

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL - PROFMAT

DIOMEDES ANDERLE CARDOSO JUNIOR

**UMA PROPOSTA PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM A
UTILIZAÇÃO DOS AXIOMAS DA GEOMETRIA PROJETIVA**

DISSERTAÇÃO

PATO BRANCO

2018

DIOMEDES ANDERLE CARDOSO JUNIOR

**UMA PROPOSTA PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM A
UTILIZAÇÃO DOS AXIOMAS DA GEOMETRIA PROJETIVA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Matemática”.

Orientador: Moises Aparecido do Nascimento,
Dr.

Co-orientador: Rodrigo Ribeiro Lopes, Dr.

PATO BRANCO

2018

C268p Cardoso Junior, Diomedes Anderle
Uma proposta para solução de problemas com a utilização dos axiomas da geometria projetiva. / Diomedes Anderle Cardoso Junior. -- 2018.
87 f. : il. ; 30 cm.
Orientador: Prof. Dr. Moises Aparecido do Nascimento
Co-orientador: Prof. Dr. Rodrigo Ribeiro Lopes
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Pato Branco, PR, 2018.
Bibliografia: f. 87
1.Problemas. 2. Geometria Projetiva. 3. GeoGebra. I. Nascimento, Moises Aparecido, orient. II. Lopes, Rodrigo Ribeiro, co-orient.III. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. IV. Título.

CDD (22.ed.) 510

Ficha Catalográfica elaborada por
Maria Juçara Vieira da Silveira CRB9/1359
Biblioteca da UTFPR Campus Pato Branco

Título da Dissertação No. 023

“UMA PROPOSTA PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM A UTILIZAÇÃO DOS AXIOMAS DA GEOMETRIA PROJETIVA”

por

Diomedes Anderle Cardoso Junior

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Pato Branco, às 15hs do dia 17 de novembro de 2017. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Moisés Ap. do Nascimento, Dr.
(Presidente - UTFPR/Pato Branco)

Prof. Oyrán Silva Rayzaro, Dr.
(UEMS/Nova Andradina)

Prof. Rômél da Rosa da Silva, Dr.
(UTFPR/Branco)

Prof. Rômél da Rosa da Silva, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR”

À minha mãe Roze, à minha esposa Taísa e à minha filha Maria Julia

AGRADECIMENTOS

- À Deus pelo dom da vida...
- À minha família, por ter me apoiado e abraçado comigo esse projeto.
- À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.
- Ao meu orientador Dr. Moises Aparecido do Nascimento que se disponibilizou a me ajudar nesse trabalho sem medir esforços.
- Ao meu co-orientador Dr. Rodrigo Ribeiro Lopes pela doação do seu conhecimento a mim ofertados.

RESUMO

JUNIOR, Diomedes Anderle Cardoso. UMA PROPOSTA PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM A UTILIZAÇÃO DOS AXIOMAS DA GEOMETRIA PROJETIVA. 88 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2018.

Neste trabalho são apresentadas soluções de problemas com a utilização dos axiomas da Geometria Projetiva e um problema com solução via Teorema de Desargues, ainda conta com as demonstrações dos Teoremas de Pappus, Desargues e Pascal. Para dar embasamento a tal trabalho passamos pela análise do ensino da Geometria e pelo desenvolvimento histórico da Geometria Projetiva, ainda com a apresentação de conceitos preliminares básicos de Geometria Analítica e Geometria Projetiva que nortearam os axiomas que são utilizados juntamente com o uso do software gratuito Geogebra para as soluções dos problemas propostos no trabalho. Houve uma grande preocupação com o uso de uma linguagem adequada a alunos do ensino médio uma vez que a teoria fica um pouco “pesada” para o ensino básico. Ao final do trabalho há uma proposta de como pode-se fazer uma ponte entre os conceitos de Geometria Projetiva e a Geometria Analítica e como podem ser aplicados no ensino médio.

Palavras-chave: Problemas, Geometria Projetiva, GeoGebra.

ABSTRACT

JUNIOR, Diomedes Anderle Cardoso. . 88 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2018.

This paper presents solutions to problems using axioms of projective geometry and one problem with solution via Desargues' Theorem. In addition, it contains demonstrations of Pappus' Theorem, Desargues' Theorem and Pascal's Theorem. To support this work, we analyzed geometry instruction and the historical development of projective geometry, also presenting basic preliminary concepts of analytic geometry and projective geometry that guided the axioms that are used along with the free Geogebra software for solutions of the problems proposed in the work. There was great concern about the use of language that would be adequate for high school students, since the theory is somewhat advanced for elementary school. At the end of the paper there is a proposal for how to create a bridge between the concepts of projective geometry and analytic geometry and how these can be applied at a high school level.

Keywords: problems, projective geometry, Geogebra

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Fotos dos Matemáticos Euclides e Menelau	17
FIGURA 2	– Obras de Leon Battista Alberti e Paolo Uccello	18
FIGURA 3	– Obras de Leonardo da Vinci e Piero della Francesca	18
FIGURA 4	– Fotos dos Matemáticos Gerard Desargues e Jean Victor Poncelet	19
FIGURA 5	– Obra <i>Traité des propriétés projectives des figures</i> (1822)	19
FIGURA 6	– O plano cartesiano	21
FIGURA 7	– Par ordenado	22
FIGURA 8	– Os quadrantes	23
FIGURA 9	– Bissetrizes dos quadrantes	23
FIGURA 10	– Apresentação do modelo de reta	24
FIGURA 11	– Circunferência no plano cartesiano	25
FIGURA 12	– Reta secante à circunferência	26
FIGURA 13	– Reta tangente à circunferência	27
FIGURA 14	– Reta exterior à circunferência	27
FIGURA 15	– Ângulo entre dois vetores	29
FIGURA 16	– Diferença $\vec{v} - \vec{u}$	30
FIGURA 17	– Paralelogramo determinado pelos vetores \vec{u} e \vec{v}	31
FIGURA 18	– Retas elípticas	34
FIGURA 19	– Pontos projetivos	36
FIGURA 20	– Ilustração de pontos projetivos na esfera	37
FIGURA 21	– Ilustração de retas projetivas	38
FIGURA 22	– Ilustração de reta elíptica	39
FIGURA 23	– Decomposição Plano Projetivo Dual	39
FIGURA 24	– Plano Projetivo Dual	40
FIGURA 25	– Ilustração de retas afim	41
FIGURA 26	– Ilustração do plano afim	42
FIGURA 27	– Route 66, EUA	44
FIGURA 28	– A obra <i>Escola de Atenas</i>	45
FIGURA 29	– A <i>Santa Ceia</i> por Leonardo da Vinci	45
FIGURA 30	– Incidência da reta elíptica com a reta projetiva	47
FIGURA 31	– Retas Projetivas passando por u e por v	47
FIGURA 32	– Colineariedade entre u , v e w	48
FIGURA 33	– Concorrência de três Retas Projetivas	48
FIGURA 34	– Ilustração do Teorema de Pappus	50
FIGURA 35	– Ilustração do Teorema de Desargues no espaço	54
FIGURA 36	– Ilustração do Teorema de Desargues no plano	54
FIGURA 37	– Ilustração do Teorema de Pascal	62
FIGURA 38	– Ilustração do Teorema do Hexagrama Místico de Pascal	62
FIGURA 39	– Teorema de Pascal para o pentágono	65
FIGURA 40	– Teorema de Pascal para o quadrilátero	65
FIGURA 41	– Teorema de Pascal para o triângulo	66
FIGURA 42	– Situação Geométrica Ilustrativa I	67

FIGURA 43 – Situação Gráfica	68
FIGURA 44 – Situação Geométrica II	71
FIGURA 45 – Situação Gráfica II	73
FIGURA 46 – Situação Geométrica III	76
FIGURA 47 – Situação Gráfica III	77
FIGURA 48 – Particularização teorema de Pascal para quadriláteros inscritos I	79
FIGURA 49 – Particularização teorema de Pascal para quadriláteros inscritos II	80
FIGURA 50 – Situação Geométria IV	82

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
1.0.1 Interesse pela temática	12
1.0.2 Justificativa	12
1.0.3 Problema	12
1.0.4 Objetivos Gerais e Específicos	13
1.0.5 Metodologia e Procedimentos	13
1.0.6 Estrutura do Trabalho	13
2 UMA VISÃO PARA O ENSINO DA GEOMETRIA	15
2.0.7 O ensino de Geometria	15
2.0.8 Aspectos Históricos da Geometria	16
2.0.9 Síntese Histórica da Geometria Projetiva	17
3 CONCEITOS PRELIMINARES	21
3.1 INTRODUÇÃO A GEOMETRIA ANALÍTICA	21
3.1.1 O plano cartesiano	21
3.1.2 Equação Geral da reta	23
3.1.3 Equação reduzida da circunferência	25
3.1.4 Posição relativas entre uma reta e uma circunferência	26
3.1.5 Produto Interno	27
3.1.6 Produto Vetorial	30
3.1.7 Significado Geométrico do Produto Vetorial	31
3.2 GEOMETRIA ELÍPTICA	32
3.2.1 Plano Elíptico	33
3.2.2 Distância Elíptica	33
3.3 PLANO PROJETIVO \mathbb{RP}^2	34
3.3.1 Conceitos inicial do Plano Projetivo \mathbb{RP}^2	34
3.3.2 Relação entre \mathbb{RP}^2 e \mathbb{S}^2	35
3.3.3 Retas Projetivas	37
3.3.4 Plano Projetivo Dual	39
3.3.5 Geometria Afim	40
3.3.6 Retas Afim	40
3.3.7 O Plano Afim Dual	41
3.3.8 Colineação	42
3.3.9 Construção de colineação	43
4 A GEOMETRIA PROJETIVA	44
4.1 PORQUE ESTUDAR GEOMETRIA PROJETIVA?	44
4.2 GEOMETRIA PROJETIVA UM ESTUDO AXIOMÁTICO	46
4.2.1 Axiomas da Geometria Projetiva	46
5 APLICAÇÕES DOS AXIOMAS DA GEOMETRIA PROJETIVA NOS TEORE-	
MAS DE PAPUS, DESARGUES E PASCAL	49
5.0.2 Teorema de Pappus	49
5.0.3 Teorema de Desargues	53

5.0.4	Teorema de Pascal	58
5.0.5	Correlações	59
5.0.6	Conicas em \mathbb{RP}^2	59
5.0.7	Retas tangentes	60
5.0.8	Construindo cônicas	60
5.0.9	Hexagrama místico de Pascal	61
5.0.10	Consequências do Teorema de Pascal	64
6	APLICAÇÃO DOS AXIOMAS DA GEOMETRIA PROJETIVA EM PROBLE-	
	MAS	67
6.0.11	Problema 1	67
6.0.12	Problema 2	71
6.0.13	Problema 3	76
6.0.14	Problema 4	82
7	ANÁLISE DAS APLICAÇÕES DOS EXERCÍCIOS NO ENSINO MÉDIO	84
8	ALGUMAS CONSIDERAÇÕES	86
	REFERÊNCIAS	88

1 INTRODUÇÃO

1.0.1 INTERESSE PELA TEMÁTICA

O interesse pela temática surgiu no gosto pelo ensino de geometria no qual trabalho a quase cinco anos, onde se identifica que certos métodos de ensino dentro da geometria podem ser moldados, fazendo com que os alunos tenham uma nova visão quanto ao aprendizado da geometria. No entanto, este projeto de pesquisa tem por objetivo apresentar uma alternativa para resolução de alguns problemas que são eventualmente resolvidos por meio da Geometria Analítica, utilizando-se alguns conceitos básicos da Geometria Projetiva.

Nesse projeto traremos uma abordagem investigativa de como os axiomas e teoremas da Geometria Projetiva auxilia no entendimento da solução de problemas propostos. Tais problemas já estão resolvidos utilizando-se a Geometria Projetiva, entretanto a abordagem utilizada pelos autores não se aplicaria no contexto do ensino básico, sendo assim nossa proposta é adaptar tais problemas para uma boa compreensão de conceitos básicos da Geometria Projetiva.

1.0.2 JUSTIFICATIVA

Como parte da justificativa da pesquisa neste projeto, relato que na minha experiência em sala de aula percebi certa dificuldade por parte dos alunos quanto alguns conceitos geométricos dentro da geometria caracterizada como Não-Euclidiana. Com isso, pretende-se através do desenvolvimento deste projeto contribuir efetivamente com a formação de um olhar mais crítico em relação a certo tipo de geometria Não- Euclidiana mais especificamente a Geometria Projetiva.

1.0.3 PROBLEMA

Tendo em vista que a Geometria Projetiva se apresenta como conteúdo estruturante no ensino da matemática nas novas reformulações do ensino, como mostrar que a Geometria Projetiva pode ser uma alternativa para solução de problemas dentro do ensino da Geometria

isso nos anos finais do ensino básico?

1.0.4 OBJETIVOS GERAIS E ESPECÍFICOS

- Apresentar uma solução com o uso dos axiomas da Geometria Projetiva para problemas de Geometria Euclidiana resolvidos, com isso mostrar que a Geometria Projetiva pode ser mais uma alternativa abordada no estudo geral da Geometria no ensino médio.
- Pesquisar problemas da Geometria Projetiva que não foram solucionados com a utilização dos Axiomas.
- Apresentar solução alternativa para problemas de Geometria Projetiva norteados pelos seus axiomas.
- Apresentar um apanhado geral de como o estudo de Geometria Projetiva, pode ser abordado no ensino médio.
- Utilizar o Geogebra como uma ferramenta para compreensão das construções geométricas.

1.0.5 METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS

O presente trabalho se fundamenta no estudo da Geometria Projetiva com utilização de seus axiomas para solução de problemas. A fim de demonstrar a importância de tal premissa, tenta-se a resolução de problemas da Geometria Euclidiana, partindo de uma metodologia com a utilização dos axiomas da Geometria Projetiva, apresentando mais uma maneira de visualizar uma solução para os problemas geométricos, a qual será instrumentalizada a partir do uso de pesquisa sobre problemas de Geometria Projetiva com auxílio de livros com cunho voltado para o estudo de Geometria Projetiva, álgebra linear e geometria analítica. Além disso, a fim de tornar exequível tal projeto, intenta-se a demonstração de três teoremas que auxiliaram na visão para solução de alguns problemas envolvendo tal geometria .

1.0.6 ESTRUTURA DO TRABALHO

No presente capítulo a introdução é feita uma apresentação do tema, discutindo a justificativa, definindo os objetivos tanto gerais quanto específico, e apresentando uma metodologia para tornar exequível tal trabalho. No capítulo 2 é apresentada uma visão para o ensino da geometria quanto ao ensino, uma breve passagem pelas Diretrizes curriculares do Paraná, uma visão dos aspectos históricos que levaram a chegar na geometria que ensinamos hoje e uma síntese da história da Geometria Projetiva.

No capítulo 3 apresenta-se alguns conceitos preliminares , Introdução a Geometria Analítica, uma passada pela Geometria Eliptica, e conceitos básicos da Geometria Projetiva. O Capítulo 4 descreve o porque estudar a Geometria Projetiva e apresenta um estudo axiomático da mesma e ainda uma apresentação das proposições que serão utilizadas nas soluções dos problemas propostos, já no capítulo 5 temos a aplicação dos axiomas dentro das demonstrações dos teoremas propostos pela Geometria Projetiva dando um foco para Desargues, Pappus e Pascal.

O capítulo 6 apresenta uma proposta de solução para problemas euclidianos envolvendo Geometria Projetiva que estão resolvidos na Geometria Projetiva, com a utilização das proposições da Geometria Projetiva.

No capítulo 7 descreve-se uma nova visão para solução de problemas envolvendo a geometria projetiva e a análise dos resultados obtidos, e no capítulo 8 temos algumas considerações em relação a aplicação dos axiomas da Geometria Projetiva para solução de problemas.

2 UMA VISÃO PARA O ENSINO DA GEOMETRIA

2.0.7 O ENSINO DE GEOMETRIA

De acordo com (PARANÁ, 2008), a Educação Matemática valoriza os conhecimentos geométricos, que não devem ser rigidamente separados da aritmética e da álgebra, fazendo-se ainda uma ligação com aritmética e com a álgebra, e ainda se entende que a valorização das definições, as abordagens e as demonstrações de seus resultados são inerentes ao conhecimento geométrico. Nota-se que a geometria é uma importante ferramenta que contribui no ensino aprendizagem, apontando as descobertas dentro de outros conteúdos do currículo no qual se mostra necessário as diferentes visões para um mesmo conteúdo para se estabelecer comparações de conceitos e processos matemáticos fazendo com que o aluno tenha uma visão a mais dos conteúdos tratados em sala de aula, através dos quais o professor pode criar uma condição para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis desse conhecimento.

Nota-se que o ensino da matemática vem se modificando nos últimos tempos, fazendo com que os professores despertem seus alunos para aparição de um novo entendimento levando os alunos perceberem que há outros métodos de conceber a geometria, surgindo assim as geometrias Não-Euclidianas. De acordo com (PARANÁ, 2008), as discussões entre educadores matemáticos do início do século XX procurava entender uma pedagogia tal que o aluno pudesse fazer um treino da Matemática distinto daquele derivado das engenharias que prescrevia técnicas puramente sintéticas, pautadas no acerto das demonstrações. Surgiram, por isso, proposições para um treino da Matemática alicerçado nas explorações indutivas e intuitivas, o que configurou um campo da matemática.

Muitas são as pesquisas realizadas em torno do ensino da matemática, dado que esta é uma das disciplinas do currículo na qual os alunos do Ensino Fundamental mais demonstram dificuldades de aprendizado. Nesse sentido, pode-se observar uma grande preocupação dos pesquisadores a fim de reverter esse quadro, apostando em novas formas de abordagem do conteúdo, como aponta (WATERMANN; FRANCO, 2008) que uma das alternativas empregadas por estes com o propósito de facilitar a aprendizagem da matemática, cujas propostas

dialogará com o projeto de pesquisa ora apresentado, é partir do estudo da Geometria Projetiva, concebendo-a como ferramenta para o ensino aprendizagem.

Na primeira metade do século XVII, o conhecimento geométrico recebeu, uma nova abordagem com a Geometria Analítica, onde trouxe uma dinâmica diferente à matemática, o conhecimento geométrico aponta uma nova face isso já no final do século XVIII e início do século XIX, com os estudos dos matemáticos Bolyai, Lobachevsky, Riemann e Gauss fazendo-se assim aparecer uma geometria dita Não-Euclidiana, que trouxe uma nova maneira de ver e conceber o conhecimento matemático, portanto pode-se apresentar uma abordagem para essa geometria trazendo algumas aplicações de seus conceitos no universo projetivo buscando com que o aluno se interesse mais por essa ciência chamada Matemática.

Para que possamos verificar a viabilidade da aplicação dos problemas resolvidos com o sistema axiomático da Geometria Projetiva, temos que ressaltar alguns apontamentos feito pelas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (PARANÁ, 2008) , os conteúdos estruturantes da geometria tem o espaço como referência, de modo que o aluno tenha que fazer uma análise e perceber seus objetos para então representa-los, pode-se citar alguns conceitos que as Diretrizes Curriculares do Paraná apontam na área da Geometria Analítica e Geometria Não- Euclidiana.

1. Geometria Analítica : noções da Geometria Analítica utilizando o sistema cartesiano;
2. Noções de Geometria Não -Euclidiana : Geometria Projetiva, Geometria Topológica e Noções de Geometria dos Fractais .

2.0.8 ASPECTOS HISTÓRICOS DA GEOMETRIA

No decorrer do tempo às ideias geométricas abstraídas da natureza, que aparecem tanto na vida inanimada como na vida orgânica e nos objetos produzidos pelas diversas culturas, influenciaram muito o desenvolvimento humano. Por volta dos anos 300 a.C, Euclides contribui para o avanço da matemática com cunho geométrico com a obra “Os Elementos” onde seus registros formalizaram o conhecimento geométrico da época.

Segundo (BOYER, 1988) a obra de Euclides de Alexandria (325 a.C.- 265 a.C.) foi a primeira que atingiu um alto grau de sofisticação. Ele introduziu, o método axiomático e não se sabe se sua obra tinha um motivo didático ou se era para reunir o conhecimento da época. Entretanto sabe-se que, de fato, ele alcançou esses dois objetivos com treze livros intitulados “Os Elementos”. Esses livros continham Aritmética, Álgebra e Geometria com grande rigor. Depois da Bíblia esse foi o livro que teve o maior número de publicações em diferentes idiomas e o mais estudado até os nossos tempos.

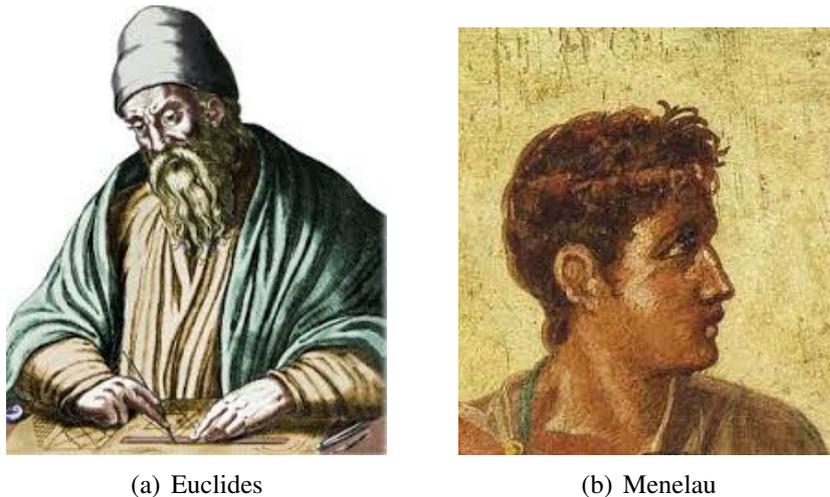


Figura 1: Fotos dos Matemáticos Euclides e Menelau

Fonte:imagens retiradas do site

<http://www.edukapa.net/FisicaNet/HistoriadaFisica/Euclides.htm>

E ainda através de comentários de historiadores gregos e árabes sabe-se que Menelau de Alexandria (70 d.C. - 130 d.C) escreveu uma coleção de seis livros sobre Cordas no Círculo, um livro de Elementos da Geometria e uma série de trabalhos em geometria e astronomia, todos perdidos. O único livro de Menelau que sobreviveu aos tempos foi o Sphaerica, um tratado escrito em três volumes sobre geometria e trigonometria esférica, do qual chegou até o nosso tempo uma tradução árabe. No volume III ele menciona o teorema que é utilizado para solução secundária dos problemas resolvidos no trabalho, porque pode ser aplicado na resolução de problemas de pontos colineares.

2.0.9 SINTESE HISTÓRICA DA GEOMETRIA PROJETIVA

Segundo (WATERMANN; FRANCO, 2008) a história da Geometria Projetiva começa na Itália no século XV, onde surgiu do esforço de criar uma teoria racional onde os artistas e os pintores da Renascença como Leon Battista Alberti com sua obra “Nossa Senhora com o Menino e Santos” ver figura 2 (a) , Paolo Uccello com sua obra “Presentazione Della Vergine al-tempio” ver figura 2 (b), Leonardo da Vinci com sua obra “A última ceia” ver figura 3 (a) e Piero della Francesca com sua obra “A cidade ideal” ver figura 3 (b), tinham descoberto um método para representar na teoria, a imagem suscitada em nossos olhos pelos objetos do mundo exterior.

Os artistas, buscando mais realismo para suas obras, introduziram os conceitos de ponto de fuga e perspectiva. Porém, demorou cerca de dois séculos para que essas ideias



(a) 'Nossa Senhora com o Menino e Santos' - Piero della Francesca - renascença por: Leon Battista Alberti



(b) Presentazione Della Vergine-al-tempio por: Paolo Uccello

Figura 2: Obras de Leon Battista Alberti e Paolo Uccello

Fonte: imagem (a) retirada do site <http://www.canvasreplicas.com/Francesca116.htm> e a imagem (b) retirada do site https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Paolo_uccello,presentazione_di_maria_al_tempio



(a) A última ceia por: Leonardo da Vinci



(b) A cidade ideal por: Piero della Francesca

Figura 3: Obras de Leonardo da Vinci e Piero della Francesca

Fonte: imagem (a) retirada do site [http://artefontedeconhecimento.blogspot.com.br/2013/03/a-ultima-ceia-leonardo-da-vinci-e-a-imagem-\(b\)-retirada-do-site-http://falcaodejade.blogspot.com.br/2013/09/a-cidade-ideal-e-utopia-do-renascimento](http://artefontedeconhecimento.blogspot.com.br/2013/03/a-ultima-ceia-leonardo-da-vinci-e-a-imagem-(b)-retirada-do-site-http://falcaodejade.blogspot.com.br/2013/09/a-cidade-ideal-e-utopia-do-renascimento)

pudessem ser formuladas matematicamente. Essa construção foi feita por um pequeno grupo de matemáticos franceses motivado por Gerard Desargues (1591 - 1661) ver figura 4 (a), contudo, talvez pela própria maneira que foi escrito, em uma linguagem um tanto peculiar, o trabalho e as ideias de Desargues não foram bem aceitos na época. Somente no início do século XIX, Jean Victor Poncelet (1788-1867) ver figura 4 (b) pôde resgatá-los.

Poncelet prisioneiro de guerra russo, sem livros nas mãos criou sua grande obra sobre a Geometria Projetiva publicada em 1822 com o título de "Tratado das propriedades projetivas das figuras" ver figura 5.

Nota-se que a Geometria Projetiva se mostra indispensável para o entendimento das perspectivas utilizadas pelos renascentistas com a utilização das suas teorias, dimensões reais e propriedades métricas dos objetos. Essa nova Geometria, visa criar regras empíricas,



(a) Gerard Desargues



(b) Jean Victor Poncelet

Figura 4: Fotos dos Matemáticos Gerard Desargues e Jean Victor Poncelet

Fonte: imagem (a) retirada do site <http://xavier.hubaut.info/coursmath/bio/desargue> e imagem (b) retirada do site <http://www.wikiwand.com/ca/Jean Victor Poncelet>

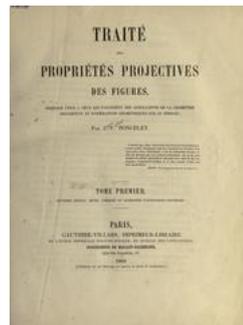


Figura 5: Obra *Traité des propriétés projectives des figures* (1822)

Fonte: imagem retirada do site <http://www.wikiwand.com/ca/Jean Victor Poncelet>

esquecendo-se das velhas propriedades dos Elementos de Euclides e concentrou nas propriedades visuais das figura uma vez que se torna interessante explorar tais propriedades para que o trabalho com fotografia se torne mais exequível.

As evidências que tornam essa nova Geometria marcante, são as diferenças entre a Geometria Projetiva e a Geometria Euclidiana. Na Geometria Euclidiana duas retas nem sempre se interceptam enquanto na Geometria Projetiva duas retas sempre se interceptam. Isso ocorre por que se trabalha com a geometria de um ponto de vista do olhar humano, é o que acontece quando enxergamos uma estrada em linha reta a sensação de que no infinito haverá um ponto de concorrência, isso se torna uma característica marcante no estudo de Geometria Projetiva.

Esse breve apanhado histórico apresenta as origens da Geometria Projetiva na arte e na pintura, colocando os pintores como seus contribuintes iniciais. Assim, uma ciência que foi inspirada na arte e fabricada por grandes gênios só poderia vir a ser uma sincera arte. Na Idade

Média, as pinturas eram, em sua maior parte, planas e chapadas, sem conexão com o mundo atual. Os temas tratados eram religiosos e simbólicos, como pode ser averiguado nas pinturas apresentadas na época.

3 CONCEITOS PRELIMINARES

Neste capítulo trataremos alguns conceitos preliminares sobre Geometria Analítica , Álgebra Linear e Geometria Projetiva, que foram retirados dos livros (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987), (ANTON, 2010) e (GIOVANNI et al., 1994).

3.1 INTRODUÇÃO A GEOMETRIA ANALÍTICA

Nessa seção trataremos do plano cartesiano ortogonal, coordenadas de um ponto, os quadrantes e bissetrizes dos quadrantes no sistema de coordenadas usual.

3.1.1 O PLANO CARTESIANO

O plano cartesiano ortogonal, ou apenas plano cartesiano, é o sistema formado por dois eixos perpendiculares, de origem O comum e com mesma unidade.

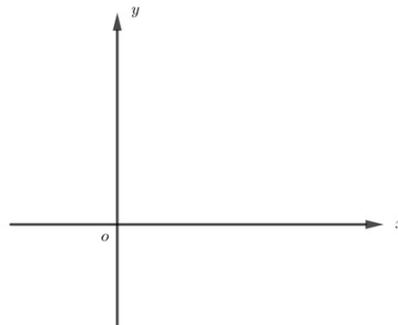


Figura 6: O plano cartesiano

Fonte: Autores

No plano cartesiano, denotamos por:

- eixo das abscissas: o eixo x ;

- eixo das ordenadas: o eixo y ;
- origem: o ponto de intersecção entre os eixos x e y

os eixo assim definidos são chamados eixo coordenados.

Definição 3.1.1 (Coordenadas de um ponto). *Todo ponto do sistema cartesiano é representado por um par ordenado de números; e a todo par ordenado, neste sistema, podemos associar um ponto.*

No par ordenado, o primeiro número é a abscissa e o segundo , a ordenada conforme a figura 7.

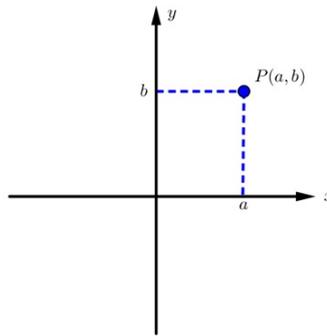


Figura 7: Par ordenado
Fonte: Autores

Definição 3.1.2 (Os quadrantes). *Os eixos coordenados determinam quatro quadrantes (regiões do plano) definidos a seguir*

Primeiro quadrante: pontos com abscissa e ordenada ambas positivas.

Segundo quadrante: pontos com abscissa negativa e ordenada positiva.

Terceiro quadrante: pontos com abscissa e ordenada ambas negativas.

Quarto quadrante: pontos com abscissa positiva e ordenada negativa. ver figura 8

Definição 3.1.3 (Bissetrizes dos quadrantes).

A reta suporte das bissetrizes do primeiro e terceiro quadrantes é chamada de bissetrizes dos quadrantes ímpares, genericamente o ponto $P(a, a)$ pertence a bissetriz dos quadrantes ímpares

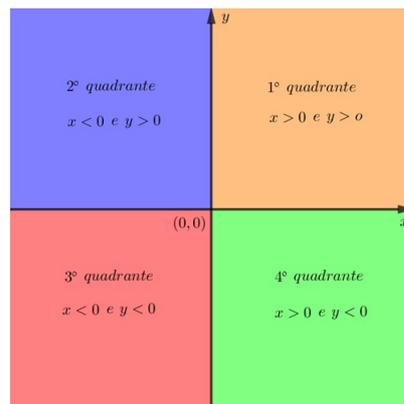


Figura 8: Os quadrantes

Fonte: Autores

A reta suporte das bissetrizes do segundo e quarto quadrantes é chamada de bissetriz dos quadrantes pares, genericamente, o ponto $P(a, -a)$ pertence a bissetriz dos quadrantes pares como podemos observar na figura 9.

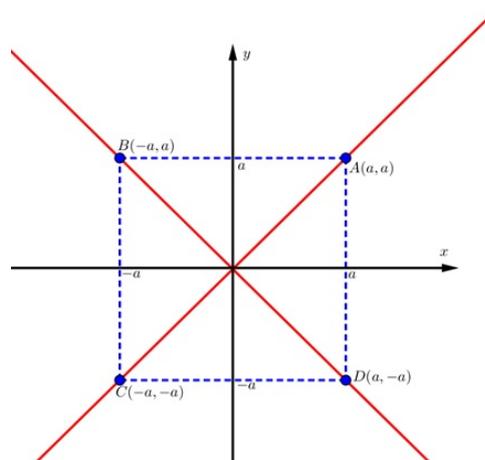


Figura 9: Bissetrizes dos quadrantes

Fonte: Autores

3.1.2 EQUAÇÃO GERAL DA RETA

Nessa seção trataremos as definições de equação geral e reduzida da reta e alguns exemplos

Definição 3.1.4. Chamamos equação geral da reta r qualquer equação da forma

$$ax + by + c = 0$$

em que a , b e c são constante, com a e b não nulos simultaneamente.

Note que no caso em que a reta r possui equação reduzida $y = mx + q$, pode-se obter a forma geral da seguinte forma $mx - y + q = 0$

Ainda pode-se ressaltar que para uma reta r existem infinitas equações gerais, pois caso $ax + by + c = 0$ seja uma equação de r , tomando uma constante k , não nula, a equação $kax + kby + kc = 0$ também representa os pontos de r .

Exemplo 3.1.1. Determinar a equação geral da reta que passa pelos pontos $A(-1, 4)$ e $B(5, -2)$.

Resolução (1). Com os dados do exemplo temos a seguinte representação

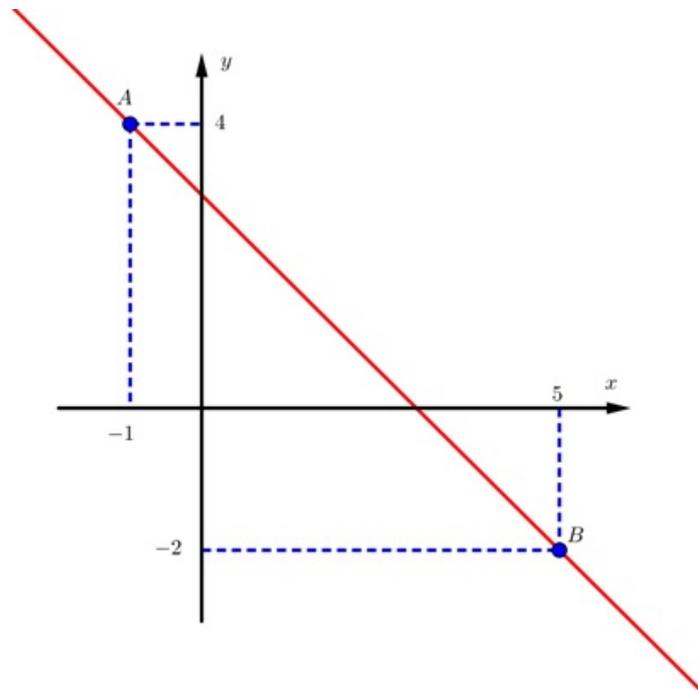


Figura 10: Apresentação do modelo de reta

Fonte: Autores

resolvendo o seguinte determinante tem-se que:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

logo obtemos a seguinte equação geral da reta $x + y - 3 = 0$, intuitivamente trabalha-se o conceito de colineariedade em equações de retas.

3.1.3 EQUAÇÃO REDUZIDA DA CIRCUNFERÊNCIA

Considere no plano cartesiano a circunferência λ de centro $C(a, b)$ e raio R logo temos a seguinte representação

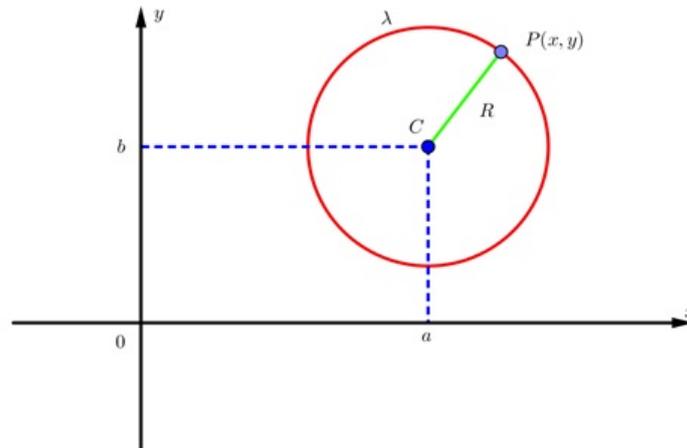


Figura 11: Circunferência no plano cartesiano

Fonte: Autores

Note que a distância entre o centro C da circunferência e um ponto qualquer $P = (x, y)$ dessa circunferência é R . Assim tem-se que:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

elevando-se ao quadrado os dois membros dessa igualdade, obtemos uma equação da forma:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

Essa é a forma da equação reduzida da circunferência, ainda vale a pena ressaltar que temos um outro modelo de equação da circunferência a equação normal onde desenvolvendo os trinômios quadrados perfeitos obtém-se:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0.$$

3.1.4 POSIÇÃO RELATIVAS ENTRE UMA RETA E UMA CIRCUNFERÊNCIA

Seja uma reta r e uma circunferência λ , existem 3 possíveis relações entre r e λ divide-se em casos para ficar fácil a visualização.

1. Primeiro caso: em que a reta $r : ax + by + c = 0$ e a circunferência $\lambda : (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ são secantes ver figura 12.

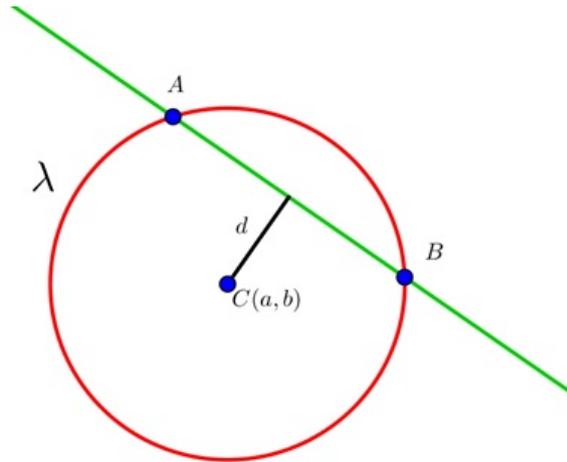


Figura 12: Reta secante à circunferência

Fonte: Autores

Nessa situação, a distância d entre o centro e a reta r é menor que o raio. Isto é, sendo R o raio, temos $d < R$, além disso, a reta e a circunferência têm dois pontos de intersecção distintos, ou seja, $r \cap \lambda = \{A, B\}$.

2. Segundo caso: em que a reta $(r)ax + by + c = 0$ e a circunferência $(\lambda)(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ são tangentes ver figura 13.

Nessa situação, a distância d entre o centro C e a reta r é igual ao raio. Isto é, sendo R o raio, temos $d = R$, além disso, a reta e a circunferência têm um único ponto de intersecção, ou seja, $r \cap \lambda = \{T\}$.

3. Terceiro caso: em que a reta $(r)ax + by + c = 0$ é exterior à circunferência $(\lambda)(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ ver figura 14.

Nessa situação, a distância d entre o centro C e a reta r é maior que o raio. Isto é, sendo R o raio, temos $d > R$, além disso, a reta e a circunferência não têm pontos de intersecção, ou seja, $r \cap \lambda = \emptyset$.

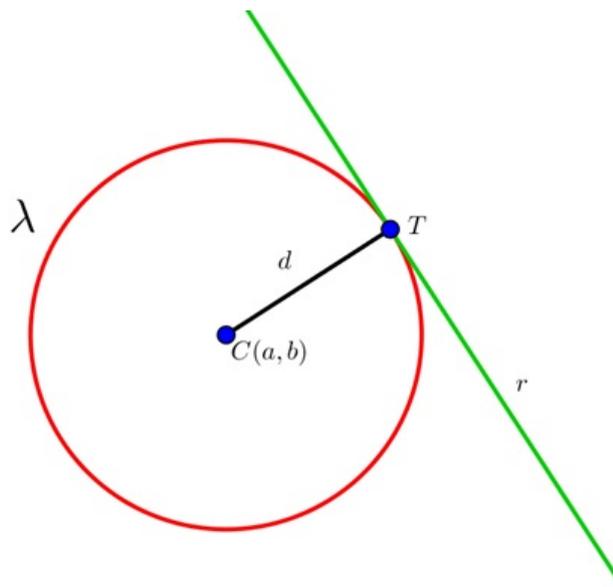


Figura 13: Reta tangente à circunferência
Fonte: Autores

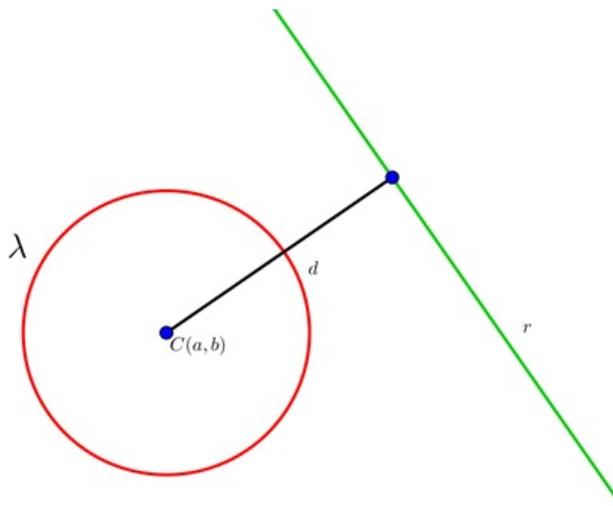


Figura 14: Reta exterior à circunferência
Fonte: Autores

3.1.5 PRODUTO INTERNO

Daremos primeiramente alguns conceitos básicos de vetores como norma e ângulo entre dois vetores segundo (CAMARGO; BOULOS, 2005) e posteriormente iremos obter a expressão do produto interno em termos das coordenadas dos fatores em relação a um sistema de eixos ortogonais.

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano.

Definição 3.1.5. A norma ou comprimento do vetor \vec{v} é o número $\|\vec{v}\|$ dado pelo comprimento de um segmento representante de \vec{v} .

Observação 3.1.1.

(1) A norma de um vetor independe da escolha do segmento representante. Com efeito, se $\vec{v} = \vec{AB} = \vec{CD}$ então $AB \equiv CD$ e, portanto,

$$d(A,B) = d(C,D) = \|\vec{v}\|.$$

(2) Se $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $\vec{v} = \vec{AB}$, então

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

(3) Se $P = (x, y)$ é o ponto tal que $\vec{v} = \vec{OP}$, então:

$$\|\vec{v}\| = d(O,P) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(4) Um vetor é chamado de unitário se sua norma é igual a 1.

(5) Se $\vec{v} \neq 0$, o vetor $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ é um vetor unitário, chamado normalizado do vetor \vec{v} , com igual direção e sentido que \vec{v} . De fato, os vetores têm a mesma direção (são paralelos) pois um é múltiplo do outro e como $\frac{1}{\|\vec{v}\|} > 0$, os vetores \vec{v} e $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ tem mesmo sentido. Note ainda que $\left\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\| = 1$.

(6) Se $\vec{v} \neq 0$, o vetor $-\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ é também unitário e tem a mesma direção que \vec{v} , mas não o mesmo sentido.

Antes de definirmos o produto interno precisamos também do conceito de ângulo entre dois vetores.

Definição 3.1.6 (Ângulos entre vetores). Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores não nulos no plano. Definimos o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} como sendo o menor ângulo entre os segmentos AB e AC representantes de \vec{u} e \vec{v} , respectivamente. Define-se $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$ a medida do ângulo entre \vec{u} e \vec{v} , ver figura(15)

Observação 3.1.2.

(a) Medimos os ângulos em radianos ou em graus, onde π radianos = 180° .

(b) Notemos que $0 \leq \angle(\vec{u}, \vec{v}) \leq \pi$, equivalentemente, $0^\circ \leq \angle(\vec{u}, \vec{v}) \leq 180^\circ$.

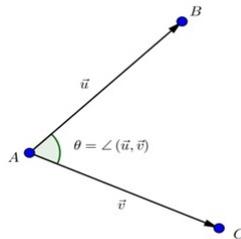


Figura 15: Ângulo entre dois vetores

Fonte: Autores

$$(c) \text{ Tem-se } \begin{cases} \angle(\vec{v}, \vec{u}) = \angle(\vec{u}, \vec{v}) \\ \angle(\lambda \vec{u}, \mu \vec{v}) = \angle(\vec{u}, \vec{v}) \text{ se } \lambda \mu > 0 \\ \angle(\lambda \vec{u}, \mu \vec{v}) = \pi - \angle(\vec{u}, \vec{v}) \text{ se } \lambda \mu < 0 \end{cases}$$

Com as devidas definições e observações feitas podemos definir o produto interno.

Definição 3.1.7 (Produto interno). *O produto interno dos vetores \vec{u} e \vec{v} do plano é o número real $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ definido da seguinte maneira como cita (WINTERLE, 2010):*

(a) Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ temos que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$

(b) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\theta = \angle \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ então $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$.

Proposição 3.1.1. *Sejam $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ dois vetores no plano.*

$$\text{Então, } \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = a\alpha + b\beta$$

Demonstração 3.1.1. *Se algum dos vetores \vec{u} ou \vec{v} é nulo, temos $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ e, também, $a\alpha + b\beta = 0$.*

Sejam $\vec{u} = \vec{OP}$ e $\vec{v} = \vec{OQ}$ vetores não nulos, com $P = (a, b)$ e $Q = (\alpha, \beta)$. Então, ver figura (16),

tem-se a seguinte relação

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \vec{v} - \vec{u} = (\alpha - a, \beta - b)$$

Aplicando a lei dos cossenos no $\triangle OPQ$ obtem-se o seguinte

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos \theta$$

$$\text{e daí } 2 \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \cdot \cos \theta = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2$$

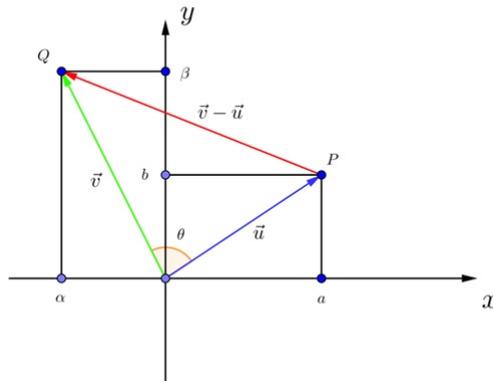


Figura 16: Diferença $\vec{v} - \vec{u}$

Fonte: Autores

então

$$\begin{aligned}
 2 \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \cdot \cos \theta &= (\alpha^2 + \beta^2) + (a^2 + b^2) - ((\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2) \\
 \Leftrightarrow 2 \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \cdot \cos \theta &= \alpha^2 + \beta^2 + a^2 + b^2 - (\alpha^2 - 2\alpha \cdot a + a^2 + \beta^2 - 2\beta \cdot b + b^2) \\
 \Leftrightarrow 2 \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \cdot \cos \theta &= \alpha^2 + \beta^2 + a^2 + b^2 - \alpha^2 + 2\alpha \cdot a - a^2 - \beta^2 + 2\beta \cdot b - b^2 \\
 \Leftrightarrow 2 \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \cdot \cos \theta &= 2\alpha \cdot a + 2\beta \cdot b = 2(\alpha \cdot a + \beta \cdot b)
 \end{aligned}$$

então

$$\|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \cdot \cos \theta = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$$

3.1.6 PRODUTO VETORIAL

Para definir o produto vetorial considere o eixo de coordenadas ortogonais XYZ , seja $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$

Definição 3.1.8 (Produto Vetorial). *O produto vetorial de \vec{u} por \vec{v} é o vetor*

$$\vec{u} \times \vec{v} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, -(x_1 z_2 - x_2 z_1), x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Para o cálculo do produto vetorial utiliza-se um dispositivo prático, que consiste em calcular o determinante de uma matriz 3×3 cujos elementos da primeira linha são os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$, os elementos da segunda linha são as coordenadas do

vetor \vec{u} e os da terceira são as coordenadas do vetor \vec{v} com isso temos a seguinte :

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3$$

3.1.7 SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DO PRODUTO VETORIAL

O comprimento de $\vec{u} \times \vec{v}$, se θ é o ângulo entre os vetores \vec{u} e \vec{v} não nulos, logo tem-se a seguinte relação.

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$$

Observando a figura(17), no paralelogramo determinado pelos vetores \vec{u} e \vec{v} , a medida da base é $|\vec{u}|$ e da altura é $|\vec{v}| \sin \theta$.

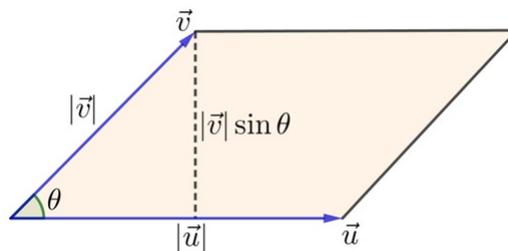


Figura 17: Paralelogramo determinado pelos vetores \vec{u} e \vec{v}

Fonte: Autores

A área A deste paralelogramo é

$$A = (\text{base}) \cdot (\text{altura}) = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$$

ou seja

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

3.2 GEOMETRIA ELÍPTICA

Segundo (BARROS; ANDRADE, 2010) a esfera unitária canônica \mathbb{S}^2 passa a ser um modelo de "plano" de uma geometria chamada Geometria Elíptica. Nessa geometria não é considerado o grupo de ordem do sistema axiomático da Geometria Euclidiana. Além disso, as retas elípticas são os grandes círculos da esfera \mathbb{S}^2 e dois pontos distintos de um círculo definem dois segmentos de círculo, assim ao citar um segmento de reta elíptica com extremos A e B é necessário ser mais preciso indicando qual seria seu "interior". Outra diferença em relação à Geometria Euclidiana é que no grupo axiomático, mais especificamente no Axioma de congruência, como não existe ordem, deve-se omitir a expressão "Um dado lado da reta". Outra importante diferença está no Axioma da Paralelas, ao contrário do que ocorre na Geometria Euclidiana, na Geometria Projetiva temos que sempre ocorre interseção entre quaisquer duas retas e a interseção é dada por dois pontos. A região que no plano Euclidiano era denominada ângulo, aqui terá uma região correspondente a qual chamaremos de lua.

Seguem abaixo o sistema de axiomas da Geometria Elíptica:

1. Termos Indefinidos;

- (a) Ponto, reta, plano, pertence e congruência;

2. Axiomas de Incidência;

- (a) Para cada dois pontos distintos existe uma reta que os contém.
 (b) Existem pelo menos três pontos que não estão sobre uma mesma reta e todos os pontos estão sobre o mesmo plano.
 (c) Toda reta contém pelo menos dois pontos.

3. Axiomas de Congruência;

- (a) Se A e B são dois pontos numa reta r_η e A' é um outro ponto de uma reta $r_{\eta'}$, não necessariamente distinta da anterior, então é sempre possível encontrar um ponto B' em r_η tais que os segmentos \overline{AB} e $\overline{A'B'}$ são congruentes.
 (b) Se um segmento $\overline{A'B'}$ e um segmento $\overline{A''B''}$ são congruentes a um mesmo segmento \overline{AB} então os segmentos $\overline{A'B'}$ e $\overline{A''B''}$ são congruentes entre si.
 (c) Sobre uma reta r_η sejam \overline{AB} e \overline{BC} dois segmentos da mesma que, exceto por B, não têm pontos em comum. Além disto, sobre uma outra ou a mesma reta $r_{\eta'}$, sejam $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$ dois segmentos que, exceto por B' , não tem pontos em comum. Neste caso, se $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ então $\overline{AC} = \overline{A'C'}$:

(d) Se $L_{\eta v}$ é uma lua e se $r_{v'}$ é uma reta elíptica, então existem duas retas elípticas $r_{\eta'}$ e $r_{v''}$ tais que $L_{\eta v} = L_{\eta' v'} = L_{-v' v''}$. Além disto, cada lua é congruente a si mesma.

(e) Se para dois triângulos Δ_{uvw} e $\Delta_{u'v'w'}$ temos

$$\overline{uv} = \overline{u'v'}, \overline{uw} = \overline{u'w'} \text{ e } L_{\eta v} = L_{\eta' v'}$$

com

$$\eta = u \times v, v = w \times u \text{ e } \eta' = u' \times v', v' = w' \times u'$$

então temos Δ_{uvw} e congruente $\Delta_{u'v'w'}$.

4. Axiomas das Paralelas;

(a) Seja r_{η} uma reta e A um ponto não pertencente à r_{η} . Então toda reta que passa por A intersecta r_{η} .

5. Axiomas de Continuidade;

(a) Existe uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos de uma reta menos um de seus pontos.

6. Axiomas de ordem (não existem)

3.2.1 PLANO ELÍPTICO

Diz-se que um subconjunto $r \subset \mathbb{S}^2$ é um grande círculo quando $r = \mathbb{S}^2 \cap \Gamma_{\eta}$, onde Γ_{η} é o plano que incide na origem e tem vetor normal η .

Chamaremos \mathbb{S}^2 de plano elíptico e seus elementos de pontos elípticos, e ainda um grande círculo em \mathbb{S}^2 será chamado de reta elíptica.

Para destacar que a reta elíptica r é obtida pela interseção do plano Γ_{η} com \mathbb{S}^2 , utiliza-se a notação

$$r_{\eta} = \mathbb{S}^2 \cap \Gamma_{\eta}$$

3.2.2 DISTÂNCIA ELÍPTICA

Cosidere dois pontos $u, v \in \mathbb{S}^2$, seja ainda $\theta(u, v) \in [0, \pi]$ a medida do ângulo entre vetores unitários u e v .

Do fato de u e v serem unitários temos

$$\cos\theta(u, v) = \langle u, v \rangle, \text{sen}\theta(u, v) = \|u \times v\|$$

chama-se a distância elíptica a aplicação

$$d : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d(u, v) = \theta(u, v)$$

Nesta seção foram apresentados apenas algumas questões bem pontuais sobre Geometria Elíptica, mais detalhes podem ser vistos no livro de (BARROS; ANDRADE, 2010).

Considerando uma esfera, podemos observar que duas retas elípticas AC e AB, interceptam-se em dois pontos distintos (A e A', chamados pontos antípodas, que são pontos diametralmente opostos). Pode-se mostrar na figura a seguir uma maneira mais intuitiva de retas elípticas ver figura(18).

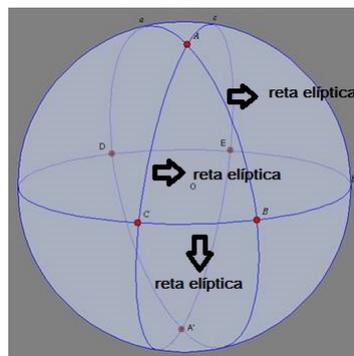


Figura 18: Retas elípticas

Fonte:Figura retirada do site <http://www.prof2000.pt/users/marilia-br/ex7/ex7.htm>

3.3 PLANO PROJETIVO \mathbb{RP}^2

Aqui se inicia o conceitos preliminares da Geometria Projetiva que posteriormente serão utilizados para demonstrações das proposições da mesma, inicialmente façamos uma breve apresentação da Geometria dos conceitos iniciais da Geometria Projetiva, uma vez que será necessária para nortear alguns conceitos dos axiomas empregados nos teoremas e problemas resolvidos.

3.3.1 CONCEITOS INICIAL DO PLANO PROJETIVO \mathbb{RP}^2

Segundo (BARROS; ANDRADE, 2010) assumindo que quais quer duas retas se intersectam num único ponto constrói-se um modelo de geometria bidimensional sem retas paralelas, a Geometria Projetiva ou Geometria Elíptica Simples.

Considere o conjunto obtido ao retiramos o vetor nulo de \mathbb{R}^3 , logo diremos que o conjunto é o \mathbb{R}^3 perfurado na origem e denotamos por $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. E ainda no conjunto $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, definimos a relação de equivalência

$$v \sim w \Leftrightarrow \text{existe um número real } \lambda \neq 0 \text{ tal que } v = \lambda \cdot w$$

Considere ainda o conjunto quociente dessa relação de equivalência.

$$\mathbb{RP}^2 = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) / \sim .$$

Chamando \mathbb{RP}^2 de Plano Projetivo e seus elementos de pontos projetivos, os quais serão denotados por \bar{v} , com $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, pela relação de equivalência, o conjunto que ele está nomeado é o conjunto dos múltiplos não nulos de v ,

$$\bar{v} = \{\lambda \cdot v; \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ com } \lambda \neq 0$$

Seja $\bar{v} = \overline{(v_1, v_2, v_3)}$ convencionalmente usamos a seguinte notação para \bar{v} , $\bar{v} = (v_1 : v_2 : v_3)$, está tripla é chamada de coordenadas homogêneas de \bar{v} . Portanto, o subconjunto $\bar{v} \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ é uma reta perfurada, a aplicação quociente é a função denotada e definida por:

$$\psi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^2 \text{ dada por } \psi(v) = \bar{v}$$

Logo ψ é uma função sobrejetiva, pois $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$, pois para mostrar essa fato basta tomarmos em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ o elemento v , também, tem-se que ψ não é injetiva, pois dado $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$ existem em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ vários elementos cuja a classe de equivalência é a mesma de v , para isso basta tomar todos os múltiplos de v .

Na figura 19 temos as representações dos pontos projetivos.

3.3.2 RELAÇÃO ENTRE \mathbb{RP}^2 E \mathbb{S}^2

Se olharmos a função $\psi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^2$ de outra forma, tomando como domínio da função a esfera unitária centrada na origem em \mathbb{R}^3 , onde toda reta perfurada ira interceptar a esfera em dois pontos chamados de antipodais, logo definimos a função:

$$\psi_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2; \text{ dada por } \psi_0(v) = \bar{v}$$

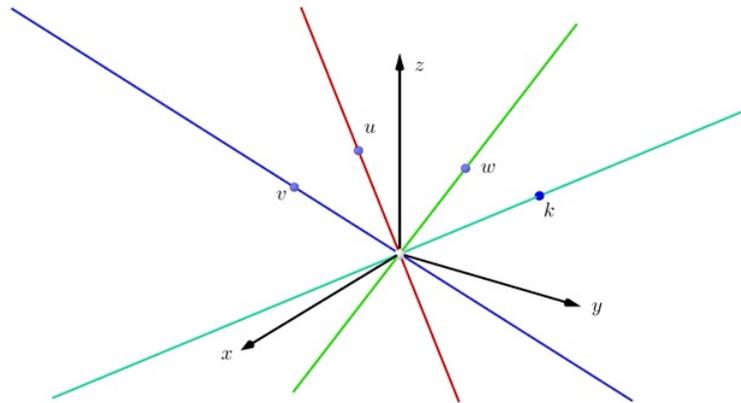


Figura 19: Pontos projetivos

Fonte: Autores

Como está função ψ_0 faz com que cada classe de equivalência tenha apenas dois representantes, no caso

$$u = \frac{1}{\|v\|} \cdot v \text{ e } u = -\frac{1}{\|v\|} \cdot v \text{ onde } v \neq 0$$

Onde temos a ideia que podemos construir o Plano Projetivo sobre \mathbb{S}^2 . Portanto tomando $u, v \in \mathbb{S}^2$, então a relação de equivalência se torna:

$$u \sim v \Leftrightarrow u = v \text{ ou } u = -v$$

Temos o seguinte conjunto quociente desta relação de equivalência:

$$\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2 / \sim$$

Portanto se tomarmos qualquer ponto $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$, pode ser representado por um ponto $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{S}^2$ tal que $u_3 \geq 0$, portanto, se tomarmos o hemisfério norte da esfera unitária temos que:

$$\mathbb{H}_{e_3} = \{u \in \mathbb{S}^2; \langle u, e_3 \rangle = u_3 \geq 0\}$$

A restrição da função projetiva $\psi_0 = \mathbb{H}_{e_3} \rightarrow \mathbb{RP}^2$, é sobrejetiva, assim dado $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$, existe

$$\begin{cases} u = \frac{v}{\|v\|} \in \mathbb{S}^2 \text{ se } u_3 > 0 \\ u, -u \in \mathbb{S}^2, \text{ se } u_3 = 0 \end{cases}$$

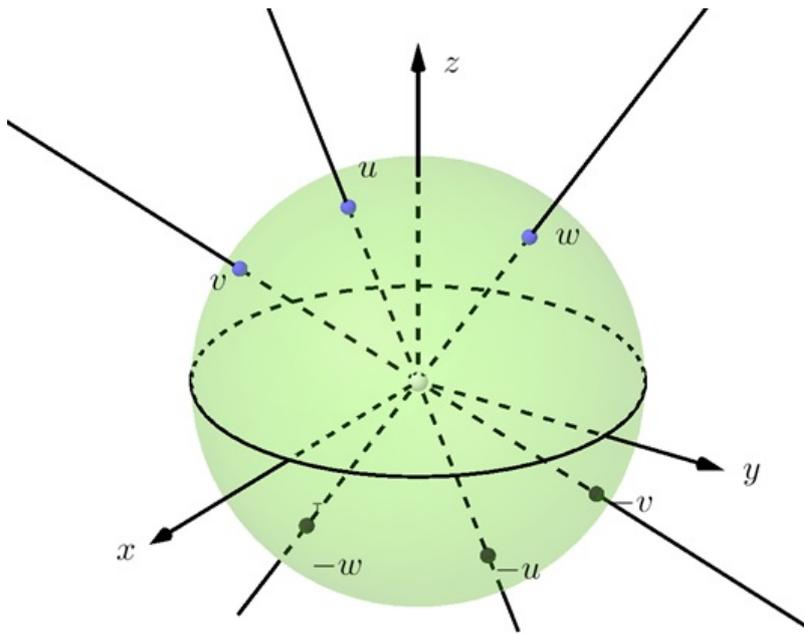


Figura 20: Ilustração de pontos projetivos na esfera

Fonte: Autores

Relacionando a reta elíptica a um grande círculo em \mathbb{S}^2 , ou seja, todos os círculos com mesmo centro e mesmo raio. Considere a reta elíptica $r_{e_3} = \{u \in \mathbb{S}^2; u_3 = 0\} \subset \mathbb{S}^2$, a intersecção da reta elíptica da esfera unitária com o plano xy então, os pontos da imagem de r_{e_3} por ψ_0 são chamados de pontos ideiais, é dado pela função:

$$\psi_0 : \mathbb{H}^3 / r_{e_3} \rightarrow \mathbb{RP}^2 / \mathbb{I}_\infty$$

Neste caso, estamos identificando todos os pontos que pertencem a reta elíptica r_{e_3} , obtidas pela intersecção da esfera unitária com plano xy , com isso traz a ideia de que esses pontos possam ser representados como um único ponto e mesmo ponto no conjunto quociente.

3.3.3 RETAS PROJETIVAS

Segundo (ANDRADE, 2015) usa-se a aplicação da projeção $\psi_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$, para transportar os conceitos definidos em \mathbb{S}^2 para o plano projetivo \mathbb{RP}^2 .

Definição 3.3.1. Um subconjunto $r \subset \mathbb{RP}^2$ é uma reta projetiva se r for a imagem de uma reta

elíptica pela projeção $\psi_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$.

Por outro lado pode-se definir retas projetivas usando planos ao invés de pontos da seguinte forma

Definição 3.3.2. Um sub conjunto $r \subset \mathbb{RP}^2$ é uma reta projetiva se r for a imagem de um plano Γ pela projeção $\psi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^2$

Em \mathbb{R}^3 tem-se que um plano $\Gamma_\eta \subset \mathbb{R}^3$ que contém a origem é determinado pelo seu vetor normal $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, onde η é um vetor não nulo, portanto o plano Γ_η será definido pela equação linear:

$$\Gamma_\eta : \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 = 0$$

então somos induzidos a pensar no plano projetivo pois todo múltiplo de η , $\lambda \eta$ com $\lambda \neq 0$ determina o mesmo plano $\Gamma_\eta \Rightarrow \Gamma_{\lambda \eta} : \lambda \eta_1 x_1 + \lambda \eta_2 x_2 + \lambda \eta_3 x_3 = 0$, logo podemos considerar a classe de equivalência $\bar{\eta} \in \mathbb{RP}^2$ ou seja $\bar{\eta} = (\eta_1 : \eta_2 : \eta_3)$.

Se interceptarmos Γ_η com \mathbb{S}^2 temos a reta elíptica então $\psi_0 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ é uma reta projetiva notação $r_{\bar{\eta}}$ para denotar $r \subset \mathbb{RP}^2$ determinada pela reta elíptica ver figura 21 e figura 22.

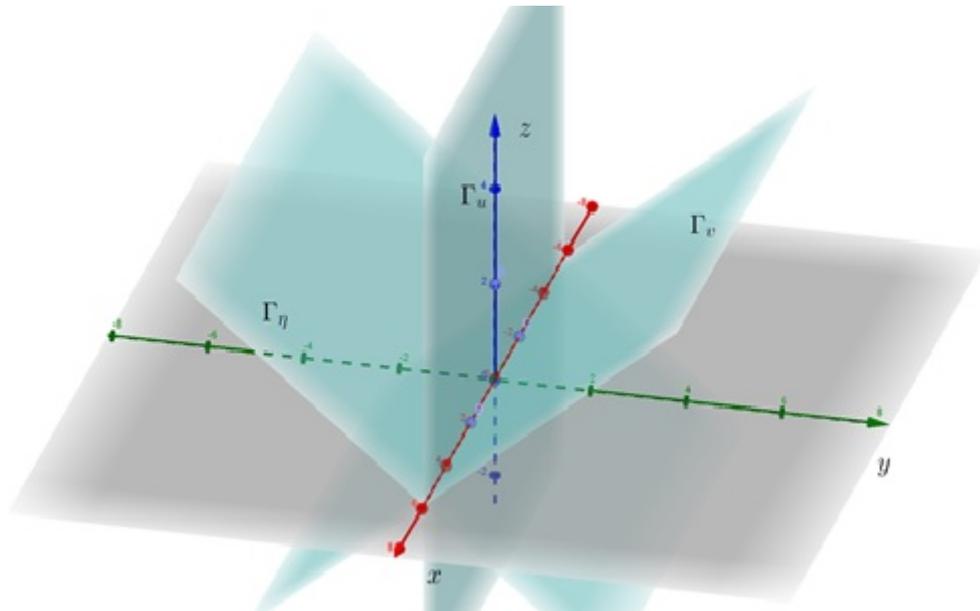


Figura 21: Ilustração de retas projetivas

Fonte: Autores

$$r_{\bar{\eta}} = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$$

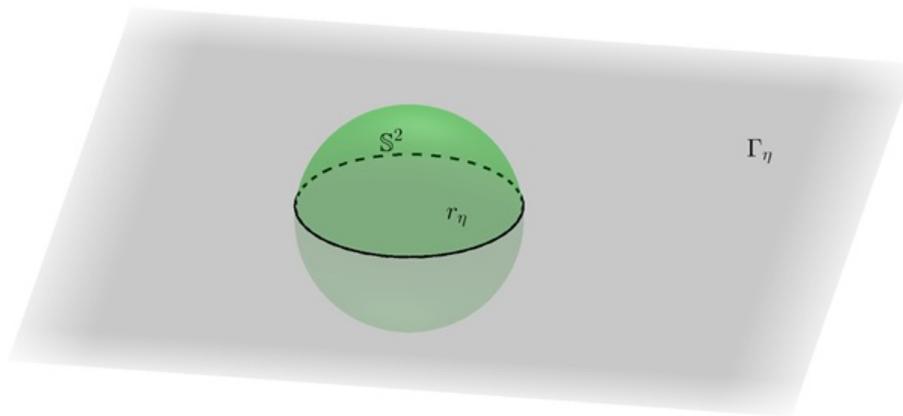


Figura 22: Ilustração de reta elíptica

Fonte: Autores

3.3.4 PLANO PROJETIVO DUAL

Para verificação axiomática é útil a ideia de Plano Projetivo Dual, consideremos \mathbb{RP}^{2*} o subconjunto de todas as retas projetivas tem-se que cada ponto projetivo $\tilde{\eta} \in \mathbb{RP}^2$ define uma única reta projetiva $r_{\tilde{\eta}}$ e cada reta projetiva $r \subset \mathbb{RP}^2$ determina um único ponto projetivo $\tilde{\eta}$ (a sua normal), utiliza-se a notação para Plano Projetivo Dual \mathbb{RP}^{2*} , como sendo o conjunto de todas as retas projetivas. Os elementos do plano projetivo dual são normais das retas. Logo Temos:

$$r_{\tilde{\eta}} \subset \mathbb{RP}^2 \Leftrightarrow \tilde{\eta} \in \mathbb{RP}^{2*}$$

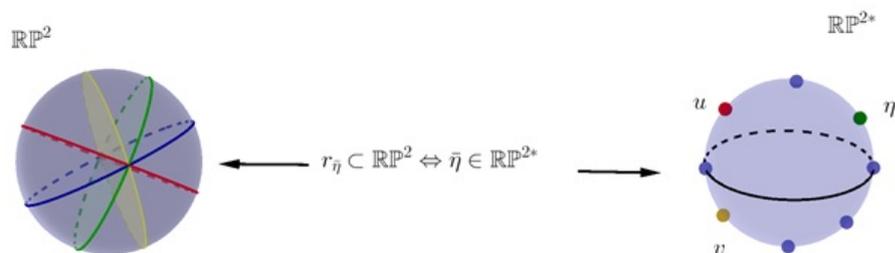


Figura 23: Decomposição Plano Projetivo Dual

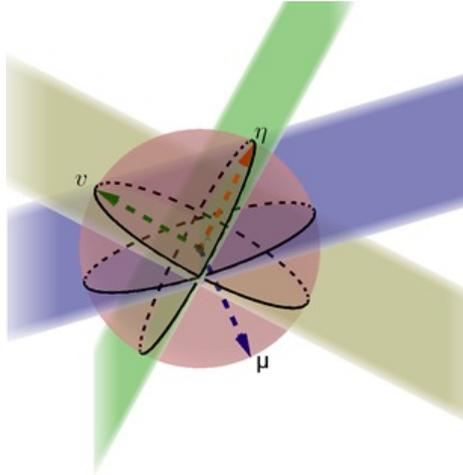


Figura 24: Plano Projetivo Dual

Fonte: Autores

3.3.5 GEOMETRIA AFIM

Seja $\Pi : z = 1 \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, o plano paralelo xy , tangente a \mathbb{S}^2 no pólo norte $p_n = (0, 0, 1)$. Podemos identificar naturalmente o plano \mathbb{R}^2 com o plano Π .

$$(x, y) \Leftrightarrow (x, y, 1).$$

onde cada ponto $(x, y, 1) \in \Pi \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ determina um único ponto em \mathbb{RP}^2 , no caso $(x : y : 1)$. Logo o conjunto $\mathbb{AP}^2 = \{(x : y : 1) \in \mathbb{RP}^2; (x, y, 1) \in \mathbb{R}^3\}$. é chamado de plano afim e seus elementos de pontos afim: Portanto qualquer ponto projetivo $\bar{v} = (x : y : z)$ com $z \neq 0$ pode ser representado como um ponto afim, para isto, tome a classe $\bar{v} = (\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1)$ e v corresponde ao ponto $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) \in \mathbb{R}^2$ igual a identificação afim. Então o Plano Afim é o plano projetivo menos a reta ideal I_∞ . Logo podemos relacionar plano Afim como hemisfério norte de \mathbb{S}^2 sem o equador como a reta ideal é a reta projetiva $r_{\bar{\eta}}$ onde sua normal é $\bar{\eta} = (0 : 0 : 1)$, pode-se definir também o Plano Afim da seguinte forma:

$$\mathbb{AP}^2 = \{(u_1 : u_2 : u_3) \in \mathbb{RP}^2; u_3 \neq 0\}.$$

3.3.6 RETAS AFIM

A Reta Afim tem por definição a intersecção de uma reta projetiva com o plano afim \mathbb{AP}^2 . Como qualquer reta projetiva intersecta a reta I_∞ , num único ponto, tem-se que uma reta afim é uma reta projetiva menos o seu ponto ideal.

Proposição 3.3.1. A indentificação afim de \mathbb{R}^2 com o plano afim $\mathbb{A}\mathbb{P}^2$ transforma a reta euclidiana $l_{\eta_0} : \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3$ na reta afim $r_{\bar{\eta}}$, onde $\bar{\eta} = (\eta_1 : \eta_2 : \eta_3)$.

Demonstração da proposição acima (BARROS; ANDRADE, 2010)

3.3.7 O PLANO AFIM DUAL

Notação $\mathbb{A}\mathbb{P}^{2*}$:

A reta $\bar{\eta} \in \mathbb{A}\mathbb{P}^{2*}$ ou por $r_{\bar{\eta}} \subset \mathbb{A}\mathbb{P}^2$ em que $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ com $\eta_3 \neq 0$, observe que $\mathbb{A}\mathbb{P}^2$ pode ser identificado como plano projetivo menos o ponto $\bar{\eta} = (0 : 0 : 1)$, logo temos que a identificação de \mathbb{R}^2 com o plano afim transforma a reta euclidiana $l : \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 = 0$ na reta afim $r_{\bar{\eta}}$ onde $\bar{\eta} = (\eta_1 : \eta_2 : \eta_3)$

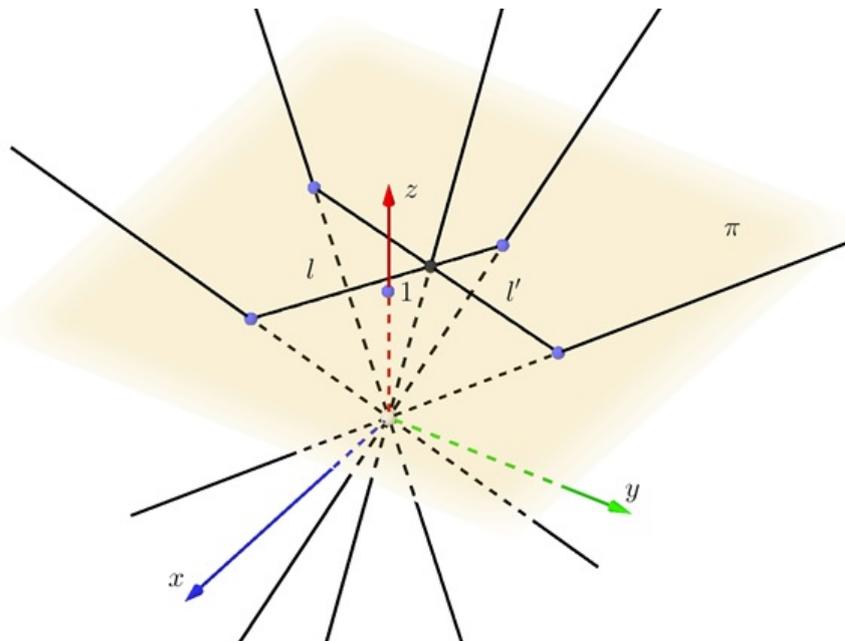


Figura 25: Ilustração de retas afim

Fonte: Autores

Na figura 25 , observa-se o plano afim identifica-se o seguinte:

- Cada ponto do plano π determina uma reta passando pela origem e pelo dado ponto.
- Cada ponto do plano π determina uma reta passando pela origem e pelo dado ponto.
- Se as retas l e $l' \subset \pi$ se interceptam, seu ponto de interseção dá lugar á reta de interseção dos dois plano associados a l e l' . (ver figura 12)

- Quando as retas l e $l' \subset \pi$ são paralelas, os planos que elas definem ainda se interceptam ao longo de uma reta passando pela origem e contida no plano $Z=0$.

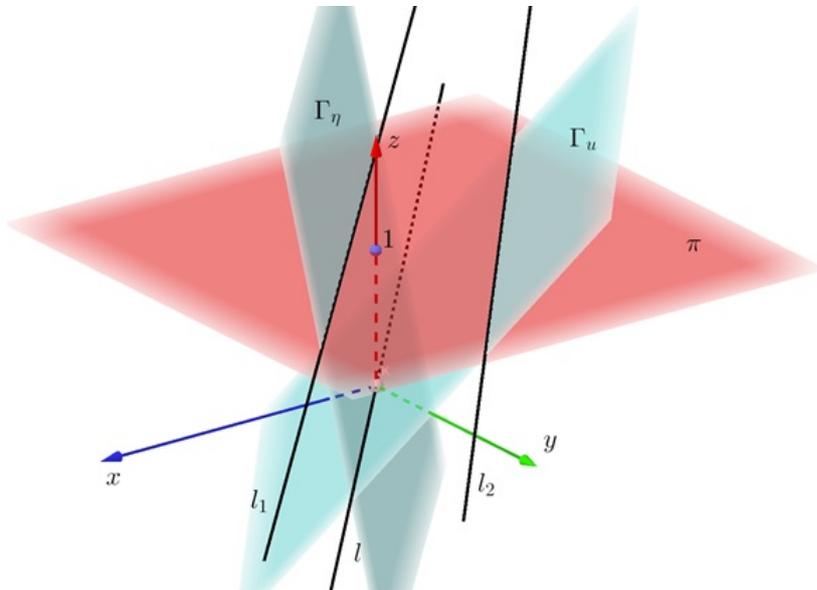


Figura 26: Ilustração do plano afim

Fonte: Autores

Vale salientar que tal identificação nos permite calcular interseção de retas, equação de retas por dois pontos, determinar se duas retas são paralelas, etc. de forma mais simplificada.

3.3.8 COLINEAÇÃO

Define-se uma colineação como uma aplicação biunívoca $\psi : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ que preserve a colineariedade, ou seja, se \bar{u}, \bar{v} e \bar{w} são pontos projetivos colineares, então as imagens $\psi(\bar{u}), \psi(\bar{v})$ e $\psi(\bar{w})$ são também pontos projetivos colineares. No espaço das retas projetivas, seja, o plano projetivo dual, \mathbb{RP}^{2*} , identifica-se como plano projetivo \mathbb{RP}^2 , portanto satisfaz aos axiomas da geometria projetiva, logo vemos que um colineação é uma aplicação biunívoca entre os planos projetivos $P : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}$ assumindo as propriedades de colineariedade dual, então se \bar{u}, \bar{v} e \bar{w} são três pontos projetivos colineares então $p(\bar{u}) = \bar{\eta}, p(\bar{v}) = \bar{\mu}$ e $p(\bar{w}) = \bar{r}$ são retas projetivas concorrentes.

3.3.9 CONSTRUÇÃO DE COLINEAÇÃO

Segundo (BARROS; ANDRADE, 2010), para construir um operador linear $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ basta estabelecer quais os valores de A nos vetores da base canônica $C = \{e_1, e_2, e_3\}$, então escolhendo os valores $A(e_1) = u$, $A(e_2) = v$ e $A(e_3) = w$, a matriz canônica do operador linear é a matriz $[A] = [u, v, w]$, portanto quando o conjunto u, v, w é uma base de \mathbb{R}^3 o operador A é invertível.

Para construir uma colineação, é necessário fixar o valor da colineação em quatro pontos projetivos não colineares três a três. como nota-se na proposição a seguir

Proposição 3.3.2. *Se \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} e \bar{t} são pontos de \mathbb{RP}^2 não colineares três a três, então existe uma colineação $A : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ induzida por um operador linear invertível $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que*

$$\bar{A}(\bar{e}_1) = \bar{u}, \bar{A}(\bar{e}_2) = \bar{v}, \bar{A}(\bar{e}_3) = \bar{w} \text{ e } \bar{A}(1 : 1 : 1) = \bar{t}$$

Demonstração da proposição acima encontra-se no livro (BARROS; ANDRADE, 2010).

4 A GEOMETRIA PROJETIVA

4.1 PORQUE ESTUDAR GEOMETRIA PROJETIVA?

No presente capítulo inicia-se com a seguinte situação:

Na Geometria Euclidiana postula-se a existência de retas que não se intersectam: isto ocorrendo, diz-se que elas são paralelas, tal postulado contradiz a realidade que aprendemos visualmente, se olharmos a figura abaixo se vê que tal realidade não esta realmente presente na Geometria convencional. (BARROS; ANDRADE, 2010, p. 93).



Figura 27: Route 66, EUA

Fonte: imagem retirada do site <https://www.viajali.com.br/roadtrips-incriveis-nos-eua/>

Quando estamos em longa estrada em linha reta, seu lados são assumidos paralelos, entretanto nossa sensação nos diz que elas concorrem num ponto muito longe, chamado ponto

de fuga, este fenômeno é captado por uma fotografia ou por uma pintura sugerindo que a Geometria Euclidiana é um modelo da realidade não tão próximo das nossas sensações quanto estamos acostumados a pensar, como na figura 28 e figura 29:

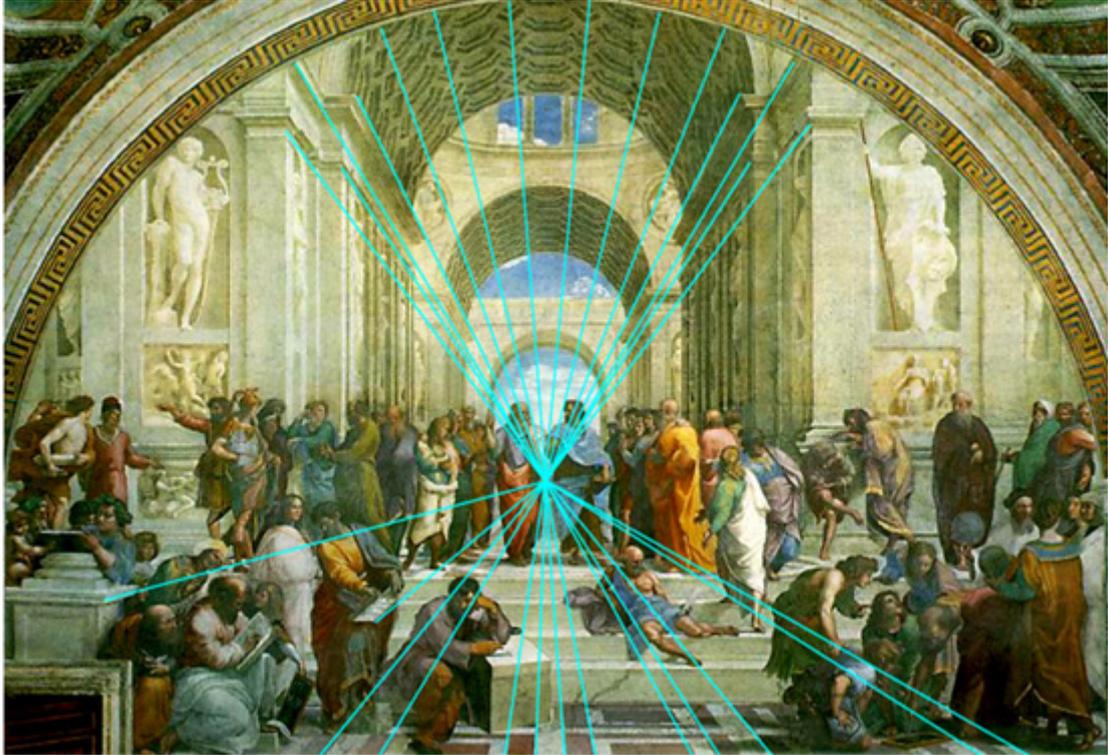


Figura 28: A obra Escola de Atenas

Fonte: imagem retirada do site <http://cienciaecognicao.org/neuroemdebate/?p=137>

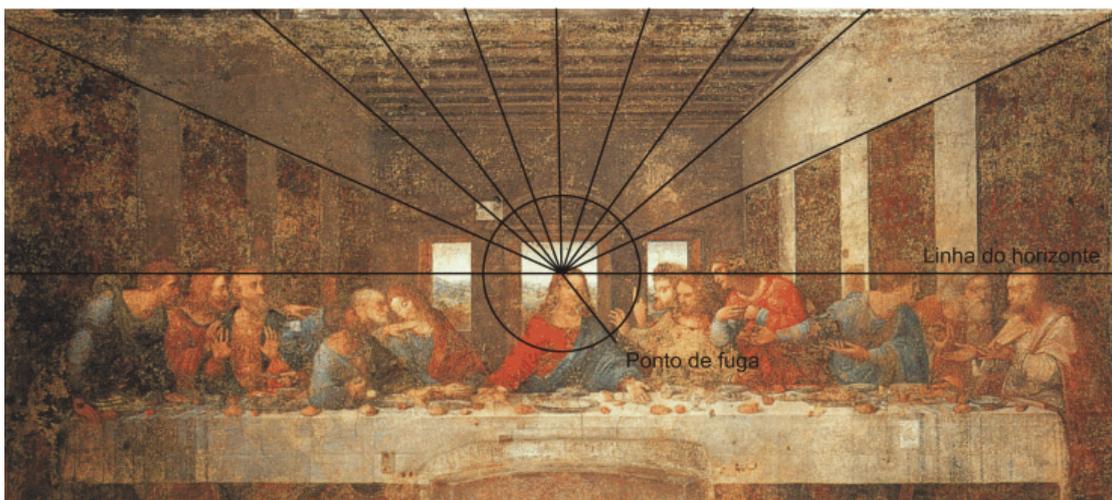


Figura 29: A Santa Ceia por Leonardo da Vinci

Fonte: imagem retirada do site <https://historiaartearquitetura.com/2017/04/26/perspectiva/>

4.2 GEOMETRIA PROJETIVA UM ESTUDO AXIOMÁTICO

4.2.1 AXIOMAS DA GEOMETRIA PROJETIVA

1. Termos Indefinidos;
 - (a) Ponto, reta, plano, pertence;
2. Axiomas de Incidência;
 - (a) Para cada dois pontos distintos existe uma reta que os contém.
 - (b) Existem pelo menos três pontos que não estão sobre uma mesma reta e todos os pontos estão sobre o mesmo plano.
 - (c) Toda reta contém pelo menos dois pontos.
3. Axiomas das Paralelas;
 - (a) Seja r_η uma reta e A um ponto não pertencente à r_η . Então toda reta que passa por A intersecta r_η .
4. Axiomas de Continuidade;
 - (a) Existe uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos de uma reta menos um de seus pontos.
5. Axiomas de ordem (não existem)

As proposições seguintes verificam os axiomas da geometria projetiva para ser utilizados posteriormente para solução de alguns problemas de geometria projetiva, suas respectivas demonstrações podem ser encontradas em (ANDRADE, 2015).

Proposição 4.2.1 (Incidência). *Seja um ponto projetivo $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$ e uma reta projetiva $r_{\bar{\eta}} \subset \mathbb{RP}^2$. Então, \bar{v} e $r_{\bar{\eta}}$ são incidentes se, e somente se, $\langle v, \eta \rangle = 0$.*

”Dois pontos distintos determinam uma reta”.

Proposição 4.2.2 (Equação de uma reta por dois pontos). *Por dois pontos projetivos distintos \bar{v} e \bar{u} incide uma reta projetiva, a saber,*

$$r_{\bar{\eta}}, \text{ onde } \bar{\eta} = \overline{v \times u} \in \mathbb{RP}^{2*}.$$

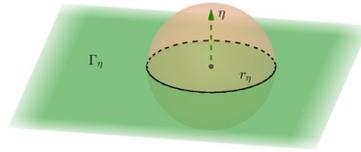


Figura 30: Incidência da reta elíptica com a reta projetiva

Fonte: Autores

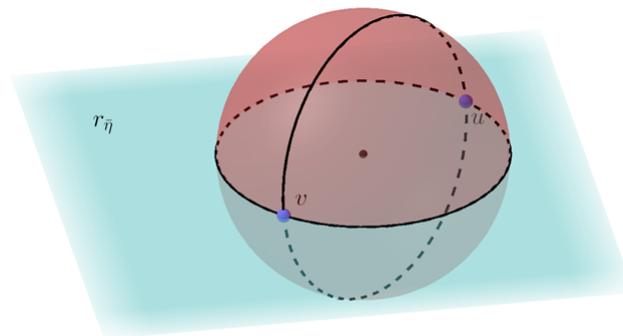


Figura 31: Retas Projetivas passando por u e por v

Fontes: Autores

Proposição 4.2.3 (Concorrência de duas retas). *Duas retas projetivas distintas, $r_{\bar{\eta}}$ e $r_{\bar{v}}$ concorrem num único ponto, a saber,*

$$\bar{v} = \overline{\eta \times v} \in \mathbb{RP}^2.$$

Proposição 4.2.4 (Equação de Colineariedade para Três Pontos). *Dados três pontos \bar{u} , \bar{v} e \bar{w} são colineares se, e somente se, $\det [u, v, w] = 0$.*

Proposição 4.2.5 (Equação de concorrência para três retas). *seja três retas projetivas r_{η} , r_{μ} e $r_{\nu} \in \mathbb{RP}^{2*}$, tem-se que r_{η} , r_{μ} e r_{ν} são concorrentes se, e somente se, $\det [\eta, \mu, \nu] = 0$.*

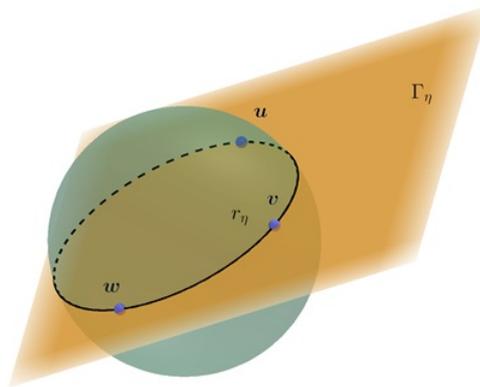


Figura 32: Colinearidade entre u , v e w
 Fonte: Autores

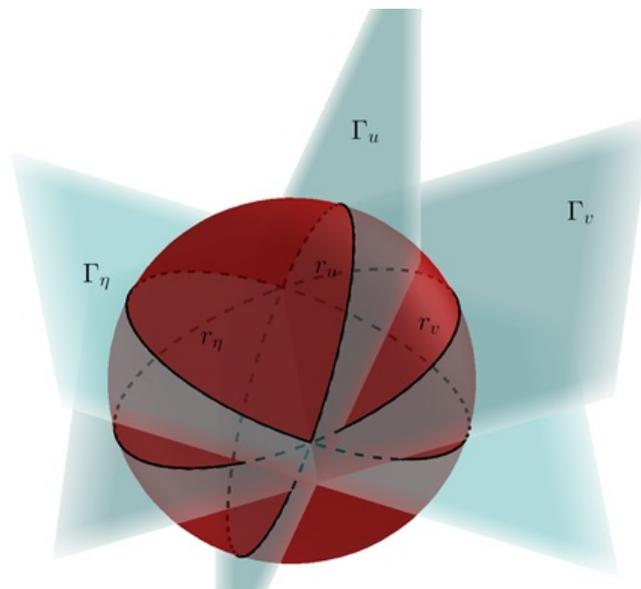


Figura 33: Concorrência de três Retas Projetivas
 Fonte: Autores

5 APLICAÇÕES DOS AXIOMAS DA GEOMETRIA PROJETIVA NOS TEOREMAS DE PAPUS, DESARGUES E PASCAL

No presente capítulo apresenta-se as demonstrações dos teoremas de Pappus e Desargues com a utilização dos axiomas da geometria projetiva demonstrados anteriormente.

Como os teoremas são enunciados na Geometria Euclidiana, e o foco do trabalho é a Geometria projetiva, apresenta-se suas respectivas demonstrações através do sistema axiomático da Geometria Projetiva

5.0.2 TEOREMA DE PAPPUS

A citação a seguir dá um norte para o trabalho de Pappus:

contribuição mais importante de Pappus de Alexandria para o conhecimento das cônicas foram os seus resultados sobre foco, diretriz e excentricidade. Ele unifica a definição das três curvas, que variam de acordo com o valor da excentricidade. Sua obra acabou sendo o réquiem da geometria grega, pois, após Pappus, ela deixou de ser uma disciplina brilhante, apenas sua memória foi preservada por escritores menos criativos e comentaristas. (CHAVES, 2013, p. 54)

De certa forma o trabalho de Pappus inicia a chamada Geometria Projetiva e o teorema, que leva o seu nome, pode ser visto como uma consequência do teorema de Pascal.

Considere o seguinte enunciado para graficarmos o problema: Sejam l e s duas retas quaisquer no plano euclidiano. Escolhamos seis pontos distintos, três pontos sobre a primeira reta, digamos, U , V e W , e sobre outra reta U' , V' e W' . Considere ainda os pontos

$$A = \overline{VW'} \cap \overline{V'W}, B = \overline{UW'} \cap \overline{U'W} \text{ e } C = \overline{UV'} \cap \overline{U'V}.$$

o teorema de Pappus afirma que A , B e C são colineares. Ver Figura 23.

Vamos reescrever o teorema de Pappus da Geometria Euclidiana para uma linguagem da Geometria Projetiva via identificação afim.

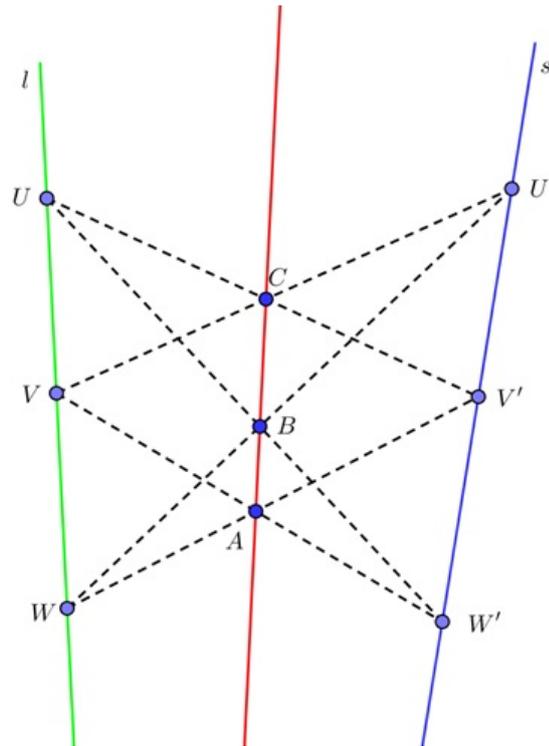


Figura 34: Ilustração do Teorema de Pappus
Fonte: Autores

Teorema 5.0.1 (Teorema de Pappus). *Tomando \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} , \bar{u}' , \bar{v}' e \bar{w}' , seis pontos projetivos distintos, dos quais os três primeiros estão sobre uma reta $r_{\bar{\eta}}$, e os três últimos fora desta e sobre uma outra reta $r_{\bar{v}}$ então os pontos de interseção são:*

$$\bar{a} = r_{\bar{\eta}_{v'w'}} \cap r_{\bar{\eta}_{v'w}}, \bar{b} = r_{\bar{\eta}_{uw'}} \cap r_{\bar{\eta}_{u'w}} \text{ e } \bar{c} = r_{\bar{\eta}_{uv'}} \cap r_{\bar{\eta}_{u'v}}$$

queremos mostrar que \bar{a} , \bar{b} e \bar{c} são colineares

Demonstração 5.0.1. *Da construção de colineação citada pela proposição 3.3.2, tomamos quatro pontos projetivos não colineares três a três logo podemos supor que :*

$$\bar{u} = (1 : 0 : 0), \bar{v}' = (0 : 1 : 0), \bar{w} = (0 : 0 : 1) \text{ e } \bar{b}(1 : 1 : 1)$$

1. Se $\bar{v} = (v_1 : v_2 : v_3)$ é colinear com \bar{u} e \bar{w} , então da proposição 4.2.4 temos que :

$$\det [\bar{v}, \bar{v}, \bar{w}] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

logo temos que $v_2 = 0$, portanto podemos escolher um representante para v do tipo $(\beta, 0, 1)$ com $\beta \neq 0$, pois $v = (v_1, 0, v_3) = v_3(\frac{v_1}{v_3}, 0, 1)$ com $v_3 \neq 0$ da relação de equivalência temos que $(\frac{v_1}{v_3}, 0, 1)$ é um representante de v , pois podemos supor $\beta = \frac{v_1}{v_3}$.

2. Se $\bar{u}' = (u'_1, u'_2, u'_3)$ é colinear com \bar{w}, \bar{b} , então da proposição 4.2.4:

$$\det [\bar{u}', \bar{w}, \bar{b}] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} u'_1 & u'_2 & u'_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

portanto $u'_2 - u'_1 = 0$, logo $u'_2 = u'_1$ então podemos escolher um representante para u' da forma $(1, 1, \alpha')$ com $\alpha' \neq 0$, pois $u' = u'_1(1, 1, \frac{u'_3}{u'_1})$, com $u'_1 \neq 0$, da relação de equivalência temos que $(1, 1, \frac{u'_3}{u'_1})$ é um representante de u' , pois podemos tomar $\alpha' = \frac{u'_3}{u'_1}$

3. Da mesma maneira \bar{w}' colinear com \bar{u} e \bar{b} , logo pela proposição 4.2.4 tem-se a seguinte determinante:

$$\det [\bar{w}', \bar{u}, \bar{b}] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} w'_1 & w'_2 & w'_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

do determinante acima obtém-se $w'_3 - w'_2 = 0$, logo $w'_3 = w'_2$ então podemos escolher um representante para w' da forma $(\gamma', 1, 1)$ com $\gamma' \neq 0$, pois $w' = w'_2(\frac{w'_1}{w'_2}, 1, 1)$, com $w'_2 \neq 0$, da relação de equivalência ficamos com $(\frac{w'_1}{w'_2}, 1, 1)$, que é um representante de w' , pois podemos tomar $\gamma' = \frac{w'_1}{w'_2}$.

Como se sabe que $\bar{b} = (1 : 1 : 1)$, então pode-se calcular os pontos \bar{a} e \bar{c} pela proposição 4.2.3 portanto.

$$\bar{a} = \overline{\eta_{vw'} \times \eta_{v'w}} \text{ e } \bar{c} = \overline{\eta_{uv'} \times \eta_{u'v}}.$$

Para encontrar \bar{a} , calcula-se primeiro as normais $\eta_{vw'}$ e $\eta_{v'w}$, basta verificar a proposição 4.2.2:

$$\eta_{vw'} = v \times w' \Rightarrow v \times w' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \beta & 0 & 1 \\ \gamma' & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

portanto $\eta_{vw'} = (-1, -\beta + \gamma', \beta)$, agora falta calcular a normal $\eta_{v'w}$ através da proposição 4.2.2.

$$\eta_{v'w} = v' \times w \Rightarrow v' \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

logo a normal será $\eta_{v'w} = (1, 0, 0)$ como $\bar{a} = \overline{\eta_{vw'} \times \eta_{v'w}}$ temos que calcular da seguinte maneira dada pela proposição 4.2.3:

$$a = \eta_{vw'} \times \eta_{v'w} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & -\beta + \gamma' & \beta \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow a = (0, \beta, \beta - \gamma')$$

então $\bar{a} = (0 : \beta : \beta - \gamma')$

Para encontrar \bar{c} , encontra-se primeiro as normais $\eta_{uv'}$ e $\eta_{u'v}$, da mesma maneira que fizemos os cálculos anteriores utilizando a proposição 4.2.2, então resolvemos os seguintes determinantes:

$$\eta_{uv'} = u \times v' \Rightarrow u \times v' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

portanto $\eta_{uv'} = (0, 0, 1)$, agora falta calcular a normal $\eta_{u'v}$

$$\eta_{u'v} = u' \times v \Rightarrow u' \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & \alpha' \\ \beta & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

logo $\eta_{u'v} = (1, \beta\alpha' - 1, -\beta)$ como $\bar{c} = \overline{\eta_{uv'} \times \eta_{u'v}}$, utilizando a proposição 4.2.3 calculamos o próximo determinante:

$$c = \eta_{uv'} \times \eta_{u'v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & \beta\alpha' - 1 & -\beta \end{vmatrix} \Rightarrow c = (-\beta\alpha' + 1, -1, 0)$$

então $\bar{c} = (-\beta\alpha' + 1 : -1 : 0)$

Para mostra o teorema deve-se verificar se \bar{a} , \bar{b} e \bar{c} são colineares, então basta mostrar a validade da proposição 4.2.4 então:

$$\det [a, b, c] = \begin{vmatrix} 0 & \beta & \beta - \gamma' \\ 1 & 1 & 1 \\ -\alpha'\beta + 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

logo

$$\det [a, b, c] = -\beta \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha'\beta + 1 & 0 \end{vmatrix} + (\beta - \gamma') \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha'\beta + 1 & 1 \end{vmatrix}$$

então

$$\det [a, b, c] = \beta - \gamma' \alpha' \beta = \beta(1 - \gamma' \alpha')$$

agora falta mostrar que $\beta(1 - \gamma' \alpha') = 0$, pelo critério de colineariedade como \bar{u}' , \bar{v}' e \bar{w}' estão sobre a reta projetiva $r_{\bar{v}}$ da proposição 4.2.4 tem-se a seguinte relação entre os coeficientes α' e γ'

$$0 = \det [\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha' \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma' & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha' \gamma'$$

logo $1 - \alpha' \gamma' = 0$ então $\beta(1 - \gamma' \alpha') = 0$ portanto \bar{a} , \bar{b} e \bar{c} são colineares.

5.0.3 TEOREMA DE DESARGUES

O teorema de Desargues envolve triângulos em perspectiva, pode-se ser enunciado da seguinte forma :

Considera-se o triângulo com vértices U, V e W, assumindo que o posicionamento em P ver figura (35), exista um ponto de luz e que o triângulo seja opaco, o triângulo projeta sua sombra sobre um outro plano determinando um triângulo cujo os vértices são U', V' e W', com isso temos uma propriedade básica da perspectiva, onde o teorema de Desargues afirma que os lados correspondentes do triângulo e de sua sombra concorrem na interseção dos dois planos.

Pode-se visualizar o teorema de Desargues no plano

Para demonstração do teorema de Desargues com a utilização dos axiomas da Geometria Projetiva, vamos escrever com a linguagem da Geometria Projetiva

Teorema 5.0.2 (Teorema de Desargues). *Se $\Delta = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ é um conjunto de três pontos projetivos distintos e não colineares, e ainda $\Delta' = \{\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'\}$ outro conjunto de três pontos projetivos distintos e não colineares tais que a interseção $\Delta \cap \Delta'$ é vazia e que*

$$\{\bar{P}\} = r_{\eta_{uu'}} \cap r_{\eta_{vv'}} \cap r_{\eta_{ww'}}$$

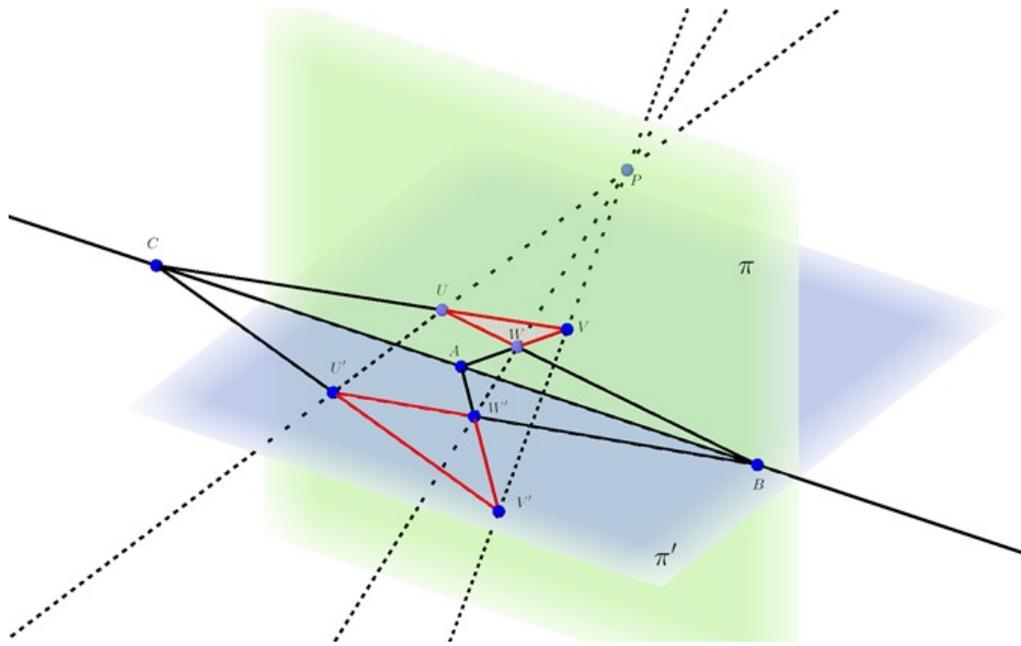


Figura 35: Ilustração do Teorema de Desargues no espaço

Fonte: Autores

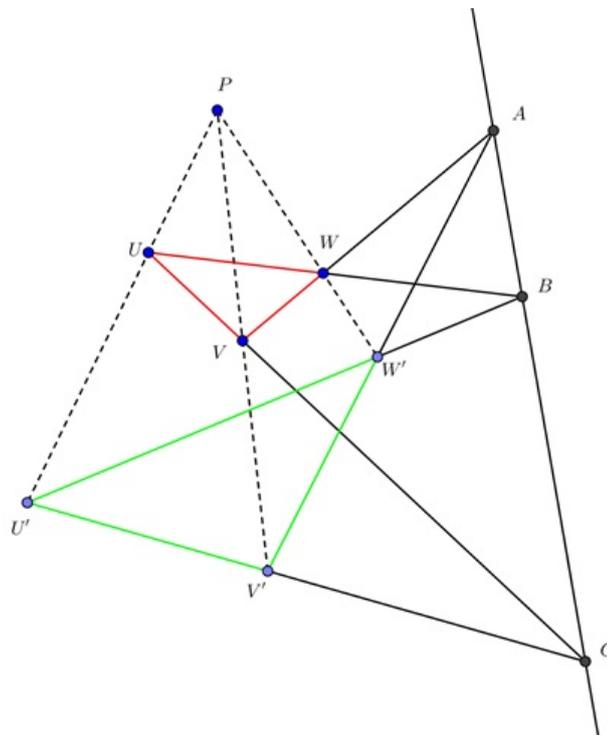


Figura 36: Ilustração do Teorema de Desargues no plano

Fonte: Autores

então os pontos projetivos \bar{a} , \bar{b} e \bar{c} são colineares, em a que

$$\bar{a} = r_{\bar{\eta}_{vw}} \cap r_{\bar{\eta}'_{v'w'}}, \bar{b} = r_{\bar{\eta}_{uw}} \cap r_{\bar{\eta}'_{u'w'}} \text{ e } \bar{c} = r_{\bar{\eta}_{uv}} \cap r_{\bar{\eta}'_{u'v'}};$$

Demonstração 5.0.2. *Assumindo pela proposição 3.3.2, que os pontos projetivos \bar{u}' , \bar{v}' , \bar{w}' e \bar{p} são não colineares três a três, portanto a menos de uma colinação logo pela construção de colinação podemos assumir que*

$$\bar{u}' = \bar{e}_1, \bar{v}' = \bar{e}_2, \bar{w}' = \bar{e}_3 \text{ e } \bar{p} = (1 : 1 : 1)$$

Existem números reais α , β e γ diferentes de zero tais que os pontos \bar{u} , \bar{v} e \bar{w} podem ser representados por

$$\bar{u} = (\alpha : 1 : 1), \bar{v} = (1 : \beta : 1) \text{ e } \bar{w} = (1 : 1 : \gamma)$$

Para mostrar quem é \bar{u} , e ainda assume-se que $u = (u_1, u_2, u_3)$ como \bar{p} , \bar{u} e \bar{u}' são colineares então pela proposição 4.2.4 obtemos a seguinte relação:

$$\det[p, u, u'] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = u_3 - u_2 = 0$$

Portanto $u_3 = u_2$ com $u_2 \neq 0$, logo:

$$u = (u_1, u_2, u_3) = (u_1, u_2, u_2) = u_2 \left(\frac{u_1}{u_2}, 1, 1 \right)$$

então para um representante de u , pode-se tomar $\alpha = \frac{u_1}{u_2}$ portanto $u = (\alpha, 1, 1)$.

Da mesma maneira pode-se mostra \bar{v} , supondo que $v = (v_1, v_2, v_3)$, assumindo que \bar{p} , \bar{v} e \bar{v}' são colineares, verifica-se a proposição 4.2.4:

$$\det[p, v, v'] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = v_1 - v_3 = 0$$

do determinate anterior $v_1 = v_3$ com $v_3 \neq 0$, logo

$$v = (v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, v_1) = v_1 \left(1, \frac{v_2}{v_1}, 1 \right)$$

note que o representante de v assumindo $\beta = \frac{v_2}{v_1}$ será $v = (1, \beta, 1)$.

Seguindo a mesma linha de raciocínio dos calculos feitos anteriormente, tomamos um representante para \bar{w} , $w = (w_1, w_2, w_3)$, e ainda assumindo que \bar{p} , \bar{w} e \bar{w}' são colineares, basta verificar a proposição 4.2.4:

$$\det[p, w, w'] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = w_2 - w_1 = 0$$

nota-se que do cálculo anterior $w_2 = w_1$ com $w_1 \neq 0$, então o representante logo tem-se que

$$w = (w_1, w_2, w_3) = (w_1, w_1, w_3) = w_1 \left(1, 1, \frac{w_3}{w_1}\right)$$

então o representante de w assumindo que $\gamma = \frac{w_3}{w_1}$ é $w = (1, 1, \gamma)$.

Como queremos mostrar que \bar{a} , \bar{b} e \bar{c} são colineares, calcula-se os seus respectivos representantes,

1. primeiramente mostra-se \bar{a} via proposição 4.2.3.

$$\bar{a} = r_{\bar{\eta}_{vw}} \cap r_{\bar{\eta}_{v'w'}}$$

e ainda $r_{\bar{\eta}_{vw}} = \bar{\eta}_{vw} = \overline{v \times w}$, pela proposição 4.2.2 pode-se resolver o seguinte determinante:

$$v \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & \gamma \end{vmatrix} = (\beta\gamma - 1)e_1 - (\gamma - 1)e_2 + (1 - \beta)e_3$$

portanto $\bar{\eta}_{vw} = (\beta\gamma - 1 : 1 - \gamma : 1 - \beta)$.

agora pela proposição 4.2.2 calcula-se $r_{\bar{\eta}_{v'w'}} = \bar{\eta}_{v'w'} = v' \times w'$ logo.

$$v' \times w' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = e_1 - 0e_2 + 0e_3$$

do determinante vemos que $\bar{\eta}_{v'w'} = (1 : 0 : 0)$

Agora calculamos o representante de \bar{a} com o seguinte determinante:

$$\bar{a} = \bar{\eta}_{vw} \times \bar{\eta}_{v'w'} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \beta\gamma - 1 & 1 - \gamma & 1 - \beta \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

então

$$\bar{a} = (0 : \beta - 1 : \gamma - 1)$$

2. Agora mostra-se \bar{b} assumindo que a seguinte relação seja satisfeita pela proposição 4.2.3.

$$\bar{b} = r_{\bar{\eta}_{uw}} \cap r_{\bar{\eta}_{u'w'}}$$

pela proposição 4.2.2 obtemos a seguinte relação $r_{\bar{\eta}_{uw}} = \bar{\eta}_{uw} = \overline{u \times w}$, portanto pode-se calcular os determinantes a seguir.

$$u \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \gamma \end{vmatrix} = (\gamma - 1)e_1 - (\alpha\gamma - 1)e_2 + (\alpha - 1)e_3$$

portanto $\bar{\eta}_{uw} = (\gamma - 1 : 1 - \alpha\gamma : \alpha - 1)$ e ainda $r_{\bar{\eta}_{u'w'}} = \bar{\eta}_{u'w'} = u' \times w'$ então

$$u' \times w' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0e_1 - 1e_2 + 0e_3$$

a normal será $\bar{\eta}_{u'w'} = (0 : -1 : 0)$

Agora basta calcular \bar{b} via proposição 4.2.3.

$$\bar{b} = \bar{\eta}_{uw} \times \bar{\eta}_{u'w'} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \gamma - 1 & 1 - \alpha\gamma & \alpha - 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

note que

$$\bar{\eta}_{uw} \times \bar{\eta}_{u'w'} = (\alpha - 1)e_1 - 0e_2 + (1 - \gamma)e_3$$

então

$$\bar{b} = (\alpha - 1 : 0 : 1 - \gamma)$$

3. Mostrando agora quem é \bar{c} da mesma maneira utiliza-se a proposição 4.2.3.

$$\bar{c} = r_{\bar{\eta}_{uv}} \cap r_{\bar{\eta}_{u'v'}}$$

pela proposição 4.2.2 temos que $r_{\bar{\eta}_{uv}} = \bar{\eta}_{uv} = \overline{u \times v}$ portanto.

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \end{vmatrix} = (1 - \beta)e_1 - (\alpha - 1)e_2 + (\alpha\beta - 1)e_3$$

temos que a normal é $\bar{\eta}_{uv} = (1 - \beta : 1 - \alpha : \alpha\beta - 1)$ e ainda pela proposição 4.2.2.

$$r_{\bar{\eta}_{u'v'}} = \bar{\eta}_{u'v'} = \overline{u' \times v'}$$

logo

$$u' \times v' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0e_1 - 0e_2 + 1e_3$$

então a sua normal será $\bar{\eta}_{u'v'} = (0 : 0 : 1)$

Agora basta utilizar a proposição 4.2.3 para calcular o representante de \bar{c}

$$\bar{c} = \bar{\eta}_{uv} \times \bar{\eta}_{u'v'} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 - \beta & 1 - \alpha & \alpha\beta - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

e ainda

$$\bar{\eta}_{uv} \times \bar{\eta}_{u'v'} = (1 - \alpha)e_1 - (1 - \beta)e_2 + 0e_3$$

então obtém-se o representante de \bar{c}

$$\bar{c} = (1 - \alpha : \beta - 1 : 0)$$

E por fim falta mostrar a validade da proposição 4.2.4 para os pontos projetivos \bar{a} , \bar{b} e \bar{c} , com isso basta mostrar que $\det [\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}] = 0$.

$$\det [\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}] = \begin{vmatrix} 0 & \beta - 1 & 1 - \gamma \\ \alpha - 1 & 0 & 1 - \gamma \\ 1 - \alpha & \beta - 1 & 0 \end{vmatrix} = (1 - \alpha)(1 - \gamma)(\beta - 1) + (\alpha - 1)(\beta - 1)(1 - \gamma)$$

Como $\det [\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}] = 0$, portanto \bar{a} , \bar{b} e \bar{c} são colineares, logo fazem parte da mesma reta projetiva.

5.0.4 TEOREMA DE PASCAL

Antes de mostrarmos o teoremas de Pascal, vamos estabelecer alguns conceitos preliminares do estudo de cônicas para demonstração do mesmo.

5.0.5 CORRELAÇÕES

Segundo (BARROS; ANDRADE, 2010) o conjunto das retas projetivas em \mathbb{RP}^{2*} tem como modelo o plano projetivo \mathbb{RP}^2 , com isso temos que um operador linear invertível $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ induz uma aplicação $A^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}$, onde associamos um ponto projetivo \bar{v} à reta projetiva $r_{A^*(\bar{v})}$, com isso pode-se citar a seguinte proposição

Proposição 5.0.6. *Seja A um operador linear invertível \mathbb{R}^3 . Os pontos projetivos \bar{u} , \bar{v} e $\bar{w} \in \mathbb{RP}^2$, são colineares, se, e somente se, as retas projetivas $A^*(\bar{u})$, $A^*(\bar{v})$ e $A^*(\bar{w}) \in \mathbb{RP}^{2*}$ são concorrentes.*

A demonstração desse fato pode ser encontrada no livro do (BARROS; ANDRADE, 2010).

5.0.6 CONICAS EM \mathbb{RP}^2

Definição 5.0.1. *Diz-se que um ponto projetivo \bar{v} é auto-conjugado em relação a aplicação polar A^* quando $\bar{v} \in r_{A^*(\bar{v})}$,*

analisa-se que a condição de ser autoconjugado é expressa algebricamente com a equação de incidência $\langle v, A(v) \rangle = 0$ portanto temos a seguinte definição

Definição 5.0.2. *A cônica determinada pela aplicação polar $A^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}$ é um conjunto definido e denotado por*

$$C_A = \{ \bar{v} \in \mathbb{RP}^2; \langle v, A(v) \rangle = 0 \}$$

logo observa-se que na definição de cônica o conjunto C_A não depende do representante do ponto projetivo tomado, pois se $\langle v, A(v) \rangle = 0$, logo existe um número real $\alpha \neq 0$ então

$$\langle \alpha v, A(\alpha v) \rangle = \alpha^2 \langle v, A(v) \rangle = 0$$

Proposição 5.0.7. *Uma reta projetiva $r_{\bar{\eta}}$ contém no máximo dois pontos autoconjugados associados a uma aplicação polar $A^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}$*

A demonstração desse fato pode ser encontrada no livro do (BARROS; ANDRADE, 2010).

5.0.7 RETAS TANGENTES

Definição 5.0.3. Uma reta projetiva $r_{\bar{\eta}}$ é tangente á cônica C_A se sua interseção com a cônica ocorre em um unico ponto.

Proposição 5.0.8. Seja C_A é a cônica definida pela correlação $A^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}$, então em cada ponto $\bar{v} \in C_A$ incide uma única reta projetiva tangente, qual seja $r_{A^*(\bar{v})}$

A demonstração desse fato pode ser encontrada no livro do (BARROS; ANDRADE, 2010).

5.0.8 CONSTRUINDO CÔNICAS

Para contrução de cônicas temos que demonstrar que uma colineação transformar cônica em cônica.

Proposição 5.0.9. Se C_A é a cônica definida pela aplicação polar $A^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}$ e $\bar{B} : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ é uma coliniação, então $\bar{B}(C_A)$ é uma cônica definida pela aplicação polar $C^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^{2*}$, em que $[C] = [(B^{-1})^t \circ A \circ B^{-1}]$.

Demonstração 5.0.3. Seja $\bar{w} = \bar{B}(\bar{v})$ então

$$\langle w, C(w) \rangle = \langle w, (B^{-1})^t A B^{-1}(w) \rangle = \langle B(v), (B^{-1})^t A B^{-1}(B(v)) \rangle = \langle B^{-1}(B(v)), A(v) \rangle = \langle v, A(v) \rangle$$

portando levando em conta a autoconjugação, concluí-se que $\bar{w} \in C_C$ se, e somente se, $\bar{v} \in C_A$

Proposição 5.0.10. Considere os pontos projetivos $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{u} = (1 : 1 : 1)$ e $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Se os pontos projetivos são não colineares três a três, então existe uma única cônica C_A que incide nos cinco pontos. Mais ainda, a cônica C_A é induzida por um operador linear A do \mathbb{R}^3 cuja a matriz canônica é

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & v_3(v_1 - v_2) & v_2(v_3 - v_1) \\ v_3(v_1 - v_2) & 0 & v_1(v_2 - v_3) \\ v_2(v_3 - v_1) & v_1(v_2 - v_3) & 0 \end{bmatrix}$$

Demonstração 5.0.4. Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$ a função $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz)$. Observe que $F(\lambda w) = \lambda^2 F(w)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e todo $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, portanto considere a matriz 6×6 definida por

$$\left[C : F(e_1) \quad F(e_2) \quad F(e_3) \quad F(u) \quad F(v) \quad 2F(x, y, z) \right]$$

onde e_1, e_2, e_3, u e v são representantes canônicos dos pontos projetivos descritos acima, logo obtemos a seguinte equação.

$$C : 2v_3(v_1 - v_2)xy + 2v_2(v_3 - v_1)xz + 2v_1(v_2 - v_3)yz = 0$$

observe que os pontos citados acima satisfazem a esta equação, pois a análise da matriz em algum daqueles pontos produz uma matriz cuja a última coluna é o dobro de alguma outra coluna, portanto, o determinante é zero.

5.0.9 HEXAGRAMA MÍSTICO DE PASCAL

Agora analisa-se o teorema de Pascal como ele está para cônicas assim como o teorema de Pappus está para retas euclidianas. Um hexágono no plano projetivo é obtido de um hexágono do plano euclidiano via identificação afim seguida de uma colineação, logo podemos falar em vértices adjacentes, vértice oposto, diagonal, etc. O teorema de Pascal é histórico, ele é o único teorema que sobreviveu de um, provável, texto escrito por Pascal que se perdeu.

Teorema 5.0.3. *Se $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{u}', \bar{v}'$ e \bar{w}' são vértices de um hexágono inscrito numa cônica C_A , onde \bar{v} é adjacente as vértices \bar{u} e \bar{w} e as três últimas vértices listadas são vértices opostas as três primeiras, respeitando a ordem da listagem, então*

$$\bar{a} = r_{\bar{v}\bar{w}'} \cap r_{\bar{v}'\bar{w}}, \quad \bar{b} = r_{\bar{u}\bar{w}'} \cap r_{\bar{u}'\bar{w}}, \quad \text{e} \quad \bar{c} = r_{\bar{u}\bar{v}'} \cap r_{\bar{u}'\bar{v}}$$

pode-se notar também o teorema de Pascal no hexagrama místico de Pascal

Demonstração 5.0.5. *Supondo que $\bar{u} = (1 : 1 : 1)$, $\bar{v} = (1 : 0 : 0)$, $\bar{u}' = (0 : 1 : 0)$, $\bar{w}' = (0 : 0 : 1)$, e ainda pode-se tomar via identificação afim os pontos projetivos, $\bar{v}' = (v_1 : v_2 : 1)$ e $\bar{w}' = (w_1 : w_2 : 1)$, logo temos primeiramente que mostrar quem são os representantes*

$$\bar{a} = \overline{\eta_{v\bar{w}'} \times \eta_{v'\bar{w}}}, \quad \bar{b} = \overline{\eta_{u\bar{w}'} \times \eta_{u'\bar{w}}}, \quad \text{e} \quad \bar{c} = \overline{\eta_{u\bar{v}'} \times \eta_{u'\bar{v}}}$$

1. *Descobrimo um representante para \bar{a} , pela proposição 4.2.3 obtemos $\bar{a} = \overline{\eta_{v\bar{w}'} \times \eta_{v'\bar{w}}}$ então pela proposição 4.2.2 pode-se calcular as normais $\eta_{v\bar{w}'}$ e $\eta_{v'\bar{w}}$:*

$$\eta_{v\bar{w}'} = v \times w' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0e_1 - e_2 + 0e_3$$

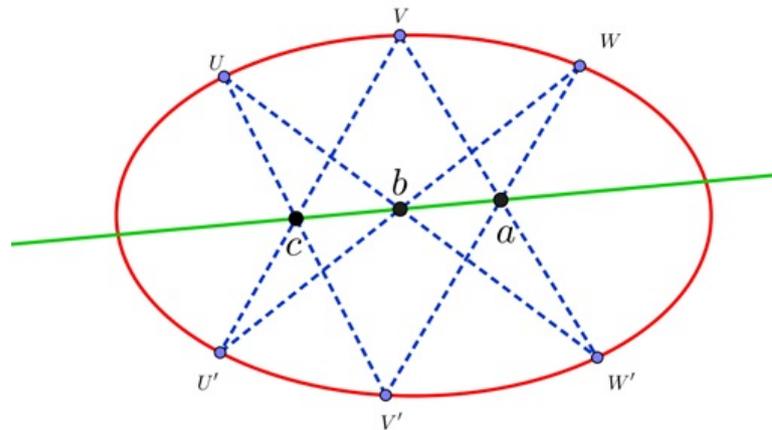


Figura 37: Ilustração do Teorema de Pascal

Fonte: Autores

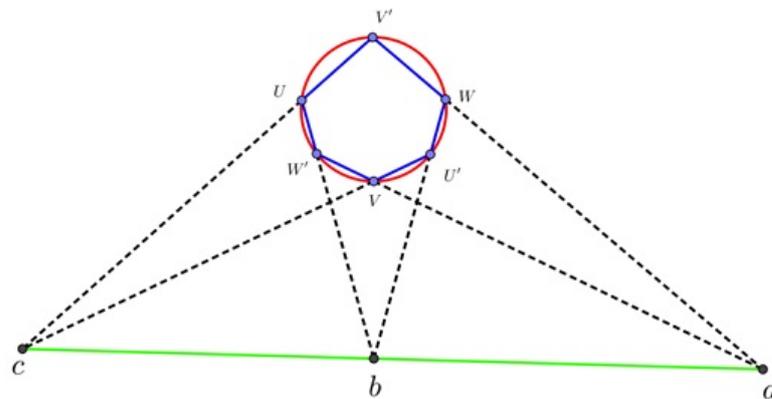


Figura 38: Ilustração do Teorema do Hexagrama Místico de Pascal

Fonte: Autores

então o representante da reta normal será $\eta_{v'w'} = (0, -1, 0)$, e ainda

$$\eta_{v'w} = v' \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & 1 \\ w_1 & w_2 & 1 \end{vmatrix} = (v_2 - w_2)e_1 - (v_1 - w_1)e_2 + (v_1w_2 - v_2w_1)e_3$$

portanto $\eta_{v'w} = (v_2 - w_2, w_1 - v_1, v_1w_2 - v_2w_1)$ agora calcular \bar{a} então

$$a = \eta_{v'w'} \times \eta_{v'w} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & -1 & 0 \\ v_2 - w_2 & w_1 - v_1 & v_1w_2 - v_2w_1 \end{vmatrix} = (-v_1w_2 + v_2w_1)e_1 - 0e_2 + (v_2 + w_2)e_3$$

com isso obtemos o representante $\bar{a} = (-v_1w_2 + v_2w_1 : 0 : v_2 + w_2)$

2. Da mesma maneira utilizando a proposição 4.2.3 pode-se descobrir um representante para \bar{b} como $\bar{b} = \overline{\eta_{uw'} \times \eta_{u'w}}$, e ainda utilizando a proposição 4.2.2 pode-se calcular as normais $\eta_{uw'}$ e $\eta_{u'w}$

$$\eta_{uw'} = u \times w' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = e_1 - e_2 + 0e_3$$

logo seu representante é $\eta_{uw'} = (1, -1, 0)$, e ainda

$$\eta_{u'w} = u' \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ w_1 & w_2 & 1 \end{vmatrix} = e_1 - 0e_2 - w_1e_3$$

e seu representante será $\eta_{u'w} = (1, 0, -w_1)$ agora basta calcular \bar{b} :

$$b = \eta_{uw'} \times \eta_{u'w} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -w_1 \end{vmatrix} = w_1e_1 + w_1e_2 + e_3$$

com isso seu representante será $\bar{b} = (w_1 : w_1 : 1)$

3. E ainda falta descobrir um representante para \bar{c} , da mesma maneira utilizamos a proposição 4.2.3 com isso temos que $\bar{c} = \overline{\eta_{uv'} \times \eta_{u'v}}$, e ainda utilizando a proposição 4.2.2 calcula-se as normais $\eta_{uv'}$, $\eta_{u'v}$: portanto, tem-se que

$$\eta_{uv'} = u \times v' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ v_1 & v_2 & 1 \end{vmatrix} = (1 - v_2)e_1 - (1 - v_1)e_2 + (v_2 - v_1)e_3$$

logo $\eta_{uv'} = (1 - v_2, v_1 - 1, v_2 - v_1)$, e ainda

$$\eta_{u'v} = u' \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0e_1 - 0e_2 - e_3$$

portanto $\eta_{u'v} = (0, 0, -1)$ agora calcular \bar{c} então

$$c = \eta_{uv'} \times \eta_{u'v} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1-v_2 & v_1-1 & v_2-v_1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1-v_1)e_1 + (1-v_2)e_2 + 0e_3$$

note que seu representante é $\bar{c} = (1-v_1 : 1-v_2 : 0)$

para saber se os pontos projetivos \bar{a} , \bar{b} e \bar{c} são colineares basta mostrar verificar a proposição 4.2.4, então $\det [a, b, c] = 0$, resolvendo a matriz obtém-se:

$$\det \begin{bmatrix} -v_2w_2 + v_2w_1 & 0 & v_2 - w_2 \\ w_1 & w_1 & 1 \\ -v_1 + 1 & 1 - v_2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$(v_1v_2w_1 - w_1w_2v_1) - (-w_1w_2v_2 + v_1v_2w_2) + (v_1w_2 - w_1v_2)$$

o resultado do determinante anterior resulta na seguinte matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_1v_2 & v_1 & v_2 \\ w_1w_2 & w_1 & w_2 \end{bmatrix}$$

Agora o determinate da matriz obtida acima é zero , pois é igual a metade do determinate de

$$\begin{bmatrix} F(e_1) & F(e_2) & F(e_3) & F(u) & F(v) & 2F(w) \end{bmatrix},$$

que resulta em zero, pois essa matriz 6×6 é obtida na demonstração da proposição 5.0.9

5.0.10 CONSEQUÊNCIAS DO TEOREMA DE PASCAL

Para o teorema de Pascal existe algumas variantes, de modo que pode-se analisar para outros polígonos inscritos na cônica de acordo com (CATALDO, 2013) obtemos as seguintes particularizações para pentágono, quadrilátero e triângulo.

- Particularização para um pentágono inscrito na cônica , observe a figura 39.

Um pentágono está inscrito em uma cônica e a reta tangente à curva num vértice intersecta a reta que contém o lado oposto no ponto C. Se A e B são os pontos de interseção das retas suportes dos outros pares de lados não adjacentes, então A, B e C são colineares

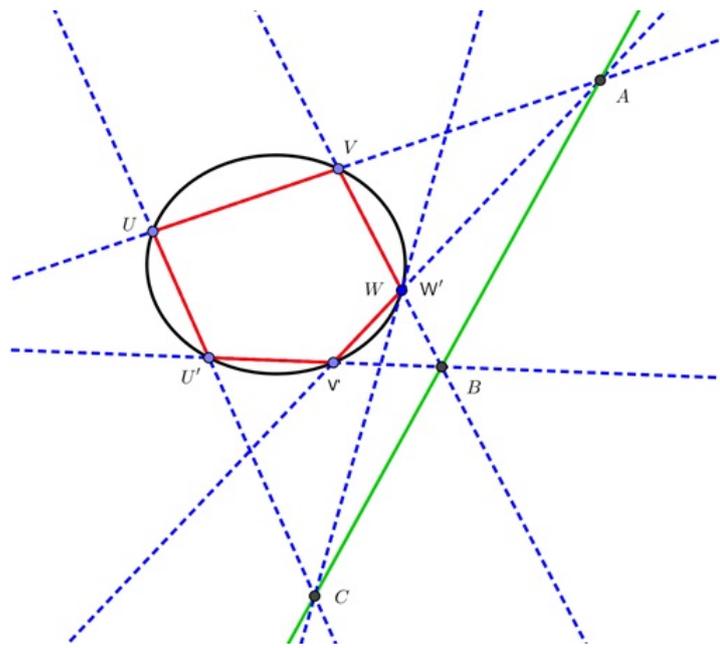


Figura 39: Teorema de Pascal para o pentágono

Fonte: Autores

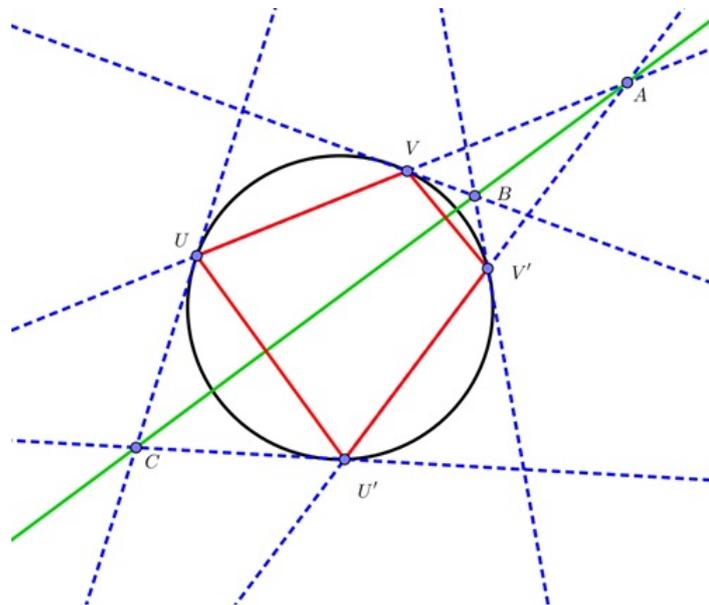


Figura 40: Teorema de Pascal para o quadrilátero

Fonte: Autores

- Particularização para um quadrilátero inscrito na cônica , observe a figura 40.

Os pontos U, V, U' e V' estão sobre a cônica formando um quadrilátero , com os lados opostos UV e $U'V'$ concorrentes em um ponto A . Se os pares de retas (r_1, r_2) e (r_3, r_4) tangentes à cônica, nos pontos (U, V) e (U', V') , intersectam-se nos pontos B e C , então esses pontos A, B e C são colineares.

- Particularização para um triângulo inscrito na cônica , observe a figura 41.

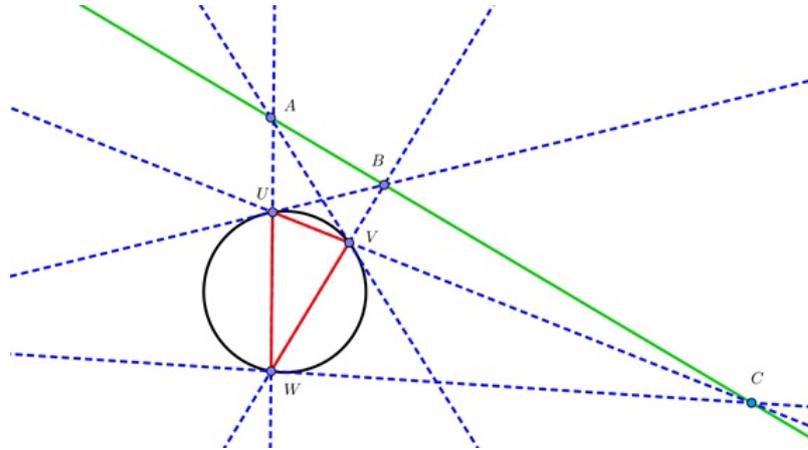


Figura 41: Teorema de Pascal para o triângulo

Fonte: Autores

Dado um triângulo ΔUVW inscrito em uma cônica, os pontos A, B e C de interseção de cada um dos lados com as tangentes à cônica, nos respectivos vértices opostos, são colineares

6 APLICAÇÃO DOS AXIOMAS DA GEOMETRIA PROJETIVA EM PROBLEMAS

Os problemas citados a seguir sofreram uma adaptação para aplicação no ensino médio, uma vez que já foram solucionados com o auxílio da Geometria Projetiva apresentada pela (SBM, 2017), no entanto com uma teoria um pouco "pesada" para tal ensino, sendo assim utiliza-se dos axiomas da geometria projetiva para apresentar uma solução alternativa para tais problemas, viabilizando sua aplicação no ensino médio.

6.0.11 PROBLEMA 1

(CHINA-1997) O quadrilátero ABCD está inscrito num círculo S. Seja X o ponto de intersecção entre os prolongamentos dos lados AB e CD e W o ponto de intersecção entre os prolongamentos dos lados AD e BC. As tangentes traçadas por X intersectam S em Y e Z. Prove que W, Y e Z são colineares.

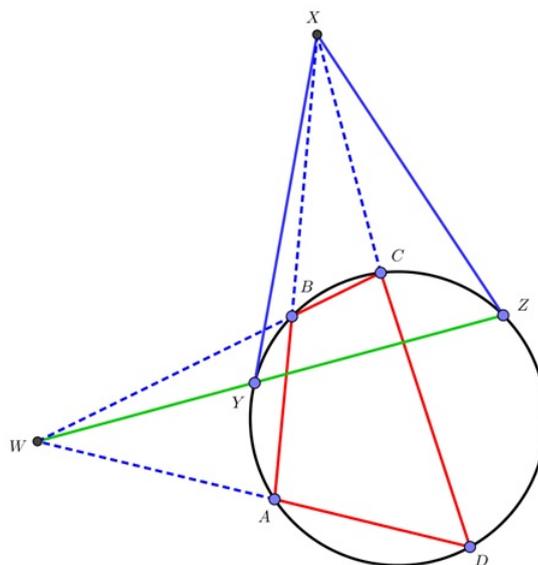


Figura 42: Situação Geométrica Ilustrativa I
Fonte: Autores

$$\eta_{AD} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0, 2, 0)$$

e

$$\eta_{BC} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \beta, \frac{\sqrt{2}}{2} + \alpha, -\frac{\sqrt{2}}{2}\beta - \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha \right)$$

então o ponto de interseção W é dado por

$$W = \eta_{AD} \times \eta_{BC} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \beta & \frac{\sqrt{2}}{2} + \alpha & -\frac{\sqrt{2}}{2}\beta - \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha \end{bmatrix} = (-\sqrt{2}\beta - \sqrt{2}\alpha, 0, 2\beta - \sqrt{2})$$

como $\beta \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ temos que o representante de W via identificação afim é $W = \left(\frac{-\sqrt{2}\beta - \sqrt{2}\alpha}{2\beta - \sqrt{2}}, 0, 1 \right)$

portanto seu representante no plano projetivo é $\bar{W} = \left(\frac{-\sqrt{2}\beta - \sqrt{2}\alpha}{2\beta - \sqrt{2}} : 0 : 1 \right)$

Da mesma forma calcula-se as coordenadas de X no plano projetivo, logo pela proposição 4.2.3 tem-se que,

$$\bar{X} = \overline{\eta_{AB} \times \eta_{DC}}$$

portanto pela proposição 4.2.2 temos que a reta normal η_{AB} é dada por:

$$\eta_{AB} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{bmatrix} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

da mesma maneira calcula-se η_{DC}

$$\eta_{DC} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \end{bmatrix} = (-\beta, \alpha - 1, \beta)$$

Portanto o de interseção X é dado por

$$X = \eta_{AB} \times \eta_{DC} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\beta & \alpha - 1 & \beta \end{bmatrix} = \left(\beta - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta + \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\beta, \frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} + \beta - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta \right)$$

como $\frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} + \beta - \frac{\sqrt{2}}{2} \beta \neq 0$, com $\frac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < 1$ e $0 < \beta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ portanto, temos pela identificação afim que $X = \left(\frac{\beta - \frac{\sqrt{2}}{2} \beta + \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} + \beta - \frac{\sqrt{2}}{2} \beta}, \frac{\sqrt{2} \beta}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} + \beta - \frac{\sqrt{2}}{2} \beta}, 1 \right)$, logo seu representante no plano projetivo é $\bar{X} = \left(\frac{\beta - \frac{\sqrt{2}}{2} \beta + \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} + \beta - \frac{\sqrt{2}}{2} \beta} : \frac{\sqrt{2} \beta}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} + \beta - \frac{\sqrt{2}}{2} \beta} : 1 \right)$

Por outro lado sejam $Y = (y_1, y_2)$ e $Z = (z_1, z_2)$, onde seus representantes no plano projetivo via identificação afim são, $\bar{Y} = (y_1 : y_2 : 1)$ e $\bar{Z} = (z_1 : z_2 : 1)$ e ainda tem-se que a equação da circunferência é $S : x^2 + y^2 = 1$, então pela identificação afim no plano projetivo S é dado por $S : x^2 + y^2 + z = 0$, como \bar{y} pertence a reta tangente a \bar{S} e portanto pela proposição 3.3.1 temos que $y_1 X' + y_2 Y' + 1 = 0$, da mesma maneira como \bar{Z} pertence a reta tangente a \bar{S} temos pela proposição 3.3.1 que $z_1 X' + z_2 Y' + 1 = 0$ logo pode-se montar um sistema de equações dado a seguir,

$$\begin{cases} y_1 X' + y_2 Y' + 1 = 0 \\ z_1 X' + z_2 Y' + 1 = 0 \end{cases}$$

resolvendo o sistema, temos que $(y_2 z_1 - z_2 y_1) X' + (z_2 - y_2) = 0$ então $-(y_2 z_1 - z_2 y_1) X' = (z_2 - y_2)$, feito isso, pode-se mostrar que \bar{W} , \bar{Z} e \bar{Y} são colineares, logo basta verificar a validade da proposição 4.2.4, portanto tomamos os pontos $\bar{W} = (w_1 : 0 : 1)$, $\bar{Z} = (z_1 : z_2 : 1)$ e $\bar{Y} = (y_1 : y_2 : 1)$ basta calcular o seguinte determinante,

$$\det [W, Z, Y] = \begin{vmatrix} w_1 & 0 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = (z_2 - y_2)w_1 + (z_1 y_2 - y_1 z_2)$$

como $-(y_2 z_1 - z_2 y_1) X' = (z_2 - y_2)$ então tem-se que

$$-(y_2 z_1 - z_2 y_1) X' w_1 + (y_2 z_1 - z_2 y_1)$$

Como \bar{X} pertence a reta tangente a \bar{S} , então basta mostrar que $x_1 w_1 = 1$.

então tomando

$$x_1 = \frac{\beta - \frac{\sqrt{2}}{2} \beta + \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} + \beta - \frac{\sqrt{2}}{2} \beta} \text{ e } w_1 = \frac{-\sqrt{2} \beta - \sqrt{2} \alpha}{2\beta - \sqrt{2}}$$

portanto

$$x_1 w_1 = \left(\frac{\beta - \frac{\sqrt{2}}{2} \beta + \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} + \beta - \frac{\sqrt{2}}{2} \beta} \right) \cdot \left(\frac{-\sqrt{2} \beta - \sqrt{2} \alpha}{2\beta - \sqrt{2}} \right)$$

logo

$$x_1 w_1 = \frac{-\sqrt{2}\beta^2 + \beta^2 - \alpha\beta + \beta - \alpha\beta\sqrt{2} + \alpha\beta - \alpha^2 + \alpha}{\sqrt{2}\beta - \beta\alpha\sqrt{2} + 2\beta^2 - \beta^2\sqrt{2} - 1 + \alpha - \sqrt{2}\beta + \beta}$$

então

$$x_1 w_1 = \frac{-\sqrt{2}\beta^2 - \alpha\beta\sqrt{2} + \alpha + \beta + \beta^2 - \alpha^2}{-\sqrt{2}\beta^2 - \beta\alpha\sqrt{2} + \alpha + \beta + 2\beta^2 - 1}$$

logo, basta mostra que $\beta^2 - \alpha^2 = 2\beta^2 - 1$ de fato, como o ponto $C = (\alpha, \beta)$ pertence a circunferência $S: x^2 + y^2 = 1$ segue que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, além disso, $\alpha^2 = 1 - \beta^2$ portanto

$$\beta^2 - (1 - \beta^2) = 2\beta^2 - 1$$

logo temos que $x_1 w_1 = 1$ e pela propriedade 4.2.4 conclui-se que $\det[W, Z, Y] = 0$, de onde segue que \overline{W} , \overline{Z} e \overline{Y} são colineares.

6.0.12 PROBLEMA 2

(CHINA-1996) Seja H o ortocentro do triângulo acutângulo ABC . As tangentes traçadas por A ao círculo de diâmetro BC intersectam o círculo em P e Q . Prove que P , Q e H são colineares.

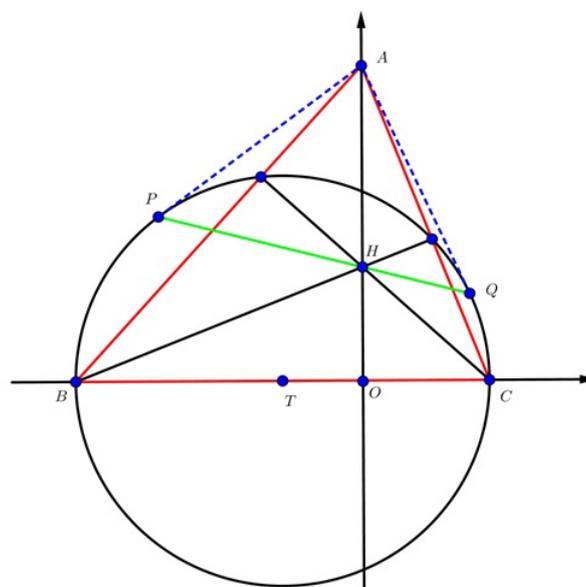


Figura 44: Situação Geométrica II

Fonte: Autores

Da mesma maneira que fizemos no problema 1, para viabilizar a apresentação de tal problema com a utilização dos axiomas da Geometria Projetiva no ensino médio, tomamos um caso mais particular para os pontos $B = (-1, 0)$, $D = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $C = (1, 0)$ e $E = (\alpha, \beta)$, com $\frac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < 1$ e $0 < \beta < \frac{\sqrt{2}}{2}$, sendo D e E pontos onde o lado AB e BC do triângulo que intercepta o círculo unitário, com isso o restante do problema toma forma dentro do plano cartesiano, logo pode-se utilizar a teoria da Geometria Projetiva para viabilizar a solução de tal problema.

Solução 6.0.2. A proposta para solucionar esse problema em um caso particular, consiste na utilização do conceito de colineação citada pela proposição 3.3.2, neste sentido vamos tomar quatro pontos projetivos não colineares três a três, com por exemplo: $\bar{B} = (-1 : 0)$, $\bar{D} = (-\frac{\sqrt{2}}{2} : -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $\bar{C} = (1 : 0)$ e $\bar{E} = (\alpha : \beta)$, com $\frac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < 1$ e $0 < \beta < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Para estes pontos temos a seguinte situação gráfica:

Como queremos mostrar que \bar{P} , \bar{Q} e \bar{H} são colineares, vamos encontrar os representantes dos respectivos pontos.

Vamos iniciar aplicando a proposição 4.2.3 para encontrar um representante para \bar{A} , uma vez que ele é o ponto de interseção das retas tangentes com a circunferência, onde os pontos de tangência são respectivamente \bar{P} e \bar{Q} , logo temos que:

$$\bar{A} = \overline{\eta_{BD} \times \eta_{CE}}$$

portanto temos que encontrar as normais η_{BD} e η_{CE} , pela proposição 4.2.2. então:

$$\eta_{BD} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{bmatrix} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

e ainda

$$\eta_{CE} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \end{bmatrix} = (-\beta, \alpha - 1, \beta)$$

portanto

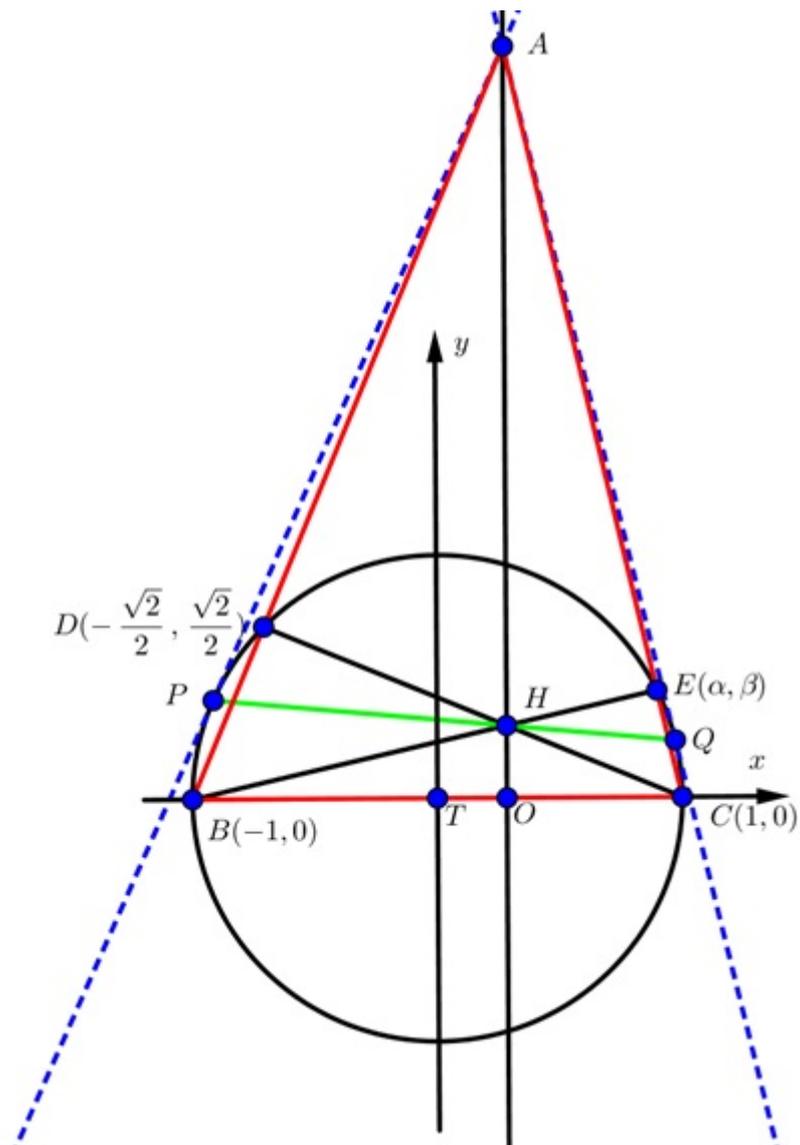


Figura 45: Situação Gráfica II

Fonte: Autores

$$A = \eta_{BD} \times \eta_{CE} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\beta & \alpha - 1 & \beta \end{bmatrix} =$$

$$(\beta - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta + \alpha\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\beta, \frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha\frac{\sqrt{2}}{2} + \beta - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta)$$

como $\frac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < 1$ e $0 < \beta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ temos que

$$A = (\beta - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta + \alpha\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\beta, \frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha\frac{\sqrt{2}}{2} + \beta - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta)$$

portanto pela identificação afim podemos tomar um representante para o ponto projetivo

$$\bar{A} = \left(\frac{\beta - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta + \alpha\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha\frac{\sqrt{2}}{2} + \beta - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta} : \frac{\sqrt{2}\beta}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha\frac{\sqrt{2}}{2} + \beta - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta} : 1 \right)$$

Da mesma maneira podemos calcular pela proposição 4.2.3 $\overline{H} = \overline{\eta_{DC} \times \eta_{EB}}$ então pela proposição 4.2.2 calcula-se as retas normais η_{DC} e η_{EB} temos que

$$\eta_{DC} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + 1, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

e ainda

$$\eta_{EB} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \alpha & \beta & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\beta, -\alpha - 1, \beta)$$

portanto

$$H = \eta_{EB} \times \eta_{DC} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \beta & -\alpha - 1 & \beta \end{bmatrix} =$$

$$\left(\beta \frac{\sqrt{2}}{2} + \beta - \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\beta, -\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} - \beta \frac{\sqrt{2}}{2} - \beta \right)$$

como $\frac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < 1$ e $0 < \beta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ temos que

$$H = \left(\beta \frac{\sqrt{2}}{2} + \beta - \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\beta, -\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} - \beta \frac{\sqrt{2}}{2} - \beta \right)$$

portanto pela identificação afim podemos tomar um representante para o ponto projetivo

$$\overline{H} = \left(\frac{\beta \frac{\sqrt{2}}{2} + \beta - \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} - \beta \frac{\sqrt{2}}{2} - \beta} : \frac{-\sqrt{2}\beta}{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} - \beta \frac{\sqrt{2}}{2} - \beta} : 1 \right)$$

Por outro lado sejam $P = (p_1, p_2)$ e $Q = (q_1, q_2)$ onde seus representantes no plano projetivo via identificação afim são $\overline{P} = (p_1 : p_2 : 1)$ e $\overline{Q} = (q_1 : q_2 : 1)$, e ainda tem-se que a equação da circunferência é $S : x^2 + y^2 = 1$, então pela identificação afim no plano projetivo \overline{S} é dado por $\overline{S} : x^2 + y^2 + z = 0$, como \overline{P} pertence a reta tangente a \overline{S} , e portanto pela proposição 3.3.1 temos que $p_1X' + p_2Y' - 1 = 0$, da mesma maneira como \overline{Q} pertence a reta tangente a \overline{S} temos pela proposição 3.3.1 que $q_1X' + q_2Y' - 1 = 0$, logo pode-se montar um sistema de equações dado a seguir.

$$\begin{cases} p_1X' + p_2Y' - 1 = 0 \\ q_1X' + q_2Y' - 1 = 0 \end{cases}$$

então

$$\begin{cases} p_1 q_2 X' + p_2 q_2 Y' - q_2 = 0 \\ p_2 q_1 X' + p_2 q_2 Y' - p_2 = 0 \end{cases}$$

resolvendo o sistema temos que $-(p_1 q_2 - p_2 q_1)X' = p_2 - q_2$ (1) e ainda

$$\begin{cases} p_1 q_1 X' + p_2 q_1 Y' - q_1 = 0 \\ p_1 q_1 X' + p_1 q_2 Y' - p_2 = 0 \end{cases}$$

logo resolvendo o sistema temos que $(p_1 q_2 - p_2 q_1)Y' = p_1 - q_1$ (2)

feito isso, pode-se, mostrar que \bar{P} , \bar{H} e \bar{Q} são colineares, logo basta verificar a validade da proposição 4.2.4, portanto tomamos os pontos $\bar{P} = (p_1 : p_2 : 1)$, $\bar{H} = (h_1 : h_2 : 1)$ e $\bar{Q} = (q_1 : q_2 : 1)$, então calculamos o seguinte determinante:

$$\det [P, H, Q] = \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & 1 \\ p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \end{vmatrix} = h_1(p_2 - q_2) - h_2(p_1 - q_1) + (p_1 q_2 - p_2 q_1) \quad (3)$$

com isso substituindo (1) e (2) em (3) temos que

$$-h_1 X'(p_1 q_2 - p_2 q_1) + h_2 Y'(p_1 q_2 - p_2 q_1) + (p_1 q_2 - p_2 q_1)$$

portanto

$$(p_1 q_2 - p_2 q_1)(1 - (h_1 X' + h_2 Y'))$$

Como \bar{A} pertence a reta tangente então basta mostra que $(h_1 a_1 + h_2 a_2) = 1$ como $a_1 = \left(\frac{\beta - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta + \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} + \beta - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta}\right)$, $a_2 = \left(\frac{\sqrt{2}\beta}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} + \beta - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta}\right)$, $h_1 = \left(\frac{\beta \frac{\sqrt{2}}{2} + \beta - \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} - \beta \frac{\sqrt{2}}{2} - \beta}\right)$ e $h_2 = \left(\frac{-\sqrt{2}\beta}{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} - \beta \frac{\sqrt{2}}{2} - \beta}\right)$ então

$$\left(\frac{\beta \frac{\sqrt{2}}{2} + \beta - \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} - \beta \frac{\sqrt{2}}{2} - \beta}\right) \cdot \left(\frac{\beta - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta + \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} + \beta - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta}\right) + \left(\frac{-\sqrt{2}\beta}{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} - \beta \frac{\sqrt{2}}{2} - \beta}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}\beta}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} + \beta - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta}\right)$$

então manipulando os cálculos temos que

$$\frac{-\beta^2 + \frac{\beta^2}{2} - \alpha\beta + \beta\sqrt{2} + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{2} + 2\beta^2}{\frac{\beta^2}{2} - \alpha\beta + \beta\sqrt{2} - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{2}}$$

como $\bar{E} = (\alpha : \beta : 1)$, com $\alpha > \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\beta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ pertence a circunferência unitária temos que $\alpha^2 = 1 - \beta^2$ logo

$$\frac{-\beta^2 + \frac{\beta^2}{2} - \alpha\beta + \beta\sqrt{2} + \frac{1}{2} - \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{2} + 2\beta^2}{\frac{\beta^2}{2} - \alpha\beta + \beta\sqrt{2} + \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$

então

$$\frac{-\beta^2 - \alpha\beta + \beta\sqrt{2} + 2\beta^2}{\beta^2 - \alpha\beta + \beta\sqrt{2}} = \frac{\beta^2 - \alpha\beta + \beta\sqrt{2}}{\beta^2 - \alpha\beta + \beta\sqrt{2}} = 1$$

logo conclui-se que $(h_1a_1 + h_2a_2) = 1$ portanto pela propriedade 4.2.4 temos que se $\det[P, H, Q] = 0$ então \overline{P} , \overline{H} e \overline{Q} são colineares.

6.0.13 PROBLEMA 3

Seja ABCD um quadrilátero circunscritível e EFGH pontos em que seu incirculo toca AB, BC, CD e DA respectivamente . Prove que AC, BD, EG e FH são concorrentes .

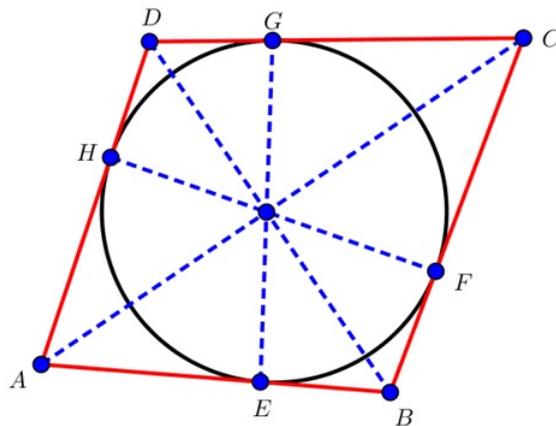


Figura 46: Situação Geométrica III

Fonte: Autores

Da mesma maneira que fizemos nos problemas 1 e 2, para viabilizar a apresentação de tal problema com a utilização dos axiomas da Geometria Projetiva no ensino médio, tomamos um caso mais particular para para um quadrilátero circunscrito num círculo unitário com os seguintes pontos $A = (a, -1)$, $B = (1, -1)$, $C = (1, 1)$ e $D = (d, 1)$, $E = (0, -1)$, $F = (1, 0)$, $G = (0, 1)$ e $H = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, com isso o restante do problema toma forma dentro do plano cartesiano, logo pode-se utilizar a teoria da Geometria Projetiva para viabilizar a solução do problema.

Solução 6.0.3. A proposta para solucionar esse problema em um caso particular, consiste na utilização do conceito de colineação citada pela citada pela proposição 3.3.2, neste sentido

vamos tomar quatro pontos não colineares três a três, como por exemplo: $A = (a, -1)$, $B = (1, -1)$, $C = (1, 1)$ e $D = (d, 1)$, $E(0, -1)$, $F = (1, 0)$, $G = (0, 1)$ e $H = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Para estes pontos temos a seguinte construção geométrica:

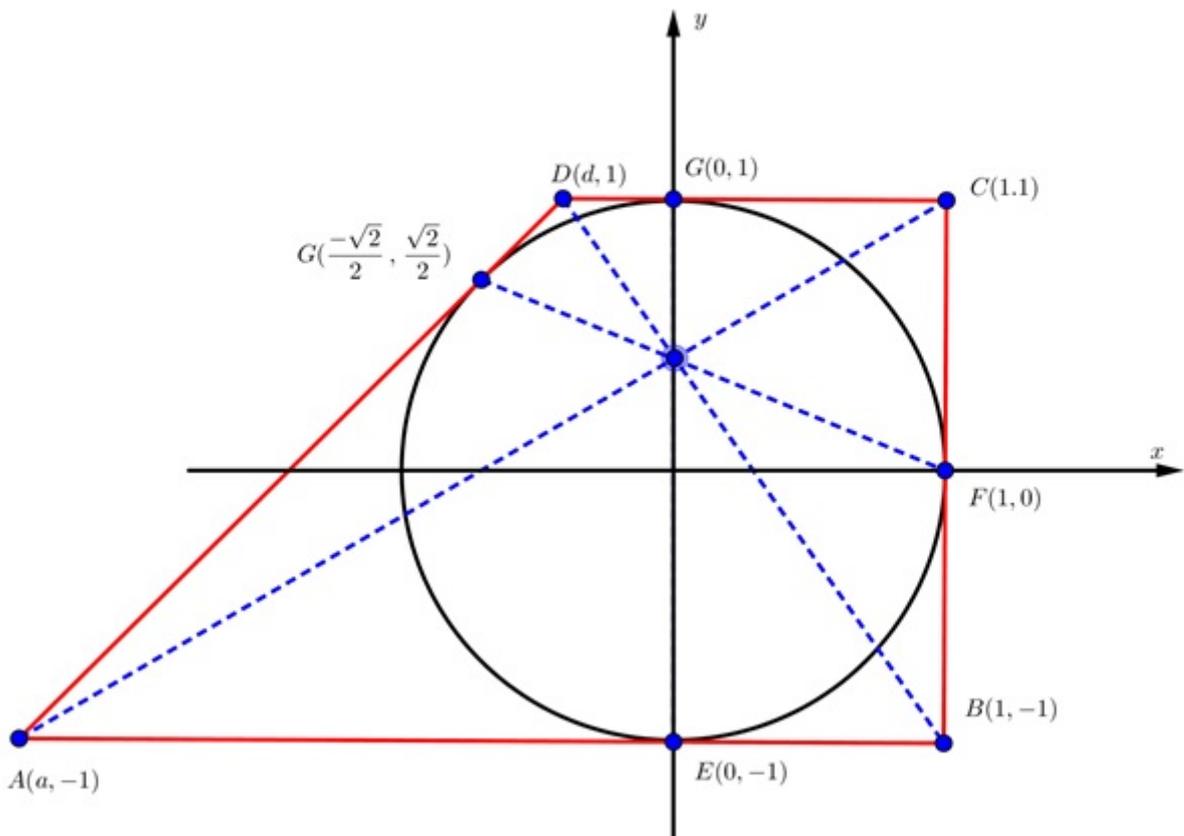


Figura 47: Situação Gráfica III

Fonte: Autores

Para começar a solução tomamos os pontos projetivos via identificação afim portanto temos que

$$\bar{A} = (a : -1 : 1), \bar{B} = (1 : -1 : 1), \bar{C} = (1 : 1 : 1) \text{ e } \bar{D} = (d : 1 : 1), \bar{E}(0 : -1 : 1), \bar{F} = (1 : 0 : 1), \\ \bar{G} = (0 : 1 : 1) \text{ e } \bar{H} = (-\frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} : 1)$$

portanto pela proposição 4.2.2 calcula-se primeiramente as equações normais $\overline{\eta_{AC}}$, $\overline{\eta_{EG}}$, $\overline{\eta_{HF}}$ e $\overline{\eta_{BD}}$.

Calculando $\overline{\eta_{AC}}$:

$$\eta_{AC} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (-2, 1 - a, a + 1)$$

portanto $\overline{\eta_{AC}} = (-2 : 1 - a : a + 1)$

Calculando $\overline{\eta_{EG}}$:

$$\eta_{EG} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = (2, 0, 0)$$

portanto $\overline{\eta_{EG}} = (2 : 0 : 0)$

Calculando $\overline{\eta_{HF}}$:

$$\eta_{HF} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + 1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

portanto $\overline{\eta_{HF}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 : -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Calculando $\overline{\eta_{BD}}$:

$$\eta_{BF} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ d & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = (2, 1 - d, -d - 1)$$

portanto $\overline{\eta_{BD}} = (2 : 1 - d : -d - 1)$:

e ainda podemos particularizar pelo teorema de Pascal, tomando o quadrilátero $EFGH$ inscrito na circunferência, portanto temos a seguinte construção:

Com a particularização do teorema de Pascal citada anteriormente, temos que o ponto projetivo \overline{X} é o ponto de interseção das retas secantes a circunferência, logo pode-se calcular o seu representante no plano projetivo através da proposição 4.2.3, com isso podemos calcular o ponto projetivo através da proposição 4.2.3 $\overline{X} = \overline{\eta_{HG}} \times \overline{\eta_{EF}}$ logo calcula-se as seguintes matrizes :

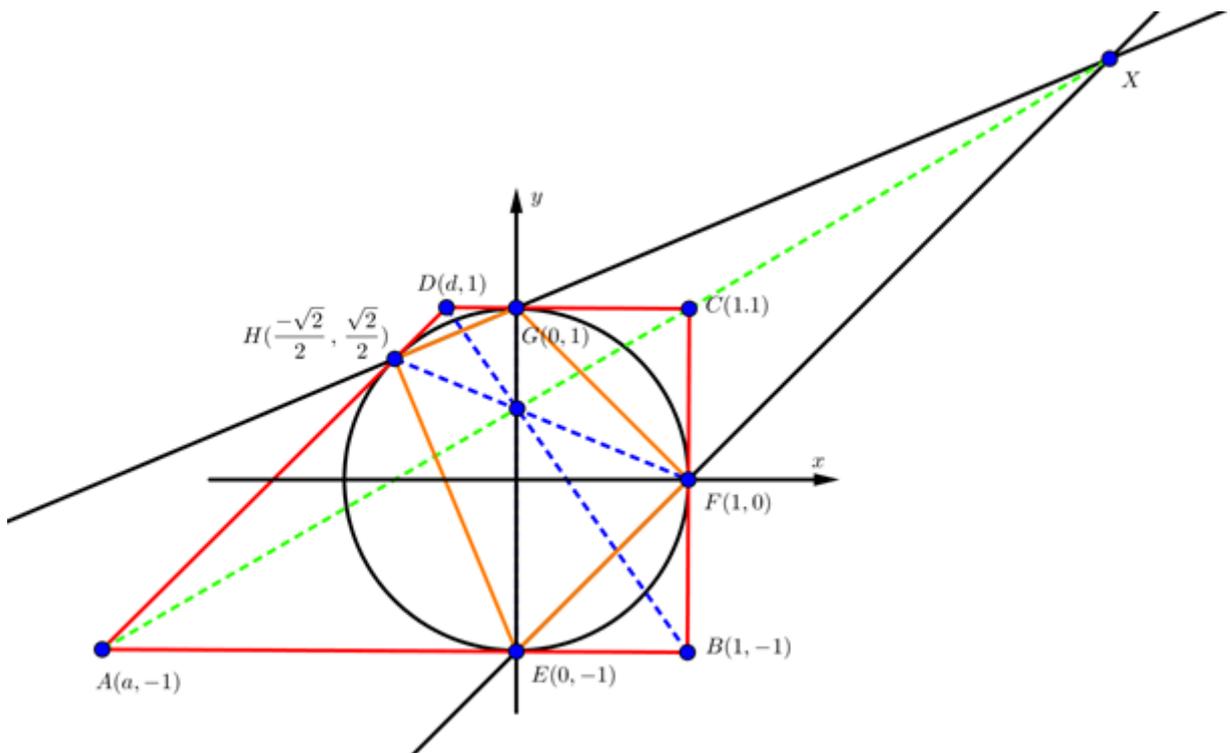


Figura 48: Particularização teorema de Pascal para quadriláteros inscritos I

Fonte: Autores

$$\eta_{HG} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

e ainda

$$\eta_{HG} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (-1, 1, 1)$$

logo tem-se que

$$X = \eta_{HG} \times \eta_{HG} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = (-\sqrt{2}, -1, 1 - \sqrt{2})$$

portanto a coordenada de $X = (-\sqrt{2}, -1, 1 - \sqrt{2})$ logo o representante no plano projetivo $\bar{X} = (-\sqrt{2} : -1 : 1 - \sqrt{2})$

E ainda podemos particularizar pelo teorema de pascal, tomando o quadrilátero EFGH inscrito na circunferência, portanto temos a seguinte construção:

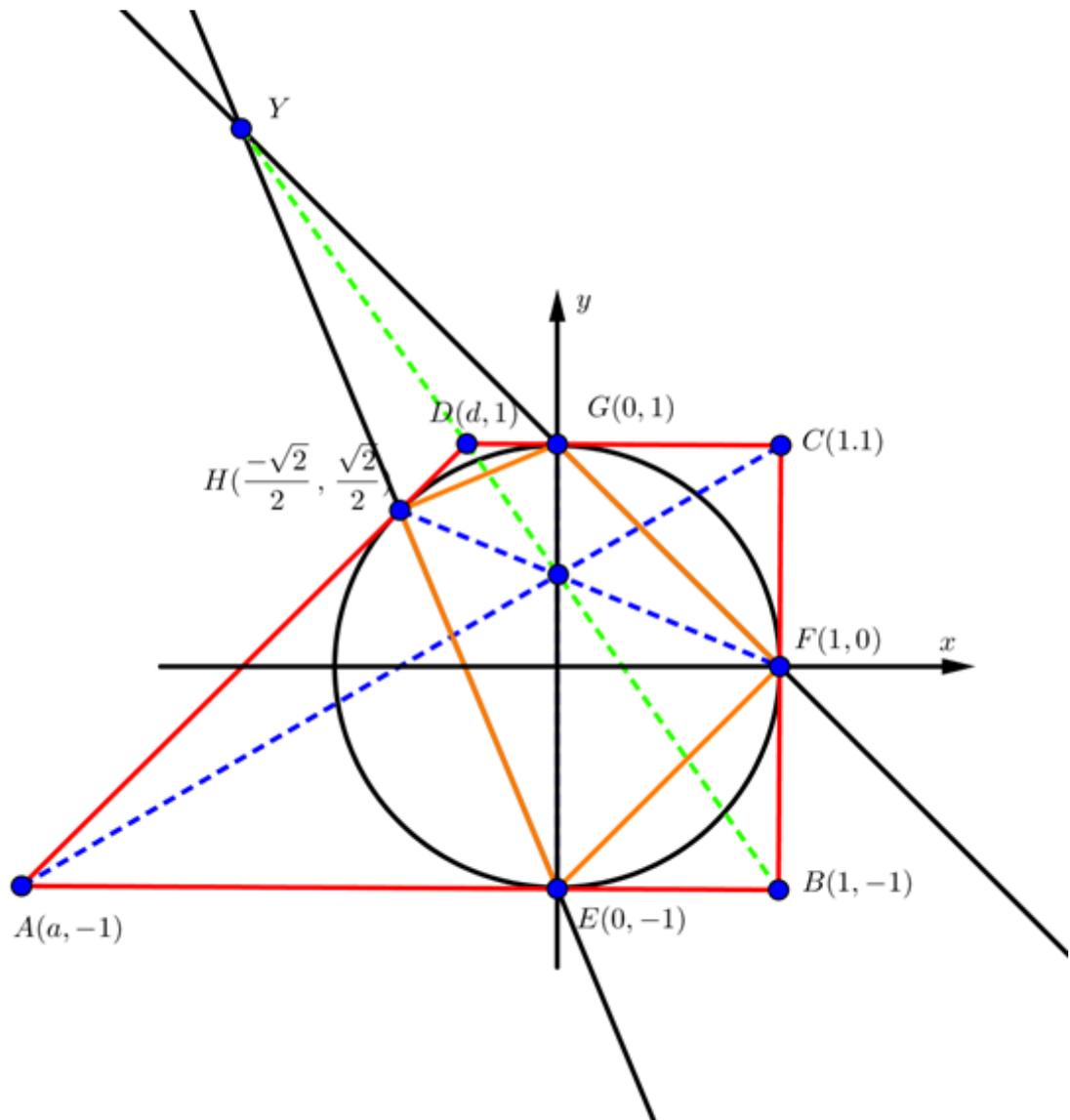


Figura 49: Particularização teorema de Pascal para quadriláteros inscritos II

Fonte: Autores

Com a particularização do teorema de pascal citada anteriormente, temos que o ponto projetivo \bar{y} é o ponto de interseção das retas secantes a circunferência, logo pode-se calcular o seu representante no no plano projetivo através da proposição 4.2.3, com isso podemos calcular o ponto projetivo pela proposição 4.2.3 $\bar{Y} = \overline{\eta EH} \times \overline{\eta FG}$ logo calcula-se as seguintes matrizes :

$$\eta_{EH} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{bmatrix} = \left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

e ainda

$$\eta_{FG} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (1, 1, -1)$$

logo tem-se que

$$Y = \eta_{EH} \times \eta_{FG} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2} + 1, 1)$$

portanto a coordenada de $Y = (-\sqrt{2}, \sqrt{2} + 1, 1)$ logo o representante no plano projetivo $\bar{Y} = (-\sqrt{2} : \sqrt{2} + 1 : 1)$

Agora basta calcular os seguintes $\det [\eta_{EG}, \eta_{AC}, \eta_{HF}]$ e $\det [\eta_{BD}, \eta_{EG}, \eta_{HF}]$ portanto

$$\det [\eta_{EG}, \eta_{AC}, \eta_{HF}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 - a & a + 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = 2 \left[(1 - a) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (a + 1) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) \right]$$

então

$$2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} a - a \frac{\sqrt{2}}{2} - a - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) = 2(-\sqrt{2} - a - 1)$$

da particularização do teorema de pascal tem-se que X, A e C são colineares, logo pela proposição 4.2.4 temos que $\det [X, A, C] = 0$ então

$$\det [A, C, X] = \begin{bmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & -1 & 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix} = 0$$

com isso obtém-se a seguinte relação de que $a = -\sqrt{2} - 1$ portanto $2(-\sqrt{2} - (-\sqrt{2} - 1) - 1) = 0$ logo pela proposição 4.2.5 temos que $\tilde{\eta}_{EG}, \tilde{\eta}_{AC}$ e $\tilde{\eta}_{HF}$ concorrem em um mesmo ponto.

Da mesma maneira tomamos o $\det [\eta_{BD}, \eta_{EG}, \eta_{HF}]$ logo

$$\det [\eta_{BD}, \eta_{EG}, \eta_{HF}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 - d & -d - 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = 2 \left[(1 - d) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (-d - 1) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) \right]$$

então

$$2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + d\frac{\sqrt{2}}{2} + d\frac{\sqrt{2}}{2} + d + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) = 2(\sqrt{2}d + d + 1)$$

da particularização do teorema de pascal tem-se que Y, D e B são colineares, logo pela proposição 4.2.4 temos que $\det[Y, D, B] = 0$ então

$$\det[Y, D, B] = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} + 1 & 1 \\ d & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

com isso obtém-se a seguinte relação de que $d = 1 - \sqrt{2}$ portanto $2[\sqrt{2}(1 - \sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2} + 1] = 2(\sqrt{2} - 2 + 2 - \sqrt{2}) = 0$ logo pela proposição 4.2.5 temos que $\bar{\eta}_{BD}$, $\bar{\eta}_{EG}$ e $\bar{\eta}_{HF}$ concorrem em um mesmo ponto. então conclui-se que AC, BD, EG e FH são concorrentes.

6.0.14 PROBLEMA 4

Como plantar dez árvores em dez fileiras de três árvores cada uma para que cada árvore esteja exatamente em três fileiras?

Solução 6.0.4. Tomando os Δ_{ABC} e Δ_{DEF} de maneira que os segmentos AE, BD e CF se encontram em G e ainda AB e DE se encontram no ponto H , EF e AC se encontram no ponto I e DF e BC se encontram em J , de maneira que H, I e J são colineares, então temos a seguinte situação geométrica:

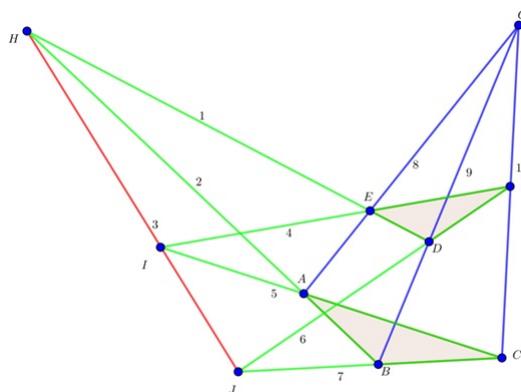


Figura 50: Situação Geometria IV

Fonte: Autores

se tomarmos os pontos A, B, C, D, E, F, G, H, I e J como árvores e os segmentos AE, BD, CF, AB, DE, EF, AC, DF, BC e HJ como fileiras , temos pelo Teorema de Desargues que a situação geométrica IV é verdadeira , logo o problema está resolvido.

7 ANÁLISE DAS APLICAÇÕES DOS EXERCÍCIOS NO ENSINO MÉDIO

Para análise dos problemas demonstrados no capítulo anterior pode-se ressaltar que as resoluções tem uma matemática um tanto pesada para o nível de ensino abordado nos anos finais do ensino médio, entretanto pode-se apresentar tais exercícios como uma nova abordagem da Geometria Analítica com aplicações no universo projetivo.

Com os conceitos abordados acima pode-se fazer uma ponte para o sistema axiomático da Geometria Projetiva tendo assim um entendimento melhor por parte dos alunos, desse modelo de Geometria Não-Euclidiana e, ainda as diretrizes curriculares do estado do Paraná (PARANÁ, 2008) cita que no ensino médio, deve-se garantir ao aluno o aprofundamento dos conceitos da Geometria Plana e Espacial em um nível de abstração mais complexo, nesse contexto os alunos analisam os elementos que estruturam a geometria através da representação algébrica, ou seja, a Geometria Analítica, nesse caso se torna uma ferramenta importante o estudo das coordenadas cartesianas, equação da reta, estudo da circunferência no plano e estudo das posições, com isso se torna necessário conhecer as demonstrações das fórmulas, teoremas, conhecer e aplicar regras e convenções matemáticas, vale ressaltar que no ensino médio, aprofundam-se os estudos das noções de Geometrias Não-Euclidianas, nesse sentido pode-se abordar no ensino da Geometria Elíptica conceitos que também podem ser vistos como um modelo de Geometria Projetiva simples.

Pode-se fazer um roteiro de conceitos para que se possa apresentar a Geometria Projetiva elencada com a Introdução a Geometria Analítica. Nos problemas 1, 2 e 3 temos estabelecidos certos conceitos matemáticos um tanto pesados para o ensino médio, entretanto pode-se fazer uma ponte para eles, elencando os itens a seguir:

1. Conceitos de coordenadas cartesianas; Nota-se nas particularizações dos determinados problemas podemos apresentar o conceito do estudo dos quadrantes e de coordenadas cartesianas, fazendo com que o aluno entenda o conceito de pontos para solução de determinados problemas.
2. Conceitos de Bissetriz dos quadrantes; Nas particularizações foram tomadas coordenadas

que pertencem a bissetriz dos quadrantes pares.

3. Conceitos de colineariedade entre pontos ; dentre as retas apresentadas temos que para equacionar uma reta, e ainda temos o conceito do determinante abordado em sala , como em uma reta existem infinitos pontos ,temos que pelo conceito de colineariedade a equação geral da reta.
4. Conceitos de equações de retas; como citado no item anterior quando trabalhamos identificação afim, estamos abordando os conceitos elencados no plano em \mathbb{R}^2 ou seja as equações mais precisamente a equação geral da reta apresentada no conceitos preliminares e utilizada nos problemas propostos no trabalho.
5. Aplicação da equação da circunferência; Conceito para particularização da equação da circunferência centrada em $(0,0)$ com isso temos mais uma abordagem dos conceitos introdutórios a Geometria Analítica.
6. Posição de retas em relação a circunferência; Conceitos e aplicações das posições relativas reta em relação a uma circunferência, mais precisamente as retas tangentes a circunferência.
7. Aplicação do cálculo do determinante de matrizes; Conceito e aplicação do cálculo do determinante de uma matriz, podendo-se deixar a cargo do aluno o método que jogar mais adequado a ele.

Conhecer as demonstrações das fórmulas e teoremas, aplicando as regras e convenções matemáticas, tanto no estudo da geometria de posição como no cálculo de área de figuras geométricas planas, se mostra viável conhecer certos conceitos matemáticos. Na apresentação da solução do problema 4, onde com a demonstração do Teorema de Desargues o soluciona, com isso nota-se que as demonstrações matemáticas são importantes no ensino da matemática aplicada em anos finais do ensino médio.

8 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Esse trabalho tem como objetivo principal apresentar a aplicação do sistema axiomático da Geometria Projetiva para solução de problemas, tomando como parâmetro os problemas de treinamentos para olimpíadas de matemática, tais problemas podem ser elencados no ensino médio tendo em vista que os cálculos realizados para as demonstrações das soluções são apresentados no estudo da Introdução a Geometria Analítica que é contemplada no anos finais do ensino médio, e ainda apresentação dos principais teoremas da Geometria Projetiva, sendo eles, Teorema de Pappus, Teorema de Desargues e Teorema de Pascal.

A partir do capítulo 3 temos a apresentação de alguns conceitos preliminares da Introdução a Geometria Analítica e Geometria Projetiva depois no capítulo 4 tomaram o caminho da apresentação do sistema axiomático da Geometria Projetiva com suas respectivas demonstrações.

Desta forma, ressalta-se que não se pode abordar todo o conhecimento matemático ao mesmo tempo, até mesmo porque os conceitos matemáticos não foram construídos dessa maneira. No ensino proposto temos uma matemática um pouco pesada para o ensino médio, entretanto podemos apresentar os problemas como uma aplicação da Geometria Analítica na Geometria Projetiva através do uso de seus axiomas, portanto se tiver uma ponte de ligação entre os conceitos abordados na resolução dos problemas e os conceitos da parte introdutória da Geometria Analítica o ensino dessa nova Geometria se torna viável para os anos finais do ensino médio, ainda mais que o ensino de Geometria vem diminuindo com o passar dos anos principalmente a Introdução a Geometria Analítica, sendo deixado de lado nos currículos da escola brasileira.

Com isso o aluno deixa de ter contato com um importante ramo da matemática, suas técnicas e seus resultados deslumbrantes. É preciso fazer com que o aluno sinta-se estimulado a aprender vários caminhos acessíveis e construir uma base sólida para o desenvolvimento do conhecimento matemático e as pesquisas que o norteiam, com o processo de modernização do ensino médio se torna imprescindível uma reformulação quanto ao ensino da geométrica uma vez que a geometria tratada em sala de aula esta um tanto defasada, logo, necessita-se

do rompimento dos métodos tradicionais no sentido de melhorar seus aprendizados, isso no ensino da Geometria e da Álgebra. Com este trabalho tem-se uma nova abordagem para um conhecimento dentro do campo da geometria projetiva fazendo uma ponte com a introdução a geometria analítica, dessa forma o aprendizado do aluno torna-se efetivo, um salto quanto ao conhecimento matemático.

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, A. F. F. d. Um estudo da geometria projetiva elíptica. **Universidade Estadual Paulista (UNESP)**, v. 2015, 2015.
- ANTON, H. **Elementary linear algebra**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2010.
- BARROS, A.; ANDRADE, P. Introdução à geometria projetiva. **Textos Universitários. Rio de Janeiro: Editora SBM**, 2010.
- BOYER, C. **B-História da Matemática, trad.** [S.l.: s.n.], 1988.
- CAMARGO, I. d.; BOULOS, P. Geometria analítica: um tratamento vetorial. **3ª edição. Renovada e ampliada—São Paulo: Prentice Hall**, 2005.
- CATALDO, J. C. Teorema do hexágono de pascal. **Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO**, 2013.
- CHAVES, J. J. F. Teorema de pappus. **Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO**, v. 2013, 2013.
- GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; JR, J. R. G. **Matemática fundamental, 2. Grau: volume único**. [S.l.]: FTD, 1994.
- PARANÁ, S. Diretrizes curriculares de matemática para a educação básica. **Governo do Estado do Paraná**, 2008.
- SBM. Dois problemas chineses sobre geometria projetiva. www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka20.pdf, 2017.
- STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Geometria analítica**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1987.
- WATERMANN, I.; FRANCO, V. S. Geometria projetiva no laboratório de ensino de matemática. **Artigo produzido durante o Programa de Desenvolvimento Educacional do Estado do Paraná (PDE), Universidade de Maringá**, v. 2009, p. 2192–8, 2008.
- WINTERLE, P. **Vetores e geometria analítica**. [S.l.]: Pearson Makron Books, 2010.