 0$ ,  $y = 0$  e  $y = x^{\frac{p}{q}}$ , para  $p$  e  $q$  naturais não nulos e  $x$  real (estritamente) positivo, é dada por  $A^{x^{\frac{p}{q}}, [0, \alpha]} = \frac{q}{p+q} \alpha^{\frac{p+q}{q}}$ .

*Demonstração.* Esta prova é similar a realizada no Teorema 10. Por este fato, apresentaremos apenas as partes que exigem algum artifício mais sofisticado.

De fato, vimos na demonstração do Teorema 10 que a área da região delimitada pelas curvas  $y = 0$ ,  $y = x^k$  e  $x = \alpha > 0$  com  $x > 0$  pode ser calculada pela fórmula 8.2. Se nela fizermos  $k = \frac{p}{q}$ , teríamos que

$$A^{[0, \alpha], x^{\frac{p}{q}}} = \lim_{e \rightarrow 1} \left( \frac{1-e}{1-e^{\frac{p+q}{q}}} \alpha^{\frac{p+q}{q}} \right). \quad (8.3)$$

Fazendo a substituição de  $e^{\frac{1}{q}} = u$  em 8.3 e aplicando novamente a identidade do Problema 3 do Capítulo 4, ficamos com as igualdades

$$\frac{1-u^q}{1-u^{p+q}} = \frac{1+u+u^2+\dots+u^{q-1}}{1+u+u^2+\dots+u^{p+q-1}}. \quad (8.4)$$

Para finalizarmos, é bom ressaltarmos que devido a continuidade da função de lei  $f(e) = e^{\frac{1}{q}}$  a implicação  $e \rightarrow 1 \Rightarrow u (= e^{\frac{1}{q}}) \rightarrow 1$  é, de fato, verdadeira. Assim, a área pretendida obtém-se fazendo

$$A^{[0, \alpha], x^{\frac{p}{q}}} = \lim_{u \rightarrow 1} \left( \frac{1 + u + u^2 + \dots + u^{q-1}}{1 + u + u^2 + \dots + u^{p+q-1}} \cdot \alpha^{\frac{p+q}{p}} \right) = \frac{\overbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}^{q \text{ valores iguais a } 1}}{\underbrace{1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{p+q \text{ valores iguais a } 1}} \alpha^{\frac{p+q}{q}} = \frac{q}{p+q} \alpha^{\frac{p+q}{q}}.$$

□

Vejam algumas aplicações.

**Exemplo 26.** Determine  $A^{\sqrt[3]{x^2}, [\alpha, \beta]}$  nos seguintes casos:

1.  $\alpha = 0$  e  $\beta = 3$ ,
2.  $\alpha = 2$  e  $\beta = 3$ .

### Solução

1. Perceba neste caso que  $\beta$  cumpre o papel de  $\alpha$  na fórmula obtida pelo Corolário 6.

Temos então que:

$$A^{\sqrt[3]{x^2}, [0, 3]} = \frac{3}{5} 3^{\frac{5}{3}} \cong 3,74$$

Portanto, a área solicitada é aproximadamente 3,74 unidades de área.

2. Notemos que a área desejada é dada pela diferença  $A^{\sqrt[3]{x^2}, [0, 3]} - A^{\sqrt[3]{x^2}, [0, 2]}$ . Portanto, efetuando os cálculos obtemos a aproximação  $(3,74 - 1,90 =) 1,84$  unidades de área.

**Exemplo 27.** Qual é o valor de  $A^{5\sqrt[3]{x^2} + \sin^2 x, [0, \frac{\pi}{2}]}$ ?

### Solução

Conforme sabido, podemos afirmar que

$$A^{5\sqrt[3]{x^2} + \sin^2 x, \frac{\pi}{2}} = 5 A^{\sqrt[3]{x^2}, [0, \frac{\pi}{2}]} + A^{\sin^2 x, [0, \frac{\pi}{2}]}.$$

Vale a pena lembrar que  $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$ , fazendo com que a área  $A^{\sin^2 x, [0, \frac{\pi}{2}]}$  seja desmembrada em  $A^{\frac{1}{2}, [0, \frac{\pi}{2}]} - \frac{1}{2} A^{\cos(2x), [0, \frac{\pi}{2}]}$ . Sob estas condições, omitindo os cálculos algébricos, temos que a área solicitada é aproximadamente  $\frac{3}{5} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{5}{3}} \cong 1,27$  unidades de área.

### Atividades propostas

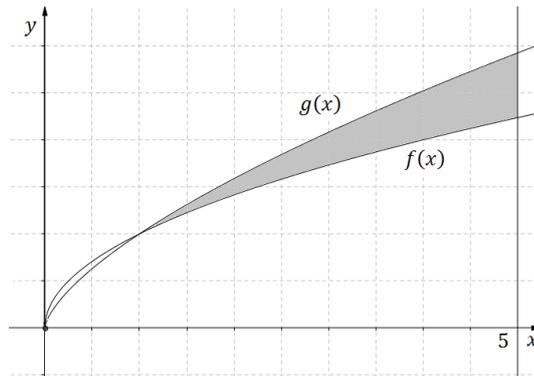
1. Determine  $A^{\sqrt[4]{x^3}, [\alpha, \beta]}$  nas seguintes condições
  - a)  $\alpha = 0$  e  $\beta = 4$ ,

b)  $\alpha = 2$  e  $\beta = 4$ .

2. Qual é o valor de  $A^{\frac{8}{3}} \sqrt[3]{x^5} - \cos^2 x$ ?

3. Determine a área da região delimitada pelas curvas  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x^{\frac{2}{3}}$  e  $x = 5$ . Use a Figura 31.

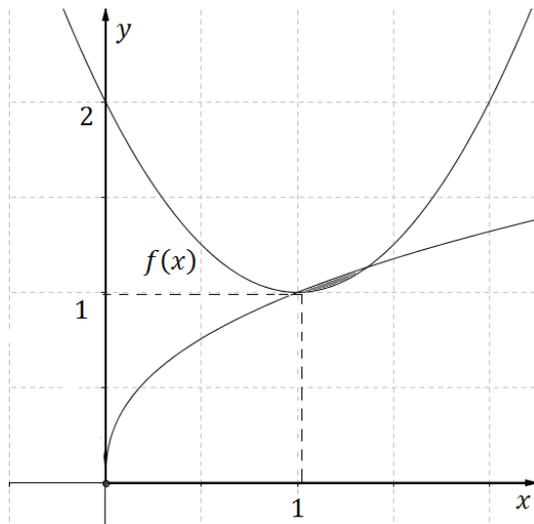
Figura 31 – Fermat: Diferença entre áreas 1



Fonte: Elaborada pelo autor.

4. Observe a Figura 32. Sabendo que  $f$  é uma função quadrática cujo vértice está sobre o ponto  $V(1,1)$ , determine a área da região delimitada pelas curvas  $y = f(x)$  e  $y = \sqrt[5]{x^2}$ .

Figura 32 – Fermat: Diferença entre áreas 2



Fonte: Elaborada pelo autor.

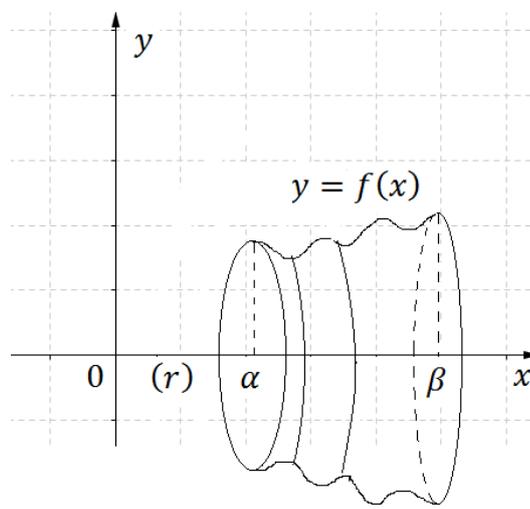


## VOLUME DE SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

Para calcularmos o volume de alguns sólidos como, por exemplo, a esfera, utilizaremos o método de fatiamento cilíndrico. Este consiste na decomposição da figura em  $n$  partes cilíndricas de bases congruentes, na qual cada uma delas foi gerada através da rotação de um retângulo ao redor de um eixo. Finalmente somando cada um desses volumes, obtém-se, em alguns casos, uma fórmula fechada para o volume aproximado em função do número  $n$  de cilindros. Se tomarmos o seu limite para  $n \rightarrow +\infty$  obteremos o volume real da figura.

Seja  $\Gamma$  um sólido espacial. Dizemos que  $\Gamma$  é gerado por *revolução* se existir um plano  $\pi$ , uma região  $R \subset \pi$  e uma reta  $r \subset \pi$  tal que  $\Gamma$  é obtida pela rotação de  $R$  em torno de  $r$ . No caso de  $r$  ser o eixo  $Ox$ , e  $R = \mathfrak{R}^{f(x),[\alpha,\beta]}$ , isto é,  $R$  ser a região delimitada por  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$ ,  $y = 0$  e  $y = f(x) \geq 0$ , o volume do sólido  $\Gamma$  fica sendo a região espacial obtida pela rotação da região  $\mathfrak{R}$  ao redor do eixo  $Ox$ . Figura 33.

Figura 33 – Superfície de revolução



Fonte: Elaborada pelo autor.

Sob estas condições, temos o

**Teorema 11.** Dado  $n \in \mathbb{N}$  e  $\Gamma$  o sólido gerado pela rotação da região  $\mathfrak{R}^{f(x) \geq 0, [\alpha, \beta]}$  ao redor do eixo  $Ox$ . Se dividirmos o segmento  $[\alpha, \beta]$  em  $n$  partes congruentes e considerarmos os  $n$  cilindros gerados pela rotação dos  $n$  retângulos de bases definidas pelos subintervalos  $I_i = [\alpha + i \cdot \frac{\beta - \alpha}{n}, \alpha + (i+1) \cdot \frac{\beta - \alpha}{n}]$ ,  $0 \leq i \leq n-1$  e alturas obtidas pelas imagens de  $f$  para  $x \in \{\alpha + 1 \cdot \frac{\beta - \alpha}{n}, \alpha + 2 \cdot \frac{\beta - \alpha}{n}, \alpha + 3 \cdot \frac{\beta - \alpha}{n}, \dots, \alpha + n \cdot \frac{\beta - \alpha}{n}\}$ , então a soma dos volumes destes  $n$  cilindros será o volume aproximado do sólido  $\Gamma$  determinado por

$$V_n^{\Gamma, [\alpha, \beta]} = \pi \left( \frac{\beta - \alpha}{n} \right) \sum_{i=1}^n \left( f \left( \alpha + i \left( \frac{\beta - \alpha}{n} \right) \right) \right)^2.$$

*Demonstração.* Da geometria espacial, sabemos que o volume de qualquer cilindro circular é dado pelo produto da área do círculo pela sua altura. De acordo com as hipóteses do enunciado, podemos deduzir que o cilindro circular  $i$  terá altura dada pelo quociente  $\frac{\beta - \alpha}{n}$  e raio da base dada pela imagem de  $f$  para  $x_i = \alpha + i \cdot \frac{\beta - \alpha}{n}$  onde  $1 \leq i \leq n$ . Assim sendo, o volume do cilindro circular  $i$  será dado pelo produto  $\pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \left( \frac{\beta - \alpha}{n} \right)$ . Portanto, de acordo com as hipóteses do problema juntamente com estas informações, o volume aproximado do sólido  $\Gamma$  é obtido fazendo

$$\begin{aligned} V_n^{\Gamma, [\alpha, \beta]} &= V_1^{\text{cilindro}} + V_2^{\text{cilindro}} + \dots + V_n^{\text{cilindro}} = \sum_{i=1}^n V_i^{\text{cilindro}} \\ &= \sum_{i=1}^n \pi (f(x_i))^2 \left( \frac{\beta - \alpha}{n} \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$V_n^{\Gamma, [\alpha, \beta]} = \pi \left( \frac{\beta - \alpha}{n} \right) \sum_{i=1}^n (f(x_i))^2 = \pi \left( \frac{\beta - \alpha}{n} \right) \sum_{i=1}^n \left( f \left( \alpha + i \left( \frac{\beta - \alpha}{n} \right) \right) \right)^2.$$

□

**Observação:** O símbolo  $V_n^{\Gamma, I}$  deve ser lido como:

Volume aproximado da figura  $\Gamma$  no intervalo fechado  $I$ , para um número arbitrário  $n$  de cilindros. Além disto, o volume exato de  $\Gamma$  indicado pela notação  $V^{\Gamma, I}$ , é dado pelo limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( V_n^{\Gamma, [\alpha, \beta]} \right).$$

**Aplicação: Volume da esfera**

O volume de uma esfera de raio  $r$  é dado por  $\frac{4}{3} \pi r^3$ .

*Demonstração.* Notemos que qualquer esfera de raio  $r$  pode ser gerada através da rotação de um semicírculo de equação  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $0 \leq y < r$  ao redor do eixo  $Ox$ . Além disso, o seu volume pode ser calculado pelo produto  $2 V_n^{\Gamma, [0, r]}$  sendo que  $V_n^{\Gamma, [0, r]}$  é o volume da superfície gerada pela rotação da região  $\Re^{\sqrt{r^2 - x^2}, [0, r]}$  em torno do eixo  $Ox$ . Posto isso, pelo Teorema 11, temos que

$$\begin{aligned} 2 V_n^{\Gamma, [0, r]} &= 2 \pi \frac{r-0}{n} \sum_{i=1}^n \left( f \left( 0 + i \left( \frac{r-0}{n} \right) \right) \right)^2 = \\ &= 2 \pi \frac{r}{n} \sum_{i=1}^n \left( \sqrt{r^2 - \left( i \cdot \frac{r}{n} \right)^2} \right)^2 = \\ &= 2 \pi \frac{r}{n} \sum_{i=1}^n \left( r^2 - \left( i \cdot \frac{r}{n} \right)^2 \right) = 2 \pi \frac{r}{n} \sum_{i=1}^n \left( r^2 - i^2 \frac{r^2}{n^2} \right). \end{aligned} \quad (9.1)$$

Em 9.1, após aplicarmos as propriedades de somatórios, inferimos que

$$2 V_n^{\Gamma, [0, r]} = 2 \pi \frac{r}{n} \left( n r^2 - \frac{r^2}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 \right),$$

ou ainda,

$$2 V_n^{\Gamma, [0, r]} = 2 \left( \pi r^3 - \pi \frac{r^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \right). \quad (9.2)$$

Permutando  $\sum_{i=1}^n i^2$  pelo quociente  $\frac{n^3 (1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n})}{6}$ , 9.2 assume a forma

$$2 V_n^{\Gamma, [0, r]} = 2 \left( \pi r^3 - \pi r^3 \frac{(1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n})}{6} \right),$$

cujos volume almejado é dado pelo limite de  $2 V_n^{\Gamma, [0, r]}$  para  $n \rightarrow +\infty$ , isto é

$$V^{\Gamma, [0, r]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 \left( \pi r^3 - \pi r^3 \frac{(1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n})}{6} \right) \right) = 2 \left( \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

□

### Exemplo 28.

O dono de uma rede de postos de combustíveis pretende comprar um novo modelo de vagão para transporte, com grande capacidade de armazenamento. Entretanto, dois deles possuem os mesmos preços, variando apenas o formato onde os combustíveis são transportados. No vagão Helter, o formato do depósito é dado pela rotação de  $f$  ao redor do eixo  $Ox$ . Já no vagão de marca concorrente Spensin, seu depósito é descrito pela rotação de  $g$  sobre eixo  $Ox$ . Pergunta-se: Qual é a marca do vagão que tem a maior capacidade de armazenamento?

Dados:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x^2 - 4x - 3}, & -3 \leq x \leq -2 \\ 1, & -2 < x \leq 2 \\ \sqrt{-x^2 + 4x - 3}, & 2 < x \leq 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x^2 - 2x + 3}, & -3 \leq x \leq -2 \\ 2, & -1 < x \leq 1 \\ \sqrt{-x^2 + 2x + 3}, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Suponha que a cada um centímetro da construção geométrica dos gráficos de  $f$  e  $g$  correspondem a 2 metros na realidade.

**Sugestão:** Use uma calculadora científica para aproximar suas respostas.

### Solução

Notemos que para  $-3 \leq x \leq -2$  e para  $2 < x \leq 3$ , as equações  $f(x) = \sqrt{-x^2 - 4x - 3}$  e  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$  geram, cada uma delas, um quarto de circunferências de raios *unitários*, uma vez que ambas as leis podem ser escritas sobre as formas  $(x+2)^2 + y^2 = 1$  e  $(x-2)^2 + y^2 = 1$ . Por estas hipóteses, ao rotacionarmos estas curvas ao redor do eixo  $Ox$  teremos duas semiesferas cuja adição dos volumes é equivalente ao volume de uma esfera de raio 1, isto é,  $\frac{4}{3} \pi \cdot 1^3 = \frac{4\pi}{3} \text{ cm}^3$ , isto é,  $\frac{32\pi}{3} \text{ m}^3$ . Analogamente, ao rotacionarmos a equação  $f(-2 < x \leq 2) = 1$  sobre o eixo  $Ox$ , obtemos um cilindro de raio da base também *unitário* cujo volume é  $\pi (2+2) = 4\pi \text{ cm}^3$ , ou seja,  $32\pi \text{ m}^3$ . Logo, o volume total do depósito do vagão Helter é aproximadamente  $134,04 \text{ m}^3$ .

Vejam agora qual é a capacidade do vagão da marca Sppensin. Da mesma forma, podemos notar que a rotação das curvas  $g(-3 \leq x \leq -2) = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$  e  $g(1 < x \leq 3) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$  ao redor do eixo  $Ox$  geram duas semiesferas com o mesmo volume, visto que seus raios são ambos iguais a 2. Assim, o volume dessas curvas é equivalente ao volume de uma esfera de raio  $r = 2$ , ou seja,  $\frac{4}{3} \pi 2^3 = \frac{32}{3} \pi \text{ cm}^3$ , ou ainda,  $\frac{256\pi}{3} \text{ m}^3$ . A rotação da curva  $g(-1 < x \leq 1) = 2$  gera um cilindro de raio da base dado por 2 metros, cujo volume é  $\pi 2^2 (1+1) = 8\pi \text{ cm}^3$ , ou seja,  $64\pi \text{ m}^3$ . Então, o volume total do depósito de combustíveis do vagão da marca Sppensin é  $469,14 \text{ m}^3$ .

Concluimos que o vagão da marca Sppensin tem uma maior capacidade de armazenamento de combustível.

**Exemplo 29.** Com o intuito de inovar o designe dos seus remédios, a indústria farmacêutica Isopropwhey fez o formato de seus comprimidos através da figura formada pela da rotação da curva  $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R} | f(x) = \cos x$ , ao redor do eixo  $Ox$ . Sabendo que cada caixa contém 30 comprimidos, responda:

1. O volume, em  $\text{cm}^3$ , de cada comprimido,
2. Se um paciente precisa tomar dosagem de  $100 \text{ cm}^3$  deste medicamento, quantos comprimidos o médico deverá indicar?

**Sugestão:** Considere  $\pi \cong 3,14$ .

### Solução

1. Tendo em vista que a função de lei  $f(x) = \cos x$  é par para todo  $x$  real, podemos afirmar que o volume do sólido  $\Gamma$ , gerado pela rotação da região  $\mathfrak{R}^{\cos x, [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$  ao redor do eixo  $Ox$ , é dado pelo produto  $2 \cdot V^{\cos x, [0, \frac{\pi}{2}]}$ . Por satisfazer as hipóteses do Teorema 11, temos que

$$\begin{aligned} 2 V_n^{\Gamma, [0, \frac{\pi}{2}]} &= 2 \pi \left( \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{n} \right) \sum_{i=1}^n \left( f \left( 0 + i \left( \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{n} \right) \right) \right)^2 = \\ &= \frac{\pi^2}{n} \sum_{i=1}^n \left( \cos \left( i \frac{\pi}{2n} \right) \right)^2 = \\ &= \frac{\pi^2}{n} \left( \cos^2 \left( 1 \frac{\pi}{2n} \right) + \cos^2 \left( 2 \frac{\pi}{2n} \right) + \dots + \cos^2 \left( n \frac{\pi}{2n} \right) \right). \end{aligned} \quad (9.3)$$

Na igualdade 9.3, tomemos os quadrados dos  $n$  cossenos presentes e façamos, separadamente, a substituição trigonométrica  $\cos^2 a = \frac{1}{2} (1 + \cos 2a)$ . Assim, obtemos as igualdades

$$\begin{aligned} 2 V_n^{\Gamma, [0, \frac{\pi}{2}]} &= \frac{\pi^2}{n} \left( \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \left( 2 \left( 1 \frac{\pi}{2n} \right) \right) \right) + \dots + \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \left( 2 \left( n \frac{\pi}{2n} \right) \right) \right) \right) = \\ &= \frac{\pi^2}{2n} \left( n + \cos \left( 1 \frac{\pi}{n} \right) + \cos \left( 2 \frac{\pi}{n} \right) + \dots + \cos \left( n \frac{\pi}{n} \right) \right) = \\ &= \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2n} \left( \cos \left( 1 \frac{\pi}{n} \right) + \cos \left( 2 \frac{\pi}{n} \right) + \dots + \cos \left( n \frac{\pi}{n} \right) \right). \end{aligned} \quad (9.4)$$

Pelo problema 3 do Capítulo 4, o fator  $\cos \left( 1 \frac{\pi}{n} \right) + \cos \left( 2 \frac{\pi}{n} \right) + \dots + \cos \left( n \frac{\pi}{n} \right)$  presente na segunda parcela de 9.4, pode ser permutado por  $\frac{\text{sen} \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{2n} - \frac{1}{2}}{2 \text{sen} \frac{\pi}{2n}}$ , ou ainda, pela diferença  $\frac{\text{sen} \left( \pi \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) \right)}{2 \text{sen} \frac{\pi}{2n}} - \frac{1}{2}$  gerando, portanto, as igualdades:

$$\begin{aligned} 2 V_n^{\Gamma, [0, \frac{\pi}{2}]} &= \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2n} \left( \frac{\text{sen} \left( \pi \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) \right)}{2 \text{sen} \left( \frac{\pi}{2n} \right)} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2n} \frac{\text{sen} \left( \pi \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) \right)}{2 \text{sen} \left( \frac{\pi}{2n} \right)} - \frac{\pi^2}{4} = \\ &= \frac{\pi^2}{2} + \frac{\frac{\pi^2}{2n}}{2 \text{sen} \frac{\pi}{2n}} \text{sen} \left( \pi \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) \right) - \frac{\pi^2}{4n} = \\ &= \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi}{2} \frac{1}{\text{sen} \frac{\pi}{2n}} \text{sen} \left( \pi \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) \right) - \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{n}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Inscrevendo 9.5 na notação simbólica "lim $_{n \rightarrow \infty}$ ", obtemos o volume de cada comprimido procurado, pois

$$2 V^{\Gamma, [0, \frac{\pi}{2}]} = \frac{\pi^2}{2} + 0 + 0 = \frac{\pi^2}{2} \text{ cm}^3.$$

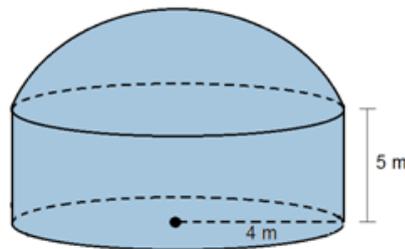
2. A quantidade mínima que deverá ser tomada pelo paciente é de 21 comprimidos, uma vez que  $100 \div \frac{\pi^2}{2} \cong 20,28 \text{ cm}^3$ .

### Atividades propostas

- No bairro Leporace, em Franca SP, há uma caixa de água cujo formato é dado pela Figura 34. Sabendo que a parte superior representa uma semiesfera de raio 4 metros, determine:
  - O volume total da caixa de água,
  - o volume restante sabendo que em um dia de calor foram consumidos 74% de toda a água da caixa.

**Sugestão:** Faça  $\pi \cong 3$

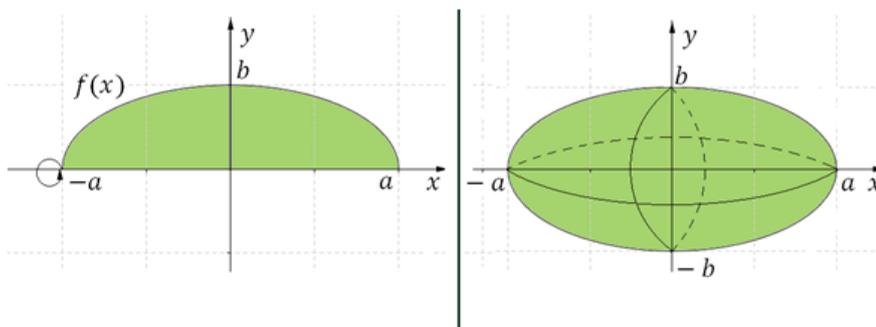
Figura 34 – Caixa de água



Fonte: Elaborada pelo autor.

- Antônio, muito curioso, estava interessado em determinar o volume de uma melancia. Para isso, ele observou que a figura da fruta pode ser obtida através da rotação da função  $f : \{x \in \mathbb{R}; -a \leq x \leq a\} \rightarrow \mathbb{R} | f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$  ao redor do eixo  $Ox$ , conforme indica a Figura 35.

Figura 35 – Elipsóide: Superfície de revolução



Fonte: Elaborada pelo autor.

Desta maneira, após a realização de alguns cálculos algébricos, chegou a seguinte fórmula  $V_{\Gamma, [-a, a]} = \frac{4}{3} \pi a b^2$ . Demonstre a validade da fórmula apresentada por Antônio e, calcule

---

o volume em  $cm^3$  de uma melancia cujo formato pode ser representado pela rotação da função  $g : \{x \in \mathbb{R}; -25 \leq x \leq 25\} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(x) = \frac{3}{5} \sqrt{625 - x^2}$  ao redor do eixo  $Ox$ .

3. Determine o volume em  $dm^3$  de uma bala de canhão sabendo que esta é descrita através da rotação de

$$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = \begin{cases} \sqrt[2]{x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \leq 4 \end{cases},$$

ao redor do eixo  $Ox$ .



## REFERÊNCIAS

---

---

ANTON H. E BIVENS, I. e. D. S. **Cálculo, vol 1**. Porto Alegre: Bookman, 2007. Citado na página 65.

BOYER, C. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Universidade da São Paulo, 2012. Citado na página 83.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. São Paulo: Editora Unicamp, 2004. Citado nas páginas 15 e 16.

FILHO, E. d. A. **Iniciação à Lógica Matemática**. São Paulo: Nobel, 2015. Citado na página 47.

GUIDORIZZI, H. **Um curso de Cálculo, vol 1**. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2015. Citado nas páginas 26, 43 e 65.

IEZZI G. E DOLCE, O. e. M. A. **Matemática e Realidade**. São Paulo: Atual editora, 2007. Citado na página 20.

LIMA, E. L. **Análise Real, vol 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. Citado nas páginas 26 e 79.

MATTOS, B. D. T. **Provando e Praticando**. Rio de Janeiro: Interciência, 2017. Citado nas páginas 36 e 51.

STEWART, J. **Cálculo, vol 1**. São Paulo: Cengage Learning, 2016. Citado na página 46.

WAGNER, E. **Teorema de Pitágoras e Áreas**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. Citado na página 20.

