SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

AUGUSTO LACERDA LOPES DE CARVALHO JÚNIOR

MATERIAL MULTIMÍDIA: Resolução comentada de algumas questões do nível 3 da OBMEP sobre geometria

Belém

2013

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

AUGUSTO LACERDA LOPES DE CARVALHO JÚNIOR

MATERIAL MULTIMÍDIA: Resolução comentada de algumas questões do nível 3 da OBMEP sobre geometria

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Profissional de Matemática, da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática**.**

Belém

2013

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

AUGUSTO LACERDA LOPES DE CARVALHO JÚNIOR

MATERIAL MULTIMÍDIA: Resolução comentada de algumas questões do nível 3 da OBMEP sobre geometria

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Profissional de Matemática, da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 15/04/2013

Conceito: APROVADO

Banca examinadora

PROF. DR. JOÃO PABLO PINHEIRO DA SILVA – ORIENTADOR - UFPA

PROF. DR. JOSÉ MIGUEL MARTINS VELOSO – MEMBRO - UFPA

PROF. DR. ROBERTO CARLOS DANTAS ANDRADE – MEMBRO – ESCOLA TENENTE REGO BARROS

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Carvalho Júnior, Augusto Lacerda Lopes de, 1987-

Material multimídia: resolução comentada de algumas questões do nível 3 da obmep sobre geometria / Augusto Lacerda Lopes de Carvalho Júnior. - 2013.

Orientador: João Pablo Pinheiro da Silva.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2013.

1. Multimídia interativa. 2. Geometria-Estudo e ensino (Segundo gráu). 3. Olimpíadas-Matemática. I. Título.
CDD 22. ed. 006.7

SUMÁRIO

Resumo 6

Abstract 7

Introdução 8

Questões 10

Referências 64

RESUMO

O dinamismo em apresentações multimídias proporciona a transmissão das informações através de diversos meios, principalmente no que concerne ao visual e auditivo, possibilitando uma interação com o que se está apresentando. Exposições que primam pelos aspectos textuais, gráficos, sonoros, figurais e com destaque enfático em elementos essenciais na resolução de problemas, por exemplo, auxiliam bastante na compreensão do que se está assistindo. No âmbito da educação básica, no ensino de geometria, esse recurso metodológico possibilita ao aluno uma visualização concreta dos elementos e propriedades desse ramo da matemática. Este trabalho está voltado à importância, principalmente, dos aspectos visuais durante a resolução de problemas referentes à geometria. O desenvolvimento deste trabalho é parte da produção de um material multimídia com resoluções áudio visuais e com animações de algumas questões do nível 3 das Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP elaboradas no software *Power Point*, que possibilitou a inserção de construção e animação dos elementos e figuras geométricas, e apresentadas através do software *Camtasia Studio*, ao qual se deve a edição da narração e vídeo da apresentação.

Palavras-chave: material multimídia; geometria; OBMEP; *Power Point*; *Camtasia Studio*.

ABSTRACT

The dynamism in multimedia presentations provides the transmission of information through various media, especially in relation to the visual and auditory, enabling an interaction with what is being presented. Exhibitions that strive for textual aspects, graphics, sound, and figured prominently in emphatic essential in problem solving, for example, help a lot in understanding what you are watching. Within the framework of basic education in the teaching of geometry, this feature allows the student a methodological view of concrete elements and properties of this branch of mathematics. This work focuses on the importance, especially the visual aspects during the resolution of problems related to the geometry. The development of this work is the production of a material with resolutions multimedia audio and visual animations of some issues of the Olimpíadas Brasileiras das Escolas Públicas - OBMEP prepared in Power Point software and submitted using the software Camtasia Studio.

Keywords: multimedia material; geometry; OBMEP, Power Point, Camtasia Studio.

1. INTRODUÇÃO

O seguinte trabalho é parte constituinte de um trabalho desenvolvido por um grupo de três integrantes. Sendo o trabalho integral um material multimídia contendo resoluções áudio visual de quarenta e cinco questões comentadas e com animações. Este trabalho versa sobre a resolução comentada de quinze questões do nível 3 das Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP, onde as treze primeiras questões são das provas da segunda fase e as duas últimas do Banco de Questões 2013.

As ferramentas utilizadas para a confecção do trabalho integral foram os softwares *PowerPoint* para a produção dos Slides, onde o mesmo possibilitou a construção com animações dos elementos e figuras geométricas, e o *Camtasia Studio*, que proporcionou a edição da narração e dos vídeos de cada resolução das questões.

Um dos nortes para a confecção do trabalho integral veio do fato de que existem poucos materiais desse tipo, existe muitas aulas em vídeo, mas resolução áudio visual comentada e com animações dispõem-se de muito poucas, principalmente em geometria. Ademais, os alunos, que atualmente fazem parte da educação básica, já nascem inseridos em um mundo tecnológico onde as informações são transmitidas de modo dinâmico e com diversos recursos destinados a prender sua atenção. Segundo os Parâmetros curriculares nacionais. 2. Matemática: Ensino de quinta a oitava séries

> (...) “a atual tecnologia de produção de vídeos educativos permite que conceitos, figuras, relações, gráficos sejam apresentados de forma atrativa e dinâmica. Nos vídeos, o ritmo e a cor são fatores estéticos importantes para captar o interesse do observador. Além disso, esse tipo de recurso possibilita uma observação mais completa e detalhada na medida em que permite parar a imagem, voltar, antecipar” (Brasil, 1998, p. 46).

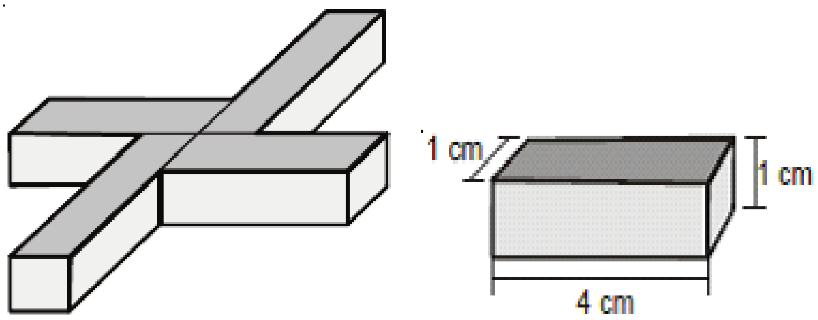
O intuito do desenvolvimento do presente trabalho foi possibilitar a compreensão através de argumentações visualmente animadas dos conceitos e propriedades inerentes à geometria proposta ao Ensino Médio da educação básica, pois nos problemas geométricos o visual é fundamental no entendimento das resoluções, principalmente nessa etapa do ensino básico onde se tem uma grande aplicação algébrica nesse campo do saber matemático, e as quais muitas vezes não são apresentadas dessa forma nos livros didáticos. Pensou-se em disponibilizar um material didático diferenciado com um enfoque tecnológico que tornará mais prazeroso o ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento matemático.

Desejamos que este trabalho sirva como um instrumento inovador na construção do conhecimento geométrico e que o mesmo seja assistido por todos os envolvidos no ensino e aprendizagem da geometria, principalmente pelos novos talentos que estão sendo revelados pela OBMEP.

2. QUESTÕES

QUESTÃO 1 (OBMEP – 2005)

Quincas Borba uniu quatro blocos retangulares de madeira, cada um com de comprimento, de largura e de altura, formando o objeto mostrado na figura.



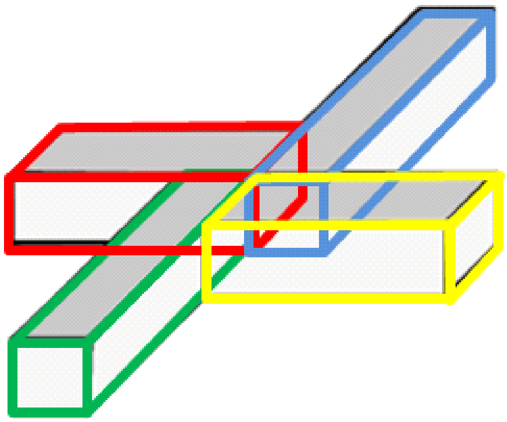
(a) Qual é o volume deste objeto?

(b) Quantas arestas tem este objeto?

(c) Qual a área da superfície deste objeto?

RESOLUÇÃO – ITEM (a)

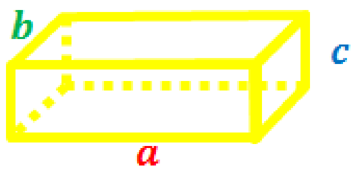
A figura é formada por paralelepípedos retângulos, observe



O volume de um paralelepípedo retângulo é dado pela fórmula

$$\boldsymbol{V = a.b.c}$$

Onde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são as dimensões do paralelepípedo, assim, consideremos



Temos do enunciado:

$\boldsymbol{a = 4\ cm}$ e $\boldsymbol{b = c = 1\ cm}$.

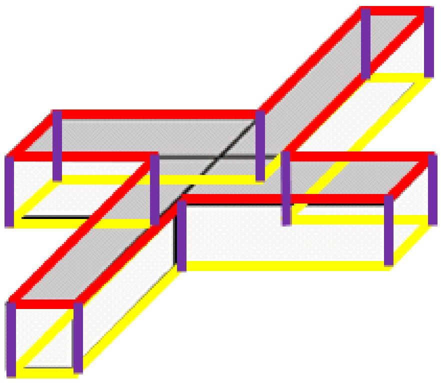
Logo,

$$\boldsymbol{V = 4\ .\ 1\ .\ 1\ cm}$$

E por fim, o volume total será $\boldsymbol{4\ .\ 4 = 16\ cm^3}$**.** Pois são $\boldsymbol{4}$ (quatro) paralelepípedos.

RESOLUÇÃO – ITEM (b)

Observando a figura e sabendo que aresta é qualquer segmento que une dois vértices consecutivos, contamos:



Base inferior: $\boldsymbol{= 12\ arestas}$

Base superior:  $\boldsymbol{= 12\ arestas}$

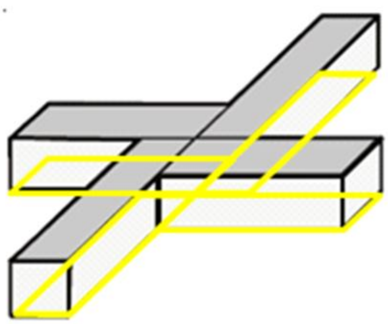
Lateral:  $\boldsymbol{= 12\ arestas}$

Logo o total de arestas é

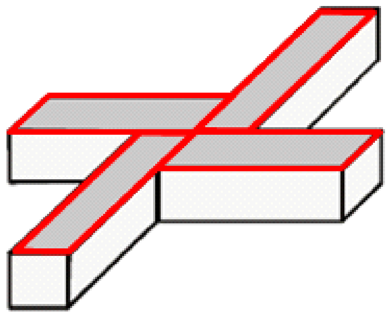
$$\boldsymbol{12 + 12 + 12 = 36}$$

RESOLUÇÃO – ITEM (c)

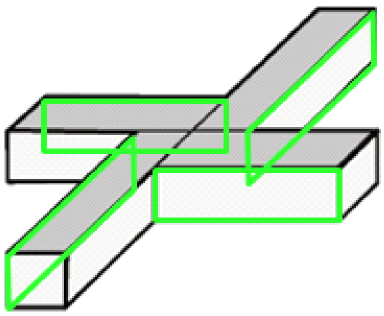
A superfície da base inferior do objeto consiste de quatro retângulos de área $\boldsymbol{4 \times 1 = 4\ cm^2}$ cada um, totalizando $\boldsymbol{16\ cm^2}$.



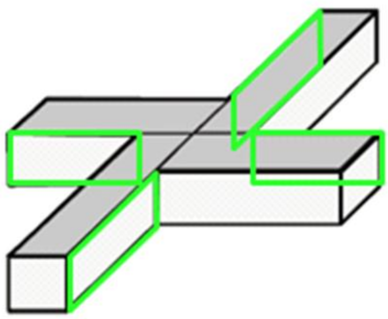
O mesmo acontece com a superfície da base superior do objeto, ou seja, a área dos quatro retângulos é $\mathbf{16}\ \boldsymbol{cm^2}$.



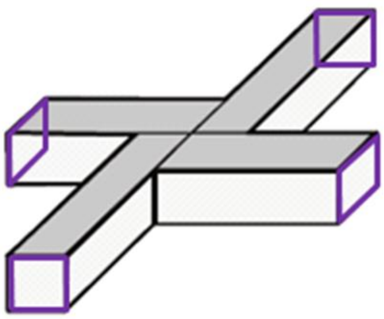
A superfície lateral consiste de quatro retângulos de área $\mathbf{4} \times \mathbf{1} = \mathbf{4}\ \boldsymbol{cm^2}$, totalizando $\mathbf{16}\ \boldsymbol{cm^2}$,



quatro retângulos de área $\mathbf{3} \times \mathbf{1} = \mathbf{3}\ \boldsymbol{cm^2}$, totalizando $\mathbf{12}\ \boldsymbol{cm^2}$



e quatro retângulos de área $\mathbf{1} \times \mathbf{1} = \mathbf{1}\ \boldsymbol{cm^2}$, totalizando $\mathbf{4}\ \boldsymbol{cm^2}$.

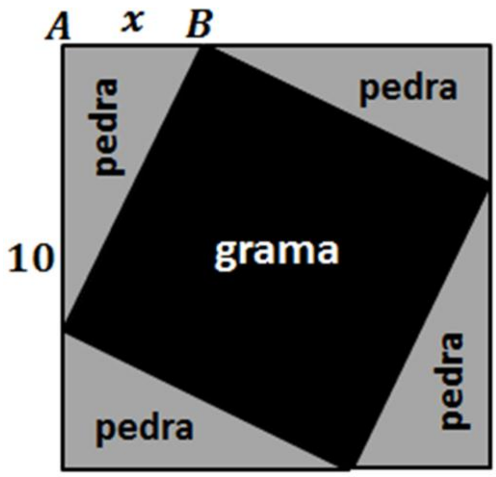


Logo a área da superfície do objeto é

$$16 + 16 + 16 + 12 + 4 = 64\ cm^2$$

QUESTÃO 2 (OBMEP – 2005)

Um prefeito quer construir uma praça quadrada de $10\,m$ de lado, que terá quatro canteiros triangulares de pedra e um canteiro quadrado de grama, como na figura. O prefeito ainda não decidiu qual será a área do canteiro de grama, e por isso o comprimento do segmento AB está indicado por x na figura.



(a) Calcule a área do canteiro de grama para $x = 2$.

(b) Escreva a expressão da área do canteiro de grama em função de x.

Sabe-se que o canteiro de grama custa R\$ $4,00$ por metro quadrado e os canteiros de pedra custam R\$ $3,00$ por metro quadrado. Use esta informação para responder aos dois itens a seguir.

(c) Qual a menor quantia que o prefeito deve ter para construir os cinco canteiros?

(d) Se o prefeito tem apenas R\$ $358,00$ para gastar com os cinco canteiros, qual é a área do maior canteiro de grama que a praça poderá ter?

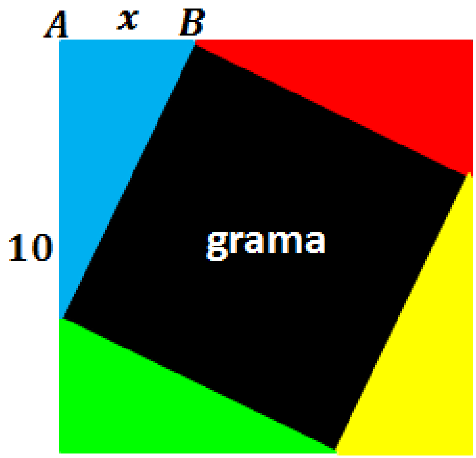
RESOLUÇÃO – ITEM (a)

Como a praça é quadrada, sua área será

$$A_{praça} = 100\ m^2$$

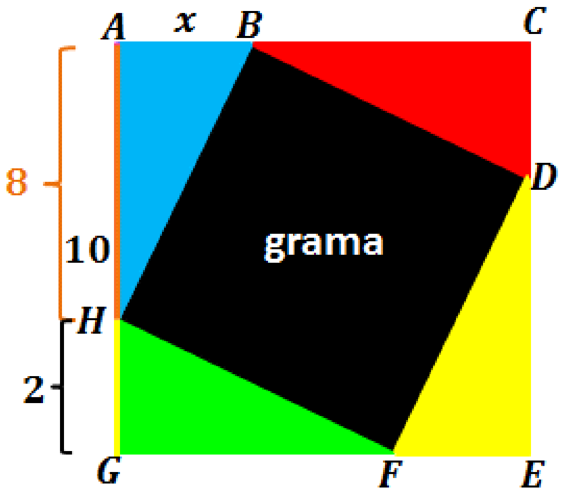
Para encontrarmos a área do canteiro de grama diminuiremos da área da praça a área dos canteiros de pedra.

Da figura temos que cada canteiro triangular é um triângulo retângulo e esses triângulos são congruentes, pois seus lados têm a mesma medida.



Denotemos os vértices de cada triângulo como abaixo.

E como, $AG = AH + HG = 10$ e $HG = AB = x = 2$. Daí $AH = 8$



A área de um triângulo é dada por:

$$A = \frac{b.h}{2}$$

Onde b é o comprimento da base e h é o comprimento da altura do triângulo.

Sendo 8 a altura e 2 a base dos triângulos retângulos. Tem-se que a área de cada um será:

$$A = \frac{2.8}{2} = 8\ m^2$$

Portanto a área dos quatro canteiros de pedra é $4.8 = 32\ m^2$.

Assim a área do canteiro de grama será:

$$A_{grama} = 100 - 32 = 68\, m^2$$

RESOLUÇÃO – ITEM (b)

Já sabemos que o canteiro de grama é um quadrado.

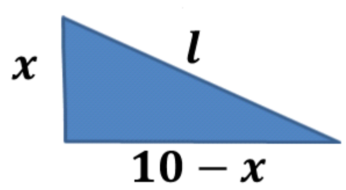
A área de um quadrado é dada pela fórmula.

$$A = l^2$$

Onde l é o tamanho do lado do quadrado.

Como os lados do quadrado são as hipotenusas dos triângulos retângulos, basta encontrarmos o valor de uma dessas hipotenusas em função de x

Temos da figura o seguinte triângulo retângulo



Denotemos por l sua hipotenusa.

Do Teorema de Pitágoras, temos

$$l^2 = x^2 + (10 - x)^2$$

$$l^2 = x^2 + 100 - 20x + x^2$$

$$l^2 = 2x^2 - 20x + 100$$

Assim a área do canteiro de grama será dada por:

$$A = 2x^2 - 20x + 100$$

RESOLUÇÃO – ITEM (c)

Denotemos por

$$A_P(x)\text{: Área de cada canteiro de pedra em função de } x$$

$$A_G(x)\text{: Área do canteiro de grama em função de } x$$

$$C_P(x)\text{: Custo dos canteiros de pedra em função de } x$$

$$C_G(x)\text{: Custo do canteiro de grama em função de } x$$

$$C_T(x): \; Custo\ dos\ cinco\ canteiros\ em\ função\ de\ x$$

Temos,

$$\boldsymbol{A_P(x) = \frac{x.(10-x)}{2}} \quad \textbf{e} \quad \boldsymbol{A_G(x) = 2x^2 - 20x + 100}$$

$$\boldsymbol{C_P(x) = 3.4.\frac{x.(10-x)}{2} = 60x - 6x^2}$$

$$\boldsymbol{C_G(x) = 4.(2x^2 - 20x + 100) = 8x^2 - 80x + 400}$$

$$\boldsymbol{C_T(x) = 60x - 6x^2 + 8x^2 - 80x + 400}$$

$$\boldsymbol{C_T(x) = 2x^2 - 20x + 400}$$

Lembremos que dada uma função quadrática da forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, com $\boldsymbol{a > 0}$, seu valor mínimo é assumido quando $\boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}}$.

Comparando com a função

$$\boldsymbol{C_T(x) = 2x^2 - 20x + 400}$$

Temos que o valor mínimo é assumido quando

$$\boldsymbol{x = -\frac{(-20)}{2.2} = 5}$$

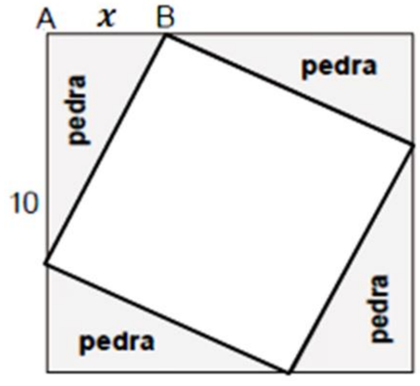
Assim o menor valor que o prefeito precisa ter para construir os cinco canteiros é:

$$\boldsymbol{C_T(5) = 2.5^2 - 20.5 + 400 = 350\ reais}$$

RESOLUÇÃO – ITEM (d)

Se o prefeito construir uma praça cujo canteiro de grama tem área de $\boldsymbol{a\ m^2}$, então o custo total da praça em reais será dado por

$$\boldsymbol{4a + 3(100 - a) = 300 + a}$$



Vemos que o custo cresce quando $\boldsymbol{a}$ cresce.

Deste modo a área máxima do canteiro de grama corresponde ao máximo que o prefeito pode gastar, que é R$ **358,00**.

Assim

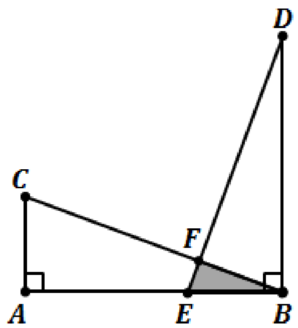
$$\mathbf{300} + \boldsymbol{a} = \mathbf{358}$$

$$\boldsymbol{a} = \mathbf{58}\ \boldsymbol{m^2}$$

Logo o maior canteiro de grama que o prefeito pode construir com R$ $\mathbf{358,00}$ tem área $\mathbf{58}\ \boldsymbol{m^2}$**.**

QUESTÃO 3 (OBMEP – 2006)

Na figura, os triângulos $\boldsymbol{ABC}$ e $\boldsymbol{BDE}$ são congruentes e os ângulos $\boldsymbol{B\hat{A}C}$ e $\boldsymbol{D\hat{B}E}$ são retos.



(a) Ache a razão entre a área do triângulo $\boldsymbol{BDF}$ e a área do quadrilátero $\boldsymbol{AEFC}$.

(b) Determine a medida do ângulo $\boldsymbol{B\hat{F}E}$.

(c) Sabendo que $\boldsymbol{AB} = \mathbf{12}$ e $\boldsymbol{AC} = \mathbf{5}$, calcule a área do triângulo $\boldsymbol{EFB}$.

RESOLUÇÃO – ITEM (a)

Como os triângulos $\boldsymbol{ABC}$ e $\boldsymbol{BDE}$ são congruentes, temos

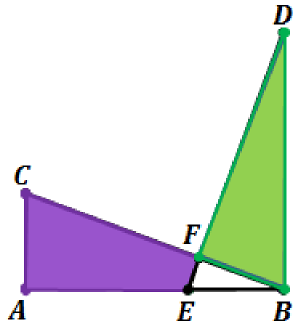
$$\acute{a}rea\ de\ \boldsymbol{ABC} = \acute{a}rea\ de\ \boldsymbol{BDE}$$

Dai,

$$\acute{a}rea\ de\ \boldsymbol{AEFC} = \acute{a}rea\ de\ \boldsymbol{ABC} - \acute{a}rea\ de\ \boldsymbol{BFE}$$

$$\acute{a}rea\ de\ \boldsymbol{AEFC} = \acute{a}rea\ de\ \boldsymbol{BDE} - \acute{a}rea\ de\ \boldsymbol{BFE}$$

$$\text{área de } \boldsymbol{AEFC} = \text{área de } \boldsymbol{BDF}$$



Portanto, a razão pedida é

$$\frac{\text{área de } \boldsymbol{BDF}}{\text{área de } \boldsymbol{AEFC}} = 1$$

RESOLUÇÃO – ITEM (b)

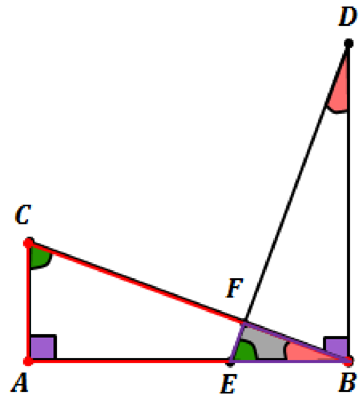
Como os triângulos $\boldsymbol{ABC}$ e $\boldsymbol{BDE}$ são congruentes, temos

$$\boldsymbol{B\hat{A}C} = \boldsymbol{D\hat{B}E}$$

$$\boldsymbol{A\hat{C}B} = \boldsymbol{B\hat{E}D}$$

$$\boldsymbol{C\hat{B}A} = \boldsymbol{E\hat{D}B}$$

Observando a figura vemos que os triângulos $\boldsymbol{CAB}$ e $\boldsymbol{EFB}$ são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo (AA) de semelhança.



Basta notar que

$$\boldsymbol{E\hat{B}F} = \boldsymbol{C\hat{B}A}$$

$$\boldsymbol{F\hat{E}B} = \boldsymbol{A\hat{C}B}$$

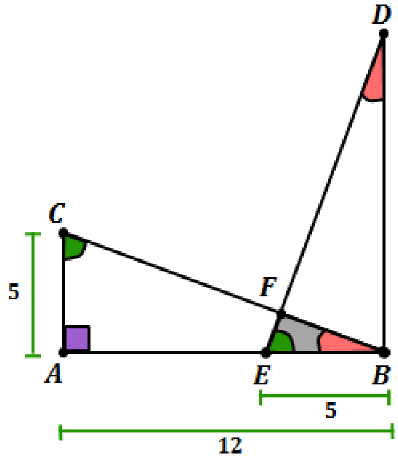
Portanto

$$E\hat{F}B = C\hat{A}B = 90^{o}$$

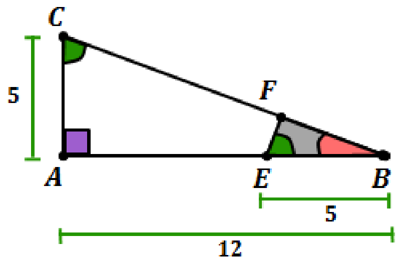
RESOLUÇÃO – ITEM (c)

Como os triângulos ABC e BDE são congruentes, temos

$$BE = AC = 5$$



Trabalhemos apenas com os triângulos que nos convém.



Os triângulos CAB e EFB são semelhantes, conforme visto no item (b), logo

$$\frac{FE}{AC} = \frac{FB}{AB}$$

Ou seja,

$$\frac{FE}{5} = \frac{FB}{12}$$

Portanto,

$$FE = \frac{5FB}{12}$$

A área do triângulo EFB será dada por

$$\boldsymbol{A = \frac{FB.FE}{2}}$$

$$\boldsymbol{A = \frac{FB.\frac{5FB}{12}}{2} = \frac{5FB^2}{24}}$$

Para encontrarmos $\boldsymbol{FB^2}$ utilizaremos o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $\boldsymbol{EFB}$.

Logo

$$\boldsymbol{BE^2 = FE^2 + FB^2}$$

$$\boldsymbol{5^2 = \left(\frac{5FB}{12}\right)^2 + FB^2}$$

$$\boldsymbol{FB^2 = \frac{3600}{169}}$$

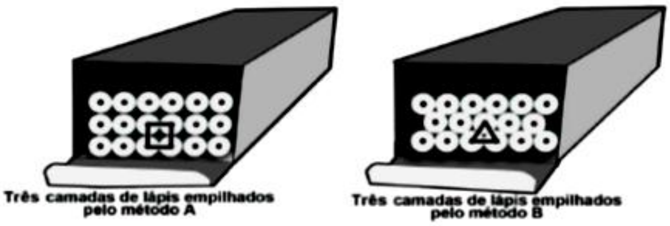
Por fim a área do triângulo $\boldsymbol{EFB}$ será

$$\boldsymbol{A = \frac{5FB^2}{24} = \frac{5.\frac{3600}{169}}{24}}$$

$$\boldsymbol{A = \frac{750}{169}\ u.d.a}$$

QUESTÃO 4 (OBMEP – 2006)

Rodrigo coloca lápis cilíndricos de $\boldsymbol{15\ cm}$ de comprimento e $\boldsymbol{1\ cm}$ de diâmetro em caixas na forma de bloco retangular com base de dimensões $\boldsymbol{6\ cm}$ por $\boldsymbol{15\ cm}$. Ele empilha os lápis nas caixas usando dois métodos diferentes, ilustrados a seguir:



No método A, os centros dos círculos formam quadrados e, no método B, triângulos equiláteros, como na figura.

(a) Mostre que cada camada de lápis empilhados pelo método B, exceto a primeira, acrescenta $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\boldsymbol{cm}$ à altura da pilha.

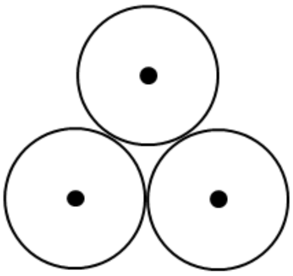
Para resolver os próximos itens, use a aproximação $\mathbf{0,\ 87}$ para $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) Rodrigo quer colocar $\mathbf{90}$ lápis em uma caixa. Qual a menor altura que a caixa deve ter se ele usar o método A? E se ele usar o método B?

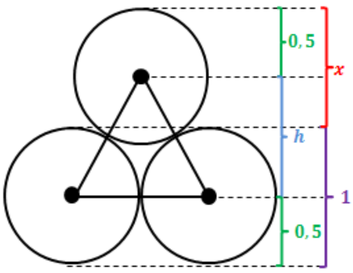
(c) Olímpico mostrou a Rodrigo como empacotar $\mathbf{90}$ lápis em uma caixa de altura $\mathbf{14,\ 5}\ \boldsymbol{cm}$. Como isso pode ser feito?

RESOLUÇÃO – ITEM (a)

Observemos o que ocorre ao acrescentarmos uma nova camada utilizando o método B, para melhor visualização ampliamos uma parte da figura.

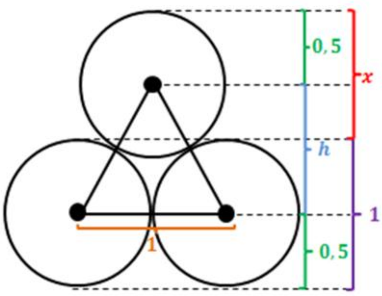


Façamos a seguinte representação.



Queremos determinar $\boldsymbol{x}$. Onde $\boldsymbol{h}$ é a altura do triângulo equilátero formado pelos centros das três circunferências tangentes duas a duas.

Observe que a medida do lado do triângulo equilátero é $\mathbf{1}$.



Dai,

$$h = l\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto,

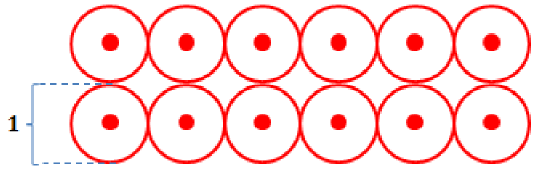
$$x + 1 = 0,5 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,5$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}\ cm$$

RESOLUÇÃO – ITEM (b)

Método A

Cada camada tem exatamente $\mathbf{6}$ lápis.

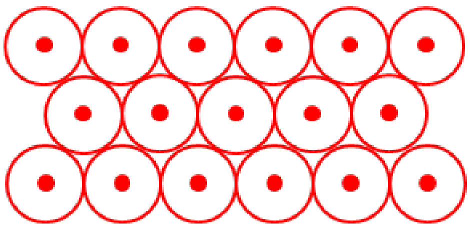


Logo para empilhar $\mathbf{90}$ lápis serão necessárias $\mathbf{90 \div 6 = 15}$ camadas.

Como a altura de cada camada é $\mathbf{1\ cm}$.

A altura mínima da caixa deve ser de $\mathbf{15\ cm}$.

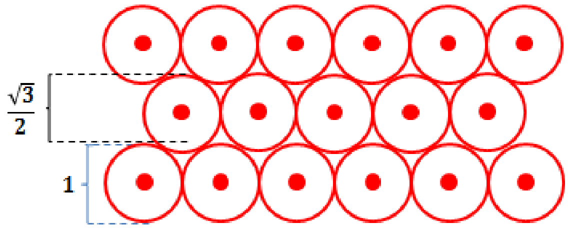
Método B



Utilizando o método B, alternam-se fileiras de $\mathbf{6}$ e de $\mathbf{5}$ lápis, de forma que cada duas fileiras contêm $\mathbf{11}$ lápis. Dai,

$$\begin{array}{r|l} 90 & 11 \\ \hline 2 & 8 \end{array}$$

Ou seja, serão necessárias $\mathbf{8 \times 2 = 16}$ fileiras para empilhar $\mathbf{8 \times 11 = 88}$ lápis e uma $\mathbf{17^{a}}$ fileira para comportar os $\mathbf{2}$ lápis que faltam.



Assim a altura da pilha será.

$$1\ cm + 16.\frac{\sqrt{3}}{2}\ cm$$

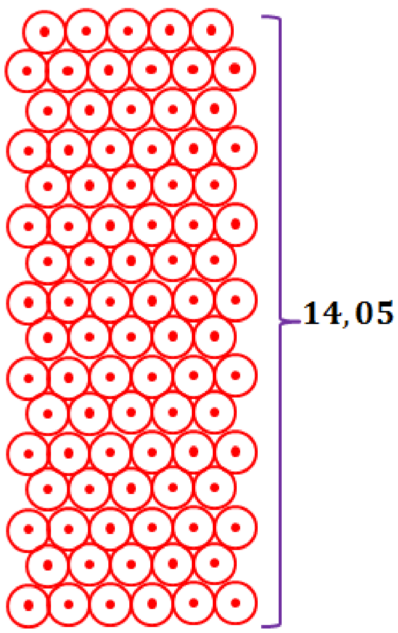
$$1\ cm + 16.0{,}87\ cm$$

$$14{,}92\ cm$$

RESOLUÇÃO – ITEM (c)

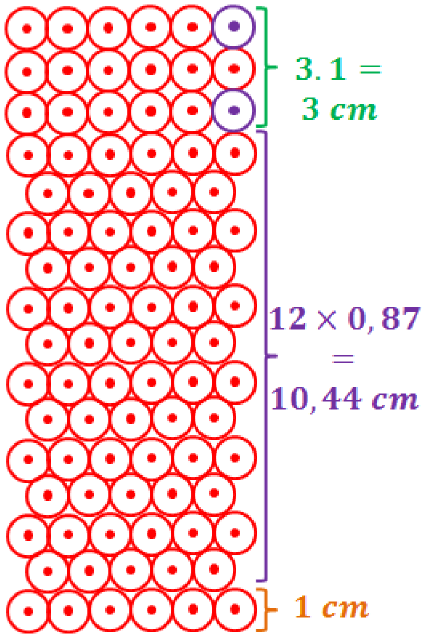
Perceba que não podemos utilizar apenas o método A, pois assim precisaríamos de uma caixa com altura de no mínimo $\mathbf{15\ cm}$, tampouco podemos utilizar apenas o método B, pois daí precisaríamos de uma caixa com altura de no mínimo $\mathbf{14{,}92\ cm}$. A ideia a seguir é utilizar os dois métodos simultaneamente.

Do item (b) temos que pelo Método B $\mathbf{88}$ lápis podem ser empilhados com uma altura de $\mathbf{1 + 15.0{,}87 = 14{,}05\ cm}$ ($\mathbf{16}$ fileiras)**.**



Dai faltam $\mathbf{2}$ lápis a serem empilhados, podemos empilhá-los colocando-os em duas fileiras com $\mathbf{5}$ lápis cada.

Ao colocarmos os $\mathbf{2}$ lápis, por exemplo, como abaixo,



Temos as medidas indicadas acima.

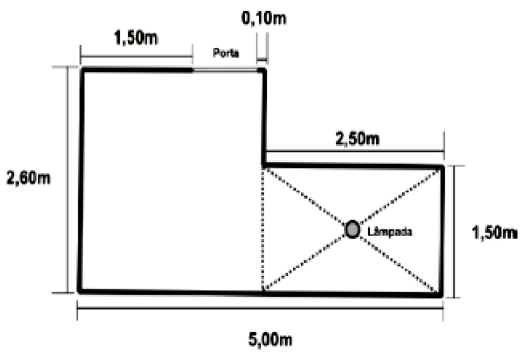
Portanto a altura da pilha será.

$$\mathbf{3 + 10,44 + 1}$$

$$\mathbf{14,44\ cm}$$

QUESTÃO 5 (OBMEP – 2007)

A figura mostra a planta do quarto do Pinhão. Todos os ângulos entre paredes são retos e a porta tem $\mathbf{90\ cm}$ de largura. Nessa questão, não consideramos a espessura das paredes.

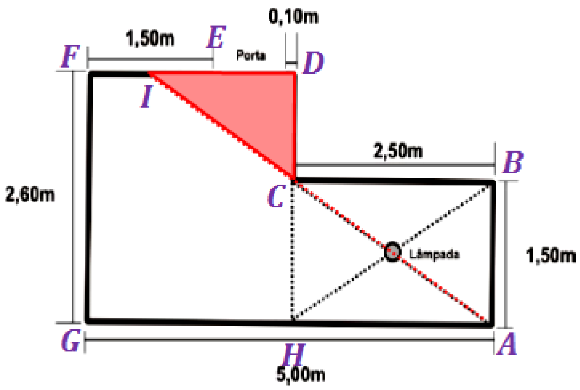


(a) Uma lâmpada foi colocada no teto, na posição indicada na figura. Desenhe na planta a parte do chão que **não** será iluminada diretamente por essa lâmpada e calcule a área dessa parte.

(b) A cama do Pinhão mede $2,00\ m$ por $1,60\ m$ e foi colocada na posição indicada na figura abaixo. Nessa situação, é possível abrir a porta sem que ela toque na cama? Por quê?

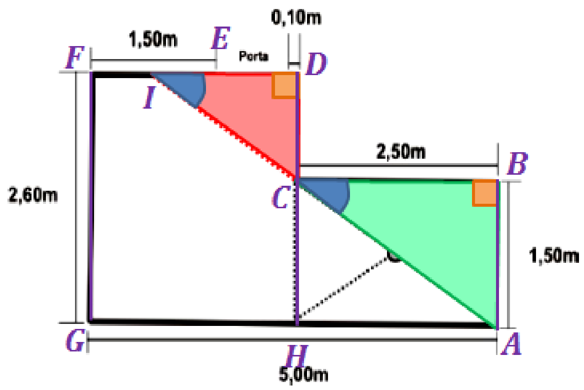
RESOLUÇÃO – ITEM (a)

Denotemos os vértices como segue e sabendo que a luz se propaga em linha reta, a área do chão que não será iluminada diretamente pela lâmpada, pode ser vista como segue.



Basta então encontrar a área do triângulo CDI.

O triângulo CDI é semelhante ao triângulo ABC pelo caso ângulo-ângulo (AA) de semelhança.



A razão de semelhança é

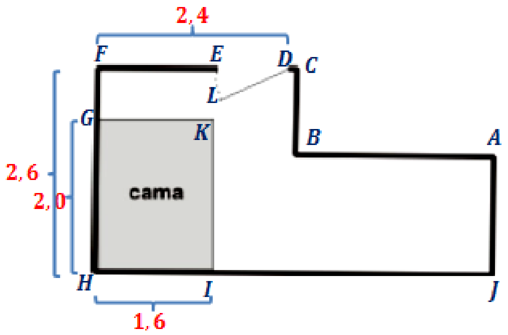
$$\frac{CD}{AB} = \frac{FG - CH}{1,50} = \frac{2,60 - 1,50}{1,50} = \frac{11}{15}$$

Representaremos a $área(\boldsymbol{CDI})$ por $\boldsymbol{A}$ e a $área(\boldsymbol{ABC})$ por $\bar{\boldsymbol{A}}$, daí

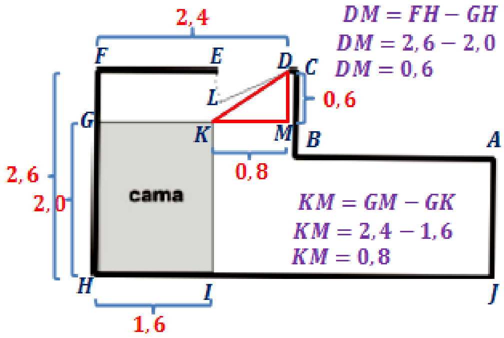
$$\boldsymbol{A} = \left(\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{15}}\right)^{\mathbf{2}}.\bar{\boldsymbol{A}} = \frac{\mathbf{121}}{\mathbf{225}}.\frac{\mathbf{2,50.1,50}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{121}}{\mathbf{120}}\ \boldsymbol{m}^{\mathbf{2}}$$

RESOLUÇÃO – ITEM (b)

Denotemos os vértices e as medidas dadas no enunciado como segue.



Devemos encontrar o tamanho de $\boldsymbol{KD}$. Para tanto analisemos o triângulo $\boldsymbol{KMD}$**,** e assim temos



Logo,

$$\boldsymbol{KD}^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{KM}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{MD}^{\mathbf{2}}$$

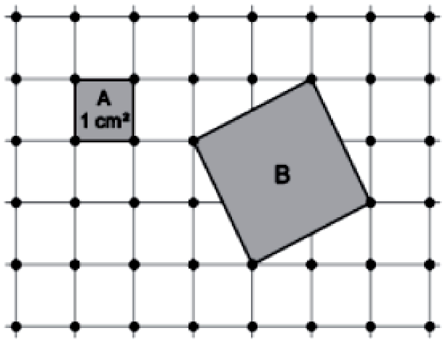
$$\boldsymbol{KD}^{\mathbf{2}} = \mathbf{0,8}^{\mathbf{2}} + \mathbf{0,6}^{\mathbf{2}}$$

$$\boldsymbol{KD} = \mathbf{1}$$

Como $\boldsymbol{DL} = \mathbf{0,9}$, vemos que a porta vai passar a $\mathbf{10}\ \boldsymbol{cm}$ da cama.

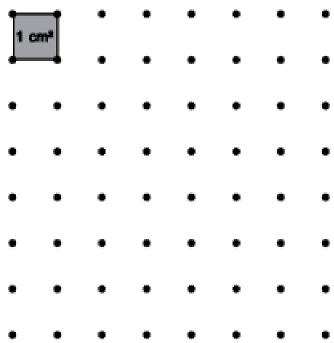
QUESTÃO 6 (OBMEP – 2008)

Numa folha de papel marcamos pontos igualmente espaçados na horizontal e na vertical, de modo que o quadrado $\boldsymbol{A}$ tenha área $\mathbf{1}\ \boldsymbol{cm2}$, como na figura. Dizemos que um quadrado é legal se seus vértices são quatro desses pontos; por exemplo, os quadrados $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são legais.



(a) Qual é a área do quadrado $\boldsymbol{B}$?

(b) Desenhe na figura um quadrado legal de área $\mathbf{13}\ \boldsymbol{cm^2}$.

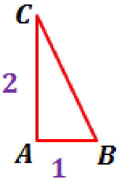


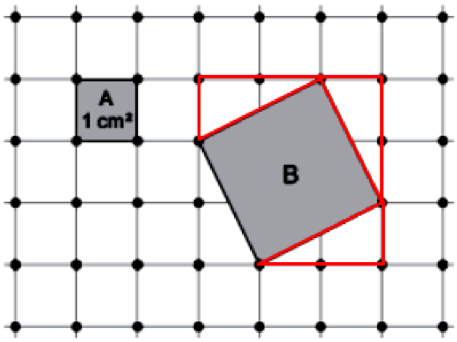
(c) Existe um quadrado legal de área $\mathbf{41}\ \boldsymbol{cm^2}$? E de área $\mathbf{43}\ \boldsymbol{cm^2}$? Justifique sua resposta.

(d) Mostre que para cada quadrado legal existe outro quadrado legal com o dobro de sua área.

RESOLUÇÃO – ITEM (a)

Basta encontrarmos o quadrado da hipotenusa de um dos triângulos retângulos seguintes.





Logo,

$$\boldsymbol{CB^2 = 2^2 + 1^2}$$

$$\boldsymbol{CB^2 = 5}$$

Portanto a área do quadrado $\boldsymbol{B}$ é $\boldsymbol{5\ cm^2}$.

RESOLUÇÃO – ITEM (b)

Como $\mathbf{13}$ não é quadrado perfeito então o quadrado será desenhado como o quadrado $\boldsymbol{B}$ do item (a).

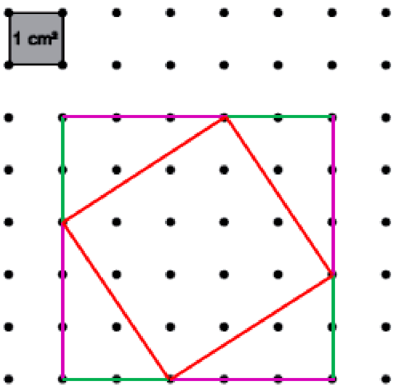
Como no item (a) $\mathbf{13}$ é quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ inteiros.

Veja que o maior valor para $\boldsymbol{a}$ ou $\boldsymbol{b}$ é $\mathbf{3}$. Pois $\mathbf{4^2 = 16 > 13}$.

Também não pode ser $\boldsymbol{a}$ ou $\boldsymbol{b}$ iguais a $\mathbf{1}$. Pois, se $\boldsymbol{a = 1}$, $\boldsymbol{b}$ poderia ser no máximo $\mathbf{3}$, e assim $\boldsymbol{a^2 + b^2 = 10}$.

Resta-nos então $\boldsymbol{a = 2}$ e $\boldsymbol{b = 3}$ ou vice-versa.

Observe que $\mathbf{13 = 2^2 + 3^2}$.



RESOLUÇÃO – ITEM (c)

Como visto nos itens (a) e (b) devemos encontrar os catetos $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ de um triângulo retângulo tais que $\boldsymbol{a^2 + b^2 = 41}$.

$\boldsymbol{a}$ ou $\boldsymbol{b}$ não podem ser $\mathbf{7}$, visto que $\mathbf{7^2 = 49}$.

Não pode também $\boldsymbol{a}$ ou $\boldsymbol{b}$ serem $\mathbf{1}$ ou $\mathbf{2}$, visto que $\mathbf{2^2 = 4}$ e $\mathbf{1^2 = 1}$, pois daí, $\boldsymbol{a}$ ou $\boldsymbol{b}$ poderiam ser no máximo $\mathbf{6}$ e $\mathbf{6^2 = 36}$.

Resta-nos então que $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ podem ser $\mathbf{3}$, $\mathbf{4}$, $\mathbf{5}$ ou $\mathbf{6}$.

Por tentativas encontramos $\boldsymbol{a = 4}$ e $\boldsymbol{b = 5}$.

Para que exista uma quadrado legal de área $\boldsymbol{43\ cm^2}$, procedemos como anteriormente e tentamos encontrar catetos $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ de um triângulo retângulo tais que $\boldsymbol{a^2 + b^2 = 43.}$

Dos argumentos anteriores vemos que $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ podem ser $\boldsymbol{3,\ 4,\ 5}$ ou $\boldsymbol{6.}$

No entanto,

$$\boldsymbol{3^2 + 4^2 = 25}$$

$$\boldsymbol{3^2 + 5^2 = 34}$$

$$\boldsymbol{3^2 + 6^2 = 45}$$

$$\boldsymbol{4^2 + 5^2 = 41}$$

$$\boldsymbol{4^2 + 6^2 = 52}$$

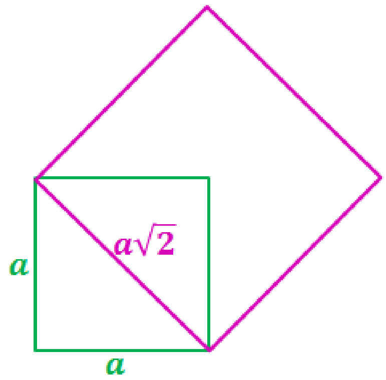
$$\boldsymbol{5^2 + 6^2 = 61}$$

Assim vemos que não existe um quadrado legal de área $\boldsymbol{43\ cm^2}$.

RESOLUÇÃO – ITEM (d)

Se o quadrado legal é do tipo do quadrado $\boldsymbol{A}$ do item (a), e seu lado mede, digamos $\boldsymbol{a}$, então sua área vale $\boldsymbol{s = a^2}$.

Para construirmos um quadrado que tem área igual ao dobro da área do quadrado verde basta que tomemos seu lado medindo $\boldsymbol{a\sqrt{2}}$.

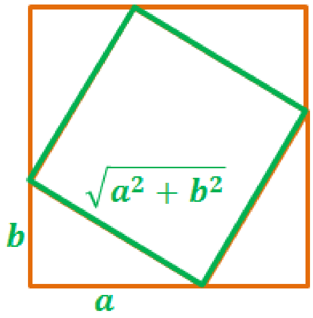


Observe que a área $\boldsymbol{S}$ do quadrado rosa é $\boldsymbol{S} = \left(\boldsymbol{a\sqrt{2}}\right)^2 = \boldsymbol{2a^2 = 2s}$.

Se o quadrado legal é do tipo do quadrado $\boldsymbol{B}$ do item (a), então sua área vale $s = a^2 + b^2$, para a e b inteiros; reciprocamente se $s = a^2 + b^2$ para a e b inteiros então existe um quadrado legal de área s. Sendo a e b os catetos do triângulo retângulo cuja hipotenusa é igual a medida do lado do quadrado legal.

Observe que a área do quadrado verde é

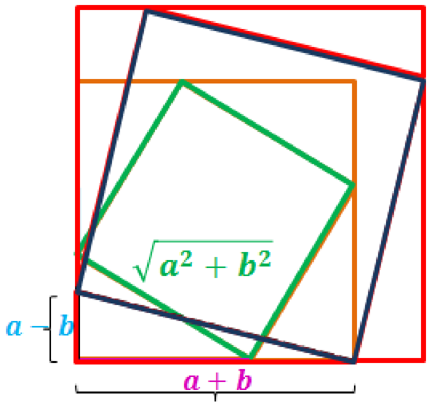
$$s = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = a^2 + b^2.$$



Temos,

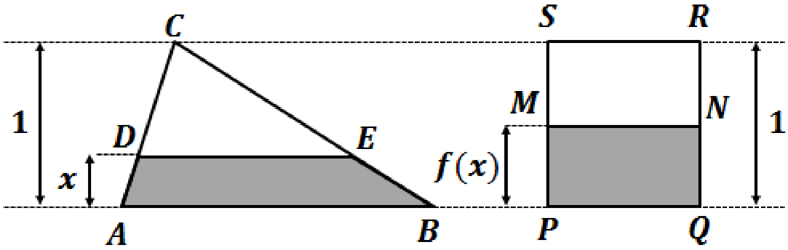
$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2 = 2(a^2 + b^2) = 2s$$



QUESTÃO 7 (OBMEP – 2008)

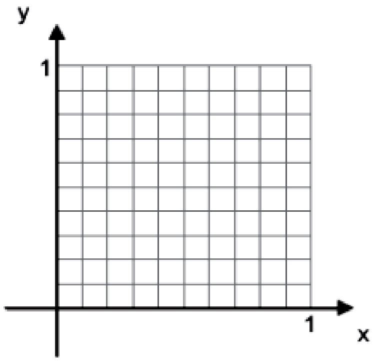
Na figura, o triângulo ABC e o retângulo $PQRS$ têm a mesma área e a mesma altura 1. Para cada valor de x entre 0 e 1 desenha-se o trapézio $ABED$ de altura x e depois o retângulo $PQNM$ de área igual à do trapézio, como na figura. Seja f a função que associa a cada x a altura do retângulo $PQNM$.



(a) Qual é a razão entre $\boldsymbol{AB}$ e $\boldsymbol{PQ}$?

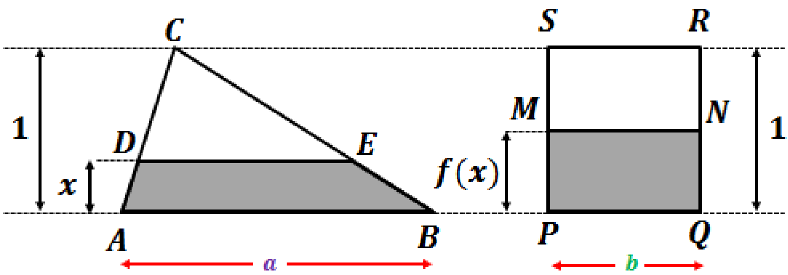
(b) Qual é o valor de $\boldsymbol{f}\left(\frac{1}{2}\right)$?

(c) Ache a expressão de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ e desenhe o gráfico de $\boldsymbol{f}$.



RESOLUÇÃO – ITEM (a)

Sejam $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{PQ} = \boldsymbol{b}$



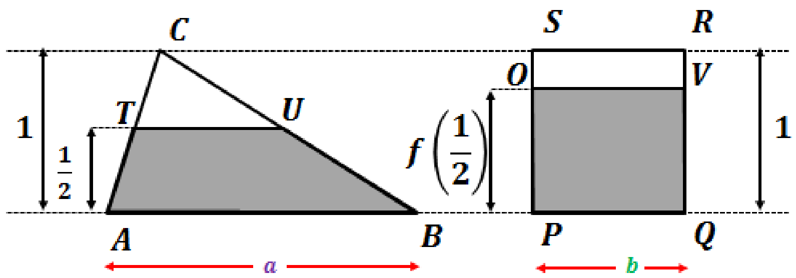
Temos do enunciado que $(\acute{a}rea)\boldsymbol{ABC} = (\acute{a}rea)\boldsymbol{PQRS}.$

$$(\acute{a}rea)\boldsymbol{ABC} = \frac{\boldsymbol{a}.\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}} \quad \text{e} \quad (\acute{a}rea)\boldsymbol{PQRS} = \boldsymbol{b}.\mathbf{1} = \boldsymbol{b}$$

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \mathbf{2}$$

RESOLUÇÃO – ITEM (b)

Para $\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ temos



Lembremos que a fórmula que calcula a área de um trapézio é dada por $A = \frac{(B+b)h}{2}$, onde B é a medida da base maior, b é a medida da base menor e h é a medida da altura do trapézio.

TU é base média do triângulo ABC logo $TU = \frac{a}{2}$.

$$(área)ABUT = \frac{\left(a + \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{8}a$$

$$(área)PQVO = b . f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Como

$$(área)PQVO = (área)ABUT$$

$$b . f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}a$$

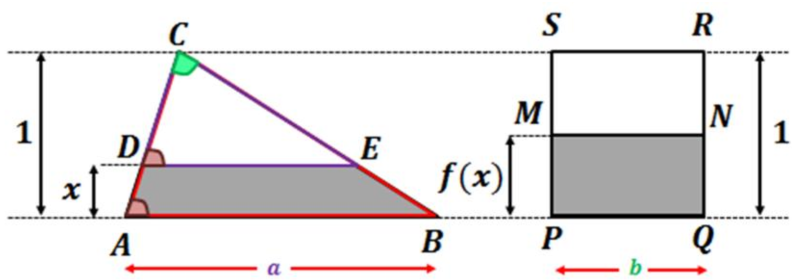
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}\frac{a}{b}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} . 2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

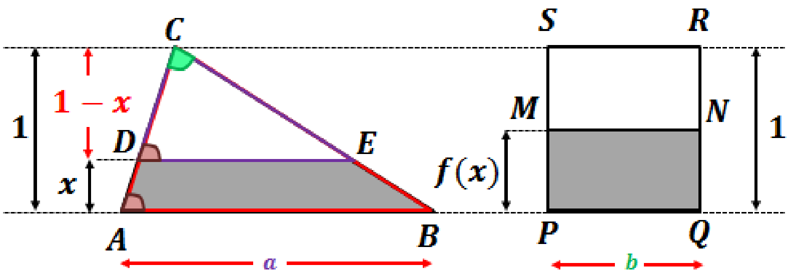
RESOLUÇÃO – ITEM (c)

Como no item (b) vamos encontrar primeiro a área do trapézio $ABED$. Para tanto, devemos encontrar a medida de DE.



AB é paralelo a DE. Assim os triângulos ABC e DEC são semelhantes.

Observe que a altura do triângulo DEC é $1-x$, e da semelhança temos



$$\frac{1-x}{1}=\frac{DE}{a} \quad \Rightarrow \quad DE=a(1-x)$$

$$(área)ABED=\frac{\big(a+a(1-x)\big)x}{2}=a\frac{(2x-x^2)}{2}$$

A área do retângulo $PQNM$ será

$$(área)PQNM=b.f(x)$$

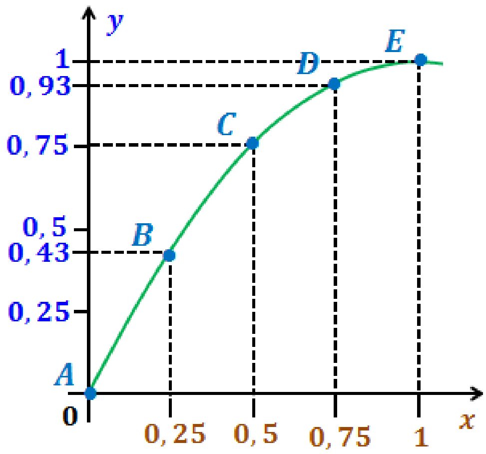
Como $(área)PQNM=(área)ABED$ temos

$$b.f(x)=a\frac{(2x-x^2)}{2}$$

$$f(x)=\frac{a}{b}\frac{(2x-x^2)}{2}=2\frac{(2x-x^2)}{2}=2x-x^2$$

Um esboço do gráfico da função f definida por $f(x)=2x-x^2$, no intervalo $0\leq x\leq 1$, é obtido com a ajuda da seguinte tabela.

x	$f(x)=2x-x^2$	y
0	$f(0)=2.0-0^2$	0
$0,25$	$f(0,25)=2.0,25-(0,25)^2$	$0,43$
$0,5$	$f(0,5)=2.0,5-(0,5)^2$	$0,75$
$0,75$	$f(0,75)=2.0,75-(0,75)^2$	$0,93$
1	$f(1)=2.1-1^2$	1



QUESTÃO 8 (OBMEP – 2008)

Quando um raio de luz incide sobre um espelho plano, ele é refletido de modo a fazer ângulos iguais com o espelho, conforme ilustrado na figura $\mathbf{1}$.

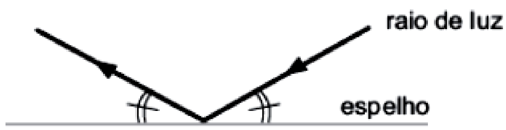


Figura 1

A figura $\mathbf{2}$ mostra dois espelhos que se encontram formando um ângulo $\boldsymbol{\alpha}$. Um raio de luz, paralelo ao espelho $\boldsymbol{I}$, atinge o espelho $\boldsymbol{II}$ no ponto $\boldsymbol{A}$ e é refletido três vezes, até incidir perpendicularmente ao espelho $\boldsymbol{I}$ no ponto $\boldsymbol{D}$.

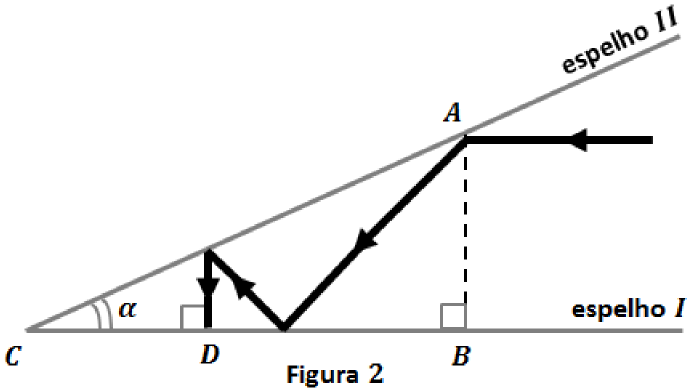


Figura 2

(a) Qual é a medida do ângulo $\boldsymbol{\alpha}$?

(b) Seja $\boldsymbol{AB}$ perpendicular ao espelho $\boldsymbol{I}$, como na figura $\mathbf{2}$. Se $\boldsymbol{AB} = \mathbf{10}\ \boldsymbol{cm}$, qual é o comprimento de $\boldsymbol{CD}$?

RESOLUÇÃO – ITEM (a)

Como o raio é incidido paralelamente ao espelho $\boldsymbol{I}$ e refletido no espelho $\boldsymbol{II}$, temos que os seguintes ângulos são iguais a $\boldsymbol{\alpha}$.

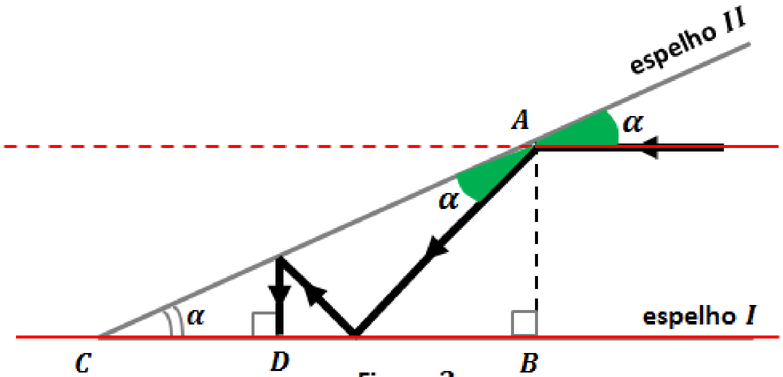


Figura 2

Ainda sobre a reflexão do raio, temos que os seguintes pares de ângulos são iguais.

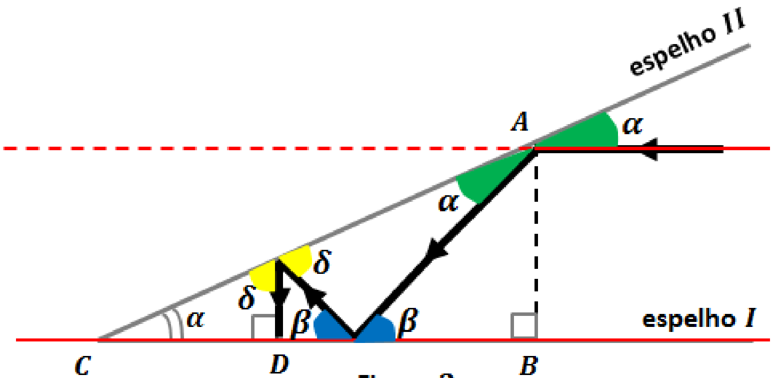


Figura 2

Na figura, consideremos os seguintes pontos

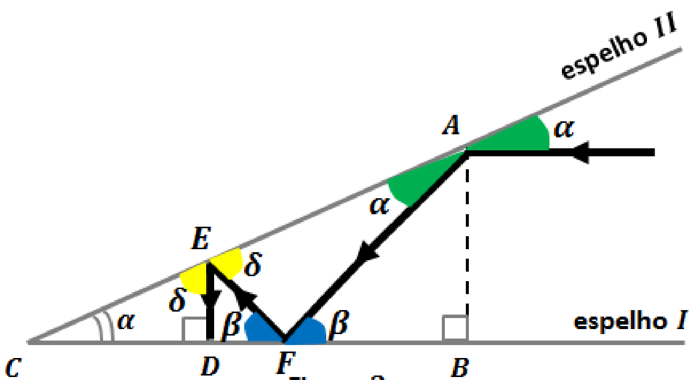


Figura 2

Temos que $\boldsymbol{\beta}$ é ângulo externo do triângulo $\boldsymbol{ACF}$ e $\boldsymbol{\delta}$ é ângulo externo do triângulo $\boldsymbol{ECF}$, logo

$$\boldsymbol{\beta = 2\alpha}$$

$$\boldsymbol{\delta = \alpha + \beta = \alpha + 2\alpha = 3\alpha}$$

No triângulo $\boldsymbol{FED}$, o ângulo $\boldsymbol{F\hat{E}D = 90^o - \beta}$

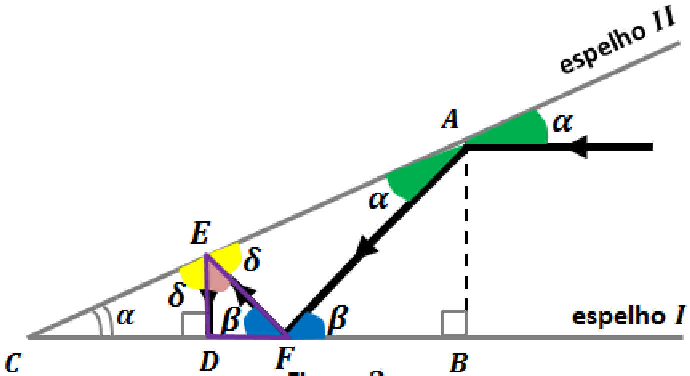


Figura 2

Assim,

$$\boldsymbol{\delta + 90^o - \beta + \delta = 180^o}$$

$$\boldsymbol{3\alpha + 90^o - 2\alpha + 3\alpha = 180^o}$$

$$\boldsymbol{4\alpha = 90^o}$$

$$\boldsymbol{\alpha = 22,5^o}$$

RESOLUÇÃO – ITEM (b)

Temos do item (a) que $\boldsymbol{\alpha = 22,5^o}$, daí

$$\boldsymbol{\beta = 2\alpha = 2.22,5^o = 45^o}$$

Temos ainda que o ângulo $\boldsymbol{B\hat{A}F = 45^o}$, pois é o complemento do ângulo $\boldsymbol{\beta}$.

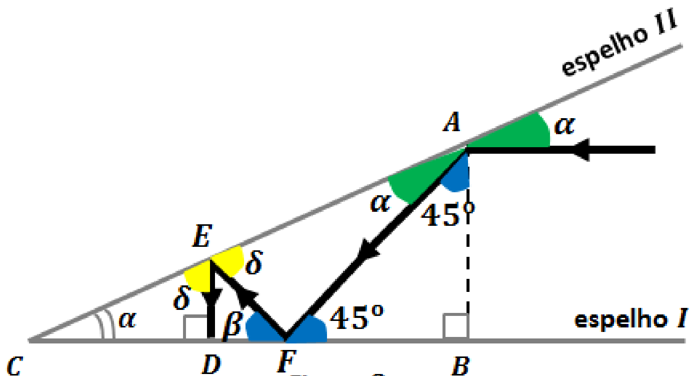


Figura 2

Assim o triângulo $\boldsymbol{ABF}$ é isósceles de lados $\boldsymbol{AB = BF = 10\ cm}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $\boldsymbol{ABF}$ obtemos

$$AF^2 = AB^2 + BF^2$$

$$AF^2 = 10^2 + 10^2$$

$$AF = 10\sqrt{2}$$

Com argumentação análoga feita ao triângulo $\boldsymbol{ABF}$ observamos que o triângulo $\boldsymbol{EDF}$ é também isósceles.

Aplicando, agora, o Teorema de Pitágoras ao triângulo $\boldsymbol{EDF}$, onde $\boldsymbol{DF = ED}$, obtemos

$$EF^2 = ED^2 + DF^2$$

$$EF^2 = ED^2 + ED^2$$

$$EF = ED\sqrt{2}$$

Temos que os triângulos $\boldsymbol{AFE}$ e $\boldsymbol{CDE}$ são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo de semelhança, então

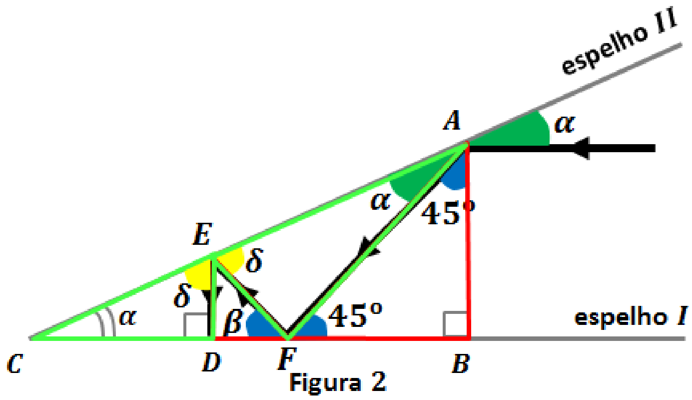


Figura 2

$$\frac{CD}{AF} = \frac{ED}{EF}$$

$$\frac{CD}{10\sqrt{2}} = \frac{ED}{ED\sqrt{2}}$$

$$CD = 10\ cm$$

QUESTÃO 9 (OBMEP – 2009)

Dois triângulos retângulos isósceles com catetos de medida $\mathbf{2}$ são posicionados como mostra a figura $\mathbf{1}$. A seguir, o triângulo da esquerda é deslocado para a direita. Nas figuras $\mathbf{2}$ e $\mathbf{3}$, $\boldsymbol{x}$ indica a distância entre os vértices $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ dos dois triângulos.

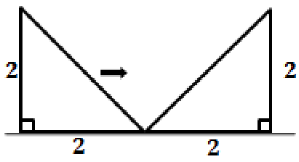


Figura 1

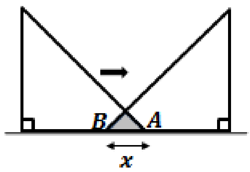


Figura 2

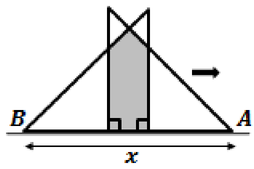


Figura 3

Para cada $\boldsymbol{x}$ no intervalo $[\mathbf{0},\mathbf{4}]$, seja $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ a área da região comum aos dois triângulos (em cinza nas figuras).

(a) Calcule $\boldsymbol{f}(\mathbf{1})$ e $\boldsymbol{f}(\mathbf{3})$.

(b) Encontre as expressões de $\boldsymbol{f}$ nos intervalos $[\mathbf{0},\mathbf{2}]$ e $[\mathbf{2},\mathbf{4}]$ e esboce o seu gráfico.

(c) Qual é a área máxima da região comum aos dois triângulos?

RESOLUÇÃO – ITEM (a)

No caso em que $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$, o triângulo da esquerda se sobrepõe ao da direita conforme visto no esquema da figura $\mathbf{2}$.

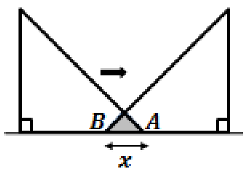


Figura 2

Ampliando a figura, denotando algumas de suas medidas e vértices, temos

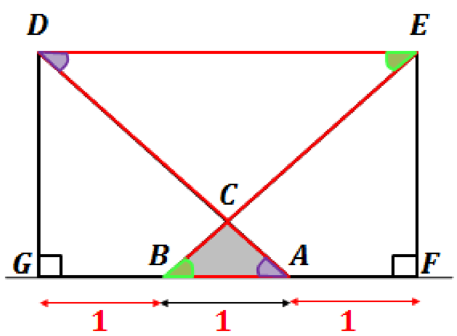


Figura 2

Como os segmento DE e GF são paralelos, temos que os triângulos DCE e BCA são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo (AA) de semelhança.

Sejam as alturas dos triângulos conforme a seguir

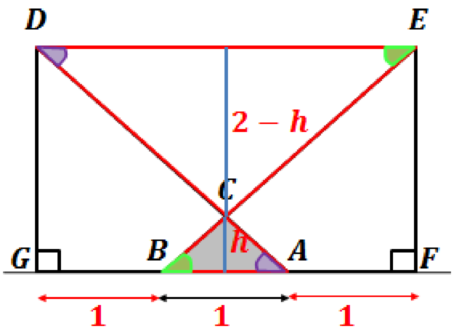


Figura 2

Da relação de semelhança, temos

$$\frac{DE}{BA} = \frac{2-h}{h}$$

$$\frac{3}{1} = \frac{2-h}{h}$$

$$h = \frac{1}{2}$$

Por fim, calculemos a área da parte sombreada, ou seja, a área do triângulo BCA.

$$f(1) = \frac{1.\frac{1}{2}}{2}$$

$$f(1) = \frac{1}{4}$$

No caso em que $x = 3$, o triângulo da esquerda se sobrepõe ao da direita conforme visto no esquema da figura 3.

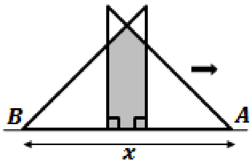
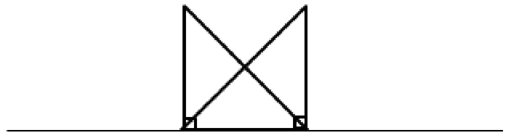
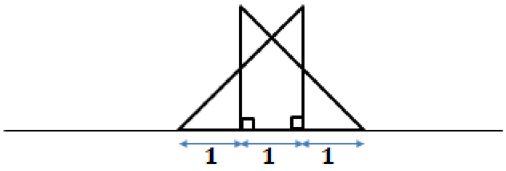


Figura 3

Observe agora, que para formarmos a figura, sendo $x = 3$, a base o pentágono deve ser 1. De fato, se deslocarmos o triângulo da esquerda 2 unidades para a direita temos



Agora se deslocarmos, novamente o triângulo da esquerda, **1 unidade** para a direita obtemos a representação abaixo.



Ampliando a figura e denotando algumas de suas medidas, vértices e segmentos, temos

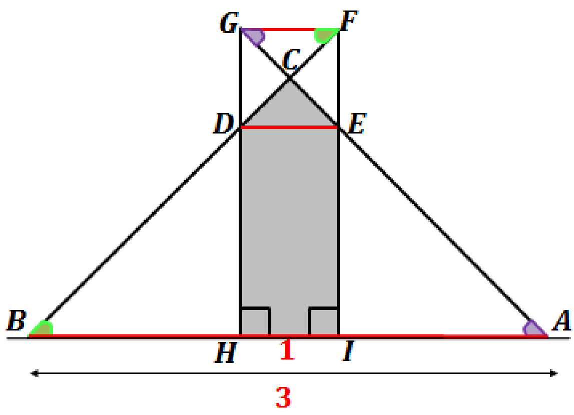


Figura 3

Como os segmentos GFeAB são paralelos, temos que os triângulos GFC e ABC são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo (AA) de semelhança.

Sejam as alturas dos triângulos conforme a seguir

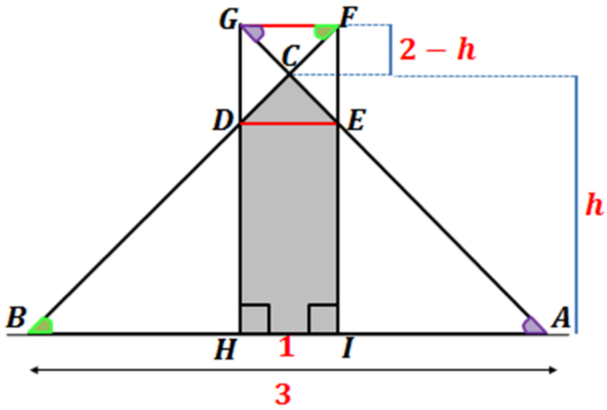


Figura 3

Da relação de semelhança, temos

$$\frac{GF}{AB} = \frac{2-h}{h}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2-h}{h}$$

$$h = \frac{3}{2}$$

Daí a altura do triângulo GFC é $2 - h = 2 - \frac{3}{2} = 1/2$.

Perceba agora que os triângulos GFC e EDC são congruentes, logo a altura do triângulo EDC é $1/2$.

Note que a altura do retângulo $HDEI$ é igual a altura do triângulo ABC menos a altura do triângulo EDC.

$$l = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

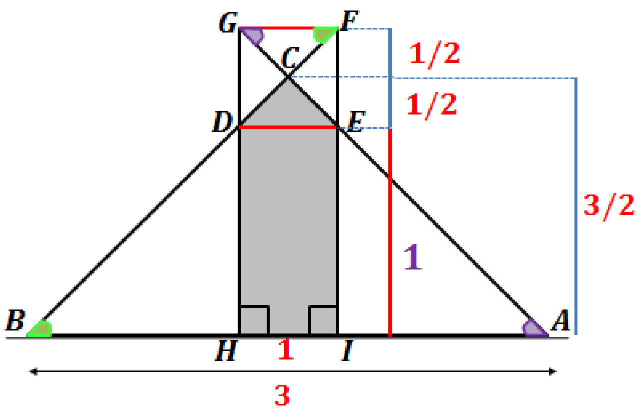


Figura 3

Por fim, a área do pentágono em cinza é igual a soma das áreas do triângulo EDC e do retângulo $HDEI$.

$$f(3) = \frac{1.\frac{1}{2}}{2} + 1.1$$

$$f(3) = \frac{5}{4}$$

RESOLUÇÃO – ITEM (b)

Para os valores $x \in [0, 2]$ a figura formada pela sobreposição dos triângulos tem a forma da figura 2.

Conforme argumentamos no item (a), temos

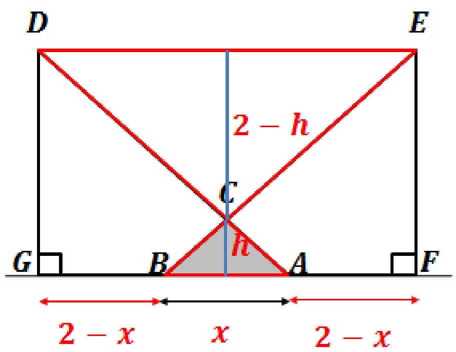


Figura 2

$$\frac{DE}{BA} = \frac{2-h}{h}$$

Observe que

$$DE = 2 - x + x + 2 - x$$

$$DE = 4 - x$$

Logo

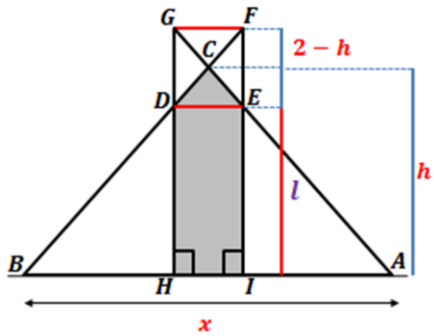
$$\frac{4-x}{x} = \frac{2-h}{h} \Rightarrow h = \frac{x}{2}$$

Assim para $x \in [0, 2]$ temos

$$f(x) = \frac{x.\frac{x}{2}}{2} = \frac{x^2}{4}$$

Agora, para os valores $x \in [2, 4]$ a figura formada pela sobreposição dos triângulos tem a forma da figura 3.

Novamente, conforme argumentamos no item (a), temos



$$\frac{GF}{AB} = \frac{2-h}{h}$$

Observe que

$$GF = HI$$

$$HI = AB - BH - IA$$

$$HI = x - (2 - HI) - (2 - HI)HI = 4 - x$$

Logo

$$\frac{4-x}{x} = \frac{2-h}{h} \Rightarrow h = \frac{x}{2}$$

Veja que a altura do triângulo GFC é

$$2 - \frac{x}{2} = \frac{4-x}{2}$$

E a altura do retângulo $HDEI$ é

$$l = \frac{x}{2} - \frac{4-x}{2} = x - 2$$

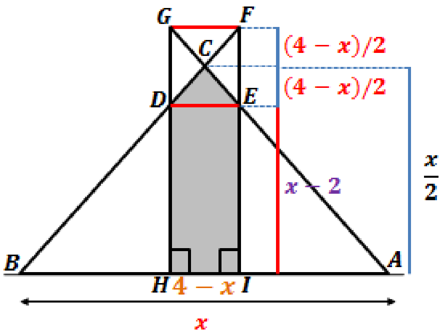


Figura 3

Assim para $x \in [2, 4]$ temos

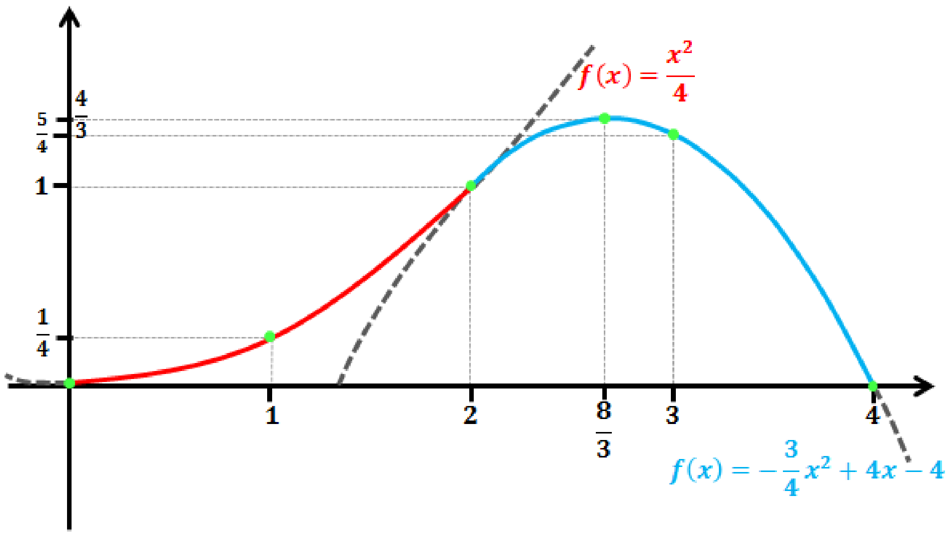
$$f(x) = \frac{(4-x).\frac{(4-x)}{2}}{2} + (4-x)(x-2)$$

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 4x - 4$$

Em síntese, temos

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} & se\ x \in [0,2] \\ -\dfrac{3}{4}x^2 + 4x - 4 & se\ x \in [2,4] \end{cases}$$

O esboço do gráfico de f é dado abaixo



RESOLUÇÃO – ITEM (c)

Do item (b) temos

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} & se\ x \in [0,2] \\ -\dfrac{3}{4}x^2 + 4x - 4 & se\ x \in [2,4] \end{cases}$$

Da observação direta no gráfico anterior vemos que a área máxima de f no intervalo $[0,2]$ é

$$f(2) = \frac{2^2}{4} = 1$$

Para a função quadrática $g(x) = -3x^2/4 + 4x - 4$ a área máxima de f no intervalo $[2,4]$ é dada quando $x = -\frac{4}{2(-3/4)} = \frac{8}{3}$

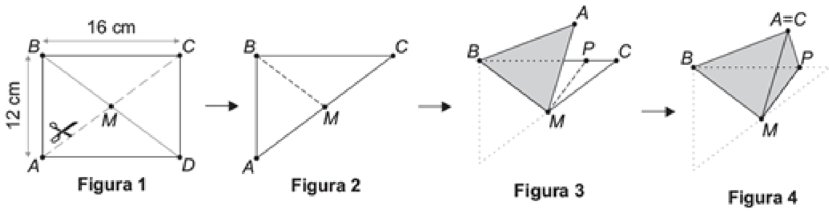
Donde

$$f\left(\frac{8}{3}\right) = -3\frac{\left(\frac{8}{3}\right)^2}{4} + 4\left(\frac{8}{3}\right) - 4 = 4/3$$

Como $4/3 > 1$, segue que $4/3$ é a área máxima.

QUESTÃO 10 (OBMEP – 2009)

Uma folha de papel retangular $ABCD$ de $12\ cm$ por $16\ cm$ (figura 1) é cortada ao longo da diagonal AC (figura 2). O triângulo ABC é dobrado pelo segmento BM (figura 3), sendo M o ponto de encontro das diagonais do retângulo $ABCD$. Finalmente, é feita uma dobra ao longo de MP, onde P é escolhido de modo que CM coincida com AM (figura 4).



(a) Explique porque o ângulo $B\widehat{M}P$ na figura 4 é reto.

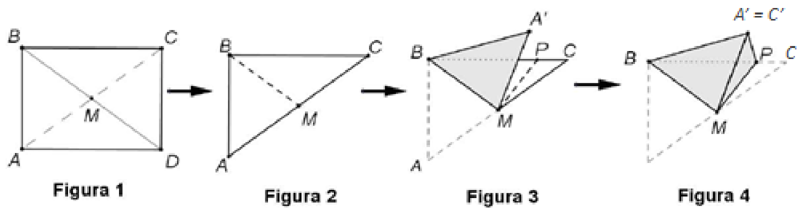
(b) Mostre que o triângulo PMB*[1] da figura 4 é semelhante ao triângulo ABC da figura 2.

(c) Calcule a área do triângulo BMP da figura 4.

(d) Calcule a área do quadrilátero $ABMP$ da figura 4.

RESOLUÇÃO – ITEM (a)

Indiquemos por A' o ponto A e por C' o ponto C, conforme abaixo.



A figura 4 mostra que $A'\widehat{M}P = C\widehat{M}P$, ou seja, P foi escolhido de modo que MP é a bissetriz de $A\widehat{M}C$.

Da figura 3 temos que,

[1] *A equipe de elaboração das provas da OBMEP, atentou ao fato de que deveriam ter escrito PMB ao invés de BMP, como estava na prova, para garantir a correta ordem de correspondência entre os vértices de triângulos semelhantes.

$$A'\widehat{M}C = A'\widehat{M}P + C\widehat{M}P$$

$$A'\widehat{M}C = A'\widehat{M}P + A'\widehat{M}P$$

$$A'\widehat{M}C = 2.A'\widehat{M}P$$

Temos ainda que $A\widehat{M}B = A'\widehat{M}B$

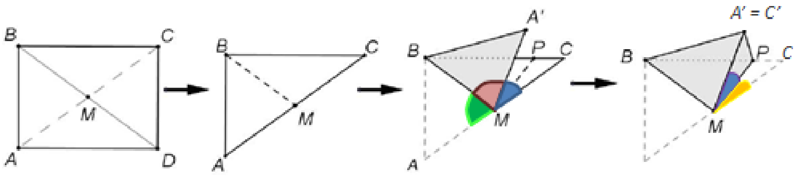


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Daí

$$A\widehat{M}A' = 2.A'\widehat{M}B$$

Logo

$$A\widehat{M}A' + A'\widehat{M}C = 180^{o}$$

$$2.A'\widehat{M}B + 2.A'\widehat{M}P = 180^{o}$$

$$2(A'\widehat{M}B + A'\widehat{M}P) = 180^{o}$$

$$2B\widehat{M}P = 180^{o}$$

$$B\widehat{M}P = 90^{o}$$

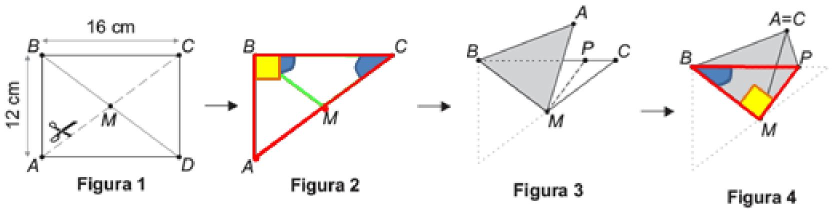
RESOLUÇÃO – ITEM (b)

Como as diagonais de um retângulo são iguais e se intersectam em seu ponto médio, temos que $BM = AM = CM$

Logo o triângulo BMC é isósceles e concluímos que $M\widehat{B}C = M\widehat{C}B = A\widehat{C}B$.

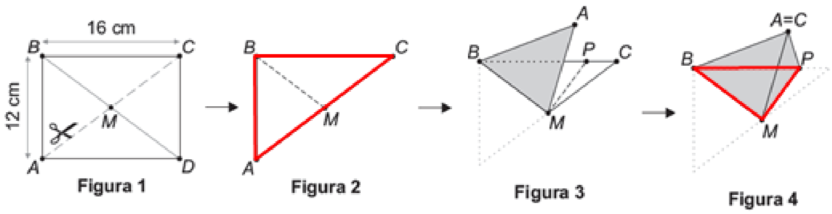
Do item (a) temos que $B\widehat{M}P = 90^{o}$, do retângulo tiramos que $A\widehat{B}C = 90^{o}$ e como vimos $A\widehat{C}B = M\widehat{B}P$.

Portanto os triângulos ABC e PMB são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo de semelhança.



RESOLUÇÃO – ITEM (c)

Pelo item (b), os triângulos $\boldsymbol{PMB}$ e $\boldsymbol{ABC}$ são semelhantes, logo a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão entre lados correspondentes. Conforme visto no item (b), temos $\boldsymbol{BM = AM = CM}$, ou seja, $\boldsymbol{BM = \frac{1}{2}AC}$.



Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo $\boldsymbol{ABC}$, temos

$$\boldsymbol{AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20}$$

Como $\boldsymbol{BM = \frac{1}{2}AC}$, temos $\boldsymbol{BM = 10}$**.**

Assim, a razão de semelhança entre os triângulos $\boldsymbol{PMB}$ e $\boldsymbol{ABC}$ é $\boldsymbol{\frac{BM}{CB} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}}$.

Por fim,

$$\boldsymbol{A(BMP) = \left(\frac{5}{8}\right)^2 A(ABC) = \frac{25}{64} \times \frac{16 \times 12}{2} = \frac{75}{2}\ u.d.a}$$

RESOLUÇÃO – ITEM (d)

Observe que o quadrilátero $\boldsymbol{ABMP}$ é decomposto em dois triângulos.

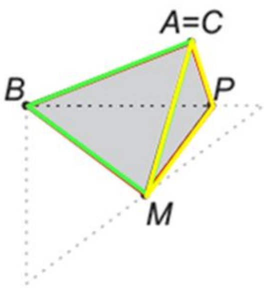


Figura 4

Recordemos agora o triângulo $\boldsymbol{ABC}$ da figura $\mathbf{2}$. Veja que os triângulos resultantes da decomposição do quadrilátero $\boldsymbol{ABMP}$, preenchem a seguinte área desse triângulo.

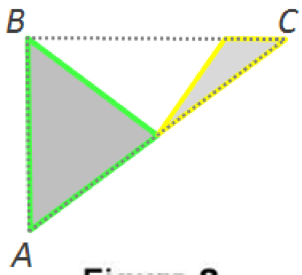


Figura 2

Agora, perceba que a parte que falta ao triângulo $\boldsymbol{ABC}$ é justamente a área do triângulo $\boldsymbol{BMP}$.

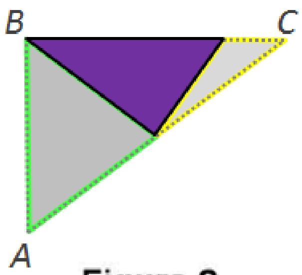


Figura 2

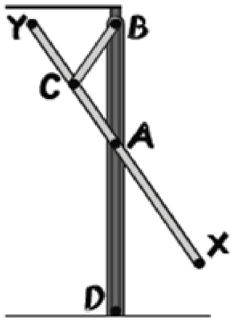
Portanto,

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{ABMP}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{ABC}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BMP})$$

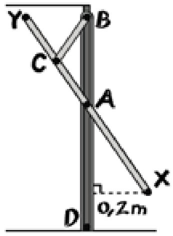
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{ABMP}) = \frac{\mathbf{16 \times 12}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{75}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{117}}{\mathbf{2}}\ \boldsymbol{u.d.a}$$

QUESTÃO 11 (OBMEP – 2010)

A figura ilustra o funcionamento de uma porta de garagem, representada pelo segmento $\boldsymbol{XY}$. Ao mover o ponto $\boldsymbol{X}$, o ponto $\boldsymbol{A}$ desliza por um trilho vertical, representado pelo segmento $\boldsymbol{BD}$. Algumas medidas são $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{BC} = \boldsymbol{CY} = \mathbf{0,5}\ \boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{AX} = \mathbf{1}\ \boldsymbol{m}$.

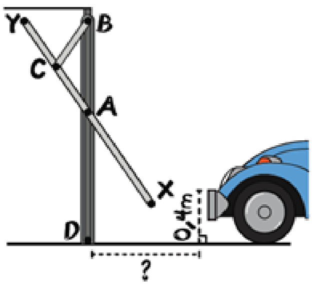


(a) Na figura abaixo, o ponto $\boldsymbol{X}$ está a $\mathbf{0,2}\ \boldsymbol{m}$ do trilho $\boldsymbol{BD}$. Qual é a distância de $\boldsymbol{C}$ ao trilho?



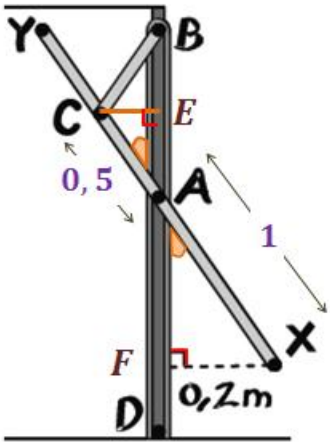
(b) Mostre que a altura do ponto $\boldsymbol{Y}$ com relação ao chão não se altera com o movimento da porta.

(c) Se o para-choque de um carro tem altura de $\mathbf{0,4}\ \boldsymbol{m}$, como na figura, qual deve ser a distância mínima entre o trilho e o para-choque para que ele não seja atingido ao abrir a porta?



RESOLUÇÃO – ITEM (a)

Queremos determinar o comprimento $\boldsymbol{CE}$ conforme abaixo. Expressaremos algumas medidas ditas no enunciado e indicaremos o ponto $\boldsymbol{F}$ na figura.



Os triângulos $\boldsymbol{ACE}$ e $\boldsymbol{AXF}$ são semelhantes, pois possuem dois ângulos em comum. Os ângulos $\boldsymbol{X\hat{F}A}$ e $\boldsymbol{C\hat{E}A}$ que são retos. E os ângulos $\boldsymbol{X\hat{A}F}$ e $\boldsymbol{C\hat{A}E}$ que são opostos pelo vértice.

Da relação de semelhança temos

$$\frac{CE}{XF} = \frac{CA}{XA}$$

$$\frac{CE}{0,2} = \frac{0,5}{1}$$

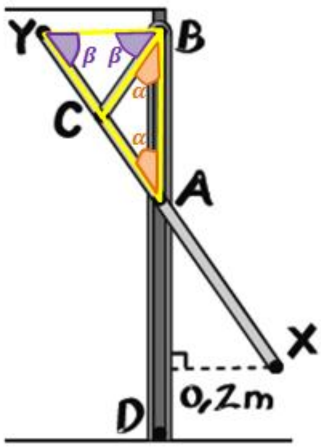
$$CE = 0,1\ m$$

RESOLUÇÃO – ITEM (b)

Como $\boldsymbol{AC = BC = CY = 0,5\ m}$. Segue que os triângulos $\boldsymbol{ACB}$ e $\boldsymbol{BCY}$ são isósceles.

Se $\boldsymbol{C\hat{A}B = \alpha}$ então $\boldsymbol{C\hat{B}A = \alpha}$, pois o triângulo $\boldsymbol{ACB}$ é isósceles.

Da mesma forma, se $\boldsymbol{C\hat{Y}B = \beta}$ então $\boldsymbol{C\hat{B}Y = \beta}$, pois o triângulo $\boldsymbol{BCY}$ é isósceles.



A soma dos ângulos do triângulo $\boldsymbol{ABY}$ é $\boldsymbol{2\alpha + 2\beta = 180^o}$

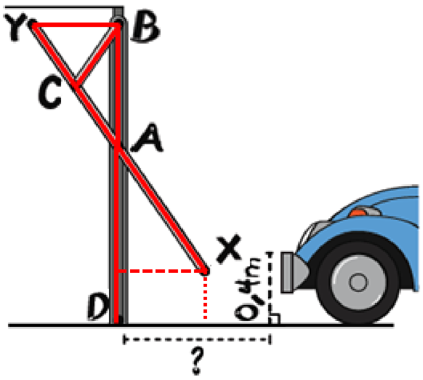
Logo,

$$\boldsymbol{\alpha + \beta = 90^o}$$

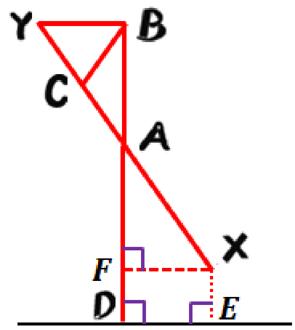
Portanto $\boldsymbol{BY}$ é perpendicular ao trilho $\boldsymbol{BD}$, ou seja, $\boldsymbol{BY}$ é horizontal qualquer que seja a posição de $\boldsymbol{Y}$.

RESOLUÇÃO – ITEM (c)

Para uma melhor visualização, vamos utilizar o seguinte esboço.



Denotemos os seguintes vértices e ângulos.



Queremos encontrar $\boldsymbol{DE}$ quando $\boldsymbol{XE = 0,4\ m}$. Para tanto, perceba que quando a porta se fecha, $\boldsymbol{XY}$ coincide com $\boldsymbol{BD}$. Assim

$$\boldsymbol{BD = XY = XA + AY}$$

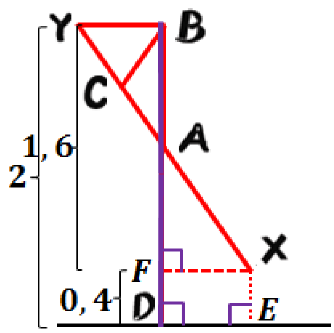
$$\boldsymbol{BD = XY = 1 + 1}$$

$$\boldsymbol{BD = XY = 2}$$

Como $\boldsymbol{DFXE}$ é um retângulo, temos que $\boldsymbol{FD = XE = 0,4}$.

Portanto,

$$BF = BD - FD = 2 - 0,4 = 1,6$$

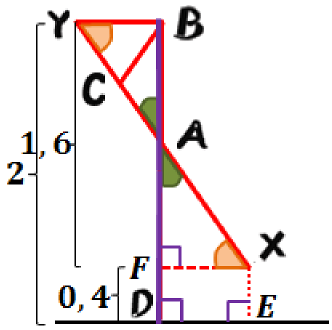


Como $AY = 1$ e $AX = 1$ segue que $AY = AX$.

E como $YB \parallel FX$ e YX é um segmento transversal que corta esses segmentos paralelos, temos que $A\hat{Y}B = A\hat{X}F$.

Temos ainda, que o ângulo $Y\hat{A}B = X\hat{A}F$, pois são opostos pelo vértice.

Concluímos que os triângulos AFX e ABY são congruentes pelo caso ângulo-lado-ângulo (ALA) de congruência.



Logo $AF = AB$ e como $BF = 1,6$ segue que $AF = 0,8$.

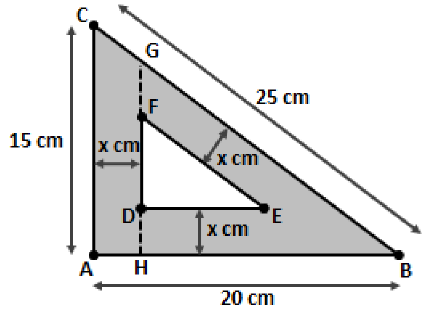
Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo AFX temos.

$$FX = \sqrt{AX^2 - AF^2} = \sqrt{1^2 - 0,8^2} = 0,6$$

Concluímos que $DE = 0,6\ m$.

QUESTÃO 12 (OBMEP – 2011)

Na figura, os lados do triângulo DEF são paralelos aos lados do triângulo retângulo ABC. Os pontos H, D, F e G estão alinhados e $0 \leq x \leq 5$.



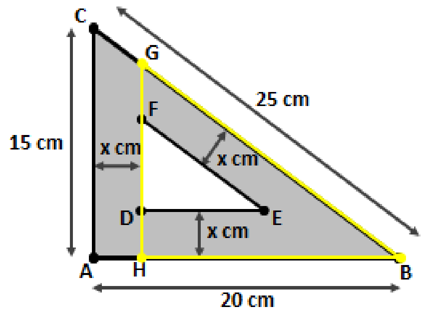
(a) Calcule o comprimento de $\boldsymbol{GH}$ em função de $\boldsymbol{x}$.

(b) Mostre que $\boldsymbol{CG} = \boldsymbol{FG} = \frac{\boldsymbol{5x}}{\boldsymbol{4}}\ \boldsymbol{cm}$.

(c) Faça o gráfico da área $\boldsymbol{A}$ do triângulo $\boldsymbol{DEF}$ em função de $\boldsymbol{x}$.

RESOLUÇÃO – ITEM (a)

Como os triângulos $\boldsymbol{HBG}$ e $\boldsymbol{ABC}$ têm lados paralelos, então eles são semelhantes.



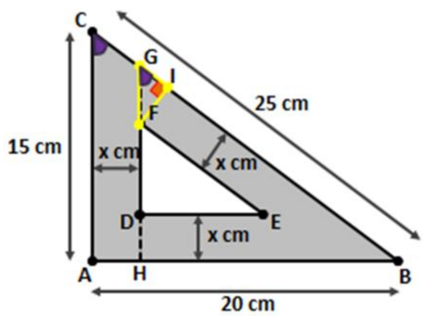
$$\frac{\boldsymbol{GH}}{\boldsymbol{CA}} = \frac{\boldsymbol{HB}}{\boldsymbol{AB}}$$

$$\frac{\boldsymbol{GH}}{\boldsymbol{15}} = \frac{\boldsymbol{20 - x}}{\boldsymbol{20}}$$

$$\boldsymbol{GH} = \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{4}}(\boldsymbol{20 - x})$$

RESOLUÇÃO – ITEM (b)

Construímos o triângulo $\boldsymbol{FIG}$ tal que $\boldsymbol{FI}$ forme um ângulo reto com $\boldsymbol{BC}$.



Os segmentos $\boldsymbol{GF}$ e $\boldsymbol{CA}$ são paralelos e $\boldsymbol{CB}$ é um segmento transversal que corta $\boldsymbol{GF}$ e $\boldsymbol{CA}$. Logo os ângulos $\boldsymbol{I\hat{G}F}$ e $\boldsymbol{A\hat{C}B}$ são iguais.

Assim os triângulos $\boldsymbol{IGF}$ e $\boldsymbol{ACB}$ são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo (AA) de semelhança.

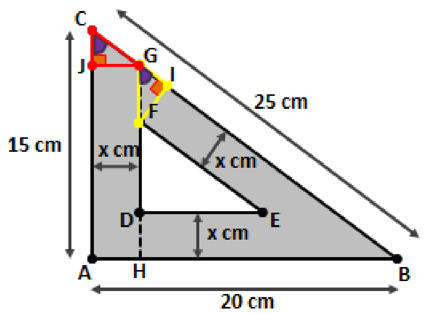
Da relação de semelhança temos.

$$\frac{FG}{BC} = \frac{IF}{AB}$$

$$\frac{FG}{25} = \frac{x}{20}$$

$$FG = \frac{5}{4}x$$

Resta-nos mostrar que $\boldsymbol{CG = FG}$. Para tanto, vamos construir o triângulo $\boldsymbol{JGC}$ tal que $\boldsymbol{JG}$ forme um ângulo reto com $\boldsymbol{CA}$.



Daí os triângulos $\boldsymbol{IFG}$ e $\boldsymbol{JGC}$ são congruentes pelo caso lado-ângulo-ângulo oposto (LAA_o) de congruência.

Portanto,

$$CG = FG = \frac{5}{4}x$$

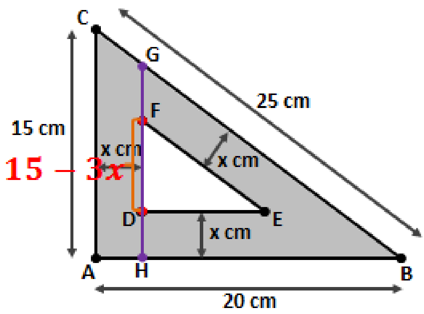
RESOLUÇÃO – ITEM (c)

Do item (a) temos que $\boldsymbol{GH = \frac{3}{4}(20 - x)}$ e do item (b) temos que $\boldsymbol{FG = \frac{5}{4}x}$.

Temos ainda que

$$DF = GH - FG - DH$$

$$DF = \frac{3}{4}(20 - x) - \frac{5}{4}x - x = 15 - 3x$$



Como os triângulos $\boldsymbol{ACB}$ e $\boldsymbol{DFE}$ possuem lados paralelos, temos que eles são semelhantes.

Da relação de semelhança temos.

$$\frac{DE}{AB}=\frac{DF}{AC}$$

$$\frac{DE}{20}=\frac{15-3F}{15}$$

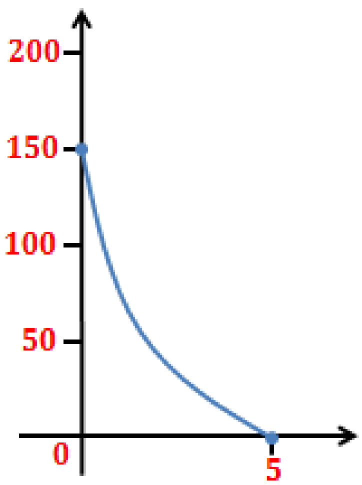
$$DE=20-4x$$

Logo a área de $\boldsymbol{DEF}$ é.

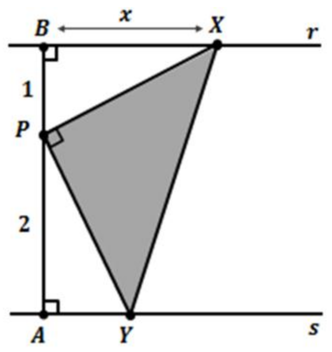
$$A(x)=\frac{(20-4x)(15-3x)}{2}$$

$$A(x)=6x^2-60x+150$$

Um esboço do gráfico da função é dado conforme abaixo.



QUESTÃO 13 (OBMEP – 2012)



Na figura ao lado, as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ são paralelas. O segmento $\boldsymbol{AB}$ é perpendicular a essas retas e o ponto $\boldsymbol{P}$, nesse segmento, é tal que $\boldsymbol{AP = 2}$ e $\boldsymbol{BP = 1}$. O ponto $\boldsymbol{X}$ pertence à reta $\boldsymbol{r}$ e a medida do segmento $\boldsymbol{BX}$ é indicada por $\boldsymbol{x}$. O ponto $\boldsymbol{Y}$ pertence à reta $\boldsymbol{s}$ e o triângulo $\boldsymbol{XPY}$ é retângulo em $\boldsymbol{P}$.

(a) Explique por que os triângulos $\boldsymbol{PAY}$ e $\boldsymbol{XBP}$ são semelhantes.

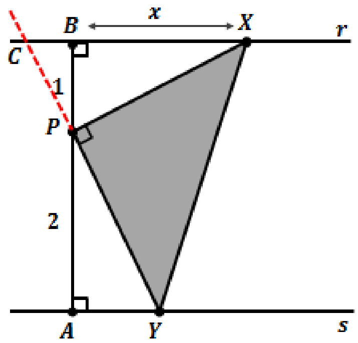
(b) Calcule a área do triângulo $\boldsymbol{XPY}$ em função de $\boldsymbol{x}$.

(c) Para quais valores de $\boldsymbol{x}$ a área do triângulo $\boldsymbol{XPY}$ é igual a $\frac{5}{2}$?

(d) Determine o valor de $\boldsymbol{x}$ para o qual a área do triângulo $\boldsymbol{XPY}$ é mínima e calcule o valor dessa área.

RESOLUÇÃO – ITEM (a)

Prolonguemos o segmento $\boldsymbol{YP}$ até o mesmo intersectar a reta $\boldsymbol{r}$ no ponto $\boldsymbol{C}$.



Como as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ são paralelas e a semirreta $\overrightarrow{\boldsymbol{YP}}$ é uma transversal que corta essas retas, temos que os ângulos $\boldsymbol{P\hat{Y}A}$ e $\boldsymbol{P\hat{C}B}$ são iguais.

Observe que os ângulos $\boldsymbol{X\hat{P}B}$ e $\boldsymbol{B\hat{P}C}$ são tais que

$$\boldsymbol{X\hat{P}B + B\hat{P}C = 90^o}$$

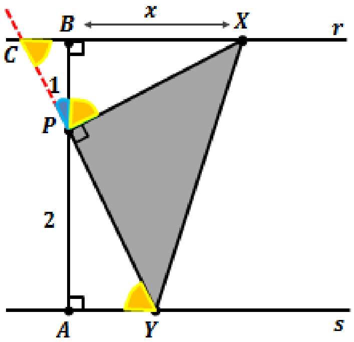
Observe ainda que

$$\boldsymbol{B\hat{P}C + P\hat{C}B = 90^o}$$

Assim

$$X\hat{P}B + B\hat{P}C = B\hat{P}C + P\hat{C}B$$

$$X\hat{P}B = P\hat{C}B = P\hat{Y}A$$



Por fim como os triângulos XBP e PAY são retângulos segue que eles são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo (AA) de semelhança.

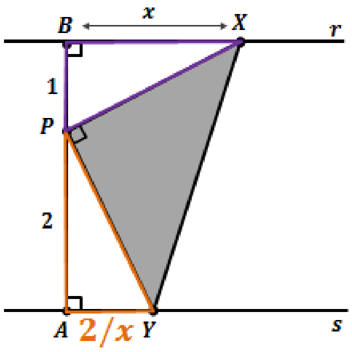
RESOLUÇÃO – ITEM (b)

Da semelhança entre os triângulos PAY e XBP, conforme vimos no item (a), temos que

$$\frac{AY}{BP} = \frac{AP}{BX}$$

$$\frac{AY}{1} = \frac{x}{2}$$

$$AY = \frac{2}{x}$$



Para calcularmos a área do triângulo XPY basta encontrarmos as medidas dos segmentos PY e PX.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo APY

$$PY^2 = PA^2 + AY^2$$

$$PY^2 = 2^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2$$

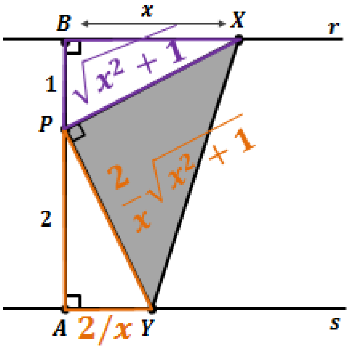
$$PY = \frac{2}{x}\sqrt{x^2+1}$$

Agora aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo $\boldsymbol{BXP}$ obtemos

$$PX^2 = BX^2 + PB^2$$

$$PX^2 = x^2 + 1^2$$

$$PX = \sqrt{x^2+1}$$



Logo a área do triângulo $\boldsymbol{XPY}$ será

$$A(x) = \frac{\left(\frac{2}{x}\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{2}$$

$$A(x) = x + \frac{1}{x}$$

RESOLUÇÃO – ITEM (c)

Devemos resolver a equação

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$$

ou seja,

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

Utilizando a fórmula de Bhaskara temos que as raízes da equação acima são

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{25 - 4.2.2}}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{5 + \sqrt{25 - 4.2.2}}{4} = 2$$

RESOLUÇÃO – ITEM (d)

Façamos

$$x + \frac{1}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2$$

Temos que $x > 0$ e como um quadrado é sempre maior que ou igual a zero, vemos que o valor mínimo da expressão acima ocorre quando

$$\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

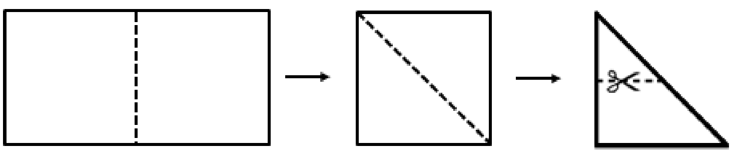
Ou seja, $x = 1$.

Assim o valor da área do triângulo XPY é mínima quando $x = 1$ e essa área vale

$$1 + \frac{1}{1} = 2$$

QUESTÃO 14 (BANCO DE QUESTÕES OBMEP – 2013)

Uma folha de papel é retangular, com base igual a $20\ cm$ e altura $10\ cm$. Esta folha é dobrada nas linhas pontilhadas conforme a figura abaixo, e no final recortada por uma tesoura na linha indicada, a qual é paralela à base e está na metade da altura do triângulo.

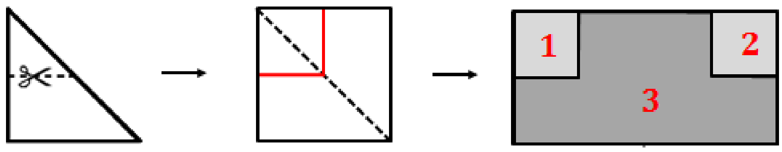


(a) Depois de cortar no local indicado, em quantas partes a folha ficou dividida?

(b) Qual a área da maior parte?

RESOLUÇÃO – ITEM (a)

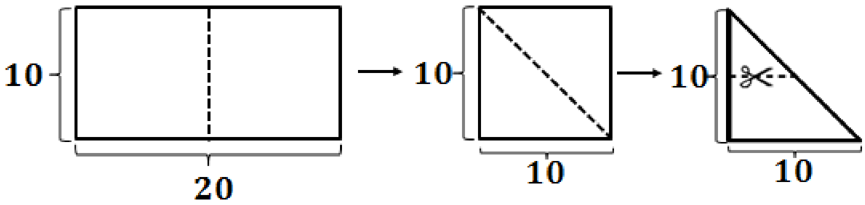
Vamos marcar a linha cortada pela tesoura em vermelho, e fazer o processo inverso, ou seja, abrir a folha cortada



Portanto, a folha foi dividida em três partes.

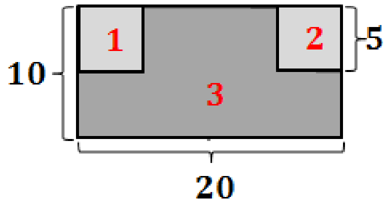
RESOLUÇÃO – ITEM (b)

Do enunciado temos as seguintes medidas da folha de papel. Após as dobras obtemos as seguintes medidas.



Como o corte foi feito na metade da altura do triângulo temos que o mesmo retirou um tamanho de $\mathbf{5}\ \boldsymbol{cm}$ do canto superior esquerdo do triângulo.

Da resolução do item (a) temos que a parte maior corresponde a parte $\mathbf{3}$ da figura abaixo



Conforme vimos anteriormente os quadrados $\mathbf{1}$ e $\mathbf{2}$ tem lado medindo $\mathbf{5}\ \boldsymbol{cm}$.

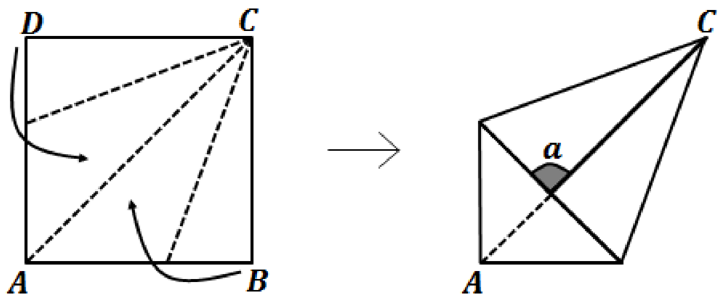
Para encontrarmos a área da figura $\mathbf{3}$ vamos diminuir da área da folha a área dos quadrados $\mathbf{1}$ e $\mathbf{2}$.

Logo a área $\boldsymbol{A}$ da parte $\mathbf{3}$ será

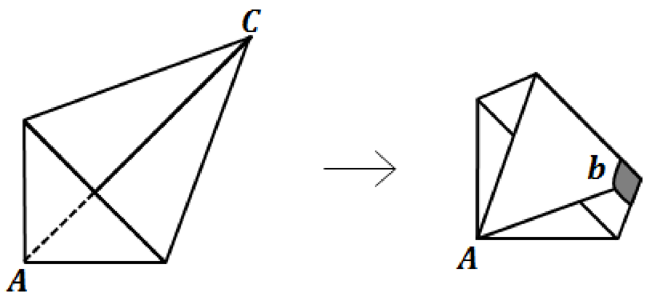
$$\boldsymbol{A} = \mathbf{20} \times \mathbf{10} - \mathbf{2} \times \mathbf{5^2} = \mathbf{150}\ \boldsymbol{cm^2}$$

QUESTÃO 15 (BANCO DE QUESTÕES OBMEP – 2013)

Júlio Daniel tem um quadrado de papel com vértices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$. Ele primeiro dobra este quadrado de papel $\boldsymbol{ABCD}$ levando os vértices $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{D}$ até a diagonal, como mostra a figura a seguir:



E em seguida, Júlio Daniel leva o vértice $\boldsymbol{C}$ até o vértice $\boldsymbol{A}$, obtendo assim um pentágono, como é mostrado a seguir:

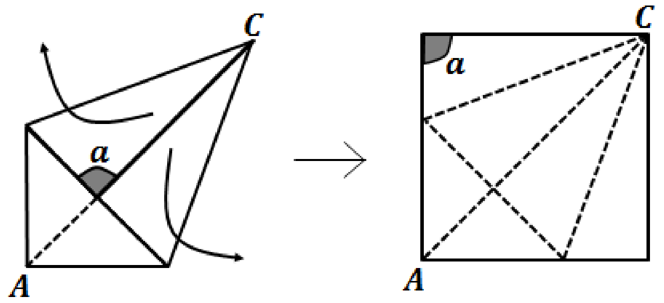


(a) Mostre que o ângulo $\boldsymbol{a}$ mede $\mathbf{90^o}$.

(b) Determine a medida do ângulo $\boldsymbol{b}$.

RESOLUÇÃO – ITEM (a)

Abrindo o quadrado de papel dobrado

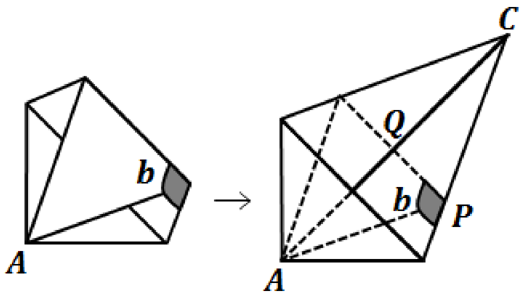


Notamos que o ângulo $\boldsymbol{a}$ é o mesmo ângulo do vértice $\boldsymbol{D}$ do quadrado $\boldsymbol{ABCD}$ da folha original. Logo

$$a = 90^{o}$$

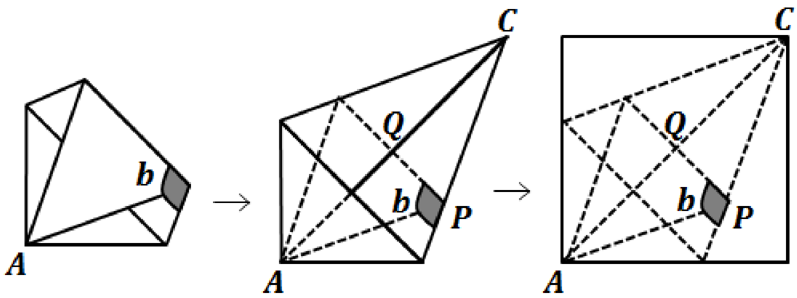
RESOLUÇÃO – ITEM (b)

Desdobrando o papel somente a última dobra e denominando alguns vértices obtemos a figura abaixo.

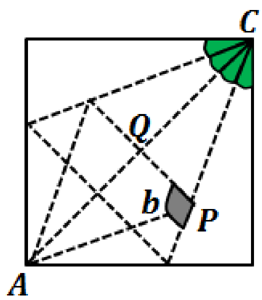


Perceba que o ângulo b é conforme acima, na segunda figura.

Desdobrando novamente o papel obtemos a figura abaixo.



Agora, perceba que o ângulo reto no vértice C foi dividido em quatro ângulos de mesma medida.

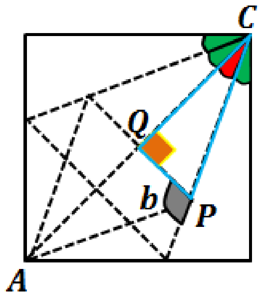


Assim,

$$Q\widehat{C}P = \frac{90^{o}}{4} = 22,5^{o}$$

Temos ainda, que o ângulo $P\widehat{Q}C$ é reto.

Agora perceba que o ângulo b é ângulo externo do triângulo CQP.



Portanto,

$$b = Q\hat{C}P + P\hat{Q}C$$

$$b = 22,5^{o} + 90^{o}$$

$$b = 112,5^{o}$$

REFERÊNCIAS

BELTRÁN, Johel et al. **Banco de questões 2013**. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. 184 p.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Brasília : MEC/SEF, 1998. 148 p.

Provas e gabaritos das Olímpiadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP. Disponível em http://www.obmep.org.br/provas.htm acesso em 10 de dezembro de 2012