UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Fabian Kosme Castello Branco Santos

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E EQUIVALÊNCIA DE ÁREAS

Ouro Preto

2017

FABIAN KOSME CASTELLO BRANCO SANTOS

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E EQUIVALÊNCIA DE ÁREAS

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Luiz Gustavo de Oliveira Carneiro
Coorientadora: Prof. Ma. Monique Rafaella A. de Oliveira

Ouro Preto
2017

S591c Santos, Fabian Kosme Castello Branco.
Construções geométricas e equivalência de áreas [manuscrito] / Fabian Kosme Castello Branco Santos. - 2017.
74f.: figuras.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Gustavo de Oliveira Carneiro.
Coorientadora: Profª. MScª. Monique Rafaella Anunciação de Oliveira.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.
Área de Concentração: Matemática com oferta nacional.

1. Geometria euclidiana . 2. Geometria plana. 3. Construções geométricas. 4. Quadratura. I. Carneiro, Luiz Gustavo de Oliveira . II. Oliveira, Monique Rafaella Anunciação de. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Titulo.

CDU: 514.12

Catalogação: www.sisbin.ufop.br

"Construções Geométricas e Equivalência de Áreas"

Autor: Fabian Kosme Castello Branco Santos

Dissertação defendida em 12 de dezembro de 2017 e aprovada por banca examinadora constituída pelos professores:

Luiz Gustavo de Oliveira Carneiro (Orientador)
Universidade Federal de Ouro Preto

Monique Rafaella Anunciação de Oliveira

Monique Rafaella A. de Oliveira (Coorientadora)
Universidade Federal do Ouro Preto

Felipe Rogério Pimentel
Universidade Federal do Ouro Preto

Jane Lage Bretas

Jane Lage Bretas
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Dedico esse trabalho a minhas filhas, obrigado por tudo! A minha mãe, obrigado pela vida! Ao meu pai, saudades eternas. Dedico também esse trabalho aos professores, que de uma forma fizeram a grande diferença em minha vida acadêmica.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente a Deus, que em todas as etapas de minha vida, esteve presente, me amparando e me fortalecendo cada vez mais, não me deixando cair ao enfrentar os obstáculos constantemente encontrados em meu caminho.

Agradeço também às minhas filhas Anna Clara e Isadora, que sempre me apoiaram e presenciaram meu empenho, sendo pacientes, parceiras e entendendo que por muitas vezes a dedicação que não pude propiciar à elas foi devido ao meu estudo. Porém, meu esforço houve um propósito e tenho certeza que minhas filhas entenderam a grande importância desse esforço. Dessa forma, pude mostrar à elas da forma mais concreta possível o quanto o estudo é importante na vida de alguém. Hoje tenho a certeza que me consideram um exemplo, um orgulho de um pai batalhador e esforçado.

Agradeço ainda aos meus professores, em especial, Monique, Edney e Gil Fidelix que de uma maneira sutil, deixaram em evidência a parceria em profissionalismo e humanismo. Aos meus colegas de curso, que juntos nos tornamos uma equipe , nos dedicando e nos esforçando para conquistarmos nosso objetivo, destacando Lívia, Francisca, Daniele e Mariana, pessoas competentes, que fazem a diferença. Mas não menos especiais, serei sempre grato aos meus colegas Marcelo e Renato, fica o meu agradecimento especial.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

Resumo

Este trabalho tem na Geometria o seu principal fundamento com o intuito de contribuir no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Nele apresentaremos uma síntese do desenvolvimento da Geometria desde seu possível surgimento até os dias atuais, onde nossa ênfase maior dar-se-á no processo conhecido como equivalência de áreas e como ele era usado para o cálculo de áreas de figuras planas. Sendo assim, construiremos, com base em proposições encontradas no livro Elementos de Euclides, todo o processo para a quadratura de regiões poligonais. Apresentaremos uma série de exemplos a serem aplicados usando os recursos do GeoGebra que poderão contribuir para dinamizar o processo de aprendizagem do conteúdo envolvendo equivalência de áreas de figuras planas.

Palavras-chave: Geometria euclidiana plana. Construções geométricas. Equivalência de áreas. Quadratura.

Abstract

This work has in Geometry its main foundation with the intention to contribute in the process of teaching mathematics. In it we will present a synthesis of the development of Geometry from its possible emergence to the present day, where our major emphasis will be in the process known as area equivalence and how it was used for calculate the area of plane figures. Thus, we will construct, based on propositions found in the book of Euclid's Elements, the whole process for the quadrature of polygonal regions. We will present a series of examples to be applied using GeoGebra resources that can contribute to dynamize the learning process of content involving areas of plane figures.

Keywords: Plane euclidean geometry. Geometric constructions. Areas equivalence. Quadrature.

Conteúdo

1 Introdução

Nosso trabalho consiste em apresentar aos leitores a aplicação de desenhos geométricos em equivalências de áreas através de construções geométricas básicas, ou seja, através de um conjunto de procedimentos para a construção de formas geométricas, resolução de problemas e demonstrações de algumas das proposições de Euclides com a utilização de régua não-graduada e compasso. Inicialmente, vamos voltar na história e destacar alguns fatos importantes que contribuíram para o desenvolvimentos da geometria, extraídos de [2] e [4].

O Papiro de Rhind ou Ahmes (1650 a.C.), documento egípcio de papiro com cerca de 5 m de comprimento por 0,30 m de largura que continha a solução de problemas de diversas áreas da matemática, principal fonte do conhecimento matemático do Egito antigo, continha 85 problemas sobre questões variadas, nas quais apenas vinte e seis se referem a geometria, a maioria provindo de mensuração para cálculos de áreas de terras e volumes de celeiros. Nesse papiro, em alguns dos problemas, os Egípcios calcularam áreas de triângulos e retângulos.

No capítulo 2 de [1] é apresentado o problema 51 do Papiro de Rhind, mostrando que a área de um triângulo isósceles era encontrada tomando a metade do que chamaríamos de base e multiplicando-a pela altura.

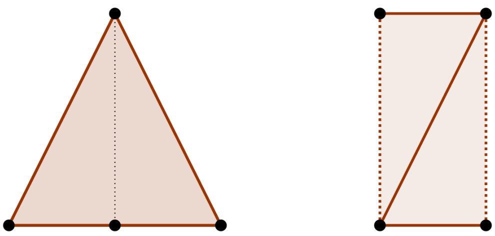


Figura 1.1: Método para cálculo da área de um triângulo isósceles

De fato o triângulo isósceles pode ser pensado como dois triângulos retângulos, um dos quais pode ser deslocado de modo que os dois juntos formem um retângulo de mesma área que o triângulo isósceles inicial.

Analogamente, pode-se calcular a área do trapézio isósceles, transformando-o em um retângulo, como ilustrado na figura 1.2.

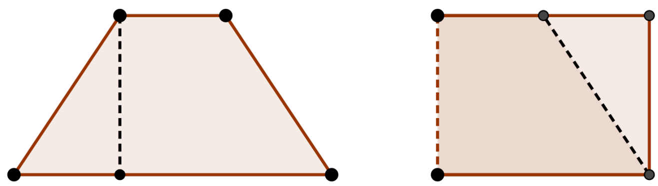


Figura 1.2: Método para cálculo da área do trapézio

Nesse momento da história, já podemos fazer uma associação desses métodos de transformar triângulos e trapézios isósceles em retângulos com o início da teoria de congruências e das ideias de demonstrações em geometria, mas não há evidências de os egípicios terem ido além. Ao invés disso, em sua geometria faltava uma distinção clara entre as relações que são exatas e as que são apenas aproximações [2][3].

Entre 330 a.C. e 275 a.C., viveu o geômetra grego Euclides, autor de “Os Elementos”, obra que contém as principais descobertas geométricas de seus precursores. Euclides atraiu um grande número de discípulos, o que possibilitou a propagação de suas ideias, entre elas, que a coincidência de duas figuras planas por superposição era um passo para concluir que elas apresentam a mesma área, ou seja, eram figuras equivalentes. Assim, quando Euclides enunciou em suas proposições que triângulos de mesmas bases situadas entre as mesmas paralelas são iguais (equivalentes) e que paralelogramos de mesmas bases situadas entre as mesmas paralelas também são iguais (equivalentes), ele estaria se referindo que essas figuras apresentam a mesma área.

Nessa fase da história, os gregos transformaram a geometria empírica dos egípcios, a que atendia a necessidade daquela época, em geometria sistemática e demonstrativa. No século XVII, o conceito de área reapareceu e com ele apareceram também os problemas de quadraturas, uma forma de comparar, segundo suas áreas, duas figuras planas sendo conhecida a área de uma delas. Esse será um tema que discutiremos na seção 5.3.

Utilizaremos como recurso tecnológico nesse trabalho o software GeoGebra, que simulará os traçados executados por esses instrumentos.

No capítulo 2, vamos mostrar as principais construções geométricas com o uso de régua não-graduada e compasso necessárias em nosso trabalho. Tais construções serão de grande importância para o bom entendimento e desenvolvimento das construções apresentadas posteriormente.

Apresentaremos, no capítulo 3, o conceito de área de uma região poligonal, bem como a forma de se obter tais áreas. No capítulo 4, introduziremos um dos contextos fortes do nosso trabalho, a equivalência de áreas, que mostrará que qualquer região poligonal pode ser representada por uma outra região poligonal com um número maior ou menor de lados e que seja equivalente, ou seja, que apresenta a mesma área que a primeira região poligonal.

E por fim, no capítulo 5, mostraremos algumas aplicações em atividades propostas para o ensino médio. Tais atividades usam as construções fornecidas nesse trabalho como uma forma de explicitar o quão importantes e necessárias são as proposições de Euclides.

2 Preliminares

2.1 Notações

Nesta seção apresentaremos algumas notações que serão utilizadas em nosso trabalho.

Um ponto será representado por uma letra maiúscula e uma reta por uma letra minúscula ou por dois pontos pertencentes a ela, por exemplo a reta que passa pelos pontos A e B será representada por $\overleftrightarrow{AB}$. Representaremos um segmento de reta pelos seus pontos de extremidades, sendo assim, um segmento com extremidades nos pontos A e B será denotado por AB e sua medida representada por $\overline{AB}$. Uma semirreta que tem origem no ponto A e que passa pelo ponto B será representada por esses pontos, cuja primeira referência será o ponto de extreminade seguida do outro ponto, ou seja, $\overrightarrow{AB}$. Para denotarmos que uma reta a é paralela a uma reta b escreveremos $a \parallel b$. Se duas retas a e b são perpendiculares, então escreveremos $a \perp b$.

Quando nos referirmos a um triângulo cujos vértices são os pontos A, B e C usaremos apenas ΔABC, mas se nos referirmos à um polígono com n lados, usaremos a notação $A_1A_2 \cdots A_n$. A distância entre um ponto A e uma reta r será denotada por $\mathrm{dist}(A, r)$. Uma circunferência será denotada por uma letra grega maiúscula seguida do seu centro e o valor do seu raio, por exemplo a circunferência Λ de centro C e raio r será representada por $\Lambda(C, r)$. E por fim, para denotarmos a congruência de duas figuras usaremos a notação $\equiv$.

2.2 Polígonos semelhantes

Polígonos são regiões planas fechadas, constituídas de lados, vértices e ângulos. Dizemos que dois polígonos são semelhantes quando eles possuem o mesmo número de lados e se adéquam às seguintes condições: possuem ângulos iguais e lados correspondentes proporcionais com razão de semelhança igual entre dois lados correspondentes.

De acordo com o valor da razão de semelhança, podemos observar as seguintes situações:

- ampliação: razão entre os lados correspondentes maior que 1.
- redução: razão entre os lados correspondentes menor que 1.

Os triângulos da figura 2.1 são semelhantes, pois possuem os três ângulos iguais, sendo $B\hat{A}C = G\hat{F}D$, $A\hat{C}B = F\hat{D}G$, $C\hat{B}A = D\hat{G}F$ e lados correspondentes proporcionais com razão de semelhança igual a k, sendo $\frac{\overline{AB}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DG}} = k$, onde k é um número real denominado constante de proporcionalidade.

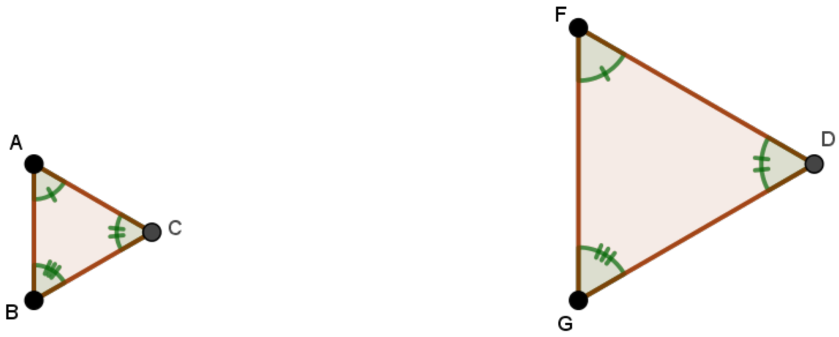


Figura 2.1: Triângulos semelhantes

A semelhança entre figuras possuem diversas aplicações no cotidiano, como na elaboração de maquetes, ampliação de fotos, medições de distância (teorema de Tales) entre outras questões envolvendo proporcionalidade na Geometria.

2.3 Casos de congruência de triângulos

Ofertamos aqui os cinco casos de congruência de triângulos e suas notações. No caso de congruência de triângulos é possível descobrir se um triângulo é congruente ao outro apenas comparando os seus elementos.

Bem sabemos que o triângulo possui seis elementos (três lados e três ângulos). Estes elementos vão determinar a congruência dos triângulos de modo que podemos afirmar dois fatos:

- A congruência desses seis elementos determina a congruência desses triângulos.
- A congruência de dois triângulos determina a congruência dos seis elementos.

Para tanto, devemos estudar os possíveis casos de comparação destes elementos a fim de encontrar as congruências. Todos os casos de congruência de triângulos indicam que apenas 3 medidas precisam ser verificadas. Quando dois triângulos se enquadram em algum desses casos, não é necessário verificar o restante de suas medidas. Já se pode concluir que os dois triângulos são congruentes.

Vejamos os casos de congruências:

1. Caso $L.L.L.$: Se os três lados de um triângulo são congruentes aos três lados do outro triângulo, então os triângulos são congruentes.

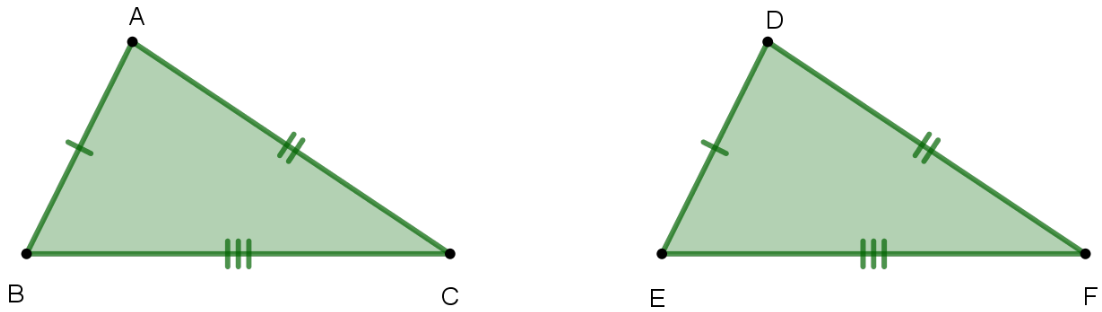


Figura 2.2: Caso $L.L.L.$

Na Figura 2.2 temos:

$$\overline{AB} = \overline{DE}$$

$$\overline{AC} = \overline{DF}$$

$$\overline{BC} = \overline{EF}$$

Logo, pelo caso de congruência $L.L.L.$, $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$.

2. Caso $L.A.L.$: Se dois lados de um triângulo e o ângulo entre eles forem congruentes a dois lados do outro triângulo e o ângulo entre esses lados podemos concluir que esses triângulos são congruentes.

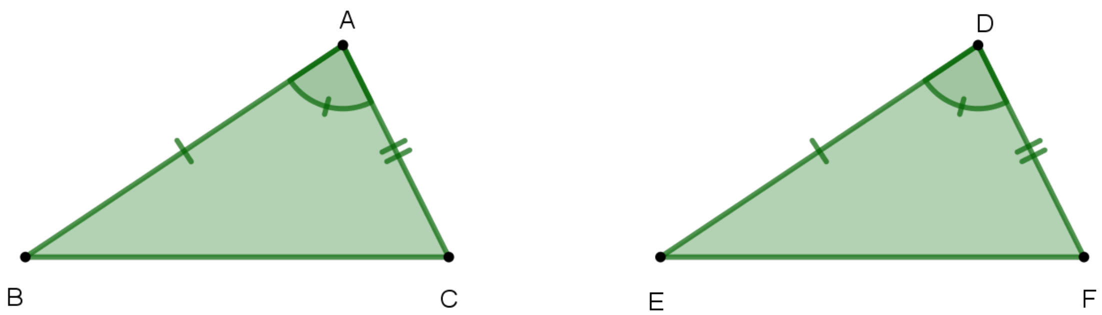


Figura 2.3: Caso $L.A.L.$

Na Figura 2.3 temos:

$$\overline{AB} = \overline{DE}$$

$$B\hat{A}C = E\hat{D}F$$

$$\overline{AC} = \overline{DF}$$

Logo, pelo caso de congruência $L.A.L.$, $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$.

3. Caso $A.L.A.$: Se dois ângulos e a medida do lado compreendido por estes dois ângulos forem congruentes a dois ângulos e o lado compreendido entre eles, então os dois triângulos são congruentes.

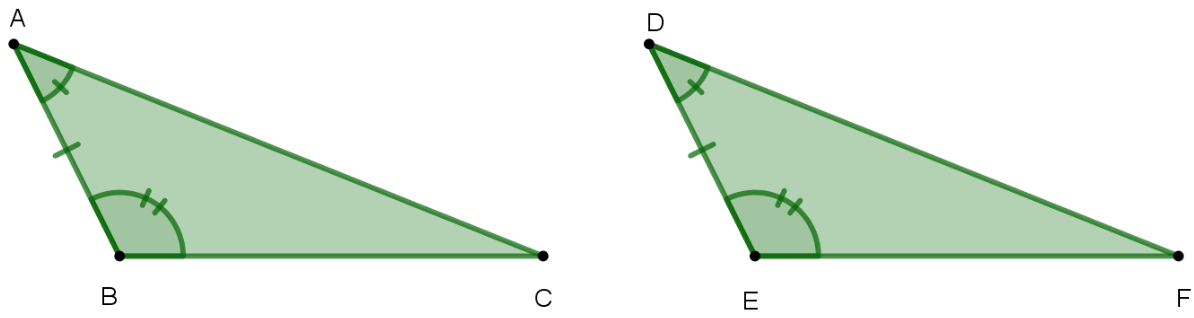


Figura 2.4: Caso $A.L.A.$

Na Figura 2.4 temos:

$$B\hat{A}C = E\hat{D}F$$

$$\overline{AB} = \overline{DE}$$

$$C\hat{B}A = F\hat{E}D$$

Logo, pelo caso de congruência $A.L.A.$, segue que $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$.

4. Caso $L.A.A_o$.: Quando dois triângulos possuem um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado congruentes, então esses dois triângulos são congruentes.

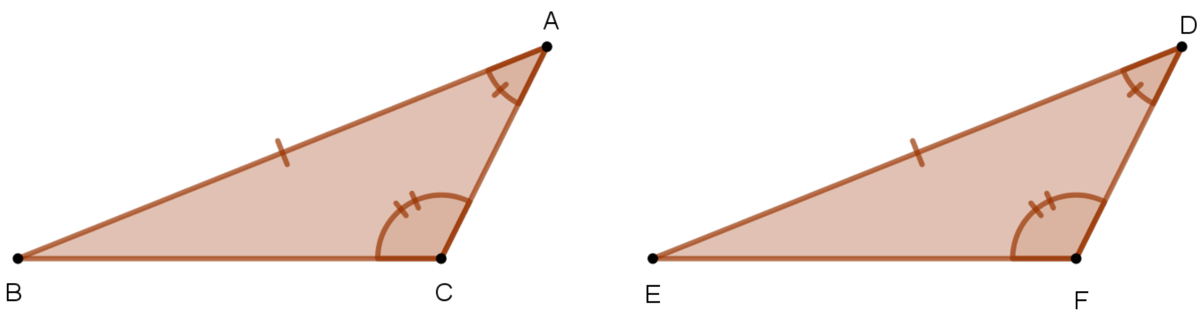


Figura 2.5: Caso $L.A.A_o$.

Temos:

$$\overline{AB} = \overline{DE}$$

$$B\hat{A}C = E\hat{D}F$$

$$A\hat{C}B = D\hat{F}E$$

Logo, pelo caso de congruência $L.A.A_o.$, $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$.

5. Caso Especial $C.H.$ (cateto-hipotenusa): Esse caso é um caso particular do $L.L.L.$ e pode ser expresso da seguinte forma: "Se dois triângulos retângulos têm congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes."

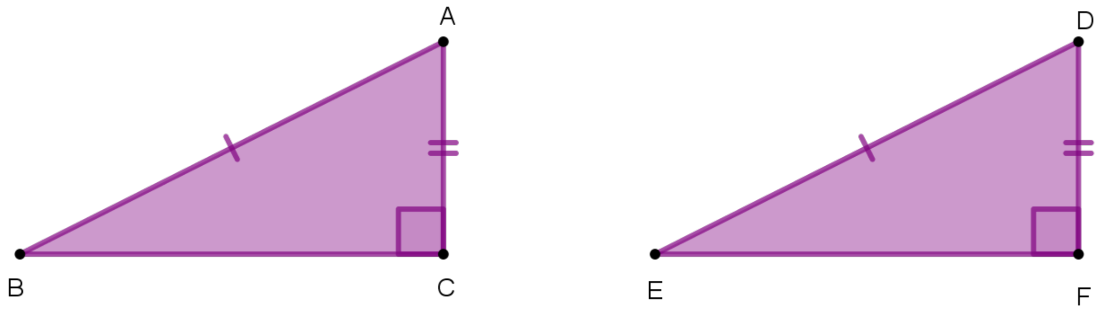


Figura 2.6: Caso $C.H.$

Temos:

$$\overline{AB} = \overline{DE}$$

$$\overline{AC} = \overline{DF}$$

Logo, pelo caso C.H., $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$.

2.4 Paralelogramos

Paralelogramo é todo quadrilátero que possui os lados opostos paralelos. Um paralelogramo possui as seguintes propriedades:

- Os lados opostos de um paralelogramo são congruentes e paralelos.
- Os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.

- Os ângulos adjacentes de um paralelogramo são suplementares, ou seja, juntos somam 180°.
- A soma dos ângulos internos de um paralelogramos é igual a 360°.
- As diagonais de um paralelogramo se cortam em seus pontos médios.

Os paralelogramos podem ser classificados de acordo com as suas medidas. Os grupos são: retângulos, losangos, quadrados e outros, que reúnem paralelogramos quaisquer.

2.4.1 Retângulo

São paralelogramos que possuem quatro ângulos retos.

Figura 2.7: Retângulo

A propriedade específica do retângulo está relacionada com as suas diagonais: as diagonais de um retângulo são congruentes e encontram-se em seus pontos médios. Assim, todo retângulo é um paralelogramo, mas nem todo paralelogramo é um retângulo.

2.4.2 Losango

São paralelogramos que possuem os quatro lados de mesmas medidas.

As diagonais do losango são perpendiculares e encontram-se em seus pontos médios. Note que todo losango é um paralelogramo, mas nem todo paralelogramo é um losango.

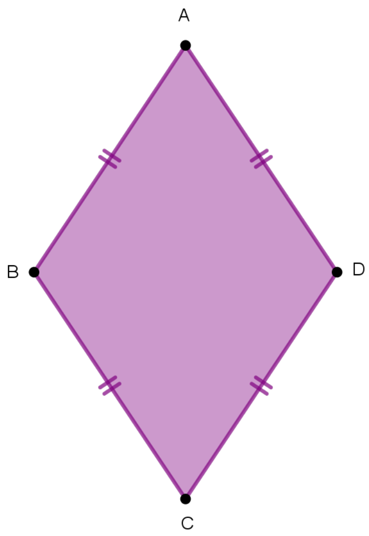


Figura 2.8: Losango

2.4.3 Quadrado

Os quadrados são paralelogramos que possuem os lados congruentes e quatro ângulos retos.

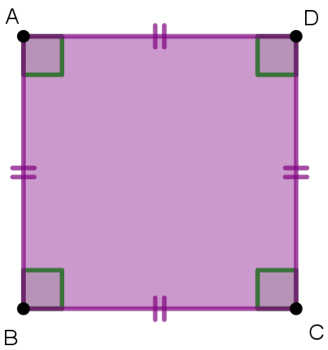


Figura 2.9: Quadrado

Observe que os quadrados são também losangos e retângulos, mas nem todo losango ou retângulo é quadrado. Além disso, um losango que possui ângulos retos é também um quadrado. Da mesma forma, um retângulo de lados congruentes é também um quadrado.

2.5 Circunferências congruentes

Duas circunferências são congruentes quando apresentam os raios de mesmas medidas. Na figura 2.10, temos que a circunferência Γ de centro no ponto A e raio de medida r é congruente a circunferência Λ de centro no ponto C e raio de mesma medida r, ou seja, $\Gamma(A,r) \equiv \Lambda(C,r)$.

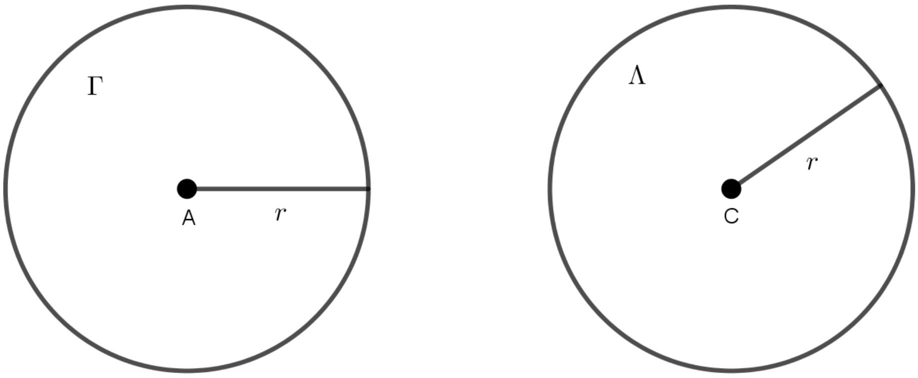


Figura 2.10: Circunferências congruentes

3 Construções geométricas

O desenvolvimento acelerado da matemática do mundo antigo aconteceu devido aos grandes filósofos, pensadores, gregos extraordinários que colocaram a lógica, o raciocínio e a razão como ferramentas para descobrir coisas novas e tentar explicar o mundo em que viviam. As construções geométricas estavam no centro desse desenvolvimento e continuam até hoje com grande importância para a compreensão da matemática elementar. Estudar problemas que envolvem desenho geométrico desafiam o raciocínio e exigem um sólido conhecimento dos fundamentos teóricos da geometria.

Nesse capítulo, mostraremos algumas construções geométricas elementares que servirão de base para o desenvolvimento dos capítulos posteriores, que serão feitas com o uso do software GeoGebra, baseadas no uso de régua não-graduada e compasso, instrumentos utilizados desde a época dos pitagóricos na antiga Grécia, no século V a.C. As principais referências utilizadas nesse capítulo foram [9] e [10].

3.1 Construções elementares

Há 2000 anos, a palavra "número", significava número natural. Não existiam números negativos nem racionais, as frações eram interpretadas apenas como razões entre números ou entre grandezas. Os gregos representavam uma grandeza através de segmentos de reta e foi com essa ideia que hoje nos deparamos com a relação de associar um número com um lugar em uma reta graduada.

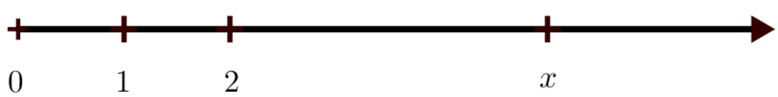


Figura 3.1: Reta graduada

Antigamente, a ideia tida como unidade de medida era a de um comprimento qualquer para situações diversas.

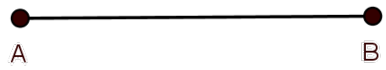


Figura 3.2: Unidade de medida

Iniciaremos aqui algumas construções geométricas elementares que podem ser realizadas apenas com o uso de régua não-graduada e compasso.

3.1.1 Adição de dois segmentos

Sejam os segmentos AB e CD como ilustrado na figura abaixo.

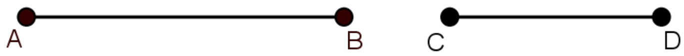


Figura 3.3: Segmentos AB e CD

A representação geométrica do segmento cujo comprimento é igual a $\overline{AB}+\overline{CD}$ se faz com os seguintes passos:

1º) Trace uma reta $r=\overleftrightarrow{EF}$ e transporte o segmento AB para r da seguinte maneira: coloque a ponta seca do compasso em A e a outra extremidade em B. Com essa mesma abertura, centre o compasso em E e determine o ponto G através da interseção da semirreta $\overrightarrow{EF}$ com a circunferência de centro em E e raio $\overline{AB}$.

2º) Transporte o segmento CD para reta r, a partir do ponto G, obtendo o ponto H, tal que $\overline{GH}=\overline{CD}$ e $G\in EH$.

3º) O segmento EH é tal que $\overline{EH}=\overline{AB}+\overline{CD}$.

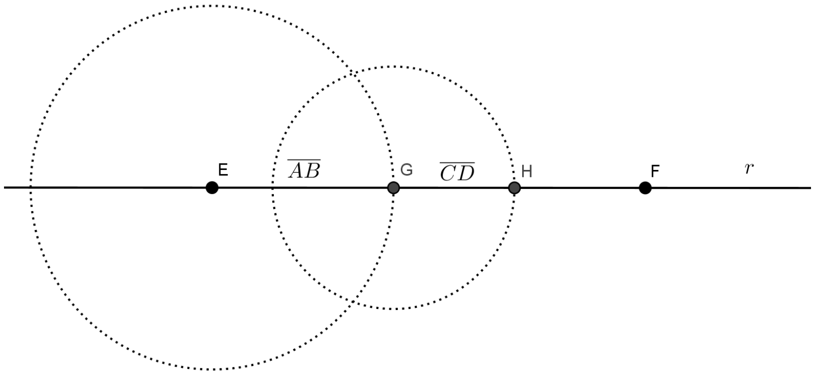


Figura 3.4: Segmento de medida $\overline{AB}+\overline{CD}$

3.1.2 Subtração de dois segmentos

Consideremos os segmentos AB e CD como ilustrados abaixo.

Figura 3.5: Segmentos AB e CD

A representação geométrica do segmento cuja medida é igual a diferença entre $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se faz com as seguintes construções geométricas:

1°) Trace uma reta $r=\overleftrightarrow{EF}$ e transporte o segmento AB a partir do ponto E obtendo assim o ponto G, tal que $\overline{EG}=\overline{AB}$.

2°) Transporte o segmento CD para r, a partir do ponto G, obtendo o ponto H, onde H pertence ao segmento EG, tal que $\overline{GH}=\overline{CD}$.

3°) O segmento EH é tal que $\overline{EH}=\overline{AB}-\overline{CD}$.

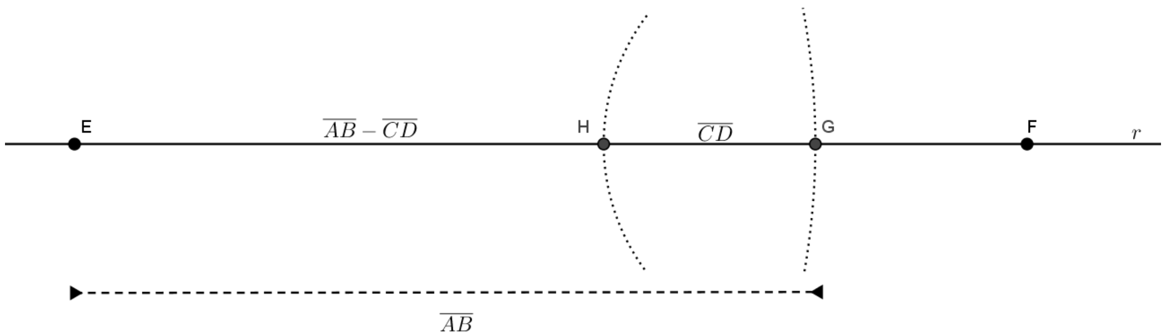


Figura 3.6: Segmento de medida $\overline{AB}-\overline{CD}$

3.1.3 Ponto médio de um segmento

Para determinarmos o ponto médio de um segmento AB dado, realizamos os seguintes procedimentos:

1°) Fixe uma abertura $r > \dfrac{\overline{AB}}{2}$ e trace duas circunferências de raio r com centros em A e B; marque os pontos P e Q de interseção das circunferências.

2°) Trace a reta que passa por P e Q e marque o ponto M de interseção com o segmento AB. O ponto M é o ponto médio de tal segmento.

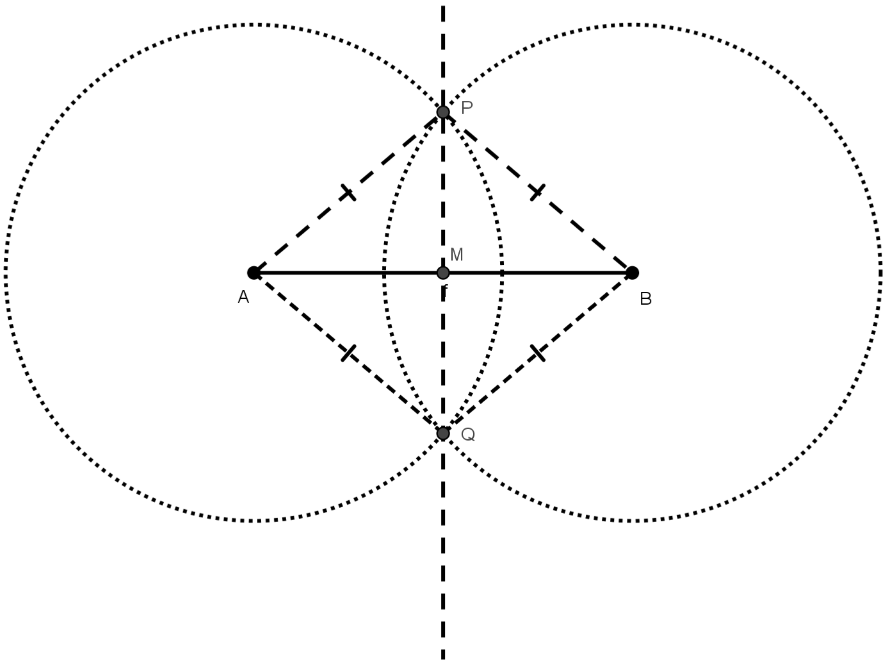


Figura 3.7: Ponto médio de um segmento

Justificativa: em relação aos ΔAPQ e ΔBPQ, temos as igualdades das medidas dos lados $\overline{AP} = \overline{BP}$, $\overline{AQ} = \overline{BQ}$ e PQ é lado comum aos triângulos, logo pelo caso de congruência de triângulos $L.L.L.$, conclui-se que $\Delta APQ \equiv \Delta BPQ$, com isso vale a igualdade dos ângulos $A\hat{P}Q = B\hat{P}Q$. Em relação aos ΔAPM e ΔBPM, temos que $\overline{AP} = \overline{BP}$, $A\hat{P}M = B\hat{P}M$ e o lado PM é comum aos mesmos, então pelo caso de congruência $L.A.L.$, $\Delta APM \equiv \Delta BPM$, daí, $\overline{AM} = \overline{BM}$.

3.1.4 Medianas de um triângulo

Mediana é o segmento que une o vértice de um triângulo ao ponto médio do lado oposto a esse vértice. Em relação a um ΔABC, de cada vértice parte uma mediana, logo, em todo triângulo encontramos três medianas AM, BN e CO, sendo M, N e O, respectivamente, os pontos médios dos lados BC, AC e AB. As três medianas de um triângulo se encontram em um único ponto chamado de *baricentro*, representado pelo ponto G na figura 3.8 a seguir.

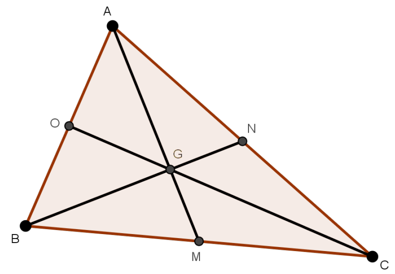


Figura 3.8: Medianas

Abaixo apresentamos os passos para construção da mediana de um ΔABC qualquer.

1°) Encontre o ponto médio M do lado BC oposto ao vértice A seguindo os passos apresentados na seção 3.1.3.

2°) Trace o segmento AM que representa a mediana relativa ao vértice A.

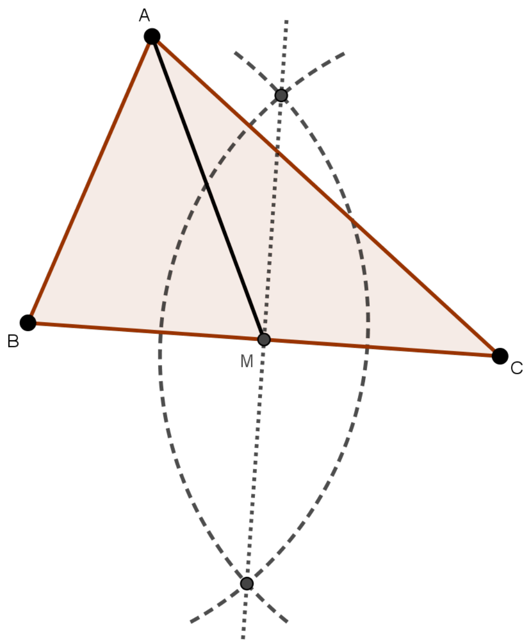


Figura 3.9: Mediana relativa ao vértice A

Para traçar as outras duas medianas relativas aos vértices B e C, procede-se de maneira análoga.

3.1.5 Reta perpendicular

Dados uma reta r e um ponto P, precisamos considerar os casos em que P pertence a r e que P não pertence a r.

a) Se $P \notin r$:

1°) Com o compasso centrado em P, trace uma circunferência de raio maior que dist(P, r) que intersecte a reta r em dois pontos distintos A e B.

2°) Contrua o ponto médio M, seguindo os passos em 3.1.3, do segmento AB e trace a reta $s = \overleftrightarrow{PM}$.

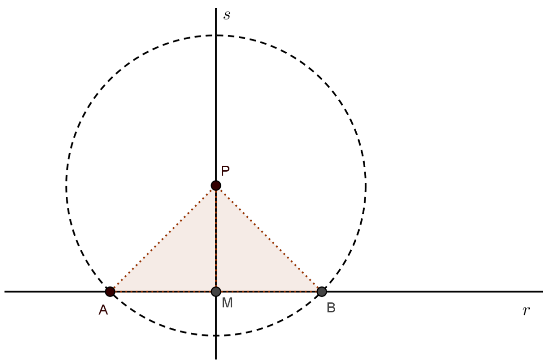


Figura 3.10: Reta perpendicular com $P \notin r$

Justificativa: Em relação aos ΔPAM e ΔPBM, temos que $\overline{PA} = \overline{PB}$ e $\overline{AM} = \overline{BM}$; como PM é um lado comum dos triângulos, segue do caso de congruência $L.L.L.$ que $\Delta PAM \equiv \Delta PBM$. Temos então que $P\hat{M}A + P\hat{M}B = 180^\circ$, mas $P\hat{M}A = P\hat{M}B$, logo, $\overleftrightarrow{PM} \perp r$.

b) Se $P \in r$:

1°) Com o compasso centrado em P e abertura qualquer, trace uma circunferência e marque os pontos A e B de interseção com a reta r.

2°) Com centro em A e B e $r > \dfrac{\overline{AB}}{2}$, trace duas circunferências, sendo o ponto C um dos pontos de interseção das cincunferências. Temos que $\overleftrightarrow{CP} \perp r$.

Justificativa: pelo caso de congruência $L.L.L.$, temos que $\Delta CAP \equiv \Delta CBP$, logo $C\hat{P}A + C\hat{P}B = 180^\circ$, mas $C\hat{P}A = C\hat{P}B$, logo, $\overleftrightarrow{CP} \perp r$.

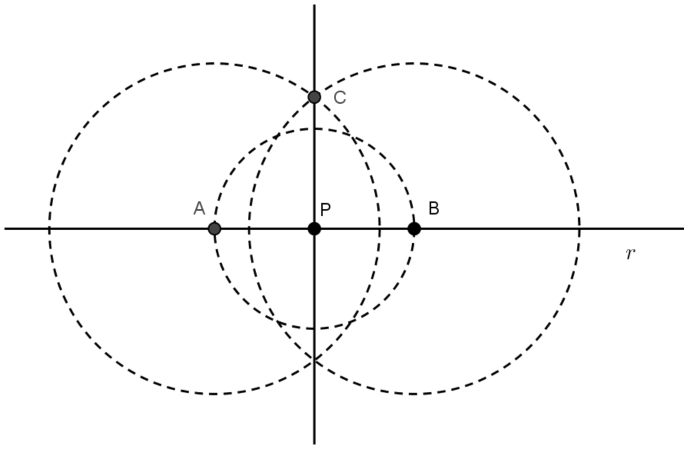


Figura 3.11: Reta perpendicular com $P \in r$

3.1.6 Altura de um triângulo

A *altura* de um triângulo é o segmento que possui uma extremidade em um vértice de um triangulo e tem a característica de ser perpendicular a reta suporte do lado oposto. Como um triângulo tem três vértices, terermos então três alturas. As alturas se encontram em um único ponto chamado *ortocentro*, representado pelo ponto O na figura 3.12 a seguir.

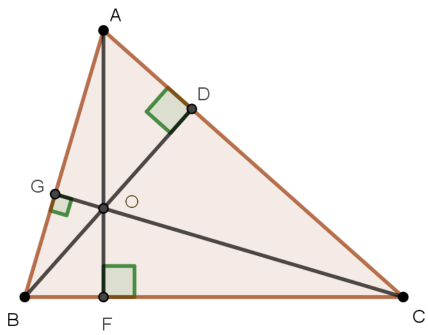


Figura 3.12: Alturas de um triângulo

Abaixo apresentamos os passos para construção da altura de um ΔABC qualquer relativa ao lado BC.

1º) Trace a reta perpendicular relativa ao lado BC que passa pelo vértice A seguindo os passos da seção 3.1.5 e marque o ponto F de interseção com o respectivo lado.
2º) O segmento AF é a altura relativa ao lado BC do ΔABC na figura 3.13.

As construções das outras alturas são análogas.

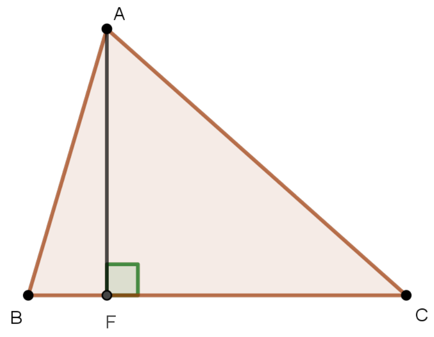


Figura 3.13: Altura de um triângulo

3.1.7 Mediatriz de um segmento

Mediatriz do segmento AB é a reta perpendicular a esse segmento que passa pelo seu ponto médio. A seguir apresentaremos os passos para construção da mediatriz do segmento AB.

1º) Trace duas circunferências com centro em A e B de raio r arbitrário, porém $r > \dfrac{\overline{AB}}{2}$, marcando os pontos P e Q de interseção de tais circunferências. Temos que $\overleftrightarrow{PQ}$ é a mediatriz do segmento AB.

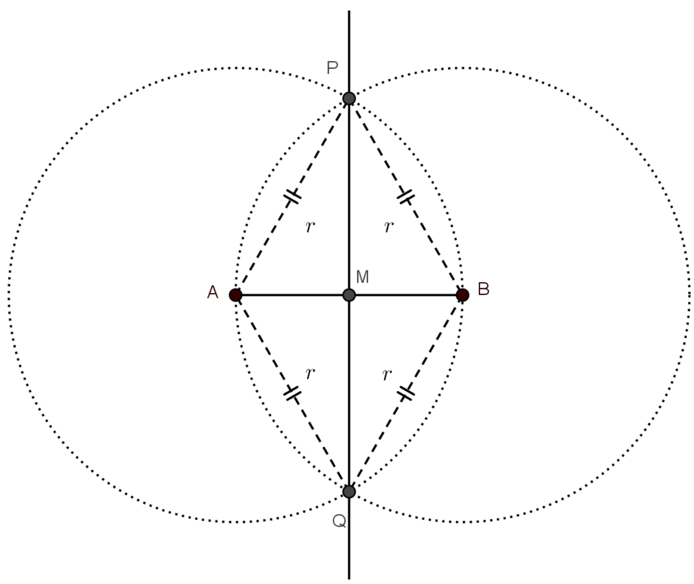


Figura 3.14: Mediatriz de um segmento

Justificativa: Sendo M o ponto de interseção de AB e PQ, vimos na seção 3.1.3, que M é o ponto médio de AB. Por outro lado, ΔPAB é isósceles de base AB e PM, e como na seção 3.1.4, é a mediana relativa a base. Mas, de acordo com a seção 3.1.6, PM é altura do ΔPAB. Portanto, $\overleftrightarrow{PQ}$ passa pelo ponto médio do $\overline{AB}$ e é perpendicular ao mesmo, logo $\overleftrightarrow{PQ}$ é a mediatriz de AB.

3.1.8 Multiplicação de dois segmentos

Definimos a *multiplicação de dois segmentos* como a área da região retangular cujos lados são congruentes a esses segmentos. Considere, por exemplo, os segmentos AB e CD medindo, respectivamente, 4 e 3 unidades conforme figura 3.15.

O valor do produto de $\overline{AB}$ por $\overline{CD}$ é a região retangular (quantidade de quadradinhos de lado de medida uma unidade) determinada pelas seguintes construções geométricas.

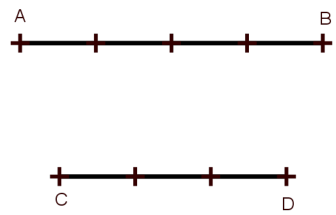


Figura 3.15: Segmentos AB e CD

1º) Transporte AB em uma semirreta $\overrightarrow{OP}$ com origem em O, tal que $\overline{AB} = \overline{OB}$.
2º) Crie uma semirreta $\overrightarrow{OQ}$ perpendicular a semirreta $\overrightarrow{OP}$ pelo ponto O (qualquer sentido).
3º) Transporte o segmento CD na semirreta $\overrightarrow{OQ}$, tal que $\overline{CD} = \overline{OD}$.
4º) Temos que OB e OD representam a base e a altura, respectivamente, de um retângulo, sendo portanto a área da região retangular o valor procurado. Demonstraremos o cálculo da área de uma região retangular no capítulo seguinte.

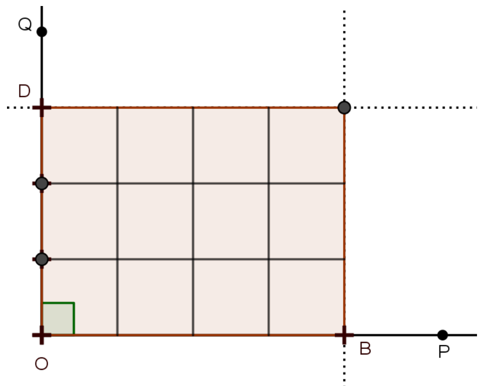


Figura 3.16: Produto de AB por CD

3.1.9 Retas paralelas

Para construção de retas paralelas vamos considerar dois casos.

a) É dada a distância d entre as duas retas paralelas.

1°) Por dois pontos distintos A e B de uma reta r dada, traçamos as semirretas $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{BY}$, ambas perpendiculares a reta r, sendo X e Y pertencentes ao mesmo semiplano determinado pela reta r.

2°) Transporte a medida d para as semirretas $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{BY}$ com extremidades em A e B e marque as interseções C e D respectivamente.

3°) Trace a reta s que passa por C e D de acordo com a figura 3.17.

4°) A reta s é paralela a reta r.

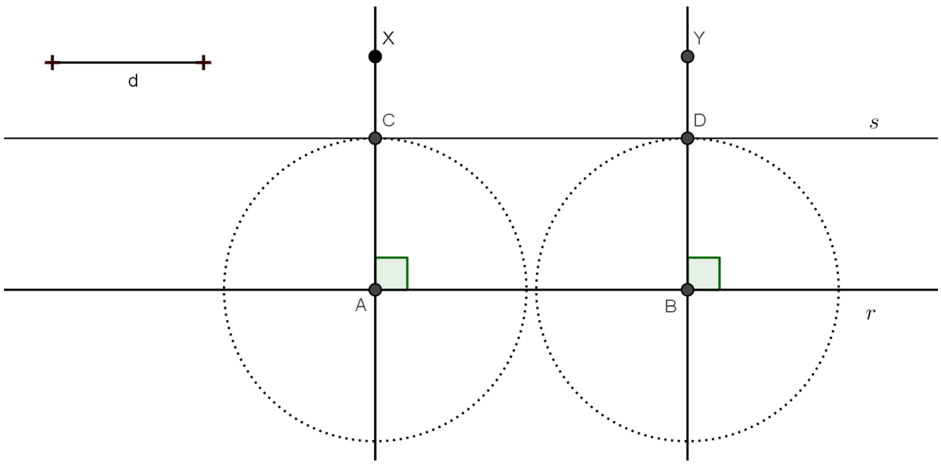


Figura 3.17: Retas paralelas dada a distância

Justificativa: considere os ΔABC e ΔABD na figura 3.18 a seguir, temos que $\overline{AC} = \overline{BD}$, $B\hat{A}C = A\hat{B}D$ e AB é um lado comum, então pelo caso $L.A.L.$, os triângulos em questão são congruentes, logo $\overline{BC} = \overline{AD}$. Como BC e AD representam as diagonais de um quadrilátero, podemos concluir que $ABCD$ é um paralelogramo, logo, a reta s que passa por C e D é paralela a reta r que passa pelos pontos A e B.

De modo análogo, construímos a reta t, pertencente ao outro semiplano determinado pela reta r onde t é a paralela a r e está a uma distância d de r.

b) É dado um ponto P pertencente à reta s procurada.

1°) Com centro em P e abertura suficiente para interceptar r no ponto A, traçamos a circunferência θ na figura 3.19.

2°) Com centro em A e mesmo raio que a circunferência θ, traçamos a circunferência Γ que encontrará r no ponto B.

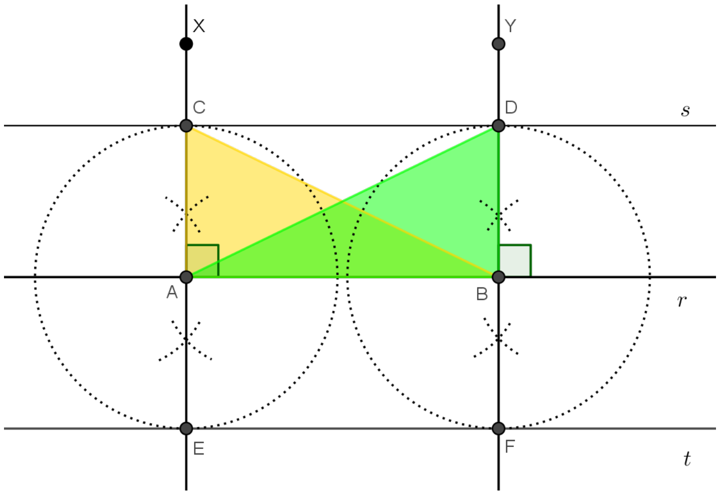


Figura 3.18: Retas paralelas dada a distância

3º) Com abertura igual a $\overline{BP}$, traçamos a circunferência Σ de centro em A e marcamos o ponto C de interseção com a circunferência Γ.

4º) A reta $\overleftrightarrow{CP}$ é a reta procurada.

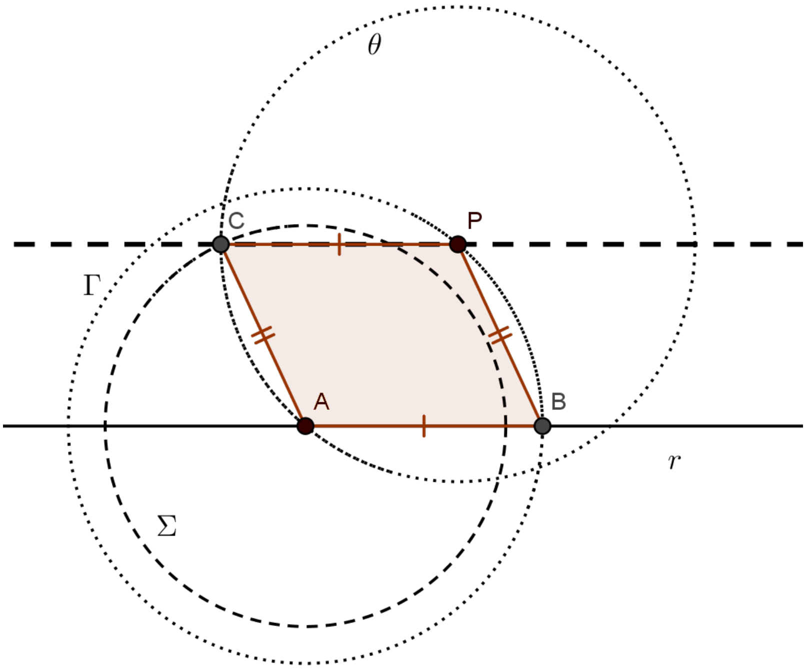


Figura 3.19: Retas paralelas dado um ponto

Justificativa: o quadrilátero $ABPC$ tem lados opostos de mesmas medidas, portanto representa um paralelogramo, logo $CP//AB$ o que nos faz concluir que $\overleftrightarrow{CP}$ é paralela a reta r que passa por A e B.

3.1.10 Divisão um segmento em n partes de mesmas medidas

Vamos analisar os casos para alguns valores de n.

a) se $n = 2$, basta considerar o ponto médio do segmento como feito na seção 3.1.3.

b) se $n = 3$, consideremos o seguinte procedimento:

1º) Construa um segmento AB de medida qualquer.
2º) Por A crie uma semirreta $\overrightarrow{AX}$ de tal forma que A, B e X não sejam colineares.
3º) Por A trace um arco de raio r arbitrário e marque o ponto de interseção C com a semirreta $\overrightarrow{AX}$.
4º) Por C trace um arco de raio r e marque o ponto D de interseção com a semirreta $\overrightarrow{AX}$.
5º) Por D trace um arco de raio r e marque o ponto E de interseção com a semirreta $\overrightarrow{AX}$.
6º) Trace o segmento EB e por C e D passe as paralelas ao segmento EB marcando, respectivamente, os pontos F e G de interseção com o segmento AB.
7º) Os segmentos AF, FG e GB dividem o segmento AB em três partes iguais.

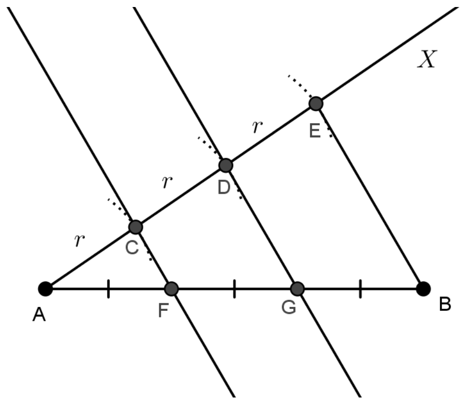


Figura 3.20: Divisão de um segmento em três partes iguais

Justificativa: usando o Teorema de Tales, como $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DE} = r$, temos que $\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FG}}$, ou seja, $1 = \frac{\overline{AF}}{\overline{FG}}$, logo, $\overline{AF} = \overline{FG}$. Procedemos da mesma maneira para concluirmos que $\overline{FG} = \overline{GB}$.

c) Para n $\geq$ 4, procedemos de maneira análoga.

3.1.11 Transporte de ângulos

Transportar um ângulo dado para uma semirreta significa construir um ângulo de mesma medida ao ângulo dado em um dos semiplanos determinados pela reta que contém a semirreta.

Podemos então construir dois ângulos, ficando a escolha de acordo com as necessidades e condições do problema.

Consideremos como exemplo transportar o ângulo $A\hat{O}B$ para a semirreta $\overrightarrow{CX}$ ilustrados a seguir:

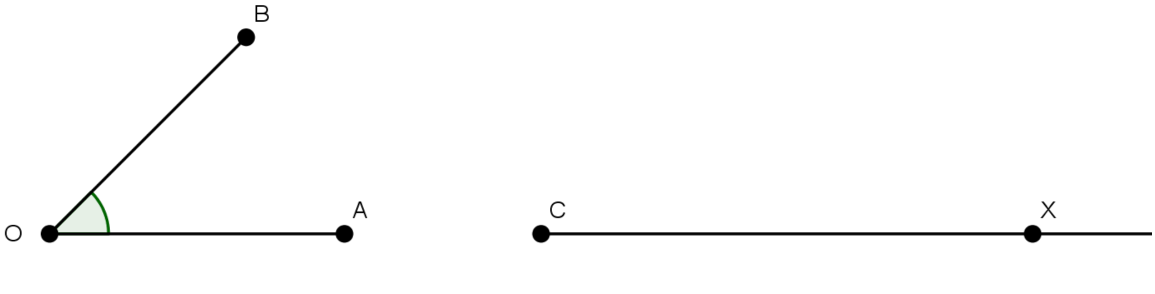


Figura 3.21: Ângulo e semirreta

1º) Trace a circunferência Λ com raio r arbitrário e centro em O, marcando assim, respectivamente, os pontos D e E de interseção da circunferência com os lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ do ângulo, criando assim o ΔDOE.

2º) Trace a circunferência $\Gamma(C,r)$, congruente à circunferência $\Lambda(O,r)$ marcando o ponto F de interseção entre a semirreta $\overrightarrow{CX}$ e a circunferência Γ.

3º) Trace a circunferência $\Theta(F,\overline{DE})$ marcando os pontos G e H de interseção com a circunferência $\Gamma(C,r)$; temos que $G\hat{C}F$ é o ângulo procurado.

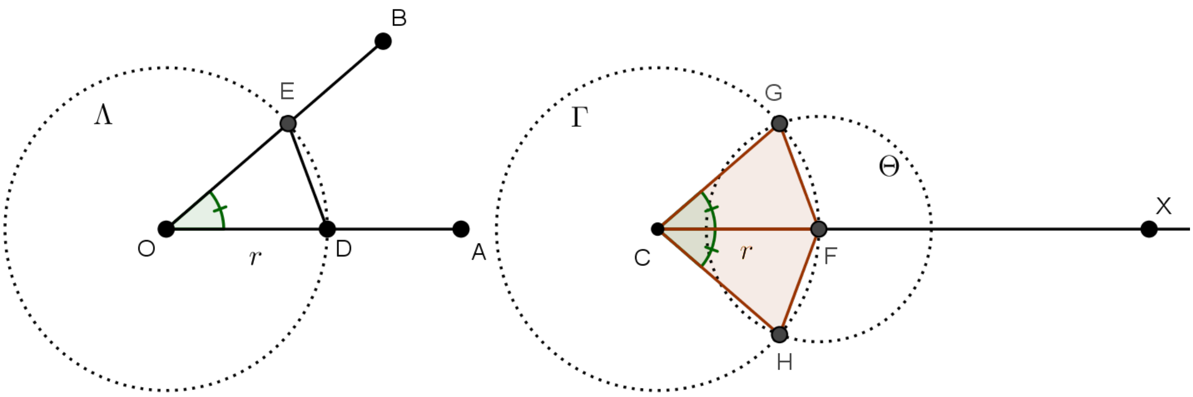


Figura 3.22: Transporte de ângulo

Justificativa: Temos que $\Delta DOE \equiv \Delta GCF$ pelo caso $L.L.L.$ Logo, $G\hat{C}F$ é o ângulo procurado. Como ΔGCF e ΔHCF são congruentes pelo caso $L.L.L.$, resulta que $F\hat{C}H$ é o outro ângulo construtível.

3.2 Média geométrica

Definimos a *média geométrica* ou *média proporcional* de dois segmentos de medidas a e b como o segmento de medida x tal que $x = \sqrt{ab}$.

Apresentaremos, a seguir, um procedimento para a construção de um segmento cuja medida representa a média geométrica entre os segmentos FG e HI dados, onde $\overline{FG} = a$ e $\overline{HI} = b$.

1º) Trace uma semirreta $\overrightarrow{AY}$.

2º) Transporte o segmento FG na semirreta $\overrightarrow{AY}$ com extremidade em A marcando o ponto de interseção B.

3º) Transporte o segmento HI na semirreta $\overrightarrow{AY}$ com extremidade B marcando o ponto de interseção C de forma que B fique entre A e C.

4º) Determine o ponto médio M de AC e construa a circunferência Γ de centro M e diâmetro $\overline{AC}$.

5º) Trace por B a perpendicular a semirreta $\overrightarrow{AY}$ marcando os pontos D e E de interseção com a circunferência Γ e construa os ΔADC e ΔAEC retângulos em D e E, respectivamente, e hipotenusa AC.

6º) Os segmentos BD e BE representam a média geométrica entre FG e HI.

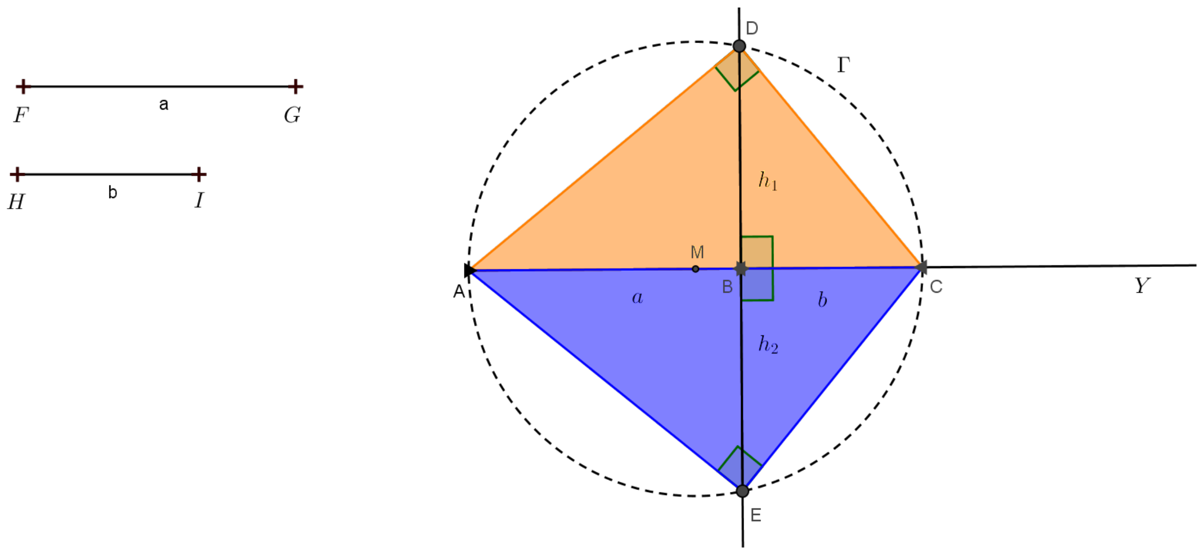


Figura 3.23: Média geométrica

Justificativa: em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da altura relativa a hipotenusa é igual ao produto das projeções das medidas de seus catetos, ou seja, pelas relações métricas no ΔACD retângulo em D, temos que $\overline{BD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = a \cdot b$. De fato, analisando os ΔABD e ΔDBC, ambos retângulos no vértice B, aplicando o teorema de Pitágoras teremos que:

$$\begin{aligned} \overline{AD}^2 &= h_1^2 + a^2 && (3.1) \\ \overline{CD}^2 &= h_1^2 + b^2. && (3.2) \end{aligned}$$

Somando as equações 3.2 e 3.2, teremos:

$$\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = a^2 + b^2 + 2h_1^2. \qquad (3.3)$$

Mas o ΔACD é retângulo no vértice D, logo temos pelo teorema de Pitágoras que:

$$\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = (a+b)^2. \qquad (3.4)$$

Fazendo a substituição de 3.4 em 3.3, segue-se:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2h^2 \\ a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 &= a^2 + b^2 + 2h^2 \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} 2ab &= 2h_1^2 && (3.5) \\ h_1^2 &= a \cdot b. && (3.6) \end{aligned}$$

Na igualdade 3.6 temos a demonstração da relação dada acima.

Analogamente, $\overline{BE}^2 = a \cdot b$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Finalizamos aqui a descrição de algumas construções geométricas que julgamos necessárias para o desenvolvimento do nosso trabalho. Tais construções serão utilizadas no capítulo posterior.

4 Área de uma região poligonal

Neste capítulo, vamos apresentar a definição de região triangular, região poligonal e introduziremos, com o uso de alguns postulados explicitados, o conceito de área de uma região poligonal convexa. Assim, demonstraremos alguns teoremas que explicitam como obter a área de alguns polígonos convexos. As principais referencia utilizadas neste capítulo foram [10] e [1].

Definição 4.0.1. *Um polígono é convexo quando está totalmente contido no semiplano determinado pelas retas que contém os seus lados.*

Uma *região triangular* é o conjunto dos pontos do plano formado pelos segmentos cujas extremidades estão sobre os lados de um triângulo, sendo o triângulo denominado a fronteira da região triangular.

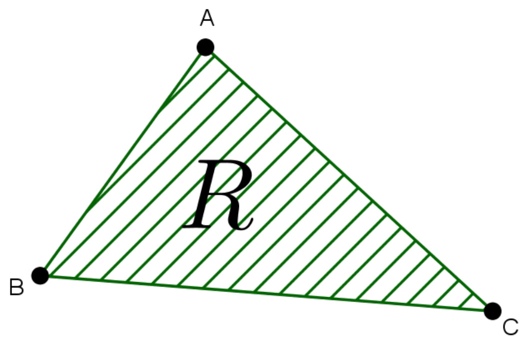


Figura 4.1: Região triangular R

Uma *região poligonal* é a união de um número finito de regiões triangulares que, duas a duas, não apresentam pontos interiores em comum. Na figura 4.2, temos a região poligonal heptagonal que é composta pela união das regiões triangulares ABC, ACG, GCF, FCE, ECD.

Os postulados abaixo nos fornecerão noções sobre áreas de regiões planas, chegando à área de uma região quadrada e, a partir dela, ao cálculo da área de algumas regiões poligonais.

Postulado 4.0.1. *A cada região do plano corresponde um único número real positivo.*

Definição 4.0.2. *A área de uma região é o número real que lhe corresponde pelo postulado 4.0.1.*

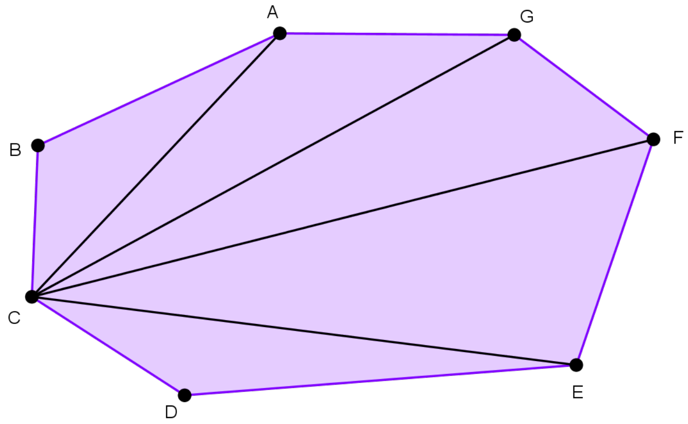


Figura 4.2: Região poligonal

Postulado 4.0.2. *Se uma região R é a união $R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup \cdots \cup R_n$, com R_1, R_2, $\cdots R_n$ sendo regiões que se interseccionam em um número finito de pontos ou segmentos, então a área de R é igual à soma das áreas de R_1, R_2, R_3 $\cdots$ R_n.*

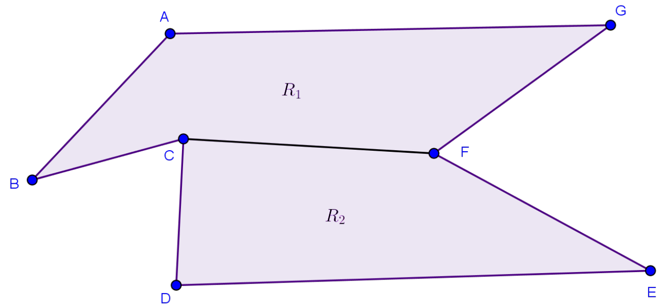


Figura 4.3: Região $R = R_1 \cup R_2$ com um segmento em comum

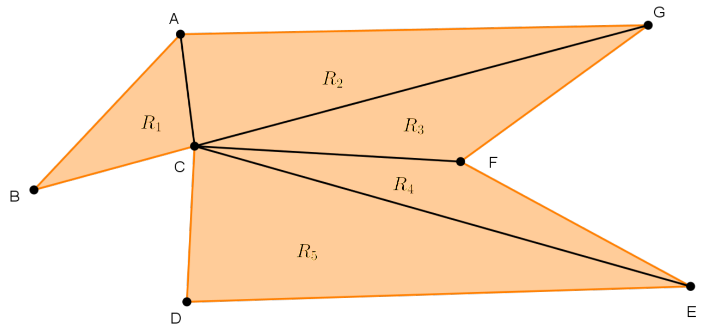


Figura 4.4: Região $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4 \cup R_5$ com um ponto em comum

Postulado 4.0.3. *Regiões triangulares limitadas por triângulos congruentes têm áreas iguais.*

Postulado 4.0.4. *Se uma região quadrada tem lado de comprimento a, então sua área é a^2 .*

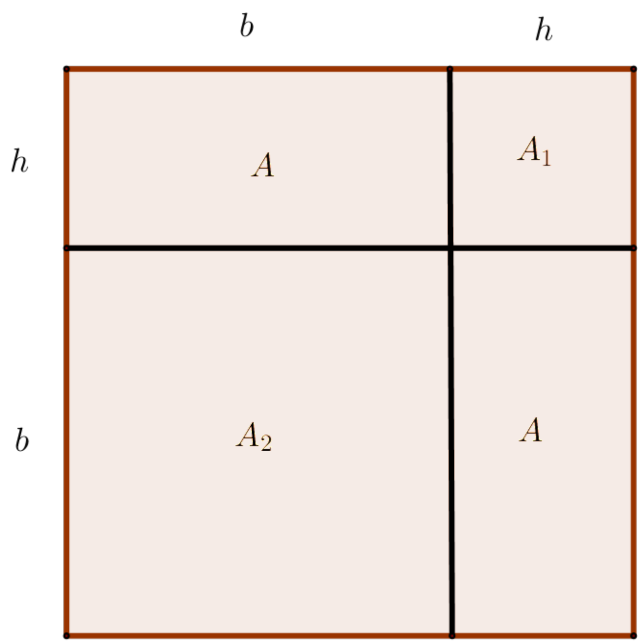
Postulado 4.0.5. *Se R e S são duas regiões, tais que $R \subset S$, então área(R) $<$ área(S).*

É notável que todo polígono determina uma região poligonal, e daqui em diante, ao falarmos de "área de uma região poligonal", nos remeteremos por exemplo, em dizer "área de um polígono", ou seja, a "área de uma região poligonal cuja fronteira é um retângulo", significa "área de um retângulo".

Baseando-se nesses postulados, vamos determinar a área de alguns polígono convexos conhecidos.

Teorema 4.0.1. *A área de um retângulo é o produto das medidas de seus lados.*

Demonstração. Vamos considerar um retângulo com lados não paralelos de medidas b e h, cuja área denotaremos por *A*. Construímos um quadrado de área Q de lados $b+h$ formado pelos quadrados de área A_1 e A_2 de lados h e b, respectivamente, e dois retângulos de área A, como na figura a seguir. Pelo Postulado 4.0.2 temos que:



$$Q = 2A + A_1 + A_2 \tag{4.1}$$

e, de acordo com o Postulado 4.0.4, temos que:

$$Q = (b+h)^2 = b^2 + 2bh + h^2. \tag{4.2}$$

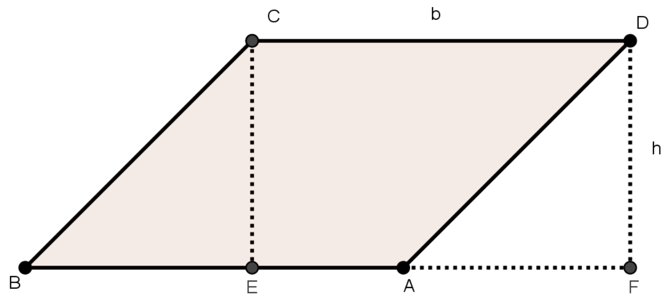
Da equações (4.1) e (4.2), e novamente usando o Postulado 4.0.4, temos que $A = bh$.

□

Teorema 4.0.2. *A área de um paralelogramo é o produto do comprimento de um de seus lados pelo comprimento da altura relativa a esse lado.*

Demonstração. Dado o paralelogramo $ABCD$ de base b e altura relativa a base igual a h, vamos provar que a sua área é igual a bh. A partir dos vértices C e D, trace dois segmentos CE e DF que são perpendiculares à reta $\overleftrightarrow{AB}$. O quadrilátero $CDFE$ é um retângulo cuja área, de acordo com o Teorema 4.0.1 é bh. Analisando os ΔCBE e ΔDAF, temos que $\overline{BC} = \overline{AD}$, $C\hat{B}E = D\hat{A}F$ e $C\hat{E}B = D\hat{F}A$, sendo assim congruentes pelo caso $L.A.A_0.$, logo, pelo Postulado 4.0.3, suas áreas são iguais. Como área$(ABCD) =$ área$(AECD)+$área(CEB) e área$(CDFE) =$ área$(AECD)+$ área(DFA), temos que área$(ABCD) =$ área$(CDFE) = bh$.

□



Antes de apresentarmos a área de um triângulo, precisamos do seguinte lema.

Lema 4.0.1. *Em um triângulo, o produto de cada um de seus lados pela altura relativa a esse lado é constante.*

Demonstração. Seja o ΔABC ilustrado abaixo e as alturas AH_a e BH_b relativas, respectivamente, aos lados BC e AC. Vamos supor que o ortocentro do triângulo seja um ponto interior a ele (os outros casos são análogos). Temos então que os ΔACH_a e ΔBCH_b, são semelhantes pelo caso AA, logo, valem as seguintes relações:

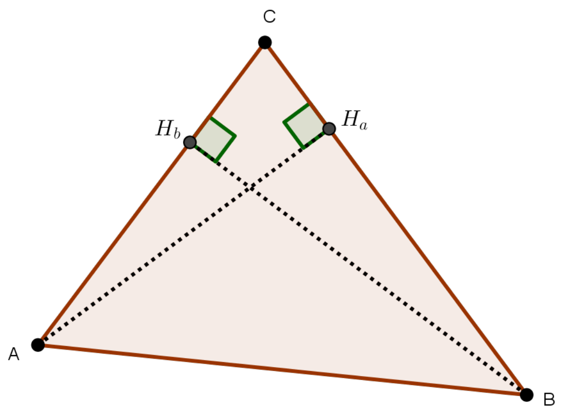
$$\frac{\overline{AH_a}}{\overline{BH_b}} = \frac{\overline{CH_a}}{\overline{CH_b}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

ou seja

$$\overline{BC} \cdot \overline{AH_a} = \overline{AC} \cdot \overline{BH_b} = k.$$

Analogamente demonstramos que $\overline{AB} \cdot \overline{CH_c} = k$.

□



Teorema 4.0.3. *A área de um triângulo é a metade do produto do comprimento de qualquer de seus lados pela altura relativa a esse lado.*

Demonstração. Considere o ΔABC da figura 4.5 a seguir. Trace pelo vértice A a reta paralela ao lado BC e pelo vértice C uma reta paralela ao lado AB, marcando o ponto D de interseção dessas paralelas. No quadriláetro $ABCD$ que $AD//BC$ e $AB//CD$, logo $ABCD$ é um paralelogramo. Pelo caso de congruência $L.A.L.$ os ΔABC e ΔACD são congruentes, pois, $\overline{BC} = \overline{AD}$, $A\hat{C}B = C\hat{A}D$ e AC é um lado comum, então área(ΔABC) = área(ΔACD). Mas área$(ABCD) =$ área$(\Delta ABC)+$ área(ΔACD), portanto, área(ΔABC)= $\frac{1}{2}$área$(ABCD)$, ou seja, a área do ΔABC é a metade do produto da medida do comprimento da base pela medida da altura relativa a essa base. $\square$

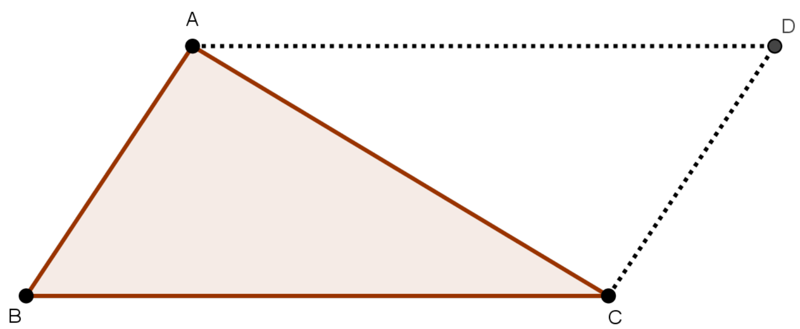


Figura 4.5: Triângulo ABC

O teorema abaixo apresenta o caso particular da área de um triângulo retângulo.

Teorema 4.0.4. *A área de um triângulo retângulo é metade do produto de seus catetos.*

Demonstração. Basta observar que em um triângulo retângulo podemos considerar um dos catetos como base e o outro como sua altura, portanto o resultado segue do Teorema 4.0.3. $\square$

Teorema 4.0.5. *A área de um trapézio é a metade do produto do comprimento de sua altura pela soma dos comprimentos de suas bases.*

Demonstração. Seja o trapézio $ABCD$ de bases AB e CD representado na figura 4.6 a seguir. Divida o trapézio em dois triângulos traçando a diagonal AC. Trace as alturas CF do ΔABC e AE do ΔACD relativas aos lados AB e CD, respectivamente.

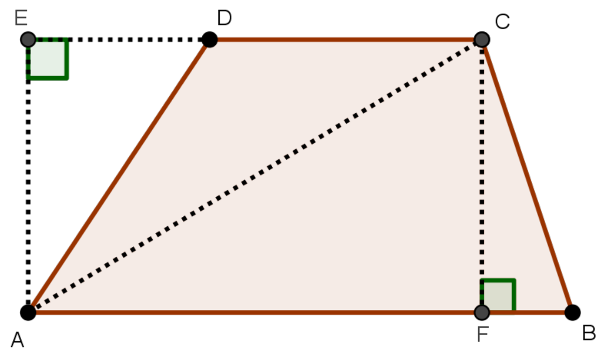


Figura 4.6: Trapézio ABCD

Temos então que $\overline{AE} = \overline{CF}$, pois são alturas de dois triângulos cujas bases situam-se em retas que são paralelas. Logo:

$$\begin{aligned}
\text{área } (ABCD) &= \text{área } (ACB) + \text{área } (ACD) \\
&= \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CF} + \frac{1}{2}\overline{CD}\cdot\overline{AE} \\
&= \frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD})\cdot\overline{CF}.
\end{aligned}$$

□

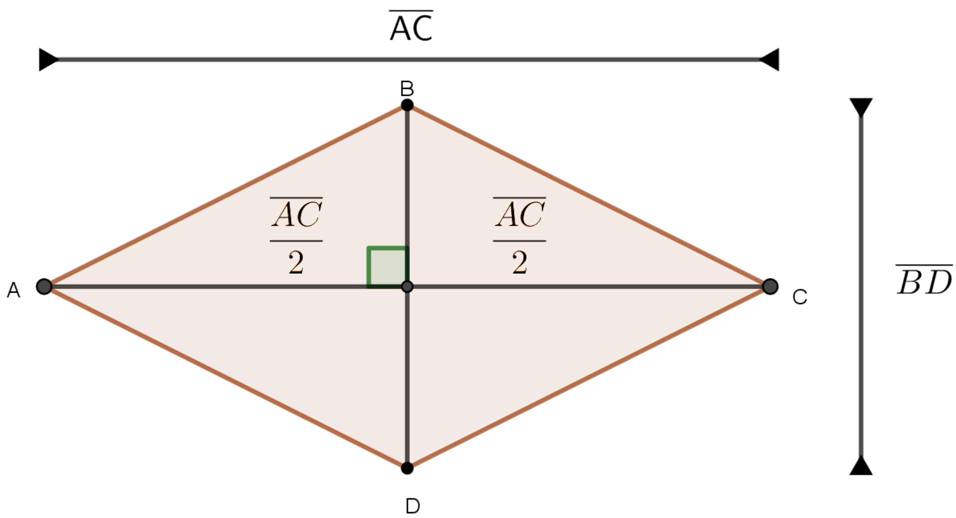
Concluiremos este capítulo apresentando a área de um losango.

Teorema 4.0.6. *A área de um losango é a metade do produto das medidas de suas diagonais.*

Demonstração. Seja o losango $ABCD$ a seguir com diagonais AC e BD. Essas diagonais, além de serem perpendiculares, se interceptam em seu ponto médio. Partindo do princípio que a diagonal BD divide o losando $ABCD$ nos ΔABD e ΔBCD congruentes entre si pelo caso $L.L.L.$, temos então que área $(\Delta ABD) =$ área (ΔBCD). Considerando que as alturas desses triângulos são iguais a $\frac{\overline{AC}}{2}$ (metade da diagonal maior), temos então que:

$$
\begin{aligned}
\text{área } (ABCD) &= \text{área } (ABD) + \text{área } (BCD) \\
&= \frac{d \cdot \frac{D}{2}}{2} + \frac{d \cdot \frac{D}{2}}{2} \\
&= \frac{d \cdot D}{4} + \frac{d \cdot D}{4} \\
&= \frac{2 \cdot d \cdot D}{4} \\
&= \frac{D \cdot d}{2}.
\end{aligned}
$$

□



5 Equivalência de áreas

Neste capítulo, estudaremos as várias formas de representar uma região poligonal de modo que sua área seja mantida constante. Mostraremos, através de propriedades geométricas e com o uso exclusivo de régua não-graduada e compasso, a construção passo-a-passo de outra região poligonal, podendo esta ser com o mesmo número de lados ou não, com área equivalente à área poligonal inicial. A equivalência de áreas foi uma das ferramentas utilizadas por Euclides para o desenvolvimento de vários de seus teoremas e proposições. Explicitaremos nesse capítulo alguns desses teoremas com suas devidas demonstrações. E por fim, faremos a quadratura de regiões poligonais, que consiste em determinar um quadrado de área equivalente a área da região poligonal inicial dada através de construções geométricas com o uso de régua não-graduada e compasso. Lembramos que as grandezas aqui utilizadas para as devidas construções, na época dos antigos gregos, eram associadas a segmentos de reta, sendo portanto dessa forma, "construídas". Chamamos então de *segmentos construtíveis*, aqueles que podemos construir com o uso de régua e compasso.

As principais referências utilizadas neste capitulo foram [3],[5] e [11].

5.1 Proposições de Euclides

Nesta seção, serão expostas algumas das proposições de Euclides baseadas em seu livro Os Elementos [3], que tratam sobre equivalência de áreas, problema principal que abordaremos nesse trabalho. Em seu livro, Euclides falava de polígonos (ou regiões poligonais) iguais entre si, neste trabalho, falaremos de poligonos equivalentes, ou seja, polígonos que possuem a mesma área. A palavra equivalência deriva de: equi $=$ igual $+$ valência $=$ valor.

Proposição 5.1.1. *Os paralelogramos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são equivalentes entre si.*

Demonstração. Considerando que as retas $\overleftrightarrow{AF} // \overleftrightarrow{BC}$ na figura 5.1, vamos mostrar que os paralelogramos $ABCD$ e $EBCF$, ambos sobre a mesma base BC, são equivalentes. Como $ABCD$ é um paralelogramo, $\overline{AD} = \overline{BC}$, e pela mesma situação, $\overline{EF} = \overline{BC}$, logo, $\overline{AD} = \overline{EF}$. Como DE é comum, então $\overline{AE} = \overline{DF}$. Analisando os ΔEAB e ΔFDC, temos que: $\overline{AE} = \overline{DF}$, $E\hat{A}B = F\hat{D}C$

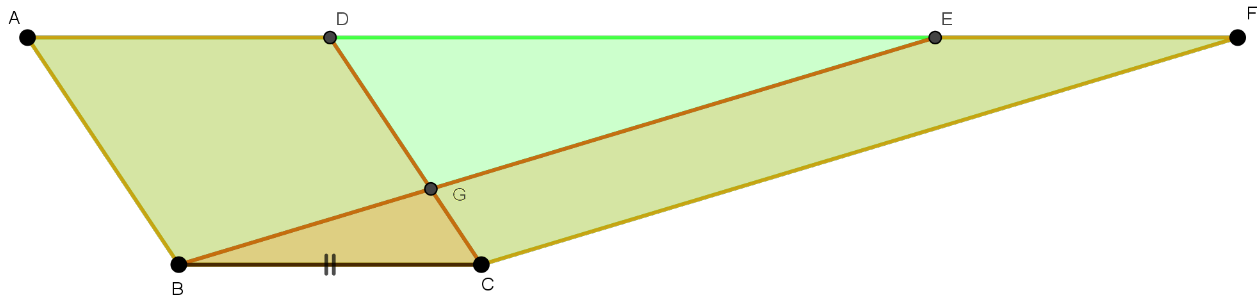


Figura 5.1: Exemplo de paralelogramos com a mesma base

e $\overline{AB} = \overline{CD}$, logo, pelo caso de congruência de triângulos $L.A.L.$, os ΔEAB e ΔFDC são equivalentes. Como o ΔDEG é comum, podemos afirmar que os trapézios $ADGB$ e $EFCG$ são equivalentes. Portanto, os paralelogramos $ABCD$ e $EBCF$ são equivalentes, pois o ΔBCG é comum aos dois paralelogramos.

□

As duas proposições a seguir se referem a equivalência de triângulos e serão utilizadas com muita frequência posteriormente, sendo ferramentas indispensáveis nesse trabalho.

Proposição 5.1.2. *Os triângulos que estão sobre bases iguais e nas mesmas paralelas são equivalentes entre si.*

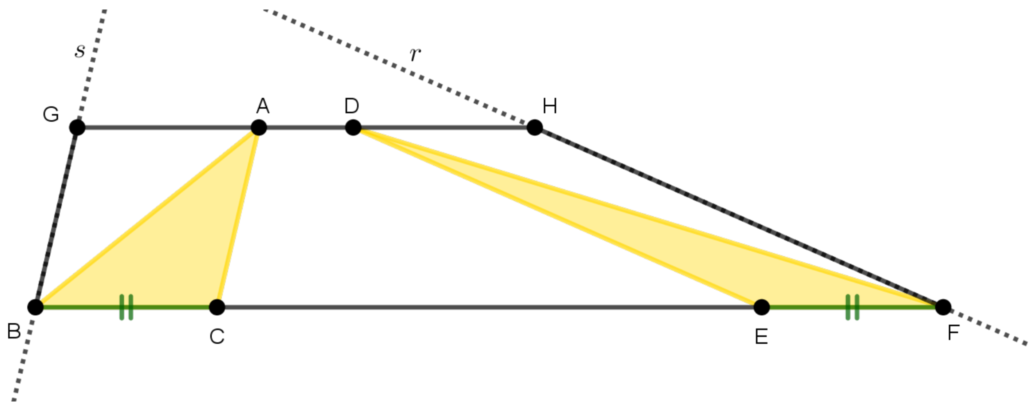


Figura 5.2: Exemplo de triângulos com a mesma base

Demonstração. Considerando as retas $\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BF}$ na figura 5.2, vamos mostrar que os ΔABC e ΔDEF são equivalentes, onde $C, E \in \overleftrightarrow{BF}$ e $\overline{BC} = \overline{EF}$. Trace a reta que contém AD e construa por B a reta s paralela a reta que contém AC. Seja $G = \overleftrightarrow{AD} \cap s$, construa por F a reta r paralela a reta que contém DE e seja $H = \overleftrightarrow{AD} \cap r$. Temos, portanto, dois paralelogramos, $ACBG$ e $DEFH$, equivalentes, pela Proposição 5.1.1, pois possuem as mesmas bases e estão sob as mesmas paralelas. Logo se verifica que os segmentos AB e DF são as diagonais dos paralelogramos, que ficam assim divididos em dois triângulos equivalentes, ou seja, a área do ΔABC é a metade da área do paralelogramo $ACBG$ e a área do ΔDEF é a metade da área do paralelogramos $DEFH$. Logo os ΔABC e ΔDEF são equivalentes.

□

Proposição 5.1.3. *Os triângulos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são equivalentes entre si.*

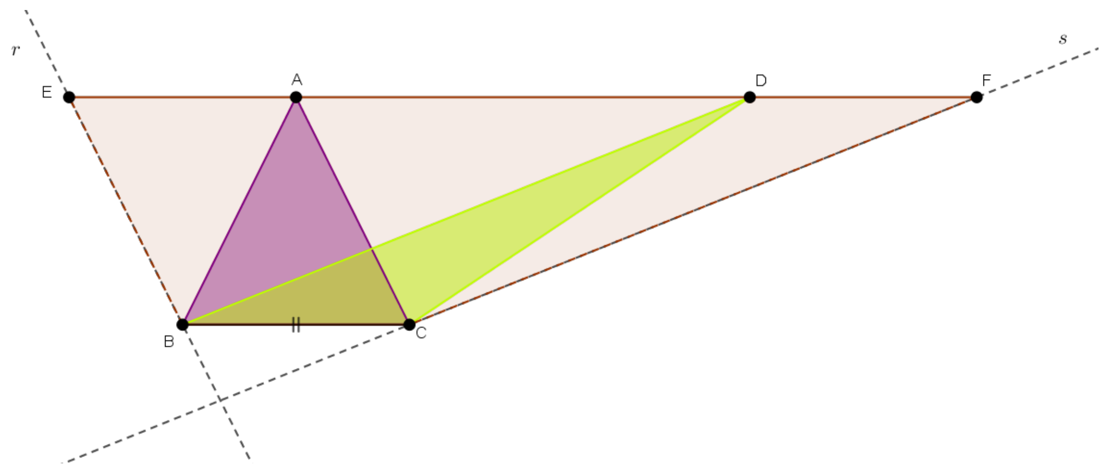


Figura 5.3: Exemplo de triângulos com bases congruentes

Demonstração. Sejam os ΔABC e ΔBCD, ambos com a mesma base BC e sobre as paralelas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$. Por B trace a reta r paralela a reta que contém AC; seja $E = \overleftrightarrow{AD} \cap r$, e por C trace a reta s paralela a reta que contém BD; seja $F = \overleftrightarrow{BD} \cap s$. Vamos mostrar que tais triângulos são equivalentes.

Temos que $AD \subset EF$, temos também os paralelogramos $AEBC$ e $DFCB$, que por sua vez, de acordo com a Proposição 5.1.1 são equivalentes. Mas, AB é uma diagonal do paralelogramo $AEBC$, logo ela o divide em dois triângulos congruentes pelo caso $A.L.A.$, onde $A\hat{B}E = B\hat{A}C$, AB é um lado comum e $B\hat{A}E = A\hat{B}C$, sendo um deles o ΔABC. Temos também, que CD é uma diagonal do paralelogramo $DFCB$, portanto, tal segmento o divide em dois triângulos congruentes pelo caso $A.L.A.$, onde $C\hat{D}F = B\hat{C}D$, CD é um lado comum e $D\hat{C}F = B\hat{D}C$, sendo um deles o ΔBDC. Como os paralelogramos $AEBC$ e $BCFD$ são equivalentes, significa que os triângulos determinados por suas diagonais também são equivalentes, logo conclui-se que ΔABC é equivalente ΔBCD.

□

Proposição 5.1.4. *Caso um paralelogramo tenha tanto a mesma base que um triângulo quanto esteja nas mesmas paralelas, então a área do paralelogramo representa o dobro da área do triângulo.*

Demonstração. Seja $ABCD$ um paralelogramo, então temos que $AB//CD$ e $BC//AD$ conforme figura 5.4: considere também o ΔBCE com mesma base BC que o paralelogramo $ABCD$ e que está nas mesmas paralelas. Vamos mostrar que a área do paralelogramo é igual ao dobro da área do ΔBCE.

Ligando os vértices A e C, dividimos o paralelogramos $ABCD$ em dois triângulos equivalentes. Considerando o ΔABC, verifica-se que ele está sobre a mesma base BC e sob as mesmas paralelas que o ΔBCE, logo, pela Proposição 5.1.3 os triângulos são equivalentes. Portanto, a área do paralelogramo $ABCD$ é o dobro da área do ΔBCE. □

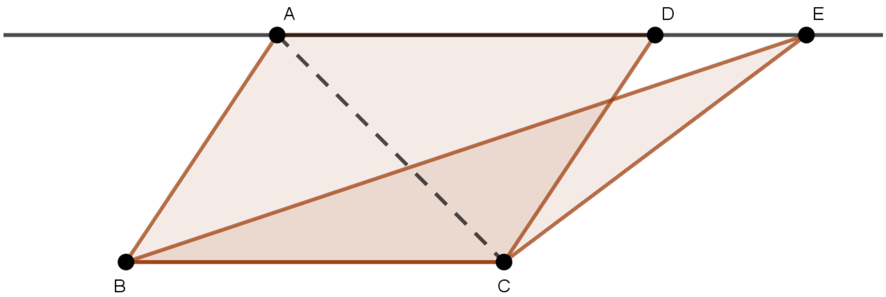


Figura 5.4: Paralelogramo com área sendo o dobro da área de um triângulo

Proposição 5.1.5. *Os complementos dos paralelogramos, à volta da diagonal de todo paralelogramo, são equivalentes entre si.*

Demonstração. Seja o paralelogramo $ABCD$ e a diagonal AC. Consideremos um ponto genérico K da diagonal AC. Passando por K duas retas paralelas, respectivamente aos lados AD e AB, marcamos os pontos de interseção E, F, G e H, respectivamente, com os AB, CD, BC e AD criando assim os segmentos EF e GH. De acordo com a figura 5.5, as regiões EBGK e HKFD são os complementos dos paralelogramos $AEKH$ e $KGCF$, respectivamente.

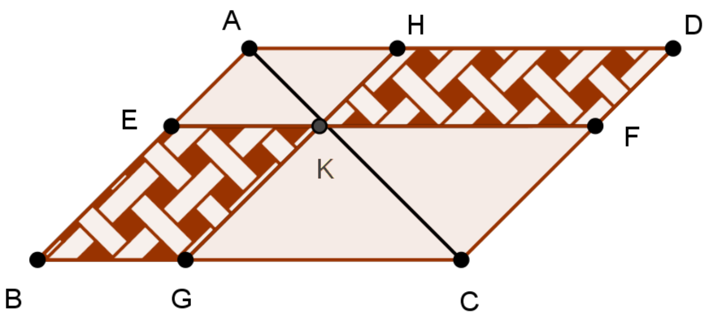


Figura 5.5: Complementos dos paralelogramos

Pelo fato de AC ser a diagonal do paralelogramo $ABCD$, temos que a mesma o divide em dois triângulos congruentes, ou seja, de acordo com a Proposição 5.1.2, ΔABC é equivalente ao ΔACD. Pelo mesmo fato, temos que AK é uma diagonal do paralelogramo $AEKH$, logo o divide em dois triângulos congruentes, sendo ΔAEK é equivalente ao ΔAKH. De novo, temos que a diagonal CK divide o paralelogramo $KGCF$ em dois triângulos congruentes, logo, ΔKGC é equivalente ao ΔKCF. Logo temos que como ΔAEK é equivalente ao ΔAKH e ΔKGC é equivalente ao ΔKCF mas também ΔABC é equivalente ao ΔACD, conclui-se que o restante $EBGK$ é equivalente a $HKFD$, ou seja, os complementos dos paralelogramos, à volta da diagonal de toda área paralelogrâmica, são equivalentes.

□

Nesse momento, vamos mostrar através de alguns exemplos, aplicações das proposições de Euclides mencionadas em algumas construções com o uso de régua não-graduada e compasso.

Exemplo 5.1.1. *Dado um ΔABC, vamos dividí-lo em três triângulos equivalentes. Para isso, devemos seguir o seguinte procedimento:*

1º) Considerando a base igual ao segmento AB, divida-o em três partes iguais seguindo os passos descritos na seção 3.1.10, obtendo os pontos G e P.

2º) Os ΔCAG, ΔCGP e ΔCPB são equivalentes de acordo com a Proposição 5.1.2.

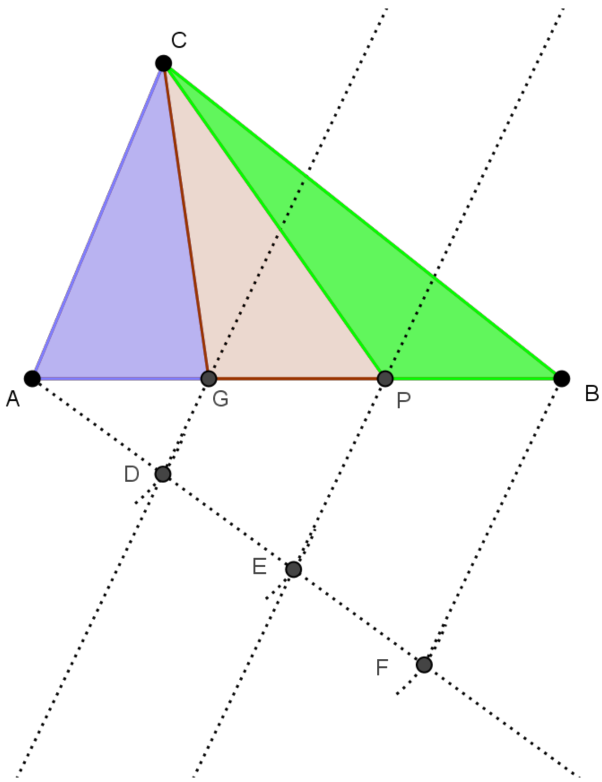


Figura 5.6: Construção de triângulos equivalentes a partir de um triângulo dado

Exemplo 5.1.2. *Transformar uma região poligonal convexa de cinco lados em outra equivalente com quatro lados.*

Considere o pentágono $ABCDE$ da figura 5.7 a seguir. Para construirmos um quadrilátero equivalente a ele, escolhemos um vértice qualquer do pentágono, nesse caso vamos escolher o vértice E, e por ele traçamos uma reta r paralela a reta s determinada pelos dois vértices adjacentes a ele, ou seja, a reta determinada pelos vértices A e D. Considerando o ΔADE, pela Proposição 5.1.3, podemos fazer E percorrer a reta r até o ponto F pertencente a reta t, determinada pelo lado CD do pentágono, que sua área permanecerá a mesma, pois a base AD permanecerá fixa. Temos então que ΔADE é equivalente ao ΔADF, logo o quadrilátero $ABCF$ é equivalente ao pentágono $ABCDE$.

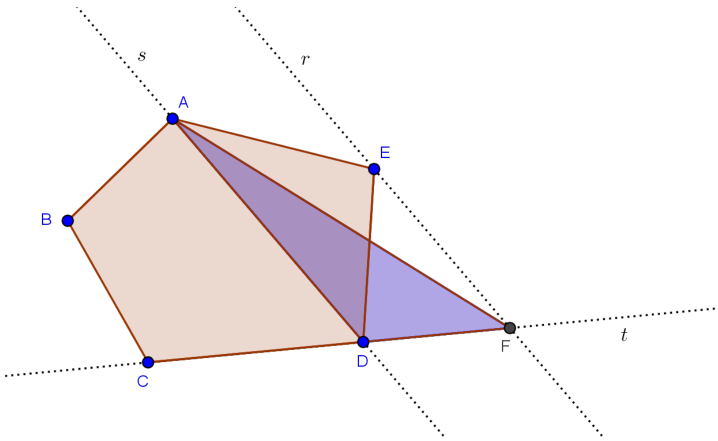


Figura 5.7: Equivalência entre pentágono e quadrilátero

Exemplo 5.1.3. *Construir um quadrilátero equivalente a um triângulo ABC dado.*

Marque um ponto D sobre o lado BC e trace a reta r determinada por A e D. Trace a reta s paralela a reta r que passa pelo ponto C. Sobre a reta s, marque um ponto E qualquer que não seja pertencente a reta determinada pelos pontos A e B e crie o ΔADE, que pela Proposição 5.1.3 é equivalente ao ΔACD. Logo o quadrilátero $ABDE$ é equivalente ao ΔABC.

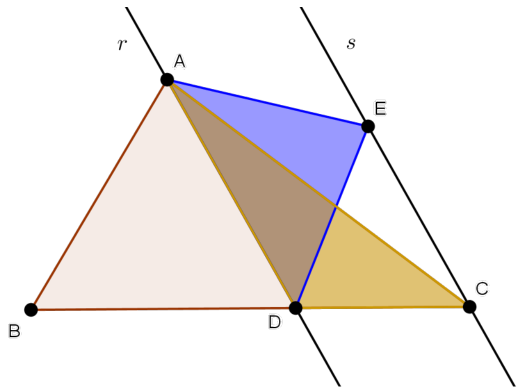


Figura 5.8: Equivalência entre triângulo e quadrilátero

Exemplo 5.1.4. *Quatro amigos adquiriram uma chácara plana em forma triangular contendo uma mina d'água. Agora querem dividi-la entre si de acordo com o capital empregado por cada um na compra, que foi de 10%, 20%, 30% e 40%, respectivamente, de maneira que todos os lotes na partilha dêem acesso à mina. Como fazê-lo?*

Considerando a chácara em forma de um triângulo ABC e a mina representada por um ponto M, há três casos a considerar para solucionar esse problema.

a) A mina está localizada em uma das fronteiras do terreno e não coincide com nenhum de seus vértices.

   Suponha que $M \in AB$, com $M \neq A$ e $M \neq B$, de acordo com a figura 5.9. Trace o segmento MC e por A trace a reta r paralela a MC, determinando o ponto D de interseção com o prolongamento de BC. Usaremos o ΔMBD como triângulo auxiliar na construção. Pela proposição 5.1.3, temos que ΔAMC e ΔDMC são equivalentes, logo o ΔABC é equivalente ΔMBD. Vamos dividir a base BD em partes proporcionais aos números $10, 20, 30$ e 40, para isso vamos seguir os passos descritos na seção 3.1.10 na qual dividiremos a base BD em dez segmentos congruentes. A seguir, como precisamos fazer tal divisão em partes proporcionais a aos números $10, 20, 30$ e 40, pegaremos um dos segmentos para representar a parte correspondente ao número 10, sendo ele o segmento BE, duas partes para corresponder ao número 20, sendo ele o segmento EF, três partes para corresponder ao número 30, sendo ele o segmento FG e quatro partes para corresponder ao número 40, sendo ele GD. Construa os segmentos ME, MF e MG, segmentos estes que dividem o triângulo ΔMBD em triângulos de áreas proporcionais ao capital de cada um mencionada acima.
   Observe que os ΔMBE e ΔMEF já fazem parte da solução do problema, pois estão em sua totalidade contidos no triângulo ABC. Vamos agora encontrar a parte do ΔABC equivalente ao ΔMFG que representa a parte proporcional ao número 30. Para isso traçamos por G a reta s paralela ao lado MC marcando o ponto H de interseção de s com o lado AC. Pela Proposição 5.1.3, temos que ΔMCG é equivalente ao ΔMCH, logo, a parte do ΔABC correspondente ao ΔMFG é o quadrilátero $MFCH$. Assim a parte proporcional ao número 40 é a parte restante do ΔMBD, ou seja, o ΔMGD, que é equivalente ao ΔAMH.

b) A mina coincide com um de seus vértices.
   Suponha que M coincida com o vértice A na figura 5.10 (os outros casos são análogos). Basta dividirmos o lado BC, oposto ao vértice A em partes proporcionais a $10, 20, 30$ e 40 seguindo o procedimento descrito no item anterior, obtendo os pon-

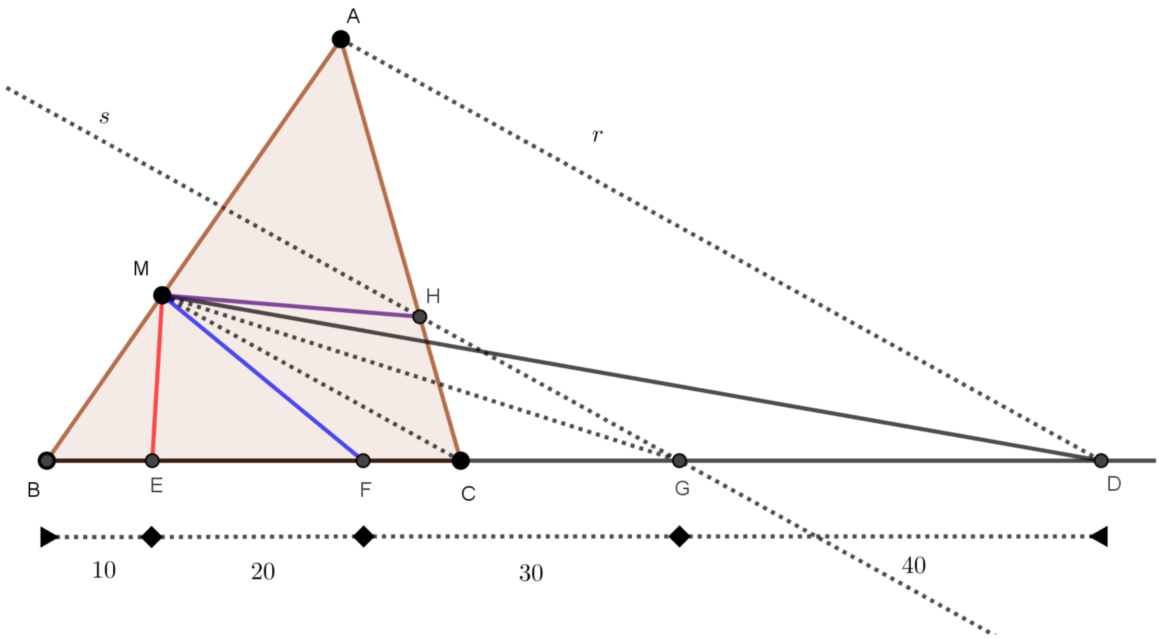


Figura 5.9: Terreno com a mina em uma das fronteiras sem coincidir com seus vértices

tos E, F e G, tal que os segmento BE representa a parte proporcional ao número 10, o segmento EF proporcional ao número 20, FG proporcional ao número 30 e o segmento GC ao número 40. Traçamos os segmentos ME, MF e MG obtendo os $\Delta MBE, \Delta MEF, \Delta MFG$ e ΔMGC que representam a solução do problema.

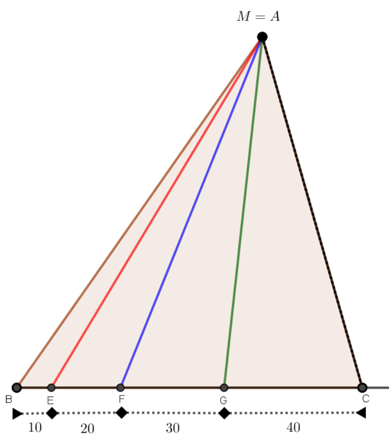


Figura 5.10: Terreno com a mina em um vértice

c) A mina está localizada no interior da chácara.

Trace a reta $\overleftrightarrow{AE}$, com E pertencente ao prolongamento do lado BC, paralela ao segmento MB e a reta $\overleftrightarrow{AD}$, com D pertencente também ao prolongamento do lado BC, paralela a MC, obtendo assim o ΔMED na figura 5.11, auxiliar para nosso problema.

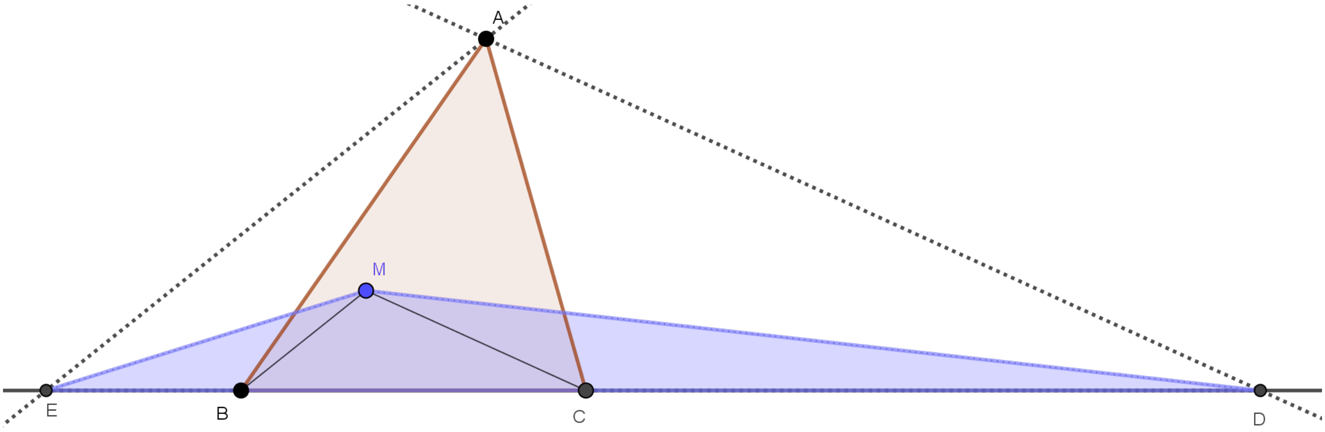


Figura 5.11: Terreno com a mina em seu interior - triângulo auxiliar

Vamos dividir o lado ED em partes proporcionais aos números $10, 20, 30$ e 40 como visto nos itens anteriores desta atividade, obtendo os pontos F, G e H . Trace os segmentos MF, MG e MH os quais dividem o ΔMED auxiliar em triângulos cujas áreas são proporcionais a $10, 20, 30$ e 40 como na figura 5.12.

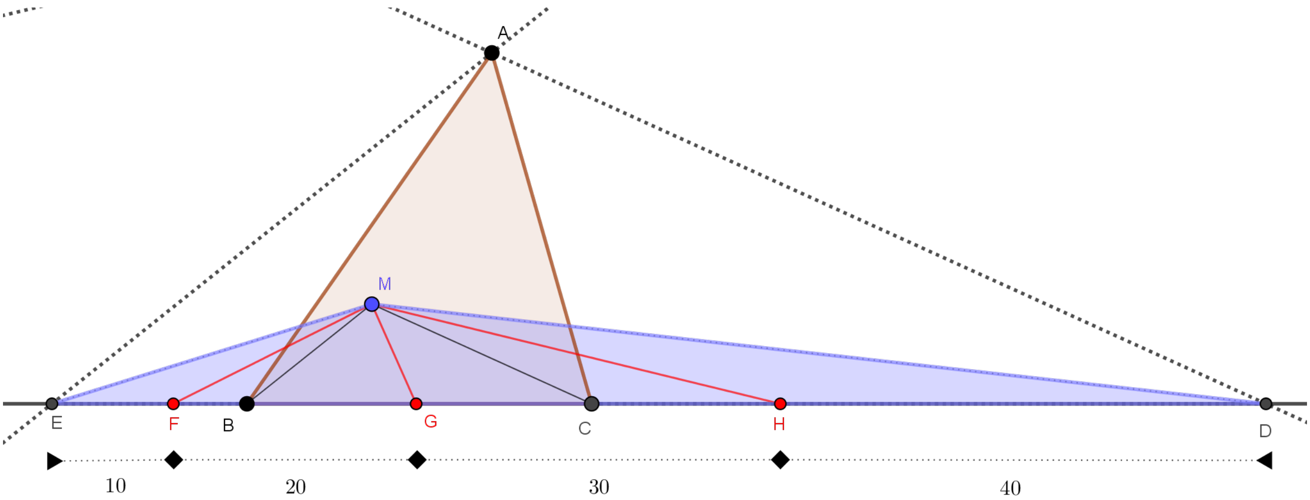


Figura 5.12: Terreno com a mina em seu interior - Divisão em partes proporcionais do lado ED

Observamos na figura 5.12 que os triângulos obtidos não estão totalmente contidos no ΔABC. Vamos construir polígonos equivalentes a esses triângulos que estejam contidos no ΔABC.
Desses triângulos, apenas dois possuem dois vértices dentro do ΔABC, são eles o ΔMFG e ΔMGH dos quais podemos então aplicar a Proposição 5.1.3 para obtermos triângulos equivalentes totalmente internos ao ΔABC seguindo os passos: trace por F a reta r paralela ao segmento MB que interceptará o lado AB no ponto K na figura 5.13, logo temos que ΔMBF é equivalente ao ΔMBK.

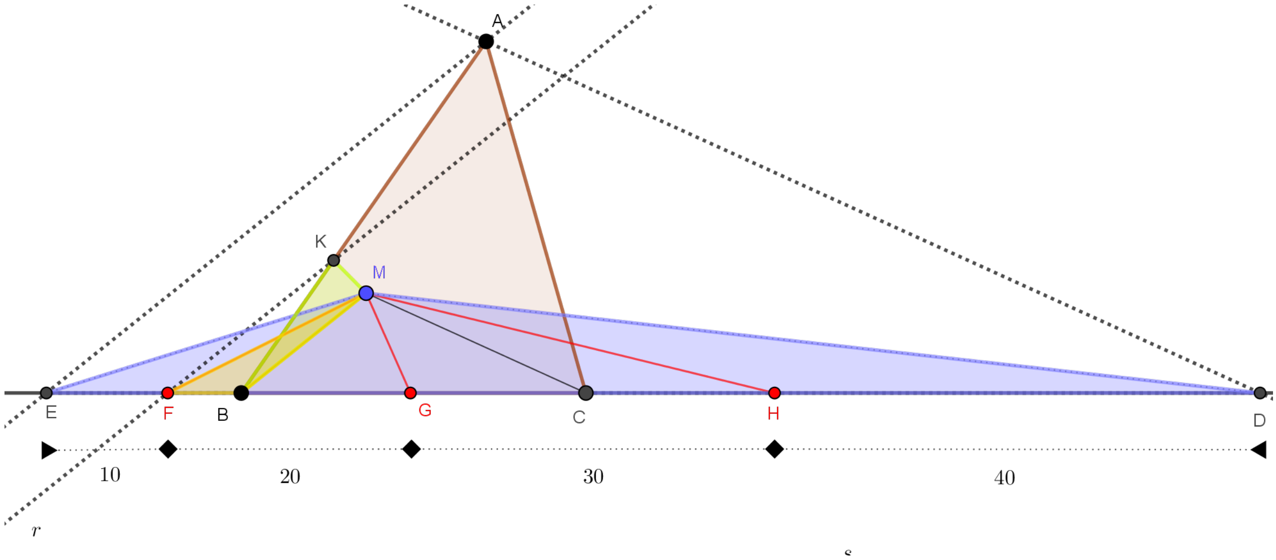


Figura 5.13: Terreno com a mina em seu interior - regiões equivalentes internas no ΔABC

Temos portanto que o ΔMGF é equivalente ao polígono $BGMK$ na figura 5.14, que é um dos polígonos procurados que representa a parte proporcional aos 20%.

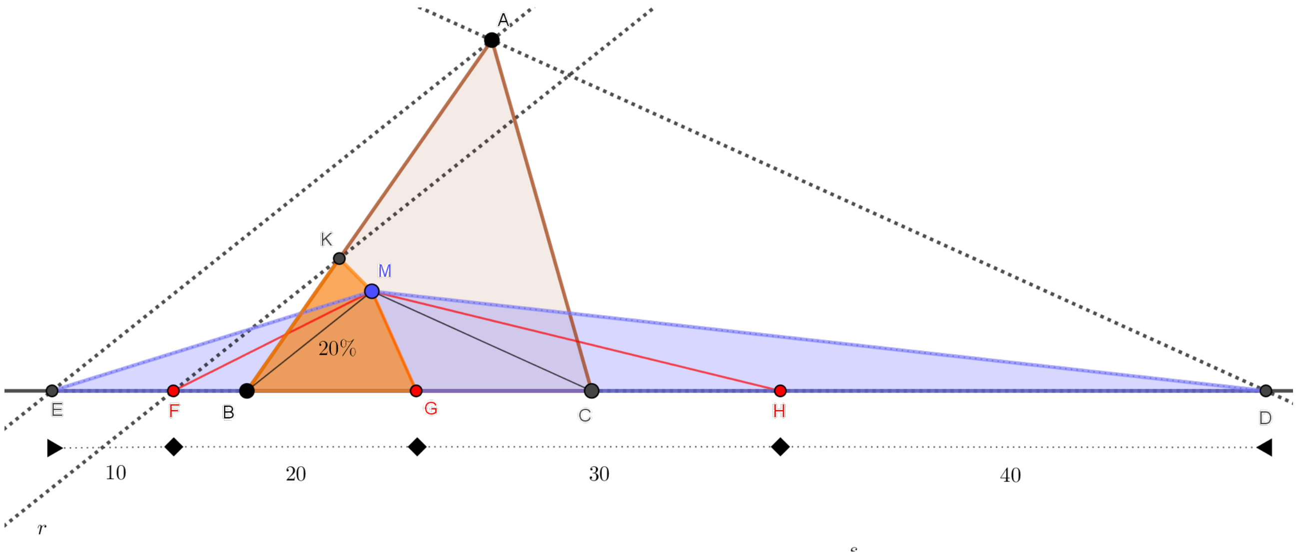


Figura 5.14: Terreno com a mina em seu interior - região correspondente a 20%

Vamos agora encontrar o polígono equivalente ao ΔMGH que esteja contido no ΔABC seguindo os passos a seguir: trace a reta s por H que seja paralela ao segmento MC na figura 5.15, que intercepta o lado AC no ponto L. De acordo com a Proposição 5.1.3, temos que o ΔMCH é equivalente ao ΔMCL.

Portanto, o polígono $MGCL$ na figura 5.16 é o polígono procurado contido no ΔABC equivalente ao ΔMGH que representa a parte proporcional aos 30%.

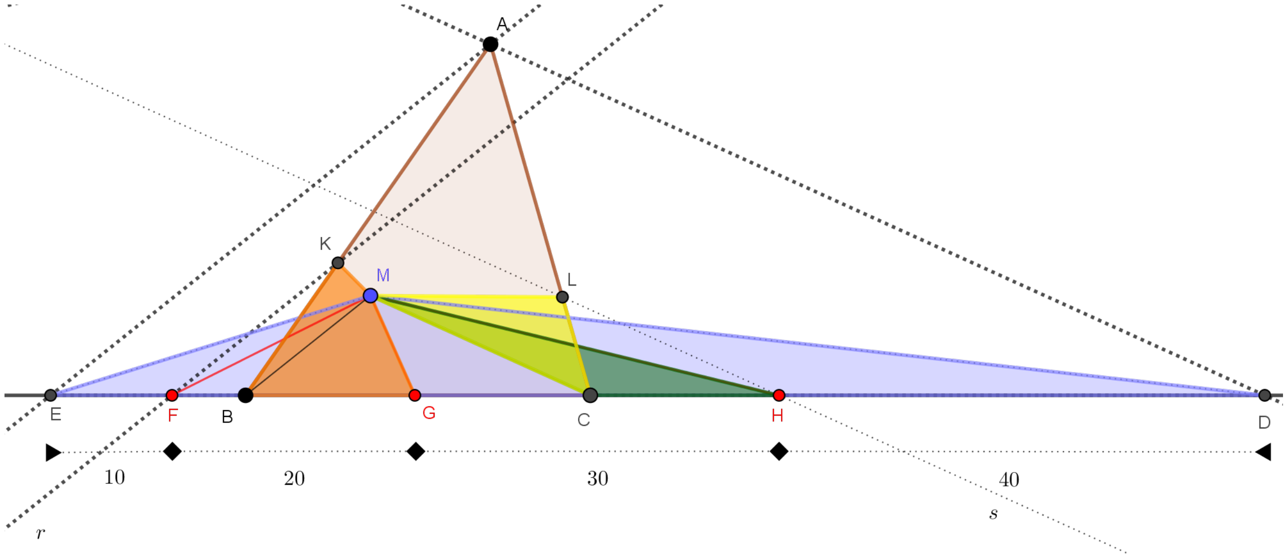


Figura 5.15: Terreno com a mina em seu interior - ΔMGH equivalente na parte interna do ΔABC

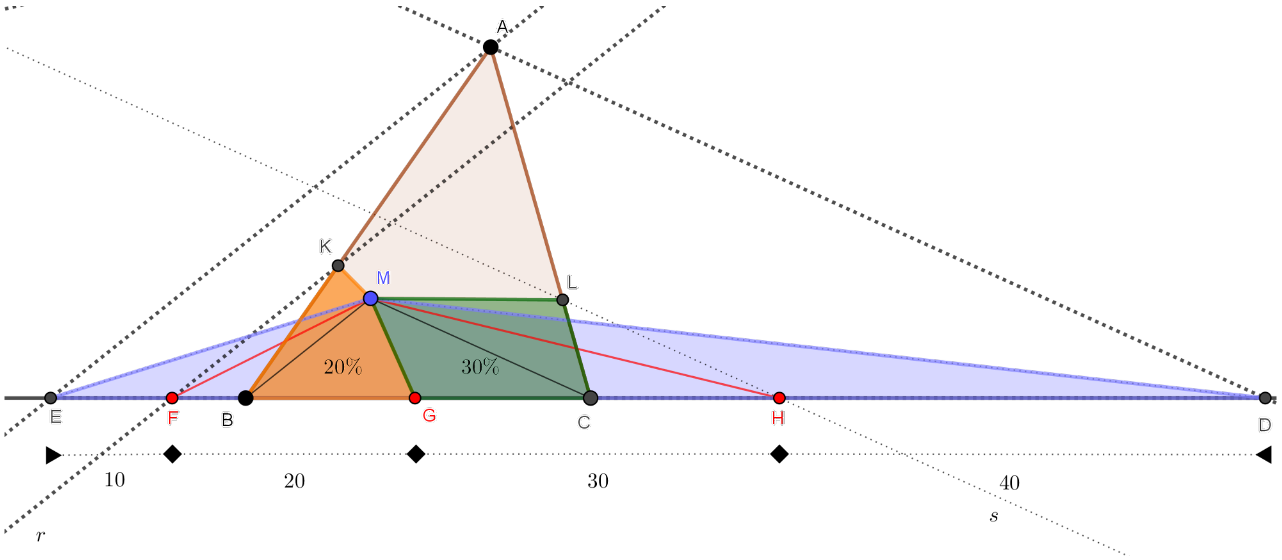


Figura 5.16: Terreno com a mina em seu interior - região correspondente a 30%

Para a parte restante do ΔABC correspondente ao polígono $AKML$ e representada pelos ΔMFE, proporcional a 10% e ΔMHD proporcional a 40%, faremos sua divisão em partes proporcionais a 20% e 80%, pois o polígono $AKML$ representa 100% do que resta do lote. Para isso, passe uma reta pelo ponto K paralela ao segmento MA e marque o ponto X de interseção com o prolongamento do segmento LA na figura 5.17. Pela Proposição 5.1.3, o ΔAMK é equivalente ao ΔAMX.

Portanto, basta dividir o lado LX do ΔLMX da figura 5.18 em partes proporcionais a 20% e 80% como feito nos itens a e b.

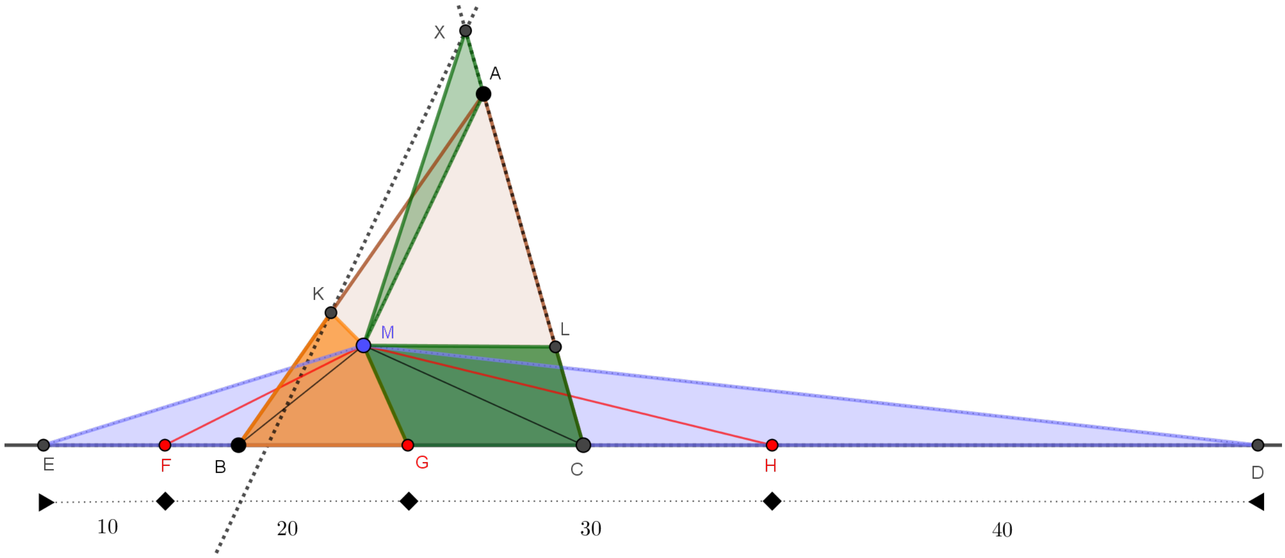


Figura 5.17: Terreno com a mina em seu interior - reta paralela a MA pelo ponto K

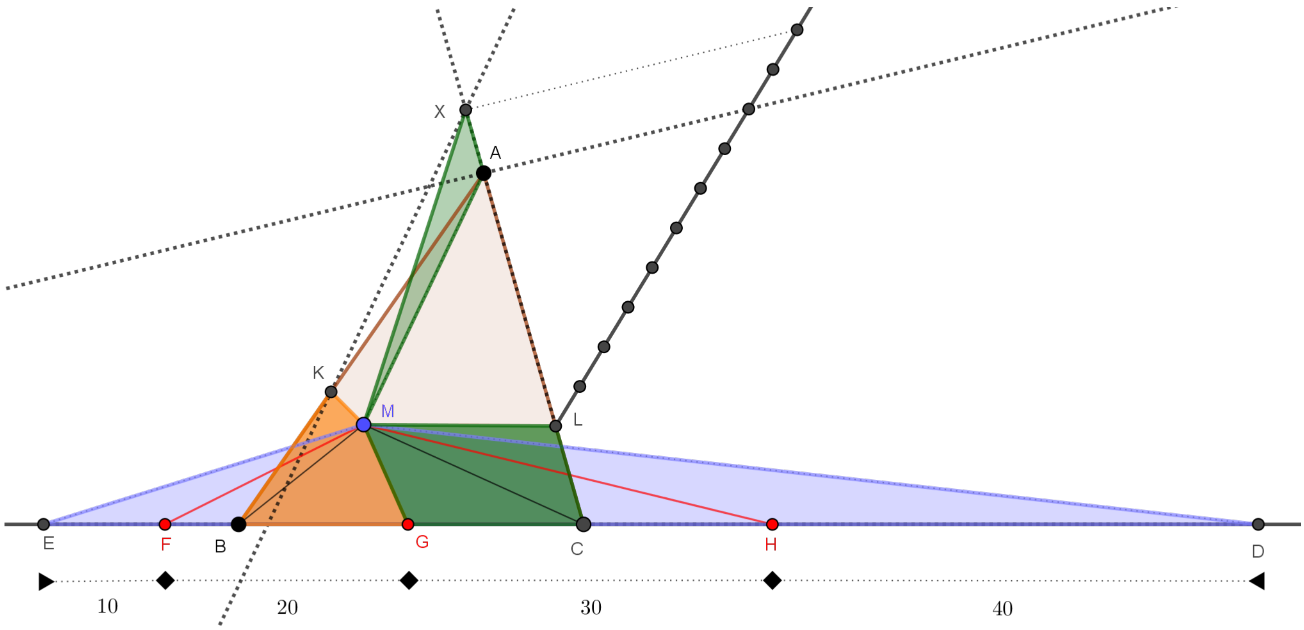


Figura 5.18: Terreno com a mina em seu interior - divisão do lado LX em partes proporcionais

Realizado esse procedimento, observamos que tal divisão coincide no ponto A, logo o ΔMAX e ΔMLA são os polígonos procurados. Mas como o ΔMAX não faz parte do ΔABC do problema e é equivalente ao ΔMAK, conclui-se que os polígonos procurados são os ΔMAK, correspondente aos 10% e ΔMLA, correspondente aos 40%. Portanto, os lotes devem ser divididos de acordo com os polígonos $BGMK$, $MGCL$, ΔMAK e ΔMLA da figura 5.19.

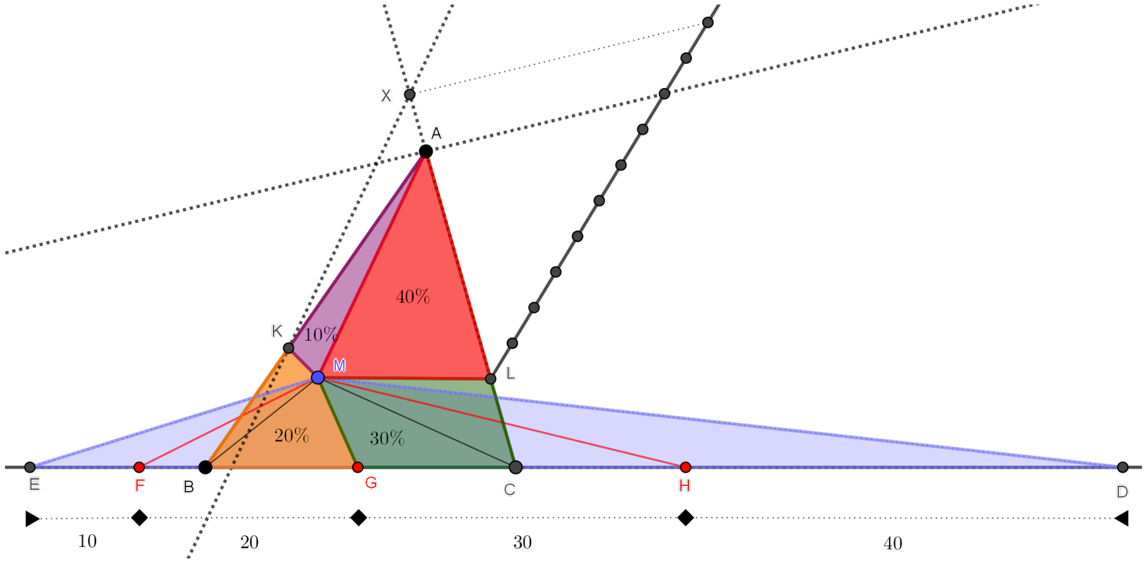


Figura 5.19: Terreno com a mina em seu interior - regiões correspondentes a 10% e 40% internas ao ΔABC

5.2 Teorema de Pitágoras

Nesta seção, apresentaremos a demonstração do Teorema de Pitágoras, uma das relações de um triângulo retângulo de maior uso e de maior importância, aplicando equivalência de áreas.

Teorema 5.2.1. *Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que está oposto ao ângulo reto é igual a soma dos quadrados que estão sobre os lados que contêm o ângulo reto.*

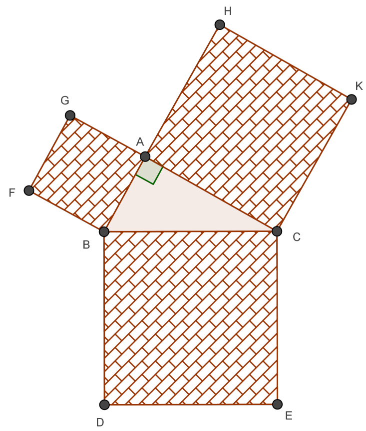


Figura 5.20: Teorema de Pitágoras

Demonstração. Considere ΔABC retângulo em A da figura 5.20, vamos mostrar que o quadrado $BDEC$ sobre a hipotenusa BC é equivalente a união dos quadrados $AGFB$ e $ACKH$, respectivamente, sobre os catetos AB e AC. Considere ainda o segmento AL paralelo aos lados BD e CE e os segmentos AD, CF, AE e BK. Considere também, na figura 5.21, o ponto I de interseção entre AL e BC. Temos que $B\hat{A}C = B\hat{A}G = 90^\circ$, equivalem a dois ângulos retos, logo AC e AG estão sobre uma mesma reta que chamaremos de reta $\overleftrightarrow{CG}$. Temos também que $B\hat{A}C = C\hat{A}H = 90^\circ$ equivalem a dois ângulos retos, estando os segmentos AB e AH sobre a mesma reta, denotada por $\overleftrightarrow{BH}$. Verifica-se que $D\hat{B}C = F\hat{B}A$, ângulos nos quadrados $BDEC$ e $BAGF$, respectivamente, e que o ângulo $A\hat{B}C$ é comum aos ângulos $F\hat{B}C$ e $A\hat{B}D$, logo, temos que $F\hat{B}C = A\hat{B}D$. Então, como $\overline{BD} = \overline{BC}$ e $\overline{FB} = \overline{AB}$, conclui-se por $L.A.L.$ que $\Delta ABD \equiv \Delta FBC$. Note que de acordo com a Proposição 5.1.4, a área do paralelogramo $BDLI$ é o dobro da área do ΔABD, pois ambos possuem a mesma base BD e estão sob as mesmas paralelas BD e AL. O mesmo acontece com o paralelogramo $AGFB$ e o ΔFBC, ambos com a mesma base FB e entre as paralelas FB e CG, logo a área do paralelogramo $AGFB$ é o dobro da área do ΔFBC. Mas como $\Delta ABD \equiv \Delta FBC$, temos então que o paralelogramo $BDLI$ é equivalente ao quadrado $AGFB$. Por outro lado, temos que $K\hat{C}A = E\hat{C}B = 90^\circ$ e o ângulo $B\hat{C}A$ é comum aos ângulos $E\hat{C}A$ e $B\hat{C}K$, logo $E\hat{C}A = B\hat{C}K$. Como $\overline{CE} = \overline{CB}$ (lados comuns do quadrado $BCED$) e $\overline{CK} = \overline{AC}$ (lados comuns do quadrado $ACKH$), temos pelo caso de congruência $L.A.L.$, que $\Delta ECA \equiv \Delta BCK$. Novamente pela Proposição 5.1.4, verifica-se que a área do paralelogramo $CELI$ tem o dobro da área do ΔECA e a área do paralelogramo $ACKH$ tem o dobro da área do ΔBCK, mas como $\Delta ECA \equiv \Delta BCK$, temos então que o paralelogramo $CELI$ é equivalente ao quadrado $ACKH$. O que nos mostra que o quadrado sobre a hipotenusa é equivalente a soma dos quadrados sobre os catetos [11][3].

□

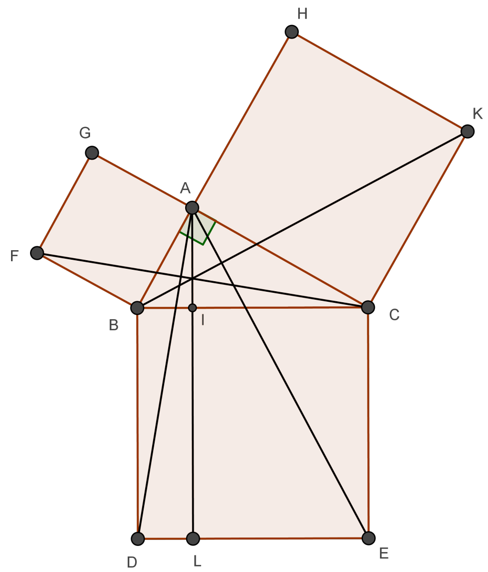


Figura 5.21: Teorema de Pitágoras por equivalência de áreas - Euclides

5.3 Quadratura de um polígono

Os gregos antigos, desde a época de Arquimedes, calculavam áreas de regiões poligonais por meio de comparações com a área de um quadrado conhecido. Utilizando essa noção, o foco desta seção é mostrar, através de construções geométricas com o uso de régua não-graduada e compasso, a quadratura de polígonos.

5.3.1 Quadratura de um triângulo

Dado um triângulo de base b e altura h conforme figura 5.22, sua quadratura será dada pela relação entre a área do triângulo dada por $A = \dfrac{bh}{2}$ e a área do quadrado de lado l dada por $A = l^2$. O objetivo é encontrar a medida l tal que $l^2 = \dfrac{bh}{2}$, ou seja, $l = \sqrt{\dfrac{bh}{2}}$. Assim concluímos que a medida do lado l do quadrado representa a média geométrica entre as medidas $\dfrac{b}{2}$ e h. Para isso devemos seguir o procedimento apresentado a seguir.

1º) Sobre uma semirreta $\overrightarrow{DX}$, transporte o segmento $\overline{DE} = \dfrac{b}{2}$.

2º) Sobre a semirreta $\overrightarrow{DX}$ transporte o segmento $\overline{EF} = h$ de tal forma que $EF \cap DE = \{E\}$.

3º) Determine a média geométrica $\overline{EI}$ de DE e EF como visto na seção 3.2.

4º) O quadrado $EGHI$ representa a quadratura do ΔABC.

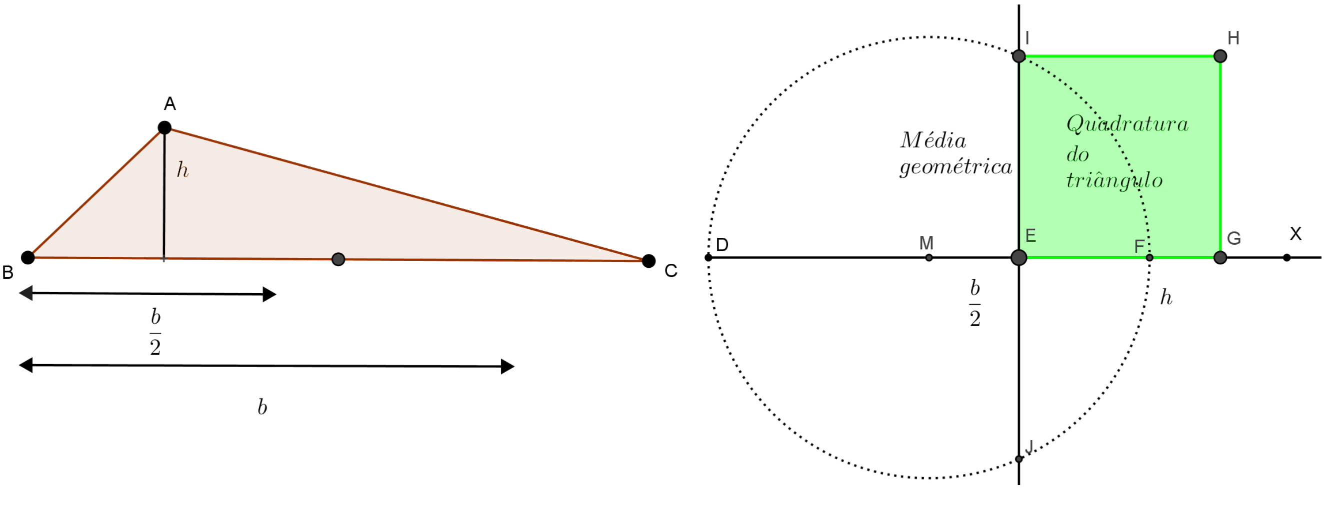


Figura 5.22: Quadratura de um triângulo

5.3.2 Quadratura do retângulo

Dado um retângulo $ABCD$ de base $\overline{BC} = b$ e altura $\overline{CD} = h$, vamos fazer sua quadratura relacionando sua área $A = b \cdot h$ com a área $A = l^2$ do quadrado. O lado do quadrado procurado representa a média geométrica entre a base b e a altura h do retângulo dado. Para encontrarmos o seu valor seguiremos o procedimento a seguir.

1º) Prolongue um dos lados do retângulo $ABCD$, aqui vamos prolongar o lado BC.

2º) Trace a circunferência Θ de centro C e raio igual $\overline{CD}$ e marque o ponto de interseção F entre a circunferência Θ e o prolongamento do lado BC do retângulo, assim, $\overline{CD} = \overline{CF}$.

3º) Marque o ponto médio M do segmento BF como feito na seção 3.1.3.

4º) Trace a circunferência Γ de centro em M e raio $\overline{MF}$ e prolongue o lado CD do retângulo, marcando o ponto H de interseção com a circunferência Γ.

5º) A medida de $\overline{CH}$ representa a média geométrica entre as medidas $\overline{BC}$ e $\overline{CF}$, que correspondem a b e h, respectivamente, ou seja, representa a medida do lado do quadrado de área equivalente ao retângulo dado.

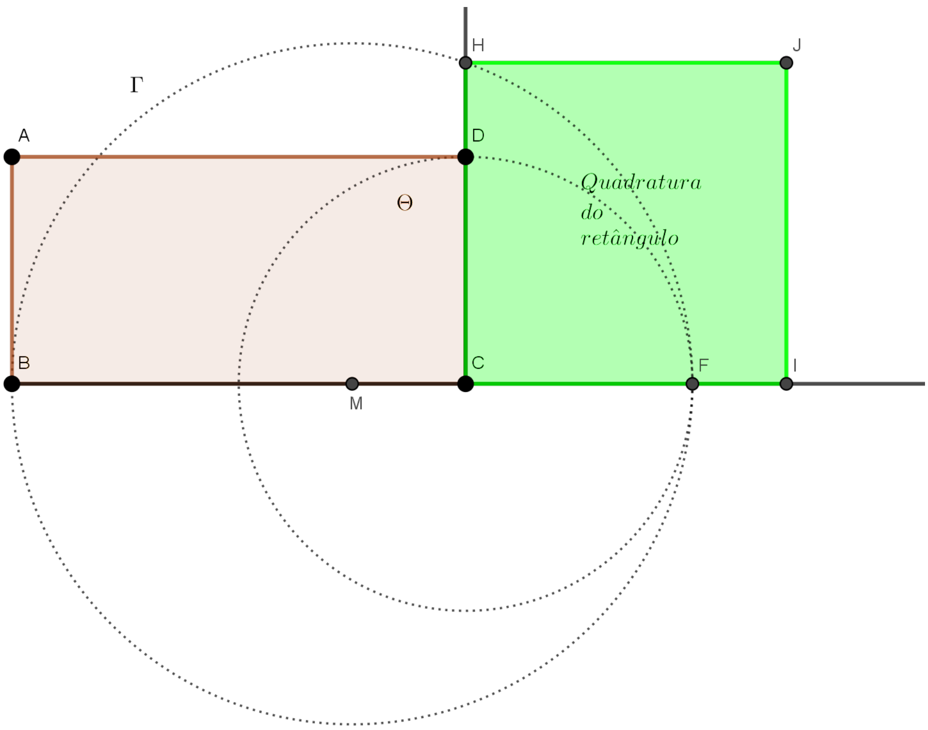


Figura 5.23: Quadratura do retângulo

5.3.3 Quadratura de um trapézio

Considerando um trapézio de base maior B, base menor b e altura h, o procedimento para obter sua quadratura é semelhante ao da quadratura do triângulo realizada na seção 5.3.1. Observa-se, pelas equações (5.1) e (5.2), que o lado do quadrado equivalente será dado pela média geométrica entre $\dfrac{B+b}{2}$ e h:

$$l^2 = \frac{(B+b)\cdot h}{2} \tag{5.1}$$

$$l = \sqrt{\frac{(B+b)}{2}\cdot h}. \tag{5.2}$$

Apresentamos, abaixo, o procedimento para obter tal quadratura.

1º) Sobre uma semirreta $\overrightarrow{EX}$, transporte as bases $B = \overline{EG}$ com extremidade em E e $b = \overline{GH}$ com extremidade em G, tal que $EG \cap GH = \{G\}$.
2º) Marque o ponto médio M de EH, determinando assim a medida $\dfrac{B+b}{2}$.
3º) Transporte a altura $h = \overline{MI}$ na semirreta EX com origem no ponto M, tal que $EM \cap MI = \{M\}$.
4º) Construa o semicircunferência de diâmetro $\overline{EI}$ e crie a perpendicular a semirreta $\overrightarrow{EX}$ pelo ponto M, marcando o ponto P de interseção com a semicircunferência.
5º) A medida $\overline{PM}$ é a média geométrica entre as medidas $\dfrac{B+b}{2}$ e h, que representa o lado do quadrado $MNOP$, que é a quadratura do trapézio.

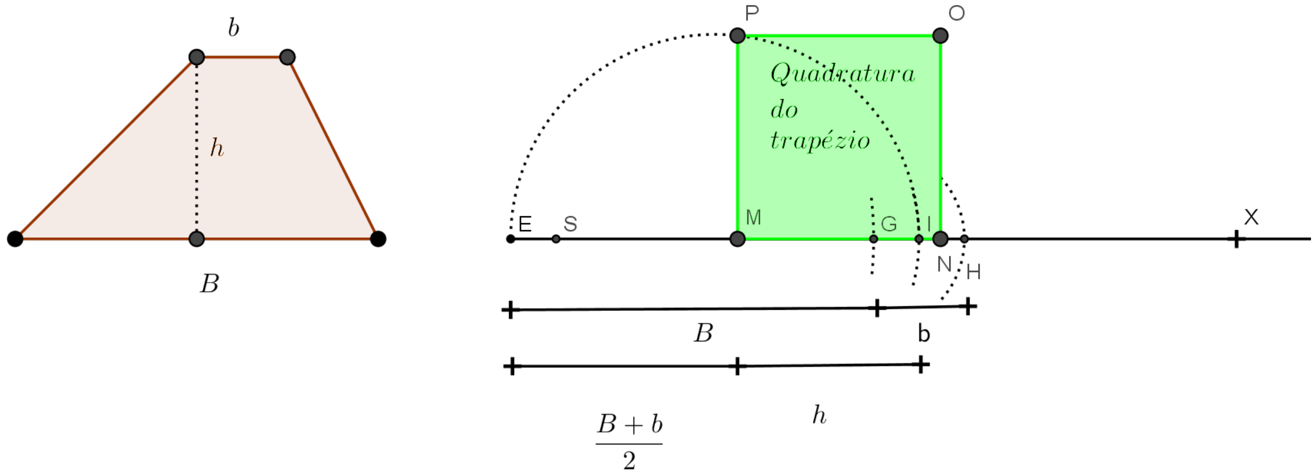


Figura 5.24: Quadratura do trapézio

5.3.4 Quadratura de um pentágono

Dado um pentágono $ABCDE$, figura 5.25 a seguir, através de construções geométricas faremos a sua quadratura, ou seja, vamos encontrar um quadrado de área equivalente ao pentágono inicial seguindo os procedimento descritos a seguir.

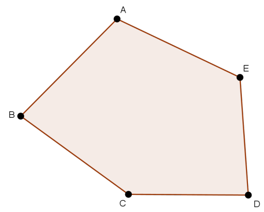


Figura 5.25: Pentágono

1°) Escolha uma base qualquer e trace por ela uma reta. Seja o segmento CD a base escolhida e trace uma reta r por ele.

2°) Trace o segmento AC e por B passamos uma reta s paralela ao segmento AC que intercepta a reta r no ponto F. De acordo com a Proposição 5.1.3, fazendo o deslocamento do ponto B até o ponto F, ΔABC e ΔACF são equivalentes, logo, o pentágono $ABCDE$ é equivalente ao quadrilátero $AFDE$.

3°) Trace o segmento AD e por E a reta t paralela ao segmento AD, marcando o ponto G de interseção com a reta r. Pela Proposição 5.1.3, os triângulos ΔAED e ΔADG são equivalentes, o que conclui que o quadrilátero $AFDE$ é equivalente ao ΔAFG.

4°) Seguindo os passos descritos na seção 5.3.1, finalize fazendo a quadratura do ΔAFG no quadrado $PQOK$, conforme apresentado na figura 5.26 abaixo.

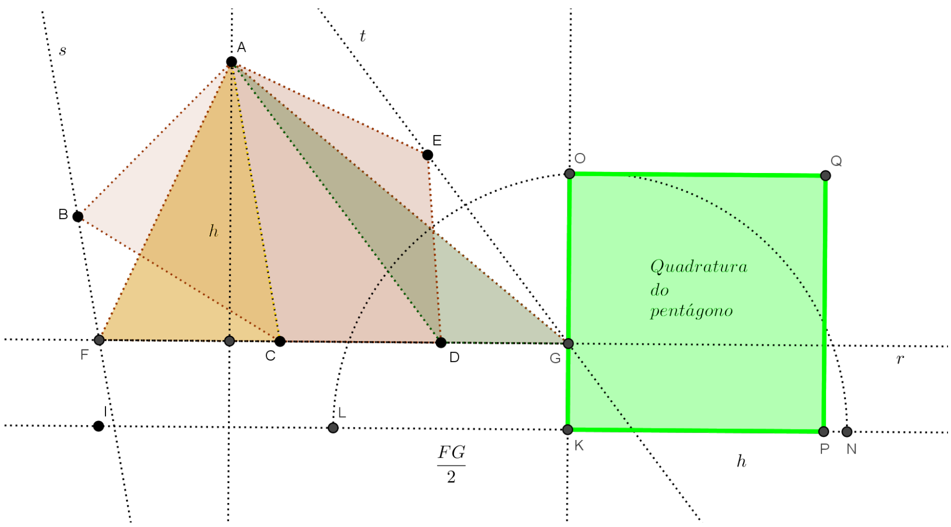


Figura 5.26: Quadratura de um pentágono

5.3.5 Quadratura de um hexágono

Dado o hexágono $ABCDEF$ abaixo, inicialmente vamos encontrar o pentágono equivalente ao hexágono dado, seguido do quadrilátero equivalente ao pentágono e por fim o triângulo equivalente ao quadrilátero. Assim, chegaremos a construção final do quadrado equivalente ao triângulo, que é a solução da quadratura inicial, a quadratura do hexágono dado. Vamos aos procedimentos iniciais.

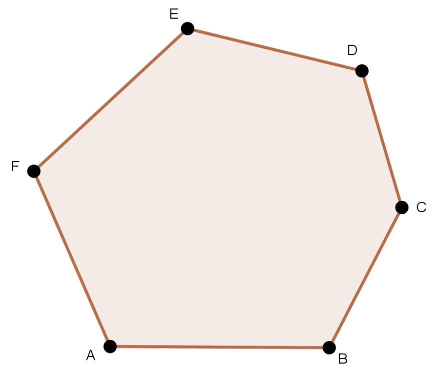


Figura 5.27: Hexágono qualquer

1º) Trace a reta r pelos pontos não-adjacentes A e E, obtendo assim $r = \overleftrightarrow{AE}$.

2º) Trace a reta s paralela a reta r pelo ponto F e marque o ponto F' de interseção da reta s com o prolongamento do lado AB. Pela proposição 5.1.3, o ΔAEF é equivalente ao $\Delta AEF'$.

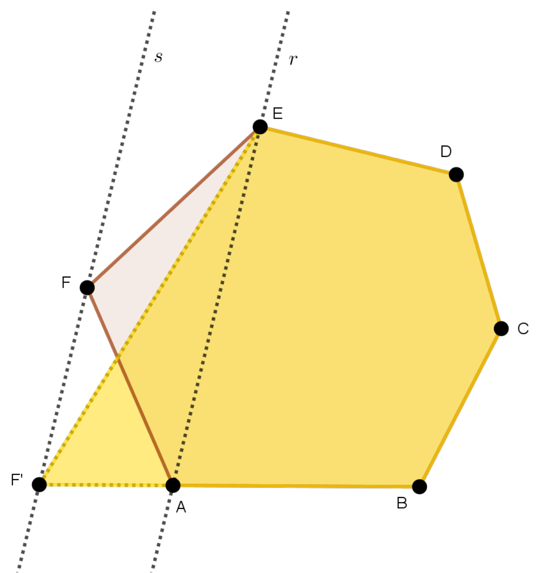


Figura 5.28: Pentágono $BCDEF'$ equivalente ao hexágono $ABCDEF$ dado

Temos então o pentágono $BCDEF'$ equivalente ao hexágono dado. Vamos seguir com os procedimentos para encontrarmos o quadrilátero equivalente ao pentágono $BCDEF'$.

3º) Trace a reta t pelos pontos B e D, obtendo a reta $t = \overleftrightarrow{BD}$.

4º) Trace a reta u paralela a reta t pelo ponto C e marque o ponto C' de interseção da reta u com o prolongamento do lado AB. E novamente pela proposição 5.1.3, o ΔBCD é equivalente ao $\Delta BC'D$.

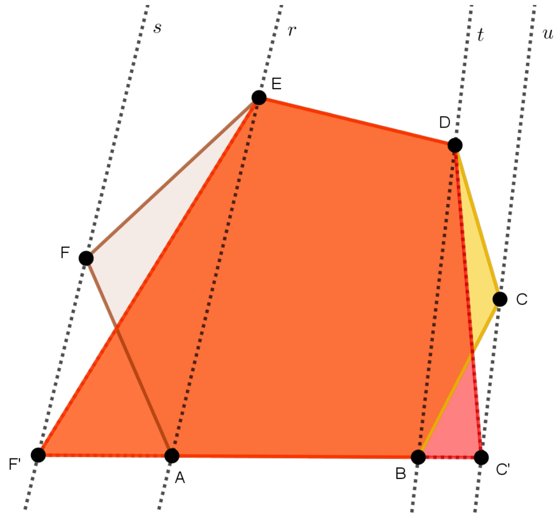


Figura 5.29: Quadrilátero $C'DEF'$ equivalente ao pentágono $BCDEF'$ anterior

Obtemos agora o quadrilátero $C'DEF'$ equivalente ao pentágono obtido anteriormente.

Vamos agora, encontrar o triângulo equivalente a esse quadrilátero seguindo os procedimentos abaixo.

5º) Trace a reta v pelos pontos E e C', obtendo a reta $v = \overleftrightarrow{EC'}$.

6º) Trace a reta w paralela a reta v pelo ponto D, marcando o ponto D' de interseção de w com o prolongamento do lado $F'C'$. De acordo com a proposição 5.1.3, o $\Delta C'DE$ é equivalente ao $\Delta C'D'E$.

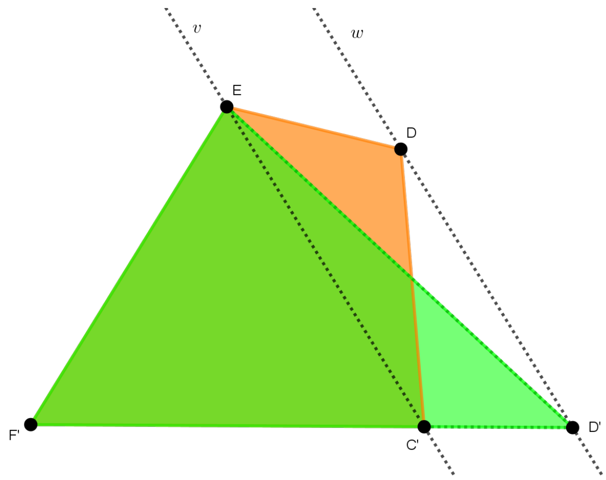


Figura 5.30: Triângulo $D'EF'$ equivalente ao quadrilátero $F'C'DE$ anterior

Assim, obtivemos o $\Delta D'EF'$ equivalente ao quadrilátero anterior. Agora, aplicando os procedimentos descritos na seção 5.3.1, obtemos a quadratura procurada, ou seja, o quadrado equivalente ao hexágono $ABCDEF$.

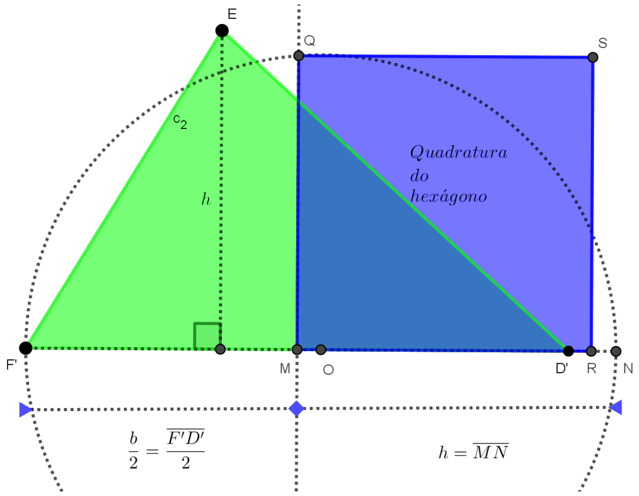


Figura 5.31: Quadratura de um hexágono $ABCDEF$

5.3.6 Quadratura de um polígono de n lados

Considere o polígono $A_1A_2A_3\ldots A_{n-2}A_{n-1}A_n$ de n lados abaixo. Para fazer a quadratura desse polígono de n lados ($n \geq 4$), procedemos de maneira a encontrar um polígono de $n-1$ lados equivalente ao polígono de n lados dado seguindo os procedimentos abaixo.

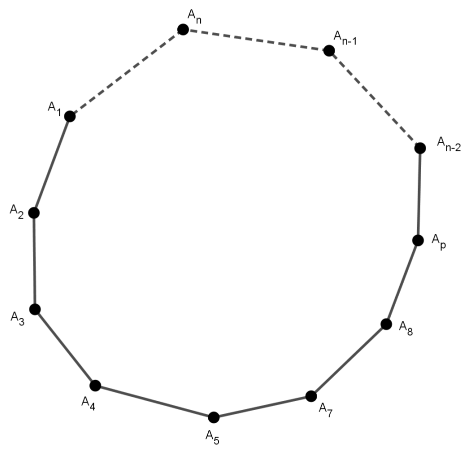


Figura 5.32: Polígono de n lados

1°) Escolha um vértice qualquer, vamos considerar em nossa construção o vértice A_1. Trace por A_1 uma reta s paralela a reta r determinada pelos vértices A_2 e A_n e construa o $\Delta A_1A_2A_n$.

2°) Faça A_1 percorrer sobre a reta s até coincidir com o prolongamento do lado A_nA_{n-1}.

De acordo com a Proposição 5.1.3, o $\Delta A_1A_2A_n$ é equivalente ao $\Delta A_1'A_2A_n$. Logo, o polígono $A_1'A_2A_3\cdots A_{n-1}$, com $n-1$ lados, é equivalente ao polígono de n lados, como visto na figura 5.32.

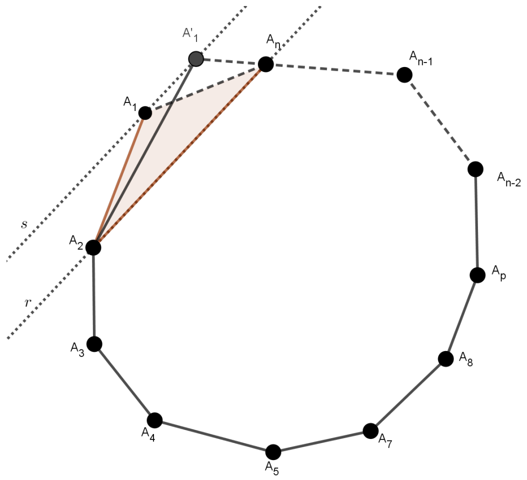


Figura 5.33: Polígono de $n-1$ lados $A_1'A_2\cdots A_{n-1}$ equivalente ao polígono de n lados $A_1A_2\ldots A_n$

Pelo princípio de indução finita, repetiremos esse procedimento de reduzir a quantidade de lados em 1 unidade sucessivamente, até obtermos um triângulo equivalente ao polígono de n lados dado. Assim, seguindo os passos descritos na seção 5.3.1, obteremos a quadratura do triângulo, que é equivalente a quadratura desejada.

5.3.7 Quadratura do circulo

Um dos problemas clássicos mais famosos da história da matemática, chamado quadratura do círculo consiste em encontrar um quadrado de área equivalente ao circulo de raio r dado utilizando nas construções apenas régua não-graduada e compasso um número finito de vezes.

Dado um circulo de raio r, sua área é dada por πr^2. Considerando um circulo de raio unitário $r=1$, teremos que a área desse circulo é igual a $\pi\cdot 1=\pi$. Como a área de um quadrado de lado l é igual a l^2, devemos então obter o lado l de um quadrado no qual tenhamos $l^2=\pi$, ou seja, $l=\sqrt{\pi}$.

Em termos de construções geométricas com a utilização de régua não-graduada e compasso, o objetivo se torna em construir um segmento de reta cujo comprimento seja equivalente a $\sqrt{\pi}$. Mas o número π não representa um número construtível, ou seja, não é possível fazer sua construção com o uso de régua não-graduada e compasso, logo, $\sqrt{\pi}$ também não é construtível.

De acordo com [12], o matemática Lindemann (1852-1939) demonstrou que o número π não é *algébrico*, pois não representa a solução de uma equação polinomial $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+$

$a_1x + a_0 = 0$, com $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$. Esses números não-algébricos são denominados números *transcendentes*. Sendo assim, fica exposto com essas ideias que a construção da quadratura do círculo com o uso de régua não-graduada e compasso é impossível.

Em [5], as autoras apresentaram duas demonstrações não euclidianas para o problema da quadratura do círculo, desenvolvidas por matemáticos da antiguidade, utilizando construções que não podem ser feitas somente com o uso de régua não-graduada e compasso. Soluções desse tipo não serão apresentadas em nosso trabalho, pois nosso objetivo é apresentar soluções com o uso restrito de régua não-graduada e compasso.

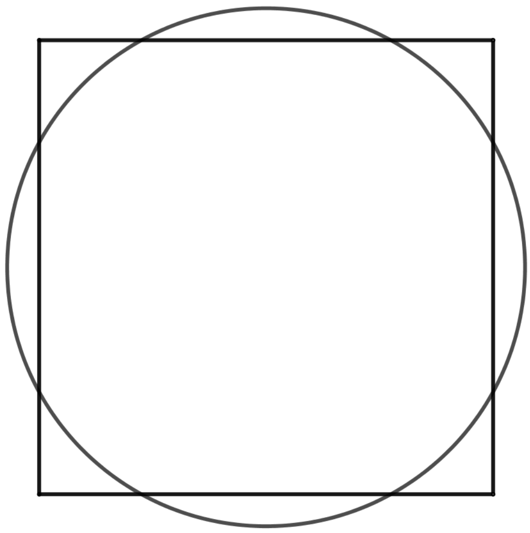


Figura 5.34: Quadratura do círculo

6 Proposta de atividades

Nesse capítulo, vamos apresentar alguns problemas como sugestões para aplicações em uma sala de aula do ensino médio, extraídas de [7], cujo objetivo principal é expor aos alunos as diversas maneiras de se aplicar as proposições explicitadas em nosso trabalho através de construções geométricas com o uso de régua não-graduada e compasso. Resolveremos problemas que envolvem equivalência de áreas puramente dita e quadratura de regiões poligonais.

Problema 1. *Trace por um ponto qualquer $P \in AD$ uma reta que divida o quadrilátero $ABCD$ dado em dois polígonos equivalentes.*

Solução: Trace PB e por A passe a reta $r = \overleftrightarrow{AX}$ com $X \in \overleftrightarrow{BC}$ paralela a PB. Trace PC e por D passe a reta $t = \overleftrightarrow{DZ}$, com $Z \in \overleftrightarrow{BC}$, paralela a PC. A partir do ΔPXZ encontrado, trace a mediana relativa ao lado XZ como feito na subseção 3.1.4, sendo M ponto médio desse lado. Pela Proposição 5.1.2, ΔPXM é equivalente a ΔPZM, mas temos também que, de acordo com a proposição 5.1.3, ΔPBX é equivalente a ΔPBA e ΔPCZ é equivalente a ΔPCD, logo ΔPMX é equivalente ao quadrilátero $ABMP$ e ΔPMZ é equivalente ao quadrilátero $DCMP$, logo $\overleftrightarrow{PM}$ é a reta procurada. Esta construção pode ser vista na figura 6.1 a seguir.

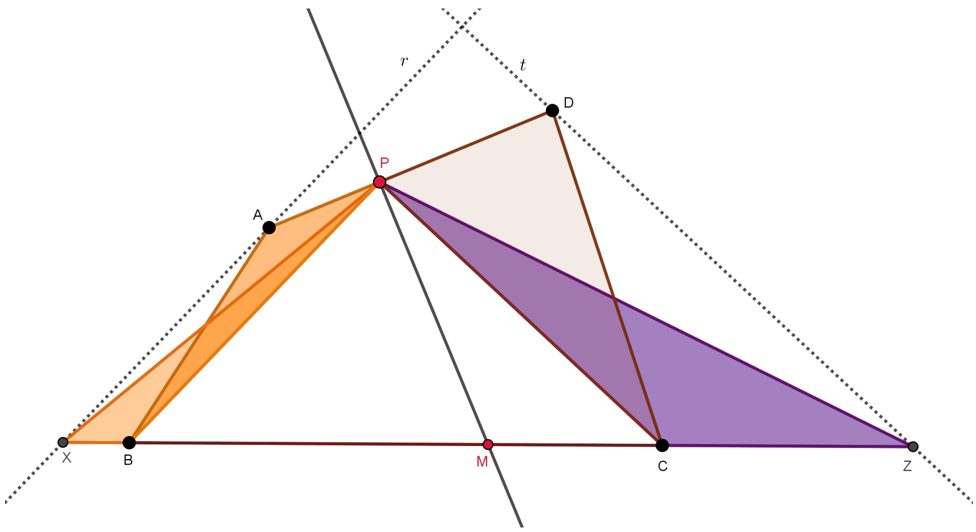


Figura 6.1: Quadriláteros equivalentes

Problema 2. *Construa um triângulo isósceles de base BC equivalente ao ΔABC dado.*

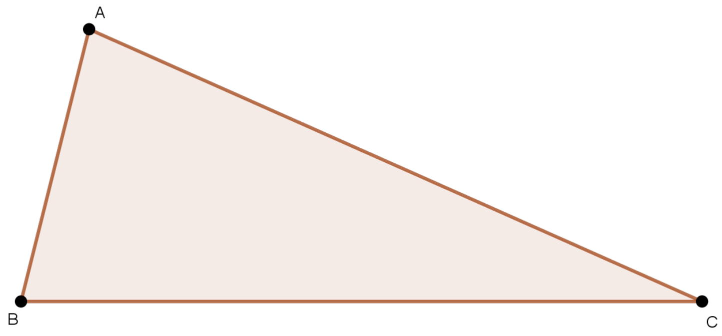


Figura 6.2: Triângulo dado

Solução: Trace a mediatriz do lado BC seguindo os passos descritos na seção 3.1.7. Trace a reta r paralela ao lado BC passando por A. De acordo com a Proposição 5.1.3, fazendo deslizar o ponto A sobre r até coincidir com o ponto D sobre a mediatriz, teremos que o ΔDBC é o triângulo isósceles procurado.

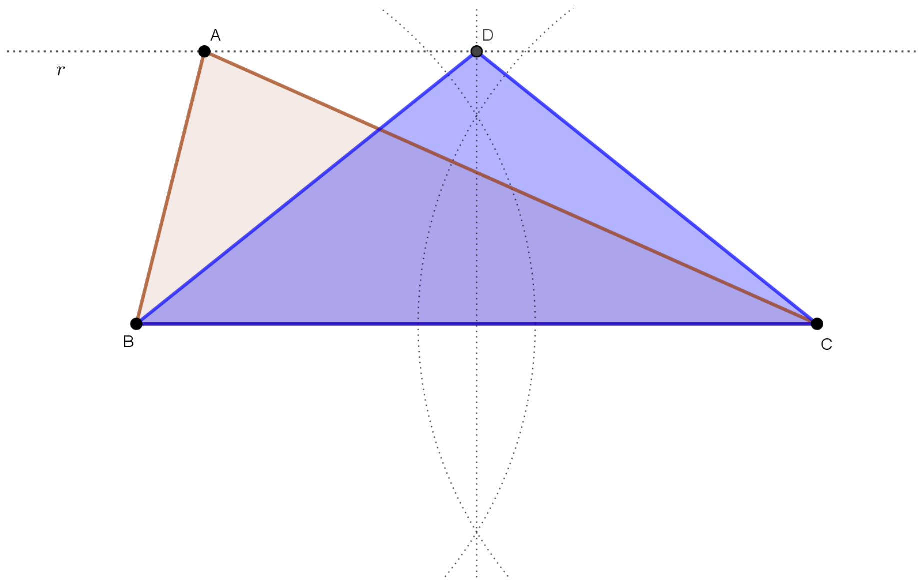


Figura 6.3: Triângulo isósceles equivalente ao triângulo dado

Problema 3. *Construa um pentágono $AB'C'D'E'$, semelhante ao pentágono $ABCDE$ dado, cuja área seja o quíntuplo da área deste, sendo que os vértices B' e E' devem estar nas semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AE}$, respectivamente.*

Solução: Pelas propriedades entre figuras semelhantes, sabemos que a razão entre os quadrados das medidas de dois lados correspondentes é igual a razão entre as medidas das áreas dessas figuras na mesma ordem. Então, considerando AB' o lado do pentágono $AB'C'D'E'$ correspondente ao lado AB do pentágono $ABCDE$, temos que:

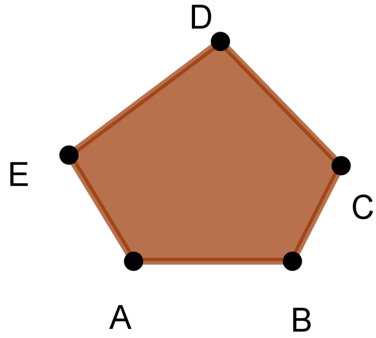


Figura 6.4: Pentágono dado

$$\left(\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}\right)^2 = \frac{5}{1} \quad (6.1)$$
$$\overline{AB}' = \overline{AB} \cdot \sqrt{5}. \quad (6.2)$$

Inicialmente, vamos obter o segmento AB', que representa um dos lados do pentágono procurado. Para isso vamos fazer as seguintes construções:

a) Considere $\overline{AB} = x$. Trace a semirreta $\overrightarrow{BA}$ e transporte AB com extremidade em A, obtendo o segmento de medida $2x = \overline{BF}$.
b) Trace a reta r perpendicular a $\overrightarrow{BA}$ que passa por F e transporte AB com extremidade em F, obtendo o ponto G no semiplano determinado pela reta AB que não contém o pentágono ABCDE. Temos então o ΔBFG retângulo em F. Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos $\overline{BG} = x \cdot \sqrt{5}$.

Mas $x = \overline{AB}$, então de acordo com a equação (6.2), $\overline{BG}$ é o lado do pentágono cujo vértice B' está sobre a $\overrightarrow{AB}$. Seguindo os passos a seguir, vamos obter o pentágono de área igual ao quíntuplo da área do pentágono $ABCDE$ dado.

a) Transporte BG em $\overrightarrow{AB}$ com extreminade em A marcando o ponto B' de interseção com essa semirreta, onde $B \in AB'$.
b) Trace as semirretas $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$.
c) Por B' trace a reta paralela ao lado BC e marque o ponto C' de interseção com a semirreta $\overrightarrow{AC}$. Por C' trace a reta paralela ao lado CD e marque o ponto D' de interseção com a semirreta $\overrightarrow{AD}$. E finalmente, por D' trace a reta paralela ao lado DE marcando o ponto E' de interseção com a semirreta $\overrightarrow{AE}$.

O pentágono $AB'C'D'E'$ é o pentágono procurado.

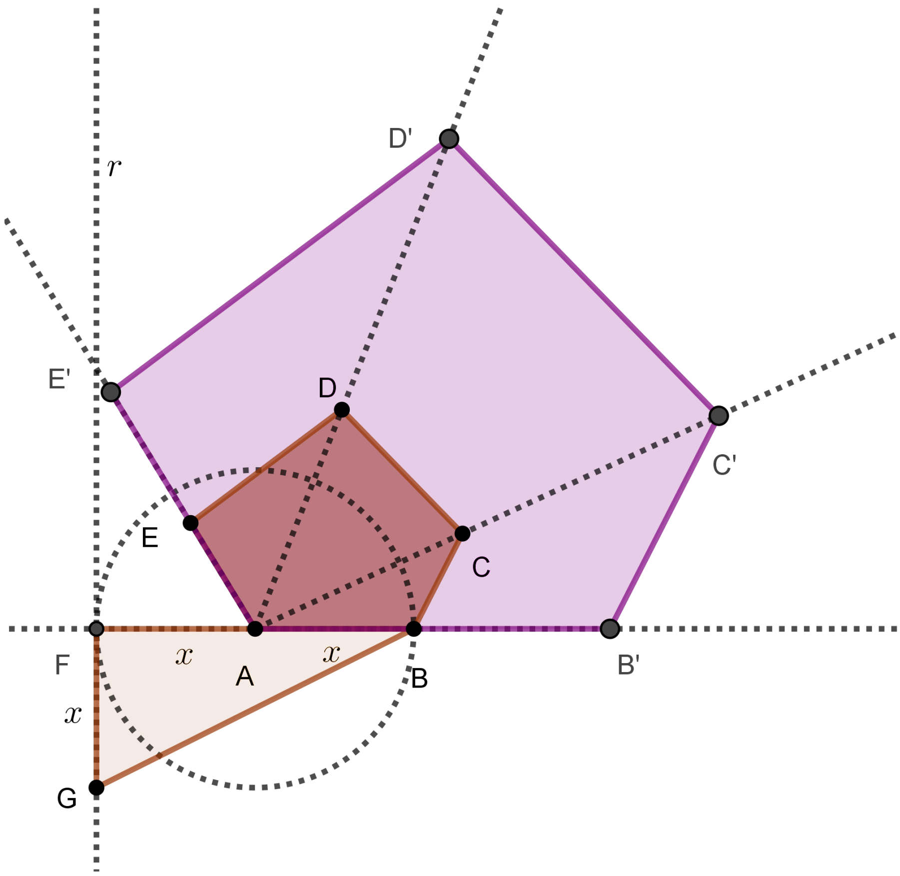


Figura 6.5: Pentágono com o quíntuplo da área

Problema 4. *Construa um retângulo $MNPQ$, de semiperímetro p, equivalente ao quadrado $ABCD$ dado de tal modo que os vértices Q e N sejam opostos.*

Solução: Considere l o lado do quadrado e a e b os lados do retângulo procurado. Temos que o semiperímetro p do retângulo é representado por $p = a + b$. Como os polígonos são equivalente, temos que $l^2 = a \cdot b$, assim a medida l do lado do quadrado representa a média geométrica entre as medidas a e b dos lados do retângulo. Para fazer a construção, faremos os procedimentos a seguir:

a) Trace a semirreta $\overrightarrow{BC}$ e marque um ponto M qualquer, de modo que M seja externo ao quadrado $ABCD$.

b) Transporte a medida p na semirreta $\overrightarrow{BC}$ com extremidade em M e marque o ponto F de interseção com a mesma, de modo $M \in CF$.

c) Trace a circunferência de diâmetro $\overline{MF}$.

d) Passe a reta t pelo ponto D paralela a $\overrightarrow{BC}$ e marque o ponto E (o ponto de interseção com a circunferência mais distante do ponto D).

e) Por E trace a reta u perpendicular a semirreta $\overrightarrow{BC}$ e marque o ponto Q de interseção com a mesma. Então temos que $\overline{EQ} = l$. Como dito anteriormente, l representa a

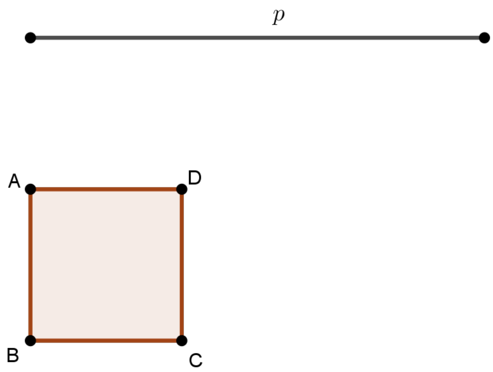


Figura 6.6: Dados do problema

média geométrica entre as medidas dos lados do retângulo, logo, MQ e QF representam os lados do retângulo procurado, assim temos $a = \overline{MQ}$ e $b = \overline{QF}$.

f) Trace a circunferência de raio $R = b$ e centro Q, e marque um dos pontos de interseção com a reta u, em nossa construção marcamos o ponto P.

g) Passe por P a reta s paralela a reta t e por M a reta r paralela a reta u e marque o ponto N de interseção entre elas.

O retângulo $MNPQ$ representa a solução do nosso problema.

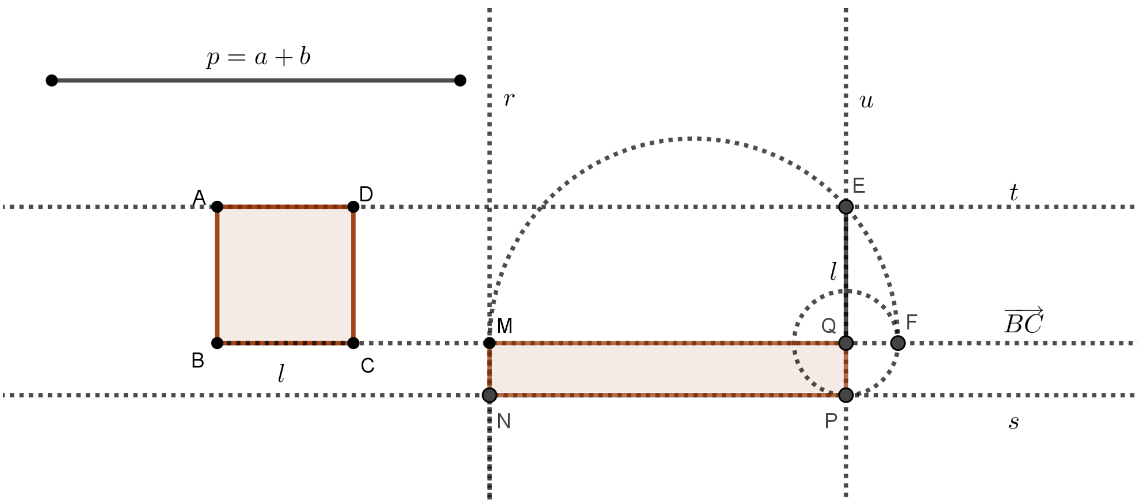


Figura 6.7: Retângulo MNPQ procurado

Problema 5. *Construa um quadrado $ABCD$ equivalente à união de dois quadrados dados. (Observação: os vértices B e D deverão estar nas linhas tracejadas dadas, perpendiculares entre si.)*

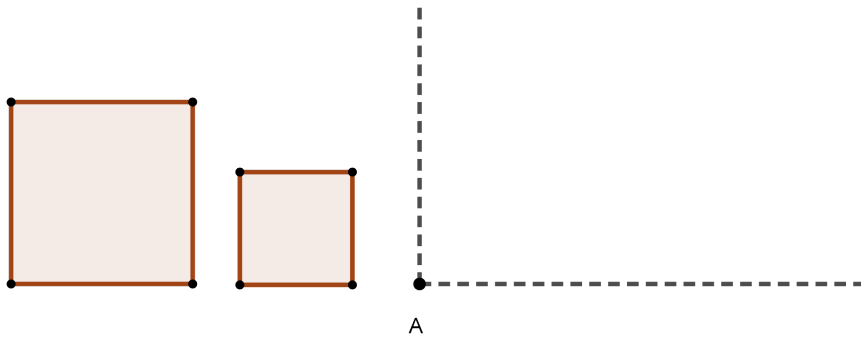


Figura 6.8: Dados do problema

Solução: Vamos considerar os dois quadrados dados como $MNOP$ e $RSTU$ de lados, respectivamente, iguais a a e b. Sendo l a medida do lado do quadrado procurado, temos então que $l^2 = a^2 + b^2$, pois a área do quadrado procurado é dada pela soma das áreas dos quadrados dados. Sendo assim, o lado do quadrado procurado representa a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são iguais a a e b. Vamos seguir os procedimentos abaixo para a construção do quadrado procurado.

a) Trace uma circunferência de raio $r = b$ e centro em M e marque o ponto V de interseção com o lado MN do quadrado $MNOP$.

b) Trace o segmento VP criando o triângulo retângulo PMV de catetos medindo a e b e hipotenusa medindo $l = \sqrt{a^2 + b^2}$, que representa a medida do lado do quadrado $ABCD$ procurado.

c) Trace uma circunferência de raio igual a l e centro em A e marque os pontos B e D de interseção com as linhas tracejadas.

d) Trace a reta r pelo ponto B paralela a $\overrightarrow{AD}$ e outra reta pelo ponto D paralela a $\overrightarrow{AB}$, e marque o ponto C de interseção dessas retas. Desse modo, $ABCD$ é o quadrado procurado.

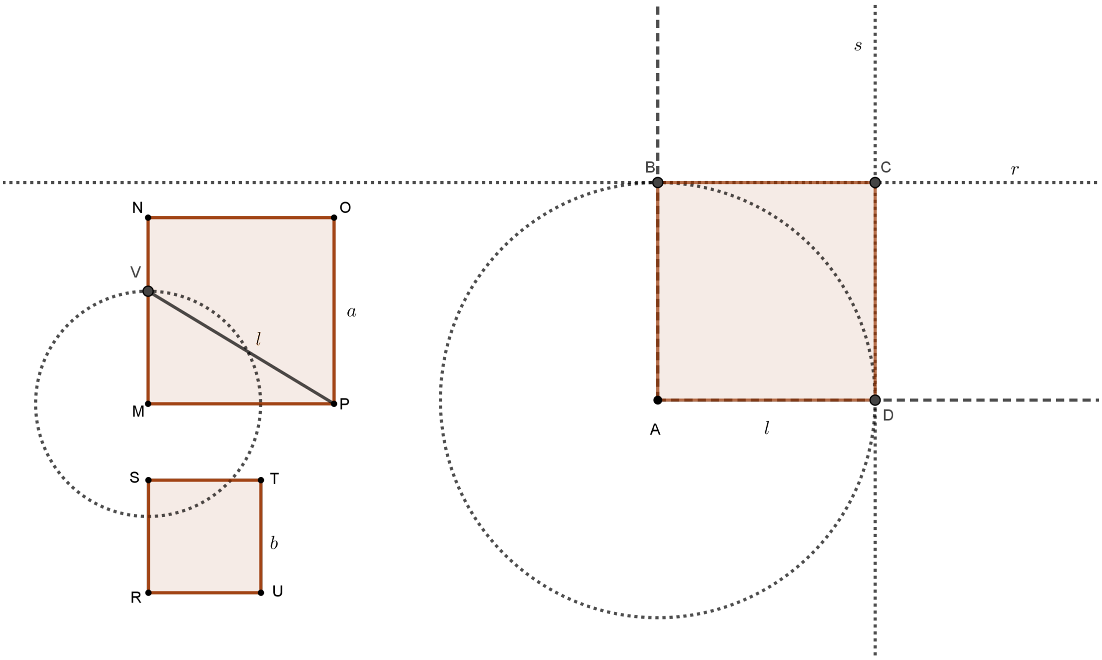


Figura 6.9: Quadrado procurado

7 Conclusão

Nesse trabalho tivemos a oportunidade de entender que o desenvolvimento da geometria vem desde os nômades e principalmente Egípcios (1650 a.C.) até a época atual passando por grandes atuantes que contribuíram para o avanço da mesma, o que inclui com muito respeito um dos grandes personagens da nossa história da matemática, Euclides (330 a.C. a 275 a.C). Percebemos que anotações descritas pelos egípcios da época (Papiro de Rhind) contribuíram para o ensino de uma grande parte da geometria de hoje. Temas importantes ensinados nas escolas de ensino básico foram explicitados nesse trabalho, o que nos deu a oportunidade de entender a ideia primitiva de tais temas, como por exemplo "congruência", que fazendo sua expansão, nos possibilitou a chegar no tema principal, a equivalência de áreas.

Devemos entender que o trabalho do professor atualmente deve ser complementado com técnicas mais atrativas que as usadas na época de Euclides. Era uma prática em "Os Elementos", o uso de régua não-graduada e compasso nas demonstrações de suas proposições e construções geométricas. Nesse trabalho, como uma forma de facilitar o bom entendimento, foi usado o software GeoGebra como ferramenta tecnológica que substitui os instrumentos propriamente ditos, deixando as construções mais dinâmicas, visíveis e atrativas para que juntos com os nossos alunos possamos construir o conhecimento e difundir o grau de importância da Matemática na vida de cada um de nós.

Esperamos que esse trabalho seja útil, não somente para os professores mas também para os alunos, incentivando-os de alguma forma a perceber o quanto é importante resgatar um pouco da história da matemática para a introdução de novos temas e o quanto é útil a utilização de novas tecnologias.

Bibliografia

[1] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro: SBM, 1997.

[2] BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Tradução de Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

[3] EUCLIDES. *Os elementos*. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

[4] FACCO, Sonia Regina. *Conceito de área:* Uma proposta de ensino-aprendizagem. 2003. 185 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

[5] FREITAS, Cláudia Helena Vieira; ALMEIDA, Dulce Mary de. Equivalência de Áreas. *Revista eletrônica matemática e estatística em foco*, v. 4, n. 2, p. 1-54, dez. 2016. Disponível em: <http://www.seer.ufu.br/index.php/matematicaeestatisticaemfoco/article/view/33285/19259>. Acesso em: 13 jul. 2017.

[6] HISTÓRIA da geometria. In: Wikipédia: a enciclopédia livre. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/História da geometria>. Acesso em: 08 set. 2017.

[7] MANETTA, Marco Antônio. *Régua e Compasso - Exercícios interativos de desenho geométrico*. Sorocaba, SP. Disponível em:<http://regua-e-compasso.blogspot.com.br/p/equivalencia-de-figuras-planas.html>. Acesso em: 15 out. 2017.

[8] SILVA, Marcos Noé Pedro da. "Semelhança de Polígonos"; *Brasil Escola*. Disponível em <http://brasilescola.uol.com.br/matematica/semelhanca-de-poligonos.htm>. Acesso em: 03 jan. 2018.

[9] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. *Geometria*. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[10] REZENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. Campinas, SP: Editora da Unicamp; São Paulo, SP: Imprensa Oficial, 2000.

[11] CARVALHO, João Pitombeira de. *Equivalência e aplicação de áreas na matemática grega*. UFG

[12] VENDEMIATTI, Aloísio Daniel. *A quadratura do círculo e a gênese do número* π. 2009. 151 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.