UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

MODELAGEM COM FUNÇÕES ELEMENTARES NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA INTERDISCIPLINAR ALIANDO PRÁTICA E TEORIA.

Edvânia dos Santos Ribeiro

Maceió, dezembro de 2017.

Instituto de Matemática

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

EDVÂNIA DOS SANTOS RIBEIRO

MODELAGEM COM FUNÇÕES ELEMENTARES NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA INTERDISCIPLINAR ALIANDO PRÁTICA E TEORIA.

MACEIÓ
2017

EDVÂNIA DOS SANTOS RIBEIRO

MODELAGEM COM FUNÇÕES ELEMENTARES NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA INTERDISCIPLINAR ALIANDO PRÁTICA E TEORIA.

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vânio Fragoso de Melo

Maceió
2017

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Bibliotecária: Janaina Xisto de Barros Lima

R484m Ribeiro, Edvânia dos Santos.
Modelagem com funções elementares no ensino médio : uma proposta interdisciplinar aliando prática e teoria / Edvânia dos Santos Ribeiro. – 2018.
137 f. : il.

Orientador: Vanio Fragoso de Melo.
Coorientador: José Carlos Almeida de Lima.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós- Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2017.

Bibliografia: f. 131-132.
Apêndices: f. 133-137.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Funções elementares – Modelos matemáticos. 3. Ensino e aprendizagem. I. Título.

CDU: 517.51:371.315

Folha de Aprovação

EDVÂNIA DOS SANTOS RIBEIRO

MODELAGEM COM FUNÇÕES ELEMENTARES NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA INTERDISCIPLINAR ALIANDO PRÁTICA E TEORIA

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 15 de dezembro de 2017.

Banca Examinadora:

Vanio Fragoso de Melo

Prof. Dr. Vanio Fragoso de Melo- UFAL (Presidente)

Prof. Dr. José Carlos Almeida de Lima - UFAL

Diogo Diniz P.S. Silva

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva – UFCG

MACEIÓ - 2017

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por me guiar e iluminar meu caminho;

Ao meu orientador Prof. Vânio, pelos ensinamentos e partilha de experiências nas aulas de Números e Funções das quais o aprendizado adquirido deu base à composição desse trabalho, além das orientações metodológicas remetidas aqui;

Aos meus pais, Antônia e Messias, pelo amor, pela formação de valores e pelo zelo à minha educação;

Aos colegas “profmatianos” de outros polos, pela disponibilidade e boa vontade em compartilhar questões, sugestões, material suplementar, dicas de estudo;

Aos professores do PROFMAT, pela competência e dedicação que tiveram com a turma;

Aos amigos, Luana e Josivanio, pelo apoio aos estudos;

Aos meus alunos, pela participação e pelo empenho na aplicação desse trabalho, que o tornaram legítimo de intenção e de contribuição para a prática docente.

“Se for verdadeiro que ninguém ama o que não conhece, então está explicado porque tantos alunos não gostam da matemática, pois se a eles não foi dado conhecer a matemática, como podem vir a admirá-la”?

(Sérgio Lorenzato)

RESUMO

Esta proposta visa subsidiar a prática docente para o ensino das funções mais elementares abordadas no 1^0 ano do Ensino Médio. Aliando prática e teoria, se apoia metodologicamente nas etapas de modelagem dos moldes de Rodney Bassanezi com o objetivo de que o aluno entenda e reconheça as características da função Afim, da função Quadrática e da função do tipo Exponencial como modelos matemáticos de situações concretas em contextos interdisciplinares, investigando e explorando experimentos relacionados. Esperamos com isso melhorar o manejo abstrato da linguagem matemática como também vir a diminuir as dificuldades dos estudantes em entender sua utilidade no cotidiano e em disciplinas correlatas, como a Física e a Biologia.

Palavras-chave: Funções Elementares. Modelo Matemático. Aula Prática. Ensino Contextualizado.

ABSTRACT

This proposal aims to subsidize the teacher´s action to the teaching of the elementary functions approached in the first grade at High School. With a good combination of pratical and theory, methodologically based on the stages of shaping of Rodney Bassanezi´molds with a goal that the student understands and recognizes the characteristics of linear function, quadratic function and of exponential function like mathematical models of concrete situations in the context of crosscurricular work, researching and exploring selected expirements. With this we want to improve the abstract management of mathematic language and also reduce the difficulties of the students like Phisics and Biology.

Key words: Elementary Functions. Mathematical model. Pratical. Contextualized Teaching.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Há um velho ditado chinês que diz:

Eu escuto, eu esqueço.
Eu vejo, eu lembro.
Eu faço, eu aprendo.

As duas primeiras afirmações são bastante condizentes com os posicionamentos dos alunos diante de uma aula de matemática onde a mera apresentação de definições prontas e/ou o adestramento de técnicas de execução têm sido dominantes um pouco por todo o lado.

Conforme o Prof. Elon Lages Lima afirma em Carvalho (2005, p. 13), o ensino da Matemática se apoia em três componentes básicas: Conceituação, Manipulação e Aplicação, explicando que, a primeira componente compreende o trabalho usualmente feito pelo professor nas “aulas teóricas”, em que as definições e proposições são apresentadas, as fórmulas são (possivelmente) deduzidas, e são estabelecidas as relações dos conceitos com outros já conhecidos pelos alunos. A segunda componente é usualmente realizada através dos chamados “exercícios de fixação”, em que o aluno tem a oportunidade de aplicar os conceitos e, principalmente as fórmulas ensinadas, em uma sequência de situações progressivamente mais complicadas. A terceira consiste na solução de problemas com enunciados que se referem a situações concretas com o objetivo de mostrar as interações da Matemática com os diversos domínios do conhecimento.

Pode-se identificar essa estrutura como a mesma presente nos livros didáticos e seguida preponderantemente como recurso metodológico por boa parte dos professores. Porém, essa metodologia tem gerado resultados insatisfatórios para o ensino da Matemática. E isso decorre também da pouca ênfase no tratamento e uso de situações com mais aplicabilidade. É através da contextualização que o aprendizado se consolida, as conexões entre o saber/fazer matemática se estabelecem, onde competências e habilidades são necessárias para a busca de explicações e de maneiras de lidar com o ambiente imediato[1]. Por essa razão a escola deve priorizar em seu currículo a integração dos conhecimentos,

[1] Usou-se o termo *AMBIENTE IMEDIATO* para se referir ao âmbito escolar, o mundo do trabalho ou o exercício da cidadania.

especialmente interdisciplinar. De fato, nos PCN´s+, as características comuns à Biologia, à Física, à Química e à Matemática recomendam uma articulação didática e pedagógica, fazendo-se uso de procedimentos metodológicos comuns e linguagens compartilhadas que permitem competências gerais, traduzidas para a especificidade da área, desenvolvidas em cada uma das disciplinas científicas e, organicamente, pelo seu conjunto. Fainguelernt (2012, p. 13), reforça que é preciso o aluno construir os conceitos e transferir como também aplicar esses conhecimentos em outras áreas.

Nesta perspectiva, a modelagem com funções é importante quando se quer não apenas resolver problemas, mas propor os chamados “exercícios contextualizados” de modo que contribuam para a aprendizagem delas, possibilitando ao estudante ter uma visão da utilidade da Matemática. Queremos também que os alunos consigam identificar a cada situação problema do cotidiano, qual modelo matemático a ser utilizado.

No ensino das funções mais elementares, apresentadas no 1^0 ano do Ensino Médio, percebe-se que a contextualização em certas situações que os livros didáticos trazem, nem sempre produz toda a eficácia em relação ao que é mais importante, construir o modelo; o qual é tratado com razoabilidade, baixo impacto ou sem relação com a realidade[2] e, mesmo quando adequado ao problema proposto, não deixa claro por que certa função é útil a ele ou tão pouco possibilita que o aluno descubra outras situações em que a mesma possa ser aplicada ou não. Por exemplo, “O crescimento de uma cultura de bactérias obedece à função $f(t) = f(0) \,.\, 3^{2t}$”. Ora, por que o crescimento de certa cultura de bactérias obedece a esta função? Como ela foi encontrada? Por que método? Essas são questões que realmente importam. Fazer apenas cálculos por fórmulas dadas não significa aprender Matemática. Assim, a principal intenção norteadora dessa proposta reflete na seguinte questão: Como saber se, numa determinada situação, o modelo matemático a ser adotado recai em uma função afim, quadrática ou exponencial?

Propor como tais funções podem ser usadas para descrever fenômenos do mundo real através de atividades que possam integrar o ensino da Matemática com outras disciplinas do currículo em uma abordagem prática, empírica e exploratória, é

[2] Foge aos propósitos dessa produção discutir o que é “realidade”. Remetendo-se a Almeida (2013, p. 19), assume-se como “problema da realidade” uma situação que pode ser idealizada, estruturada e simplificada com a finalidade de ser investigada e transformada em “um problema que permite uma abordagem por meio da Matemática”.

o objetivo dessa produção que se apoia estrategicamente na metodologia de modelagem matemática nos direcionamentos de Rodney Bassanezi[3] e se fundamenta, para critério de avaliação e diagnóstico, na teoria de registros de representação semiótica de Raymond Duval[4].

O segundo capítulo busca reforçar a importância do ensino de função, visto que, dentre os vários conteúdos matemáticos trabalhados no ensino médio, esse conceito é o primeiro a ser tratado, além de favorecer a integração entre diferentes campos da matemática, estando presente nos mais diversos ramos da ciência e sendo, portanto, uma poderosa ferramenta na modelagem de diversos problemas de diferentes áreas do conhecimento.

No terceiro capítulo, são apresentadas definições e explicações sobre os procedimentos, objetivos e justificativas quanto ao uso de modelagem matemática na educação básica, distinguindo modelo e modelação. Explicitam-se as funções como modelos dos contextos usados para as tarefas práticas em que configuram os temas Movimento Retilíneo, o Movimento Uniforme Variado e na Quantificação de micro-organismos cultivados por alimentos. Segue-se com a apresentação dos passos de modelagem que atendem as necessidades didáticas para a realização das aplicações e são elencados conceitos e ferramentas pertinentes à matemática constitutiva da função afim, da função quadrática e da função do tipo exponencial, a fim de buscar atender as competências geradas pela aprendizagem e o ensino dessas funções na intencionalidade dos PCN´s e Orientações complementares.

O quarto capítulo aborda as atividades da sequência didática, as considerações sobre ferramentas tecnológicas agregadoras na construção das representações algébricas e gráficas inerentes ao processo de obtenção dos modelos. Os recursos computacionais se constituem em instrumental de enorme potencial: possibilitam, entre outros, o enriquecimento e a melhoria da qualidade do

---

[3] Rodney Carlos Bassanezi é professor titular aposentado do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) da Unicamp e da UFABC. Coordenou cursos de Modelagem Matemática na Universidade de Trento, na Itália, e em uma dezena de universidades brasileiras. É autor de diversos livros, entre os quais Ensino-aprendizagem com modelagem matemática e Modelagem matemática: teoria e prática.

[4] Raymond Duval é filósofo, psicólogo de formação e professor emérito da Université du Littoral Côte d'Opale em Dunquerque, França. Duval investiga a aprendizagem matemática e o papel dos registros de representação semiótica para a apreensão do conhecimento matemático. É responsável pelo desenvolvimento da Teoria dos registros de representação semiótica e importantes estudos em psicologia cognitiva desenvolvidos no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (IREM) de Estrasburgo, França entre os anos de 1970 a 1995.

ensino, bem como facilitam e tornam prazerosa a aprendizagem (Fainguelernt, 2012).

Este trabalho encontra-se organizado em quatro capítulos, como mencionado, abordando informações e conhecimentos a cerca dos aspectos metodológicos, teóricos e conceituais que possibilitem para o docente a clareza do que e como deve ser aportado no ensino das funções elementares em nível de Ensino Médio bem como a proposta sugestiva de uma sequência de atividades práticas com seus respectivos apontamentos, cuja execução deve ocorrer para um público de alunos e professores do ensino básico.

2 POR QUE SE APRENDE, POR QUE SE ENSINA E O QUE É PRECISO ENSINAR SOBRE FUNÇÕES?

A Álgebra no Ensino Médio, assim como acontece nos anos anteriores, é instrumento para estabelecer relações, ampliar e consolidar as noções de equação e função.

A valorização do pensamento algébrico reforça a ideia de que o trabalho em Álgebra não se reduz à manipulação de simbolismo (Ponte, 2009). A este pensamento, Gaudêncio (2012, p. 56) associa a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações contextualizadas.

Nesse nível escolar, o estudo das funções se destaca pela importância que elas representam como modelos matemáticos para analisar e interpretar relações de dependência entre variáveis de duas grandezas em fenômenos do mundo natural ou social, incluindo os trabalhos em componentes de outras áreas de conhecimento como Física, Química e Biologia, por exemplo.

Há um tempo os livros didáticos definiam funções como segue: *Inicialmente, com dois conjuntos A e B se definia o produto cartesiano como sendo o conjunto de todos os pares ordenados* (x, y) *com* $x \in A$ *e* $y \in B$*. Os primeiros conjuntos apresentados, logo como exemplo de plano cartesiano eram conjuntos numéricos*[5]*. E aí se fazia uma representação gráfica de* $A\ X\ B = \{(x, y); x \in A\ e\ y \in B\}$*. Isso era explorado um pouco mais se A e B fossem intervalos. Em certo momento, aparecia a definição de função como "Uma função de A em B, é um subconjunto do produto cartesiano* $A\ X\ B$*, com a condição de cada elemento de A está relacionado com um único elemento de B".*

Essa definição veio com o Movimento da Matemática Moderna que se espalhou pelo mundo e chegou aqui no Brasil na década de 70, influenciando muito os livros didáticos e trazendo notações rebuscadas, isto é, havia no ensino uma forte predominância de conceituação em detrimento das outras componentes[6]. Segundo

---

[5] A estrutura da Matemática é feita de conjuntos e logo em seguida aparece outra estrutura que vai estabelecer as relações entre os conjuntos que são as funções.

[6] O Ensino da Matemática deve abranger três componentes fundamentais: Conceituação, Manipulação e Aplicação.

Lima (2007, p. 155), quase não havia lugar para as manipulações e muito menos para as aplicações, fazendo-se da Matemática que então se estudava nas escolas um pouco mais que um vago e inútil exercício de generalidades, incapaz de suprir as necessidades das demais disciplinas científicas e mesmo do uso prático no dia a dia.

Nesta produção, tal definição não será usada porque embora esteja correta, ela não é útil. De acordo com Lima (2007), uma pessoa que lida com Matemática habitualmente, seja um matemático, um professor ou um engenheiro, por exemplo, não pensa em função como um conjunto de pares ordenados. Adota-se outra definição que é extremamente simples e satisfatória, como uma correspondência entre variáveis, sendo mais intuitiva e acessível ao entendimento do que a outra, que usa uma série de conceitos preliminares, como produto cartesiano, relação binária, etc. A definição simples e satisfatória referida por Lima (Lima, 2007) é:

"*Uma função f de A em B é uma regra que permite associar a cada elemento* $x \in A$ *um único elemento* $y = f(x) \in B$*".* O conjunto A chama-se o *domínio* e B é o *contradomínio* da função f.

Conforme consta nos PCNs+(p . 121),

> [...]o ensino de funções pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente.
>
> [...] os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final desse estudo, mas devem ser motivo e contextos para o aluno aprender funções.

Assim, o trabalho e a conversão entre representações algébricas e gráficas são de vital importância para análise e interpretação das relações existentes entre as variáveis envolvidas.

O estudo das funções é retomado, nessa etapa, com o trabalho das funções afim e quadrática que deve ser desenvolvido por meio de situações que favoreçam ao estudante compreender o modelo de variação que se estabelece entre as variáveis envolvidas e perceber aspectos importantes como os pontos de máximo e de mínimo, e taxa de variação, crescimento e decrescimento, respectivamente; incluindo os casos em que a relação entre as variáveis envolvidas é proporcional, o caso da função linear que ocorre na situação clássica da proporcionalidade. Lima (2007, p. 124) define que:

"Dadas duas grandezas, x e y, diz-se que y é proporcional a x quando os valores de y dependem dos valores de x tal maneira que ao dobrar, triplicar ou, mais geralmente, tomar n vezes a grandeza x, o valor correspondente de y fica dobrado, triplicado ou, mais geralmente, multiplicado por n".

Nesse momento, é importante também que o estudante perceba a associação existente entre progressão aritmética e função afim.

No caso do trabalho com as funções exponenciais, além de destacar os modelos de variação que se constituem entre as variáveis envolvidas, deve-se levar o estudante a aplicá-las em áreas do conhecimento como matemática financeira e crescimento de populações (PCNs+, p. 121), bem como as relações que se estabelecem entre elas. É importante ainda que sejam estabelecidas associações entre função exponencial e a noção de progressão geométrica. De fato, (Lima, 2001, p. 111) deve-se fazer a observação essencial que ao tomar, sobre o eixo dos x, uma sequência de pontos igualmente espaçados (progressão aritmética), as ordenadas dos pontos correspondentes sobre o gráfico ficam multiplicadas pela mesma constante (progressão geométrica). Esta propriedade é característica das funções do tipo exponencial, ou seja, da forma $y = c \cdot a^{kx}$, e é responsável pela importância dessa função para modelar matematicamente um grande número de questões físicas, químicas e biológicas, econômicas, etc.

Dentre os objetivos de aprendizagem que constam na Nova Base Curricular Comum[7] (2ª versão, p. 579), no quadro seguinte destacam-se aqueles (em suas respectivas unidades curriculares) são atendidos pelas atividades propostas nessa produção:

[7] Disponível em<www.basecurricularcomum.mec.gov.br/#/site/inicio>, acessado em janeiro de 2017.

Quadro 1: Objetivos de aprendizagem

ÁLGEBRA E FUNÇÕES	UNIDADE CURRICULAR I	UNIDADE CURRICULAR II	UNIDADE CURRICULAR III	UNIDADE CURRICULAR V
	(EM11MT07) Reconhecer função afim e suas representações algébrica e gráfica, identificar o modelo de variação e a taxa de variação, incluindo os casos em que a variação é proporcional (linear), e utilizar essas noções para representar e resolver problemas como os de Movimento Uniforme, entre outras. (EM11MT08) Reconhecer progressões aritméticas como sequências numéricas de variação linear, associá-las a funções afins de domínios discretos e utilizá-las para resolver problemas.	(EM12MT09) Reconhecer função quadrática e suas representações algébrica e gráfica, compreendendo o modelo de variação determinando domínio, imagem, máximo e mínimo, e utilizar essas noções e representações para resolver problemas como os de movimento uniformemente variado.	(EM13MT11) Reconhecer progressões geométricas como sequências numéricas de variação exponencial, associá-las a funções exponenciais de domínios discretos e utilizá-las para resolver problemas, como juros compostos.	(EM15MT09) Conjecturar, verificar e generalizar sobre o que ocorre com o gráfico de uma função de f(x) ao transformá-la em af(x), f(ax), f(x)+a; f(x+a), com a≠0, com apoio de softwares de geometria dinâmica e de funções.

Fonte: Autora, 2017.

3 MODELAGEM E MODELO

Neste capítulo, abordaremos os conhecimentos sobre modelagem e os processos de modelação seguida da base conceitual matemática que são utilizados como conteúdos básicos para a abordagem dos temas propostos na realização das atividades em sala de aula.

"Como uma proposta pedagógica" para a Educação Matemática, a modelagem tem o foco na promoção do conhecimento matemático utilizando-se de uma situação problema da vida real, favorecendo ao aluno a consciência do uso dessa disciplina na resolução e análise de problemas do dia a dia (Silva, 2012, p. 176).

Da mesma forma, observamos a importância da contextualização no ensino da Matemática que a modelagem matemática permite, já que é um dos principais critérios para a escolha do que será desenvolvido junto aos alunos em sala de aula. É a contextualização que permite a ponte entre a Matemática e ela mesma, entre a Matemática e as outras ciências.

Os PCN´s falam mais diretamente sobre esse aspecto da contextualização:

> O critério central para a escolha dos temas e tópicos da Matemática que serão trabalhados no Ensino Médio é o da contextualização e o da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora de Matemática como à sua importância história no desenvolvimento da própria ciência. (PCN`s [15], p. 43)

Uma atividade de modelagem matemática deve envolver um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar de uma situação inicial (problemática) para uma situação final desejada (solução). Neste contexto, os procedimentos não são previamente conhecidos ou as soluções já indicadas para resolver situações - problema. Um exemplo que ilustra bem essa ideia é o problema de micro-organismos cultivados por alimentos, conforme será descrito na situação prática 3 do capítulo 5 da proposta didática. Nesse caso, a situação inicial consiste na problemática da taxa de crescimento das colônias de bactérias cultivadas enquanto a situação final corresponde à quantificação do número de bactérias presentes nessas colônias em períodos iguais de tempo.

Para Almeida, Silva e Vertuan (2013, p. 13), o modelo matemático pode ser adequadamente definido como “representação de alguma coisa”, pois é sempre uma tentativa de expor e/ou explicar características de algo que não está presente, mas se “torna presente” por meio dele, independentemente de suas finalidades, entre outras,

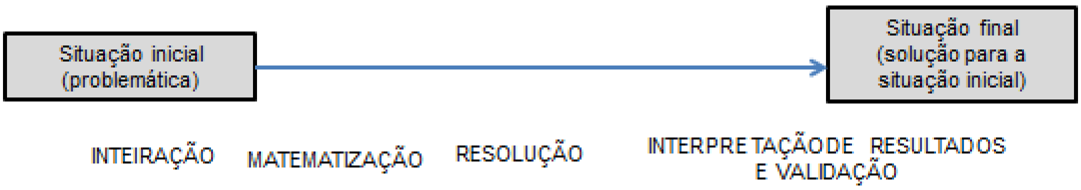
- Prever o comportamento de um fenômeno;
- Ser demonstrativo de algo (como uma maquete);
- Ter um fim pedagógico (auxiliar na ilustração de algum conceito);
- Ser descritivo de algo.

As atividades propostas com experimentos nesse trabalho darão ênfase a dois tipos de busca que segundo o matemático português Bento de Jesus Caraça (1901-1948), impulsionam a atividade matemática:

i. A busca de respostas para questões advindas da própria matemática;
ii. A busca de compreensão de fenômenos ou de respostas para problemas da realidade física, social e cultural que envolvem o homem.

A elaboração de um modelo matemático visa facilitar a solução de algum problema e pode ser descrito fazendo-se uso de diferentes registros de representação tais como equações, tabelas e gráficos. Num comparativo entre modelo matemático e modelagem, entende-se que o primeiro termo é o que “dá forma” à solução do problema enquanto o segundo termo é a “atividade” de busca por essa solução (Almeida, Silva e Vertuan, 2013). Dar forma a algo por meio de um modelo matemático é o próprio significado da “modelagem” em que atividades associadas envolvem fases como: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação.

Figura 1: Fases da Modelagem Matemática



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan, 2013.

A inteiração implica na obtenção de informações sobre essa situação por meio de coleta de dados quantitativos e qualitativos, mediante contatos diretos ou indiretos. Identificada e estruturada na fase de inteiração, a situação – problema tem sua linguagem natural transformada para a linguagem matemática que evidencia o problema matemático a ser resolvido. Essa fase de transição entre as linguagens chama-se “matematização do problema”, caracterizada pela busca e elaboração de uma representação matemática que ocorre devido à mediação entre as características da situação e os conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos adequados para representar essas características. Para Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.), a intenção em fazer uso de experimentos físicos e biológicos nesta fase da modelagem é tornar mais viável para o aluno o entendimento sobre aspectos dos fenômenos investigados, como também tentar na prática facilitar a realização das descrições dessa fase. Para tanto, formula-se hipóteses, seleciona-se variáveis e simplificam-se informações levantadas na fase de inteiração.

Quando entramos na fase Resolução, efetivamente ocorre a construção propriamente do modelo matemático para descrever a situação, permitindo a análise dos aspectos importantes da situação, respondendo às perguntas formuladas e até mesmo viabilizando previsões para o problema em estudo.

Na fase de Interpretação de resultados e Validação, os envolvidos na atividade realizam a avaliação do processo por meio do qual ocorre a análise de respostas ao fazer a validação da representação matemática associada ao problema, considerando tanto os procedimentos matemáticos quanto a adequação de representação para a situação.

È importante salientar que a modelagem Matemática constitui uma opção pedagógica em que se aborda uma situação-problema não essencialmente Matemática por meio da Matemática onde é possível envolver um conjunto de ações cognitivas do indivíduo com representações e manipulações de objetos matemáticos. Conforme Almeida (2013, p.), quando o aluno se depara com uma situação-problema que pretende investigar, inicialmente precisa compreender o problema fazendo algumas aproximações ou idealizações, chegando ao que denominamos representação mental da situação.

3.1 Modelagem nos moldes de Rodney C. Bassanezi

A concepção de Modelagem para Bassanezi (2012, p.10) a partir de um tema é a de que ela se inicia contando, medindo e organizando uma tabela de dados aos quais são feitos ajustes em um sistema cartesiano para facilitar a visualização do fenômeno em estudo, o que se permite fazer tentativas de propostas de problemas, conjecturas ou leis de formação. Esse tipo de configuração norteará as atividades de formulação e investigação dos modelos associados às atividades da sequência didática planejada com os experimentos construtores dos fenômenos escolhidos.

O uso da Modelagem propicia a atividade de aplicar Matemática e ideias associadas a essa ação surgindo a partir de problemas práticos. Bassanezi (2012, p.3) ressalta que habilidades necessárias para empregar matemática em outras áreas do conhecimento, esperando que ela possa vir a resolver uma expressiva quantidade de tipo de situações, consistem em tomar um problema definido em alguma situação prática relativamente complexa, transformá-la em um modelo matemático e procurar uma solução que possa ser interpretada em termos da situação original. Necessariamente, em todas as atividades propostas nesse trabalho, configura a atividade de matematização de situações reais, ao passo que se estabelece critérios de qualidade adequados aos objetivos que remetem a motivação da aplicação e estudo das funções Afim, Quadrática e do tipo Exponencial, valorizando suas características com a finalidade de identifica-las como modelos ajustados a diferentes situações-problema.

Dentre os procedimentos básicos para modelagem destacados por Bassanezi, aplicar-se-ão os seguintes:

- Aquisição de técnicas básicas e teoria;
- Improvisação de novas técnicas;
- Organização de material (dados experimentais, bibliográficos, etc.);
- Formulação de problemas em termos matemáticos.

Teremos como objetivo utilizar os processos de modelagem matemática através de experimentos dos laboratórios de Ciências (Física, Matemática e Biologia) para motivação do ensino e da aprendizagem das Funções Afim, Quadrática e Exponencial.

3.1.1 **Etapas da modelagem:**

- *Escolha de temas e experimentos:*

Os experimentos foram selecionados e pesquisados em livros de Física (teste de velocidade), na internet (Construção do Trebuchet) e sugeridos por professores de outras áreas como o experimento de quantificar bactérias que simula o procedimento laboratorial para análise de contaminação alimentar:

I. Teste de velocidade – Experimento: Movimento de uma bolinha em uma base horizontal;

II. Altura máxima e alcance horizontal máximo – Experimento: Arremesso de objetos usando o TREBUCHET (catapulta);

III. Quantificação de micro-organismos – Experimento: Cultivo e quantificação de micro-organismos em alimentos.

- *Coleta de dados a partir de experimentos:*

I. Dados qualitativos: Pesquisa bibliográfica e web gráfica utilizando dados já obtidos e catalogados em livros, sites e revistas especializados; revisão do programa com acompanhamento dos professores de Física e de Biologia envolvidos no projeto;

II. Dados numéricos: Experimentos programados para obtenção de uma tabela de valores construída de acordo com os procedimentos de cada situação empírica.

- *Análise de dados e Formulação dos modelos:*

I. Plotagem de gráfico de dispersão no Geogebra para identificação dos aspectos e/ou caracterização da função que atende aos dados coletados;

II. Utilização de ferramentas algébricas (equações e fórmulas) e geométricas (coordenadas cartesianas) para modelar as equações que representam as leis das funções presentes em cada situação;

III. Utilizar os modelos criados e explorar o contexto abordado para retomar o ensino dos tópicos relacionados ao estudo das funções.

- *Validação do modelo:*

I. Ajuste de curva do gráfico de dispersão no programa do Geogebra;

II. Exploração da função modelada confrontando dados reais com os valores do modelo.

3.1. 2 **Tipos de variação:**

A construção ou análise dos modelos matemáticos de fenômenos como funções matemáticas são formuladas através das variações das grandezas relacionadas. Nesse caso, temos uma variável y dependendo quantitativamente de outra variável independente x e para cada situação podemos escolher o tipo de variação mais apropriado para o modelo. As variáveis podem ser formuladas em termos gerais, considerando-se as variáveis x e y discretas ou contínuas[8] grandezas discretas ou contínuas (de valores naturais e decimais).

Considere a função real f definida em $A \subseteq R$, $y = f(x)$, $x \in A$. Sejam x_1, x_2 elementos de A, então definimos:

A) Variação simples (ou absoluta) de y:

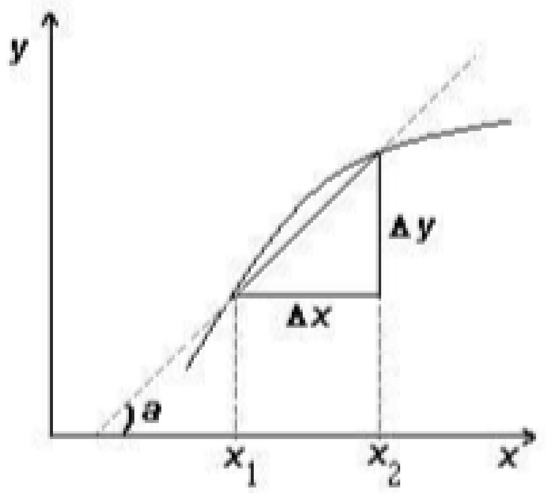
$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ é a diferença da variável dependente y em dois estágios da variável independente x.

B) Variação Média (ou taxa de variação média):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

é a proporção entre as variações de y e x. A variação média mostra quanto variou y por unidade de x.

Figura 2: Variação Média da função.



Fonte: Bassanezi, 2012.

Note que, os triângulos retângulos (veja figura 2) são semelhantes.

Então, $tg\ a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Sendo este o coeficiente angular (ou inclinação) da reta que liga os pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.

C) Variação relativa: $\dfrac{1}{y_i}\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \left(\dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right)\dfrac{1}{y_i}$

[8] As grandezas discretas são aquelas em que a medida obtida é sempre um número inteiro. As grandezas contínuas são aquelas em que a medida obtida é um número que pode ser não inteiro.

A variação relativa mostra a variação de y por unidade de x, relativa ao estágio inicial $y = y_i$.

3.1.3 **Ajuste de curvas**

O ajuste de curvas se trata em encontrar uma função que seja uma “boa aproximação” para valores tabelados e que nos permita “extrapolar” com certa margem de segurança. Para Ruggiero (2ª ed., p. 281), a necessidade de se ajustar funções tabeladas ocorre quando:

a) É preciso obter um valor aproximado da função em algum ponto fora do intervalo de tabelamento, ou seja, quando se quer extrapolar;
b) Os valores tabelados são resultados de algum experimento físico ou de alguma pesquisa, porque, nestes casos, estes valores poderão conter erros inerentes que, em geral, não são previsíveis.

O problema de ajuste de curvas no caso em que temos uma tabela de pontos $(x_1,\ f(x_1)),\ (x_2,\ f(x_2)),\ ...,\ (x_m,\ f(x_m))$ com $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m$, pertencentes a um intervalo $[a\ ,\ b]$, consiste em “ escolhidas” *n* funções $g_1(x), g_2(x),\ ...,\ g_n(x)$, contínuas em $[a\ ,\ b]$, obter *n* constantes $\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_n$ tais que a função $\varphi(x) = \varphi_1\ g_1(x) + \varphi_2\ g(x) + ... + \varphi_n\ g_n(x)$ se aproxime ao máximo de $f(x)$. Dizemos que este é um modelo matemático linear porque os coeficientes a determinar, α_1, α_2,..., α_n, aparecem linearmente, embora as funções $g_1(x),\ g_2(x),\ ...,\ g_n(x)$ possam ser funções não lineares de x, como por exemplo, $g_1(x) = e^x$, $g_2(x) = 1 + x^2$, etc.

Ruggiero (2ª ed., p. 282) ressalta ainda que, a escolha das funções pode ser feita observando o gráfico dos pontos tabelados ou baseando-se em fundamentos teóricos do experimento que não fornecem a tabela.

Os principais tipos de ajustes[9] dos quais utilizaremos no Geogebra para identificar a melhor curva que se ajusta aos pontos gerados por dados coletados nos experimentos que aplicaremos são:

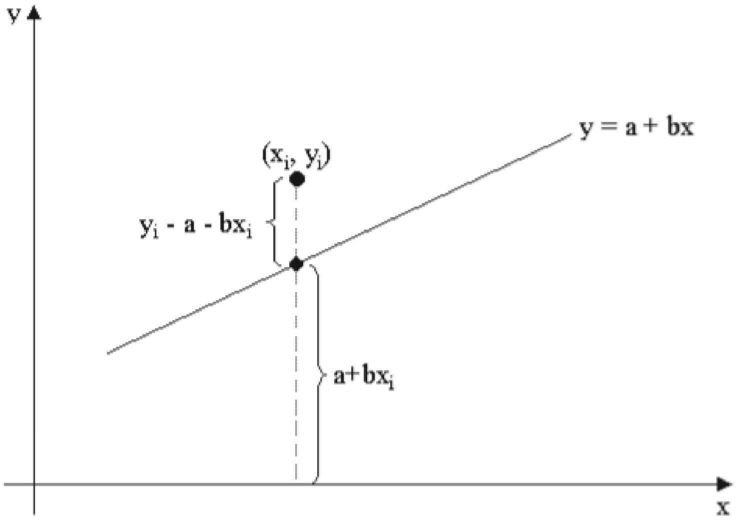
---

9 Disponível:http://www.decom.ufop.br/marcone/Disciplinas/MetodosNumericoseEstatisticos/QuadradosMinimos.pdf

3.1.3.1 Ajuste a uma reta

Desejamos ajustar um conjunto de pontos a uma reta $y = a + bx$ onde a e b são parâmetros a serem determinados. Nesse caso, estamos interessados em minimizar a distância a cada ponto $(x_i \ ; \ y_i)$ da tabela cada ponto $(x_i \ ; \ a + x_i)$ da reta, conforme mostra a figura.

Figura 3: Distância de um ponto (x_i ; y_i) à reta y = a + bx.



Fonte: Souza, acesso em 18 ago 2017 .

A distância entre esses pontos é $|y_i - a - bx_i|$ e a soma dos quadrados dessas distâncias é:

$$q = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2 \qquad (2.1)$$

Os candidatos a valor mínimo da função 2.1 são aqueles para os quais são nulas as derivadas parciais de *q* em relação a cada um de seus parâmetros, isto é:

$$\frac{\partial q}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i) = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - a - bx_i) = 0$$

Tendo em vista que:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} a - \sum_{i=1}^{n} bx_i = \sum_{i=1}^{n} y_i - na - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b$$

e que:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - a - bx_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) a - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \right) b$$

Obtemos o seguinte sistema de equações, denominado “equações normais” do problema, cujas incógnitas são os parâmetros a e b da equação $y = a + bx$:

$$\begin{cases} na + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) b = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \right) b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

3.1.3.2 Ajuste a uma exponencial

Vejamos, agora, como ajustar um conjunto de pontos $(x_i ; y_i)$ a uma exponencial do tipo $y = a\ e^{bx}$. Esta função exponencial pode ser ajustada através da seguinte transformação:

$$\ln y = \ln\left(\alpha\ e^{bx}\right) = \ln \alpha + bx$$

Fazendo $Y = \ln y$ e $a = \ln \alpha$, reduzimos o problema de ajustes a tabela de pontos $(x_i ; y_i)$ referente a uma exponencial ao problema de ajustes a tabela de pontos $(x_i ; y_i)$ onde $Y_i = \ln y_i$, à equação de uma reta $Y = a + bx$.

3.1.3.3 Ajuste a um polinômio

O objetivo, agora, é mostrar como ajustar os pontos de uma tabela com n pontos a uma função polinomial de grau m:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$$

onde $m \leq n - 1$. Neste caso, a soma dos quadrados das distâncias de y_i à $P(x_i)$ é dada por:

$$q = \sum \left(y_i - P(x_i) \right)^2$$

e depende de $m + 1$ parâmetros a_0, a_1, ..., a_m.

Para minimizar essa função, temos que satisfazer às condições a seguir:

$$\frac{\partial q}{\partial a_i} = 0 \qquad \forall\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ m$$

a qual fornece um sistema de $m + 1$ equações normais.

No caso da função polinomial ser quadrática, isto é, $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, as equações normais são:

$$\begin{cases} n a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\right) a_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,3}\right) a_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,3}\right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,4}\right) a_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} y_i \end{cases}$$

3.1.3.4 Ajuste de curvas no Geogebra

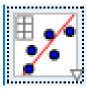
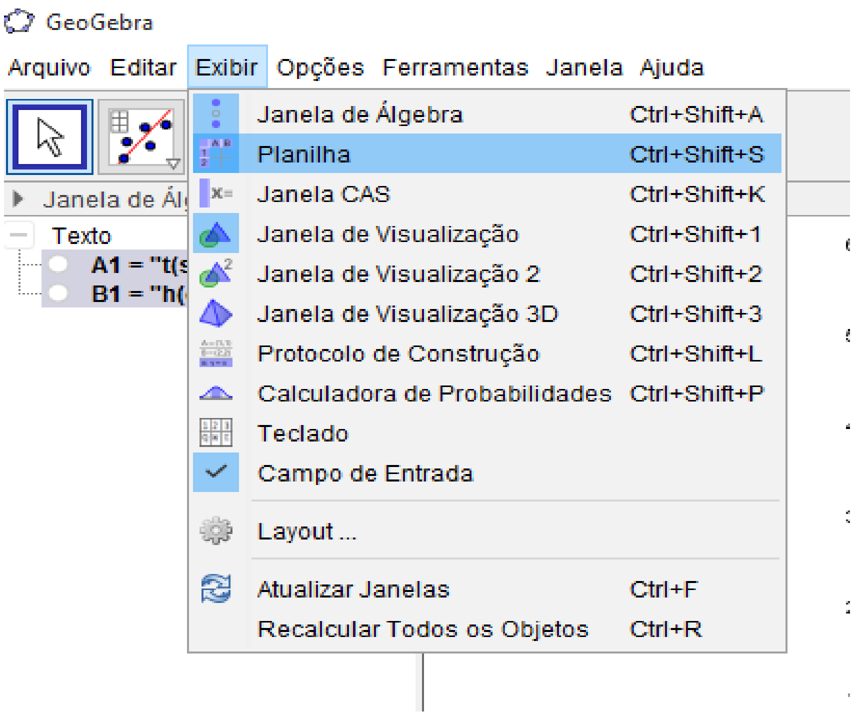
O método de ajuste de curvas conforme o propósito das funções pretendidas aqui será executado através da planilha do Geogebra[10] 5.0 (figura 4) e é usado para encontrar uma curva (ajuste linear, ajuste polinomial ou ajuste exponencial) que se ajuste a uma série de pontos que possivelmente cumpra uma série de parâmetros. No ambiente do Geogebra 5.0, o ajuste é feito pela análise do diagrama de dispersão conhecida por Método de Regressão (figura 5) que se encontra clicando em “ Exibir” →”Planilha” →”Análise Bivariada” com o botão .

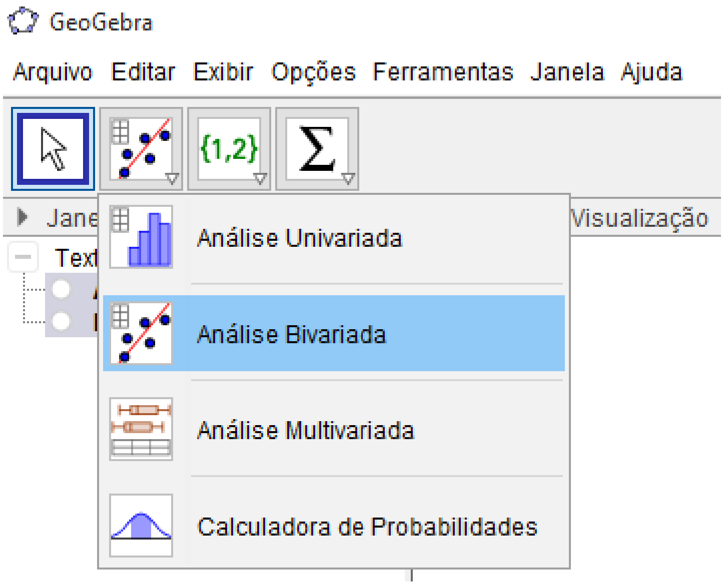
Figura 4: Acesso para planilha no Geogebra.



Fonte: Autora, 2017.

[10] Disponível: https://geogebra.br.uptodown.com/windows/download

Figura 5: Comando para diagrama de dispersão.



Fonte: Autora, 2017.

No processo de obtenção do modelo matemático que estamos propondo, dois procedimentos são executados:

I. *Reconhecimento da melhor curva de aproximação de todos os pontos gerados a partir dos dados experimentais. A ideia é gerar um gráfico de dispersão de pontos a partir de dados tabelados (tabela 2) e obtidos por meio de experimentos para em seguida ajustar uma curva que melhor se ajusta aos dados disponíveis.*

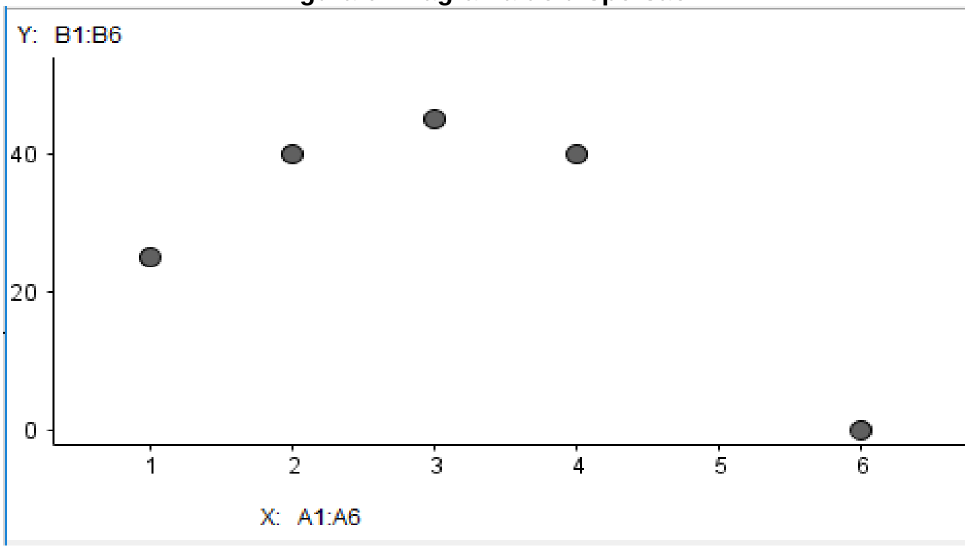
Tabela 1: Dados experimentais tabelados

A	B
t(s)	h(cm)
1	25
2	40
3	45
4	40
6	0

Fonte: Autora, 2017.

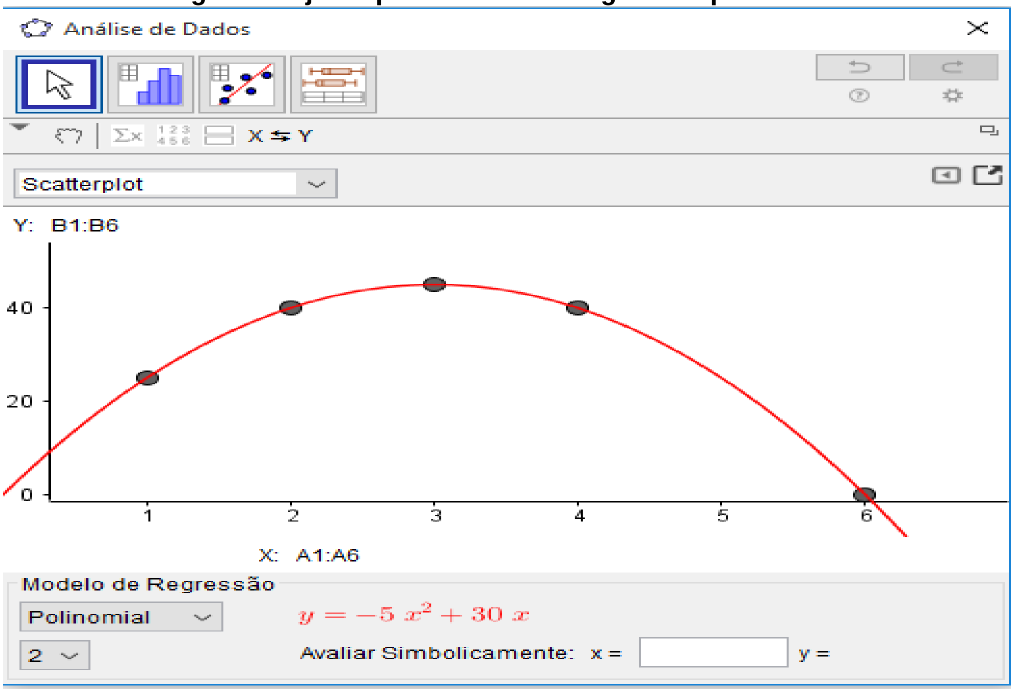
II. *Obter uma curva para ser ajustada aos dados por meio dos modelos de regressão disponibilizados na planilha do Geogebra. O objetivo é encontrar uma função* $f(x)$ *que seja uma boa aproximação para os valores tabelados de* $h(t)$.

Figura 6: Diagrama de dispersão



Fonte: autora, 2017.

Figura 7: Ajuste por Método de Regressão polinomial



Fonte: Autora, 2017.

As instruções sequenciadas para a plotagem de gráficos de dispersão a partir de dados experimentais no Geogebra serão apresentadas com detalhes nas atividades da sequência didática.

3.2 Modelando fenômenos em situações caracterizadas por funções elementares

As funções afins são, juntamente com as funções quadráticas e exponenciais, os modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas elementares como os que serão tratados nas seções 4.3.1, 4.3.2 e 4.3.3. Para saber se, numa determinada situação, o modelo matemático a ser adotado recai em uma função afim, quadrática ou do tipo exponencial é fundamental compreender a característica de cada uma. De sorte que, uma vez decidido que o modelo adequado para um determinado problema é uma função afim, quadrática ou exponencial, a partir daí o tratamento matemático da questão não oferece maiores dificuldades. Por exemplo, (Lima, 2013, p. 158) imagine que certa droga injetada em uma pessoa tem a propriedade de que, em cada período de 4 horas, a metade da quantidade presente no organismo seja naturalmente eliminada. Injetando-se 12mg dessa droga em uma pessoa, pergunta-se que quantidade dela resta no organismo 6 horas após a aplicação. Este problema real, não traz em seu enunciado nenhuma fórmula, mas o fato que a cada *acréscimo* de 4 horas no tempo, a quantidade da droga presente no organismo fica multiplicada por 0,5, mostra que uma função do tipo exponencial é adequada para modelar o problema.

Antes de manipularmos funções elementares como modelos matemáticos em problemas concretos, seja por coleta de dados ou por critérios que admitem interpretações intuitivas, serão apresentadas propriedades características das mesmas.

3.2.1 Caracterização das Funções Elementares

Antes de continuar, precisamos de definições importantes.

Uma **função afim** é uma função $f : R \to R$ tal que $f(x) = ax + b$ para todo x real, onde a e b são números reais dados, com $a \neq 0$. Uma **função linear** é uma função afim f como acima, tal que $b = 0$.

Exemplo 1. A *função identidade* $f : R \to R$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in R$, é afim. Também são afins as *translações* $f : R \to R$, $f(x) = x + b$, onde $b \in R$. São ainda casos particulares de funções afins as funções *lineares*, $f(x)=ax$ e as funções *constantes* $f(x)=b$.

O número $b=f(0)$ às vezes se chama o *valor inicial* da função f e quanto ao coeficiente *a*, ele pode ser determinado a partir do conhecimento dos valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ que a função f assume em dois pontos arbitrários x_1 e x_2. De fato, sendo

$$f(x_1)=ax_1+b \text{ e } f(x_2)=ax_2+b,$$

obtemos:

$$f(x_2)-f(x_1).$$

Portanto,

$$a=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Dados *x*, *x* + *h*, com $h\neq 0$, o número $a=\frac{[f(x+h)-f(x)]}{h}$ chama-se a *taxa de variação* da função f no intervalo *x*, *x* + *h*.

Um critério determinante para a identificação da função afim como o modelo de certo fenômeno é o fato da taxa de variação $a=\frac{[f(x+h)-f(x)]}{h}$ ser constante por unidade de crescimento ou decrescimento como vimos anteriormente no processo de modelação, conhecida como variação média da função. Sem que os coeficientes *a* e *b* sejam fornecidos explicitamente, obtém-se *b* como o valor que a função dada assume quando *x=0*.

Uma **função quadrática** ou de **segundo grau** é uma função $f:R\to R$ tal que $f(x)=ax^2+bx+c$, para todo x real, onde *a*, *b* e *c* são números reais dados, com $a\neq 0$. O *discriminante* Δ da função f é o discriminante do trinômio de segundo grau ax^2+bx+c, isto é, $\Delta=b^2-4ac$.

Proposição 1. Em relação à função quadrática[11] $f(x)=ax^2+bx+c$, temos que:

---

[11] Se uma função f é real de uma variável real, i. e., se $f:X\to R$, com $X\subset R$, uma maneira de declararmos sua imagem é escrevermos $\mathrm{Im}(f)=\{y\in Y;\, y=f(x)\ para\ a\lg um\ x\in X\}$.

(a) Se $a>0$, então $\mathrm{Im}(f)=\left[-\dfrac{\Delta}{4a};\ +\infty\right)$.

(b) Se $a<0$, então $\mathrm{Im}(f)=\left(-\infty;\ -\dfrac{\Delta}{4a}\right]$.

Ademais, em qualquer um dos casos acima, temos $f(x)=-\dfrac{\Delta}{4a}\Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{2a}$.

Demonstração.

Para $a\neq 0$ temos que $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\geq 0$.

Agora, consideremos separadamente os casos $a>0$ e $a<0$. Se $a>0$, então

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0\ \Rightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0\ \Rightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}\geq -\frac{\Delta}{4a}$$

Se $a<0$, então

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0\ \Rightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\leq 0\ \Rightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}\leq -\frac{\Delta}{4a}$$

Note que,

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=ax^2+bx+\left(\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)=$$
$$=ax^2+bx+c$$

Para obter a imagem de f basta encontrarmos os y para os quais $ax^2+bx+c=y$.

Logo, se $a>0$, então $ax^2+bx+c\geq -\dfrac{\Delta}{4a}\Leftrightarrow y\geq -\dfrac{\Delta}{4a}$ e, segue, daí, que

$$\mathrm{Im}(f)=\left\{y\in R;\ \ y\geq -\frac{\Delta}{4a}\right\}=\left[-\frac{\Delta}{4a};\ +\infty\right);$$

Se $a<0$, então $ax^2+bx+c\leq -\dfrac{\Delta}{4a}\Leftrightarrow y\leq -\dfrac{\Delta}{4a}$, de maneira que,

$$\mathrm{Im}(f)=\left\{y\in R;\ \ y\leq -\frac{\Delta}{4a}\right\}=\left(-\infty;-\frac{\Delta}{4a}\right].$$

De sorte que, sendo f quadrática ($a\neq 0$), temos

$$f(x)=-\frac{\Delta}{4a}\Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{\Delta}{4a}\Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=0\Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}.$$

Para o que segue, convencionamos dizer que a imagem da função f se anula para valores de x do domínio que satisfazem

$$a\ x^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a\ \left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}\right\}=0 \ \Leftrightarrow\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Que só faz sentido se $\Delta \geq 0$. Se o discriminante $\Delta = b^2-4ac$ é positivo, a equação $ax^2+bx+c=0$ tem duas raízes distintas $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Definição 1. Seja $I \subset R$ um intervalo. Uma função $f: I \to R$ é dita:

(a) **Crescente** se, para todos $x_1 < x_2$ em I, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$.

(b) **Decrescente** se, para todos $x_1 < x_2$ em I, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$.

(c) **Não decrescente** se, para todos $x_1 < x_2$ em I, tivermos $f(x_1) \leq f(x_2)$.

(d) **Não crescente** se, para todos $x_1 < x_2$ em I, tivermos $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Ademais, em qualquer dos casos acima, dizemos que a função f é **monótona** em I [12].

Exemplo 2. A função afim $f: R \to R$, dada para $x \in R$ por $f(x)=ax+b$, é crescente se $a>0$ e decrescente se $a<0$. De fato, para números reais quaisquer $x_1 < x_2$, tem-se que $f(x_2)-f(x_1)=(ax_2+b)-(ax_1+b)=a(x_2-x_1)>0$ donde segue de $a>0$ que $a(x_2-x_1)>0$ e f é crescente. Analogamente, segue de $a<0$ que $a(x_2-x_1)<0$ e f é decrescente.

Exemplo 3. Sejam $a,\ b,\ c,$ com $a \neq 0$, e $f(x)=ax^2+bx+c$.

(a) Se $a>0$, então f é decrescente em $\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right]$ e crescente $\left[-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$.

(b) Se $a<0$, então f é crescente em $\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right]$ e decrescente em $\left[-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$.

[12] Nas notações desta definição, vale observar que, para alguns autores, uma função f satisfazendo a condição do item (a) (resp. (b), (c), (d)) é dita *estritamente crescente* (resp. *estritamente decrescente, crescente, decrescente).*

Prova.

Façamos a prova do item (a), sendo a prova do item (b) completamente análoga. Para $x_2 > x_1 \geq -\frac{b}{2a}$, note que $x_2 - x_1 > 0$ e $x_2 + x_1 > -\frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} = -\frac{b}{a}$. Daí, temos $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) = a\ (x_2 - x_1)\left(x_2 + x_1 + \frac{b}{a}\right) > 0$.

Da mesma forma, para $x_1 < x_2 \leq -\frac{b}{2a}$, tem-se que $x_2 - x_1 > 0$ e

$$x_2 + x_1 \leq -\frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Logo, $x_2 + x_1 + \frac{b}{2a} \leq -\frac{b}{2a} + \frac{b}{a} = 0$. Assim,

$$f(x_2) - f(x_1) = a\ (x^2{}_2 - x^2{}_1) + b\ (x_2 - x_1) = a\ (x_2 - x_1)(x_2 - x_1) + b\ (x_2 - x_1) =$$

$$= a\ (x_2 - x_1)\left[(x_2 + x_1) + \frac{b}{a}\right];\text{ pois } a \neq 0.$$

Como $x_2 > x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$, donde concluímos que $f(x_2) - f(x_1) < 0$. A prova do item (b) é análoga. **Observação:** Nota-se que a função quadrática nunca pode ser monótona, daí quando tratamos de sua caracterização, trabalharemos com a hipótese de continuidade em vez de monotonicidade.

Exemplo 4. Seja *a* um número real positivo, que suporemos sempre diferente de 1. A função exponencial de base *a*, $f: R \to R^+$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer x, $y \in R$:

1) $a^x .\ a^y = a^{x+y}$;

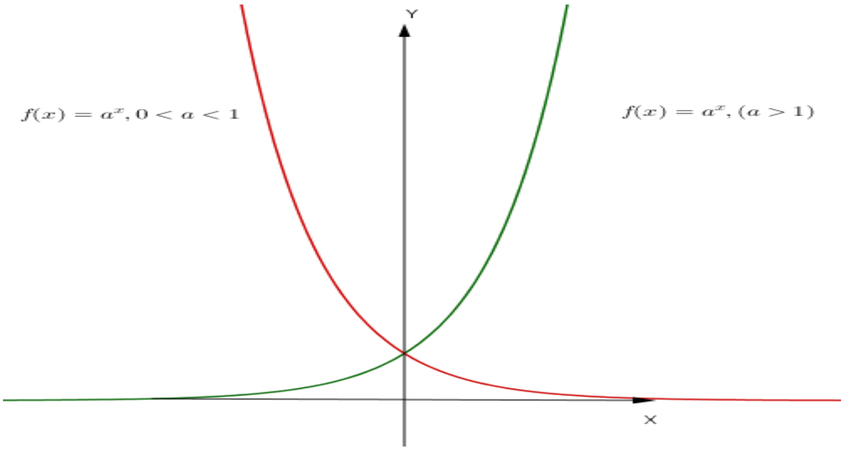
2) $a^1 = a$;

3) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$.

A propriedade 3) diz que a função exponencial deve ser crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$. Logo, essa função é monótona injetiva[13].

[13] Uma função $f: X \to Y$ é dita injetora, ou injetiva, ou uma injeção, se para todo $y \in Y$, existir no máximo um $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Figura 8: Gráficos da função exponencial



Fonte: Autora, 2017.

Observações:

(1) Se uma função $f : R \to R$ tem a propriedade $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ (assim como vemos no exemplo 4), então f não pode assumir o valor 0, a menos que seja identicamente nula. Com efeito, se existir algum x_0 tal que $f(x_0) = 0$ então, para todo $x \in R$ teremos

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) \; . \; f(x - x_0) = 0 \; . \; f(x - x_0) = 0 \; .$$

Portanto, $f(x) = 0$ para todo $x \in R$. Daí, f é a função nula. Mais ainda, $f(x) > 0$ para todo $x \in R$. De fato, se $f(x_0) < 0$ para algum $x_0 \in R$, então

$$0 > f(x_0) = f(\frac{x_0}{2} + \frac{x_0}{2}) = f(\frac{x_0}{2}) \; . \; f(\frac{x_0}{2}) = \left[f(\frac{x_0}{2}) \right]^2 .$$

Logo, $\left[f(\frac{x_0}{2}) \right]^2 < 0$, uma contradição. Assim, tanto faz dizer que o contradomínio de f é R como dizer que é R^+. É recomendável tomar R^+ como contradomínio de f, a fim de torná-la uma função sobrejetiva[14] e, como ela é injetiva, consequentemente uma função bijetiva[15], o que a torna uma função que admite inversa.

(2) A *função* $f : R \to R^+$, definida por $f(x) = a^x$, *é ilimitada superiormente*.

[14] Uma função $f : X \to Y$ é dita **sobrejetora**, ou **sobrejetiva**, ou uma **sobrejeção**, se sua imagem for todo o conjunto Y, isto é, se, para todo $y \in Y$, existir pelo menos um $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

[15] Uma função $f : X \to Y$ é dita **bijetora**, ou **bijetiva**, ou uma **bijeção**, se for ao mesmo tempo injetora e sobrejetora.

Com efeito, se $a > 1$ então a^x cresce sem limites quando $x > 0$ é muito grande. E se $0 < a < 1$ então a^x torna-se arbitrariamente grande quando $x < 0$ tem valor absoluto grande.

(3) A *função exponencial é contínua*[16].

Dado $x_0 \in R$, é possível tornar a diferença $\left|a^x - a^{x_0}\right|$ tão pequena quanto se deseje desde que *x* seja tomado suficientemente próximo de x_0.

(4) A *função exponencial* $f : R \to R^+$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, *é sobrejetiva*.

Definição 2. Sejam $I \subset R$ um intervalo e $f : I \to R$ uma função dada. Dizemos que y_0 é o valor mínimo de f em I (resp. y_0 é o valor máximo) se as duas condições a seguir forem satisfeitas:

(a) $\mathrm{Im}(f) \subset \left[y_0 ;+\infty\right)$, respectivamente $\mathrm{Im}(f) \subset \left(-\infty ;\ y_0\right]$.

(b) $y_0 \in \mathrm{Im}(f)$.

Nesse caso, os pares reais $(x_0,\ y_0)$ tais que $x_0 \in I$ e $f(x_0) = y_0$ são denominados os pontos de mínimo (resp. de máximo) da função f.

Proposição 2. Em relação à função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se $a > 0$ (resp. $a < 0$), então $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ é o único valor para o qual $(x_0,\ f(x_0))$ seja ponto de mínimo (resp. máximo) de f. Ademais, o valor mínimo (máximo) de f é $y_0 = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

Exemplo 5. Encontre o valor de máximo ou mínimo da função quadrática $f(x) = x^2 - 8x + 23$.

Solução. Como $a = 1 > 0$, de acordo com a proposição 2, $f(-\dfrac{b}{2a}) = -\dfrac{\Delta}{4a}$ é valor mínimo de f. Nesse caso, é $f(-\dfrac{(-8)}{2}) = -\dfrac{(-28)}{4.1} = 7$ e (4, 7) é o ponto de mínimo dessa função.

---

[16] Uma função $f : X \to R$ é **contínua** em um ponto $x_0 \in X$ se a seguinte condição for satisfeita: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $\left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon$. A função f é dita **contínua** se o for em todo $x_0 \in X$.

No que segue, apresentaremos critérios de natureza elementar para reconhecer se o modelo para certo fenômeno se trata de uma função $f(x)=ax+b$, $f(x)=b\ .\ a^x$ ou $f(x)=ax^2+bx+c$.

Teorema 1. *As seguintes afirmações a respeito de uma função crescente* $f:R\to R$ *são equivalentes:*

(1) $f(nx)=n\ f(x)$ *para quaisquer* $n\in Z$ *e* $x\in R$*;*

(2) $f(x)=ax$ *para qualquer* $x\in R$*, onde* $a=f(1)$*;*

(3) $f(x+y)=f(x)+f(y)$ *para quaisquer* x , $y\in R$*.*

Demonstração.

Provaremos inicialmente que, para todo número racional $r={}^{m}\!/_{n}$, *m, n* ∈ R, a hipótese $f(rx)=r\ f(x)$ também vale seja qual for $x\in R$. Com efeito, se $r={}^{m}\!/_{n}$, $m\in Z$ e $n\in Z^*$, temos que *m = r . n*. Daí, $n\ .\ f(rx)=f(nrx)=f(mx)=m\ f(x)$.
Logo,

$$f(rx)=\frac{m}{n}\ f(x)=r\ .\ f(x).$$

Note que, se $a=f(1)$, temos por (1) que, $f(r)=ar$ para todo $r\in Q$.

Como $f(r)=f(r\ .\ 1)=f(1\ .\ r)=f(1)\ .\ r=a\ .\ r$. Note que, $0<1$ e como f é crescente, temos que $f(0)<f(1)=a$.

Para provar que (1) implica (2), suponhamos, por absurdo, que exista algum número real x tal que $f(x)\neq a$. Sem perda de generalidade, tome $f(x)<ax$, donde, $\frac{f(x)}{a}<x$. Tomemos um número racional r, com $\frac{f(x)}{a}<r<x$, donde $f(x)<ar=f(r)$. Sendo f crescente, $r<x$ implica $f(r)<f(x)$, uma contradição. Analogamente, não pode existir nenhum real x com $f(x)>ax$ e, portanto $f(x)=ax$ para todo x. Partindo de (2), temos $f(x+y)=a\ (x+y)=ax+ay=f(x)+f(y)$, logo (2) implica (3). Finalmente, supondo (3) imediatamente que $f(n\ x)=n\ .\ f(x)$ para todo $x\in R$ e $n\in N$. Além disso,

$$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0),$$

Logo $f(0)=0$. Daí resulta, para quaisquer $n \in N$ e $x \in R$, que

$$0 = f(-nx+nx) = f(-nx) + f(nx) = f(-nx) + n\ f(x),$$

logo $f(-nx) = -n\ f(x)$. Segue-se que, $f(n\ x) = n\ f(x)$ para todo $n \in Z$ e todo $x \in R$, provando que (3) implica (1).

Observações:

(1) O Teorema 1 vale também para f decrescente, só que nesse caso $a = f(1)$ é negativo.

(2) Uma consequência do Teorema 1 é que, para f crescente ou decrescente, $f(nx) = n\ f(x)$ para todo $x \in R$ e todo $n \in Z$ implica $f(cx) = c\ f(x)$ para quaisquer c , $x \in R$.

(3) O número chama-se *a constante de proporcionalidade.*

A importância do Teorema 1 está na investigação quanto, a saber, se $f: R \to R$ é uma função linear.

A utilização do modelo linear mais geral, $y = ax + b$, é regida pelos teoremas seguintes:

Teorema 2. *As seguintes afirmações a respeito de uma função crescente* $f: R \to R$ *são equivalentes:*

(1) Para todo $h \in R^+$*, o acréscimo* $\varphi(h) = f(x+h) - f(x)$ *depende de* h*, mas não de* $x \in R$*;*

(2) Pondo $a = f(1) - f(0)$ *e* $b = f(0)$*, tem-se* $f(x) = ax + b$ *para todo* $x \in R$*.*

Demonstração. Admitida a afirmação (1), definimos a função $\varphi: R^+ \to R$ pondo, para todo $h \in R^+$, $\varphi(h) = f(x+h) - f(x)$, onde $x \in R$ é qualquer. Dados h_1, h_2, temos

$$\varphi(h_1 + h_2) = f(x + h_1 + h_2) - f(x) = f(x + h_1 + h_2) - f(x + h_1) + f(x + h_1) - f(x) = \varphi(h_2) + \varphi(h_1)$$

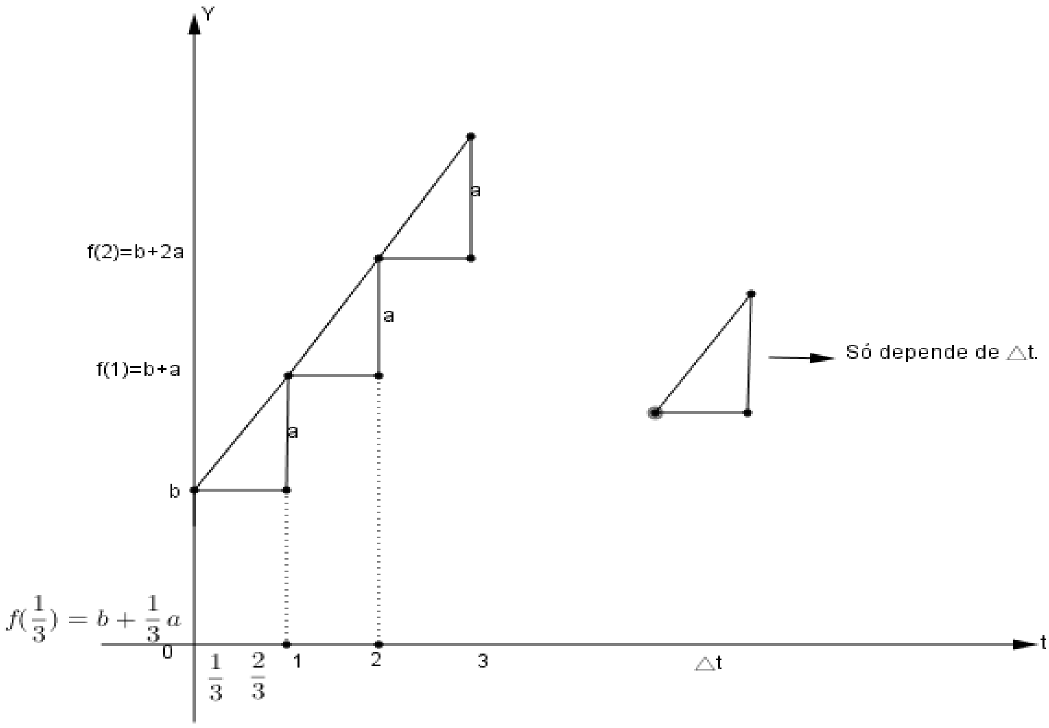
Segue-se do Teorema 1 que se tem $\varphi(h) = a\ h$ para todo $h \in R^+$, com $a = \varphi(1) = f(1) - f(0)$. Consequentemente, para todo $x \in R$ vale:

$$f(x) = f(0 + x) - f(0) + f(0) = \varphi(x) + f(0) = ax + b$$

onde $a = f(1) - f(0)$ e $b = f(0)$. Logo (1) implica (2). A outra implicação é imediata.

Exemplo 6. (Examinando um fenômeno) O Teorema 2 descreve o que deve ser observado em um determinado fenômeno para que a função afim seja o instrumento apropriado para modelar. Note na figura que para cada intervalo $\Delta t = t_{k+1} - t_k$, não importa onde esse intervalo esteja o acréscimo $f(t_{k+1}) - f(t_k)$ dado à função em tal intervalo é sempre o mesmo, isto é, tal acréscimo depende somente de Δt.

Figura 9: Caracterização da função afim como modelo de um certo fenômeno.



Fonte: Autora, (2017).

Diante dessa informação é possível construir o resto da função. De fato, consideremos $f(0) = b$ e que o acréscimo no valor da função seja igual a $f(1) - f(0) = a$. O acréscimo $f(2) - f(1)$, isto é, quando passamos de $t = 2$ para $t = 1$, também é igual a a unidades. Assim, obtemos:

$f(0) = b$,

$f(1) - f(0) = a \Rightarrow f(1) = b + a$,

$f(2) - f(1) = a \Rightarrow f(2) = a + (b + a) = b + 2a$,

$f(3) - f(2) = a \Rightarrow f(3) = a + (b + 2a) = b + 3a$,

....

$f(n) = b + an$, $\forall \ n \in N$.

Supondo que se queira calcular a função no ponto $t = \frac{2}{3}$, até então sabemos que a função tem acréscimos iguais nos intervalos $\left[0 \ ; \ \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3} \ ; \ \frac{2}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3} \ ; 1\right]$. Nesse caso, quando o ponto passa de $t = 0$ para $t = \frac{1}{3}$, o acréscimo na função é de $\frac{1}{3}a$, isto é,

$f(0) = b$,

$f(\frac{1}{3}) - f(0) = \frac{a}{3} \Rightarrow f(\frac{1}{3}) = b + a \ . \ \frac{1}{3}$,

$f(\frac{2}{3}) - f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}a \Rightarrow f(2) = \frac{1}{3}a + (b + a \ . \ \frac{1}{3}) = b + \frac{2}{3}a$,

....

$f(t) = b + a \ t$, $\forall \ t \in Q$, onde *a* é a taxa de variação da função afim, ou seja, o que é aumentado no valor da função por unidade de tempo t. Quando aplicamos esse modelo na Física, necessariamente, no movimento uniforme, interpretam-se os parâmetros *b* e *a* como a posição inicial e a velocidade constante de uma partícula, respectivamente.

Outro fato associado à caracterização das funções afins está na propriedade dessas funções transformarem qualquer progressão aritmética, x_1, x_2, x_k,... numa progressão aritmética $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, ..., $y_k = f(x_k)$, ... Com efeito, a função $g : R \to R$, definida por $g(x) = f(x) - f(0)$, transforma qualquer progressão aritmética noutra progressão aritmética.

Apesar de a função afim ser um bom modelo, não atende a todas as situações. Por exemplo, se analisarmos o que acontece com a componente vertical (altura) de um projétil, lançado obliquamente em função do tempo, constataremos que o modelo linear não se adéqua a esse problema, uma vez que o acréscimo nessa função não é proporcional a Δt, pois no caso do movimento uniformemente variado, marcando a posição do corpo em intervalos iguais e sucessivos de tempo (digamos, de segundo em segundo), a partir do início do lançamento, as distâncias percorridas em cada intervalo de um segundo vão crescendo e formando uma progressão aritmética de razão $g = 9{,}8 \ m/s^2$ que é a aceleração da gravidade. O teorema de caracterização que provaremos a seguir garante então que a altura $f(t)$ do corpo no lançamento oblíquo depois de t segundos do início é uma função quadrática $f(t)=\frac{1}{2}at^2+bt+c$ onde a constante *a* chama-se a *aceleração*, *b* é a *velocidade inicial* (no instante $t=0$) e *c* é a *posição inicial* do ponto. Lima (2013) explica que em qualquer movimento, dado por uma função *f*, o quociente $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=\frac{espaço\ \ percorrido}{tempo\ \ de\ \ percurso}$ chama-se a velocidade média do ponto no intervalo cujos extremos são *t* e *t*+*h*.

Note que, $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=\frac{\left[\frac{1}{2}a(t+h)^2+b(t+h)+c\right]-\left[\frac{1}{2}at^2+bt+c\right]}{h}=at+b+\frac{ah}{2}$

. Para *h* cada vez menor, este valor se aproxima de at + b. Daí, v(t)=at+b é a *velocidade* do ponto (no movimento uniformemente variado) no instante t. Visto que, v(0) = b, essa é a velocidade inicial e como $a=\frac{[v(t+h)-v(t)]}{h}$ para quaisquer t,h, segue-se que a aceleração constante *a* é a taxa de variação da velocidade, motivo pelo qual o movimento se chama uniformemente variado[17].

Definição 3. Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência (y_n) na qual as diferenças $\Delta y_n = y_{n+1}-y_n$, entre cada termo e o termo anterior, formam uma progressão aritmética usual.

Exemplo 7. A sequência $(y_n)=(1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,...)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem porque a sequência das diferenças entre cada termo e o anterior, $(b_n)=(\Delta y_n)=(y_{n+1}-y_n)=(2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,...)$ é uma progressão aritmética usual.

Usaremos esse critério para reconhecer através de alguns dados coletados, na ação da modelagem matemática para situações ou fenômenos onde configura uma função quadrática, a de que *toda função contínua* $f: R \to R$ *que transforma*

---

[17] Uniformemente acelerado ou retardado, conforme v tenha o mesmo sinal de a (isto é, $t>\frac{-b}{a}$) ou tenha sinal oposto ao de a (ou seja, $t<\frac{-b}{a}$).

progressões aritméticas em progressões aritméticas de segunda ordem é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$*.* Analogamente, se y_1, y_2, ..., y_n, ... é uma P.A.[18] de segunda ordem, existem números reais *a*, *b* e *c* tais que para todo $n \in N$. Assim, considerando a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos $y_n = f(n)$ para todo $n \in N$, de modo que a restrição de aos números naturais fornece os termos da P.A. de segunda ordem dada.

Teorema 3. (Caracterização das funções quadráticas)

Afim de que a função contínua $f : R \to R$ seja quadrática é necessário e suficiente que toda progressão aritmética não constante x_1, x_2,... , x_n, ... seja transformada por numa progressão aritmética de segunda ordem não-degenerada

$$y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2), \dots ,\ y_n = f(x_n),\ \dots$$

Demonstração. Com efeito, as diferenças sucessivas $y_2 - y_1,\ y_3 - y_2,\ \dots,\ y_{n+1} - y_n, \dots$ formam uma P.A. ordinária, cujo primeiro termo é $d = y_2 - y_1$ e cuja razão chamaremos de *r*; portanto seu enésimo termo é $y_{n+1} - y_n = d + (n-1)\,r$, para $n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$ Temos então:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= (y_{n+1} - y_n) + (y_n - y_{n-1}) + \dots + (y_3 - y_2) + y_1 \\ &= [d + (n-1)r] + [d + (n-2)r] + \dots + [d + r] + d + y \\ &= nd + \frac{n(n-1)}{2} r + y_1 \end{aligned}$$

para todo $n \in N$.

Para $n = 0$, esta igualdade é igualmente verdadeira, o que permite escrever:

$$y_n = (n-1)\ d + \frac{(n-1)(n-2)}{2} r + y_1$$

$$= \frac{r}{2}\ n^2 + \left(d - \frac{3r}{2}\right) n + r - d + y_1$$

---

[18] Uma P.A. pode ter razão $x_{n+1} - x_n = 0$. Neste caso, trata-se de uma sequência constante: $x_1,\ x_1,\ x_1,\ \dots$ Consequentemente, uma P.A. de segunda ordem pode reduzir-se a uma P.A. ordinária, quando a razão r da P.A. $y_2 - y_1,\ y_3 - y_2,\ \dots$ for igual a zero. Neste caso, $a = \frac{r}{2} = 0$ e a função $f(x) = a\ x^2 + b\ x + c$, com $y_n = f(n)$, não é quadrática, reduzindo-se a $f(x) = b\ x + c$.

$$= an^2 + bn + c$$

para todo $n \in N$, com $a = \frac{r}{2}$, $b = d - \frac{3r}{2}$, $c = r - d + y$.

Reciprocamente, seja $f : R \to R$ uma função contínua com a propriedade de transformar toda P.A. não constante numa P.A. de segunda ordem não degenerada.

Substituindo $f(x)$ por $g(x) = f(x) - f(0)$, vemos que g tem as mesmas propriedades de f e mais a propriedade adicional de que $g(0) = 0$.

Considerando a progressão aritmética $1, 2, 3, 4, 5, ...$, vemos que os valores $g(1), g(2), ..., g(4), ...$ formam uma P.A. de segunda ordem não degenerada. Logo, existem constantes $a \neq 0$ e b tais que $g(n) = an^2 + bn$ para todo $n \in R$. (Deveria ser $g(n) = a\, n^2 + b\, n + c$, porém $g(0) = 0$.)

Em seguida, fixemos arbitrariamente um número $p \in N$ e consideremos a progressão aritmética $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \frac{3}{p}, ..., \frac{n}{p}, ...$

De modo análogo, concluímos que existem $a' \neq 0$ e b' tais que $g(\frac{n}{p}) = a'n^2 + b'n$ para todo $n \in N$. Assim, para todo $n \in N$, temos:

$$a\, n^2 + bn = g(n) = g\left(\frac{np}{p}\right) = a'\,(np)^2 + b'(np) = \left(a'p^2\right) n^2 + \left(b'p\right) n.$$

Portanto as funções quadráticas $a\, x^2 + bx$ e $\left(a'p^2\right) x^2 + \left(b'p\right) x$ coincidem para todo $x = n \in N$. Isto obriga a $a = a'p^2$ e $b = b'p$, ou seja, $a' = \frac{a}{p^2}$, $b' = \frac{b}{p}$. Logo, para quaisquer números naturais n e p vale:

$$g\left(\frac{n}{p}\right) = a'\, n^2 + b'n = \frac{a}{p^2}\, n^2 + \frac{b}{p}\, n = a\left(\frac{n}{p}\right)^2 + b\left(\frac{n}{p}\right).$$

Vemos então que as funções contínuas $g(x)$ e $a\, x^2 + bx$ são tais que $g(r) = a\, r^2 + b\, r$ para todo número racional positivo $r = \frac{n}{p}$. Segue-se que $g(x) = a\, x^2 + b\, x$ para todo número real positivo x. De modo análogo, considerando a P.A $-1,-2,-3, \ldots$, concluiríamos que $g(x) = a\, x^2 + b\, x$ para todo $x \leq 0$. Logo, pondo $f(0) = c$, temos $f(x) = g(x) + c$, ou seja, $f(x) = a\, x^2 + bx + c$ para todo $x \in R$.

A função exponencial ocorre em uma série de aplicações matemáticas em que o modelo linear não configura e goza da seguinte característica:

Teorema 4. (Caracterização da função exponencial)

Seja f uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:

1) $f(n\, x) = f(x)^n$ para todo $n \in Z$ e todo $x \in R$;

2) $f(x) = a^x$ para todo $x \in R$, onde $a = f(1)$;

3) $f(x + y) = f(x)\,.\,f(y)$ para quaisquer $x, y \in R$.

Demonstração.

$(1) \Rightarrow (2)$ Para todo número racional $r = \dfrac{m}{n}$ (com $m \in Z$ e $n \in N$) tem-se $f(rx) = f(x)^r$
.

Com efeito, como $n\, r = m$, podemos escrever $f(r\, x)^n = f(n\, r\, x) = f(m\, x) = f(x)^m$, logo $f(r\, x) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r$. Se pusermos $f(1) = a$, teremos $f(r) = f(r\,.\,1) = f(1)^r = a^r$, para todo $r \in Q$. Suponhamos que f seja crescente, logo $1 = f(0) < f(1) < a$. Vamos admitir, por absurdo, que exista um $x \in R$ tal que $f(x) \neq a^x$. Digamos, por exemplo, que seja $a = f(1)$. (O caso $f(x) > a^x$ seria tratado analogamente). Então, existe um número racional *r* tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, tendo $f(x) < f(r)$ concluímos que $x < r$. Por outro lado, temos também $a^r < a^x$, logo $r < x$, completando por contradição a prova de que $(1) \Rightarrow (2)$.

$(2) \Rightarrow (3)$ Para todo $x, y \in R$, temos que $f(x + y) = a^{x+y} = a^x.\, a^y = f(x)\,.\,f(y)$. Pondo $a = f(1)$, obtemos $f(1) = f(1 + 0) = a^{1+0} = a^1.\, a^0 = a$.

$(3) \Rightarrow (1)$ Supondo que $f(x + y) = f(x)\,.\,f(y)$, $\forall\, x, y \in R$, então para todo $n \in Z$ e todo $x + y \in R$, ocorre $f(n(x + y)) = a^{n(x+y)} = \left[a^{x+y}\right]^n = \left[f(x + y)\right]^n$.

Teorema 5. (Caracterização das funções do tipo exponencial)

Seja $g : R \to R^{+}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para $x, h \in R$ quaisquer, o acréscimo relativo $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ dependa apenas de h, mas não de x. Então, se $b = g(0)$ e $a = \dfrac{g(1)}{g(0)}$, tem-se $g(x) = b\ a^{x}$ para todo $x \in R$.

Demonstração.

Suponha que $\varphi(h) = \dfrac{g(x+h)}{g(x)}$ independe de x. Fazendo, $f(x) = \dfrac{g(x)}{b}$, onde $b = g(0)$, obtemos $\varphi(h) = \dfrac{b\ .\ f(x+h)}{b\ .\ f(x)} = \dfrac{f(x+h)}{f(x)}$ independe de x e, agora, com $f(0) = \dfrac{g(0)}{b} = 1$. Então, pondo $x = 0$ na relação $\varphi(h) = \dfrac{f(x+h)}{f(x)}$, obtemos $\varphi(h) = f(h)$ para todo $h \in R$, donde vemos que a função monótona injetiva f cumpre $f(x+h) = f(x)\ .\ f(h)$, ou seja, $f(x+y) = f(x)\ .\ f(y)$ para quaisquer $x, y \in R$. Seque-se então do teorema 4 que $f(x) = a^{x}$, logo $g(x) = b\ f(x) = b\ a^{x}$, como queríamos demonstrar.

Aplicando os termos $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ de uma progressão aritmética de razão h, isto é, $x_{n+1} = x_n + h$, na função $f : R \to R$, $f(x) = b\ a^{x}$, veremos que os valores, $f(x_1) = b\ a^{x_1}$, $f(x_2) = b\ a^{x_2}$,.., $f(x_n) = b\ a^{x_n}$, ... , formam uma progressão geométrica de razão a^{h} . De fato, temos que $f(x_{n+1}) = b\ a^{x_{n+1}} = b\ a^{x_n + h} = (b\ a^{x_n}).a^{h} = f(x_n).\ a^{h}$.

Sendo o (n+1) - ésimo termo da progressão aritmética dado por $x_{n+1} = x_1 + nh$, segue-se que $f(x_{n+1}) = b\ a^{x_{n+1}} = b\ a^{x_n + nh} = (b\ a^{x_n}).a^{nh} = f(x_n).\ (a^{h})^{n} = f(x_1).A^{n}$, onde $A = a^{k}$. Na prática, usa-se esse procedimento para "discretizar" a análise das situações como a de cultivo de colônias de bactérias (como se discute em 3.2.4), em que se tem crescimento ou decrescimento exponencial. Esta propriedade caracteriza também as funções do tipo exponencial.

3.2.2 Gráficos de Funções

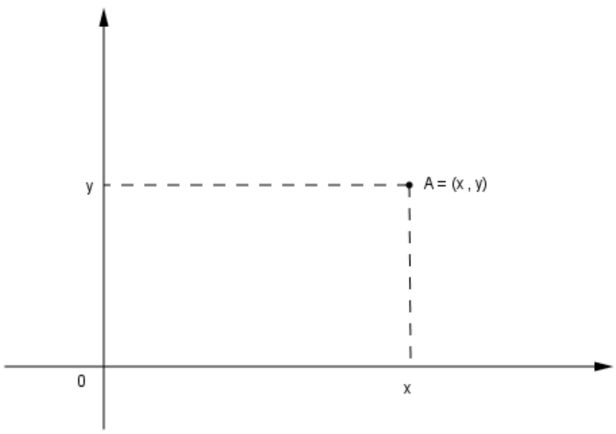
Para o que segue, lembre-se de que, dados conjuntos não vazios X e Y, seu *produto cartesiano* é o conjunto $\mathrm{X} \times \mathrm{Y} = \{(x\ ,\ y);\ x \in \mathrm{X}\ e\ y \in \mathrm{Y}\}$.

Quando $\mathrm{X} = \mathrm{Y} = R$, usualmente vemos X e Y como retas numeradas e $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ como um plano, munido de um sistema cartesiano de coordenadas fixado.

O plano $R^2 = R \times R$ é o exemplo mais importante de produto cartesiano por se tratar do caso particular que deu origem à ideia geral.

Os elementos $(x;\ y)$ de R^2 são, naturalmente, os pares ordenados de números reais. Eles surgem como as coordenadas cartesianas de um ponto A do plano Π (x=abscissa, $y =$ ordenada) quando se fixa nesse plano um par de eixos ortogonais OX e OY, que se intersectam no ponto O, chamado a *origem* do sistema de coordenadas (Lima, 2013, p. 75).

Figura 10: Coordenadas cartesianas de um ponto no plano numérico.



Fonte: Autora, 2017.

Dado o ponto $A \in \Pi$, a *abscissa* de A é o número x, coordenada do pé da perpendicular baixada de A sobre o eixo OX, enquanto a *ordenada* de A é a coordenada y do pé da perpendicular baixada de A sobre o eixo OY. Diz-se então que $(x;\ y)$ é o par de *coordenadas* do ponto A relativamente ao sistema de eixos xOy. Os eixos OX e OY dividem o plano em quatro regiões, chamadas *quadrantes*, caracterizadas pelos sinais das coordenadas de seus pontos. No primeiro quadrante, tem-se $x \geq 0$ e $y \geq 0$; no segundo, $x \leq 0$ e $y \geq 0$; no terceiro, $x \leq 0$ e $y \leq 0$; no quarto, $x \geq 0$ e $y \leq 0$.

A função $f : \Pi \to R^2$, que associa a cada ponto A do plano Π seu par de coordenadas $f(A) = (x;\ y)$ relativamente ao sistema de eixos OXY, é uma correspondência biunívoca. Conceitos e propriedades geométricas das funções objetos desse trabalho são traduzidos para uma linguagem algébrica e, reciprocamente, interpretar geometricamente relações entre os dados coletados (reais discretos ou não).

Como se pode exprimir a distância do ponto $P = (x;\ y)$ ao ponto $Q = (u;\ v)$ em termos dessas coordenadas?

A resposta pode ser obtida pelo Teorema de Pitágoras. Considerando o ponto auxiliar $S = (u;\ y)$ que tem a mesma ordenada que P, teremos o segmento PS horizontal (paralelo ao eixo OX), da mesma forma que QS é vertical (paralelo a OY). Assim, o segmento PQ é a hipotenusa do triângulo retângulo PQS, cujos catetos medem $|x-u|$ e $|y-v|$, respectivamente. Do Teorema de Pitágoras segue que:

$$d(P,\ Q)^2 = (x-u)^2 + (y-v)^2,$$

ou seja:

$$d(P,\ Q) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}\ .$$

Em particular, a distância do ponto $P = (x;\ y)$ à origem $O = (0;\ 0)$ é igual a $\sqrt{x^2 + y^2}$.

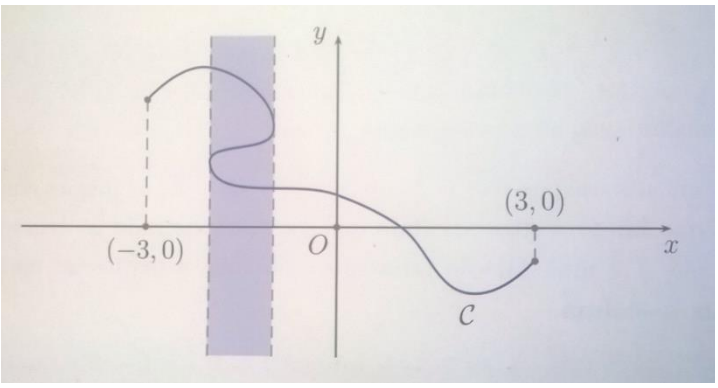
Temos a seguinte definição importante.

Definição 3. Dada uma função $f : X \to Y$, o **gráfico** de f é o subconjunto G_f do produto cartesiano $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, definido por $G_f = \{(x\ ,\ y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{Y}; y = f(x)\}$.

Quando $f : X \to Y$ é uma função real de variável real, com $\mathrm{X} \subset R$ uma união finita de intervalos (possivelmente $\mathrm{X} = R$), o gráfico de f reveste-se de significativa importância geométrica, uma vez que $G_f \subset \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \subset R \times R$ e, como vimos acima, esse último conjunto pode ser identificado com um plano, munido com um sistema cartesiano de coordenadas.

Por outro lado, nem todo subconjunto do plano (munido de um sistema cartesiano xOy) pode ser visto como gráfico de uma função. De fato, suponha dada uma função real de uma variável real $f : X \to Y$, tal que X é uma união finita de intervalos.

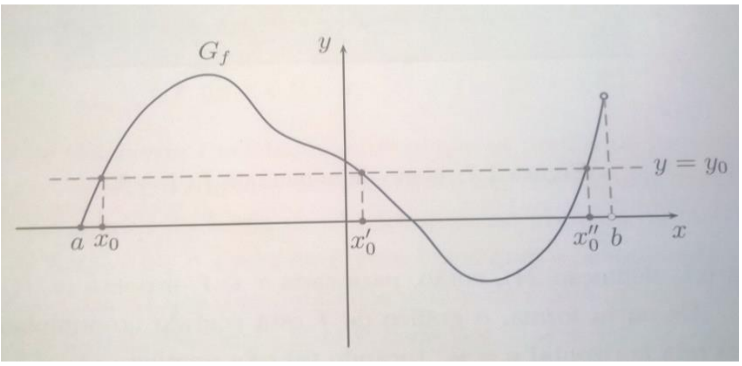
Figura 11: Subconjuntos do plano que não são gráficos de funções.



Fonte: Caminha, 2015.

Se $(x_0, y_0) \in G_f$, então $x_0 \in X$, pela definição de gráfico; por outro lado (e mais importante), fixado $x_0 \in X$, se $A_1(x_0, y_1)$ e $A_2(x_0, y_2)$são pontos sobre o gráfico de f, então, novamente pela definição de gráfico, temos $y_1 = f(x_0) = y_2$, de maneira que $A_1 = A_2$. Em resumo, para $x_0 \in R$, a reta vertical $x = x_0$ do sistema cartesiano em questão intersecta o gráfico de f se, e somente se, $x_0 \in R$; ademais, nesse caso tal reta intersecta o gráfico em *exatamente* um ponto. Assim, o subconjunto C do plano cartesiano, esboçado na Figura 11, não representa o gráfico de função alguma $f : [-3,\ 3] \to R$, uma vez que toda reta vertical paralela às retas tracejadas e situada na faixa cinza intersecta Cem mais de um ponto. Na direção positiva, a linha contínua da Figura é (cf. lá indicado) o gráfico de uma função $f : [a\ ;\ b) \to R$.

Figura 12: Imagem x gráfico.



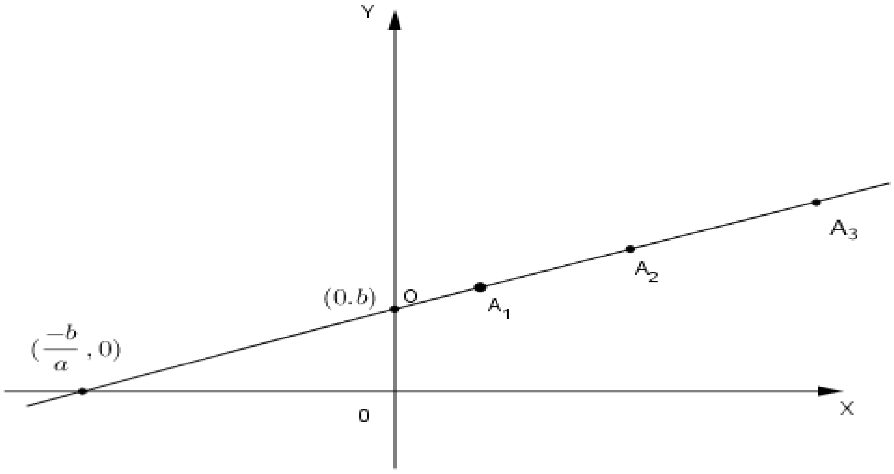
Fonte: Caminha, 2015.

Ainda nesse sentido, há uma interpretação geométrica bastante simples para a imagem de uma função real de uma variável real em termos de seu gráfico. Caminha (2015, p. 49) explica que para exibir tal imagem, marca-se no plano cartesiano da Figura 12, os pontos de interseção do gráfico da função $f:[a\ ;\ b) \to R$ com uma reta horizontal r, de ordenada $y = y_0$. (Há três desses pontos na figura 12, cujas abscissas denotamos como x_0, x'_0 e x''_0.). Seja $(x\ ,\ y_0)$ um ponto comum à reta e ao gráfico. Por pertencer ao gráfico de f, o ponto $(x\ ,\ y_0)$ deve ser tal que $x \in [a\ ,\ b)$ e $f(x) = y_0$. Reciprocamente, dado um ponto $(x\ ,\ y_0)$ no plano cartesiano, com $x \in [a\ ,\ b)$, temos claramente $(x\ ,\ y_0) \in r$; além disso, se $f(x) = y_0$, então também teremos $(x\ ,\ y_0) \in G_f$. Dessa forma, a reta horizontal de ordenada y_0 intersecta o gráfico exatamente quando y_0 pertence à imagem de f.

O gráfico G de uma função afim $f : x \mapsto ax + b$ é uma linha reta.

De fato, considerando $P = (x_1;\ ax_1 + b), P = (x_2;\ ax_2 + b)$ e $P = (x_3;\ ax_3 + b)$ desse gráfico, é necessário e suficiente que o maior dos três números $d(P_1;\ P_2)$, $d(P_2;\ P_3)$ e $d(P_1;\ P_3)$ seja igual à soma dos outros dois a fim de mostrar que esses pontos são colineares.

Figura 13: Gráfico da função Afim $f(x) = ax + b$, para $a,\ b > 0$.



Fonte: Autora, 2017.

Suponha que as abscissas x_1, x_2 e x_3 são tais que $x_1 < x_2 < x_3$. Pela fórmula de distância entre dois pontos, temos que,

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$

$$d(P_2, P_3) = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$$

$$d(P_1, P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$, donde vemos que,

$$d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2} + (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2} = d(P_1, P_3)).$$

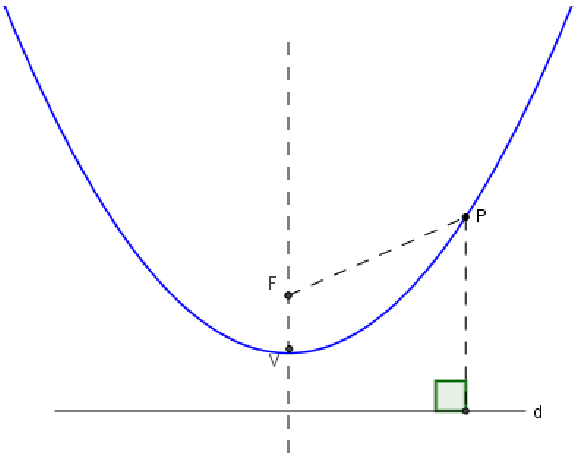
Geometricamente, *b* é a ordenada do ponto onde a reta, que é o gráfico da função $f : x \mapsto ax + b$, intersecta o eixo OY. O número *a* chama-se a *inclinação*, ou *coeficiente angular*, dessa reta (em relação ao eixo horizontal OX). Quando $a > 0$, o gráfico de f é uma reta ascendente (quando se caminha para direita) e quando $a < 0$, a reta é descendente.

3.2.3 A Parábola

Dados um ponto F e uma reta d no plano, com $F \neq d$, a *parábola* de *foco* F e *diretriz* d (cf. Figura 14) é o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $\overline{PF} = dist(P; d)$.

O *eixo* da parábola é a reta que passa por F e é perpendicular a d, e o vértice da parábola é seu ponto V de interseção com o eixo, sendo o ponto mais próximo da diretriz.

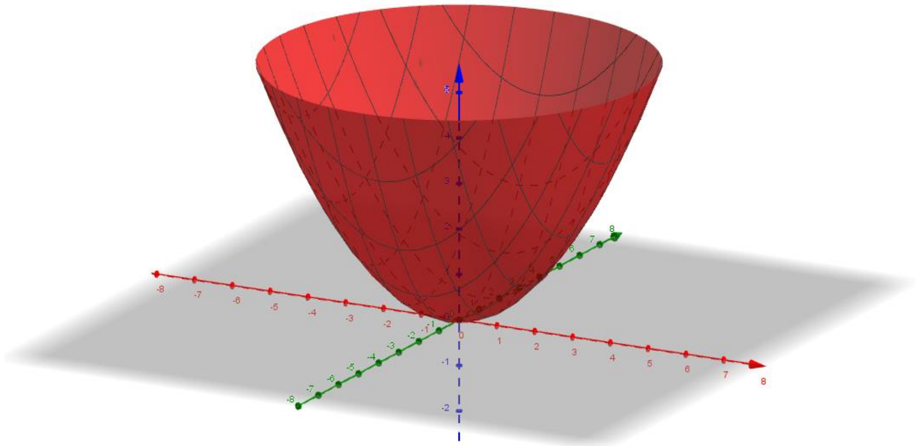
Figura 14: Parábola do foco F e diretriz d.



Fonte: Autora, 2017.

Se girarmos uma parábola em torno do seu eixo, ela vai gerar uma superfície chamada paraboloide de revolução (Lima, 2013, p. 121) cujo uso tem importância no emprego das antenas parabólicas.

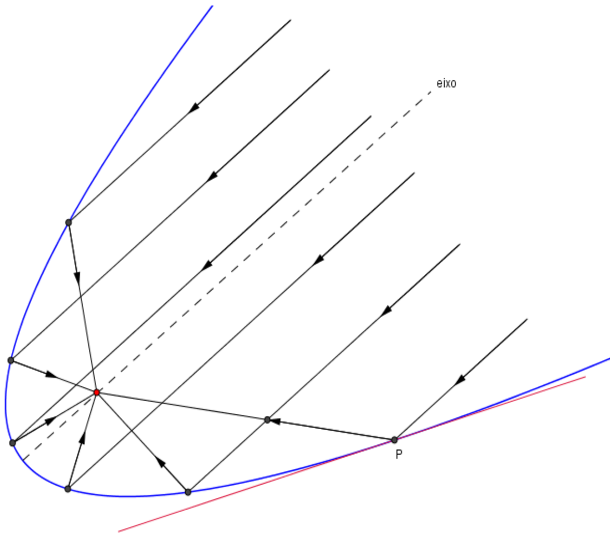
Figura 15: Paraboloide de revolução



Fonte: Autora, 2017.

Em aparelhos de televisão, por exemplo, as antenas parabólicas fazem com que os débeis sinais advindos de um satélite reflitam sobre sua superfície e que são levados a convergir para um único ponto: o foco, de maneira reforçada.

Figura 16: Sinais paralelos ao eixo do paraboloide refletem-se na superfície e se concentram no foco.



Fonte: Autora, 2017.

A parábola que é a interseção da superfície parabólica com o plano que contém o raio incidente, o raio refletido e o eixo de rotação (eixo da parábola).

Lima (2013, p. 122) explica que:

> Quando um raio incide sobre uma superfície refletora, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. O ângulo entre a reta e uma curva que se intersectam no ponto P é definido como o ângulo entre essa reta e a tangente à curva traçada pelo ponto de interseção. É assim que se interpretam os ângulos de incidência e reflexão. A tangente a uma parábola no ponto P é a reta que tem em comum com a parábola esse único ponto P e tal que todos os demais pontos da parábola estão do mesmo lado dessa reta.

No resultado seguinte, mostraremos que o gráfico de toda função quadrática é uma parábola.

Teorema 6 Para $a, b, c \in R$, com $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é a parábola de eixo $\left\{x = -\dfrac{b}{2a}\right\}$ e vértice $V\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$, "aberta para cima" se $a > 0$, e " aberta para baixo" se $a < 0$.

Demonstração.

Tomando $\xi = 1 - e$, procuramos $x_0,\ y_0,\ k \in R$ tais que $y_0 \neq k$ e, sendo $F(x_0, y_0)$ e d a reta $\{y = k\}$, tenhamos $P \in G_f \Leftrightarrow \overline{PF} = dist\ (P, d)$. Sendo $P(x,\ y)$, segue da definição de gráfico que $P \in G_f \Leftrightarrow y = ax^2 + bx + c$; por outro lado, a fórmula para a distância entre dois pontos do plano cartesiano garante que

$$y = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (y - k)^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2(y_0 - k)} x^2 - \frac{x_0}{y_0 - k} x + \frac{x_0^2 + y_0^2 + k^2}{2(y_0 - k)}.$$

Para o que falta, basta resolvermos em x_0, y_0, e k, o sistema de equações

$$\frac{1}{2(y_0 - k)} = a \ , \ -\frac{x_0}{y_0 - k} = b \ , \ \frac{x_0^2}{2(y_0 - k)} + \frac{1}{2}(y_0 + k) = c \ ,$$

o que é imediato $\frac{1}{2(y_0 - k)} = a \Rightarrow 2ay_0 - 2ak = 1 \Rightarrow y_0 = \frac{2ak - 1}{2a}$, que substituído na segunda igualdade fornece $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Em seguida, substituindo a primeira igualdade e $x_0 = -\frac{b}{2a}$ na terceira igualdade, segue que,

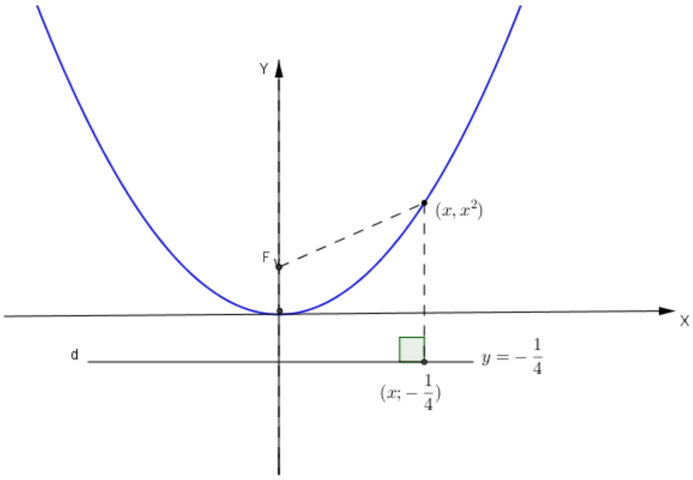
$$\frac{x_0^2}{2(y_0 - k)} + \frac{1}{2}(y_0 + k) = c \Rightarrow \frac{1}{2} y_0 + k = c - \frac{x_0^2}{2(y_0 - k)}$$

$$\Rightarrow y + k = 2\left(c - \frac{x_0^2}{2(y_0 - k)}\right) = 2.\left(c - \frac{b^2}{4a^2} . \frac{1}{\frac{2ak - 1}{2a} - k}\right) = 2.\left(c - \frac{b^2}{4a}\right) = 2.\left(\frac{-b + 4ac}{4a}\right) = -\frac{\Delta}{2a};$$

por fim, resolvendo o sistema $y_0 - k = \frac{1}{2a}$, $y_0 + k = -\frac{\Delta}{2a}$, obtém-se $y_0 = \frac{1 - \Delta}{4a}$ e $k = -\frac{1 + \Delta}{4a}$. Uma vez que o vértice V da parábola é a interseção da reta $x_0 = -\frac{b}{2a}$ com o gráfico, sua ordenada y_V é $y_V = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = -\frac{\Delta}{4a}$.

Exemplo 8 (Lima 2013, p. 113). O gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$ é a parábola cujo foco é $F = \left(0, \ 1/4\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -1/4$. Com efeito, a distância de um ponto qualquer (x, x^2) do gráfico de $f(x) = x^2$ ao ponto $F = \left(0, \ 1/4\right)$ é igual a $\sqrt{x^2 + \left(x^2 - 1/4\right)^2}$. A distância do mesmo ponto (x, x^2) à reta $y = -1/4$ é $x^2 + 1/4$.

Figura 17: Gráfico da função f(x)= x².

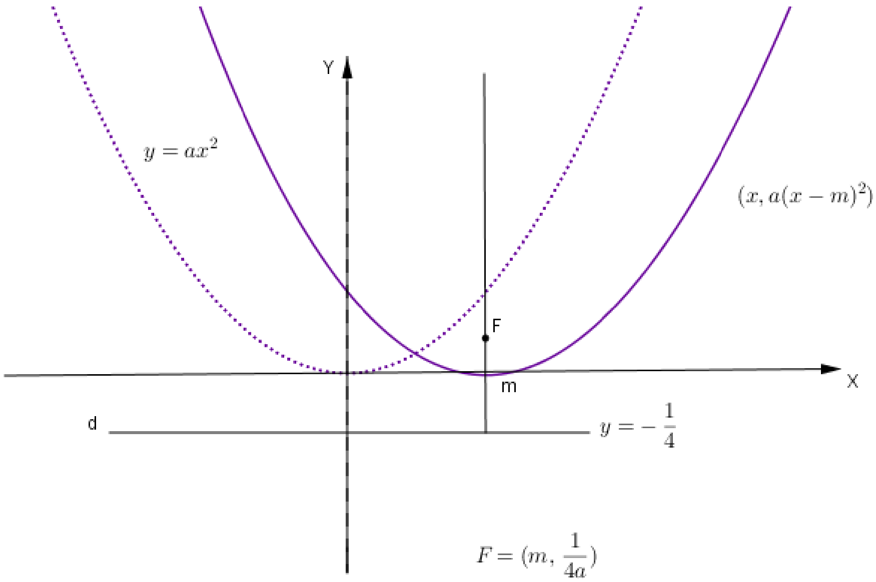


Fonte: Autora, 2017.

Como se trata de números positivos, para verificar a igualdade entre estas duas distâncias, basta ver que seus quadrados são iguais. E, de fato, tem-se $x^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2$, para todo $x \in R$, como se verifica facilmente.

Exemplo 9 (Lima 2013, p. 114). Para todo $a \neq 0$ e todo $m \in R$, o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2$ é uma parábola cujo foco é o ponto $F = \left(m, \frac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4}$.

Figura 18: Gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2$.

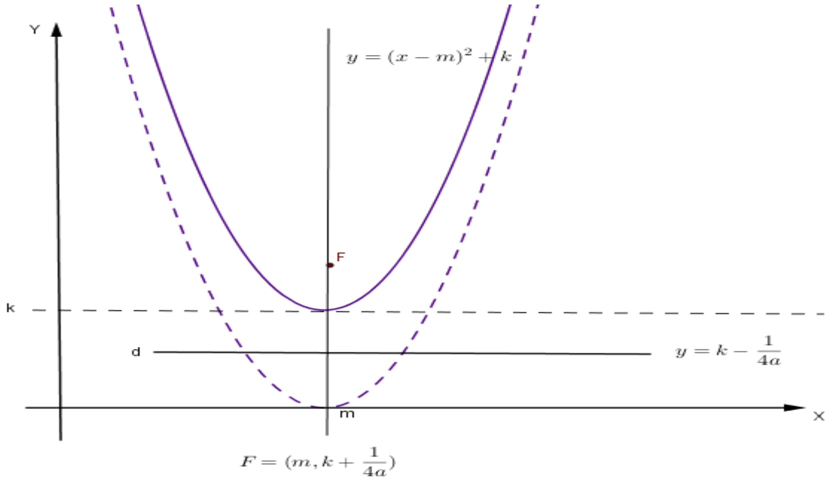


Fonte: Autora, 2017.

Para se chegar a esta conclusão, tem-se duas opções. Ou se verifica que, para todo $x \in R$, vale a igualdade $(x-m)^2 + \left[a(x-m)^2 - \frac{1}{4a}\right]^2 = \left[a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right]^2$ ou então se observa simplesmente que o gráfico $f(x) = a(x-m)^2$ de resulta do gráfico de $g(x) = ax^2$ pela translação horizontal $(x, y) \mapsto (x+m, y)$, a qual leva o eixo $x = 0$ no eixo $x = m$.

Exemplo 10 (Lima 2013, p. 115). Dados $a,\ m,\ k \in R$, com $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é uma parábola cujo foco é o ponto $F = \left(m, k + \frac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = k - \frac{1}{4a}$.

Figura 19: Gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2 + k$.



Fonte: Autora, 2017.

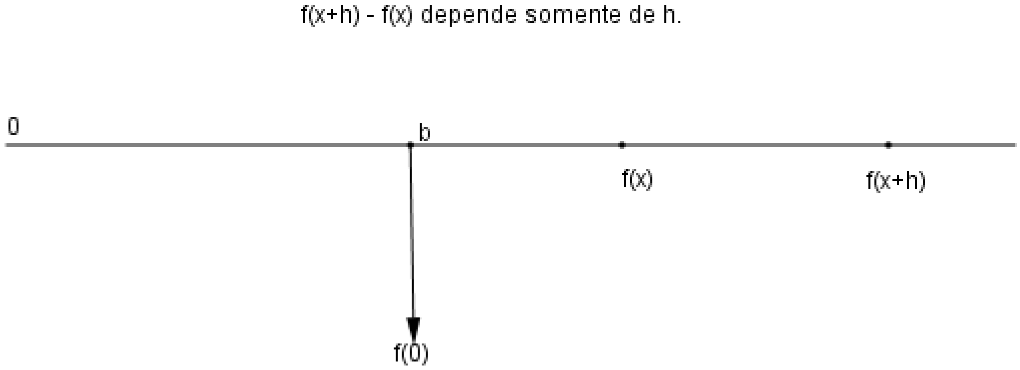
Vemos através do exemplo 10 que o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é obtido do gráfico de $g(x) = a(x-m)^2$ por meio da translação vertical $(x, y) \mapsto (x, y+k)$, que leva o eixo OX na reta $y = k$ e a reta $y = -1/4a$ na reta $y = k - \frac{1}{4a}$.

3.2.4 Os modelos no Movimento Retilíneo, no Lançamento Oblíquo e na Reprodução de Micro-organismos.

A hipótese de que $f(x+h)-f(x)$ não depende de x às vezes se exprime dizendo que a acréscimos iguais de x correspondem acréscimos iguais para $f(x)$, assim como ocorre no movimento uniforme em que um ponto percorre espaços iguais em tempos iguais.

Suponhamos (Lima, 2013, p. 90) um ponto que se movimenta sobre um eixo. Sua posição, em cada instante t, é determinada pela coordenada (abscissa) $f(t)$. Diz-se que se trata de um *movimento uniforme* quando o ponto se desloca sempre no mesmo sentido (isto é, f é uma função monótona) e, além disso, em tempos iguais percorre espaços iguais. Isto significa que $f(t+h)-f(t)$, espaço percorrido no tempo h, a partir da posição $f(t)$, depende apenas de h, mas não de t. Então é uma função afim: $f(t)=at+b$, onde $a=f(t+b)-f(t)$, espaço percorrido na unidade de tempo, chama-se a *velocidade* e $b=f(0)$ é a posição inicial.

Figura 20:A variação f(x+h)-f(x)

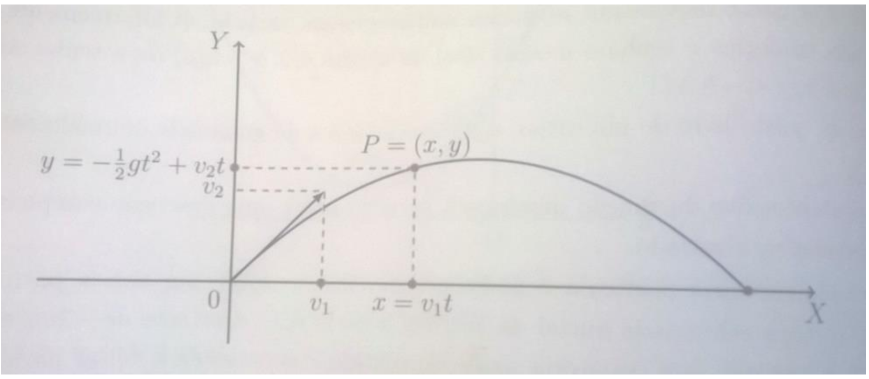


Fonte: Autora, 2017.

A variação $f(t+h)-f(t)$ depende apenas de h e não de t, visto que em qualquer momento o espaço percorrido pelo móvel no tempo h é o mesmo, independentemente do ponto onde ele está. Isto é o que caracteriza o movimento uniforme. Matematicamente, essa afirmação se traduz pela declaração $f(t+h)-f(t)=ah$.

No lançamento oblíquo, exemplo do movimento uniformemente variado, o movimento de um projétil (uma bala, uma bola, uma pedra, etc.) é lançado por uma força instantânea e a partir daí, sujeito apenas à ação da gravidade, sendo desprezada a resistência do ar. A trajetória do projétil, embora o processo ocorra no espaço tridimensional, pode ser vista em um plano determinado pela reta vertical no ponto de partida e pela direção da velocidade inicial. Como nesse caso, o movimento ocorre no plano, a velocidade é expressa por um vetor (segmento de reta orientado), cujo comprimento se chama a *velocidade escalar* do móvel (tantos metros por segundo). A direção e o sentido desse vetor indicam a direção e o sentido do movimento. Tomando um sistema de coordenadas cuja origem é o ponto de partida do projétil e tal que o eixo OY é a reta vertical que passa por esse ponto, temos que a velocidade inicial do projétil é o vetor $v = (v_1,\ v_2)$ cuja primeira coordenada fornece a velocidade da componente horizontal do movimento (a projeção do projétil sobre o eixo horizontal OX). A única força atuante sobre o projétil é a gravidade, a qual não possui componente horizontal, então nenhuma força atua sobre este movimento horizontal, sendo, portanto um movimento uniforme. De sorte que, se $P = (x,\ y)$ é a posição do projétil no instante t, tem-se $x = v_1\, t$. Quanto à aceleração da gravidade, esta é constante, vertical e igual a $-g$. Logo, a componente vertical do movimento de P é um movimento acelerado sobre o eixo OY, com aceleração $-g$ e velocidade inicial v_2. Daí, em cada instante t, a ordenada y do ponto $P = (x,\ y)$ é dada por $y = -\frac{1}{2} g\ t^2 + v_2\ t$. Nesse caso o termo constante se anula porque $y = 0$ quando $t = 0$.

Figura 21: Trajetória do lançamento vertical de um projétil.



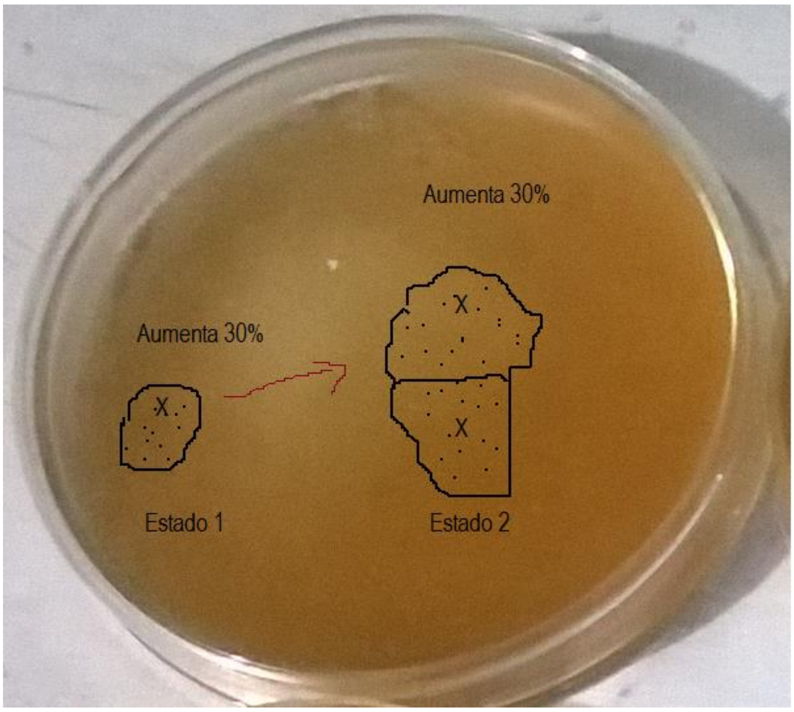
Fonte: Lima, 2013.

Se $v_1 = 0$ então, para todo t, tem-se $x = v_1\ t = 0$, logo $P = (0,\ y)$, com $y = -\frac{1}{2} g\ t^2 + v_2\ t$. Logo, a trajetória do projétil é vertical.

Suponhamos agora que $v_1 \neq 0$. Então, de $x = v_1\, t$ vem $t = \dfrac{x}{v_1}$. Assim tem-se que $y = -\dfrac{1}{2} g \left(\dfrac{x}{v_1}\right)^2 + v_2 \dfrac{x}{v_1} = \left(-\dfrac{g}{2{v_1}^2}\right) x^2 + \left(\dfrac{v_2}{v_1}\right) x$. Fazendo $a = -\dfrac{g}{2{v_1}^2}$ e $b = \dfrac{v_2}{v_1}$, obtemos $y = a\, x^2 + b\, x$ que mostra que a trajetória do projétil é uma parábola.

Analisemos agora uma situação clássica presentes nos livros didáticos do Ensino Médio: da expansão do número de bactérias se reproduzindo em uma colônia ao longo do tempo sob condições favoráveis. Bactérias são organismos unicelulares que se multiplicam via subdivisão celular, onde uma célula se divide em duas. Assim, se começa com um número de indivíduos em uma colônia (estágio 1), quantificados em um determinado momento (início da contagem) e depois de algum tempo essa colônia apresenta um número maior de indivíduos (estágio 2).

Figura 22: Na população de bactérias configura um aumento relativo.

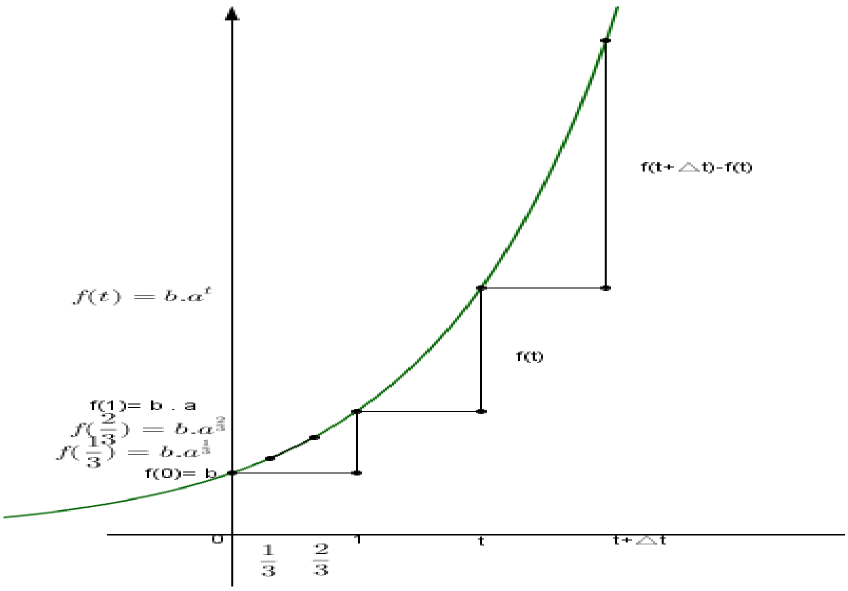


Fonte: Autora, 2017.

O modelo linear é um bom modelo para o que acontece com o crescimento que a colônia do estado 1 e a do estado 2 vão ter em 1 hora, isto é, o número de novas bactérias que aparecem na colônia 1 é igual ao número de novas bactérias que surgem na colônia 2 em 1 hora? É claro que não, pois esse fenômeno permite observar um maior número de indivíduos na segunda colônia do que na primeira, afetando a premissa de que o aumento observado depende somente do tempo decorrido. O aumento absoluto (aditivo) da população de indivíduos não é preservado nas duas colônias, mas sim o aumento relativo.

Digamos, por exemplo, que em 1 hora, a colônia do estado 1 produza 30% de novos indivíduos. Então a colônia do estado 2 também produzirá 30% de novos indivíduos, sendo esse aumento relativo, constante. Logo, o modelo que vai configurar aqui é o modelo exponencial. De fato, considerando $f(t)$ o número de bactérias após um tempo t, temos inicialmente $f(0) = b$ bactérias. Quando se tem o intervalo Δt, o aumento dado à $f(t)$ não é absoluto ou ainda que $f(t+\Delta t) - f(t)$ não é constante. A propriedade que caracteriza essa função é $\dfrac{f(t+\Delta t) - f(t)}{f(t)}$ chamada de variação relativa e é essa razão de variação que é sempre constante. Note que, $\dfrac{f(t+\Delta t) - f(t)}{f(t)} = \dfrac{f(t+\Delta t)}{f(t)} - 1$ constante acarreta $\dfrac{f(t+\Delta t)}{f(t)}$ ser também constante, que caracteriza o tipo de função que estamos querendo construir nesse fenômeno. Enquanto no modelo linear, a diferença $f(t+\Delta t) - f(t)$ é uma constante, no modelo exponencial que é o que se ajusta à situação, não é essa diferença que é constante mas sim a razão. Voltando ao exemplo na figura, dizer que a população X (estado 1) aumenta 30% significa multiplicá-la por 1,3 nesse tempo, da mesma forma que a população 2X, pois o acréscimo dado é multiplicativo.

Figura 23: Variação exponencial



Fonte: Autora, 2017.

O tipo de situação que essa ferramenta que estamos construindo serve é para modelar aqueles casos em que para intervalos de mesmo comprimento, a razão de acréscimo é a mesma, ou seja, depende apenas de Δt, não de t.

Assim, usando a propriedade discutida e considerando $\frac{f(t+\Delta t)}{f(t)} = a$,temos:

$$f(0) = b\,,$$

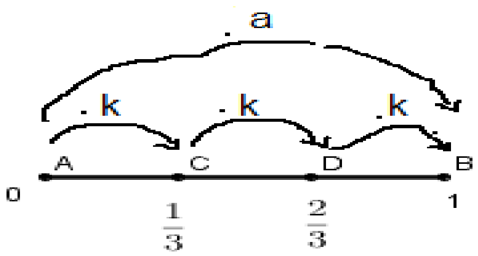
$$f(1) = f(0).a = b\ .\ a\,,$$

$$f(2) = f(1).a = b\ .\ a^2\,,$$

....

$f(n) = b\ .\ a^n$, n natural. Mas o que ocorre, por exemplo, no ponto onde se tem $t = \frac{2}{3}$? Se o fator multiplicativo para 1 unidade (t = 1) é igual a a, qual vai ser o acréscimo para $t = \frac{2}{3}$? Dividindo o intervalo $[0,\ 1]$ em três intervalos de amplitude $\frac{1}{3}$, sabe-se que $\frac{f(1/3)}{f(0)} = \frac{f(2/3)}{f(1/3)} = \frac{f(1)}{f(2/3)} = k$. Assim o fator multiplicativo total de $[0,\ 1]$ é k^3.

Figura 24: Intervalos de fator multiplicativo k.



Fonte: Autora, 2017.

Como $\frac{f(1)}{f(0)} = a$, segue que $a = k^3 \Rightarrow k = \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$. Assim,

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = f(0)\ .\ a^{\frac{1}{3}} = b\ .\ a^{\frac{1}{3}}\,,$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right)\ .\ a^{\frac{1}{3}} = b\ .\ a^{\frac{2}{3}}\,,$$

....

$f\left(\frac{p}{q}\right) = f(0)\ .\ \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p} = b\ .\ a^{\frac{p}{q}},\ \ p,q \in Z.$ De modo geral, $f(t) = b\ .\ a^{t},\ \ t \in Q$. É claro que para $t \in R$, a função é válida desde que f seja contínua ou monótona.

4 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo explanaremos a proposta didática composta pela escolha de experimentos, as metodologias utilizadas, as atividades de sala e o processo de avaliação.

Promover a aprendizagem qualitativa das funções afim, quadrática e exponencial concedendo ao aluno um estudo exploratório e dinâmico desses conceitos, instrumentalizando-o para a realização de um trabalho experimental que possa desenvolver aplicações em situações concretas e científicas foi motivação para a elaboração dessa sequência didática.

As atividades foram elaboradas, testadas e algumas aplicadas em uma escola pública da rede estadual, em Maceió – AL, no turno vespertino, no período de julho a agosto de 2017 com os 20 (vinte) alunos de uma turma de 1º ano do ensino médio. Nesta turma, todos os alunos apresentam um histórico de repetência ou interruptos de estudo na escola e, devido a isso, considerável defasagem de idade. O que se percebe um funcionamento cognitivo mais lento, donde se faz necessário um plano de ensino com o uso de aulas mais práticas e interativas que possam mobilizar o aprendizado, pois, conforme Silva (2008), o aluno somente constrói o conhecimento quando se envolve pessoalmente com o problema proposto pela situação. De fato, percebe-se nos alunos maior envolvimento e disposição para aprender quando as atividades propõem o “fazer”, que leva ao “pensar” para “realizar” e só assim resolver o problema por meio de tarefas mais práticas. Entretanto, vale ressaltar que a atividade prática deve conduzir o aprendizado por encaminhamentos que possibilitem a reflexão de resultados e investigações condizentes.

Nesta turma, professores de Química, Física e Biologia concordam que a falta de domínio da Matemática influencia negativamente no bom desempenho dos alunos, principalmente em situações de aplicação, onde se requer competência leitora, de interpretação de dados, de procedimentos de cálculo com números em diferentes representações (fracionárias e decimais), leitura gráfica e habilidades com ferramentas algébricas como equações e funções.

4.1 O uso de diferentes registros de representação

A elaboração das atividades propostas se apoia na perspectiva de que é necessário oferecer ao estudante diversas representações de um objeto matemático para facilitar sua compreensão em relação ao tema estudado. No ensino básico, (Giraldo, 2012) as principais formas de representação empregadas na abordagem de funções reais de variável real são: *algébricas* (fórmulas), *gráficas* (gráficos) e *numéricas* (tabelas). Entretanto, essas representações para funções na escola são relações limitadas pela grande ênfase que é dada a fórmulas e procedimentos algébricos rotineiros executados sem maiores reflexões, favorecendo a concepção de função simplesmente como fórmula. Em grande parte dos exercícios, diferentemente do que se propõe aqui, o roteiro seguido com essas principais formas de representação para funções concerne em partir de uma fórmula dada; depois construir uma tabela por substituição de valores (em geral, inteiros positivos e negativos próximos de 0) e, por fim, marcar os pontos correspondentes no plano cartesiano e ligar pontos, obtendo um esboço do gráfico.

Para Giraldo (2012, p. 58), este é um modelo essencialmente *quantitativo*, pois se baseia apenas nos valores da função em um número finito (e em geral pequeno) de elementos do domínio, com pouca reflexão matemática levando em conta características *qualitativas* específicas da função. Como consequência, não é incomum que os alunos passem a considerar função como “tudo aquilo que tem uma fórmula”, ignorando outros aspectos importantes do conceito, confundindo-o, entre outras ideias, a de equação.

De acordo com Lourenço e Oliveira (apud, Souza; Dalto, 2016, p. 2), a forma como o conteúdo de funções é ensinado na educação básica tem gerado dificuldades na aprendizagem dos alunos que, em geral, estão ligadas à comunicação e à compreensão do conteúdo. Para compreender essas dificuldades, a natureza delas e onde elas se encontram é necessária uma abordagem cognitiva cuja originalidade, segundo Duval (in Machado, 2013, p. 12), está em procurar inicialmente descrever o funcionamento que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino. Ressalta ainda que, somente baseados na coleta de dados podemos procurar compreender as reais causas das dificuldades dos alunos e delimitar os problemas de aprendizagem da matemática em todos os níveis. Mas o que caracteriza a atividade matemática no contexto de funções do ponto de vista cognitivo? Quais sistemas cognitivos são necessários mobilizar para acrescentar a esses objetos (conceitos) matemáticos, cuja aplicação tem contribuído (Souza; Dalton, 2016) para outras áreas das ciências e a muitos dos fenômenos de outras áreas da realidade que são modelados por meio de funções? O que possibilita efetuar as múltiplas transformações que constituem os tratamentos matemáticos? Essas são questões que contribuíram para a formulação de uma sondagem direcionada a análises dos conhecimentos prévios sobre as noções de funções matemáticas para os alunos participantes desse trabalho. A investigação realizada faz uso da teoria dos registros de representação semiótica na visão de Raymond Duval (2012) onde fala que:

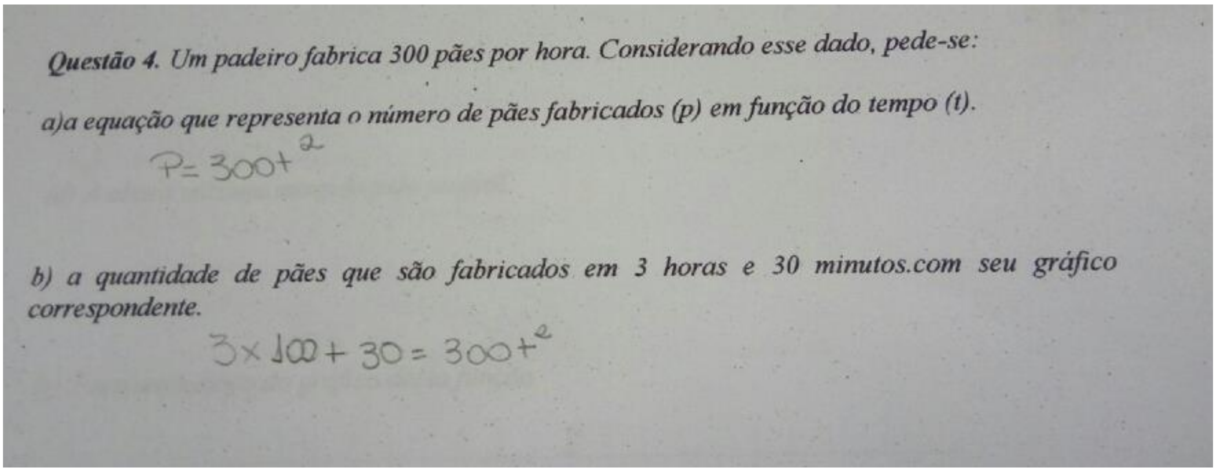
> [...] As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que têm inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. A compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro, pois não se deve jamais confundir um objeto e sua representação. Diferentemente dos outros domínios de conhecimento científico, na matemática, os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivamente ou instrumentalmente. O acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por

> representações semióticas e em meio a isso não se deve confundir um objeto e sua representação.
>
> [...] Os dois tipos de representações semióticas (apud Machado, 2013, p. 16) são os tratamentos e as conversões. Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: efetuar cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita. As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica.

Todo objeto matemático tem uma natureza chamada “objeto do conhecimento” e como tal não tem existência material, permitindo ser acessado por suas representações: uma escrita, uma notação, um símbolo, um número, uma função, um vetor, traçados e figuras como um ponto, um segmento, um círculo,... Só sabemos que um objeto matemático existe porque o representamos, no entanto, objetos matemáticos e suas representações não devem ser confundidos entre si, pois no contexto de aprendizagem, isso pode acarretar a perda de compreensão e conhecimentos adquiridos podem ser esquecidos ou se tornarem representações “inertes”. Para Durval (2012, p. 268) a distinção entre um objeto e sua representação é um ponto estratégico importante para a compreensão da Matemática e mesmo julgando ser o objeto matemático mais importante que suas possíveis representações semióticas, estas são absolutamente necessárias.

Nesse contexto, de um pré-teste aplicado, propomos problemas para a identificação e para a análise de pelo menos quatro tipos de registros: linguagem natural, numérica, algébrica e geométrica. Em algumas produções dos alunos se analisa também dificuldades em coordenar diferentes tratamentos e conversões de registros verificadas durante a resolução de uma categoria de funções ainda abordadas no 9^0 ano do ensino fundamental.

Figura 25: Exercício de modelação da função Afim



Questão 4. Um padeiro fabrica 300 pães por hora. Considerando esse dado, pede-se:

a)a equação que representa o número de pães fabricados (p) em função do tempo (t).

$P = 300t^2$

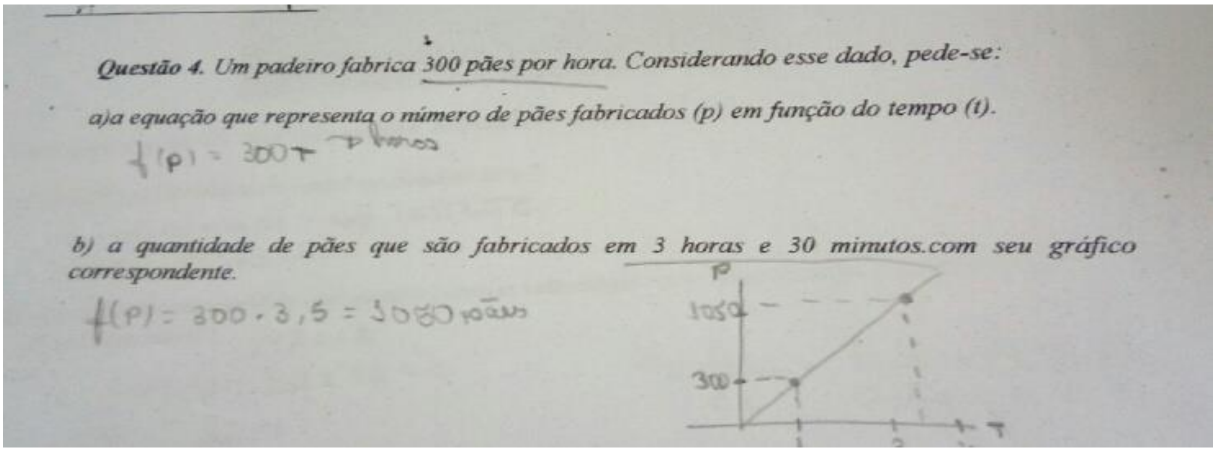
b) a quantidade de pães que são fabricados em 3 horas e 30 minutos.com seu gráfico correspondente.

$3 \times 100 + 30 = 300t^2$

Fonte: Autora, 2017.

Nota-se na resposta do aluno α (Figura 25) que não há identificação do conceito de proporcionalidade, nem tão pouco reconhece a função Linear como a mais apropriada à situação - problema em questão, confundindo sua representação algébrica com o da função quadrática no item (a). Observa-se também que no item (b) há confusão sobre as variáveis da função, havendo troca de valores para o tempo (t) e a quantidade de pães fabricados (P). Entende-se que o aluno não conseguiu resolver a equação que deveria ser gerada no item (b) com a função gerada no item (a). Os erros avaliados nesse exercício sinalizam a incapacidade matemática do aluno de conversão de registros no item (a), isto é, em passar de um tipo de representação semiótica a outra, no caso, da língua natural para a função ou equação. A maior parte das dificuldades com problemas elementares de aplicação, como os problemas de colocar em forma de equação (Damm *in* Durval, 2013, p.20), pode ser explicada pelo caráter congruente ou não da conversão de um enunciado em uma escrita que permita efetuar os cálculos. Vale lembrar que se tratando de linguagem matemática, Durval (2013, p. 15) destaca que a compreensão matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas. É o que se observa na produção do aluno δ para a questão anterior, como mostra a figura 26.

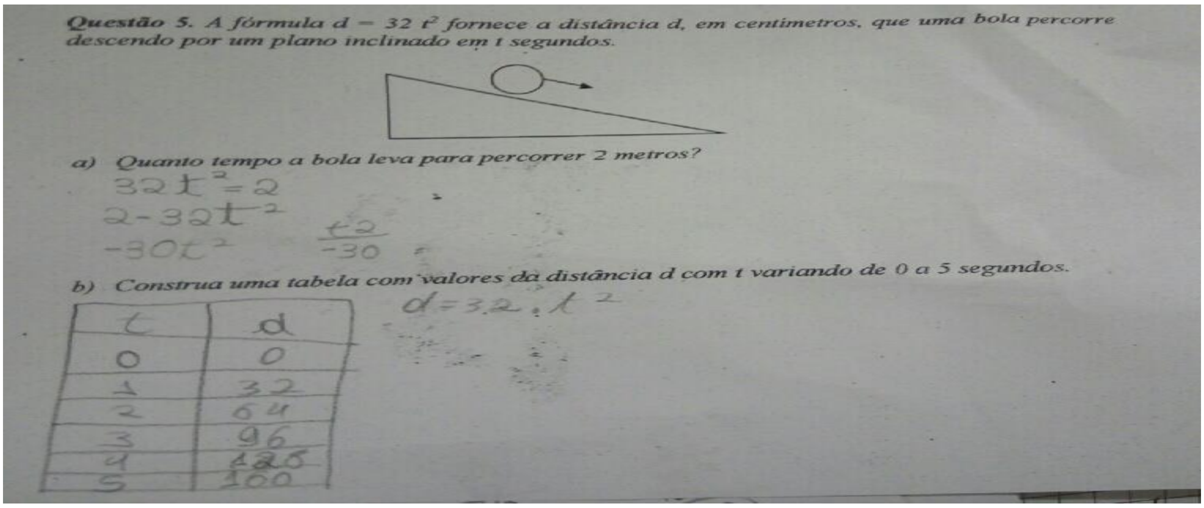
Figura 26 : Evidência de coordenação entre diferentes representações para o mesmo objeto.



Fonte: Autora, 2017.

No próximo exercício (figura 27), do aluno β, é dada a função quadrática da distância (d) de uma bola em função do tempo quando percorre um plano inclinado.

Figura 27: Exercício de função quadrática

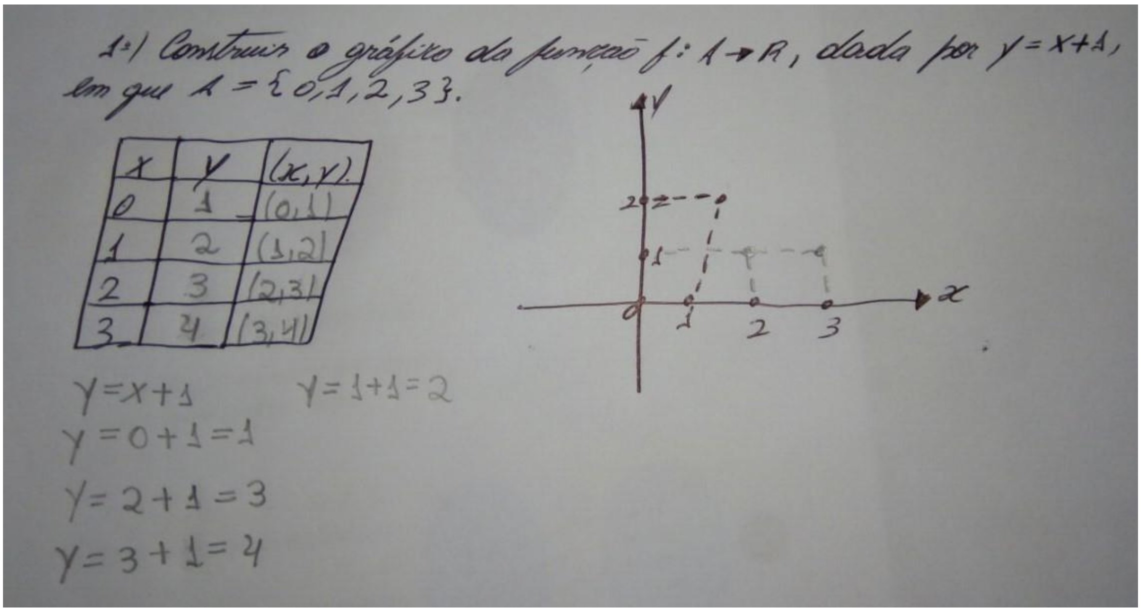


Fonte: Autora, 2017.

A única tarefa consiste em substituir na função a distância por 2, transformando-a em uma equação do 2^0 grau incompleta. No entanto, o aluno β demonstra não saber resolver tal equação. E quanto ao exercício (b), o aluno constrói a tabela como solicitado, mas não deixa o registro do procedimento de cálculo dos valores para a distância, onde se tem evidentemente erros dos dados tabelados.

Outro aspecto constatado foi à destreza quanto a construção gráfico de funções como se observa no exercício do aluno λ (figura 28).

Figura 28: Exercício sobre gráfico de função



Fonte: Autora, 2017.

A construção de gráfico se inicia pela construção de uma tabela de dados em que os respectivos valores da variável dependente são devidamente calculados pela função dada, porém ao fazer a marcação de pontos no plano cartesiano, o aluno λ não consegue fazer a correspondência entre as coordenadas x e y conforme a tabela. Esse fracasso ou bloqueio do aluno se deve ao fato de que a conversão requerida, mudar de uma equação para um gráfico, não é congruente.

4.2 Recursos computacionais no ensino de funções

A incorporação de tecnologias computacionais no ensino de Matemática possibilita novas abordagens, em alguns casos revelando aspectos dos conceitos matemáticos que dificilmente poderiam ser ensinados por meio de recursos convencionais. No que diz respeito à integração de recursos computacionais nesse trabalho tem-se como meta enfocar a construção de gráficos das funções elementares fazendo-se uso dos recursos específicos incorporados no ambiente de geometria dinâmica do *GeoGebra*: eixos cartesianos, digitação direta de expressões algébricas no campo *Entrada*, uso de *Seletores* para controlar valores de parâmetros (no caso em que se pretende usar gráficos dinâmicos para representar famílias de funções), planilha eletrônica (para fazer ajuste de curvas) e *lugar geométrico* ou *rastro*, que geram representações geométricas para o conjunto descrito por um ou mais pontos de uma construção quando um de seus elementos é variado. Quando o objetivo está em ensinar tópicos específicos sobre funções reais e o comportamento de seus gráficos, não há motivo para desprezar os recursos do software que tornam seu estudo mais acessível (Giraldo, 2012).

Na proposta apresentada, deseja-se estudar a influência de determinados coeficientes nos aspectos dos gráficos de certas famílias de funções. Por exemplo, sabe-se que o coeficiente angular de uma função polinomial do primeiro grau determina a inclinação de seu gráfico. A possibilidade de articular representações gráficas e algébricas de forma dinâmica em ambientes computacionais gráficos como o *Geogebra* pode ajudar em explorações desse tipo, especialmente em casos não tão simples.

Quando estudamos funções quadráticas, sabemos que o coeficiente ***a*** está relacionado com a concavidade da parábola, e o coeficiente ***c*** translada o gráfico verticalmente. Mas qual é a influência do coeficiente ***b***, do termo de primeiro grau, no aspecto da parábola?

Ainda, podemos explorar os significados dos parâmetros ***a, b*** e ***k*** na família de funções $f : R \to R$, $f(x) = a\ (x-b)^2 + k$. É o que se propõe na Atividade 4 (Explorando tópicos do estudo da função quadrática). Analisamos separadamente os casos $f(x) = a\ x^2$, $f(x) = a\ (x-b)^2$ e $f(x) = a\ x^2 + k$, e em seguida combinamos as conclusões.

O computador desempenha um papel importante ao permitir que um grande número de gráficos seja traçado com facilidade.

Em virtude disso, orientamo-nos pelo que recomenda Giraldo (2013, p. 72):

> [...] O objetivo das atividades não deve ser o de desenvolver ou avaliar a destreza dos alunos em traçar gráficos, e sim estimular a compreensão qualitativa do problema. Deve-se partir da exploração de um exemplo particular no ambiente gráfico, o que permite chegar a uma conjectura sobre a solução do problema. Em um segundo momento, verifica-se matematicamente a validade desta conjectura. Em seguida, volta-se ao computador para a interpretação gráfica do resultado e finalmente, generaliza-se o resultado, por meio de argumentos matemáticos.

Vale ressaltar que este texto não visa propor um tutorial de uso do *GeoGebra*, uma vez que as atividades explicitam claramente os procedimentos de uso para as ferramentas desse software. Manuais e tutoriais para o *GeoGebra* (software gratuito) se encontram disponíveis gratuitamente na internet.

4.3 Atividades

Um dos objetivos desse projeto foi consolidar o ensino das funções tratadas no 1^0 ano do ensino médio de forma integrada na prática com conteúdos da Física e da Biologia, mas partindo de situações e experiências exploradas nos livros didáticos ou do planejamento dos professores dessas áreas para a contextualização do conteúdo matemático relacionado, projetando a expectativa de mostrar o uso funcional deste último e minimizar o problema de correlação e aplicação entre os mesmos.

Os instrumentos usados para a coleta de dados experimentais devem ser, preferencialmente, selecionados (sob a orientação dos professores) pelos alunos após a apresentação da proposta de aula. Isso porque Bassanezi (2011, p. 8) diz que ensinar matemática tendo como pano de fundo alguma situação real é muito mais motivador quando as situações ou temas forem escolhidos pelos alunos. Porém, a pesquisa e busca dos experimentos contou com as sugestões dos professores das áreas envolvidas que também participaram em parceria durante as aulas práticas, enriquecendo e compartilhando conhecimento sobre os fenômenos estudados.

Em todas as experiências presentes nessa sequência didática, os procedimentos para desenvolver habilidades de identificação e obtenção do modelo algébrico, referentes às funções tratadas seguem pelas seguintes ações:

- Coleta de dados quantitativos através de um experimento e análise empírica de alguns questionamentos sobre os fenômenos estudados;

- Reconhecimento da função como modelo adequado à situação fazendo uso do processo de caracterização;

- Utilização de um método ou técnica para modelar a função;

- Validação da função através de ajuste de curvas no Editor de Planilhas do *Geogebra*;

- Utilização do modelo criado para responder a algumas questões levantadas na situação ou contexto estudado;

- Utilização das funções obtidas para exploração de tópicos relevantes ao estudo das funções no *Geogebra*.

Os experimentos usados são exemplos sugestivos onde se tem a pretensão de que as atividades agregadas sirvam como prática de incentivo ao professor de matemática em buscar outros experimentos que assim como esses possam ser pesquisados e aproveitados para o estudo contextualizado de tópicos da matemática do Ensino Médio, gerando situações problemas que aproximem o ensino dessa componente com as demais do currículo.

Considera-se também que o uso de experimentos e ou de aulas mais práticas no ensino dos conceitos matemáticos promovem melhor interação entre o aluno e o conhecimento aplicado, despertando-o para a investigação matemática e interesse em redescobrir o aprendizado, além do propósito de agregar conteúdos da Matemática com o das demais áreas, permitindo que o aprendizado matemático aconteça em situações contextualizadas.

Almeida, Silva e Vertuan (2013, p. 32) defendem (in Anne Reynolds e Grayson H. Wheatley) que, aprender Matemática é construir relações matemáticas, negociar os significados matemáticos com os outros e refletir sobre a sua própria atividade matemática. Assim, para esta proposta os alunos foram distribuídos em grupos a fim de promover o trabalho colaborativo e a socialização das ideias e do conhecimento. Nas atividades e problemas onde houve aplicação, sempre que necessário atribuiremos comentários, serão usadas letras A, B, C, D e E para remeter comentários e relatos dos alunos ou grupo de alunos.

4.3.1 ***Situação prática 1: Modelando o movimento de uma bola no plano horizontal***

(a) Atividade 1: Teste de velocidade

Objetivo: Mostrar algumas características de um movimento uniforme por meio de um experimento, dentre elas a de que, em qualquer intervalo de tempo, a velocidade escalar é constante.

Conteúdo: Proporcionalidade; taxa de variação entre grandezas; função afim.

Tempo Estimado: 2 aulas – 1h 40 min

Material necessário: 1 trilho de cortina de aproximadamente 2,5 m, com um trecho de aproximadamente 25 cm de uma das extremidades levemente recurvado, conforme a figura 29; 1 esfera de aço (pequena), 1 bolinha de gude ou 1 bola de sinuca; 1 cronômetro; 1 trena.

Figura 29: Experimento para teste de velocidade

Fonte: Autora, 2017.

Problema 1. *Determine os instantes* t *em que a esfera passa pelos pontos C, D, E e F, situados respectivamente a 25 cm, 50 cm, 75 cm e 100 cm do ponto B, no final da parte recurvada, considerando a origem dos espaços em A.*

Figura 30: Alunos coletando dados experimentais para o tempo de percurso da bola.

Fonte: Autora, 2017.

Para determinar esses diversos instantes, pode-se proceder da seguinte maneira:

1) Coloque um obstáculo no ponto C e abandone a esfera do ponto A, a extremidade recurvada do trilho, disparando o cronômetro no instante em que ela atinge o ponto B.

2) Meça o intervalo de tempo decorrido desde a passagem da esfera pelo ponto B até colidir com o obstáculo, em C. A seguir, passe o obstáculo para o ponto D e repita a experiência.

3) Siga o mesmo procedimento para os outros pontos, E e F.

4) Preencha a tabela com os valores dos espaços ***s*** *e os correspondentes instantes.*

Tabela 2: Dados brutos do experimento Teste de velocidade

Intervalos	Tempo (segundos)	Espaço (centímetros)	Velocidade
B e C	0,58	25 cm	0,43 m/s
C e D	0.60	25 cm	0,41 m/s
D e E	0,51	25 cm	0.49 m/s
E e F	0,55	25 cm	0.45 m/s
B e D	1,20	50 cm	0,41 m/s
D e F	1,13	50 cm	0,44 m/s

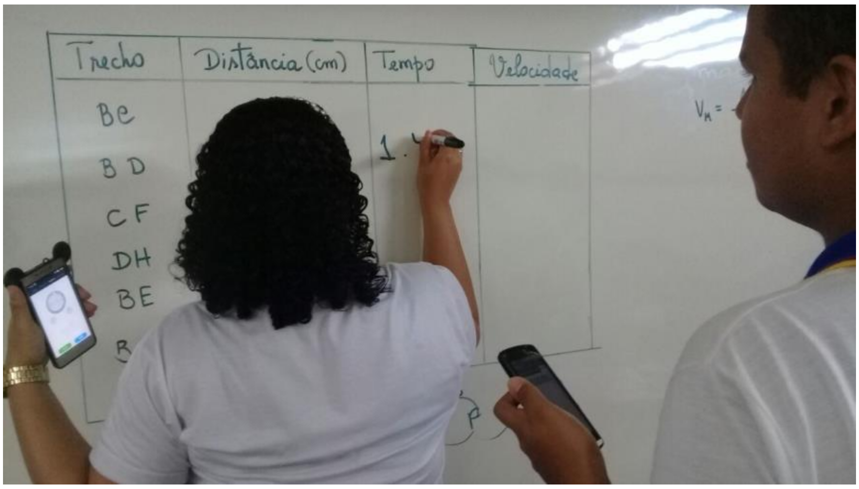
Fonte: Autora, 2017

Responda: Qual é a velocidade escalar média da esfera entre as passagens por B e C, C e D, D e E, E e F? E quanto a velocidade escalar média da esfera entre as passagens por B e D, e por D e F? Complete a tabela com as velocidades calculadas para os trechos indicados e descreva o que ocorreu com as mesmas. Como você classifica o movimento da esfera?

Para esta atividade, conceitos como ordem de grandeza (estimativa de valores), conversão de unidades de comprimento, espaço, referencial, velocidade e aceleração foram abordados fazendo-se uso de aulas expositivas executadas pelo professor de Física, pois são pré-requisitos para o estudo do movimento retilíneo uniforme.

Os dados brutos mostrado na tabela foram coletados de forma experimental pelos alunos do grupo[19]. O propósito foi fazer perceber, através da baixa variância entre as velocidades obtidas, que a velocidade durante o movimento da bolinha se mantém constante durante a trajetória retilínea no trilho usado, classificando o seu movimento como Retilíneo Uniforme, conforme é perguntado no final do problema 1.

Figura 31: Alunos registrando dados brutos do experimento.



Autora, 2017.

Todos os grupos preencheram a mesma tabela com suas respectivas medições implicando na obtenção de velocidades diferentes entre as tabulações, porém, em cada uma houve a possibilidade de observar o mesmo fenômeno. É importante orientar os alunos a não curvar demais a extremidade do trilho para não dificultar as tomadas de tempo (o ponto de partida deve ficar de 2 cm a 5 cm acima

[19] Os alunos devem ser divididos em grupos conforme o número de trilhos disponíveis.

do trecho horizontal). Foi preciso destacar para os alunos que as medições de tempo, fazendo-se uso do cronômetro em cada trecho de percurso, são aproximações apenas, e não exatamente aqueles que deveriam ser no momento exato da passagem da bolinha por um ponto e que isso interfere, portanto, nas velocidades obtidas, respectivamente. Considerando, sem perda de generalidade, que a velocidade da bolinha é constante, foi perguntado como em meio a todos os valores possíveis, decidir pelo melhor para a velocidade. Então, um aluno sugeriu fazer a média aritmética das velocidades, visto que são bem próximas, obtendo assim, no caso da tabela 2, *v=0,43 m/s* que será usada para fins explicativos da sequência, quando conveniente.

(b) Atividade 2: Relacionando a função afim e o movimento uniforme

Objetivos:

- Identificar e modelar a função horária do movimento a partir da caracterização da função afim observada na situação;
- Validar a função afim como modelo matemático do movimento estudado por meio de ajuste de curva.

Conteúdo: proporcionalidade; gráfico; cinemática, função afim, movimento retilíneo uniforme.

Tempo Estimado: 1 aula – 50 min

Material necessário: software Geogebra.

Problema 2 *Agora que você já sabe a velocidade em qualquer ponto da trajetória retilínea da prancha com a qual a esfera atingiria um obstáculo após* ***t*** *(segundos), situado a uma distância* ***s*** *(centímetros) do ponto B, que por sua vez se encontra a 25 cm do referencial A, descubra um modelo matemático adequado que determine* ***s*** *fazendo* ***t*** *variar.*

DESCRIÇÃO DOS PASSOS.

Para determinar o modelo matemático (função do espaço x tempo), deve-se seguir os seguintes passos:

I. Reconhecendo a função presente na situação ou fenômeno analisado

Escolhe-se tempos t_1, t_2,..., t_k *e calcula-se os respectivos espaços* $s(t_1)$, $s(t_2)$,...,$s(t_k)$ *utilizando a taxa de variação* $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_k) - s(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}$ *que é constante. Ou* *ainda, verifica-se se as sequências (t_k) e ($s(t_k)$) são progressões aritméticas, caracterizando tal função como afim.*

Dado que a posição inicial em B é s(*t_0*)=*0,25* metros, o tempo inicial t_0=0 segundos, e que o espaço s varia com o tempo t segundos v = 0,43 m/s, tem-se que,

$$\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=\frac{s(t)-0,25}{t}=v\Rightarrow s(t)=0,25+0,43t$$

após cada instante t considerado durante o movimento da bola. A partir daí, definiu-se função afim e em seguida, construiu-se uma tabela com as posições da bola após t = 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5; 5,5; 6; 6,5; 7, gerando a tabela de valores abaixo:

Tabela 3: Conjecturando o modelo da função para o fenômeno

T		s(t)	t		s(t)
0	0,25 + 0,43 .0	0,25	3,5	0,25 + 0,43 .3,5	1,755
0,5	0,25 + 0,43 .0,5	0,465	4	0,25 + 0,43 .4	1,970
1	0,25 + 0,43 .1	0,680	4,5	0,25 + 0,43 .4,5	2,185
1,5	0,25 + 0,43 .1,5	0,895	5	0,25 + 0,43 .5	2,400
2	0,25 + 0,43 .2	1,110	5,5	0,25 + 0,43 .5,5	2,615
2,5	0,25 + 0,43 .2,5	1,325	6	0,25 + 0,43 .6	2,830
3	0,25 + 0,43 .3	1,540	6,5	0,25 + 0,43 .6,5	3,045

Fonte: Autora, 2017

Então, questionou-se sobre o comportamento dos valores para o espaço à medida que os tempos relativos variam também. Foi fácil para os grupos perceberem que à medida que os valores de t têm acréscimos “somáticos” iguais a 0,5, os respectivos valores de s “sofrem” com acréscimos “somáticos” de 0,215, isto é, a função s(t) transforma a progressão aritmética 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5; 5,5; 6; 6,5 na progressão também aritmética 0,250; 0,465; 0,680; 0,895; 1,110; 1,325; 1,540; 1,755; 1,970; 2,185; 2,400; 2,615; 2,830; 3,045; 3,260, o que caracteriza ser tal função do tipo Afim.

Tabela 4: Variação simples da função s(t)

k	$s(t_{k+1})-s(t_k)$	Δs	K	$\Delta s = s(t_{k+1})-s(t_k)$	Δs
0	0,465 – 0,250	0,215	7	1,970 – 1,755	0,215

1	0,680 – 0,465	0,215	8	2,185 - 1,970	0,215
2	0,895 – 0,680	0,215	9	2,400 – 2,185	0,215
3	1,110 – 0,895	0,215	10	2,615 – 2,400	0,215
4	1,325 – 1,110	0,215	11	2,830 – 2,615	0,215
5	1,540 – 1,325	0,215	12	3,045 – 2,830	0,215
6	1,755 – 1,540	0,215	13	3,260 – 3,045	0,215

Fonte: Autora, 2017

Assim, os alunos se convenceram de que para cada situação existe mais ou menos uma matemática adequada para descrevê-la (Bassanezi 2011, p. 8), isto é, que situações onde configuram uma função com a propriedade descrita pode ser resolvida por uma função Afim.

II. Determinando o modelo algébrico para a função identificada

Utilize os pontos (a, b) e (t, s(t)) juntamente com a fórmula $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_k) - s(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}$ *para chegar à função s(t) que relaciona as variáveis s e* t*.*

A orientação sugere tomar, por exemplo, um par (2,5; 1,325) da tabela e sabendo-se que a taxa de variação da função afim é v = 0,43, substituir diretamente em $\frac{s(t_k) - s(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = v$. Para Bassanezi (2011, p.8), a apresentação e resolução de problemas clássicos ajudam a entender novos problemas e que modelar, nesse caso, passa a ser uma busca de analogias com situações conhecidas. Esse passo, da criação do modelo matemático pode ser também pela identificação de padrões, observando na tabela 3, a grandeza que varia no processo e a que se mantém fixo.

III. Identificação e validação da função modelada por ajuste de curvas num editor de planilha:

1) Abra a planilha do Geogebra em "Exibir" e construa uma tabela com os dados experimentais de s(t) e t.

Tabela 5: Dados experimentais do espaço em função do tempo.

Planilha

	A	B
1	t	s(t)
2	0	0.25
3	0.5	0.47
4	1	0.68
5	1.5	0.9
6	2	1.11
7	2.5	1.33
8	3	1.54
9	3.5	1.76
10	4	1.97
11	4.5	2.19
12	5	2.4
13	5.5	2.62
14	6	2.83
15	6.5	3.05

Fonte: Autora, 2017.

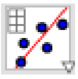
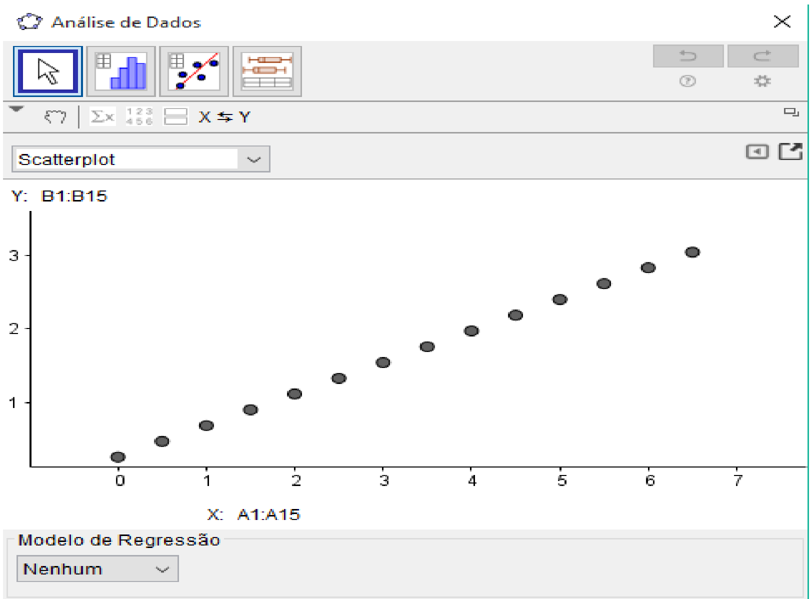
2) Selecione os dados da tabela e obtenha um gráfico clicando em inserir, opção  *análise bivariada.*

Figura 32: Gráficos de dispersão de pontos



Fonte: Autora, 2017.

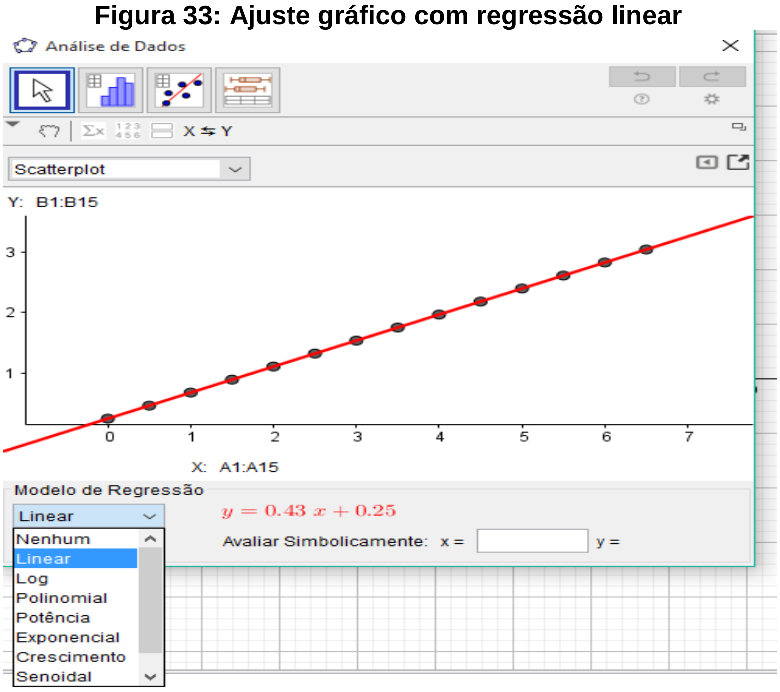
Os pontos gerados indicam que há uma função entre espaço e tempo. A partir da dispersão desses pontos é preciso determinar a curva que melhor se ajusta a esse conjunto de pontos.

3) Após gerar o gráfico, faça um ajuste de curva para achar o modelo gráfico de função que melhor se aproxima dos pontos gerados testando as opções disponíveis em "modelo de regressão".

Responda: Qual é a curva que melhor se ajusta ao conjunto de pontos correspondentes aos dados da experiência? O modelo algébrico corresponde à função obtida anteriormente?

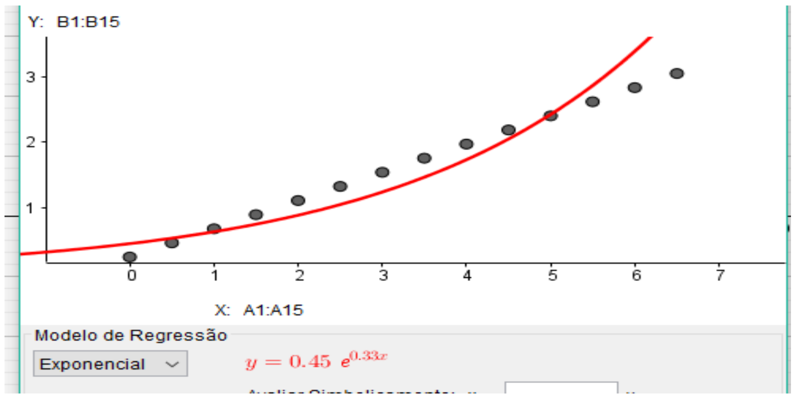
Nessa etapa, os alunos percebem que o ajuste linear consegue captar mais pontos do que, por exemplo, o ajuste polinomial ou o exponencial como mostram as figuras 33, 34 e 35.

Figura 33: Ajuste gráfico com regressão linear



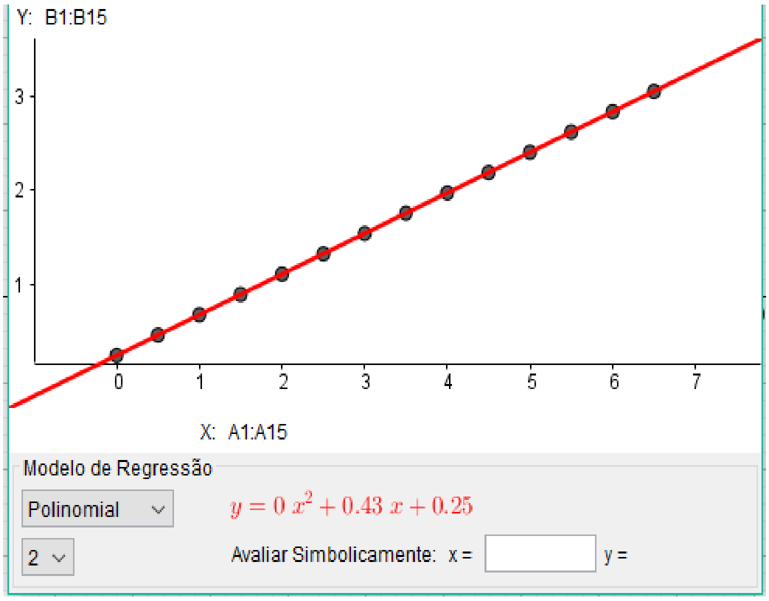
Fonte: Autora, 2017.

Figura 34: Modelo de regressão exponencial



Fonte: Autora, 2017.

Figura 35: Modelo de regressão polinomial



Fonte: Autora, 2017.

(c) Atividade 3: Explorando tópicos do estudo da função afim a partir dos modelos obtidos.

Objetivos:

- Relacionar o gráfico da função afim com aspectos da mesma no contexto do experimento aplicado.

- Relacionar taxa de variação com a inclinação do gráfico.

Conteúdo: gráfico; cinemática, função afim, taxa de variação, declividade ou inclinação da reta.

Tempo Estimado: 1 aula – 50 min

Material necessário: software Geogebra, papel para cálculo, slides das questões no PowerPoint.

Problema 3. *Utilizando a função obtida, responda a questões levantadas durante o experimento:*

(a) Na janela de visualização do Geogebra, selecione malha. Digite na caixa de entrada a função horária s(t), obtenha seu gráfico e a partir dele responda:

Qual é taxa de variação de s(t)? O que ela representa? Qual é o valor inicial de s(t)? Em que instante isso ocorre? Em que ponto da trajetória isso ocorre na experiência? Que tipo de função está relacionado a esse movimento?

(b) A que distância a esfera colidiria com obstáculos posicionados em pontos G, F e H se estes fossem atingidos após 10s, 12s e 17s, respectivamente, desde a passagem pelo ponto B?

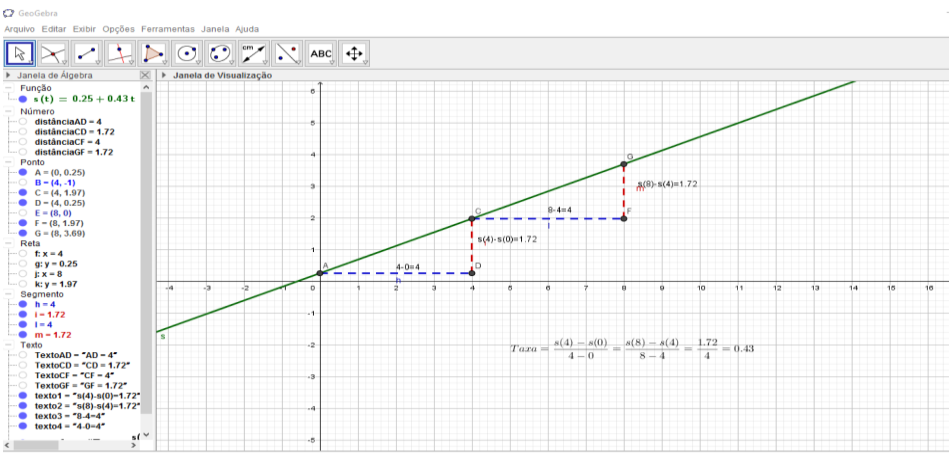
(c) Qual seria a modificação no aspecto do gráfico obtido se o trecho AB fosse mais recurvado, de modo que a distância do ponto A ao plano horizontal fosse maior? Nesse caso, que característica cinemática do movimento, a partir do ponto B, seria modificada?

(d) Uma bolinha b_2 desloca-se a v_2 cm/s, indo no mesmo sentido de uma bolinha b_1 que se movimenta a v_1 cm/s, na rampa. (Lance duas bolinhas diferentes na rampa da atividade 1, conforme descrito e obtenha v_1 e v_2.) Em certo instante, a bolinha b_1 encontra-se no ponto D à frente da bolinha b_2 no ponto B. Em quanto tempo, a partir do ponto B, a bolinha b_1 será alcançada por b_2? Em que posição da rampa, ocorrerá o encontro das duas bolinhas?

Observação: Resolva o problema através das funções horárias para o deslocamento das bolinhas.

Após a identificação e a modelação da função afim para o movimento da bolinha no trilho, extraímos da situação, questões pertinentes ao contexto, fazendo-se utilização dos modelos algébricos e o ambiente de geometria dinâmica do Geogebra. No item (a), o professor explora graficamente a relação entre as grandezas tempo e deslocamento, isto é, o comportamento da função s(t) observando-se a taxa de variação como mostra a figura. No item (b), usou-se o modelo s(t) = 0,43 t +0,25 para t= 10, 12, 17, isto é, s(10) = 0,43 . 10 + 0,25 = 4,55, s(12) = 0,43 . 12 + 0,25 = 5,41 e s(17) = 0,43 . 17 + 0,25 = 7,56.

Figura 36: Relação gráfico x função s(t).



Fonte: Autora, 2017.

Esses tópicos são uma boa oportunidade para mostrar que a inclinação da reta obtida está relacionada com a velocidade da bolinha em movimento como o questionamento feito no item (c). Após ter traçado o gráfico, o aluno é levado a prever como fica o mesmo gráfico se o ponto A, o ponto de partida, estiver mais alto ou mais baixo. Como a velocidade é a taxa de variação de s(t) aumenta ou diminui quando a extremidade do trilho fica mais ou menos recurvada, respectivamente, a inclinação da reta dada pela tangente do ângulo de inclinação ∝, isto é, tg(∝)= 0,43=v sofre alteração. No item (d), conforme o procedimento apresentado tem-se $v_1 = 0{,}43\, m/s$ *e* $v_2 = 0{,}50\, m/s$, em que as bolinhas se encontram a 0,50 m de distância, uma da outra. A origem dos espaços que adotamos é a posição inicial da bolinha b_2 e trajetória orientada de B para D.

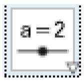
Assim, as funções são $s_2(t) = 0{,}53\ t$ e $s_1(t) = 0{,}43\ t + 0{,}5$. No encontro, temos,

$$s_1 = s_2 \Rightarrow 0{,}43t + 0{,}5 = 0{,}53t \Rightarrow t = 5 \text{ segundos.}$$

O encontro das bolinhas ocorre em t = 5s. Então, substituindo esse tempo em qualquer uma das funções, obtém-se $s_1(5) = 0{,}53 \cdot 5 = 2{,}65$ m.

Problema 4. *Relação entre o gráfico e os coeficientes envolvidos na função afim*

a) Trace os gráficos das funções $h_1(x) = \frac{1}{2}x - 2$, $h_2(x) = \frac{1}{2}x - 1$, $h_3(x) = \frac{1}{2}x$ *e* $h_4(x) = \frac{1}{2}x + 1$ *em um mesmo sistema de eixos. Tire conclusões sobre os aspectos das retas entre elas e em relação ao eixo y.*

b) Em uma nova janela, clique no botão 

*e crie um controle deslizante **a**, de modo este tenha mín* -4 *e max* 4*. Na caixa de entrada, digite a função* $h(x) = ax + 3$ *e obtenha o gráfico. Responda o que ocorre com o gráfico quando fazemos o coeficiente angular a variar? O que ocorre com o gráfico da função afim quando fazemos a=0?*

(d) Atividade 4: Identificando e determinando o modelo linear em outras situações.

Objetivo: Aplicar os conhecimentos adquiridos para identificar e modelar a função apropriada para o problema.

Conteúdo: Caracterização da função afim; parâmetros da função, resolução de equações do 1^0 grau.

Tempo Estimado: 1 aula – 50 min

Material necessário: Folha do aluno (atividade impressa).

Tendo em vista as explanações sobre a caracterização da função afim feitas nos tópicos anteriores, apresentamos para os alunos a título de ilustração uma atividade relacionada ao movimento uniforme e outra a um problema de vazão de água em um tanque.

Problema 1. A tabela abaixo mostra a variação de posição de um trem que passava no quilômetro 40 de uma ferrovia quando o movimento começou a ser observado (t=0).

Tempo (horas)	0	1	2	3	4
Espaço (km)	40	70	100	130	160

Depois de quanto tempo após o início da viagem, o trem passou pelo quilômetro 120 da ferrovia?

Problema 2. Uma caixa d´água tem capacidade para 1000 litros. Quando ela está com 200 litros, uma torneira é aberta e despeja na caixa 25 litros por minuto. A quantidade de água na caixa para os cinco primeiros minutos são registrados em uma tabela.

Tempo (minutos)	0	1	2	3	4	5
Quantidade de água no tanque (litros)	200	225	250	275	300	305

a) De acordo com esses dados, que tipo de função descreve a relação entre a quantidade de água y (em litros) com o tempo x (minutos)?

b) Obtenha a função que relaciona as variáveis x e y.

c) Em quanto tempo a caixa estará totalmente cheia?

4.3.2 ***Situação prática 2: Modelando o movimento de projéteis lançados pelo Trebuchet***

Nesta oficina, os dados utilizados para a identificação e obtenção da função quadrática como modelo no contexto do lançamento oblíquo são obtidos a partir de arremessos de projéteis testados em uma catapulta chamada Trebuchet construída com hashis[20] através da qual se tem a pretensão de fazer com que eles atinjam um castelo de cartas como alvo. Esta ação nos leva, a princípio, investigar formas de aperfeiçoar o arremesso para obter o alcance necessário. Nesse processo, os alunos podem compreender na prática a relação das características do movimento estudado com a parábola (observando aspectos da trajetória com as variáveis relacionadas como velocidade, altura do projétil, tempo de percurso, ângulo do lançamento e aceleração). Esse experimento possibilitou a coleta de dados sobre as variáveis altura e tempo, relacionadas no modelo matemático que se pretende investigar.

Diferentemente da sequência como o modelo algébrico e o modelo geométrico da função aparecem nos livros didáticos, exploramos a parábola em seu aspecto geométrico e analítico, antes de apresentá-la como o gráfico da função quadrática, o que minimiza equívocos de visualização por parte dos alunos ao confundirem essa cônica com outras curvas de aparência “semelhante”, ambiente de validação da construção proposta para a parábola bem como no estudo dos efeitos causados pelos parâmetros da função em conjuntura com o *GeoGebra*.

Como se esperava, o cálculo de distância entre dois pontos e habilidades com as coordenadas no plano cartesiano não foram obstáculos dificultosos uma vez que estes foram objeto manipulativo da primeira situação prática. No entanto, ao remeter as atividades no *GeoGebra*, alguns alunos apresentaram problema para reconhecer e acessar algumas ferramentas o que se fez necessário, fazer uma aula de treinamento para reconhecimento e aprendizagem de uso das ferramentas necessárias para a realização dessas atividades.

(a) Atividade 1: Construção da parábola com eixo focal OY

A atividade foi iniciada com a construção da parábola no problema 1 fazendo-se uso de papel quadriculado, régua, esquadro e compasso. No problema

[20] Os hashis, popularmente conhecidos como pauzinhos ou palitinhos, são varetas que muitos países da Ásia utilizam para comer diariamente suas refeições.

2, tratamos da validação de propriedades repetindo os passos anteriores no ambiente de geometria dinâmica Geogebra. Em seguida, obtivemos no problema 3, o modelo analítico da curva através do cálculo de distância entre pontos aplicando a propriedade verificada (distância de um ponto genérico pertencente à curva e o foco, igualada à distância do mesmo ponto à diretriz) . Essa atividade aporta apenas o caso de parábola com o vértice na origem e eixo focal OY. Os conceitos sobre mediatriz, posição relativa de retas no plano, simetria axial entre pontos foram previamente recordados, o que fez minimizar dificuldades nos alunos em manipular as ferramentas no software Geogebra. Este por sua vez, apesar de ser um ambiente bastante intuitivo, reforçamos a importância de adentrar algum domínio sobre suas ferramentas ou pelo menos aquelas que estão vinculadas com a atividade proposta.

Objetivos:

- Construir uma parábola no Geogebra compreendendo a propriedade que a caracteriza;
- Obter a equação de uma parábola analiticamente para a posteriori relacioná-la com o gráfico da função quadrática.

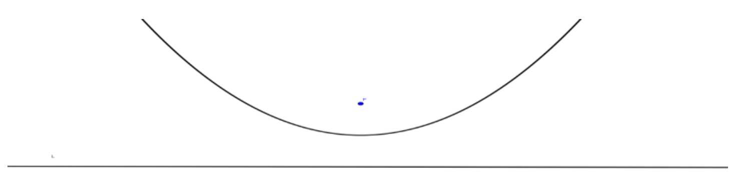
Conteúdos: Mediatriz; Reta perpendicular; Distância entre dois pontos no R^2; Plano cartesiano (R^2); Produtos notáveis.

Tempo Estimado: Problemas 1 e 2: 2 aulas de 1 h 40 min (para cada problema); Problemas 3, 4 e 5: 2 aulas de 1h 40 min no total.

Material necessário: Régua, esquadro; compasso; software Geogebra; papel quadriculado.

Problema 1. *Construa com régua e compasso uma curva P do plano, formada por pontos que distam igualmente de uma reta horizontal L e um ponto F não pertencente a L, fixados.*

Figura 37: Curva P



Fonte: Autora, 2017.

DESCRIÇÃO DOS PASSOS.

1) Trace duas retas perpendiculares l e L (sendo l vertical e L horizontal), marcando sobre l o ponto F distante 8 centímetros de L (use o macro do papel). Considere o ponto O tal que $l \cap L = \{O\}$.

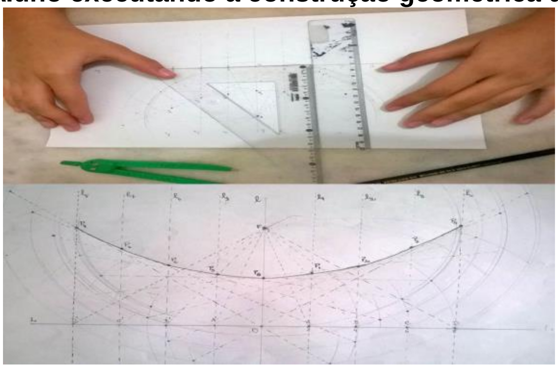
2) Marque sobre a reta L, os pontos A, B, C e D, distantes de O, 2 cm, 4 cm, 6 cm e 8 cm, respectivamente. Analogamente, obtenha pontos A, B, C e D, simétricos de A, B, C e D em relação à reta l.

3) Trace a reta $l_1 \perp L$ em A e em seguida obtenha o segmento $\overline{FA}$.

4) Com a abertura do compasso igual a $\overline{FA}$, centre-o em F e gire-o para cima e para baixo obtendo um círculo de centro em F. Em seguida, centre o compasso com a mesma abertura em A e repita o procedimento obtendo duas interseções entre os círculos, encontrando a mediatriz de $\overline{FA}$. Denote por P_1 a interseção da mediatriz com l_1.

5) Repita o passo 4 para os pontos B, C, D, O, A', B', C' e D' obtendo P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8 e P_9 sobre a reta L. Ligue todos os pontos P_k ($k = 1, 2, 3, \ldots, 9$) e obtenha a curva chamada Parábola.

Figura 38: Aluno executando a construção geométrica da parábola.



Fonte: Autora, 2017.

Responda os itens que seguem usando o problema 1.

(a) Compare a distância entre F e P_k com a distância de P_k com a reta P_k. Que propriedade deve ter um ponto do plano, assim como P_0, P_2, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8 e P_9 para pertencer à parábola construída?

(b) Na parábola P, destacamos como seus elementos:

Reta focal: l

Foco: F

Vértice: P_0

Parâmetro (d(F, L))): 8 centímetros

Problema 2. *Construa no Geogebra a parábola* P *do problema 1 para validar a sua propriedade característica .*

DESCRIÇÃO DOS PASSOS.

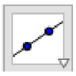
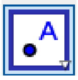
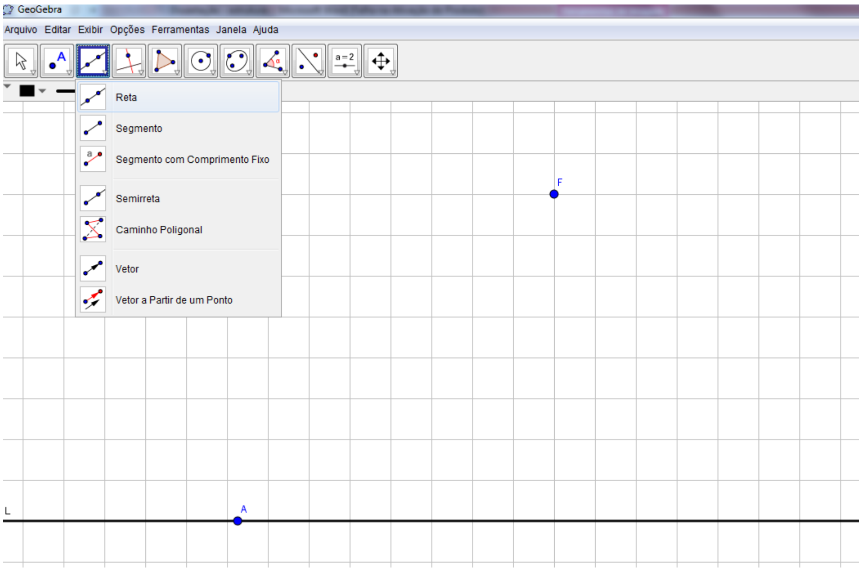
1) Desabilite eixos e habilite malha na janela de visualização do Geogebra. Clique no botão  *e selecione a ferramenta reta. Trace a reta horizontal L sobre uma das linhas que compõem a malha. Em seguida, clique no botão*  *e produza um ponto F acima e distante 8 cm de* L *.*

Figura 39: A reta L e o ponto F fora dela.



Fonte: Autora, 2017.

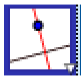
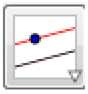
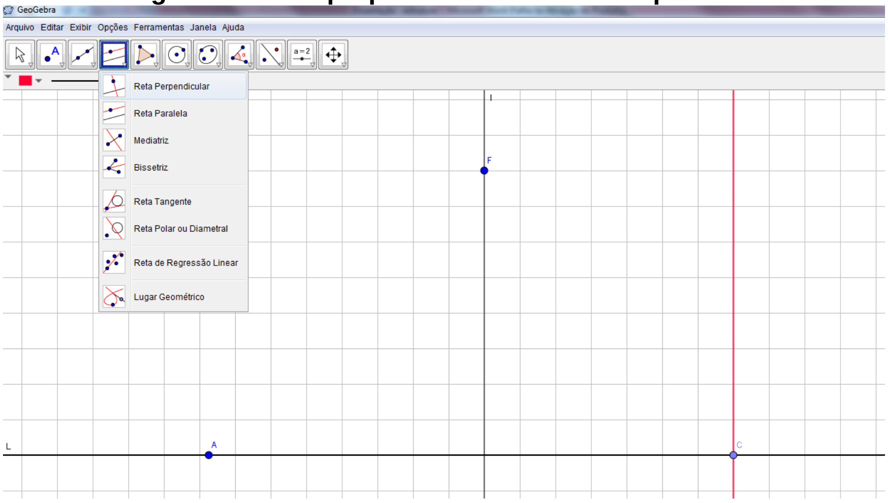
2) Crie uma reta l *por* F *, perpendicular à* L *usando a ferramenta* *. Com o botão*  *produza também uma reta paralela a* l *e intersectando* L *no ponto C, localizado à direita e distante 6 cm de* l*.*

Figura 40: Reta perpendicular à reta L no ponto C.



Fonte: Autora, 2017.

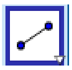
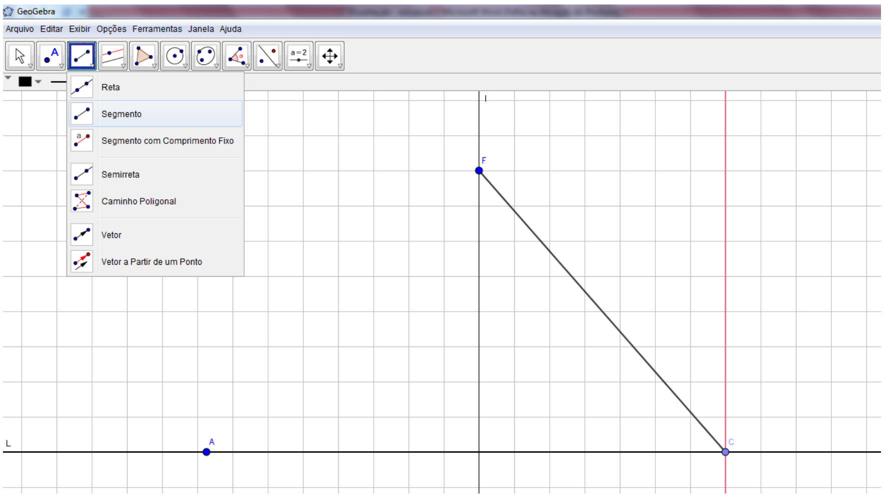
3) Com a ferramenta  *construa o segmento* $\overline{FC}$ *.*

Figura 41: Segmento FC.



Fonte: Autora, 2017.

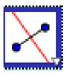
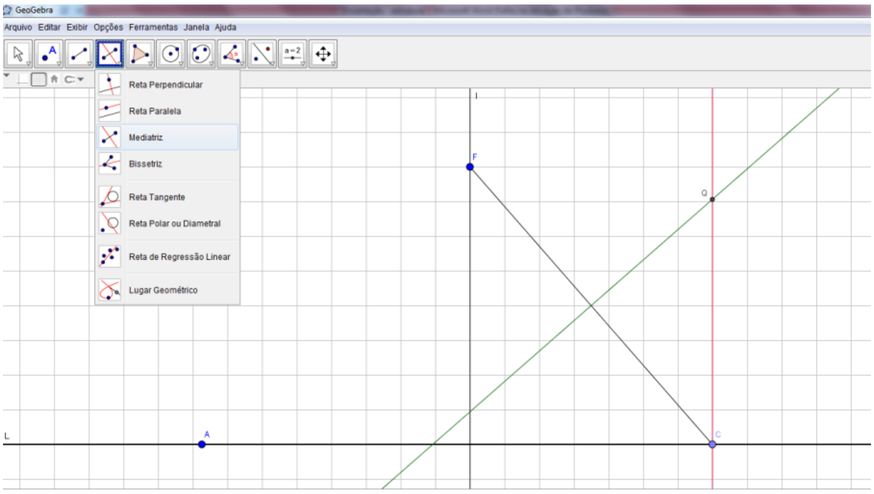
4) Selecione a ferramenta  *e trace a mediatriz de* $\overline{FC}$ *obtendo o ponto* Q *de interseção dela com a reta perpendicular.*

Figura 42: Mediatriz do segmento FC.



Fonte: Autora, 2017.

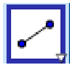
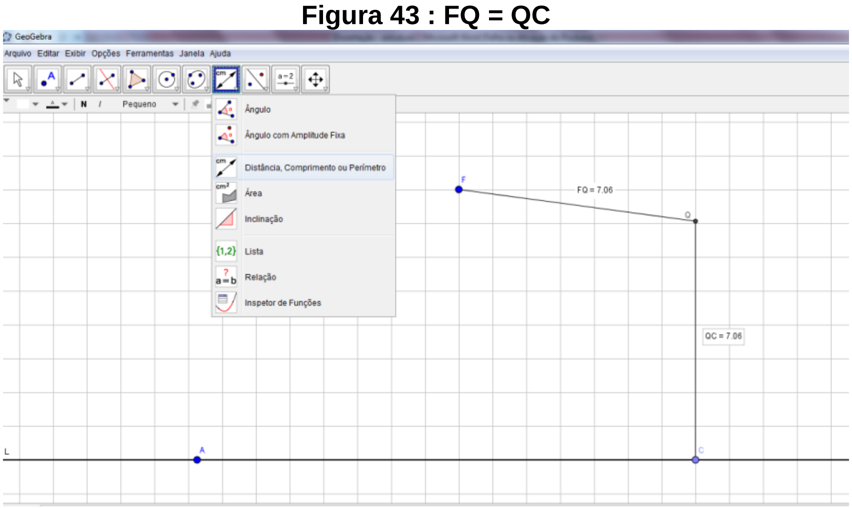
5) Faça esconder todas as retas com o botão esquerdo do mouse: clique sobre os objetos e marque a opção EXIBIR. Com a ferramenta  *construa o segmento* $\overline{FQ}$ *e* $\overline{QC}$*. Meça esses segmentos com a ferramenta* .

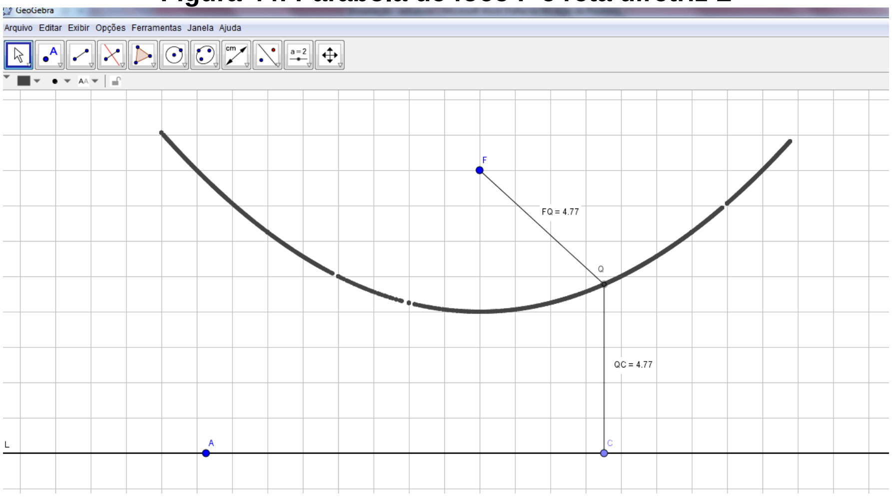
Figura 43 : FQ = QC



Fonte: Autora, 2017.

6) Selecione HABILITAR RASTRO clicando sobre Q com o botão esquerdo do mouse. Em seguida, mova o ponto C *ao longo da reta diretriz* L.

Figura 44: Parábola de foco F e reta diretriz L



Fonte: Autora, 2017.

7) Defina parábola a partir da figura descrita pelo rastro no passo 6.

Problema 3. *Fixe o sistema de eixos coordenados na construção do problema 1 fazendo o vértice* V *coincidir com a origem; isto é;* $V=(0\ ;\ 0)$ *e, a reta focal* l *com* OY*. Sabendo que* $F=(0\ ;\ 4)$*. Use a fórmula de distância entre dois pontos e determine a equação da parábola* P*. Observação:* $d(V\ ;\ F)=d(V\ ;\ L)=4$*.*

Observe a janela algébrica do Geogebra e confira o modelo analítico que você obteve para a parábola P.

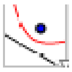
Solução: Consideremos um ponto genérico S *pertencente à parábola* P *e seja* $C=(x\ ;\ -4)$ *o a projeção de* S *sobre a diretriz* L*. Então,*

$$d(S\ ;\ F)=d(S\ ;\ C)\Rightarrow\sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(-y-4)^2}$$
$$\Rightarrow\left(-y^2-8y-16\right)+\left(y^2-8y+16\right)=-x^2$$
$$\Rightarrow y=\frac{1}{8}x^2$$

Logo, a parábola P tem equação $y=\frac{1}{8}x^2$.

Problema 4. *Determine a equação da parábola* P' *com vértice na origem, cujo foco é* $F=(0\ ;\ -2)$ *e parâmetro igual a* 2*.*

Desafio: O que acontece com a parábola quando se move seu foco ao longo da reta focal? Explique.

Construa as parábolas dos problemas 3 e 4 no Geogebra para auxiliá-lo utilizando as ferramentas de ponto para o foco F e reta para a reta diretriz. Selecione o botão  *para "plotar" a parábola.*

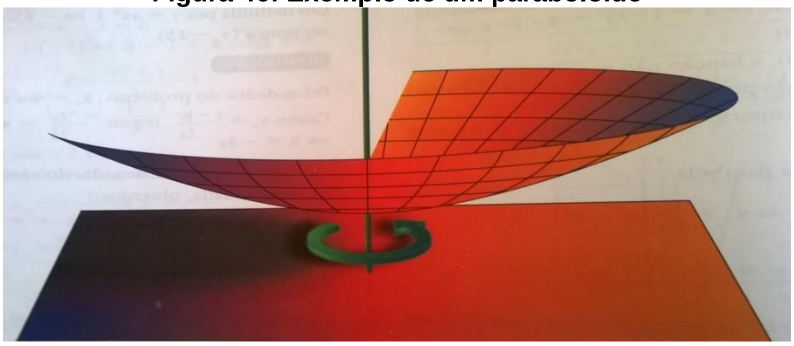
Problema 5. *(Ampliando o conhecimento)*

(Giovanni,2013, p.152) Muitas vezes podemos observar, no alto de casas ou prédios, antenas conhecidas como parabólicas. O nome dado a esse tipo de antena tem relação com seu formato, que deriva da rotação de uma parábola sobre seu eixo de simetria.

Figura 45: Antena parabólica de tv.

Fonte: Gionvanni,2013.

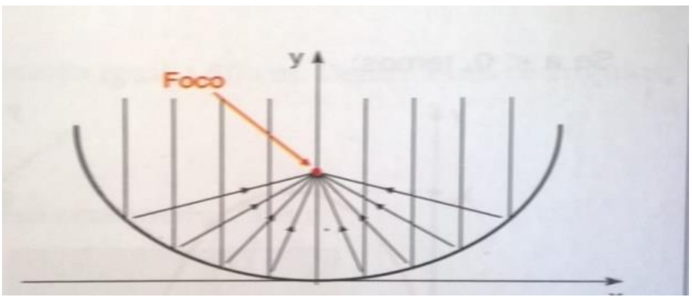
Figura 46: Exemplo de um paraboloide



Fonte: Giovanni,

Os paraboloides têm muitas aplicações na Física, por apresentarem propriedades importantes. Uma delas é o fato de que qualquer conjunto de ondas paralelas que chega a sua superfície interna é refletido para seu foco, conforme o esquema abaixo.

Figura 47: Conjunto de ondas paralelas que chega à superfície interna de um paraboloide e é refletido para seu foco.



Fonte: Giovanni, 2013.

Dessa maneira, uma antena parabólica de TV tem a propriedade de aumentar a capacidade de capitação do sinal, pois o conjunto de sinais de TV que chegam paralelamente à sua superfície interna é refletido para o foco, onde se encontra o decodificador que gera imagens.

De que forma a distância focal de uma parábola está relacionada com o aumento de captação de sinais do satélite? O desafio anterior ajuda a responder essa questão? Explique.

(b) Atividade 2: Construção do Trebuchet e simulação de lançamentos oblíquos .

Objetivo: Usar e aplicar recursos matemáticos na construção da catapulta Trebuchet;

Conteúdos: Congruência de triângulos; triângulos semelhantes.

Tempo Estimado: 4 aulas – 3h

Material necessário:

- 10 hashis; fita adesiva;
- Cola quente;
- Barbante;
- Contrapeso de balança (200 g);
- Três “porcas” de tamanhos diferentes para serem os projéteis;
- Arame fino;
- Dois clips.

Figura 48: Material para o Trebuchet

Fonte: Autora, 2017.

Procedimento para a construção do Trebuchet[21]:

Durante a construção da catapulta é bastante viável explorar a riqueza matemática dos conteúdos que são aplicados para justificar os procedimentos condizentes com o bom funcionamento do equipamento como angulações, instabilidade dos palitos colados, resultante da disposição triangular dos mesmos, etc.

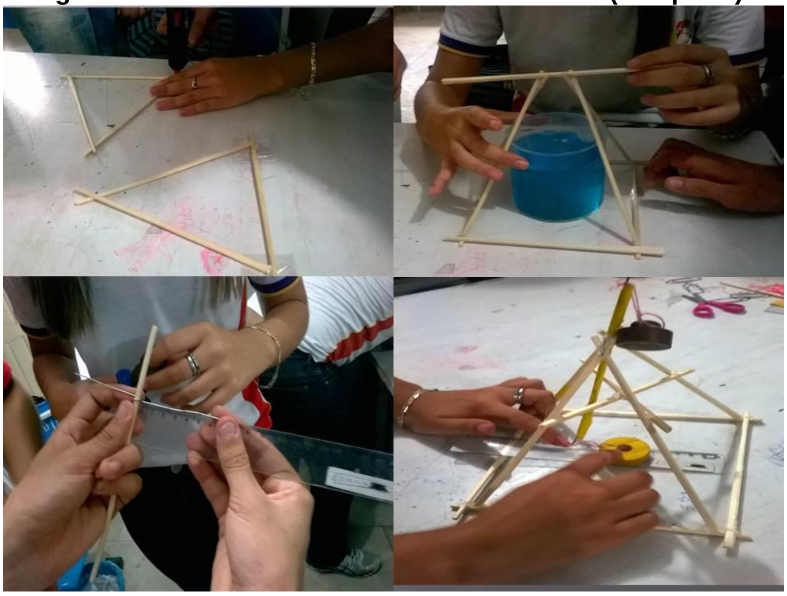
A estrutura básica do Trebuchet são dois triângulos idênticos feitos de palitos em que os laterais são cruzados, um sobre o outro no topo enquanto na base devem apenas “encostar”. Reserve 2 cm de comprimento na base (ver figura 49) a partir do ponto onde se pretende colar os palitos laterais. Use fita adesiva embaixo do local onde vai colocar cola quente para que os palitos não escorreguem. Reforce a

[21] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=y_wFkAuNoVY

colagem nas junções da estrutura, mas na base a cola não deve passar para baixo do palito.

Depois da secagem, junte os dois triângulos conforme a lateral de uma pirâmide, prendendo-os na mesa com fita adesiva. Complete a base retangular do Trebuchet com palitos a uma distância menor que um hashi entre os triângulos. Em seguida, separe os triângulos no topo, mantendo-os a uma distância de 2 cm. Utilize um pote cilíndrico como apoio para manter essa distância entre os triângulos no topo da pirâmide e verifique o nível de equilíbrio entre eles com a ajuda de um palito.

Figura 49: Alunos construindo um Trebuchet (catapulta).



Fonte: Autora, 2017.

Utilizando o mesmo pote cilíndrico de apoio, encaixe dois palitos sobre ele a certa altura como se fossem retas concorrentes em uma seção paralela ao plano da base do Trebuchet. Reforce com cola.

(c) Atividade 3: Criando o modelo matemático que descreve o lançamento na atividade 2.

Objetivos:

- Coletar dados de forma experimental, fazendo-se o registro deles em tabelas que informem sobre valores e variações simples quanto alcance, tempo da trajetória e altura máxima do lançamento aplicado.

- Compreender as características do lançamento oblíquo através do experimento na prática;

- Identificar o comportamento do modelo (função quadrática) que se pretende obter, analisando valores e variações simples por meio da reprodução de tabelas e caracterização;

- Compor o modelo matemático algébrico do lançamento aplicando a propriedade geométrica da parábola em conjunto com outros a fórmula de distância entre pontos no plano R^2;

- Validar a função modelada confrontando dados reais coletados no experimento com os valores do modelo por meio de ajustes de curvas no GeoGebra.

Conteúdos: Distância entre dois pontos; Produtos notáveis; Equação da Parábola; Função quadrática; Parâmetros da função quadrática e o gráfico.

Tempo Estimado: 4 aulas – 3h

Material necessário: atividade impressa; software GeoGebra; papel sulfite; régua.

Após a etapa de construção do Trebuchet, os alunos foram orientados a pesquisar sobre as características do lançamento oblíquo e apresentar situações em que esse movimento está presente.

Figura 50: Alunos expondo pesquisa sobre o Lançamento Oblíquo.

Fonte: Autora, 2017.

As informações obtidas deram base conceitual para extrair respostas às questões levantadas sobre aspectos construtivos do instrumento e da eficácia quanto a sua execução. Na etapa dos arremessos, exploramos o ângulo e o alcance pretendido para diferentes projéteis (bola de gude, borracha escolar, bola colorida sintética, etc) fazendo a filmagem dos lançamentos posicionando um fundo quadriculado desenhado no quadro branco.

Figura 51: Preparação para os arremessos na catapulta.

Fonte: Autora, 2017.

Para determinar o modelo matemático (função do deslocamento vertical x tempo), você deve seguir os seguintes passos:

IV. Reconhecendo a função presente na situação ou fenômeno analisado

Filme o lançamento dos projéteis, deixando ao fundo da filmagem um quadriculado de cartolina ou material que preferir (quadrado de 10 cm x 10 cm, preferencialmente). Depois, pausando o vídeo diversas vezes, obtenha as coordenadas $(t\ ,h(t))$ *de uma quantidade razoável de pontos da trajetória usando proporção entre as medidas das alturas que o projétil atingiu no vídeo e na realidade.*

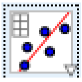
Organize os dados coletados durante o lançamento em uma tabela de forma a obter as sequências, t_1, t_2 , ..., t_k, ... *e* $h(t_1)$, $h(t_2)$, ..., $h(t_k)$, ..., *verificando se a sequência de termos* $y_{k+1}=h(t_{k+1}) - h(t_k)$ *para o inteiro* $k \geq 0$ *formam uma progressão aritmética de primeira ordem, caracterizando tal função como quadrática.*

V. Determinando o modelo algébrico para a função identificada

Sabendo que a função é quadrática, basta tomar três desses pontos e substituir as coordenadas na função $h(t)=at^2+bt+c$ *a fim de determinar os parâmetros a, b e c resolvendo um sistema de equações para tais parâmetros.*

VI. Identificação e validação da função modelada por ajuste de curvas no GeoGebra:

1. *Abra a janela do Geogebra e construa uma tabela de valores com os dados coletados no experimento (tabela 6).*

2. *Obtenha um gráfico clicando em inserir, opção* *, análise bivariada.*

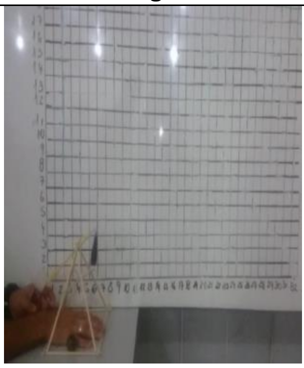
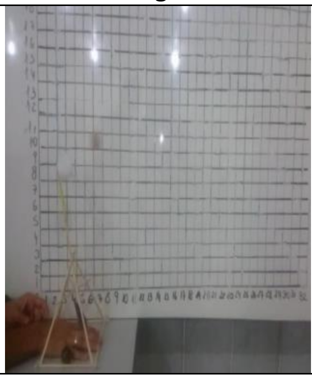
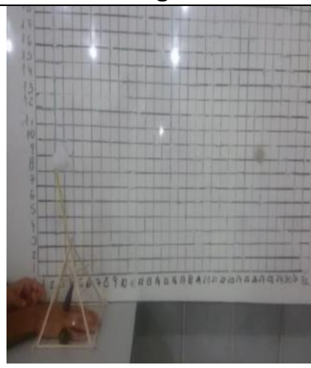
3. *Após gerar o gráfico, faça um ajuste de curva para achar o modelo gráfico de função que melhor se aproxima dos pontos "plotados" testando as opções disponíveis em "modelo de regressão", clicando nas opções disponíveis tais como linear, polinomial e exponencial.*

Responda: Qual é a curva que melhor se ajusta ao conjunto de pontos correspondentes aos dados da experiência? O modelo algébrico corresponde à função obtida anteriormente?

Neste experimento, a quantidade de aferições para obtenção dos pontos $(t\ ,h(t))$ vai depender do arremesso e do alcance atingindo pelo projétil que geram o tempo total no vídeo. Aqui, os alunos conseguiram, através do tempo indicado na própria filmagem, obter as alturas da bola arremessada em apenas três pontos da trajetória (para t = 0, 1 e 2 segundos), ocasionando uma modificação na ordem dos procedimentos onde se pretendia, através da caracterização, identificar o tipo de função relacionada ao fenômeno analisado, no qual para isso é necessário uma quantidade maior de pontos. Então, foi necessário, a priori, usar o ajuste de curvas para identificar a função quadrática e em seguida, o modelo algébrico para aprender a caracterização dela.

Para a determinação das alturas atingidas pela bola em 0 s, 1 s e 2 s, pausaram o vídeo e calcularam de forma proporcional as alturas reais como seguem:

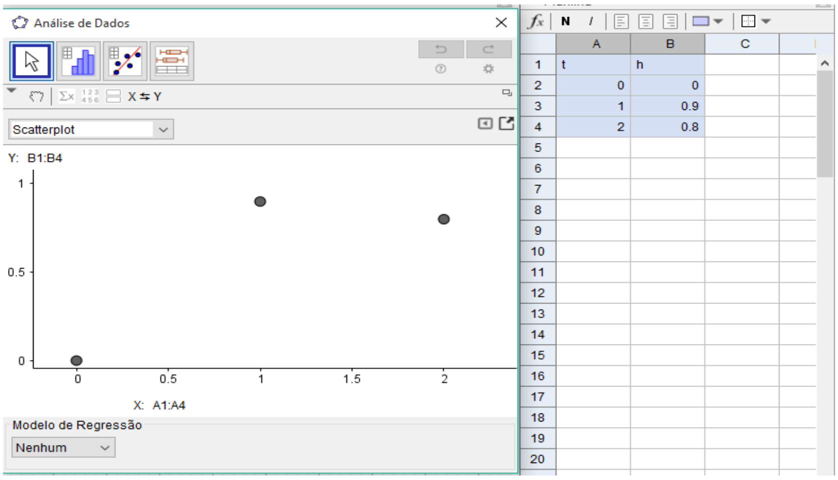
Tabela 6: Obtenção das alturas atingidas pelo projétil na catapulta.

t= 0 segundos	t= 1 segundos	t= 2 segundos
		
h =10 cm . 0 unidades	h =10 cm . 9 unidades	h =10 cm . 8 unidades
h = 0 cm = 0.0 m	h = 90 cm = 0.9 m	h = 80 cm = 0.8 m

Fonte: Autora, 2017.

Em seguida, os dados geraram o gráfico de dispersão da figura 52 que aponta a existência de uma função.

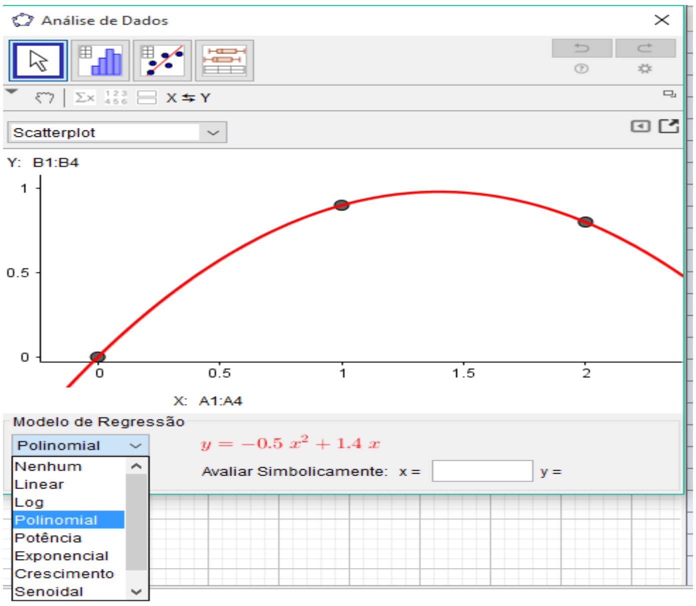
Figura 52: Gráfico de dispersão de pontos para o modelo polinomial



Fonte: Autora, 2017.

Pelo ajuste de curva é fácil ver que dentre os testes com a escolha dos modelos de regressão, o que mais se aproxima dos pontos "plotados" é o modelo polinomial de dimensão 2 que compreende um modelo de uma função quadrática.

Figura 53: Ajuste de curva por uma função quadrática



Fonte: Autora, 2017.

A partir da função *y*= *-0,5 x*^{2} + *1,4x*, construímos as sequências x_n, y_n, Δy e $\Delta(\Delta y)$ conforme mostra a tabela 7.

Tabela 7: Sequências de dados para a caracterização da função y = -0,5 x²+ 1,4x

x_n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**...**
y_n	0,9	0,8	-0,3	-2,4	-5,5	-9,6	-14,7	-20,8	...
$\Delta y = y_{n+1} - y_n$	-0,1	-1,1	-2,1	-3,1	-4,1	-5,1	-6,1	...	...
$\Delta(\Delta y) = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$	-1	-1	-1	-1	-1	...	...	...	...

Fonte: Autora, 2017

Outra vez, como os alunos ainda não estudaram o conceito de progressão aritmética, foram orientados a observar a regularidade da sequência Δy, e consequentemente, convencidos de que à medida que os valores x_n sofrem acréscimos de 1 unidade, os valores de $\Delta y = y_{n+1} - y_n$ sofrem acréscimos constantes, sendo suficiente para identificar uma função como quadrática.

Foi uma ótima oportunidade de explorar o modelo matemático determinado para responder a questionamentos sobre a altura máxima atingida pela bola no lançamento, seu alcance máximo e o tempo de permanência no ar, os quais não seriam possíveis pelo vídeo produzido.

Analisaram que quando a bola retorna ao solo, sua altura é nula, isto é, h(t) = 0, donde se tem que, $-0,5t^2 + 1,4t = 0 \Rightarrow t\ .(-0,5t + 1,4) = 0 \Rightarrow t = 0\ s$ e $t = 2,8\ s$, os zeros da função. Como a trajetória da bola é uma parábola, esta última possui um eixo de simetria (atividades 1 e 2) que passa pelo ponto $(k\ ;\ 0)$, intersecção entre o eixo de simetria e o eixo t. Temos também que, os pontos $(0\ ;\ 0)$ e $(2,8\ ;\ 0)$ são equidistantes de $(k\ ;\ 0)$, daí obtém-se k calculando a média aritmética das abscissas $0\ \ e\ \ 2,8$ dos pontos $(0\ ;\ 0)$ e $(2,8\ ;\ 0)$. Assim, tem-se que

$$t = k = \frac{0 + 2,8}{2} \Rightarrow k = \frac{2,8}{2} \Rightarrow k = 1,4$$

Substituindo $k = 1,4$ na lei da função, calcula-se a altura máxima $h_{máx}$:

$$h_{máx} = -0,5t_v^{\ 2} + 1,4t \Rightarrow h_{máx} = .-0,5(1,4)^2 + 1,4.(1,4) \Rightarrow h_{máx} = 0.98 \quad metros.$$

O ponto $(1,4\ ;\ 0.98)$ é o vértice da parábola, que neste caso é um ponto de máximo.

(d) Atividade 4: Explorando tópicos da função quadrática.

Objetivos: - Entender a influência gráfica dos parâmetros a, b e c da função quadrática s(t) = a t^2 +bt +c;

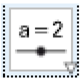
- Obter translações verticais e horizontais da parábola;
- Obter o eixo de simetria da parábola;
- Relacionar as coordenadas do vértice e os parâmetros da função.

Conteúdos: Função quadrática, gráfico, translação, concavidade do gráfico; vértice; pontos de máximo e de mínimo.

Tempo estimado: 1 aula de 50 minutos

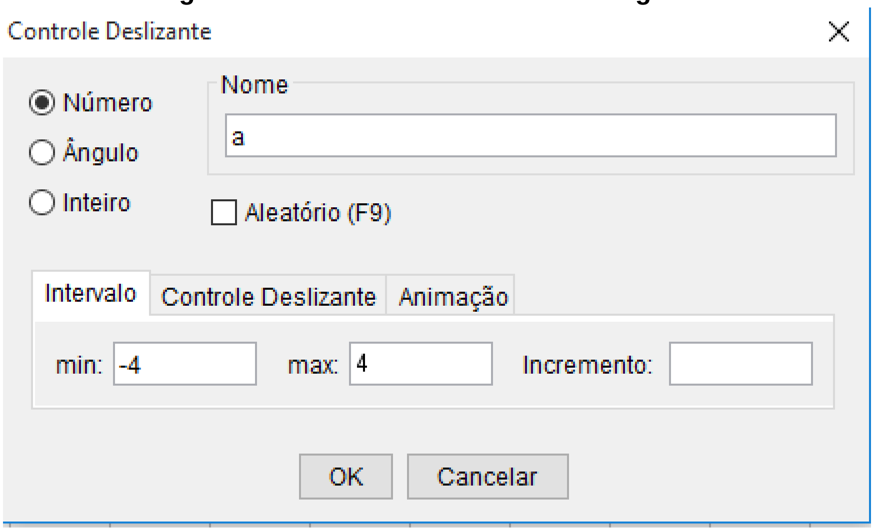
Material Necessário: Geogebra e material impresso da atividade.

DESCRIÇÃO DOS PASSOS.

1) Habilite malha na janela de visualização do Geogebra. Clique no botão 

e selecione a ferramenta controle deslizante. Ajuste os valores de máx. e mín. do parâmetro a com um valor real positivo e um valor real negativo, respectivamente.

Figura 54: Controle deslizante do Geogebra.



Fonte: Autora, 2017.

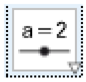
2) Na caixa de entrada digite a função $h(t) = at^2$ *e obtenha o gráfico. Responda:*

a) Faça o controle deslizante variar entre os valores positivos (ou negativos). O que ocorre com a abertura da parábola quando os valores do parâmetro a aumentam ou diminuem em módulo?

b) O que ocorre com a parábola quando a = 0? Nesse caso, a função continua quadrática?

c) O que ocorre com a concavidade da parábola quando o parâmetro assume valores negativos e o que ocorre quando os valores são positivos?

d) Trace os gráficos das funções $h_1(t) = 2t^2$, $h_2(t) = -2t^2$, $h_3(t) = \frac{1}{2}t^2$ *e* $h_4(t) = -\frac{1}{2}t^2$ *em um mesmo sistema de eixos. Tire conclusões sobre os aspectos de concavidade e de abertura das parábolas.*

3) Em uma nova janela, clique novamente no botão 

e crie controles deslizantes a e c de modo que o primeiro tenha mín -4 *e Max* 4 *e,o segundo tenha mín* 0 *e máx* 7.

4) Na caixa de entrada, digite a função $h(t) = at^2 + c$ *e obtenha o gráfico. Responda:*

a) O que ocorre com o gráfico quando fazemos c variar? (Mantenha o controle deslizante $a > 0,$ *fixado). Qual é o eixo das parábolas? Nesse caso, o gráfico tem um ponto de máximo ou de mínimo?*

b) Se repetirmos o procedimento do item (a) para $a < 0,$ *o gráfico terá um ponto de máximo ou de mínimo?*

c) Comparando os gráficos de $h(t) = at^2$ *e* $h(t) = at^2 + c$, *que relação há entre as parábolas? As parábolas são congruentes?*

5) Na caixa de entrada, digite a família de funções $h(t) = 2(t-k)^2$ *para* $k = -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$. *Em seguida, determine os eixos dessas parábolas. O que se observa sobre as abscissas dos vértices? As parábolas congruentes? Que relação há entre essas parábolas?*

6) (Vitor Giraldo, p. 70, adaptado) Considere a família de parábolas $h(t) = 2t^2 + bt + 3$, *com* $b \in R$. *Crie um controle deslizante* $-10 \le b \le 10$. *De que forma o parâmetro* b *influi o aspecto gráfico das curvas?*

7) (Vitor Giraldo, p. 80) Considere a função $p: R \to R$, $p(x) = 2x^2$. *Esboce os gráficos de* p *e das funções definidas por* $p_1(x) = p(x-2)$, $p_2(x) = p(x) + 1$ *e* $p_3(x) = p(x-2) + 1$. *Qual é a relação entre esses gráficos?*

A atividade 4 leva o aluno a estudar a influência de determinados coeficientes com aspectos do gráfico das famílias de função quadrática recorrendo ao ambiente dinâmico do Geogebra. A possibilidade de articular (Giraldo, 2013, p. 70) representações gráficas e algébricas de forma dinâmica em ambientes computacionais gráficos pode ajudar em explorações desse tipo. A exploração dos itens no *GeoGebra* possibilitou a aprendizagem qualitativa quanto ao efeito do coeficiente a relacionado com a concavidade da parábola, do coeficiente c que translada o gráfico verticalmente e do coeficiente b que indica se a parábola intersecta o eixo y no ramo crescente ou decrescente. Após a aplicação dessa atividade, os alunos fizeram relatórios da aula. Nos registros produzidos, observa-se no relato do aluno D o fato de que a variação que o coeficiente b produz nos gráficos da família de parábolas $h(t) = 2t^2 + bt + 3$, sugere que o lugar geométrico descrito pelos vértices é uma curva com forma semelhante a uma parábola. Isso se deve a estrutura da atividade que não é a de desenvolver ou avaliar a destreza dos alunos em traçar gráficos, e sim estimular a compreensão qualitativa do problema. No item 7, propomos a exploração da forma canônica e das translações entre parábolas. Foi possível deduzir que a parábola $p_1(x) = 2(x-2)^2$ é uma translação de 2 unidades na horizontal de $p(x) = 2x^2$ e, que a parábola $p_2(x) = p(x) + 1$ é uma translação de 1 unidade na vertical.

Figura 55: Item 7 da atividade 4 (Família de funções)

Fonte: Autora, 2017.

Ainda, a parábola $p_3(x) = p(x-2) + 1$ é a translação horizontal seguida de outra vertical a partir de $p(x) = 2x^2$. Assim, concluímos com os alunos que *qualquer parábola é dada por uma translação de uma parábola com mesmo valor de a e vértices na origem.* Decorrendo que, *quaisquer duas parábolas com mesmo valor de a, são congruentes e da forma canônica observamos a existência de um eixo de simetria e a própria fórmula das raízes.*

(e) Atividade 5: Identificando e determinando o modelo polinomial do 2^0 grau em outras situações.

Objetivo: Aplicar os conhecimentos adquiridos para identificar e modelar a função apropriada para o problema.

Conteúdo: Caracterização da função quadrática; parâmetros da função, resolução de sistemas de equações do 1^0 grau.

Tempo Estimado: 1 aula – 50 min

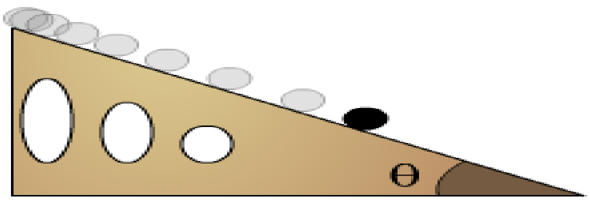
Material necessário: Folha do aluno (atividade impressa).

Problema 6. Um estudante anotou a posição de um móvel ao longo do tempo e obteve a seguinte tabela:

Tempo (s)	0	10	20	30	40	50
Posição (cm)	17	45	81	125	177	237

Calcule a posição do móvel nos instantes 5 s e 35 s.

Problema 7. Uma bolinha é largada do topo de uma rampa cuja inclinação em relação ao plano horizontal da superfície terrestre é de 30° (θ = 30°). Realizando o experimento diversas vezes, um estudante mede, a cada segundo, a distância s(t), em centímetros, da bolinha em relação ao topo da rampa. Os dados foram anotados na tabela abaixo:



T	0	1	2	3	4	5
s(t)	0	2.45	9.8	22.05	39.2	61.25

a) Observando os dados da tabela, que tipo de função você escolheria para descrever a relação entre as variáveis s e t?

- Uma função afim
- Uma função quadrática

b) Fazendo uma estimativa aproximada até a primeira casa decimal, pode-se concluir que a distância percorrida pela bolinha 7,5 segundos após ser largada no topo da rampa é de:

- 138,4 centímetros
- 137,8 centímetros
- 127,0 centímetros
- Nenhuma das alternativas anteriores.

*4.3.3 **Situação prática 3: Quantificação de micro-organismos cultivados por alimentos***

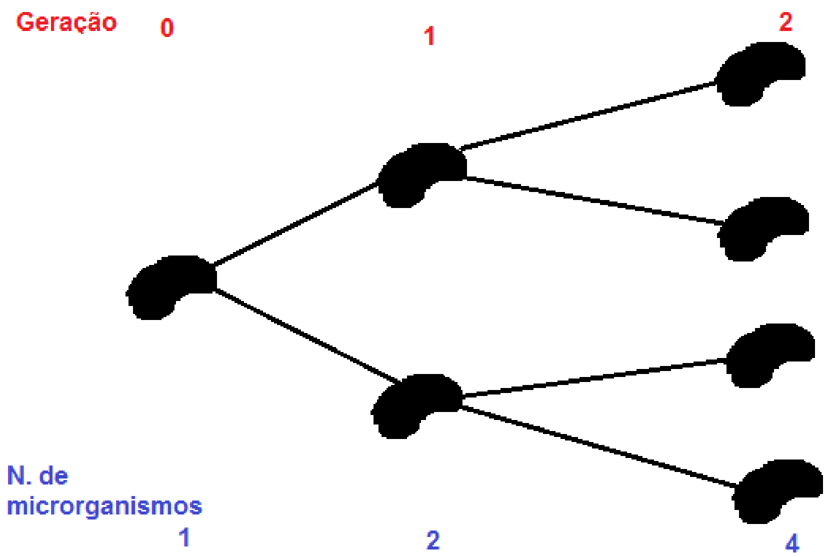
Esta sequência didática, elaborada para o estudo e modelação da função do tipo exponencial, se encontra organizada em três atividades das quais a primeira permite preparar os alunos para a contextualização conhecendo características dos micro-organismos como bactérias. Quanto a segunda e a terceira, tratam de uma prática no laboratório de Ciências em que colônias de bactérias podem ser cultivadas, quantificadas e analisadas, permitindo aos professores de Biologia e Matemática explorarem e ensinarem sobre os temas interdisciplinares do 1^0 ano do Ensino Médio compreendendo as características do “crescimento exponencial”.

4.3.3.1 O crescimento bacteriano

Nesta experiência, tem-se o propósito de investigar o nível de contaminação de um alimento causada pela bactéria Escherichia Coli que se desenvolve em meios significantes de glicose. A Escherichia coli retira a maior parte de seu carbono da glicose, que por oxidação ou fermentação, também proporciona a energia. A partir de ingredientes como extrato de carne e gelatina é possível compor um meio sólido capaz de suportar o crescimento da E. Coli. Além do conhecimento dos nutrientes apropriados para a cultura das bactérias, para Pelczar (1980, p. 119), é preciso saber quais as condições físicas ambientais para melhor desenvolvimento microbiano.

As bactérias apresentam alto poder de reprodução assexuada por bipartição. Para Osório (2013, p.42), as bactérias, em geral, se reproduzem por cissiparidade, processo assexuado no qual uma célula dá origem a duas.

Figura 56: Representação do crescimento bacteriano



Fonte: Autora, 2017.

Por esse processo, em algumas horas, sob condições ambientais adequadas, uma única bactéria pode dar origem a milhares de descendentes geneticamente idênticos entre si (clones). Por divisão das células, as formas coloniais crescem. O crescimento bacteriano indica o aumento do número de bactérias em determinada cultura. O intervalo entre uma geração e outra é chamado de *tempo de geração.* Ele corresponde ao período necessário para que a célula se divida. A maioria das bactérias, segundo Osório (2013, p. 42) pode dividir-se a cada três horas, embora algumas levem mais de 24 horas. No caso da E. Coli, o tempo de geração é bem curto: em condições ideais, essa bactéria pode dividir-se a cada vinte minutos.

(a) Atividade 1: Pesquisando sobre micro-organismos e a forma como eles influenciam na qualidade de vida dos seres humanos.

Objetivos:

- Conhecer micro-organismos benéficos e nocivos à saúde;

- Discutir e levantar questionamentos sobre a análise quanto à verificação de contaminação alimentar e quanto à reprodução de micro-organismos presentes em material de exame de biopsia ou cultura.

Conteúdo: Micro-organismos; Método de quantificação; Mecanismos de reprodução das bactérias.

Tempo Estimado: 2 aulas – 1h 40 min

Material necessário: Internet (laboratório de informática); livros didáticos de Ciências e Biologia, enciclopédias ou qualquer outra fonte de informação sobre bactérias como documentários[22] encontrados no Youtube; Datashow para apresentação de slides; vídeos produzidos pelos próprios alunos, papel e lápis para anotações.

Inicialmente se devem levantar questionamentos sobre como os micro-organismos interferem na qualidade de vida do ser humano, exibindo o vídeo sugerido ou outro conforme a preferência do professor orientando os alunos a pesquisarem sobre tópicos relevantes ao assunto tais como fabricação de alimentos e vacinas, contaminação alimentar, desenvolvimento de doenças, etc. Em seguida, organizar explanações a cerca das informações coletadas na pesquisa promovendo discussões e apresentando o contexto onde será desenvolvido o experimento de modelação da função exponencial que tratará em conhecer e aprender a quantificar bactérias através de procedimentos usados na análise laboratorial aplicada pelos técnicos da vigilância sanitária quando há suspeita de contaminação alimentar.

O cultivo dos micro-organismos, em condições laboratoriais, é um pré-requisito para seu estudo adequado (Pelczar, 1980). Dentre as práticas laboratoriais utilizadas comumente para contagem de micro-organismos presentes em uma determinada amostra, destaca-se a técnica de espalhamento em superfície (spread-plate). Essa técnica consiste em sucessivas diluições da amostra, e que em cada diluição é espalhada em duas placas de Petri contendo meio de cultura 0,1 ml da amostra. Também conhecido como método das diluições seriadas, este método serve tanto para o isolamento quanto para contagem de micro-organismos. Após o plaqueamento e incubação, por tempo e temperatura adequados, as células ou pequenos agrupamentos vão crescer isoladamente, dando origem a colônias que

[22] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=1XC-S6p0dl4

serão contadas na diluição apropriada e, portanto, chamadas de unidades formadoras de colônia (UFC).

(b) Atividade 2: Preparação dos meios de cultura e inoculação.

Objetivo: Desenvolver um meio artificial para crescimento de micro-organismos com fontes de carboidratos, proteínas e lipídios.

Conteúdo: metrologia (medidas de massa, capacidade, volume, temperatura e de tempo), instrumentos de medição.

Tempo Estimado: 2 aulas de 50 minutos.

Material necessário: Tubos de ensaios; Álcool; Pepitas; 6 Placas de Petri; Becker; Alça/Bastão; Balança; Bico de Bunner (vela); Estufa; Meio de cultura (alimento) ou ágar; Luvas de borracha.

Figura 57: Material para a preparação do meio de cultura

Vidrarias

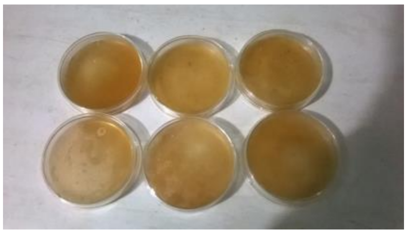
Estufa de madeira

Fonte: Autora, 2017.

É importante que as vidrarias sejam lavadas com água e sabão e que a chama da vela esteja acessa para desinfetá-las durante o preparo do meio de cultura.

<u>1^0 dia: Preparo do meio de cultura (1 aula de 50 minutos)</u>

Quadro 2: Procedimentos para o preparo do meio de cultura

Ferver 300mL de água destilada estéril e separar 100mL.	 
Em seguida adicionar 1 pacote de gelatina incolor e 1 caldo de carne ou similar com 1 colher de açúcar. Misture bem.	 
Depois de dissolvida a gelatina adicione cerca de 15 mL dessa mistura nas placas de Petri estéril sempre próximo da chama para evitar contaminações. Deixe esfriar e armazene em geladeira. Esse meio de cultura não deve permanecer por mais de uma semana na geladeira.	 

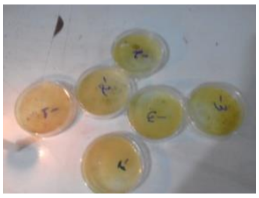
Fonte: Autora, 2017.

Esse meio de cultura pode ser substituído por ágar nutriente, um agente solidificante, que é bastante usado para deixar alimentos como sorvete e geleias mais espessos. Para utilização em laboratório, o ágar é mantido em banho-maria a uma temperatura próxima de 50^0 C. Nessa temperatura, o ágar não causa dano algum aos micro-organismos quando adicionado sobre eles, e após a solidificação do meio de cultura.

<u>2^0 dia: Inoculação (1 aula de 50 minutos)</u>

Quadro 3: Procedimentos para a etapa de inoculação.

Pesar 1g do alimento na balança analítica e adicioná-lo em um tubo de ensaio contendo em seu interior 9 mL de água destilada estéril medida com um frasco Becker. Homogeneizar. Essa será a primeira diluição seriada da análise (corresponde a diluição 10^{-1}). Separar.	 
Com a ajuda de uma pipeta de 5mL transferir 1mL dessa diluição para um tubo de ensaio contendo 9mL de água destilada estéril(essa corresponderá a segunda diluição seriada 10^{-2}).Separar. Com outra pepita estéril de 5 ml pepitar 1 ml da diluição anterior (10^{-2}) e adicionar em um novo tubo de ensaio contendo 9 ml de água destilada estéril 9 diluição seriada final de 10^{-3}). Separar.	 
Selecionar para cada diluição duas placas de Petri contendo em seu interior o meio de cultura estéril. Efetuar a desinfecção da bancada de análise com uso de álcool a 70%, ou álcool iodado. Do tubo de ensaio com a diluição 10^{-1} retirar 0,1mL e adicionar na superfície do meio de cultura em placas em duplicata. Efetuar o mesmo para as diluições de	 

10^{-2} e 10^{-3}. Com o auxilio de alça de Drigalsky devidamente flambada em álcool e esfriada espalhar o inóculo da superfície do meio de cultura. Efetuar em todas as placas contendo o meio de cultura e o inóculo, lembrando de sempre mergulhar em álcool a alça e flambar em fogo cada vez que sair de uma placa para outra. Identificar cada placa com sua respectiva diluição e amostra. Incubar as placas em estufa de cultura a 35-37^{0}C para a contagem das colônias de bactérias que se desenvolverão após 24-48-72 horas.	  

Fonte: Autora, 2017.

A estufa tem dimensões 50 cm X 40 cm X 20 cm e compartimento para duas lâmpadas. Deve-se usar lâmpada incandescente de watts para atingir a temperatura de 36 graus Celsius, exatamente. Essa temperatura simula a temperatura do corpo humano para propiciar a produção dos micro-organismos no meio de cultura. Recomenda-se ligar a estufa no dia anterior a etapa de inoculação a fim de estabilizar a temperatura ideal verificada com um termômetro digital.

Figura 58: Verificação de temperatura da estufa (36 graus)

Fonte: Autora, 2017.

(c) Atividade 3: Quantificação de micro-organismos cultivados por alimentos (UFC/g).

Objetivos: Quantificar o número de bactérias presentes nas colônias em UFC e problematizar situações para conjecturar o modelo da função do tipo exponencial que relaciona as grandezas tempo e população.

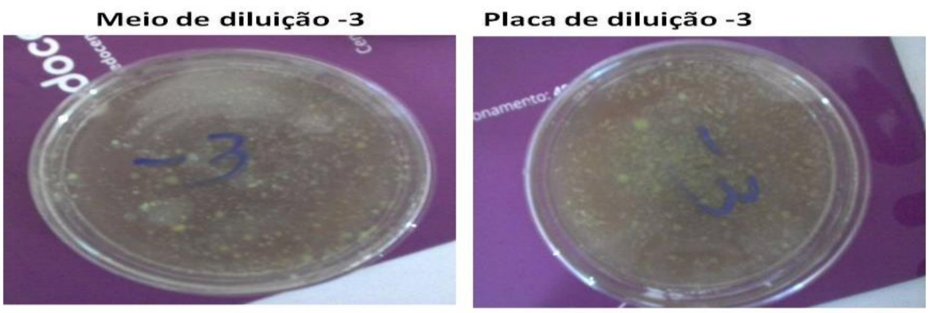
Conteúdo: Potenciações de base 10; Cálculo com expressões em notação científica.

Tempo Estimado: 3 dias para a observação e leitura das placas formadoras de colônias.

Material necessário: caneta marcadora, tabela em folha sulfite para anotar os dados.

Após todas as diluições seriadas serem efetuadas, inicia-se a análise. A análise consiste em quantificar as unidades formadoras de colônias a cada 12 horas (de preferência), porém em nossos testes realizamos três leituras contadas 24, 48 e 72 horas após a incubação das placas na estufa, visto que as bactérias conseguem permanecer vivas nessas placas até no máximo por 3 dias.

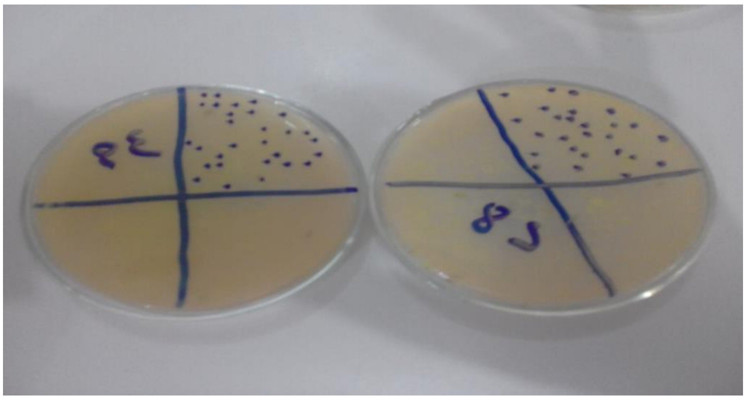
Figura 59: Colônias de bactérias cultivadas nas 24 primeiras horas do experimento.



Fonte: Autora, 2017.

Para a contagem simplificada das unidades formadoras de colônias deve-se: 1) Com uma caneta marcadora, dividem-se as placas em quadrantes e marcam-se pontos o máximo de colônias visualizadas em um quadrante por placa.

Figura 60: Método de quantificação das colônias



Fonte: Autora, 2017.

2) Nas placas de mesma diluição, contam-se o número de unidades formadoras de colônias (UFC) em um quadrante e multiplica por 4. Em seguida, soma o número de UFC das duas placas, calcula a média aritmética e divide pelo fator de diluição. Por fim, faz a média aritmética dos três resultados:

- **Primeira leitura (Após 24 horas de incubação)**

$Placa\ de\ diluição\ 10^{-1} \rightarrow 70\ UFC$

$Placa\ de\ diluição\ 10^{-1} \rightarrow 80\ UFC$

$(70\ .\ 4 + 80\ .\ 4) : 2 = 300 \Rightarrow 300 : 10^{-1} = 300\ .\ 10 = 3000 = 3{,}0\ .\ 10^{3}\ UFC/\ ml\ ou\ g$

$Placa\ de\ diluição\ 10^{-2} \rightarrow 93\ UFC$

$Placa\ de\ diluição\ 10^{-2} \rightarrow 80\ UFC$

$(93\ .\ 4 + 80\ .\ 4) : 2 = 346 \Rightarrow 346 : 10^{-2} = 346\ .\ 100 = 34600 = 3{,}46\ .\ 10^{4}\ UFC/\ ml\ ou\ g$

$Placa\ de\ diluição\ 10^{-3} \rightarrow 72\ UFC$

$Placa\ de\ diluição\ 10^{-3} \rightarrow 68\ UFC$

$(72\ .\ 4 + 68\ .\ 4) : 2 = 280 \Rightarrow 280 : 10^{-3} = 280\ .\ 1000 = 280000 = 2{,}8\ .\ 10^{5}\ UFC/ml\ ou\ g$

$Logo,\ (3\ .\ 10^{3} + 3{,}46\ .\ 10^{4} + 2{,}8\ .10^{5}) : 3 = 105866{,}666... = 105867 = 1{,}05867\ .\ 10^{5}\ UFC/ml\ ou\ g$

- **Segunda leitura (Após 48 horas de incubação)**

$Placa\ de\ diluição\ 10^{-1} \rightarrow 48\ UFC$

$Placa\ de\ diluição\ 10^{-1} \rightarrow incontáveis$

$48\ .\ 4 = 192 \Rightarrow 192 : 10^{-1} = 192\ .\ 10 = 1920 = 1{,}92\ .\ 10^{3}\ UFC/\ ml\ ou\ g$

$Placa\ de\ diluição\ 10^{-2} \rightarrow 27\ UFC$

$Placa\ de\ diluição\ 10^{-2} \rightarrow 32\ UFC$

$(27\ .\ 4 + 32\ .\ 4) : 2 = 118 \Rightarrow 118 : 10^{-2} = 118\ .\ 100 = 11800 = 1{,}18\ .\ 10^{4}\ UFC/\ ml\ ou\ g$

$Placa\ de\ diluição\ 10^{-3} \rightarrow 28\ UFC$

$Placa\ de\ diluição\ 10^{-3} \rightarrow 39\ UFC$

$(28\ .\ 4 + 39\ .\ 4) : 2 = 134 \Rightarrow 134 : 10^{-3} = 134\ .\ 1000 = 134000 = 1{,}34\ .\ 10^{5}\ UFC/ml\ ou\ g$

$Logo,\ (1{,}92\ .\ 10^{3} + 1{,}18\ .\ 10^{4} + 1{,}34\ .10^{5}) : 3 = 49240 = 4{,}924\ .\ 10^{4}\ UFC/ml\ ou\ g$

- **Terceira leitura (Após 72 horas de incubação)**

$Placa\ de\ diluição\ 10^{-1} \rightarrow incontáveis$
$Placa\ de\ diluição\ 10^{-1} \rightarrow incontáveis$

$Placa\ de\ diluição\ 10^{-2} \rightarrow 50\ UFC$
$Placa\ de\ diluição\ 10^{-2} \rightarrow\ 49\ UFC$
$(50\ .\ 4 + 49\ .\ 4) : 2 = 198 \Rightarrow 198 : 10^{-2} = 198\ .\ 100 = 19800 = 1{,}98\ .\ 10^{4}\ UFC/\ ml\ ou\ g$

$Placa\ de\ diluição\ 10^{-3} \rightarrow 43\ UFC$
$Placa\ de\ diluição\ 10^{-3} \rightarrow 41\ UFC$
$(43\ .\ 4 + 41\ .\ 4) : 2 = 168 \Rightarrow 168 : 10^{-3} = 168\ .\ 1000 = 168000 = 1{,}68\ .\ 10^{5}\ UFC/ml\ \ ou\ g$

$Logo,\ (1{,}98\ .\ 10^{4} + 1{,}68\ .\ 10^{5}) : 2 = 93900 = 9{,}39\ .\ 10^{4}\ UFC/ml\ \ ou\ g$

Como a contaminação atingiu em valores consideráveis de unidades formadoras de colônias na placa de menor concentração, isto é, a de diluição -3, significa que o alimento está inapropriado para consumir.

Problema 1. **(Geovanni, 2013, p. 205)** *As células bacterianas são pequenas e medidas em micrômetro (μm). 1 equivale 0,001 mm ou 1.10^{-1}. Na maioria das vezes, o tamanho médio de uma bactéria é de 1-10 μm.*

Com formato cilíndrico e medindo, em média, $2\mu m$ de comprimento enquanto viva, a bactéria E. Coli é considerada um dos maiores patógenos entéricos predominantes no cólon dos animais e homem.

Figura 61: Bactéria Escherichia coli

Fonte: http://brasilescola.uol.com.br/biologia/escherichia-coli.htm

A maior bactéria conhecida é a Epulopiscium fishelsoni, que foi encontrada no mar vermelho e na costa da Austrália no intestino de um peixe com mais de

600 μm de comprimento. A menor bactéria tem $2\mu m$ (Chlamydia). Compare o tamanho da E. Coli em relação as bactérias Epulopiscium fishelsoni e Chlamydia utilizando potências de 10 para expressar os valores.

(d) Atividade 4: Relacionando a função exponencial e o crescimento bacteriano da E. Coli

Objetivos:

- Identificar e modelar a função relativa ao crescimento bacteriano da experiência a partir da caracterização da função exponencial observada na situação;
- Validar a função exponencial como modelo matemático do fenômeno observado por meio de ajuste de curva.
- Resolver problema do contexto.

Conteúdo: taxa de proporcionalidade; gráfico; progressão geométrica, função do tipo exponencial, crescimento populacional, equação exponencial.

Tempo Estimado: 2 aulas – 1h 40 min

Material necessário: software Geogebra, folha de papel sulfite, Datashow.

Utilizamos a contextualização anterior para modelar o crescimento bacteriano da E. Coli, mostrando que se trata do crescimento exponencial. No entanto, a contagem em UFC não permite com precisão, saber o número de bactérias presentes nessas colônias, pois são em milhares. Assim, problematizamos situações advindas desse contexto que é favorável conforme Moraes Filho (2014, p. 11), afirmando que boas contextualizações são que, por meio de “problematização”, envolvam aplicações e manipulações, podendo vir ou não acompanhadas de fórmulas que as modelem, desde que as informações contidas no problema sejam reais, ou simulem a realidade, fazendo conexão entre temas da própria matemática, entre esses temas e outras ciências. Moraes Filho (2014, p. 19) ressalta ainda que, ao modelarmos um problema que envolve crescimento populacional com uma função exponencial, devemos estar atentos ao fato de que a função exponencial possui um crescimento muito rápido em curto espaço de tempo.

Problema 2. *Descubra um modelo matemático adequado que determine o número **P** de indivíduos na população fazendo o tempo **t** variar.*

DESCRIÇÃO DOS PASSOS.

Para determinar o modelo matemático (função da população x tempo), devemos seguir os seguintes passos:

VII. Reconhecendo a função presente na situação ou fenômeno analisado

Escolhemos tempos de geração $t_1,\ t_2,...,t_k$ *e calculamos as respectivas populações* $P(t_1),\ P(t_2),...,P(t_k)$ *utilizando a taxa de variação* $q = \dfrac{P(t_k)}{P(t_{k-1})}$ *que deve ser constante. Ou ainda, verifica-se se as sequências* (t_k) *e* $(P(t_k))$ *são progressões geométricas, caracterizando tal função como do tipo exponencial.*

No experimento anterior, consideremos as unidades formadoras de colônias nas placas de diluição -2 lidas 24 h depois do início de incubação. Suponha que nesse momento, deva haver 1000 bactérias por mililitro da E. Coli em uma das colônias e sabendo que essa bactéria dobra a cada 20 minutos, quantos micro-organismos terá nessa população após 1h, 2h, 3h, 4h e 5h?

O problema 2 é explorado para caracterizar e modelar matematicamente a função exponencial relacionada com o fenômeno do crescimento populacional da E. Coli. Como mencionado anteriormente, o número de gerações da E. Coli após 1 h, 2h, 3h, 4h e 5h são de 3, 6, 9, 12 e 15, visto que o tempo de reprodução dessa bactéria ocorre em 20 minutos[23].

Assim, temos

$$Inicialmente \rightarrow P(0) = 1000\ \ bactérias$$

$$Após\ \ 1\ \ hora\ \ ou\ \ 3\ \ gerações \rightarrow P(3) = \left[(1000\ .\ 2)\ .2\right].2 = 1000\ .\ 2^{3}$$

$$Após\ \ 2\ \ horas\ \ ou\ \ 6\ \ gerações \rightarrow P(6) = \left[(1000\ .\ 2^{3}.\ 2)\ .2\right].2 = 1000\ .\ 2^{6.}$$

$$Após\ \ 3\ \ horas\ \ ou\ \ 9\ \ gerações \rightarrow P(9) = \left[(1000\ .\ 2^{6}.\ 2)\ .2\right].2 = 1000\ .\ 2^{9}$$

$$Após\ \ 4\ \ horas\ \ ou\ \ 12\ \ gerações \rightarrow P(12) = \left[(1000\ .\ 2^{9}.\ 2)\ .2\right].2 = 1000\ .\ 2^{124}$$

$$Após\ \ 5\ \ horas\ \ ou\ \ 15\ \ gerações \rightarrow P(15) = \left[(1000\ .\ 2^{12}.\ 2)\ .2\right].2 = 1000\ .\ 2^{155}$$

Nesta atividade de investigação, o registro escrito possibilita a observação direta de uma regularidade para $P(t)$ em função do número de gerações t por observação direta dos dados. Para Ponte (2015, p.33),

[23] Como existe um momento em que o experimento se encerra, temos que o crescimento do número de bactérias não se dá por tempo indeterminado.

> [...] Esse trabalho indutivo tende, muitas vezes, a ficar confinado ao pensamento do aluno, não existindo uma formulação explícita da conjectura. No entanto, o teste de conjecturas é um aspecto do trabalho investigativo que os alunos, em geral, interiorizam com facilidade e que se funde, por vezes, com o próprio processo indutivo.

Então, pela conjectura dos dados obtemos como modelo exponencial $P(t) = 1000\ .\ 2^t$ que descreve o fenômeno estudado, explicitando que conforme a tabela 8, a população de bactérias cresce rapidamente e diferentemente da função afim, os acréscimos dados aos valores de $P(t)$ são multiplicativos, não “somativos”, isto é, a função do tipo exponencial $P(t) = 1000\ .\ 2^t$ transforma a sequência $(t_k) = (0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15)$ de acréscimos “somativos” constantes (progressão aritmética) na sequência $(P_k) = (1000,\ 8000,\ 64000,\ 512000,\ 4096000,\ 32768000)$ de aumento multiplicativo (progressão geométrica), o que caracteriza essa função ter um crescimento (ou decrescimento) muito rápido em relação a Afim.

Note que, a mesma função pode ser explicitamente modificada se considerarmos o tempo em *j* horas. De fato, teríamos *t = 3 j,* onde t é o número de gerações em 1 hora. Assim, $P(j) = 1000\ .\ 2^{3j}$ seria a lei da função, considerando a variável *j* em horas.

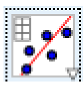
Tabela 8: Dados de P(t) em função de t.

Planilha

	A	B
1	t	P(t)
2	0	1000
3	3	8000
4	6	64000
5	9	512000
6	12	4096000
7	15	32768000

Fonte: Autora, 2017.

VIII. Identificação e validação da função modelada por ajuste de curvas no GeoGebra:

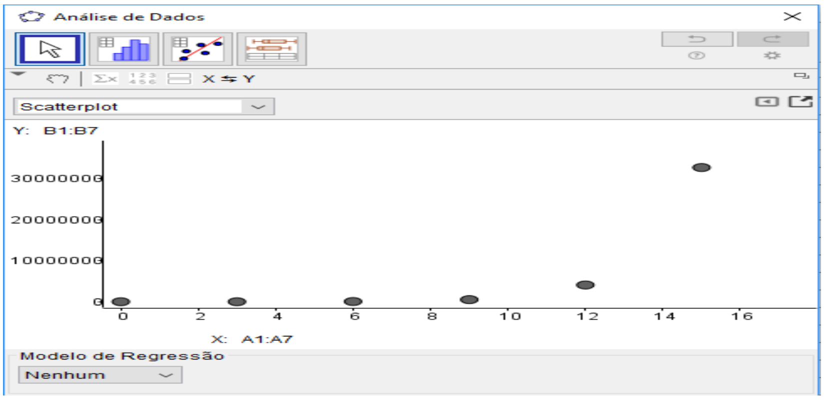
4. *Abra a janela do Geogebra e construa uma tabela de valores com os dados coletados no experimento (tabela).*
5. *Obtenha um gráfico clicando em inserir, opção* *, análise bivariada.*

6. *Após gerar o gráfico, faça um ajuste de curva para achar o modelo gráfico de função que melhor se aproxima dos pontos “plotados” testando as opções disponíveis em “modelo de regressão”, clicando nas opções disponíveis tais como linear, polinomial e exponencial.*

Responda: Qual é a curva que melhor se ajusta ao conjunto de pontos correspondentes aos dados da experiência? O modelo algébrico corresponde à função obtida anteriormente?

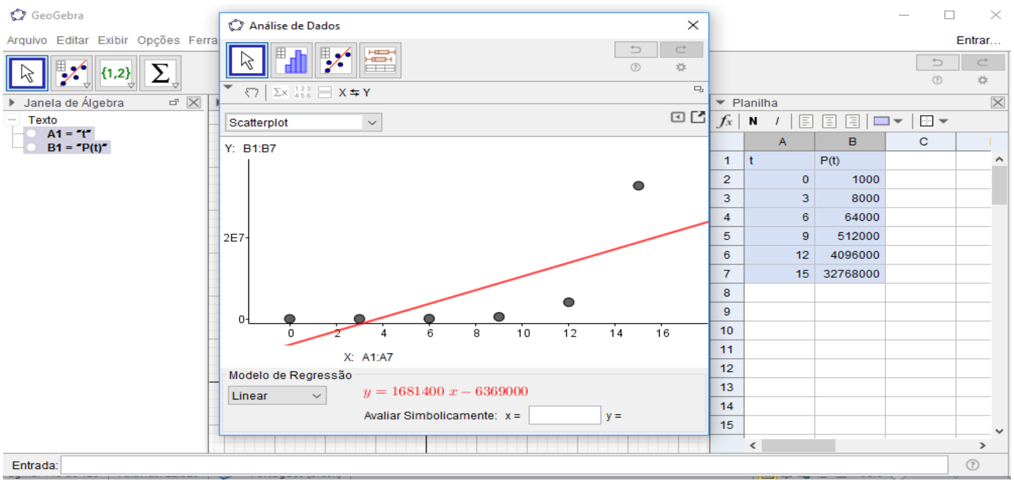
Seguindo as orientações de VIII, obtemos o conjunto de pontos gerados pelos dados da tabela 8 onde se percebe a existência de uma função de crescimento muito rápido.

Figura 62: Dispersão de pontos para os dados do crescimento bacteriano da E. Coli



Fonte: Autora, 2017.

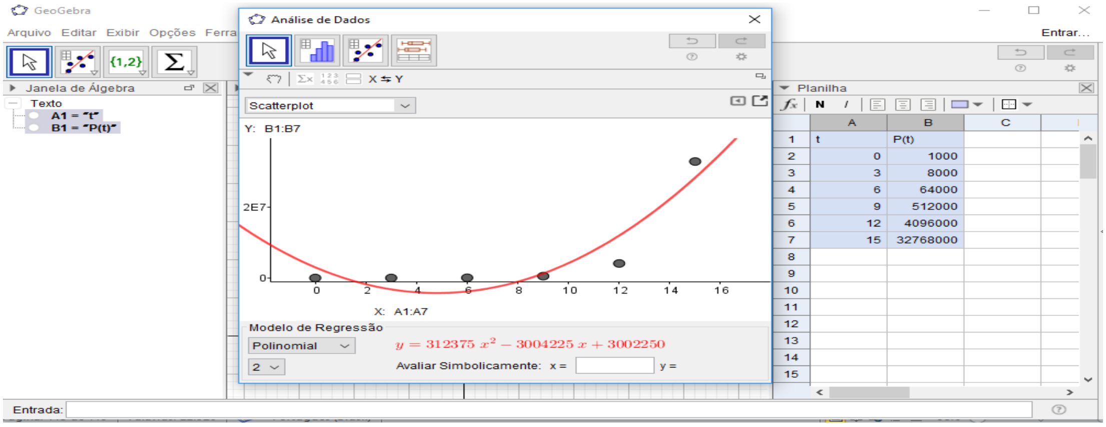
Figura 63: Testando o modelo de regressão linear



Fonte: Autora, 2017.

Na figura 64, a distância entre os pontos e a reta é considerável, sinalizando este modelo de regressão não ser o mais próximo do conjunto de pontos testados.

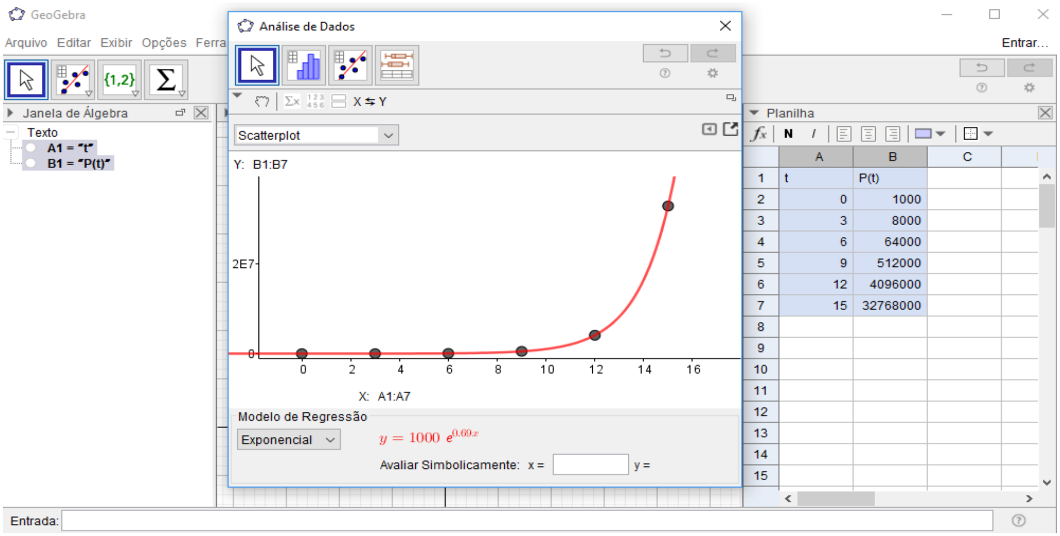
Figura 64: Testando o modelo polinomial de grau 2



Fonte: Autora, 2017.

Ao testarmos o modelo polinomial, este consegue um ajuste melhor do que o modelo linear, porém ainda não é a melhor curva visto que além do aspecto gráfico, é possível verificar através dos dados que os valores da função não formam uma progressão aritmética de segunda ordem.

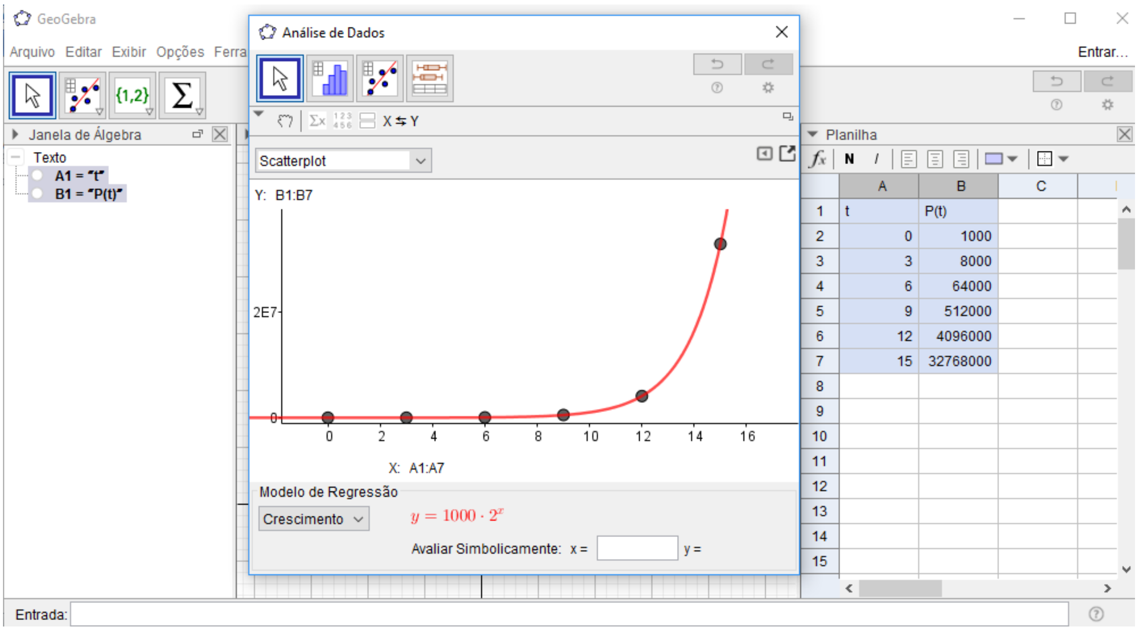
Figura 65: Testando o modelo de regressão exponencial



Fonte: Autora, 2017.

Testando o ajuste de curvas pelo modelo regressão exponencial, observamos que esta curva é a que melhor consegue captar o maior número de pontos, sendo a função $P(t) = 1000\ .\ e^{0,69t}$ o melhor modelo matemático para descrever o fenômeno observado. No entanto, como nas situações das funções anteriores, usamos o recurso do ajuste de curva para validar a função $P(t) = 1000\ .\ 2^{3t}$ modelada pelo recursivamente por conjectura. Nota-se que o programa utiliza a base e[24], onde se faz necessário realizar uma mudança para a base 2. Num primeiro momento, aos alunos ainda não foi oportunizado estudar o logaritmo e suas propriedades necessárias para fazer a conversão entre as bases dos dois modelos equivalentes de função do tipo exponencial em questão. Dessa forma, utilizamos o modelo de regressão chamado "crescimento" como mostra a figura 66.

Figura 66: Testando o modelo de regressão crescimento para validar a função P(t).



	A	B	C
1	t	P(t)	
2	0	1000	
3	3	8000	
4	6	64000	
5	9	512000	
6	12	4096000	
7	15	32768000	

Fonte: Autora, 2017.

Em outro momento, estudando as propriedades do logaritmo, é viável voltar a esses dois modelos de regressão e mostrar algebricamente como se faz a alteração entre suas bases. De fato, se queremos mostrar que as funções $P(t)$ e $f(x)$ são equivalentes com a primeiro de base 2, então estaríamos procurando um número A tal que para todo $t \in R$ teríamos,

$$1000\ .\ A^t = 1000\ .\ e^{0,69t} \Leftrightarrow \ln A^t = \ln e^{0,69t} \Leftrightarrow t\ .\ln A = 0,69t \Leftrightarrow \ln A = 0,69 \Leftrightarrow A = 2$$

Problema 3. *Após 48 horas de incubação das placas e suas respectivas diluições, verificou-se que em uma das placas de diluição -1, as unidades formadoras de colônias estavam incontáveis, devido o aparecimento de fungos. Isso sinaliza o tempo limite de crescimento da bactéria ou sua meia vida no meio de cultura cultivada. Usando a hipótese do problema 1 de que havia, inicialmente, 1000*

[24] A definição tradicional de e faz-se pondo: $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

bactérias por mililitro nessa placa, qual foi o tempo do experimento se no final, obteve-se um total de $2{,}62144 \,.\, 10^8$ *bactérias por mililitro?*

a) 6 horas e 40 min

b) 6 horas

c) 6 horas e 20 min

d) 4 horas

No problema 3, resolvemos uma equação exponencial aplicada a situação prática do experimento, que pode ajudar o aluno a compreender o valor do cálculo exponencial. Queremos achar t tal que $P(t) = 2{,}62144 \,.\, 10^8$. Então, resolvemos $1000 \,.\, 2^t = 2{,}62144 \,.\, 10^8 \Rightarrow 2^t = 2{,}62144 \,.10^5 \Rightarrow 2^t = 262144 \Leftrightarrow 2^t = 2^{18} \Leftrightarrow t = 18$. Como um período de 60 minutos corresponde a três gerações, segue-se que $t = 360$ minutos ou 6 horas.

Utilizamos o modelo de função exponencial do experimento para explorar propriedades dessa função através de seu aspecto gráfico no ambiente Geogebra.

(e) Atividade 5: Explorando tópicos da função do tipo exponencial.

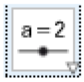
Objetivo: Entender o comportamento da função do tipo exponencial construindo seu gráfico no plano do Geogebra.

Conteúdos: Função do tipo exponencial, gráfico, crescimento e decrescimento; condições de existência.

Tempo estimado: 1 aula de 50 minutos

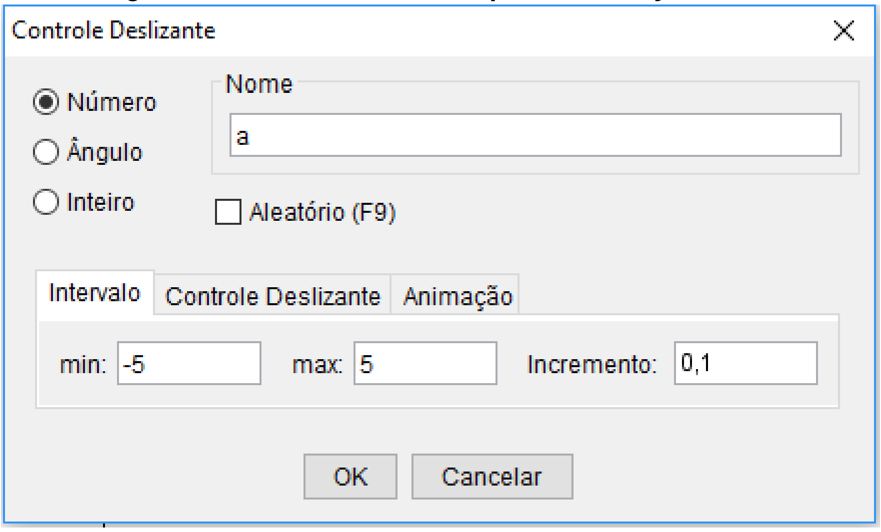
Material Necessário: Geogebra e material impresso da atividade.

DESCRIÇÃO DOS PASSOS.

1) Habilite malha na janela de visualização do Geogebra. Clique seletor 

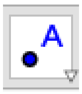
e selecione a ferramenta controle deslizante. Ajuste os valores de máx. e mín. do parâmetro a variando de -5 a 5 e com incremento de 0,1.

Figura 67: Controle deslizante para a curva $y=1000.2^t$.



Fonte: Autora, 2017.

2) Na caixa de entrada digite a função $f(t) = 3.(a\wedge t)$ *e obtenha o gráfico. Observe que o seletor* a *é a base da função.*

3) Acione o botão MOVER  *e faça variar o valor de* a.

Responda:

a) Faça o controle deslizante variar entre os valores positivos (ou negativos). O que ocorre com a curva quando $a \leq 0$*?*

b) O que ocorre com os valores da função quando $0 < a < 1$*? E quando* $a = 1$*? E para* $a > 1$*?*

c) Agora digite a função $f(t) = 2^{at}$. *No Geogebra, você deve digitar assim:* $f(t) = 2\wedge(a * t)$. *Faça o parâmetro* a *variar e descreva o que acontece com o gráfico dessa função.*

(e) Atividade 6: Identificando e determinando o modelo exponencial em outras situações.

Objetivo: Aplicar os conhecimentos adquiridos para identificar e modelar a função apropriada para o problema.

Conteúdo: Caracterização da função exponencial; equação exponencial.

Tempo Estimado: 1 aula – 50 min

Material necessário: Folha do aluno (atividade impressa).

Muitos fenômenos naturais e sociais como o crescimento populacional, a meia vida de uma substância, a medida da pressão atmosférica, o cálculo do montante em um sistema de juros compostos e o resfriamento de um corpo são exemplos de assuntos que trazem problemas modelados por funções exponenciais. É o que apresentamos no próximo problema, partindo de informações contidas em um texto de fatos reais que trata sobre o tema da Radioatividade e que traz as informações necessárias à resolução do problema formulado na descrição da situação problema, cabendo aos alunos o processo de resolução. Segundo Brucki (2011, p. 69), nesse caso, não há necessidade do levantamento de dados fora da sala de aula, pois a investigação é realizada na própria situação proposta e, quando os dados estão no problema, tratando-se da "problematização" de um episódio real: a partir das informações qualitativas e quantitativas propostos na situação apresentada, o aluno desenvolve a investigação.

Texto adaptado (Brucki, 2011 p. 69):

Radioatividade "Sim ou não"

A radioatividade, quando utilizada de forma controlada, pode trazer muitos benefícios para o homem. Hoje em dia ela é utilizada sobre três formas básicas:

1 – Uso da energia do núcleo do átomo;

2 – Uso das radiações que têm a capacidade de atravessar a matéria e velar filmes (raio x);

3 – Uso da capacidade (Radioterapia ou esterilização de material médico).

Ao mesmo tempo em que as radiações podem trazer benefícios para a humanidade, também podem trazer malefícios como, por exemplo, a bomba atômica. A Área que mais utiliza a radiação hoje em dia é a medicina, como na radiologia, na radioterapia e na medicina molecular.

A incidência da radiação sobre o tecido humano pode causar câncer. Então, surge a dúvida: por que os médicos utilizam a radiação no combate ao câncer?

Embora pareça incoerente, não é. As células cancerosas são mais fracas que as normais, por isso uma dose controlada de radiação incidindo apenas no local do tumor pode matar as células cancerosas.

Para isso, são usadas radiações provenientes da desintegração do cobalto 60 ou césio 137. O tempo para desintegração da metade dos átomos radioativos inicialmente presentes em qualquer substância radioativa recebe o nome de meia-vida ou período de semidesintegração. Seu símbolo é $T_{1/2}$ ou P. Por exemplo, o cobalto 60, usado na medicina, possui meia vida igual a cinco anos. Isso significa que uma amostra de 120 gramas de cobalto 60, após cinco anos terá apenas 60 gramas.

http://www.if.ufrj.br/teaching/radioatividade/utilizacao.html

Problema 4: Desde o acidente nas usinas nucleares de Fukushima – Japão, no dia 11 de março de 2011, o noticiário mundial vem alertando para o perigo da presença dos isótopos ^{137}C (Césio 137) e o ^{131}I (Iodo 131) sem citar outros isótopos, certamente presentes e mais abundantes naquelas usinas.

Por que então se fala tanto no ^{137}C e no ^{131}I? A explicação está no fato de que, os outros elementos, possuem meia vida muita curta. Já o ^{137}C é radioativo, volátil ($T_{fusão}$ = 28^0 c) e o pior: tem meia vida de cerca de 30 anos.

a) No ano de 2071, aproximadamente, a cidade de Fukushima no Japão ainda estará contaminada com que porcentagem de material radiativo, levando-se em conta apenas o Césio 137?

b) Para que um montante inicial Q_0 disperso na natureza caia para aproximadamente 1% do inicial, teríamos que esperar quanto tempo?

Para aplicação dessa atividade, orientamos que os alunos sejam divididos em grupo e distribuídos entre eles cópias do texto "Radioatividade Sim ou não", sem que tenha a necessidade da intervenção do professor para a leitura que deve ser espontânea entre os estudantes. No entanto, para que essa situação de aprendizagem favoreça discussões sobre o que é radioatividade, é necessário que o professor realize muita pesquisa sobre o assunto.

No item "a", tem-se como objetivo a ideia de relacionar o período de meia vida do Césio com o tempo, no caso o ano de 2071. Ao analisar as palavras meia vida, deve-se observar se os alunos assimilam a ideia de metade. Oriente-os para que exibam os dados resultados dos cálculos efetuados, organizando em tabelas como a mostrada a seguir:

Tabela 9: Dados sobre a quantidade do Césio após cada período de 30 anos.

Ano	2011	2041	2071
Meia vida (t)	0	1	2
Quantidade Césio Q(t)	Q_0	$Q_1 = Q_0.0,5$	$Q_2 = Q_0.0,25$

Fonte: Autora, 2017.

$Inicialmente \rightarrow Q(0) = Q_0$

$Após\ \ 2041 \ \rightarrow Q(1) = Q(0).0,5 = Q_0\ .0,5 = 50\%\ \ de\ \ Q_0\ \ = Q_0.2^{-1}$

$Após\ \ 2071 \ \rightarrow Q(2) = Q(1)\ .0,5 = Q_0.0,5.0,5 = Q_0.0,25\ \ = 25\%\ \ de\ \ Q_0\ \ = Q_0.2^{-2}$

Logo, em 2071, o Césio estaria reduzido a 25% em relação a 2011.

Após a construção da tabela, os alunos devem analisar o comportamento das sequências formadas pelas meias vidas a cada ano e as respectivas quantidades Q(t) de Césio afim de identificar o modelo de função que descreve o fenômeno, observando que a taxa $\dfrac{Q(t_{k+1})}{Q(t_k)}$ é constante e igual a $0,5$ ou 2^{-1} a cada intervalo de 30 anos ou 1 meia vida. Oriente-os a buscar um padrão, conjecturando os resultados com potências de base 2, a fim de chegar ao modelo da função exponencial relacionada. O modelo deverá ser usado no item “b” para determinar o tempo de desintegração do Césio. Salientando que, se pode responder ao mesmo item estendendo as sequências:

$Inicialmente \rightarrow Q(0) = Q_0$

$Após\ \ 2041 \ \rightarrow Q(1) = Q_0.2^{-1} = 0,5Q_0$

$Após\ \ 2071 \ \rightarrow Q(2) = Q_0.2^{-2} = 0,25Q_0$

$Após\ \ 2101 \ \rightarrow Q(3) = Q_0.2^{-3} = 0,125Q_0$

$Após\ \ 2131 \ \rightarrow Q(4) = Q_0.2^{-4} = 0,0625Q_0 \approx 6\%\ \ Q_0$

$Após\ \ 2161 \ \rightarrow Q(5) = Q_0.2^{-5} = 0,03125Q_0 \approx 3\%\ \ Q_0$

$Após\ \ 2191 \ \rightarrow Q(6) = Q_0.2^{-6} = 0,015625Q_0 \approx 2\%\ \ Q_0$

$Após\ \ 2121 \ \rightarrow Q(7) = Q_0.2^{-7} = 0,0078125Q_0 \approx 1\%\ \ Q_0$

Assim, para que um montante inicial Q_0 disperso na natureza caia para aproximadamente 1% do inicial, teríamos que esperar da ordem de 2 séculos (aproximadamente 7 meias – vidas). Depois de identificar o tipo de função característica da situação, solicite aos alunos que resolvam o mesmo problema utilizando o modelo construído, isto é, $Q(t) = Q_0.2^{-t}$, em que t é o número de períodos de 30 anos ou o número de meias vidas contadas a partir do ano inicial da contaminação onde queremos obter t para o qual $Q(t) \le 0,01Q_0$.

4.4 Avaliando o conhecimento

A avaliação, segundo Ponte (2015, p. 109) permite ao professor saber se os alunos estão progredindo de acordo com as suas expectativas ou se, pelo contrário, é necessário repensar sua ação. As atividades de modelagem e caracterização das funções são uma atividade de aprendizagem e, portanto é preciso haver avaliação. Os objetivos da avaliação na perspectiva desse trabalho concernem em pretender que o aluno reconheça determinada função em situações abrangentes e ser capaz de usar conhecimentos matemáticos na resolução de tarefas propostas. Para avaliar esses objetivos, fez-se uso de relatórios escritos individuais produzidos sobre algumas atividades exploradas no computador, referentes às funções Afim e Quadrática, referindo a conclusões das tarefas realizadas como também dos processos que usaram para chegar a essa conclusão[25]. Embora um relatório possa ser uma tarefa em que tenha inicialmente algumas dificuldades (Ponte, 2015, p.111), ele pode ajudar, por exemplo, a compreender melhor os vários assuntos tratados nas aulas e a desenvolver a capacidade de comunicar por escrito o trabalho que realizou.

Utilizamos também avaliação quantitativa para verificar o objetivo de aprendizagem desse trabalho que está em reconhecer e modelar o tipo de função em determinado problema. A análise da atividade realizada[26] pelos alunos aponta que os 17 alunos avaliados demonstraram compreender e usar os métodos de caracterização das funções afim e quadrática. No entanto, a habilidade algébrica ainda é insuficiente na tarefa de modelar as equações envolvendo os parâmetros a, b e c necessários para a construção da função quadrática, sendo necessário substituir as coordenadas de ao menos três pontos da tabela de valores.

A observação informal dos alunos durante a realização das atividades relacionadas às funções Afim e Quadrática também foi uma forma natural de avaliação enquanto eles trabalhavam numa situação prática e interdisciplinar. A partir dessa observação pode ser analisada a maneira como eles mobilizam os conhecimentos matemáticos tomando como pressuposto a atitude dos alunos durante a resolução de problemas propostos.

---

[25] Conforme o anexo B.
[26] Conforme os gráficos no anexo D.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscamos com esse trabalho, propor múltiplas abordagens, através de aulas práticas e uso de experimentos, no ensino de funções privilegiando o que se percebe terem pouca ênfase nos livros didáticos que é o estudo variacional das funções Afim, Quadrática e Exponencial, importantes pelas aplicações que elas têm em muitas situações práticas da vida do estudante no contexto de Ensino Médio.

Assim como as funções tratadas nessa produção, outros tópicos da Matemática do Ensino Médio podem ser explorados a partir de contextos presentes nas demais disciplinas do currículo, podendo aperfeiçoar a aprendizagem e potencializar o ensino interdisciplinar, onde permitirá ao aluno entender a funcionalidade dos conteúdos que lhes são apresentados na aula de Matemática e conhecer suas aplicações em outras áreas do conhecimento.

O ensino da Matemática evidencia-se passivo e demasiadamente teórico, tornando o aluno observador do seu conhecimento. A aprendizagem mediante a atividade em que o aluno participa de modo ativo na resolução de problemas reais, ou seja, problemas que são propostos de modo a aplicar conceitos de forma prática, ou na realização de atividades com modelos da realidade, transforma-o no construtor do seu conhecimento. Os experimentos propostos, testados no 1^0 ano do Ensino Médio, além de despertar o espírito investigativo, consolidam práticas mais interdisciplinares entre os professores das disciplinas envolvidas, Física e Biologia, reforçando a ideia de que a Matemática está em tudo.

No decorrer dos experimentos observou-se que os alunos “aprenderam a aprender”, visto que conseguiram identificar o tipo de função que representa como o melhor modelo o comportamento das variáveis relacionadas em uma situação problema, demonstrando desse modo que as aulas práticas de modelagem mobilizam o saber e a capacidade de investigação, motivando o aluno a buscar respostas para questões propostas, bem como aquelas que surgem no decorrer do processo.

No entanto, nota-se ainda uma considerável dificuldade de habilidade na manipulação de ferramentas algébricas como equações, sistemas de equações e expressões numéricas, uma vez que há o reconhecimento das funções elementares, mas durante a mudança de um tipo de registro para outro (texto e uso de equações), não conseguem conduzir as propriedades necessárias para chegar aos resultados corretos.

Em virtude dos fatos mencionados, evidencia-se que uma proposta de ensino prático e contextualizado contribui para um melhor aprendizado e desenvolvimento das habilidades matemáticas dos alunos. Espera-se, portanto, que este trabalho possa auxiliar o trabalho dos professores do Ensino Médio com sugestões de práticas mais ativas de ensino, bem como a possibilidade de aplicação direta em sala.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes Werle de. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. 1 ed. São Paulo: Contexto, 2013.

ARAGUAIA, Mariana. **Escherichia coli**; Brasil escola. Disponível em <htpp://brasilescola.uol.com.br/biologia/escherichia-coli.htm> . Acesso em 07 de agosto de 2017.

BASSANESI, Rodney C. **Temas e Modelos.** 1 ed. São Paulo:

BRASIL. Ministério da Educação. **PCN + Ensino Médio.** Brasília, DF, 2002.

BRASIL.Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília, DF, 2000.

BRUCKI, Cristina Maria. **O uso de modelagem no ensino de função exponencial.** TEDE. Disponível em <https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/10900/1/Cristina%20Maria%20Brucki.pdf.> Acesso em 07 de agosto de 2017.

DE MORAES FILHO, Daniel Cordeiro; OLIVEIRA, Michele. **Análise da Contextualização da Função Exponencial e da Função Logarítmica nos Livros Didáticos do Ensino Médio**, 2013. Disponível em <https://www.sbm.org.br/docs/coloquios/NE-3-07.pdf.>

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Kátia; CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria Analítica.** 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

FRANZOTTI, Helington. **Linguagem Matemática e Registros de Representação Semiótica: Experiências em sala de aula com o software GeoGebra.** 1 ed Breves: Saraiva, 2015.

FUKE, L. F. ; YAMAMOTO, K. **Física para o Ensino Médio.** 1 ed. São Paulo: SARAIVA, 2010.

GIRALDO, Victor; CAETANO, Paulo; MATTOS, Francisco. **Recursos Computacionais no Ensino de Matemática.** 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

HELLMEISTER, Ana Catarina P.; DRUCK, Sueli. **Explorando o Ensino da Matemática: artigos.** 1. Vol. Ministério da Educação, 2014. 240 p.

INSTITUTO ADOLFO LUTZ. **Métodos químicos e físicos para análises de alimentos.** 4^{a} ed. Brasília, 2005.

LIMA, E. L. ; WAGNER, E. ; CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C.; **Temas e Problemas Elementares.** 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, E. L. **Exame de textos: Análise de livros de Matemáticos para o Ensino Médio.** 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LIMA, E. L. ; WAGNER, E. ; CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C.; **A Matemática do Ensino Médio.** 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2000.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais.** 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, E. L. **Matemática e Ensino.** 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias.** 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

MACHADO, Sílvia Dias Alcântara. **Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica.** 8 ed. Campinas: PAPIRUS, 2013.

PONTE, João Pedro da (org.). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática.** 1. ed. Lisboa: Instituto de Educação, 2014.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas em sala de aula.** 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

RUGGIERO, Márcia A. G.; LOPES. **Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais.** 2 ed. Campinas: PEARSON, 2013.

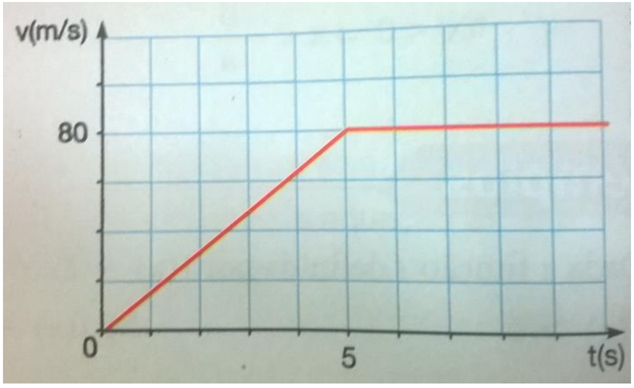
SILVA, N.; JUNQUEIRA, V. C. A E SILVEIRA, N. F. A. **Manual de Métodos de Análise Microbiológica de Alimentos.** São Paulo: Livraria Varela,1997.

APÊNDICE A – Sondagem sobre o conhecimento prévio dos alunos

DISCIPLINA: *Matemática*			PROFESSOR: *Edvânia Ribeiro*	
ANO: *1º*	TURMA:		TURNO: *Vespertino*	
ASSUNTO: *Sondagem*				BIMESTRE:
ALUNO:			DATA:	

Conhecimentos básicos sobre as funções elementares

Questão 1. *O gráfico mostra como varia a velocidade de um corpo em função do tempo.*



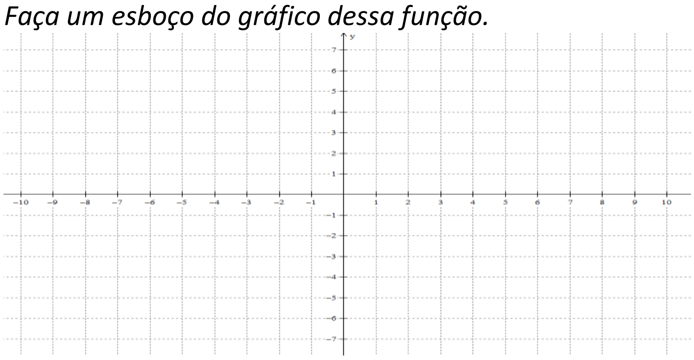
Utilizando o gráfico e suas informações, responda os itens que seguem.

1. *Qual é a velocidade do corpo no instante zero?*
2. *Qual é a lei matemática que mostra como a velocidade varia com o tempo, no intervalo de 0 a 5 segundos?*
3. *Em que instante a velocidade do corpo é de 25 m/s?*
4. *De 0 a 5 s, o que acontece com a velocidade do corpo: diminui, aumenta ou se mantém constante?*
5. *Para* $t \geq 5$*, a velocidade do corpo aumenta, diminui ou se mantém constante?*

Questão 2. *Um corpo lançado do solo verticalmente para cima tem sua posição, em função do tempo, dada pela lei* $h(t) = 40t - 5t^2$*, em que a altura* h *é dada em metros e o tempo* t *é dado em segundos.*

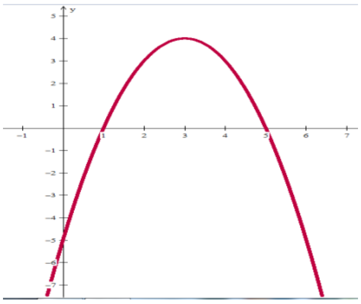
Determine:

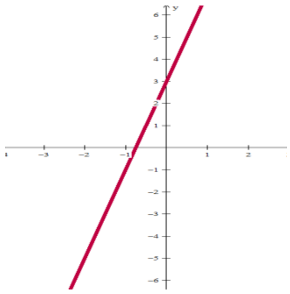
(a) Diga se a função é afim ou quadrática. Justifique sua resposta.
(b) A altura em que o corpo se encontra em relação ao solo no instante $t = 3s$*;*
(c) Os instantes em que o corpo está a uma altura de 60 *m do solo.*
(d) A altura máxima atingida pelo projétil.
(e) Faça um esboço do gráfico dessa função.

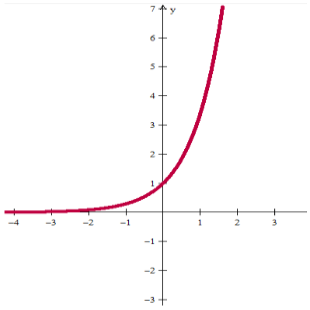


Questão 3. *Relacione cada função com seu gráfico correspondente.*

Funções: $f(x) = -5 + 6x - x^2$ $h(x) = 4x - 3$



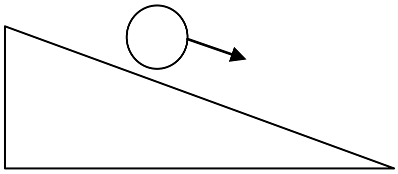




Questão 4. *Um padeiro fabrica 300 pães por hora. Considerando esse dado, pede-se:*
a)a equação que representa o número de pães fabricados (p) em função do tempo (t).

b) a quantidade de pães que são fabricados em 3 horas e 30 minutos.com seu gráfico correspondente.

Questão 5. *A fórmula d = 32* t^2 *fornece a distância d, em centímetros, que uma bola percorre descendo por um plano inclinado em t segundos.*



a) Quanto tempo a bola leva para percorrer 2 metros?
b) Construa uma tabela com valores da distância d com t variando de 0 a 5 segundos.

Questão 6. *Construa o gráfico da função* $f : R \to R$, *dada por* $f(x) = x + 1$.

APÊNDICE B – Folha do aluno – Avaliação Qualitativa por meio de relatório

DISCIPLINA: *Matemática*		PROFESSOR: *Edvânia Ribeiro*	
ANO: *1º*	TURMA:	TURNO: *Vespertino*	
ASSUNTO: *Roteiro de elaboração de um relatório*			BIMESTRE:
ALUNO:			DATA:

Na elaboração do relatório pode ter em conta, entre outros, os seguintes aspectos:

- Identificação do aluno ou grupo de alunos
- Título
- Objetivo do trabalho incluindo as questões iniciais
- Descrição do processo de investigação (incluindo tabelas e /ou esquemas, esboços de gráficos, organização dos dados recolhidos...), das tentativas realizadas e das dificuldades encontradas
- Conclusões
- A sua apreciação crítica da tarefa proposta
- Apreciação autocrítica da sua investigação no trabalho
- Bibliografia e outros materiais consultados

Aspectos que serão considerados na avaliação:

- Organização do trabalho
- Descrição e justificação dos procedimentos utilizados
- Correção e clareza dos raciocínios
- Correção e clareza da linguagem utilizada
- Criatividade

APÊNDICE C – Folha do aluno - Avaliação Quantitativa

DISCIPLINA:	*Matemática*			PROFESSOR:	*Edvânia Ribeiro*
ANO:	*1^0*	TURMA:	*D*	TURNO:	*Vespertino*
ASSUNTO:	*Avaliação sobre funções Afim e Quadráticas*			BIMESTRE:	
ALUNO:				DATA:	

Problema Uma pessoa possui um gravador de vídeo muito antigo de um contador que registra o número de voltas dadas pelo carretel da direita. A fita de 2 horas de duração está parcialmente gravada. O contador indica 850 ao final de um trecho gravado e 1000 final da fita. O problema é saber quanto tempo de gravação ainda está disponível no final da fita. Considerando que a fita se enrola em cada carretel segundo círculos concêntricos igualmente espaçados, denotemos por n o número de voltas e por T o tempo de gravação (em segundos). O que queremos é descobrir a função $T(n)$.

a) Medindo o tempo de gravação correspondente às primeiras 100, 200, 300, 400 e 500 voltas, foram encontrados os dados abaixo.

Tabela: Dados do problema.

Volta	Tempo (s)
0	0
100	540
200	1120
300	1740
400	2400
500	3100

Observando os dados da tabela, que tipo de função você escolheria para descrever a relação entre as variáveis T e n?

◯ Uma função Afim

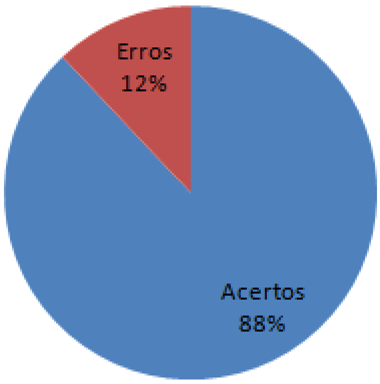
◯ Uma função Quadrática

b) De acordo com a função identificada no item (a), escolha entre os modelos $T(n) = an^2 + bn + c$ ou $T(n) = an + b$ aquele que melhor se ajusta ao problema e determine os coeficientes que definem a expressão algébrica $T(n)$.

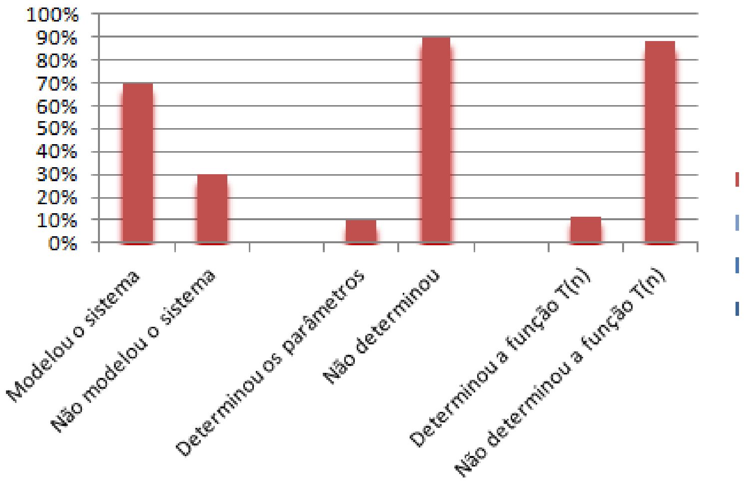
c) Quanto tempo de gravação resta na fita?

APÊNDICE D – Resultado – Gráfico de dados sobre o desempenho dos alunos na avaliação final

Item (a) – Identificação da função presente na situação- problema



Item (b) – Determinação do modelo algébrico e dos parâmetros da função



Item (c) – Quantidade de alunos que calcularam o valor numérico da função