UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
CAMPUS DE CHAPECÓ
PROFMAT – MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

PATRIC MACHADO DE MENEZES

MODELAGEM MATEMÁTICA NA ESCOLA BÁSICA:

CARACTERIZAÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO APRENDIDO COM MODELAGEM

CHAPECÓ
2017

PATRIC MACHADO DE MENEZES

MODELAGEM MATEMÁTICA NA ESCOLA BÁSICA:

CARACTERIZAÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO APRENDIDO COM MODELAGEM

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática sob a orientação da Prof. Dr. Vitor José Petry.

CHAPECÓ

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

Av. Fernando Machado, 108 E

CEP 89802-112

Caixa Postal 181

Centro

Chapecó – SC

Brasil

PROGRAD/DBIB - Divisão de Bibliotecas

Menezes, Patric Machado de
   Modelagem Matemática na escola básica: Caracterização do conhecimento matemático aprendido com modelagem/ Patric Machado de Menezes. -- 2017.
   126 f.:il.

   Orientador: Vitor José Petry.
   Trabalho de conclusão de curso (graduação) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Curso de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, , 2017.

   1. Modelagem Matemática. 2. Modelagem no ensino médio. 3. Caracterização do conhecimento matemático aprendido com modelagem. I. Petry, Vitor José, orient. II. Universidade Federal da Fronteira Sul. III. Título.

Elaborada pelo sistema de Geração Automática de Ficha de Identificação da Obra pela UFFS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

UFFS PROFMAT

PATRIC MACHADO DE MENEZES

MODELAGEM MATEMÁTICA NA ESCOLA BÁSICA:

CARACTERIZAÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO APRENDIDO

COM MODELAGEM

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal da Fronteira Sul, para obtenção do título de Mestre em Matemática, defendido em banca examinadora em 18/12/2017.

Orientador: Prof. Dr. Vitor José Petry

Aprovado em: 18 / 12 / 2017

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Vitor José Petry – UFFS

Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges – UFFS

Prof. Dr. Ailton Durigon – IFSC

Chapecó/SC, dezembro de 2017

AGRADECIMENTOS

Aos que colaboraram para a realização deste trabalho, minha eterna gratidão, em especial, a meu orientador Prof. Dr. Vitor José Petry, Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges e demais professores do curso, minha família, em especial, Rosiele Lucas de Menezes e Sueli Machado de Menezes e aos colegas que tanto auxiliaram Carlinho Horn, Tancredo Tonello, Flavio Fernandes, Lilian Deoti, em especial, Sérgio Barcelos. À CAPES pelo auxílio financeiro, através do pagamento da bolsa.

Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.

Nikolai Lobachevsky

RESUMO

Na literatura da Modelagem Matemática é possível encontrar diversas obras que discorrem a respeito de seus objetivos e benefícios relativos à educação, todavia há certa carência de trabalhos que especifiquem o tipo de conhecimento matemático que é desenvolvido através destas atividades. Portanto, neste trabalho são observadas as características do conhecimento matemático abordado quanto à modelagem, são analisadas as estratégias utilizadas pelos estudantes para a construção do modelo e a matemática por eles utilizada na busca de soluções aos problemas propostos. A pesquisa foi desenvolvida com alunos do 3º ano do ensino médio, em uma escola pública do município de Erechim/RS. O trabalho se caracteriza como uma observação sistemática, tendo como foco o fenômeno educacional, analisando as informações obtidas por observação direta e contínua. Com este trabalho é possível identificar que a abordagem da Modelagem Matemática no ensino de Matemática evidencia outros saberes matemáticos que vão além de executar algoritmos.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Modelagem Matemática. Características Matemáticas. Conhecimentos Matemáticos.

ABSTRACT

In the literature of Mathematical Modeling it is possible to find several works that discuss their objectives and benefits related to education, but there is a certain lack of work that specifies the type of mathematical knowledge that is developed through these activities. Therefore, in this work the characteristics of the mathematical knowledge approached in terms of modeling are analyzed, the strategies used by the students to construct the model and the mathematics used by them in the search for solutions to the proposed problems are analyzed. The research was developed with students of the 3rd year of high school, in a public school in the municipality of Erechim / RS. The work is characterized as a systematic observation, focusing on the educational phenomenon, analyzing the information obtained by direct and continuous observation. With this work it is possible to identify that the approach of Mathematical Modeling in the teaching of Mathematics evidences other mathematical knowledges that go beyond executing algorithms.

Keywords: Mathematics Teaching, Mathematical Modeling, Mathematical Characteristics, Mathematical Knowledge

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é uma ciência, e uma ciência serve para compreender e dar significado às coisas. A etimologia da palavra matemática define exatamente isto, ela é a união de duas palavras gregas “máthema”, esta significando conhecimento ou explicação, com "thike" que, por sua vez, simboliza arte, obtém-se a palavra “matemathike” ou matemática, que é a arte ou técnica de explicar, conhecer, ou resolver problemas. Mas durante a sua existência essa palavra ganhou novas definições, compreende-se assim, que a Matemática se desenvolveu por vários motivos, incialmente aplicados, como medições de terras para a agricultura, registro do tempo, astronomia e comércio. Ao longo dessa história foi necessário refina-la, seus axiomas foram formalizados, ganhou símbolos próprios no século XVI para simplificar ideias e demonstrações mais rigorosas com a finalidade de ficar livre de contradições e teoremas falsos. Esse aprimoramento do seu rigor acabou afastando-a dos problemas naturais e conduziu-a para um pensamento mais abstrato que chamamos de Matemática Pura, fortemente presente no ensino atual dessa disciplina.

Percorrendo algumas dessas características da Matemática poder-se-ia defini-la como a ciência do “raciocínio lógico e abstrato”, ou em uma definição mais simples usada por Davis e Hersh (1985) como ciência da quantidade (aritmética) e do espaço (geometria), que pode ser ampliada para o “simbolismo relacionado com as quantidades e o espaço”, mas apossando-se de uma das definições do século XX, Delvin (2002), diz que a matemática é a ciência dos padrões ou regularidades, poder-se-ia concluir que fazer matemática é examinar padrões abstratos, tanto reais como imaginários.

Há muito tempo busca-se um consenso quanto à definição do que é a Matemática, por este motivo o presente trabalho dissertativo de Pesquisa Científica inicia-se investigando como estas concepções sobre a natureza do conhecimento matemático refletiu-se sobre as escolas filosóficas matemáticas (ismos) chegando à educação matemática.

Neste contexto mais abrangente de Matemática, a ciência dos padrões ou regularidades, a Modelagem Matemática apresenta-se como uma alternativa de ensino dinâmica e criativa, contrapondo-se ao ensino tradicional. Enquanto que no ensino tradicional é cobrado predominante o formalismo matemático, ou seja, a execução de algoritmos e demonstrações baseadas no raciocínio lógico dedutivo axiomático, pouco valorizando-se uma matemática menos formal como o raciocínio intuitivo não baseado em demonstrações, onde inúmeras vezes estas observações empíricas nas avaliações não são consideradas como saber matemático. Por intermédio da Modelagem Matemática, os estudantes são induzidos a investigar e problematizar, tendo as soluções interpretadas na linguagem usual. Logo, trata-se de uma atividade que trabalha com previsões de tendências, vai muito além de trabalhar com simples expressões (manipulações com símbolos), necessita de abstrações e generalizações. Entende-se ser este um procedimento que requer domínio de técnicas matemáticas, conhecimentos prévios, percepção de padrões e postula igualmente à reformulação de ideias antigas em novas ideias.

Sobre o aspecto que a Modelagem Matemática é uma alternativa de ensino, atualmente há diversas obras como de Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) que discorrem a respeito de seus objetivos e benefícios relativos à educação. Nessas obras verifica-se a abordagem de conteúdos específicos igualmente a compreensão dos mais diversos fenômenos do nosso cotidiano, entre outras especificidades. Nota-se, todavia, certa carência de trabalhos, que abordem o tipo de matemática a ser especialmente trabalhada no desenrolar das atividades de modelagem. Assim sendo, este trabalho objetiva esclarecer as características do conhecimento matemático, procurando identificar de que modo as atividades de modelagem dão sua contribuição para a construção do conhecimento matemático pelo educando. Assim, pretende-se observar que tipo de conhecimento matemático é construído através dessa modalidade de ensino por meio de ação não compartilhada, ou seja, um conhecimento construído apenas pelos alunos, fazendo-se não somente a análise das atividades a serem desenvolvidas, como também da aplicação das alternativas de tarefas executadas pelos alunos com o intuito de observar as possibilidades de exploração conceitual dos problemas modelados, para dessa forma constatar a obtenção dos conhecimentos a que se propõe.

Diante deste método de ensino-aprendizagem, a Modelagem Matemática, é importante enumerar os tópicos matemáticos que ela abrange nessas atividades e, consequentemente, a forma com que são trabalhados.

Para o desenvolvimento deste trabalho, foram utilizadas distintas metodologias: pesquisa bibliográfica e pesquisa de campo, ocasião em que um modelo foi desenvolvido com os alunos tendo a finalidade de realizar as observações. A observação é direta e sistemática, uma vez que, segundo Marques, H. R. et al. (2006, p.39), o interesse docente estabelecia como foco prioritário captar o nível de compreensão e habilidade dos alunos em resolver uma situação-problema, usando para isso, conforme acima citado, a Modelagem Matemática. A pesquisa bibliográfica efetuada teve como base os mais diversos autores da área da Modelagem Matemática. Nela, encontra-se uma retrospectiva histórica que leva à compreensão das transformações sofridas pela Matemática até chegar ao que hoje chamamos de atividades de modelagem, além de enumerar as principais características que compõem o saber Matemático.

A partir deste embasamento teórico, a modelagem foi aplicada considerando um anseio da turma do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública situada na cidade de Erechim, no Rio Grande do Sul. A mencionada turma buscava um método para obter o maior lucro possível na arrecadação de fundos para viabilizar o evento de sua formatura.

Um questionário para fins de contextualização, foi aplicado antes do desenvolvimento deste projeto com o propósito de identificar os possíveis saberes matemáticos que surgiriam a partir da realização das atividades de Modelagem Matemática. As tarefas tiveram início com a apresentação do tema e o desenvolvimento de oficinas de matemática, como ferramentas de suporte pedagógico. As atividades foram desenvolvidas em encontros em que a intervenção do professor foi mínima, limitando-se apenas a breves momentos, quando seu objetivo é unicamente direcionar os estudantes à reflexão sobre algum aspecto importante do modelo ou então quando para mediar conflitos de opiniões entre os estudantes, pois na análise final de cada modelo, os estudantes realizam debates, numa interação estudante-estudante, argumentando a respeito da construção dos referidos modelos. Dessa forma, durante a pesquisa de campo, observou-se uma crescente desenvoltura desses estudantes ao participarem dos debates propostos, igualmente esse fato foi constatado em outras atividades, tais como ao responder questionários, até mesmo em relação ao uso de mídias como fotografias e outras.

Seguindo essa linha de pensamento, o presente trabalho de pesquisa tem sua estrutura organizada em cinco capítulos. Após esta introdução, a fundamentação teórica está desenvolvida no Capítulo II, onde se resgata as principais filosofias matemáticas para a educação e suas características essenciais que são encontradas em atividades de modelagem na perspectiva dos mais diversos autores. São também nesse capítulo explanados problemas internos e externos da matemática, bem como a influência dos mesmos na educação até os dias atuais. No Capítulo III, são apresentados os procedimentos metodológicos utilizados, com resumido esclarecimento sobre estratégias usadas na abordagem das atividades desenvolvidas e seus principais pontos, ou focos estratégicos de observação durante o desenvolvimento das atividades propostas. No Capítulo IV, constam resultados obtidos por meio da pesquisa, acompanhados da análise de dados coletados. Por último, no capítulo de Considerais Finais são apontadas as principais características matemáticas encontradas nesta atividade de modelagem, com o objetivo de responder ao problema da pesquisa.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA

Ao longo da história, buscou-se a consolidação da matemática como ciência. Em diversos períodos históricos surgiram ideias e propostas na busca pelo reconhecimento científico. A sociedade demonstrava inquietação quanto à educação de seus jovens. Segundo D'Ambrosio, Borba e Araújo (2013), os primeiros registros sobre essa preocupação, principalmente com a educação matemática, são encontrados a partir da República VII, de Platão. No final do século XIX, Escolas Matemáticas fundadas em filosofia surgiram na busca de fundamentos seguros para o conhecimento matemático. Porém, essas escolas têm desdobramentos posteriores, na medida que os educadores se inspiram nestas ideias para formatar a matemática escolar. No âmbito da educação, Meyer, Caldeira e Malheiros (2013) destacam as escolas Logicistas, Intuicionistas, Formalistas e Hipoteticistas, às quais convergiam adeptos de renome. No início do século XX, reflexões de natureza filosófica sobre a educação, segundo Borba e Araújo (2013), e o matemático Felix Klein[1], que defendia uma base mais psicológica do que sistemática, começam então a dar forma para a Educação Matemática, e esta passaria a nortear o processo de ensino-aprendizagem, até os dias de hoje, com a consolidação da Educação Matemática como uma área extremamente importante para o processo de ensino-aprendizagem, fundamentada em novos conhecimentos e estudos de outras áreas, como a psicologia. Cada uma dessas escolas filosóficas se manifesta das mais diferentes formas na Educação Matemática. Suas características são invocadas no modo de como são abordados determinados conteúdos matemáticos e também na atitude docente diante da adversidade de uma turma (explicações, questionamentos, dúvidas, argumentação, metodologia, etc). Portanto, "o que podemos considerar é que a Matemática tal como a conhecemos hoje emerge das contribuições deixadas outrora pelo modo de pensar dos filósofos e pelas reestruturações internas da Ciência Matemática. E que o ensino de Matemática não é isento" (LOUREIRO; KLUBER, 2015, p. 13).

[1] Felix Christian Klein (1849-1925) foi um matemático alemão, conhecido, também, pelas suas pesquisas sobre o ensino de geometria por meio de transformações.

2.1.1 Logicismo

O Logicismo sustenta que a Matemática é redutível à lógica, ou nas palavras de Benacerraf e Putnam, "é apenas uma parte da lógica" (BENACERRAF; PUTNAM, 1983, p. 41 nossa tradução).

Frege[2] foi o primeiro a investir neste ponto de vista, aderindo às ideias de Georg Cantor[3] e desenvolveu uma linguagem formal, em 1884, com o livro "Uma Investigação Lógico-Matemática sobre o Conceito de Número", traduzindo, de forma concreta, a "interpretação lógica da Matemática", a qual afirmava que número não é um atributo de objeto, mas um conceito. Muitas vezes, na sua prática, professores tentam contextualizar problemas de aritmética, colocando números aos objetos, como na seguinte frase, por exemplo, "5 pessoas mais 7 pessoas", verifica-se claramente uma distorção de ideias ao deixar parecer que se está interessado no objeto "pessoas", quando, na realidade, o verdadeiro interesse está no conceito do número, ou seja, para logicistas como Frege, não importa se o objeto é uma pessoa, maçã ou até um outro número, independe do sujeito, pois pouco altera seu significado.

Os logicistas defendem a tese de que, apesar de "5 + 7 = 12, e leis como a da associatividade da adição são confirmadas de tantas maneiras pelas inúmeras aplicações que delas fazemos diariamente" (FREGE, G., 1984, p. 205, tradução Santos), sempre que é possível demonstrar, então, fazê-la e, de preferência, por indução[4] , não apenas com a finalidade de eliminar qualquer sombra de dúvida, como também proporcionar a compreensão da relação de dependência entre as verdades. Portanto, professores que lidam principalmente com demonstrações, inevitavelmente, devem transitar dentro do campo do logicismo.

> Segundo Frege, os números (cardinais) e as demais noções fundamentais da aritmética podem ser definidas com exatidão, em última instância, levando-se em conta apenas as noções da lógica formal, e as proposições acerca dos números podem ser derivadas a partir dos axiomas e das regras de transformação. (FREGE, JOHANN GOTTLOB, 2009, p. 20 tradução Alcoforado).

---

[2] Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925) foi um matemático alemão, um dos principais criadores da lógica matemática moderna.

[3] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), foi um matemático russo, conhecido por ter elaborado a moderna teoria dos conjuntos.

[4] Indução matemática ou princípio de indução é um método de prova matemática usado para demonstrar a verdade de um número **n** infinito de proposições.

Assim, Frege pensou que havia conseguido provar a Matemática, onde a lógica seria o seu princípio elementar e seus teoremas poderiam ser provados a partir de axiomas lógicos que evitavam contradições, até Russell[5] discordar, "dizendo que nem sequer havia sido provado que a Matemática era consistente" (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2013, p. 20). Apesar do logicismo de Frege ter um objetivo diferente do logicismo de Russell, no qual seu foco voltava-se para aritmética elementar e análise, seu trabalho teve grande influência para Russell e Whitehead[6].

Almeida (2016) destaca que na obra "Principia Mathematica", os ingleses matemáticos Whitehead e Russell tentaram reduzir toda a Matemática clássica à lógica, produziram, então, uma sistematização da lógica, reconstruindo a Matemática a partir dessa ideia. Para tal façanha, os logicistas teriam que mostrar que a Matemática conhecida na época poderia ser deduzida da teoria dos conjuntos, entretanto o próprio Russell acabou esbarrando no axioma da infinidade e no axioma da escolha, gerando contradições (paradoxos de Russell[7]) na teoria dos conjuntos.

Os paradoxos de Russell mostraram pois, que "a lógica intuitiva, longe de ser mais segura do que a matemática clássica, era, em verdade, muito mais traiçoeira, pois podia conduzir a contradições de uma maneira que nunca acontece na aritmética ou na geometria" (DAVIS; HERSH, 1985, p. 374).

Dessa forma, o programa proposto encontrou o seu algoz, atualmente; graças a Frege, Russell, Whitehead e outros mesmo com o insucesso de alguns paradoxos ficou impossível traçar uma linha entre a Matemática e a lógica, "a lógica tornou-se mais Matemática e a Matemática tornou-se mais lógica" (BENACERRAF; PUTNAM, 1983, p. 173, nossa tradução). Apesar dessa grande contribuição para a lógica e a Matemática moderna, o logicismo não só fracassou por não ter conseguido escrever todos os axiomas em proposições lógicas, mas também porque afastou o conhecimento do mundo empírico e intuitivo, ou seja, o problema era relacioná-lo com o mundo físico. De acordo com esse posicionamento, muitos matemáticos achavam "que o abandono da intuição havia ido longe demais, que os matemáticos haviam se tornado excessivamente formalistas e que urgia recolocar a matemática sobre as bases seguras da verdade manifesta na intuição imediata" (SILVA, 2007, p. 134).

---

[5] Bertrand Arthur William Russell, terceiro conde Russell (1872-1970) foi um filósofo britânico, além da grande influência no século XX em outras áreas, ficou também conhecido por seu trabalho de lógica matemática e filosofia analítica.

[6] Alfred North Whitehead (1861-1947), foi um filósofo e matemático britânico, pesquisador na área da filosofia da ciência, principalmente no que diz respeito aos fundamentos da matemática.

[7] "Surgiu da crença de que qualquer atributo razoável – qualquer descrição verbal que parecesse fazer sentido – poderia ser usado para definir um conjunto [...]". (DAVIS; HERSH, 1985, p. 373).

2.1.2 Intuicionismo

Simultaneamente, surge uma das principais correntes do construtivismo que é o intuicionismo, que vem da palavra "intuição" utilizada por Kant[8] para "consciência imediata", que ao contrário do logicismo, não aceitava a lógica como lei para desenvolver as demonstrações matemáticas, porém que todo conhecimento deveria ser construído de forma intuitiva, ou seja, "a Matemática deveria ser considerada atividade mental e não um conjunto de teoremas" (SNAPPER, 1979, p. 210).

> Intuicionistas consideravam o ser humano dotado de uma intuição primeira sobre os números naturais. Por isso defendiam uma reelaboração da Matemática desde seus fundamentos. Partindo sempre da intuição, os axiomas, os teoremas, enfim, toda a Matemática deveria ser reconstruída (MONDINI, 2008, p. 5).

Assim, Snapper (1979) faz notar a importância de observar que a construção intuicionista permite construir o conjunto inicial dos números naturais finitos $N=\{1,2,\ldots\}$, um a um, passando de forma "indutiva e eficaz", não permitindo a construção do conjunto fechado, ou seja, não se pode construir o 3 se não passou por todas as etapas mentais para construir o 1 e o 2. De acordo com Silva (2007, p. 148), para os intuicionistas, "a matemática deveria ser fundada nesta intuição básica: um instante temporal sucedendo outro (e assim sucessivamente)".

Desta forma, para os intuicionistas a posição em relação ao infinito era diferente dos logicistas, primeiro porque não é possível construí-lo mentalmente, e segundo, posto que, apesar da "lógica tradicional, mesmo expressa em forma simbólica, nasceu da consideração de conjuntos finitos, não podendo ser imprudentemente aplicada a conjuntos potencialmente infinitos" (CAJUEIRO, 2011, p. 184). Logo, Luitzen E. J. Brouwer[9] , líder e principal pensador deste movimento intuicionista, recusava a existência "de qualquer objeto matemático que não pudesse ser construído (ele preferia dizer edificado) na consciência a partir de vivências mentais

[8] Immanuel Kant (1724 —1804) foi um filósofo prussiano. Amplamente considerado como o principal filósofo da era moderna, Kant operou, na epistemologia, uma síntese entre o racionalismo continental (de René Descartes e Gottfried Wilhelm Leibniz, onde impera a forma de raciocínio dedutivo), e a tradição empírica inglesa (de David Hume, John Locke, ou George Berkeley, que valoriza a indução).

[9] Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) foi um matemático holandês, fundou o intuicionismo matemático, como oposto da linha dominante do formalismo.

muito específicas” (SILVA, 2007, p. 148). Questionando, assim, o uso que a Matemática clássica faz da lógica para gerar teoremas e, principalmente, acreditando em verdades desconhecidas como por exemplo (Reductio ad absurdum), que provava a suposição da existência de um objeto por uma contradição.

Esse discurso pela existência de objetos matemáticos desde que eles pudessem ser construídos e essa aversão pelos teoremas, criou antipatia por boa parte dos matemáticos clássicos, os quais achavam belas essas demonstrações; não obstante, para Dummett (BENACERRAF; PUTNAM, 1983, p. 98, nossa tradução) os intuicionistas insistiam que “um indivíduo não pode se comunicar com o que ele não pode observar e de nada adianta usar símbolos ou fórmulas para se comunicar se a associação é desconhecida por ele, não teria como torná-lo ciente disso”, assim, para Brouwer, “intuição não é exatamente o mesmo que a aplicação de um algoritmo porque a última pode ser feita mecanicamente, intuição exige entendimento”. (ESPINOZA, 2003, p. 109, nossa tradução).

Apesar de que essa filosofia, segundo Silva (2007, p. 150, nossa tradução), “condiciona e consequentemente limita todo processo construtivo matemático”, uma vez que seria bastante restrito o que a Matemática intuicionista consideraria como existente. Costa (2008) questiona que isso não implicaria na possibilidade de outras aplicações, como “cálculos de problemas”.

De acordo com Snapper (1979), os intuicionistas não estavam interessados em justificar a Matemática clássica, o principal objetivo era dar uma definição válida e esperar depois o que sairia dela, ou seja, Meyer, Caldeira & Malheiros (2013) observam que, muitas vezes, professores agem de forma intuicionista, principalmente quando trabalham, por exemplo, com triângulos, depois quadrados, lançando, após, a pergunta à classe: “O que vocês acham que vai acontecer com o pentágono?” E assim até as próximas figuras. Muitos alunos conseguem “adivinhar” a resposta, mas sem provar nada formalmente, ou seja, “eles não desenvolveram o tratado lógico ou formal para chegar à conclusão.” (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2013, p. 21).

Costa (2008, p. 165), porém, sintetiza da seguinte forma: “a lógica intuicionista evidencia que há lógicas complementares e alternativas, dependendo das regiões objetivas que se investigam e das diretrizes que norteiam essas investigações.”

2.1.3 Formalismo

Distinto dos intuicionistas, para tentar responder aos paradoxos enfrentados pelos logicistas, segundo Silva (2007), no final do século XIX, que abalavam os alicerces da base da Matemática, surgem os formalistas liderados por Hilbert[10] , quando a ideia era, conforme Snapper (1979), formalizar os vários ramos da Matemática e, em seguida, provar matematicamente que cada um deles é livre de contradições.

Para isso, seria necessário formalizar as teorias axiomatizadas. Mas para fins de compreensão é importante diferenciar axiomatização de formalização. Formalização, Costa (2008, p. 37) esclarece que é "o sistema grafomecânico obtido", em outras palavras, é a escrita propriamente dita e sua sintaxe. Já a axiomatização está presente na organização de qualquer Ciência real ou teórica, não só necessariamente em ciências lógico-matemáticas, mas como da natureza (Física, Biologia, …), como nas humanas (Psicologia, Economia, …) e desempenha um papel relevante para estabelecer parâmetros iniciais.

Para compreender melhor esta diferença, Snaper (1979) esclarece que axiomatização é o que Euclides[11] fez com a geometria plana e Peano[12] com a aritmética, ou seja, definiram explicitamente os entes primitivos. No caso de Euclides, por exemplo, ponto, reta e plano serviriam de base para axiomas e teoremas, como no postulado (axioma) muito famoso que utiliza os entes citados: "por dois pontos passa uma única reta". Mas essa axiomatização usada na geometria Euclidiana, Silva (2007) esclarece que não era completa, pois:

> Em suas demonstrações Euclides lançava mão de verdades "intuitivas" que não se encontravam entre os axiomas. Além disso, os métodos de derivação eram antes métodos de construção que propriamente métodos lógicos de demonstração. Por isso, a axiomática euclidiana não era, a rigor, um sistema lógico, muito menos lógico formal. (SILVA, 2007, p. 138)

Para os formalistas, a axiomatização existente não era suficiente para se livrar de contradições, para isso seria necessária uma formalização com uma linguagem explicitamente

[10] David Hilbert (1862-1943) foi um matemático alemão, um dos mais notáveis matemáticos cujas pesquisas são fundamentais em vários ramos da matemática atual.

[11] Euclides de Alexandria (Século III antes de Cristo), ficou conhecido como pai da geometria e por reunir toda a Matemática do seu tempo na obra Os Elementos.

[12] Giuseppe Peano (1858-1932) foi um matemático italiano, um dos fundadores da lógica matemática, responsável pela axiomatização padrão dos números naturais e a formalização da indução Matemática.

clara, manipulada segundo regras bem definidas, gerando assim demonstrações rigorosas, tornando a formalização não só necessária, mas também obrigatória.

> Uma teoria axiomático-dedutiva interpretada pode ou não ser formal, mas uma teoria não interpretada é sempre formal, pois se os termos da teoria não significam nada, só podemos manipulá-los mediante um sistema dado de regras explícitas. (SILVA, 2007, p. 186).

Snapper (1979, p. 214) destaca que vários ramos da Matemática foram formalizados tanto pelos logicistas quanto pelos formalistas, possibilitando gerar até certa confusão na hora de tentar distingui-las, mas as razões entre elas eram inteiramente diferentes. Os logicistas queriam usar tal forma para “mostrar que o ramo da matemática em questão pertence à lógica” e os “formalistas queriam usá-la para provar matematicamente que esse ramo está livre de contradições”, ou seja, usar a própria Matemática.

Para os formalistas os objetos matemáticos não existiam nem dentro e muito menos fora da mente humana, e esse rigor por essa linguagem formal voltava novamente o foco para a manipulação de símbolos desvinculados do empírico. Porém isso não significa que as expressões simbólicas não tenham significado, “nem as deduções como meros encadeados de expressões em que nenhuma verdade é transmitida” (SILVA, 2007, p. 146). Pelo contrário, na verdade as regras de um sistema formal foram feitas para atalhar o trabalho de pensar, ou seja, evitar processo dedutivo. Silva (2007) coloca: A soma de dois números grandes no sistema decimal é resolvido facilmente pelo algoritmo da soma, muito mais rápido e “seguro” do que somar intuitivamente.

> Podemos considerar o próprio sistema formal como uma estrutura matemática extremamente simples; suas entidades (os sinais do sistema) estão associadas com outros frequentemente muito complicados, estruturas matemáticas. Desta forma, formalizações podem ser levada a cabo dentro da matemática como uma ferramenta poderosa. (BENACERRAF; PUTNAM, 1983, p. 68, nossa tradução).

Fica claro e elementar perceber a enorme importância da escola formalista para a Matemática atual, principalmente nas práticas pedagógicas de muitos professores que trabalham com a linguagem matemática. “Foi nesta escola que aflorou a lógica da Matemática moderna e suas diversas ramificações, tais como teoria do modelo, a teoria da função recursiva, etc" (SNAPPER, 1979, p. 215, nossa tradução).

Formalismo, como logicismo e intuicionismo, são fundamentadas em filosofia, entretanto as raízes filosóficas do formalismo são um pouco mais escondidas que as demais, ou seja, Silva explica que uma demonstração num sistema formal intuicionista é possível confrontá-lo com a realidade, isto é, "uma conclusão verdadeira num sentido forte, epistemologicamente relevante, de verdade" (SILVA, 2007, p. 165). Por outro lado, usando só a lógica clássica, teremos uma conclusão apenas verdadeira em si mesma, por isso muitos matemáticos concluíram que o programa de Hilbert não poderia ser levado a cabo, pois, segundo eles, a Matemática não é capaz de provar a sua própria liberdade de contradições, gerando assim a terceira crise.

2.1.4 Hipoteticismo

Nas primeiras décadas século XIX, a crise e o conflito de opiniões sobre a Educação geraram debates envolvendo matemáticos puros, aplicados e pesquisadores sobre a importância de métodos para o ensino da Matemática. A Educação Matemática começa a ocupar papel central nos estabelecimentos de ensino graças aos novos estudos como do matemático alemão Felix Klein que se fixava mais em bases psicológicas do que sistemáticas, ou seja, era necessário apresentar a Matemática de uma forma intuitivamente compreensível.

Com a Educação Matemática em alta e a consolidação da interdisciplinaridade, estudiosos da época propuseram sugestões como o uso de materiais concretos para o auxílio da geometria abstrata, ou o programa proposto pelo americano Eliakim H.Moore[13] , que buscava:

> [..] um sistema de instrução integrada em matemática e física, baseado em um laboratório permanente, cujos principais objetivos são desenvolver ao máximo o verdadeiro espírito de pesquisa, conduzindo à apreciação, tanto prática como teórica, dos métodos fundamentais da ciência. (BORBA; ARAÚJO, 2013, p. 14).

[13] Eliakim Hastings Moore (Marietta, 26 de janeiro de 1862 — Chicago, 30 de dezembro de 1932), matemático estadunidense, reformulou os axiomas de Hilbert para a geometria, transformando linhas e planos em noções definidas.

Era um campo fértil para o surgimento de uma nova tendência conhecida como Hipoteticismo, onde os seguidores deste movimento tratam a Matemática como uma ciência em construção, partindo de problemas e conjecturas que, através de uma análise crítica, é relacionada com as atividades humanas.

Por isso, o principal autor do Hipoteticismo, Lakatos[14] , era "contrário à noção clássica de desenvolvimento da Matemática como uma acumulação contínua de verdades estabelecidas, que sublinhava o caráter falível da Matemática" (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2013, p. 20), ou seja,

> [...] Em vez de apresentar um sistema construído a partir de seus primeiros princípios, ele apresenta um choque de opiniões raciocínios e contra-raciocínios. Em vez de uma matemática esqueletizada e fossilizada, ele apresenta a matemática crescendo a partir de um problema e uma conjectura, com uma teoria adquirindo forma sob os olhos, no calor do debate e da discordância [...] (DAVIS; HERSH, 1985, p. 338).

Uma das atividades que permitem a prática Hipoteticista é a Modelagem Matemática, na qual é "a área que se convencionou chamar de Matemática Aplicada, e no interior da qual surgiram os primeiros conceitos e procedimentos em relação ao que caracteriza uma atividade de Modelagem Matemática" (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p. 12).

A Modelagem proporciona um "roteiro" diferente das propostas deixadas pelo Logicismo e Formalismo que apresentam a Matemática como algo acabado e pronto no seu sistema rigoroso, desvinculando assim, muitas vezes, o ensino e aprendizagem do contexto do aluno. Uma vez que a aprendizagem de um teorema que segue um caminho inverso da sua construção natural: "enunciado → demonstração → aplicação", a proposta seria reinventar este resultado com os alunos, refazendo o caminho original, "seguindo o processo da modelagem e conjugando verdadeiramente o binômio ensino-aprendizagem" (BASSANEZI, 2009, p. 36). Esse ponto de vista é possível ao se trabalhar com modelos matemáticos, e a Matemática se torna uma caixa de ferramentas, constatando-se que através do uso dela é possível analisar, estudar e compreender a realidade, não deixando de lado a importância da sua axiomatização. Nessa perspectiva Meyer, Caldeira, Malheiros (2013, p. 22) reconhecem que "em cada um de nós, professores, existe um pouco de cada uma dessas tendências, segundo o momento, a

[14] Imre Lakatos (1922-1974) foi um filósofo da Matemática e da ciência húngaro, responsável pela obra Proofs and Refutations, considerada por 15 anos um clássico proibido entre os matemáticos.

necessidade, o comportamento dos alunos e o tema de interesse do professor e da classe (interesse esse que pode ser matemático ou não)".

Portanto, dentro do trabalho docente, apesar de hoje a Matemática transitar por todas as tendências, a escola formalista é a que mais prevalece nas práticas escolares. E a consequência disso, segundo Bassanezi (2009, p.17), são os baixos índices de desempenho e principalmente a dificuldade em observar a importância da Matemática em sua volta, na sua transformação como pessoa e, principalmente, aplicá-la no meio onde vive. A Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica pode apresentar algumas dificuldades para os cursos regulares vencerem seus programas e também pode esbarrar na formação heterogênea de uma classe, ou seja, isso também pode ser "um obstáculo para que alguns alunos relacionem os conhecimentos teóricos adquiridos com a situação prática em estudo" (BASSANEZI, 2009, p. 37), mesmo assim não deixa de ser uma nova opção para motivar a aprendizagem dos alunos. "Embora haja diferentes escolas e algumas correntes relativamente opostas, muito da Matemática que se desenvolveu na primeira metade do século seguiu do ideal de colocá-la num contexto lógico-dedutivo" (D'AMBROSIO, 1986, p. 31–32).

2.2 FINALIDADE DA MATEMÁTICA

A finalidade da Matemática vai depender de como a utilizarmos. Ela pode ser utilizada somente no seu próprio campo ou em outros campos, como da ciência à tecnologia. Davis & Hersh (1985, p.108) ilustram que um pedagogo poderá dizer-nos que a Matemática é útil para ensinar a pensar e racionalizar. Um arquiteto poderá dizer-nos que conduz à percepção e à criação da beleza. Um empresário, poderá dizer-nos que é para ter um melhor controle da empresa. Um matemático, poderá dizer-nos que a Matemática é útil se aplicada dentro da própria Matemática.

Assim a finalidade, segundo Bassanezi (2009, p. 36), poderia ter dois caminhos: o da "Matemática Pura" e da "Matemática Aplicada", sendo que "o primeiro se interessa mais pelas formalizações teóricas, enquanto o segundo se dedica às suas aplicações".

Dentro da Matemática Pura, ou seja, quando a Matemática é usada ou aplicada a si mesma – pode-se afirmar que é para gerar mais Matemática. Por exemplo, as equações do 2º grau, cujos primeiros registros datam de mais de 4 mil anos, mostram que elas eram utilizadas para resolver problemas de área e perímetro. Euclides, na sua obra "Os Elementos", as utilizava também na resolução do segmento áureo[15] . Hindus e árabes, através das suas formas geométricas e "receitas" introduziram o método de completar quadrados e finalmente a forma de como utilizamos hoje essas equações do 2º grau, através de letras para representar coeficientes, introduzida por Viète[16] e de Descartes[17] que chamamos, respectivamente, de equação algébrica e de analítica.

> Uma aplicação da teoria A à teoria B, na matemática, significa então que os materiais, a estrutura, as técnicas, as percepções de A são usados para iluminar ou deduzir inferências sobre os materiais e as estruturas de B. Se uma parte é usada ou está relacionada com uma outra parte da matemática, então este tipo de aplicação é frequentemente chamado "puro". (DAVIS; HERSH, 1985, p. 110)

Como "grande parte do conhecimento matemático tem sido construído somente dentro do terreno da Matemática", lembra Bassanezi (2009, p. 172), e de um modo geral os intitulados "puristas" (Formalistas) não estão interessados na sua utilização externa, nesta primeira corrente, a finalidade da Matemática fica direcionada para a própria Matemática. Por outro lado, quando utilizamos a Matemática fora dos seus interesses, ela é geralmente chamada de Matemática Aplicada. Aqui a finalidade é mais abrangente, o "matemático aplicado estuda e aprende Matemática para resolver algo. Ele é um profissional tanto quanto o matemático dito puro" (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2013, p. 35). Nesta corrente, segundo Davis e Hersh (1985), trabalhar com aplicações é muito mais difícil do que trabalhar com Matemática Pura, ou seja, como ela se torna um meio para os mais diversos fins, o "cenário é mais amplo, os fatos são mais numerosos e mais vagos" (DAVIS; HERSH, 1985, p. 116).

De qualquer forma a Matemática "existe primariamente para ajudar o homem a compreender e dominar o mundo físico e, até certo ponto, os mundos econômicos e social. A matemática serve a fins e propósitos. Se ela não tivesse esses valores não receberia nenhum lugar no programa escolar." (KLINE, 1976, p. 102).

[15] Também conhecida como razão de ouro, divina proporção, divisão de extrema razão ou proporção em extrema razão), desde a Antiguidade até hoje é usada na arte.

[16] François Viète (ou Vieta), (1540 - 1603), foi um matemático francês. Apesar de utilizar a Matemática como um passatempo, em 1571 publicou o Canon mathematicus, que devia servir de introdução trigonométrica e vinte anos mais tarde publicou In artem analyticum isagoge que foi o mais antigo trabalho sobre álgebra simbólica.

[17] René Descartes (1596 - 1650) foi um filósofo, físico e matemático francês. Chamado de "o fundador da filosofia moderna" e o "pai da matemática moderna", é considerado um dos pensadores mais importantes e influentes da História do Pensamento Ocidental.

2.3 PROBLEMAS INTERNOS (MATEMÁTICA PURA)

2.3.1 Simbolismo

Para D'Ambrosio (1986, p. 103), "conceitos matemáticos sempre dependeram de métodos de cálculo e métodos de escrita". Seria muito complicado transmitir alguma ideia matemática sem a utilização de alguma forma simbólica simples ou sofisticada para representá-la.

Figura 1 - Osso de Ishago

Fonte: http://lichsuvn.net/forum/showthread.php?t=21045&p=382680

Cerca de 20 mil anos atrás, segundo Stewart (2016), nos primórdios do surgimento da Matemática, o homem já procurava alguma forma de registrar e transmitir essa ideia (Figura 1. Alguns cientistas defendem que os agrupamentos tinham um caráter funcional, ou seja, uma compreensão matemática que iria além da contagem, como o estabelecimento de um sistema numérico.

De lá para cá muita coisa mudou. Hoje, o primeiro contado "formal" que temos com os símbolos matemáticos são com números do sistema decimal hindu-arábico 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9. Em seguida, principalmente dentro das instituições de ensino, damos alguns passos além e aprendermos a manipulá-los; e símbolos novos são apresentados para esses registros.

Esses símbolos são tão ricos de significados, que, por exemplo, para o sinal + não importa a língua que se usa para referir a ele, se é o português como "mais", inglês "more", catalão "més" e etc, seu sentido permanece. Dessa forma, para D'Ambrosio, na medida em que nos dedicamos a entender esses símbolos, acabamos aprendendo a ler, falar e, principalmente, a nos comunicar em uma língua nova, muito além do que simplesmente apenas fazer contas.

> [...] o fato de a matemática ser uma linguagem (mais fina e precisa que a linguagem natural) que permite ao homem comunicar-se sobre fenômenos naturais, conseqüentemente, ela se desenvolve no curso da história da humanidade desde os "sons" mais elementares, e, portanto intimamente ligada ao contexto sociocultural em que se desenvolve – por isso falamos em matemática grega, matemática hindu, matemática pré-colombiana. (D'AMBROSIO, 1986, p. 35).

Como toda linguagem, precisamos de muitos símbolos ou uma cadeia deles para exprimir as mais diversas ideias. Davis e Hersh (1985) destacam a riqueza de significados de alguns grupos desses símbolos para a Matemática. Temos símbolos com sentidos operatórios $+, -$, $\times\ (ou\ .),\ \div \left(ou -\right),\ \sqrt{\ }$. Outros para agrupamentos $(\ ), \{\ \}, [\ ]$. Outros para estabelecer relações $=, \neq, \leq, \geq, <, >, \sim, \Leftrightarrow$ e assim por diante. Se aprofundarmos mais um pouco o conhecimento nessa literatura, iremos nos deparar com letras ordinárias que assumem um contexto completamente diferente, como incógnitas ou variáveis.

Poderíamos destacar mais símbolos, como os símbolos usados em cálculo $\frac{\delta}{\delta x}, lim, dx, \int, \iint, \Sigma, \infty$ entre muitos outros. A grande utilidade, é que os símbolos ocupam papel fundamental para garantir a precisão e "clareza de abreviar", ou seja, é essa forma de escrita que "garante" o discurso matemático. "Poupando ao cérebro todo trabalho desnecessário, uma boa notação deixa-o livre para concentrar-se sobre problemas mais avançados e, de fato, aumenta o poder metal da raça" (WHITEHEAD, 1956 apud DAVIS; HERSH, 1985, p. 155).

Todo esse simbolismo matemático, conclui Mondini e Bicudo (2010, p. 48), é "como um meio de escrever, compreender e comunicar as ideias da Matemática, e não simplesmente como uma maneira de traduzir ideias da língua materna para a linguagem da Matemática ou da Matemática para a língua materna."

2.3.2 Abstração

Abstração é aquele momento que a Matemática deixa de lado o objeto e concentra-se apenas no número, ou seja, deixamos de lado o mundo real e ficamos no mundo mental.

“Acredita-se geralmente que a matemática teve início quando a percepção de três maçãs, libertou-se das maçãs e tornou-se o inteiro três” (DAVIS; HERSH, 1985, p. 157). Dessa forma, segundo Alves (1981), o conceito abstrato deixa de se ancorar “nas muletas das coisas” (aqui maçãs) e pode ser aplicado nas mais diversas situações.

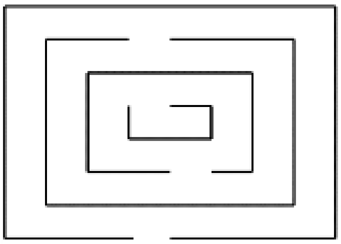
Abstração é uma ferramenta muito útil, pois não precisamos das maçãs para imaginar o que acontece se adicionarmos mais uma nova maçã, ou seja, vale para pessoas, coisas e etc. Para Costa (2008), essa abstração é o que garante a consistência da Matemática, a sua aplicabilidade em qualquer outra área do conhecimento.

> A lógica matemática usual, encarada como sistema fechado, não foi e nem poderá ser destruída pelas ciências reais. Ela tem o seu domínio próprio de validade, não apenas a título de sistema abstrato, como também uma vasta gama de aplicações. (COSTA, 2008, p. 136).

Para fixar melhor a ideia de Costa (2008), o problema proposto por Davis e Hersh (1985), que pega duas figuras (Figuras 2 e 3), a princípio completamente diferentes, mas através de abstração é possível encontrar um aspecto que são completamente idênticas.

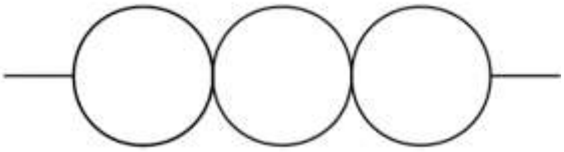
Imagine que você deseja ir até a parte mais central do labirinto (Figura 2), sem cruzar duas vezes pelo mesmo lugar.

Figura 2 – Desafio do labirinto



Fonte: Davis e Hersh (1985, p. 162)

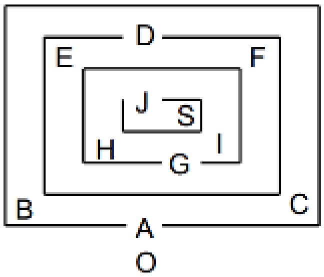
Figura 3 – Figura Auxiliar



Fonte: Davis e Hersh (1985, p. 162)

Para facilitar renomeie o labirinto (Figura 4), e a descrição poderá ser:

Figura 4 - Labirinto demarcado

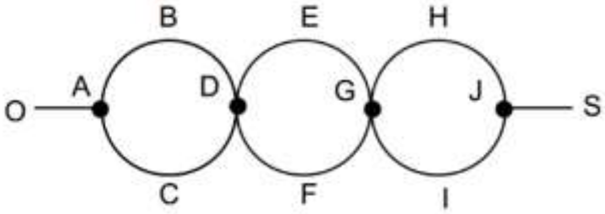


Fonte: Davis e Hersh (1985, p. 162)

Do exterior O, entre na porta A, ela conduzirá a dois caminhos, B ou C, que ambos o levarão para a porta D; a porta D conduzirá a dois caminhos, E e F, que ambos o levarão para a porta G; a porta G levará a dois caminhos, H e I, que ambos o levarão até a porta J. Chegando assim na sala S.

Se você fizer o mesmo processo com a figura 3, teremos (Figura 5):

Figura 5 - Solução análoga ao labirinto



Fonte : Davis e Hersh (1985, p. 162)

Note que para descrever o caminho da Figura 5 é a mesma descrição do verbal da Figura 4, "portanto, idênticas sob este aspecto, e é muito mais fácil, conceitualmente, trabalhar com a segunda" (DAVIS; HERSH, 1985, p. 162). É claro que a Figura 5 ficou mais "pobre" de informações que a primeira, muita coisa se perdeu, mas o que importa é que se encaixa perfeitamente como solução para responder o problema base do interesse, como percorrer o labirinto.

2.3.3 Generalização

Os termos generalização e abstração geralmente são usados de formas equivalentes, todavia existem algumas diferenças. Tome-se como ilustração o problema do labirinto (Figura 2) do livro de Davis e Hersh (1985, p. 161). Na hora que foram nomeados os caminhos do labirinto e esquematizados na Figura 4, foi realizada uma abstração do problema, ou seja, acaba-se abandonando o objeto (labirinto) e passa-se a olhar a solução através de um diagrama (Figura 5). Como diz Bunge (2008, p. 32), foi realizada uma "idealização", um modelo simplificado da solução desse problema. Esta solução (Figura 5) que foi escolhida não poderia ser chamada de generalização, pois não resolve todos os problemas de "labirintos".

Generalização vai muito além de resolver um caso particular, é o que levou a Aritmética para um nível mais avançado, um nível mais abstrato denominado álgebra, tal que essa notação simbólica impulsionou a evolução de vários ramos da Matemática.

Sem essa característica matemática, todos os problemas matemáticos teriam que ser tratados caso a caso, por exemplo, imagine o trabalho que teríamos para somar os 100 primeiros termos de uma PA.

> Generalizar um padrão algebricamente significa compreender uma regularidade identificada em alguns casos particulares estendendo ou generalizando esta regularidade a todos os termos subsequentes e ser capaz de usar essa propriedade comum para propor uma expressão para qualquer termo da sequência. (RADFORD, 2008, p. 84 apud BARBOSA, 2009, p. 66).

Resumindo, o benefício da generalização, segundo Davis e Hersh (1985, p. 166), "é a consolidação das informações. Vários fatos estreitamente relacionados são embalados elegante e economicamente num único pacote". É por isso que na nossa prática docente utilizamos a generalização para ajudar na assimilação e compreensão de conceitos, em vez de ficarmos fazendo várias afirmativas como, um número terminando em zero é divisível por 2, um número terminado em 4 é divisível por 2 e etc. Podemos consolidar da seguinte forma, basta que qualquer número termine em um algarismo par para ser sempre divisível por 2.

Para Barbosa (2009, p. 82), "a generalização desempenha um papel crucial na atividade de qualquer matemático, é uma capacidade inerente ao pensamento matemático", que eleva a nossa compreensão para um caráter mais amplo sobre o que estamos analisando.

2.3.4 Formalização

A formalização, segundo Davis e Hersh (1985, p. 167), "é o processo de adaptar a matemática ao processamento mecânico". É o que assegura as regras sintáticas da linguagem matemática. Essa linguagem formal foi introduzida pela primeira vez por Peano e Frege com o intuito de impor um rigor nas demonstrações matemáticas, ou seja, "aumentar a clareza de conclusão de um raciocínio matemático". A formalização começa com a escolha de:

> […] símbolos convenientes, e as regras de formação, que explicitam as combinações simbólicas […], bem como as regras de inferência, que nos permitem obter novos arranjos simbólicos a partir de outros dados, são enunciadas de modo preciso. (COSTA, 2008, p. 36).

Formalizar é transportar o problema para uma "espécie de jogo grafo mecânico", que é realizado através de "cadeias de transformação de expressões simbólicas, segundo regras explícitas de manipulação de símbolos" (SILVA, 2007, p. 184).

Suponha que se deseja somar os seguintes termos da progressão aritmética 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10. Partindo da generalização que basta somar o primeiro termo com o último termo e multiplicar pela metade da quantidade de termos da sequência, a formalização vai tomando forma quando se deixa de lado o objeto (números) e se escolhe símbolos adequados para essa generalização.

Dessa forma, o primeiro termo passa a ser representado por, $a_1 = 1$, o décimo termo (ou último) por,$a_{10} = a_n = 10,$ e quantidade de termos por, $n = 10$. Com os símbolos devidamente escolhidos, organiza-se com eles uma cadeia de símbolos, conforme com o que se deseja resolver.

$$S = (a_1 + a_n).n/2$$

A partir deste ponto começa "o jogo", ou seja, aplicam-se as regras matemáticas. Esse translado para um contexto abstrato, segundo Bassanezi (2009), é uma economia de linguagem para o pensamento, deixando-se de lado a origem do problema (objeto) e focaliza apenas o problema (encontrar a soma através da sintaxe matemática), independente de quem compõe essa sequência.

> Porém, as expressões simbólicas não precisam ser necessariamente vistas como destituídas de significado, nem as deduções como meros encadeados de expressões em que nenhuma verdade é transmitida. A explicitação das regras de dedução apenas torna desnecessário que o processo dedutivo seja acompanhado a cada passo por uma evidência da correção desse passo. Por assim dizer, as regras de um sistema formal "pensam " por nós [...]. (SILVA, 2007, p. 187)

“Enquanto os leitores humanos demonstram uma aversão insuperável às linguagens formais, os computadores as adoram” (DAVIS; HERSH, 1985, p. 168). O surgimento do computador fez textos em linguagem formal ganharem o codinome de “software”.

2.3.5 Demonstração

Para D'Ambrosio (1986, p. 105), a “Matemática é também, e permanecerá, uma ciência de demonstração”.

Segundo Davis e Hersh (1985), especula-se que a primeira demonstração matemática foi por volta de 600 a.C. por Thales de Mileto[18] que provou que o diâmetro de um círculo o divide em duas partes congruentes. Apesar de uma afirmação tão simples, “a genialidade, neste caso foi perceber que uma demonstração é possível e necessária” (DAVIS; HERSH, 1985, p. 178). E é tão necessário que, Costa (2008, p. 33) destaca que é através da demonstração, “partindo de princípios admitidos unanimemente como lógicos”, que legitimamos a validade dos nossos teoremas, garantindo o caráter matemático livre de contradições, ou seja, parte-se de fatos conhecidos para provar que o outro fato é verdadeiro.

Novamente, pegaremos o problema que formalizamos anteriormente, mas agora a soma dos n termos de uma sequência qualquer, $S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.

Para demonstrar a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética, poder-se-ia primeiro “conjecturar” uma relação, partindo da soma dos equidistantes.

---

[18] Tales de Mileto, (623 a.C. ou 624 a.C - 546 a.C. ou 548 a.C) foi um filósofo, matemático, engenheiro grego Grécia Antiga. Conhecido como o primeiro filósofo ocidental.

$$
\begin{array}{rl}
 & S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\
+ & S = a_n + a_{(n-1)} + a_{(n-2)} + \dots + a_1 \\
\hline
2S = & (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{(n-1)}) + (a_3 + a_{(n-2)}) + \dots + (a_n + a_1) \\
2S = & \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)}
\end{array}
$$

$$2S = n.(a_1 + a_n)$$

$$S = \frac{n.(a_1 + a_n)}{2}$$

Apesar da demonstração da equação acima ser muito usada, Meyer, Caldeira e Malheiros (2013, p. 20) lembra que, às vezes, acha-se que uma "demonstração é mais elegante que outra", então, provavelmente alguém para generalizar ou revalidar essa demonstração, em outras palavras, certificar-se se é válida para todos os casos de sequências aritméticas, poderá ainda recorrer ao princípio de indução. Segundo Davis e Hersh (1985, p. 182) isso é natural dentro da Matemática, pois "ao serem expostas ao exame e julgamento de uma nova audiência, as demonstrações estão sujeitas a um processo constante de criticismo e revalidação".

Dessa forma então que a Matemática pousa em bases sólidas e seguras, primeiro através do simbolismo estatuído e rígido dentro desse universo, e segundo, através de suas demonstrações fundamentadas em premissas da lógica matemática, "uma celebração da razão pura".

2.3.6 Dialética

Aristóteles entendia o argumento dialético, segundo Pickard-Cambridge (1987), como um posicionamento que ainda é infundado formalmente. "Nele a dialética é reduzida à condição de exercício mental que, não lidando com as próprias coisas, mas com as opiniões dos homens sobre as coisas, não pode atingir a verdade, permanecendo no âmbito da probabilidade." (PICKARD-CAMBRIDGE, 1987, p.19). Nesta concepção de preparatório para o conhecimento, mas nunca chegando à certeza sobre as coisas, a Matemática acabou a deixando em segundo plano em relação à lógica.

Davis e Hersh (1985, p. 212) fazem um comparativo entre a Matemática Algorítmica e Matemática Dialética, com alguns exemplos, entre eles:

Achar a solução da equação $x^2 = 2$.

Na solução Algorítmica o aluno tentará perceber que a solução x decorre que $x = 2/x$. Neste ponto, se x for ligeiramente errado, então ele será um pouco menor ou maior que $2/x$. Após um pouco de raciocínio, o ponto médio entre o valor por menos e o valor por mais será uma estimativa melhor para x ou para $x/2$.

Formalizando isso, seja $x_1, x_2, \ldots$ a sequência de números definidos sucessivamente por:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right),\ n = 1, 2, \ldots$$

Se x_1 for qualquer número positivo, então a sequência $x_1, x_2, \ldots$ converge para $\sqrt{2}$ com velocidade quadrática, ou seja, os números decimais dobram a cada interação, portanto o algoritmo pode ser efetuado somente com adições e divisões. Essa fórmula apresentada é um caso particular do método de Newton que já era conhecido pelos babilônios, que desejavam calcular a raiz quadrada de um número positivo a (ou seja, uma raiz quadrada da equação $x^2 - 2 = 0$) tomando um valor inicial x_1 e, a partir dele, construir as aproximações de $x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n \ldots$ de $\sqrt{a}$ pela fórmula interativa.

Na Solução Dialética, o aluno poderá considerar o gráfico da função quadrática $y = x^2 - 2$. O gráfico é uma parábola, mas isso não é importante, basta apenas compreender que quando $x = 1,\ y = -1$ e $x = 2,\ y = 2$. Assim, quando x se desloca continuamente de 1 para 2, y se move continuamente de um valor negativo até um valor positivo, portanto deve existir algum ponto entre 1 e 2 em que $y = 0$. Os detalhes do raciocínio são fornecidos pelas propriedades do sistema de números reais e das funções contínuas definidas neste sistema.

Portanto as duas formas são soluções do problema proposto, contudo o interessante é que a solução dialética diz que "existe" uma solução exata entre 1 e 2, e isso é tudo que nos diz, ou seja, "a solução dialética poderia muito bem ser chamada de solução existencial" (DAVIS; HERSH, 1985, p. 213).

Para a Matemática Dialética, será considerada qualquer solução que estiver fora do formalismo, pois ela está fundada em percepção e liberdade. O conhecimento existente pode ir muito mais além daquilo que se pode calcular ou mesmo aproximar, mais ainda, como lembra Meyer, Caldeira e Malheiros (2013), os alunos poderão dominar procedimentos (alguns mecânicos), ou seja, recorrer ao uso de uma calculadora ou computador.

> A matemática dialética é uma ciência rigorosamente lógica, onde as afirmativas são ou falsas ou verdadeiras, onde objetos com certas propriedades específicas existem ou

> não. A matemática algorítmica é uma ferramenta para resolver problemas. Nela, nosso interesse é não somente com a existência de um objeto matemático, mas como também suas credenciais de existência (DAVIS; HERSH, 1985, p. 215)

2.4 PROBLEMAS EXTERNOS (MATEMÁTICA APLICADA)

2.4.1 Disseminação da Matemática

> Ela enuncia que as relações se dão de determinada forma, fazendo silêncio completo sobre se isto é bom ou mau, feio ou bonito. Com a matemática a ciência abandona os valores. Por ser uma linguagem sem sujeito, impõe-se como a linguagem para todos e quaisquer sujeitos, não importa o que pensem ou sintam (ALVES, 1981, p. 67).

Um dos principais objetivos do ser humano sempre foi tentar explicar sua natureza por meio de teorias adequadas. Apesar de não ser uma tarefa fácil devido à complexidade do universo[19] , a Ciência tem como objetivo, através de suas teorias, segundo Marconi e Lakatos (2013, p. 115), servir "como orientação para restringir a amplitude dos fatos a serem estudados – a quantidade de dados que podem ser estudados em determinada área da realidade é infinita", em outras palavras, a ciência estabelece parâmetros para se debruçar em aspectos mais importantes dos fenômenos ao mesmo tempo que ignora algumas variáveis, faz suposições sobre outras.

Segundo Davis e Hersh (1985), essa simplificação de variáveis, que fez as Ciências Exatas, como a Física, através da linguagem Matemática, evoluir rapidamente, foi devido à simplicidade de seus teoremas para expressar o universo, como a diminuição da força da gravidade pela segunda potência da distância, força é caracterizada através de uma grandeza vetorial (possui módulo, direção e sentido), a trajetória dos planetas é no formato elíptico e etc. "Ainda que a natureza continue existindo e funcionando independente das teorias científicas, o homem utiliza tais teorias para avançar seus conhecimentos que possibilitam num futuro tomar decisões e agir corretamente" (BASSANEZI, 2009, p. 17).

Essa utilização de estruturas matemática para criar teorias, vai muito além de provas formais.

[19] Universo é uma classe que contém todas as entidades que se deseja considerar em uma certa situação. Exemplo: o conjunto universo da Biologia são os seres vivos.

Para Silva (2007, p. 216), o sucesso está pelo fato de que uma teoria matemática axiomatizada consegue descrever todos os objetos que satisfazem seus axiomas de uma forma simples, ou seja, “é a teoria de uma forma lógica, precisamente aquela que todos os seus modelos compartilham, é esse o seu objeto”. Seguindo esse sentido Davis e Hersh (1985) esclarecem que as teorias ensinadas antigamente não passam de simples modelos matemáticos.

Realmente é o que a Ciência tenta fazer, imitar ou predizer como o universo se comporta através de seus modelos. Caso o universo não se adapte ao modelo, automaticamente busca-se outro modelo ou é melhorado o que já existe, como aconteceu com a teoria geocêntrica até Nicolau Copérnico[20] obter um modelo mais adequado do nosso sistema solar.

Meyer, Caldeira & Malheiros (2013, p.35) explicam que enquanto matemáticos ditos puros estão preocupados em aprender Matemática para gerar mais matemática, toda essa Matemática gerada funciona como uma caixa de ferramentas para matemáticos aplicados utilizarem para estudar e entender os mais diversos problemas do universo. Desta forma as aplicações matemáticas acontecem por “decreto”, ou seja, ficamos deslumbrados com a variedade de estruturas matemáticas criadas, “que deliberadamente forçamos vários aspectos físicos e sociais do universo a adaptar-se a estes modelos” (DAVIS; HERSH, 1985, p. 98–99).

Para entender melhor como acontece esse “decreto” pegamos, por exemplo, a equação presente nos livros do ensino médio para representar o lançamento de corpos aqui na Terra, $S = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2}at^2$. Em uma situação hipotética de queda livre em nosso planeta, se não houvesse a resistência do ar, ela funcionaria perfeitamente, mas, mesmo assim, a equação é válida para as outras situações “não tão ideais”, ou seja, é o melhor modelo que temos para resolver a maioria dos problemas dessa natureza. É possível observar que o objetivo da linguagem matemática é simplificar, livrando-se de variáveis desnecessárias, e racionalizar um pensamento.

> O objetivo fundamental do “uso” de matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância. (BASSANEZI, 2009, p. 18).

[20] Nicolau Copérnico (1473-1543) foi um astrônomo e matemático polonês que desenvolveu a teoria heliocêntrica do Sistema Solar.

Esta visão filosófica está se tornando mais popular em outras áreas do conhecimento além das ciências exatas conhecidas. Ciências factuais[21] (Biologia, Química, Psicologia e etc.) estão se apoderando dessas ferramentas matemáticas, não só para uma simples análise de dados de seus experimentos, mas também do seu poder de síntese e generalização, que é indispensável para gerar novas teorias científicas, ou seja, Bassanezi (2009, p.18) conclui que o método científico é respaldado pelo uso da Matemática ou da lógica, uma vez que estes auxiliam na formação dos sistemas de afirmação que constituem estas teorias, sendo a condição necessária para expressá-las.

> Os processos mentais que sugerem o que se deve provar e como prová-lo são tanto uma parte do pensamento matemático quanto a prova que deles acaba resultando. Extrair de uma situação concreta o conceito apropriado, generalizar, de casos observados, argumentos indutivos, argumentos por analogia e fundamentos intuitivos para uma conjetura que surge são modos matemáticos de pensar. (KLINE, 1976, p. 142–143).

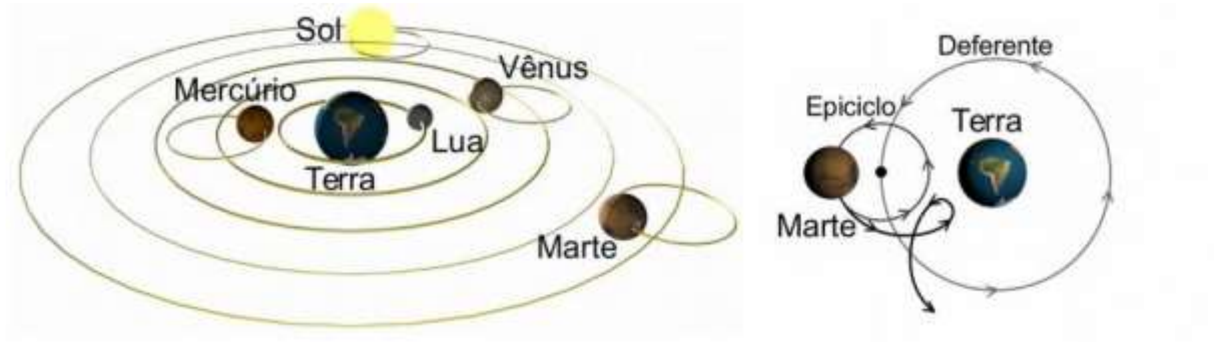
Em decorrência das demandas de outras áreas do conhecimento a própria Matemática teve que evoluir para suprir a falta de teorias. Para explicar melhor, utilizaremos o mais antigo “ajuste de curvas” registrado, segundo Davis & Hersh (1985), o trabalho de Ptolomeu[22] (Figura 6), que afirmava que a Terra ocupava uma posição fixa, enquanto os demais planetas e o Sol seguiam uma órbita (epiciclo) e esta órbita girava ao redor da Terra (deferente). Cláudio Ptolomeu adotou este modelo para explicar a mudança de tamanho aparente dos astros e o movimento retrógrado de alguns deles, mas não explicava por que alguns desses astros pareciam aumentar ou diminuir a velocidade.

---

[21] Fáticas ou factuais, apoiam-se na observação e na experiência para estudar os fatos e fenômenos naturais em si – aparte a questão humana.

[22] Claudio Ptolomeu (século II) foi um cientista grego que viveu em Alexandria, reconhecido por seus trabalhos nas mais diversas áreas.

Figura 6 - Esquema simplificado do sistema geocêntrico do Ptolomeu



Fonte: Desenho inspirado do site: https://pt.slideshare.net/raulbernardo/a-nova-astronomia

Analisando Marte (Figura 6), por exemplo, ele gira em torno da Terra em um círculo excêntrico. Ptolomeu teve que adicionar um segundo movimento com raio menor ao planeta para "ajustar" os períodos que a órbita de Marte apresentava um movimento retrógrado, um movimento inexplicável e muito difícil de representar utilizando apenas um círculo simples. Apesar de Ptolomeu conseguir aproximar a teoria e a observação, não é possível encontrar uma explicação mais plausível para a existência desse movimento, e mais ainda, nenhuma universalização deste esquema para os demais planetas.

Segundo Bassanezil (2012, p. 125), o modelo tem o "objetivo de compreender mais profundamente as entidades por ele representadas" e, comparado com o modelo apresentado por Isaac Newton, o trabalho de Ptolomeu é um trabalho estático, um caso particular e remendado – uma teoria por decreto. O modelo de Newton é muito mais aprofundado. Levava em consideração vários elementos: "massas, aceleração, a lei do movimento $F = m.a$, a lei do quadrado inverso da gravitação. Estas leis físicas têm sua expressão matemática como equações diferenciais" (DAVIS; HERSH, 1985, p. 105). O trabalho de Newton tem aplicações universais, ou seja, é o modelo mais preciso para todos os objetos desse universo. E mesmo assim, continuamos hoje ajustando curvas, porém agora através das ferramentas mais versáteis que são as equações diferenciais, em vez de usar-se apenas curvas simples, como o círculo.

Portanto, segundo Bunge (2008, p. 124), devido a "precisão sintática, um pré-requisito do significado empírico e da comprobabilidade" e à grande variedade do uso da matemática, por exemplo, a sua lógica para método científico, a Matemática está ganhando cada vez mais espaço nas demais áreas do conhecimento e, ao mesmo tempo, fazendo surgir outras.

2.4.2 Modelo Matemático

A palavra modelo tem infinitas definições nos mais diferentes contextos. Pequenos protótipos, exemplo de pessoa a ser seguida e etc. O dicionário Houaiss tem 14 definições, entre elas:

> FÍS representação de um fenômeno ou conjunto de fenômenos físicos e eventualmente a previsão de novos fenômenos ou propriedades, tomando como base um certo número de leis físicas, em geral obtidas ou testadas experimentalmente. (HOUAISS,2009, p.1303)

Como se pode perceber, as finalidades do modelo podem ser as mais diversas como representar, prever ou ser utilizado até para um fim pedagógico, de qualquer forma, o modelo sempre representa ou expõe alguma característica da realidade que queremos destacar. Bunge (2008) acrescenta que para ter um objeto-modelo, basta fazer qualquer representação esquemática. Se a representação for de um objeto – teremos uma idealização. Se for um desenho – uma representação pictórica. Se for através de uma fórmula matemática – uma representação conceitual. Para representar pode ser de forma figurativa, semissimbólica ou simbólica.

> A representação é sempre parcial e mais ou menos convencional. O objeto-modelo deixará escapar certos traços de seus referentes, tenderá a incluir elementos imaginários, e há de recapturar apenas aproximadamente as relações entre os aspectos que ele incorpora. (BUNGE, 2008, p. 32–33).

Para Biembegunt (1999, p. 20), “um modelo pode ser formulado em termos familiares, utilizando-se expressões numéricas ou fórmulas, diagramas, gráficos ou representações geométricas, equações algébricas, tabelas, programas computacionais, etc”. Neste sentido, para Aris, a Modelagem Matemática nem sempre trabalha com um modelo numérico, permitindo assim trocar a palavra “equações” por “estruturas”. O Modelo Matemático é:

> […] qualquer conjunto de equações matemáticas, completo e consistente, que é elaborado para corresponder a alguma outra entidade, seu protótipo. O protótipo pode

> ser uma entidade física, biológica, social, psicológica ou conceitual, talvez mesmo outro modelo matemático. (ARIS, 1978 apud DAVIS; HERSH, 1985, p. 107)

Conforme se busca uma compreensão mais clara de mundo, tem acarretado teorias cada vez mais sofisticadas e este aprofundamento tem implicado a reformulação dos modelos, fazendo assim surgir novas áreas de pesquisa, por exemplo, a Biomatemática, que utiliza a Matemática para construir Modelos efetivos “dos processos, proporcionando conjuntos de equações diferenciais em problemas de dinâmica populacional, fisiologia e bioquímica, além de modelos estocásticos representativos de processos de nível celular e molecular”(PIQUEIRA, 1996, p. 141).

O modelo matemático tanto para Bassanezi (2009) como para Biembengut (1999) é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que descrevem ou representam, de alguma forma, o objeto estudado, ou seja, uma forma de descrever e explicar a realidade através da matemática.

> Um modelo matemático é, portanto, uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam. Sua formulação, todavia, não tem um fim em si só, mas visa fomentar a solução de algum problema. (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p. 13).

2.4.3 Física Teórica

A matemática sempre amparou a física, seja como grandezas para representar dados, seja como análise desses dados através de técnicas de deduções para gerar teorias ou prever fenômenos físicos.

Segundo Bassanezi (2009, p. 33), devido à “evolução e complexidade dos modelos matemáticos para a teoria dos campos, deu impulso ao desenvolvimento de sistemas de equações diferenciais ordinárias – a estabilidade e regularidade de soluções se tornou o alvo preferido dos matemáticos”, abrindo um novo ramo conhecido com Física Teórica ou Física-Matemática, pois o profissional desta área necessita de grande habilidade Matemática para trabalhar com teorias altamente sofisticadas.

Apesar da Física se basear essencialmente na experiência, para algumas teorias sofisticadas, como observa ALVES (1981, p. 49), “[…] não se pode mais invocar a visão como muleta da razão. A razão tem de caminhar sozinha. Aqui, os modelos não lançam mão de artifícios audiovisuais", transformando assim o modelo[23] matemático o nosso sexto sentido, uma vez que o seu papel é ajudar a "Física, sintetizando a compreensão dos fenômenos. Uma fórmula matemática que resume um fenômeno físico constitui uma ajuda para compreensão desse fenômeno". (JUNIOR; FERRERO; SOARES, 2007, p. 4). Portanto, a Física Teórica além dos conceitos físicos precisa principalmente de modelos Matemáticos, caso contrário a mesma não seria possível.

> […] o desenvolvimento da Teoria da Relatividade e Teoria Quântica, as categorias físicas fundamentais de espaço, tempo e matéria foram reexaminadas e não puderam se adaptar aos conceitos intuitivos tradicionais. Em socorro vieram a Teoria dos Grupos de Lorentz e a Teoria da Álgebra de Von Newmann, essenciais nos modelos, respectivamente, da Teoria da Relatividade e da Teoria Quântica. (BASSANEZI, 2009, p. 33).

Nas palavras de Bunge (2008, p. 116), "a mecânica quântica é um ramo da física teórica e objetivo da física teórica é construir modelos de realidade, independentes-do-observador, livres-do-sujeito".

2.4.4 Química Teórica

Segundo Andrei et al (2012), modelos matemáticos são bons, a princípio, para entender as propriedades das moléculas, entretanto o obstáculo maior está na escala das operações. Por essa razão, no final do último século, físicos achavam que as leis do movimento de objetos macroscópicos, descoberto por Issac Newton, não descreviam exatamente o comportamento de partículas muito pequenas, como os elementos de um átomo. Nesse contexto, a "Química Teórica está surgindo como uma disciplina distinta da Física Teórica, embora tenha aplicado por muitos anos os conceitos da Mecânica (Estatística e Quântica)" (BASSANEZI, 2009, p. 33).

A Química Teórica com o auxílio da modelagem molecular, através de computadores (computação gráfica e simuladores), consegue gerar, manipular ou representar de forma realista as estruturas moleculares e também obter cálculos das propriedades físico-químicas estudadas.

[23] Os modelos tratados no texto são conceitos e não objetos.

> Atualmente, os sistemas de modelagem molecular estão munidos de poderosas ferramentas para construção, visualização, análise e armazenamento de modelos de sistemas moleculares complexos, que auxiliam na interpretação das relações entre a estrutura e a atividade biológica. (ANDREI, 2012, p. 125).

Por outro lado, apesar da complexidade dos modelos, as propriedades químicas geralmente seguem leis empíricas simples, então Bassanezi (2009, p. 33–34) destaca o uso "de equações diferenciais para modelar velocidade de reações químicas (lei da ação das massas), teoria das matrizes e grafos para descrever a estrutura das moléculas etc."

2.4.5 Biomatemática

Nos últimos anos, Ciências Biológicas têm cada vez mais se utilizado das ferramentas matemáticas, essa aproximação "originou-se da necessidade crescente de se processar, eficientemente, os dados clínicos e laboratoriais, na tentativa de extrair de tais dados a máxima quantidade de informação possível, criando processos computacionais cada vez mais potentes" (PIQUEIRA, 1996, p. 141).

Esse interesse matemático começou na metade do último século com os modelos didáticos para representação da interação entre as espécies, presa-predador, Lotka[24] -Volterra[25] "e com os modelos de epidemiologia de Kermack[26] -McKendrick[27] , […] Tais modelos utilizavam a teoria das equações diferenciais, ordinárias ou parciais, invariavelmente baseadas nas leis físicas de conservação" (BASSANEZI, 2009, p. 34).

Acostumada a encontrar "regularidades" na Física e na Química, a Matemática tem, agora, o desafio de trabalhar com variáveis aleatórias, ou seja, "desenvolver metodologias para contemplar de maneira satisfatória as duas principais questões relativas ao processo biológico: a complexidade e a irreversibilidade" (PIQUEIRA, 1996, p. 142). No primeiro momento não parece muito promissor, entretanto é esse o ponto que tem atraído muitos matemáticos para o

[24] Alfred James Lotka (1880-1949) foi um matemático, físico-químico e estatístico estadunidense, famoso pelo seu trabalho em dinâmica populacional.
[25] Vito Volterra (1860-1940) foi um matemático e físico italiano, seu trabalho conhecido são as equações integrais de Volterra.
[26] William Ogilvy Kermack (1898-1970) foi um bioquímico escocês, realizou estudos matemáticos de propagação epidêmica e estabeleceu ligações entre fatores ambientais e doenças especificadas.
[27] Anderson Gray McKendrick (1876-1943) foi um médico e matemático britânico, pioneiro em muitas descobertas em processos estocásticos.

desenvolvimento da Biomatemática. A conjectura necessária para resolver sistemas não lineares conhecida como Teoria do Caos e seu caso particular as bifurcações, Teoria Fuzzy, Espaços de Aspectos, técnicas derivadas de recursos computacionais, etc.

> Recentemente, o surgimento de novos paradigmas, cada vez mais desvinculados dos tradicionais, pressupostos pelo reducionismo, propiciam modelos mesocárpicos mais realistas capazes de simular, prever e influir nos fenômenos biológicos tais como: dinâmica de redes filamentares, difusão de insetos e poluentes, redes neuronais, agregação celular, padrões de formação em geral etc. (MURRAY, 1990 apud BASSANEZI, 2009, p. 43).

Apesar das dificuldades impostas pela natureza, tais como variáveis bem complexas, o uso do Formalismo matemático tem contribuído muito para a Biomatemática, uma vez que hoje temos grupos capacitados com suas “caixas de ferramentas matemáticas” para resolver os mais diversos problemas, como “fisiológicos, de saúde pública e de situações ambientais.” (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2013, p. 36).

2.4.6 Outras Áreas do Conhecimento

Segundo Bunge (2008, p. 11), “antes se observava, se classificava e se especulava, agora se acrescenta a construção de sistemas hipotético-dedutivos e se preocupam em pô-los à prova experimental”. A Matemática aos poucos ocupa o lugar que era apenas de domínio da linguagem comum que, muitas vezes, gerava teorias contraditórias. Deixou de ser usada só como estatística, ou seja, deixou de analisar somente o resultado de pesquisas empíricas muitas vezes superficiais e passou agora a auxiliar a construção de novas teorias.

Para Bassanezi (2009), a Matemática Aplicada tem ocupado papel cada vez mais relevante como solução dos problemas industriais e da engenharia, principalmente nos processos de controle e automação.

> A sofisticação e automação de máquinas tem sido desenvolvida com o uso da álgebra Fuzzy, teoria do controle, além das técnicas modernas para resolver equações diferenciais parciais com computadores (método dos elementos finitos, método da relaxação e outros) (BASSANEZI, 2009, p. 34).

Outra aproximação importante da Matemática com outras áreas trouxe novos benefícios e tecnologias, segundo Bunge (2008, p. 10), pois fez surgir “a teoria geral dos sistemas, a cibernética, a teoria da informação, a teoria dos jogos, a sociologia matemática e até a linguística matemática”.

Essas novas teorias fizeram surgir uma nova disciplina chamada Ciência da Computação cada vez mais importante no mundo moderno. “Ela inclui muitas aplicações da lógica matemática (teoria das máquinas de Turing) e, mais recentemente, a lógica fuzzy, as funções recursivas, e de um modo geral, a computabilidade” (BASSANEZI, 2009, p. 34). Ainda com a ajuda dos computadores a aplicação Matemática, através desse novo mundo virtual, está cada vez está mais presente não apenas no mercado de trabalho, como também na arte, na linguística, na música, etc.

A economia global tem utilizado modelos mais sofisticados para falar em projeções de crescimento, previdência e outros assuntos de importância mundial. Comportamento humano e os fenômenos sociais também estão procurando gradualmente comprovar suas teorias através da matemática. Equações diferenciais, progressões aritméticas e geométricas e mistas, calculadoras e planilhas são usadas para tratar de “dinâmicas populacionais (ou seja, de como certas populações de pessoas, peixes, ou bactérias evoluem)” (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2013, p. P. 36).

Algumas áreas se aproveitam de forma mais lenta, outras mais rápidas, contudo de alguma forma a Matemática está cada vez mais presente nas mais diversas áreas do conhecimento, pois segundo Bunge (2008, p. 10), “toda teoria específica é, na verdade, um modelo matemático de um pedaço de realidade”.

2.4.7 Educação Matemática

No início do século XX, reflexões sobre educação, principalmente de natureza filosófica, ganham novas características “marcadas pelos movimentos sociais, pelos novos conhecimentos de psicologia e pelo aperfeiçoamento da análise estatística” (BORBA; ARAÚJO, 2013, p. 15), surge assim o terceiro tripé da Matemática que é a Educação Matemática, que na definição de D’Ambrosio (1986), é “uma atividade interdisciplinar, que se pratica com um objetivo geral bem específico — transmitir conhecimentos e habilidades matemáticas — através dos sistemas educativos (formal, não formal e informal)” (D’AMBROSIO, 1986, p. 35). No geral, poderá ser caracterizada como uma ampla área de estudos e pesquisas, principalmente por tratar de ambientes interdisciplinares com bases na Educação e na Matemática.

> Tanto na Matemática Aplicada quanto na Pura isso não ocorre, não existem projetos educacionais, ou seja, nos dois outros sustentáculos do tripé não se faz necessário educar matematicamente ninguém, porque eles (os matemáticos aplicados e os puros, junto com seus interlocutores) tem objetivos estudar e resolver determinado problema […].(MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2013, p. 38–39)

Bassanezi (2009, p.16) esclarece, que a Educação Matemática busca a combinação dos "jogos" (Matemática Pura) e resultados práticos (Matemática Aplica) na qualidade de um processo de ensino-aprendizagem. Dentro da Educação Matemática, foram desenvolvidas muitas tendências, tendo apoio em diferentes teorias ou apresentadas sob diferentes posições epistemológicas, por exemplo, EMPÍRICO-ATIVISTA que o foco era o valor utilitário e sua relação com outras ciências, uma vez que o aluno aprendia fazendo; já a FORMALISTA-MODERNA valorizava o rigor da linguagem e das justificativas, com um ensino centrado no professor; enquanto que na TECNICISTA professores e alunos deixam de ser o centro do ensino-aprendizagem, recursos e técnicas passam a ocupar esse lugar; e a CONSTRUTIVISTA que destaca a ideia do aprender a aprender através de uma ação-reflexiva do indivíduo com o meio onde vive.

Embora de formas diferentes, destacamos também algumas tendências que têm como premissas básicas, a vivência do aluno.

> Observamos esta característica quando na EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA surge a constante preocupação em levar o estudante ao questionamento da sociedade em que vive; na ETNOMATEMÁTICA quando o conhecimento "brota" do contexto cultural em que o aluno está inserido; na MODELAGEM ao se tentar escrever em linguagem matemática um problema real; no uso de COMPUTADORES ao tentar levar para a escola tecnologia que satisfaz a ansiedade pelo novo das "gerações videogames", ou ainda quando na ESCRITA NA MATEMÁTICA contatamos a preocupação em dar oportunidades a todos de externar os seus pensamentos, refletindo e expressando suas próprias opiniões. (LOPES; BORBA, 1994, p. 51)

Com base no último grupo, hoje, as novas tendências em Educação Matemática, transpassam à aptidão numérica, elas conduzem o estudante a atribuir significado para atividades e conceitos matemáticos. Estão intimamente relacionadas com uma abordagem investigativa, que busca desenvolver no estudante “a capacidade de ler e interpretar situações sociais, culturais, políticas, econômicas e interpretar essas situações em condição para a realização de ações de transformação” (SKOVSMOSE apud MILANI; SILVA; SAULLO, 2011, p. 8).

> É o indivíduo como feitor da realidade pelo adicionamento de seus fatos, é o indivíduo elevado a criador. É o criador, adicionando artes, coisas, objetos, peças, é o criador cientista, pensador, acrescentando idéias, teorias, valores, interpretações, é o criador total modificando a realidade conforme ela melhor se ajuste a certas formas de ação que lhe são próprias. (D’AMBROSIO, 1981, p. 33 apud D’AMBROSIO, 1986, p. 48–49).

Portanto, a Educação Matemática, segundo Meyer, Caldeira e Malheiros (2013, p.86), tem como preocupação atribuir “significado ao currículo oficial”.

2.5 CURRÍCULO ESCOLAR

Para Kline (1976), apesar das mudanças implantadas no currículo, ao longo dos anos, pode-se caracterizar o currículo matemático em dois grandes grupos: aritmética e geometria: Os primeiros anos do ensino fundamental são dedicados à aritmética, anos finais álgebra e geometria básica, como fórmulas de área e volume. Ensino médio começa com a linguagem de conjuntos e a álgebra continua ligeiramente mais elaborada na forma de funções, sequências, padrões, geometria analítica, geometria espacial, trigonometria e etc.

Bassanezi (2009), também caracteriza como é tratado cada tópico: “enunciado → demonstração → aplicação”, mas infelizmente, o processo para chegar a essa aplicação continua presente em boa parte das escolas:

> Sabe-se que a típica aula de matemática a nível de primeiro, segundo ou terceiro grau ainda é uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que ele julga importante. O aluno, por sua vez, copia da lousa para o seu caderno e em seguida procura fazer exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição na aplicação de um modelo de solução apresentado pelo professor. (D’AMBROSIO, 1989, p. 15)

Críticas a esse modelo de currículo, geralmente são embaladas pelas frequentes dificuldades apresentadas pelos alunos na disciplina de Matemática percebidas através dos resultados em avaliações internas e externas, haja vista o resultado de exames do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio). Uma dessas críticas é bem pontual no quesito do significado, que a Matemática tem para a vida da maioria dos estudantes.

D'Ambrosio (1986) lembra que, tanto a aprendizagem como a construção da Matemática estão enraizadas em um contexto socioeconômico-cultural. Esse fato, podemos notar pelos números que utilizamos hoje, desenvolvido pelos hindus e suas operações aritméticas. Na época, para os hindus e outros povos, funcionavam como verdadeiras máquinas de calcular perto dos ábacos ou contar nos dedos, impulsionando o comércio e as navegações, era um "saber prático, constituído de receitas úteis, que funcionam" (NETO, 1987, p. 9). Assim, Meyer, Caldeira e Malheiros (2013), argumentam que de lá para cá, a Matemática adquiriu um nível mais alto de abstração, deixando de lado a intuição por uma linguagem mais rebuscada e hoje, simplesmente exigimos que a aprendizagem aconteça "colocando por um funil" na cabeça dos alunos, milhares de anos de conhecimento desconsiderando aquilo que são ou fazem.

Por essa perda de significado, segundo Kline (1976), críticas recaem principalmente na álgebra e aritmética, pois elas são mais voltadas a processos mecânicos, dando ênfase para a memorização do que para a compreensão.

A falta de compreensão, por parte de muitos estudantes, pode-se considerar a partir da solução de expressões como o exemplo abaixo:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

Muitos alunos irão se basear mais no "processo" do que na compreensão, geralmente a informação que muitos alunos têm em mãos é que é necessário encontrar o m.m.c (mínimo múltiplo comum) do denominador, que neste caso é 6, sem ter a mínima ideia, geralmente, por que se deve encontrar este valor.

Na álgebra, o problema é mais grave, principalmente em se tratando de alunos do ensino fundamental, quando se deparam com equações algébricas do tipo 2x+3=8, quando a solução poderia ser obtida de duas maneiras ou através de um processo algébrico, que deveria ser mais fácil, ainda que muitos apresentem insegurança, principalmente, na compreensão do que significa esta equação, que poderia se entender como a busca de um número que multiplicado por 2 e a ele somado 3, o resultado seria 8.

> O aluno, acreditando e supervalorizando o poder da matemática formal perde qualquer autoconfiança em sua intuição matemática, perdendo, dia a dia, seu “bom-senso” matemático. Além de acreditarem que a solução de um problema encontrada matematicamente não estará, necessariamente, relacionada com a solução do mesmo problema numa situação real (D’AMBROSIO, 1989, p. 15)

São operações muito importantes e muito úteis no mundo moderno, embora a crítica afirme geralmente que sua aprendizagem esteja focada apenas na memorização, carente, portanto, de uma compreensão razoável, limitando dessa forma sua utilidade para a maioria dos estudantes. “São como páginas arrancadas de cem livros diferentes, nenhuma das quais transmite a vida, o sentido e o espírito da matemática. Esta apresentação da álgebra começa nenhures e terminam também em nenhures” (KLINE, 1976, p. 21).

> A Matemática é considerada estigma, ou seja, ao mesmo tempo em que boa parte da sociedade tem medo da Matemática que nós criamos, também acontece ao contrário. Da mesma maneira que ouvimos dizer que, se alguém é bom em Matemática, é bom em tudo, também existem pessoas que consideram ser a Matemática inútil. (MEYER, CALDEIRA, & MALHEIROS, 2013, p. 24).

As famosas estruturas dedutivas das demonstrações não estão livres de algumas críticas. A demonstração é uma das características mais importantes da Matemática geralmente partindo de axiomas para provar teoremas. Todavia, como demonstração dedutiva, ela parte de uma série de adivinhações já estabelecidas, muitas vezes há necessidade de um esquema engenhoso para provar a devida sequência lógica, “são formalismos vazios em contraposição ao conteúdo real” (D'AMBROSIO, 1986, p. 69).

Neste capítulo, não se tem o propósito de pregar a abolição das demonstrações, pelo contrário, tem que se concordar com os defensores dessa Matemática puramente axiomática, pois são essas estruturas lógicas que capacitam o aluno a pensar dedutivamente e, consequentemente, sem essas “demonstrações” o que seria da Matemática?

Kline (1976), até certo ponto, tem razão em criticar o enfoque do pensamento dedutivo, pois uma vez discutida a utilidade do mesmo para a vida da maioria dos estudantes, existem formas mais agradáveis de se pensar em problemas sociais, sem a necessidade desse simbolismo e conceitos abstratos, ou seja, os grandes problemas da vida de ordem prática estão no meio jurídico, político e econômico, que são resolvidos por uma forma de pensar totalmente diferente que é o julgamento. Davis e Hersh (1985) destacam de outra forma os problemas das deduções, que embora para os matemáticos antigos fossem claras tais deduções, hoje, grande parte do que fazemos é incompreensível para muitos alunos, mais ainda, a matemática formalizada é difícil de ser encontrada em qualquer lugar imaginável, além dos textos e periódicos de lógica simbólica.

Todos esses críticos do currículo reconhecem que estudar Matemática é importante para gerar mais Matemática, e concordam que os estudantes podem até entender a matéria, compreender do que ela trata, os significados dos teoremas, etc, mas, ainda assim, falta sentido para a maioria dos estudantes no que se refere ao porquê de se estudar Matemática. Neste sentindo, a falta de motivação é um outro grave problema, pois segundo Kline (1976), geralmente o ensino de Matemática é ministrado, na maioria das vezes, de “forma fria e caráter abstrato”, diminuindo ainda mais o interesse dos alunos e estes acabam criando a perspectiva que não terá utilidade alguma em sua vida, dessa forma se desmotivando. A grande verdade é que apenas uma pequena minoria conseguirá aplicá-la “da forma a que se propõe” e somente se, no caso, vier a se tornar um cientista profissional, matemático, engenheiro ou profissional do gênero.

> Realmente, o que de conteúdo se ensina é de pouca importância no nosso contexto socioeconômico-cultural. De fato, o tipo de matemática que se ensina às nossas crianças e que será utilizado no seu ambiente de trabalho e será relevante no seu contexto sociocultural daqui a 20 anos, será absolutamente diferente daquele que se pretende de uma criança em países desenvolvidos. (D'AMBROSIO, 1986, p. 15)

Há quem ache que toda essa enxurrada de críticas não passa de um exagero, pois os livros didáticos apresentam hoje muitas aplicações para essas abstrações e acreditam que os desafios intelectuais propostos como exemplo encher um tanque, cavar buracos, tempo, velocidade e outros vão convencer os estudantes de que a Matemática é importante, entretanto outros autores rebatem que apesar das boas intenções esses problemas são artificiais e na sua maioria não terão aplicabilidade na vida do estudante. “A realidade é que não se oferece motivação para o estudo de matemática no currículo tradicional. Os estudantes estudam-na porque se exige que o façam. A motivação implica mais que um estímulo psicológico” (KLINE, 1976, p. 28).

> Infelizmente, entre nós, o ensino da Matemática fica quase que apenas nos níveis de conhecimento e utilização de métodos e procedimentos, isto é, o aluno aprende a terminologia e as fórmulas e treina fazer substituições para resolver problemas de rotina. A Matemática fica transformada em algo rígido, acabado, chato, sem finalidade. (NETO, 1987, p. 39)

É claro que existem outros fatores por trás dessa dificuldade toda, como fatores psicológicos e históricos. Temos que ter o entendimento que o nosso currículo tem “um cabedal de conhecimentos acumulado durante milhares de anos, através de várias culturas” (D'AMBROSIO, 1986, p. 16), e mais ainda, se matemáticos levaram um milênio para construir esses conhecimentos e outro milênio para aceitá-los[28] , não é de se duvidar que estudantes também apresentem alguma dificuldade para compreender, ou seja, como coloca, Neto (1987), os povos não evoluíram na mesma velocidade, também é de se esperar que os alunos não “amadureçam” do mesmo modo.

Portanto, a solução para o currículo converge para uma matemática mais significativa, de acordo com D’Ambrosio (1986, p. 15), é o que se deve mudar, “a ênfase do conteúdo e da quantidade de conhecimentos que a criança adquire, para uma ênfase na metodologia que venha desenvolver atitudes, ou mesmo a capacidade de matematizar situações reais”. Isso seria trabalhar verdadeiramente a Matemática de uma forma a torna-la útil para a vida, ou seja, para Kline (1976), o desafio da Educação Matemática é uma aproximação da Matemática à realidade do estudante e não esperar que ele venha a se tornar possivelmente, no futuro, um cientista profissional, matemático ou engenheiro para poder aplicá-la.

2.6 MODELAGEM MATEMÁTICA

Até certo tempo, a atividade de Modelagem Matemática era conhecida como Matemática Aplicada, e, ao contrário do que muitos imaginam, essa atividade não é recente, pois

[28] Os gregos rejeitaram os números irracionais e os adotaram como medidas, outro exemplo, os números negativos inventados pelos hindus (600 a. D) levaram um milênio para serem aceitos.

sempre esteve presente nas teorias científicas, de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2016). Antes de Cristo, segundo Davis e Hersh (1985) e Kline (1976), registros já mostravam os primeiros desafios da humanidade na solução de problemas, que resultou na elaboração dos primeiros Modelos Matemáticos. Segundo Bassanezi (2009), no início do século XX a Modelagem Matemática começava a avançar como um ótimo instrumento de pesquisa em novos campos com Biologia, Economia, Sociologia e outros. Entretanto, sua concepção como alternativa metodológica para o Ensino de Matemática, ocorre na década de 80, quando surgem os primeiros artigos e dissertações estabelecendo-a como uma estratégia muito eficaz de ensino-aprendizagem.

Pode-se perceber que a Modelagem Matemática tem duas características bastante interessantes: ferramenta na resolução de problemas e metodologia para o processo ensino-aprendizagem da Matemática.

Segundo Bassanezi (2009), a Modelagem Matemática (Matemática Aplicada) "vem ganhando terreno nas últimas décadas, proliferando como cursos de graduação e pós-graduação estruturados em várias universidades bem-conceituadas", e incitando muitas expectativas referentes ao seu uso, mesmo que ainda sua implementação não possua um roteiro padrão.

> Em cursos regulares, onde há um programa a ser cumprido – currículo – e uma estrutura espacial e organizacional nos moldes tradicionais (como é na maioria das instituições de ensino), o método da modelagem deve sofrer algumas alterações, levando principalmente em consideração o grau de escolaridade dos alunos, o tempo disponível que terão para trabalhar extraclasse [...] (BIEMBENGUT, 1999, p. 44)

Vários autores têm sua forma particular de definir a Modelagem Matemática. Todavia, no âmbito da educação, tratando a Modelagem como um ambiente de aprendizagem, todas as definições geralmente giram em torno da arte da investigação de problemas reais em sala de aula. De acordo com algumas definições que oportunamente serão a seguir apresentadas.

A Modelagem Matemática é uma forma dinâmica de abstração, generalização para obtenção e validação de modelos. "A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos, cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual" (BASSANEZI, 2009, p. 24).

Para Almeida, Silva e Vertuan (2016, p. 12), a Modelagem Matemática é "relação entre realidade (origem da situação inicial) e Matemática (área em que os conceitos e os procedimentos estão ancorados)", é uma forma de produzir e integrar conhecimentos matemáticos e não matemáticos.

Para Barbosa (2004), o ambiente de Modelagem vai muito além da limitação teórica, que é apenas a aplicação da Matemática em outras áreas. Ela é a articulação entre a problematização (criar perguntas e/ou problemas) com a investigação (organização, manipulação e reflexão sobre elas) "no processo de envolvimento dos alunos para abordar a atividade proposta. Nela, podem-se levantar questões e realizar investigações que atingem o âmbito do conhecimento reflexivo" (BARBOSA, 2004, p. 75).

Para Biembengut (1999), é a busca da interação entre a realidade e a Matemática. "A modelagem matemática é, assim, uma arte ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias" (BIEMBENGUT, 1999, p. 20).

Skovsmose (2001) caracteriza a modelagem como um convite à reflexão, não ficando apenas restrito a um instrumento motivador para compreender a construção de modelos ou "porta de entrada para uma parte da teoria matemática, porém, primariamente para dar a eles oportunidade de investigar detalhes diversos em como um modelo que, de fato, tem implicações sociais importantes" (SKOVSMOSE, 2001, p. 41).

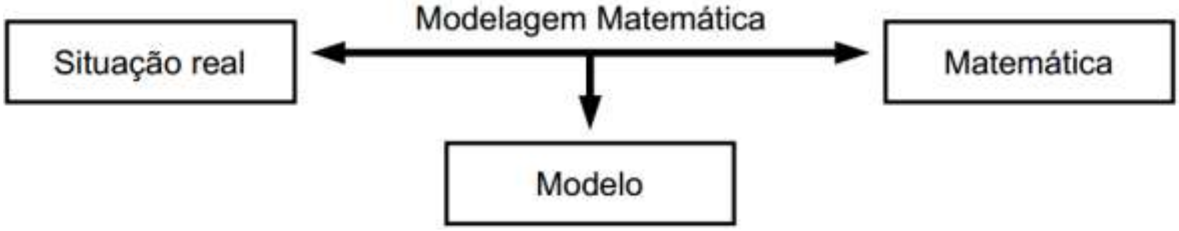
Com base nestes autores, a Modelagem Matemática estabelece uma relação importante do processo ensino-aprendizagem, principalmente no quesito que é enfatizar a autonomia e a reflexão da realidade por meio da Matemática e essa aproximação da realidade extraescolar, pode ser um "caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos" Biembengut (1999, p.36). De acordo com Barbosa (2004), é um convite para investigação com diversas possibilidades de encaminhamento para os alunos indagarem as mais diversas situações.

2.6.1 Etapas da Modelagem Matemática

Na definição de Biembengut (1999, p. 20), a Modelagem Matemática "é o processo que envolve a obtenção de um modelo". O modelador matemático precisará além do conhecimento matemático, intuição e criatividade para compreender o contexto principalmente para adaptar ao seu modelo o conteúdo matemático adequado.

"É uma atividade que permite representar uma situação real com ferramental matemático" (Modelo Matemático) (BIEMBENGUT, 1999, p. 20).

Figura 7 - Esquema do processo de Modelagem Matemática



Fonte: Biembengut (1999. p.21)

Para chegar nesse Modelo, existem vários esquemas ou procedimentos. Almeida, Silva e Vertuan (2016) e Biembengut (1999, p. 21) sistematizam em três etapas que podem ser divididas em subetapas.

1ª etapa: Interação

a) Reconhecimento da situação-problema;

b) Familiarização com o assunto a ser modelado → pesquisa.

Essa é a etapa de uma pesquisa geral sobre o assunto delimitado, que pode ser por modo indireto (bibliográfico) ou por modo direto (coleta de dados experimentais).

2ª etapa: Matematização

a) Formulação do problema → hipótese;

b) resolução do problema em termos do modelo.

A etapa mais desafiante, que é a matematização do problema, trazê-lo para a linguagem matemática. Aqui será necessário utilizar a intuição, criatividade e experiência acumulada.

A formulação de hipótese é muito importante, pois é neste momento que as informações são classificadas; decide quais fatores devem ser levados em conta; identificação constante; seleciona símbolos para as variáveis e, principalmente, descreve, através de termos matemáticos, essas relações.

É aqui que se encontra o objetivo principal: modelar através de "expressões aritméticas e fórmulas, ou equações algébricas, ou gráficos, ou representações, ou programa computacional, que levem à solução, à dedução de uma solução" (Biembegunt, 1999, p.22).

3ª etapa: Modelo Matemático

a) Interpretação da solução;

b) validação do modelo → uso.

Nesta etapa final, torna-se necessário a avaliação de aproximação da situação-problema e, a partir daí verificar o grau também de confiabilidade do modelo. “Essa fase, visa além da capacidade de construir e aplicar modelos, ao desenvolvimento, nos alunos, da capacidade de avaliar esse processo de construção de modelos e os diferentes contextos de suas aplicações” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p. 16).

Em relação à implementação da Modelagem Matemática, Bassanezi (2009) alerta que poderá exigir uma mudança de postura do professor como transmissor do conhecimento, colocando o aluno no centro do processo de ensino-aprendizagem. Assim sendo, é necessário proporcionar um espaço que favoreça a reflexão e o debate dos temas pertinentes aos alunos. Portanto, para essa implementação, há várias maneiras, mas Barbosa (2004) destaca três casos:

Caso 1: O problema é apresentado pelo professor, já devidamente relatado, com dados qualitativos e quantitativos disponíveis, cabendo aos alunos a investigação. Sem a necessidade do aluno sair da sala para coletar novos dados.

Caso 2: Apenas o problema inicial é apresentado pelo professor, cabe aos alunos coletar os dados, provavelmente fora da sala de aula. “Nesse caso, os alunos são mais responsabilizados pela condução das tarefas” (BARBOSA, 2004, p. 4).

Caso 3: O tema pode ser escolhido pelo professor ou alunos, geralmente são projetos desenvolvidos a partir de temas não-matemáticos. “Aqui, a formulação do problema, a coleta de dados e a resolução são tarefas dos alunos” (BARBOSA, 2004, p. 5).

Este terceiro caso, tem-se “a expectativa de que a escolha pode despertar o interesse do aluno pela atividade” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p. 25). Biembegunt (1999, p. 36) destaca que, o aluno terá “oportunidade de estudar situações-problemas por meio de pesquisa, desenvolvendo seu interesse e aguçando o seu senso crítico”, ou seja, é uma atividade que estimulará o grupo a trazer a Matemática para o seu dia a dia, oportunizando a compreensão da realidade e fortalecimento dos vínculos sociais.

> A questão motivacional e as relações entre matemática e realidade mediadas pela Modelagem Matemática parecem então estar interligadas de modo que, por um lado atribuir sentido e construir significados em Matemática demandam situações de ensino e aprendizagem que induzam relações entre a Matemática e a vida dos alunos fora da escola; por outro lado, as atividades de Modelagem Matemática podem favorecer a aproximação da matemática escolar com problemas extraescolares vivenciados pelos alunos.(ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p. 31).

“A modelagem matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ainda desconhece ao mesmo tempo que aprende a arte de modelar, matematicamente” (BIEMBENGUT, 1999, p. 36).

Segundo Barbosa (2004), é possível notar a flexibilidade da Modelagem nos três casos. Durante o processo, a atividade do professor é de diálogo com o aluno, dado que a responsabilidade do professor, do caso 1 para o 3, vai sendo compartilhada cada vez mais com aluno, fato que o torna um orientador, ou seja, acontece uma migração “de uma situação de aulas expositivas seguidas de exercícios para situações que integram, na sala de aula, atividades investigativas” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p. 24). Assim, o professor faz parte do processo de ensino, enquanto o aluno passa a ser o resultado final.

3 METODOLOGIA

3.1 METODOLOGIA DE PESQUISA

Nesta seção, será descrita a metodologia utilizada na elaboração e efetivação do trabalho, as estratégias adotadas para a elaboração das atividades de modelagem e análise dos conhecimentos presentes nestas atividades de ensino e aprendizagem. Desse modo, o presente trabalho se caracteriza como uma observação sistemática, visto que tem como finalidade observar um fenômeno educacional no ensino de Matemática, o qual busca identificar, analisar e classificar as informações obtidas mediante a observação em sala de aula, através dos argumentos utilizados pelos estudantes.

3.1.1 Atividade de Modelagem

As atividades começaram com oficinais de informática para capacitar os alunos ao uso adequado do LibreOffice Calc, Geogebra e Scilab como ferramentas de apoio à modelagem.

O problema de modelagem foi proposto pelos próprios estudantes que estavam interessados em encontrar o preço ideal na venda de doces para obter o lucro máximo, caso 3 descrito por Barbosa (2004) no capítulo 2.6.1, no qual os estudantes sugerem o tema. A construção do modelo seguiu os três passos sintetizados por Almeida, Silva e Vertuan (2016) e Biembengut (1999, p. 21): Interação → Matematização → Modelos Matemáticos.

Essas atividades foram desenvolvidas em encontros, pois os estudantes passaram a ser o centro do processo de ensino-aprendizagem, tal como defende Bassanezi (2009), ou seja, tonaram-se responsáveis pelos resultados obtidos e pela dinâmica do processo, limitando a participação do professor a tão somente direcionar reflexões para pontos específicos ou pesquisas necessárias. Esses encontros foram organizados da seguinte maneira: durante a interação ou coleta de dados para o modelo, duravam 10 minutos semanais para reportarem avanços ou problemas nas vendas de doces e na fase de matematização, os encontros ocupavam 2 períodos semanais dos 5 períodos disponíveis.

3.1.2 Coleta de dados e Categoria de Análise

A análise dos conhecimentos observados durante a aplicação do projeto, ocorreu durante a fase de interação e matematização, através de produções escritas, entrevistas, atitudes e diário de bordo.

As categorias de análise foram desenvolvidas com base na fundamentação teórica do Capítulo 2 dividas em 4 grandes grupos: **A** - área do conhecimento, **B** - finalidade, **C** - argumentação e **D** - sistematização pedagógica. Para essa análise, foram considerados os aspectos que seguem:

A – Área do conhecimento: se a confecção e a interpretação do modelo exploram conhecimentos internos à matemática como através identificação de taxas de crescimento o estudante relaciona com a função $f(x) = mx + b,\ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e desenvolva o algoritmo para encontrar os principais pontos, ou algum fenômeno externo à matemática, como a lei da oferta e procura.

A.1 – Interna à matemática (matemática pura): produção de proposições e demonstrações com significado restrito à própria matemática;

A.2 – Externa à matemática: associação das proposições demonstradas a significados diversos:

A.2.1 – Ciência (matemática aplicada): associações a fenômenos físicos como a Física, Biologia, Química e Tecnologia (biomedicina, mecânica, ...); associações a fenômenos econômicos;

A.2.2 – Fenômenos reais tecnológicos: associação a fenômenos de máquinas e processos de aparatos tecnológicos;

A.2.3 – Fenômenos reais (cotidiano): associação fenômenos físicos, sociais e econômicos que ocorrem próximos ao ambiente do educando;

B - Finalidade: diagnosticar quais são as habilidades e competências desenvolvidas durante e após cada modelo.

B.1 - Desenvolvimento da matemática;

B.2 - Desenvolvimento do conhecimento sobre fenômenos reais, de interesse da humanidade.

B.3 – Desenvolvimento de habilidades: resolução de problemas, lógica, linguagem matemática e interpretação de dados.

C – Argumentação: se a justificativa da validação de cada modelo será formalmente, a utilização de definições ou cadeias de proposições já demonstradas, por exemplo, diante da seguinte função $f(x) = mx + b,\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, conclui que o modelo não é válido por que $x = 0$ logo $f(0) = b$, ou essa validação acontecerá informalmente, através de testes particulares, ou seja, observar apenas onde o gráfico intercepta o eixo das ordenas (eixo y), interpretando que não tem sentido se o custo do docinho é $zero$ real não pode gerar um lucro de b reais.

C.1 - Formal: estrutura das proposições matemáticas formais (axiomas e teoremas); linguagem simbólica; rigor.

C.2 - Informal: Enunciados/teoremas/afirmações com argumentação do tipo:

C.2.1 - Testes particulares (numéricos computacionais...)

C.2.2 – Argumentações físicas (material didático concreto, ...)

C.2.3 - Argumentação em linguagem oral: descrição oral.

C.2.4 - Argumentação em linguagem natural escrita: texto em português;

C.2.5 - Pragmático: verbalização ou uso de proposições sem preocupações com a verdade.

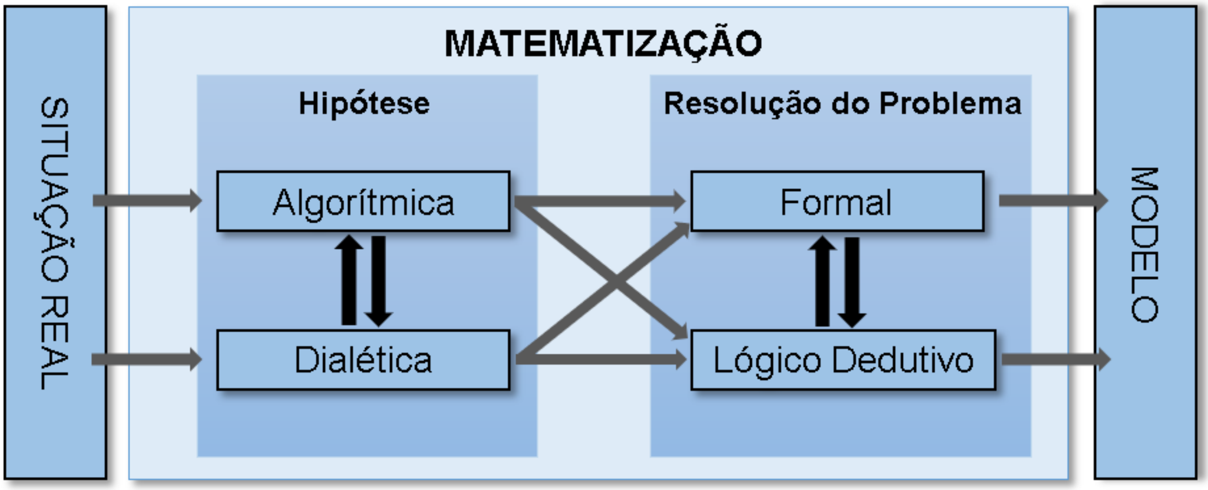
D - Sistematização pedagógica: a forma de como eles buscaram o embasamento matemático (ou não-matemático) para interpretar e argumentar cada modelo construído.

D.1 - Conhecimentos estruturados: conceitos e propriedades estudados de forma ordenada (demonstradas em ordem e pedagogicamente organizadas do simples para complexo) e completa (todas as propriedades);

D.2 - Conhecimentos esparsos: conceitos e propriedades estudados de forma incompleta, estudado/usados na medida que vão sendo necessários;

Ao final da construção de cada modelo, foi analisado sintetizadamente, de acordo com a Figura 8, como essas categorias relacionaram-se entre si, ou seja, a desenvoltura do conhecimento, desde a concepção da hipótese até a validação, como os estudantes articularam a problematização com a matemática.

Figura 8 - Esquema de caracterização da Matematização



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Hipótese Algorítmica: se a confecção do modelo aconteceu através do algoritmo apresentado pelo software ou aluno pelas principais características do modelo associou alguma função. Área do conhecimento interna a Matemática (A).

Hipótese Dialética[29]: se a confecção do modelo aconteceu através da associação algum fenômeno do modelo, por exemplo, a cada dez centavos de acréscimos a vendas despencavam em 6 unidades.

Resolução Formal: Através da Hipótese Algorítmica ou Dialética utilizam argumentos formais (C.1) para solucionar o problema.

Resolução Lógico Dedutivo: Através da Hipótese Algorítmica ou Dialética utilizam argumentos informais (C.2) para solucionar o problema.

[29] O termo dialético aqui foi utilizado por uma questão de estética, pois o raciocínio lógico dedutivo é uma forma de argumentação dialética. Lembrando que não significa uma matemática não precisa, ou sem objetividade. A dialética é uma ação de argumentação, de discussão, de convencimento do outro.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

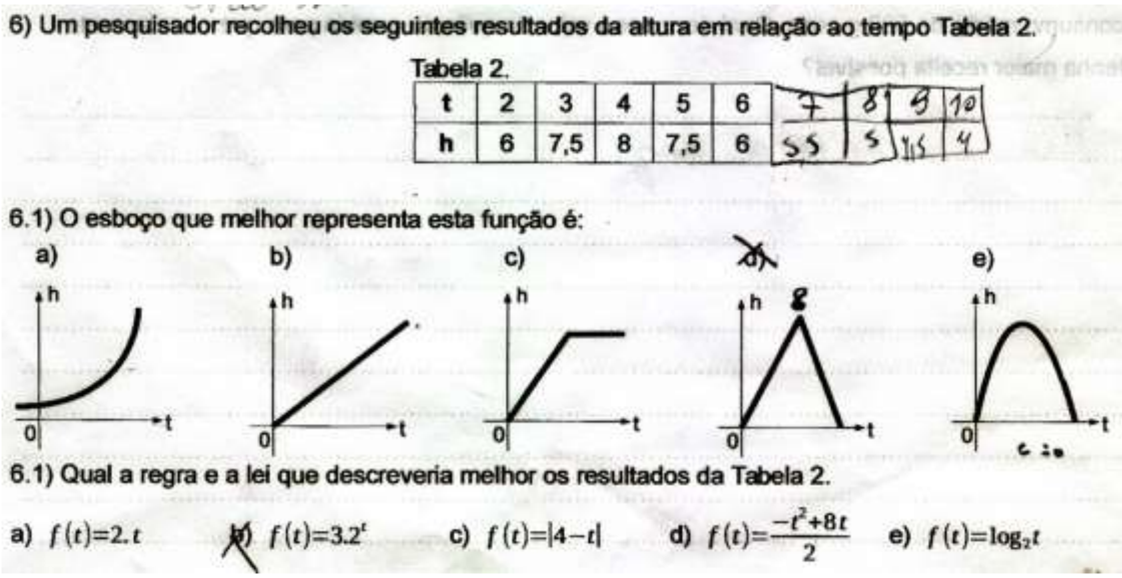
Neste capítulo, são apresentados os principais resultados obtidos a partir da aplicação da pesquisa. Esses resultados foram analisados com a finalidade de responder ao problema proposto. Dar-se-á a apresentação e análise desses dados, a partir de três categorias distribuídas nas seções que seguem: Levantamento das características atuais da Matemática, quando será feita uma análise da contextualização dos conhecimentos prévios para a atividade de modelagem; interação com o modelo e a matematização, etapas descritas da modelagem no capítulo 2.6.1 deste trabalho, quando se analisará através dos parâmetros estabelecidos na Metodologia.

4.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

Nesta seção de contextualização, busca-se parâmetros inicias, não com a finalidade de avaliar, mas diferenciar as oportunidades que a atividade de modelagem proporciona para os estudantes expressarem a solução do problema.

Na aplicação do questionário de sondagem, percebe-se problemas internos da Matemática (A.1), quando o tema são funções. No exercício apresentado na figura 9, percebe-se que ao completar a tabela, o estudante compreende sequências a padrões, entretanto esse raciocínio lógico não consegue se relacionar com a função de formação correspondente e muito menos aponta alguma solução. A alternativa escolhida para a questão 6.1 e 6.2, expõe a falta de compreensão das principais características das funções, evidenciada na questão seguinte ao solicitar uma explicação pela escolha da questão 6.2, quando 71,42 % dos alunos não conseguiram argumentar, deixando-a em branco, e apenas 21,42% justificaram, mas informalmente (C.2), apenas limitando-se a escrever que realizaram as contas (C.2.1).

Figura 9 - Atividade de associação do problema com o gráfico e a lei



6) Um pesquisador recolheu os seguintes resultados da altura em relação ao tempo Tabela 2.

Tabela 2.

t	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h	6	7,5	8	7,5	6	5,5	5	4,5	4

6.1) O esboço que melhor representa esta função é:

a) b) c) d) e)

6.1) Qual a regra e a lei que descreveria melhor os resultados da Tabela 2.

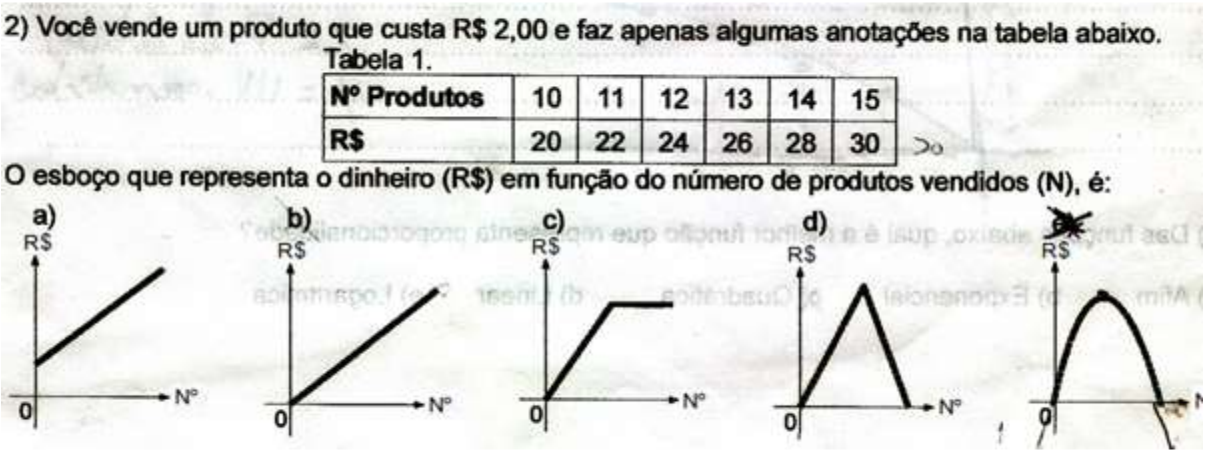
a) $f(t)=2.t$ b) $f(t)=3.2^t$ c) $f(t)=|4-t|$ d) $f(t)=\frac{-t^2+8t}{2}$ e) $f(t)=\log_2 t$

Fonte: Atividade realizada pelos estudantes

Questionados sobre a presença desse exercício (Figura 9), em algum fenômeno do cotidiano, real ou hipotético (A.2), 85,71% dos alunos não souberam responder e destes, 28,57% argumentaram que nunca haviam visto “sequência” similar a esta em alguma situação real. Esse resultado sugere que as aulas ministradas no processo de abstração e aplicação não foram suficientes para os alunos relacionarem esta função com fenômenos físicos ou a outros conteúdos já trabalhados. Provavelmente tanto o assunto como o fenômeno aplicado não eram do interesse do estudante, uma possível justificativa para este problema de relacionar ou aplicar fora do ciclo enunciado → demonstração → aplicação. Esse e outros exercícios mostram resultados alarmantes, quando se procura relacionar os procedimentos matemáticos com outras áreas do conhecimento.

Percebe-se o mesmo problema com as funções lineares na Figura 10, tema trabalhado no corrente ano em geometria analítica. Apesar de 78,57% dos alunos apresentarem melhores resultados internos à Matemática (A.1) para as questões na linguagem matemática, gráficos ou funções, 35,71% os mesmos não conseguem relacioná-las com tabelas ou problemas do cotidiano (A.2), como problemas envolvendo quantidades de um produto pelo dinheiro obtido na venda de cada unidade.

Figura 10 - Relacionar o problema linear com o gráfico e justificar



2) Você vende um produto que custa R$ 2,00 e faz apenas algumas anotações na tabela abaixo.

Tabela 1.

Nº Produtos	10	11	12	13	14	15
R$	20	22	24	26	28	30

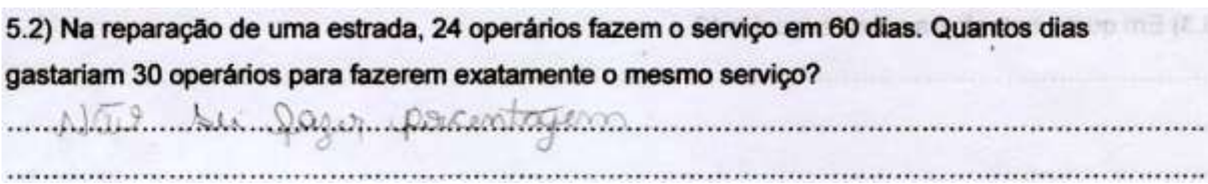
O esboço que representa o dinheiro (R$) em função do número de produtos vendidos (N), é:

Fonte: Atividade realizada pelos estudantes

Avaliando o simbolismo utilizado em todo o questionário, 40% dos estudantes abandonaram questões, como calcular o valor de para uma função dada, por não compreenderem o que estava sendo perguntado, fato que evidencia um problema sério para a própria Matemática (A.1), demonstrando a falta de significado para alguns símbolos da grafia matemática. Esse resultado melhora para 100%, quando a mesma questão é reformulada na linguagem usual dos estudantes (C.2.4): “qual é o resultado da função, quando x é igual a 20”. A possível justificativa para o abandono de expressões matemáticas, provavelmente é a pouca compreensão de perguntas através de símbolos e se não compreendem o que está sendo perguntando, não há meios de argumentarem, seja Formal ou Dialética, cessando completamente qualquer forma de resolução (C), tornando o conhecimento adquirido completamente inútil neste contexto.

Na resolução de problemas, 42,85 % dos alunos deixaram em branco esse tipo de questão, revelando problemas de associação externa à Matemática (A.2). Provavelmente existem os mais diversos fatores para justificar essa porcentagem, como qual a motivação que teriam para responder este questionário, por exemplo, mas partindo dos fatos de terem deixado em branco e uma visão geral do contexto (Figura 11) e (Figura 12), fica evidente de não ser uma tarefa trivial para eles.

Figura 11 - Estudante não consegue identificar uma regra de 3 simples



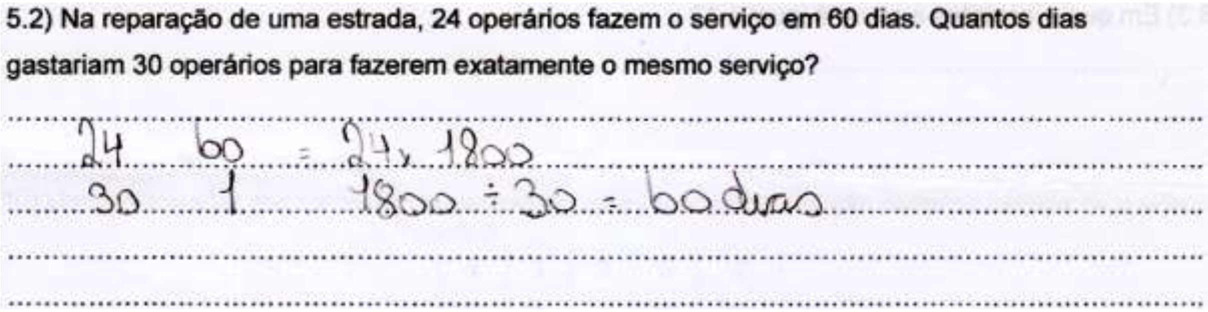
5.2) Na reparação de uma estrada, 24 operários fazem o serviço em 60 dias. Quantos dias gastariam 30 operários para fazerem exatamente o mesmo serviço?

Não sei fazer porcentagem

Fonte: Atividade realizada pelos estudantes

Nota: O estudante respondeu, “Não sei fazer porcentagem”

Figura 12 - Estudante resolve a questão e não percebe erro na resposta

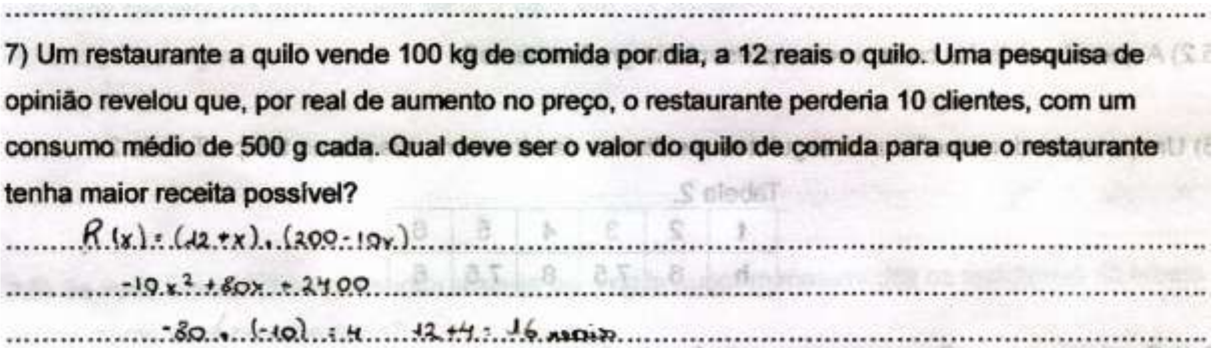

5.2) Na reparação de uma estrada, 24 operários fazem o serviço em 60 dias. Quantos dias gastariam 30 operários para fazerem exatamente o mesmo serviço?

24 60 = 24 x 1800
30 1 1800 ÷ 30 = 60 dias

Fonte: Atividade realizada pelos estudantes

Novamente, pode-se dizer que, quando o problema é apresentando fora do procedimento didático: enunciado → demonstração → aplicação, o estudante não consegue mais relacionar o conteúdo adequado, mostrando que esta forma de preparação não é suficiente para resolver os mais diversos problemas e fora deste arranjo o aumento da dificuldade fica evidente nos dados coletados. Processos mecânicos, repetição sem um significado especial para o aluno é outro fator que pesa para esses dados, pois 28,57 % dos jovens resolveram o problema não da forma como foram ensinados, ou seja, utilizaram mais a matemática dialética em testes lógicos (C.2) e apenas 28,57% dos mesmos resolveram do jeito que foram ensinados, utilizando-se da argumentação formal (C.1), para o problema da Figura 10, contudo mesmo com a utilização do algoritmo correto, traduziram perfeitamente do português para a Matemática, não conseguiram concluir ou utilizaram outras estratégias para achar o resultado como na Figura 13.

Figura 13 - Matematização dos problemas do 2º grau


7) Um restaurante a quilo vende 100 kg de comida por dia, a 12 reais o quilo. Uma pesquisa de opinião revelou que, por real de aumento no preço, o restaurante perderia 10 clientes, com um consumo médio de 500 g cada. Qual deve ser o valor do quilo de comida para que o restaurante tenha maior receita possível?

R(x) = (12 + x) . (200 - 10x)
-10x² + 80x + 2400
-80 ÷ (-10) = 4 12 + 4 = 16 reais

Fonte: Atividade realizada pelos estudantes

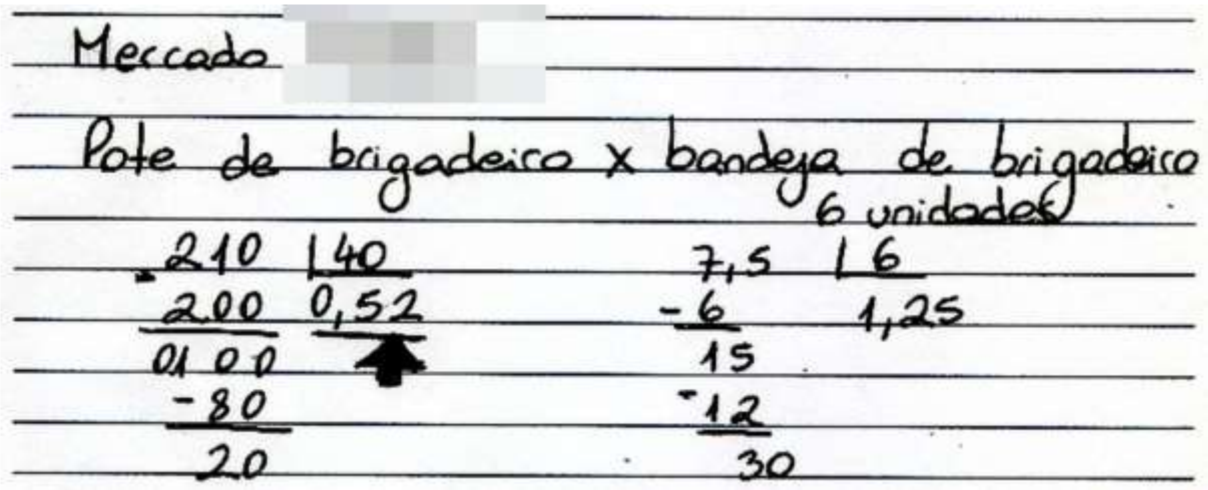
Durante a entrevista, percebeu-se que poucos alunos se sentiam encorajados a fazer algum curso superior na área de exatas, sendo que 85,71% deles afirmaram desconhecer quais cursos têm a disciplinas de Matemática em seu currículo, questionando ainda sobre qual a necessidade da mesma, por exemplo, para enfermagem ou pedagogia. Essa aversão é evidenciada por 57,14% dos estudantes, que sentem dificuldade em compreender a matéria e 64,28% acham que a matemática aprendida na escola só servirá para algum concurso (ENEM) e nada mais. Apenas 28,57% dos estudantes escolheriam cursos como engenharia e contabilidade pela facilidade com os números, contudo não conseguem imaginar a empregabilidade da matemática no seu dia a dia, além da utilidade da mesma para uma futura profissão.

Através deste diagnóstico, tentou-se contextualizar os conhecimentos matemáticos dos estudantes, com a finalidade de isolar as possíveis características a serem observadas durante as atividades de modelagem. Apesar desse diagnóstico lembrar testes tradicionais, o citado material não tem a finalidade de avaliar, criticar ou confrontar a modelagem com as metodologias adotadas pela escola, isso por quatro motivos considerados relevantes pelo pesquisador deste trabalho: primeiro, por acreditar que este material não é suficiente para abordar um assunto com tamanha complexidade como a avaliação; segundo, porque no momento da execução deste material de diagnóstico, os estudantes não tinham se preparado, dada a exigência de conhecimentos vistos há dois anos atrás, diferentemente do ocorrido na confecção de cada modelo, quando os estudantes se preparavam para cada atividade; terceiro, a base dos conhecimento explorados na modelagem não foram construídos exclusivamente nestas atividades de modelagem, ou seja, muitas das concepções ou ideias que serão observadas foram construídas no modelo tradicional de ensino e por último e considerado o mais importante, a motivação era diferente entre este questionário e o modelo. De modo que o objetivo é apenas enquadrar as principais características possíveis de serem exploradas nesta atividade de Modelagem Matemática.

4.2 INTERAÇÃO COM O MODELO

No primeiro contato com a modelagem, já foi possível analisar alguns conhecimentos matemáticos necessários para conhecer as características e especificidades da situação-problema que é a venda de doces. No dilema da escolha de como obter os doces, estabeleceu-se inicialmente a compra da matéria-prima pronta para a fabricação ou a revenda de doces em padarias locais. Os estudantes poderiam ter utilizado um raciocínio não-matemático para apenas julgarem o que seria mais prático, todavia concluíram em decorrência de cálculos simples que através da fabricação do produto obteriam um lucro maior, conforme mostrado na Figura 14.

Figura 14 - Verificação da modalidade mais rentável



Fonte: atividade dos estudantes

Nota: O estudante não concluiu a divisão, acabou desconsiderando um centavo (R$ 0,01).

Apesar de alguns alunos utilizarem recursos tecnológicos para resolver, como celulares (C.2.1), outros preferiram desenvolver o algoritmo da divisão evidente na Figura 14, algoritmo da divisão aplicado em problema concreto aparentemente de fácil entendimento (C.2.2) para auxiliar na decisão da melhor modalidade de vendas, ou seja, associação a fenômenos econômicos (A.2.3). Independentemente do método utilizado para esta decisão, intuitivamente dividiram o valor pela quantidade de doces, obtendo então, o preço por unidade, mostrando um pequeno exemplo da utilização de proporcionalidade, ou seja, a associação do conteúdo ao ambiente do estudante (A.2.3). Embora, tratando-se de uma comparação de grandezas, através de uma aritmética simples, entende-se a importância de valorizar este fato, uma vez que, em sala de aula, em problemas similares, os alunos apresentaram dificuldades em desenvolver questões que envolvam, por exemplo, distância, velocidade e tempo, tendo-se desse modo, uma finalidade não limitada apenas a aplicação, mas associação a fenômenos reais (B.2) e o desenvolvimento de habilidades matemáticas como a resolução de problemas e interpretação de dados (B.3).

É importante ressaltar antes de qualquer crítica às atividades propostas nos livros didáticos de Matemática ou Física que, neste caso, os estudantes buscavam uma solução para um problema de extrema relevância para o grupo, sendo assim uma motivação maior quanto ao empenho da maioria no intuito de solucionar o problema através de algum método, fato este que vai perfeitamente ao encontro do que a Modelagem Matemática pode proporcionar segundo alguns autores:

> A questão motivacional e as relações entre matemática e realidade mediadas pela Modelagem Matemática parecem então estar interligadas de modo que, por um lado atribuir sentido e construir significados em Matemática demandam situações de ensino e aprendizagem que induzam relações entre a Matemática e a vida dos alunos fora da escola; por outro lado, as atividades de Modelagem Matemática podem favorecer a aproximação da matemática escolar com problemas extraescolares vivenciados pelos alunos.(ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p. 31)

Biembengut (1999, p.38) destaca que “nem sempre é simples escolher um tema que vá ao encontro de todos os membros do grupo”, portanto, esta atividade possui algumas características bem peculiares para essa dedicação dos estudantes.

No segundo encontro, no momento de decidir o valor inicial dos brigadeiros, os estudantes mostraram insegurança evidente na pergunta: “O que o senhor acha, professor?”

Com toda a explicação inicial do que venha a ser Modelagem Matemática e ainda como deve ser a postura do professor perante o trabalho, mesmo com a pesquisa e cálculos realizados, os alunos mesmo assim esperavam o último aval do professor, que respondeu com um novo questionamento: “O que vocês acham?”

> Na Modelagem, esse sistema tem de ser mudado. Não se deve mais assistir aos objetos matemáticos, mas manipulá-los, porque rompemos com a concepção de que o professor ensina e passamos a creditar na ideia de que o conhecimento não está somente nem no sujeito nem no objeto, mas na sua interação. Passamos de objetos que o professor ensina para objetos que o aluno aprende. (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2013, p. 11)

Surpreendidos com a reposta, de forma dialética, os estudantes se convenceram de que suas escolhas não dependiam da opinião do professor, mas da observação do que os números mostravam. Desse modo, eles entenderam que deveriam buscar as respostas para suas dúvidas, sendo essa decisão embasada em pequenos testes numéricos (C.2.1), operações matemáticas, envolvendo custo e lucro, exigindo uma compreensão mais apurada do problema, ou seja, além de compararem valores, precisariam considerar todas as variáveis possíveis (A.2.1). Assim, a finalidade dessa ruptura com as respostas prontas não ficaria restrita à resolução de problemas matemáticos (B.3), conduziria sim o estudante em consequência à associação a fenômenos de seu interesse (B.2).

> Quando trabalhamos não só com problemas matemáticos, mas com a Modelagem, em que o aluno é o sujeito do processo cognitivo, esse, com certeza, vai poder enxergar além. E não apenas quando ao conteúdo matemático, mas poderá ver como esse conteúdo matemático é importante nos processos decisórios em sociedade. (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2013, p. 29)

A escolha de 35 docinhos diários foi feita a partir dos resultados obtidos em quatro dias de venda, conforme Tabela 1 para, desse modo, evitar desperdícios. Nesse processo de escolha, apresentaram duas situações que merecem destaque.

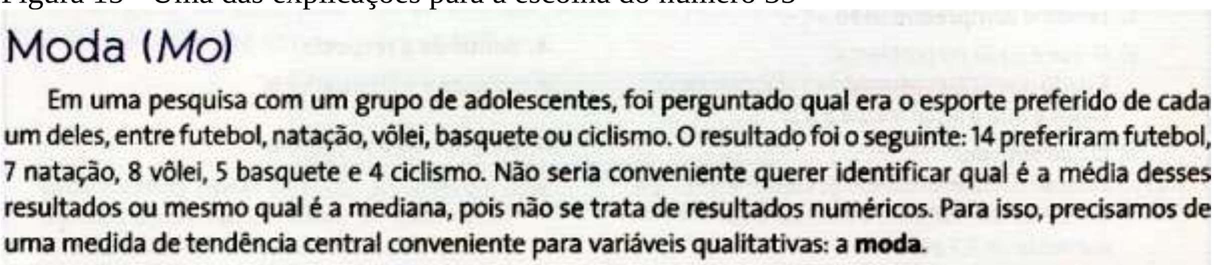
Tabela 1- Primeira coleta de dados

Datas	Unidades
24/05	38
26/05	35
28/05	32
03/06	35

Fonte: Registro do diário de vendas dos estudantes

A primeira foi a forma de como os alunos fizeram a escolha, sendo que um pequeno grupo optou pelo número 35 por ser este o mais próximo à média aritmética - argumentação formal (C.1), enquanto que outro grupo escolheu 35 em virtude da frequência em que aparecia na Tabela 1 – argumentação esta aparentemente informal com verbalização sem muita preocupação com a verdade (C.2.5). Contudo dentro dessas observações, temos dois tópicos matemáticos importantes: média aritmética e a moda, que fazem parte do conteúdo de estatística que ainda não havia sido trabalhado com os sujeitos da pesquisa. Apesar convergência das duas formas para o mesmo número, os alunos não tinham certeza sobre a escolha deste número inicial de docinhos, logo começam a realizar uma nova pesquisa para encontrar uma justificativa para o número 35, sendo que a resposta foi encontrada na semana seguinte no seu próprio livro didático (C.2.5), figura 15.

Figura 15 - Uma das explicações para a escolha do número 35



Moda (*Mo*)

Em uma pesquisa com um grupo de adolescentes, foi perguntado qual era o esporte preferido de cada um deles, entre futebol, natação, vôlei, basquete ou ciclismo. O resultado foi o seguinte: 14 preferiram futebol, 7 natação, 8 vôlei, 5 basquete e 4 ciclismo. Não seria conveniente querer identificar qual é a média desses resultados ou mesmo qual é a mediana, pois não se trata de resultados numéricos. Para isso, precisamos de uma medida de tendência central conveniente para variáveis qualitativas: a **moda**.

Fonte: (DANTE, 2014, p.48)

A verificação de alguns resultados necessários para a confecção do modelo, ocupou um tempo não previsto nessa fase de interação, ou seja, apesar do encerramento das atividades de campo, os alunos precisaram de mais tempo para a compreensão os resultados coletados.

> Os alunos estão acostumados a ver o professor como transmissor de conhecimentos e quando são colocados no centro do processo de ensino-aprendizagem, sendo responsáveis pelos resultados obtidos e pela dinâmica do processo, a aula passa a caminhar em ritmo mais lento. (BASSANEZI, 2009, p. 37)

No ensino tradicional, o professor está acostumado a fazer breves comentários ou conectar de forma dinâmica, muitas vezes, conteúdos que são pré-requisitos para a construção do novo conhecimento matemático, nesta atividade de modelagem, porém, os estudantes tiveram que buscar os tais conhecimentos e por não lembrar ou dominar toda a matemática não sabiam onde começar a procurar.

Ainda que para muitos viesse a parecer um “chute”, a atividade instigou os estudantes à verificação do porquê dessa escolha, uma vez motivados pela dúvida e curiosidade, através de pesquisa e debate, produzindo, assim, proposições importantes à própria Matemática (A.1). Embora o trabalho tenha motivado o estudo de estatística, não conduziu os alunos, através dos exercícios, ao aprofundamento. Limitaram-se em compreender, de uma forma geral, do que se tratava alguns assuntos e “praticaram” os tópicos necessários diretamente na solução do problema. Diante dessa postura, é possível sublinhar, que oralmente durante a sondagem na sala de aula os estudantes deixaram transparecer conhecimentos do assunto estudado (C.2.3), porém com alguns enganos entre os nomes “média e mediana”.

Assim, em concordância com o acima exposto, devemos considerar os seguintes pontos quanto a aprendizagem:

a) ocorreu de forma não linear e fragmentada: buscaram o que interessava ou por mera curiosidade;

b) breve, pois não foi aprofundado, deixando a desejar no domínio do assunto;

Contudo, o desafio em verificar o número 35 conseguiu associar na ordem prática, tópicos quase inteiros para a solução de pequenos problemas, tendo-se assim uma sistematização pedagógica voltada para resolver o necessário (D.2).

> Na perspectiva contextual, consideram a inclusão de situações-problema nas aulas de Matemática com a finalidade de contextualizar ou mostrar aplicações dos conteúdos matemáticos levando em conta principalmente questões motivacionais. (KAISER E SRIRAMAN apud ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p. 28)

Após pesquisas feitas de produtos, fabricação e embalem, os estudantes estimaram o custo de R$ 0,40 (quarenta centavos) por docinho, partindo dessa aproximação, começaram com o lucro de R$ 0,60 (sessenta centavos) por unidade com acréscimos de R$ 0,10 a cada 3 amostras daquele valor coletado ou mais, registrado na tabela abaixo.

Tabela 2 – Todos os dados do modelo

PREÇO	QUANTIDADE	LUCROS
1	35	21
1	33	19,8
1	34	20,4
1,1	32	22,4
1,1	20	14
1,1	29	20,3
1,2	31	24,8
1,2	21	16,8
1,2	25	20
1,2	19	15,2
1,3	14	12,6
1,3	21	18,9
1,3	13	11,7
1,4	5	5
1,4	21	21
1,4	10	10
1,4	4	4
1,5	10	11
1,5	9	9,9
1,5	17	18,7
1,5	8	8,8

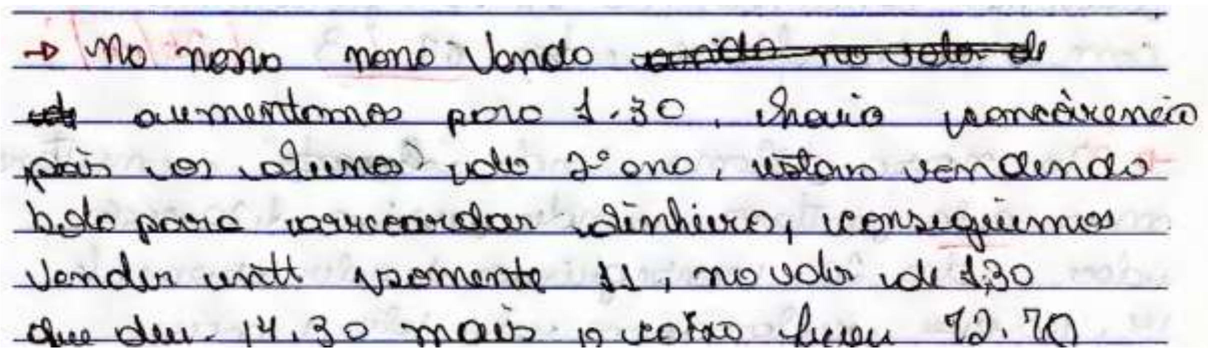
Fonte: Reprodução dos dados da agenda de um dos estudantes

Cada um dos grupos utilizou da forma mais conveniente os resultados coletados durante a fase da coleta de dados para o modelo. Alguns grupos escolheram 3 valores para cada intervalo de preço e aplicaram média aritmética do lucro enquanto que outros escolheram todos os valores coletados. Alguns estudantes utilizaram apenas um valor de cada intervalo de preço, mas mesmo com essa liberdade de trabalhar com valores convenientes, nenhum grupo ou estudante utilizou o intervalo de preços de R$ 1,40 para a confecção do modelo, pois segundo eles, os dados coletados durante esse intervalo apresentaram discrepância em relação aos outros dados por causa de atividades atípicas da escola. Essa liberdade com os dados gerou modelos com coeficientes ligeiramente diferentes, mas todos concluíram de forma muito similar, não alterando a interpretação dessa pesquisa.

Uma outra argumentação foi utilizada para o descarte do R$ 1,40, os estudantes em outras áreas do conhecimento haviam trabalhados com o Método científico no laboratório, logo eles descartaram estes valores por não terem acontecido em condições normais, ou seja, o experimento para eles deveria ser controlado. Nota-se a interdisciplinaridade desta atividade de modelagem, principalmente com as atividades desenvolvidas por outros professores no laboratório.

A conclusão da coleta de dados para a matematização se estendeu além do esperado por causa das grandes variações das vendas (Tabela 2), devido a feriados e atividades escolares, como Festa Junina, registrado na Figura 16. Como sugestão para a correção dessas variações, com a finalidade de não estender muito esta fase, indicou-se a utilização de conteúdos já estudados, como as médias, uma vez que optaram por continuar a venda além do tempo planejado. Esperava-se que a sugestão conduzisse à utilização do conteúdo de estatística pesquisado recentemente, porém opção foi pela continuidade das vendas, deixando a impressão de que aprendizagem anterior, que se deu de forma fragmentada em problemas pontuais (D.2), não foi suficiente para aplicar em outros fenômenos semelhantes (A.2.1).

Figura 16 - Registro de atividades para compreender a oscilação de valores



→ No nosso nono Vendo ~~[illegible] no valor de~~
~~de~~ aumentamos para 1,30, Havia concorrencia
pois os alunos do 2º ano, estavam vendendo
bolo para arrecadar dinheiro, conseguimos
vender ~~unt~~ somente 11, no valor de 1,30
que deu 14,30 mais o caixa ficou 72,70

Registro da agenda de um estudante

4.3 MATEMATIZAÇÃO

A matematização começou com oficinas de informática (Figura 17), vindo-se a diagnosticar, através de conversas informais, que o computador era apenas utilizado para o entretenimento, ou seja, jogos e navegação na internet, pois muitos relataram que desconheciam softwares similares ao Office Excel bem como a utilidade de alguma planilha de cálculo. Nesta oficina, foram apresentados os principais softwares que poderiam auxiliar nas atividades de modelagem, como o LibreOffice Calc, Geogebra e alguns conceitos de linguagem de programação para a utilização do Scilab, em vista disso os estudantes impressionaram-se com a versatilidade e velocidade de tais ferramentas para realizar várias operações e, principalmente, pela constatação do rigor dos símbolos para resolver expressões matemáticas, como por exemplo, a utilização dos parênteses nas planilhas de cálculos.

Figura 17 - Oficinas de Matemática

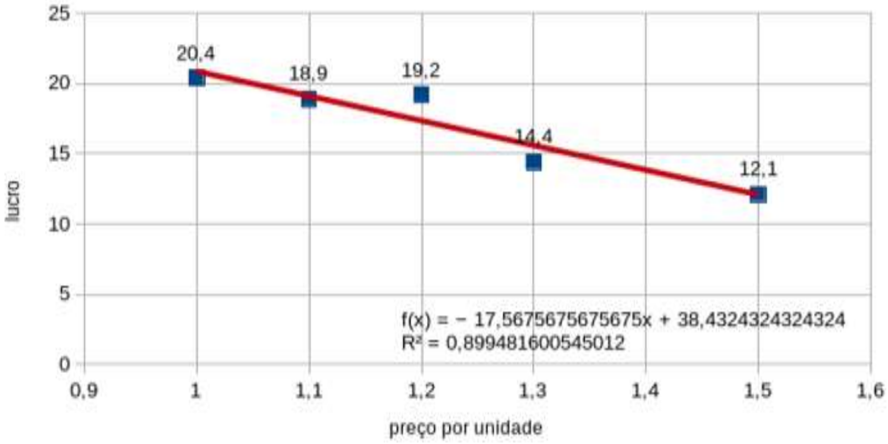
Fonte: Fotografia realizada pelo autor

Apesar de essas oficinas serem utilizadas para qualquer conteúdo matemático ou até mesmo integradas ao currículo dos estudantes, elas são imprescindíveis para atividades de modelagem, pois mesmo que o foco das atividades não seja a informática, ainda que o modelo para analisar a quantidade de dados do fenômeno escolhido pelos alunos sem o auxílio do computador seja bastante trabalhoso. No entanto, deve-se considerar que o uso dos recursos tecnológicos como o computador, não são suficientes para garantir transformações significativas na aprendizagem, segundo Almeida, Silva e Vertuan (2016), mas a incorporação desta tecnologia como ferramenta de apoio pedagógico, proporcionam um aprofundamento a aspectos importantes da linguagem matemática (A.1) e computacional (A.2.2), como por exemplo, a importância de variáveis nas equações tais como a utilização de parênteses, multiplicações de monômios, polinômios e produtos notáveis.

4.3.1 Ajuste Linear

A construção de um modelo de ajuste linear (Figura 18) começou com a tabulação dos dados coletados na fase de interação organizados da seguinte maneira: O eixo das abcissas, eixo x, representava o preço da unidade do docinho, enquanto que o eixo das ordenadas, eixo y, o lucro total obtido para cada valor, mas os estudantes chamavam de “caixa” em alusão ao dinheiro que sobrava na caixa da turma após os descontos. O objetivo dos estudantes era encontrar o preço ideal da unidade para obter o lucro máximo, logo então fizeram o primeiro ajuste linear para a função que representasse preço por lucro.

Figura 18 - Ajuste Linear realizado pelos estudantes



	Preço	Lucro(caixa)
✓	1	20,4
✓	1,1	18,9
✓	1,2	19,2
✓	1,3	14,4
✗	1,4	10
✓	1,5	12,1

Fonte: *Print* do LibreOffice Calc 5.2
Nota: Os estudantes não utilizaram o ponto (1,4; 10)

Neste primeiro ajuste (Figura 18), os alunos começaram a compreender como são captados os resultados das tabelas dos problemas, envolvendo Física e Matemática e como se associa a fenômenos reais, na economia, por exemplo (A.2.3).

A verificação do modelo partiu da observação do coeficiente de correlação, 89% de aproximação (Figura 18), ao que 20% não souberam opinar, mas 80% dos estudantes consideraram ótimo, pois durante as palestras de modelagem compreenderam que o objetivo do modelo era “descrever uma curva” que se aproximasse ao máximo dos dados coletados, em acordo com a compreensão inicial sobre modelagem que deixaram transparecer nas primeiras falas, neste caso, com valor bastante expressivo. Orientados a buscar maiores informações sobre a função linear, todos os estudantes envolvidos apresentaram uma característica interna ao conhecimento Matemático (A.1), o coeficiente angular, com o qual a turma concordava estar de acordo com os dados coletados pois, conforme aumentaram o preço, durante a coleta de dados, o lucro decaia, ou seja, buscava-se uma função decrescente para isso, o mencionado coeficiente deveria ser negativo. Outros fatos internos à Matemática (A.1) foram discutidos, um dos grupos, 28,57%, questionou a validação do modelo através da observação do coeficiente linear, ponto que o gráfico intercepta o eixo das ordenadas (eixo y). Perceberam que este modelo era inadequado para o problema apresentado, pois partiram do fator de que o domínio da função representava o valor da unidade, logo não poderia $f(0) = 38{,}43$ no contexto utilizado, ou seja, lucrar R$ 37,64 com docinhos com o preço zero. O argumento verbalmente (C.2.4) apresentado pelos alunos está associado ao fenômeno real (A.2.3), intrinsecamente ligado ao material concreto (C.2.2), dados coletados, conduziram os estudantes para um argumento formal (C.1), na frase: "quando o x igual a zero o resultado é 38,43. Tem-se aqui uma interpretação muito interessante do gráfico de acordo com a própria Matemática (A.1) e sua associação a fenômenos reais (A.2.3). Dentro desse debate, a dúvida de um dos estudantes sobre a expressão $f(0) = 37{,}64$, um problema interno à matemática (A.1), desencadeou três estratégias de verificação sugeridas pelos demais colegas para auxiliar este estudante a compreender o que estavam discutindo, tanto formal (C.1) como informalmente (C.2), de modo especifico, através de testes numéricos (C.2.1).

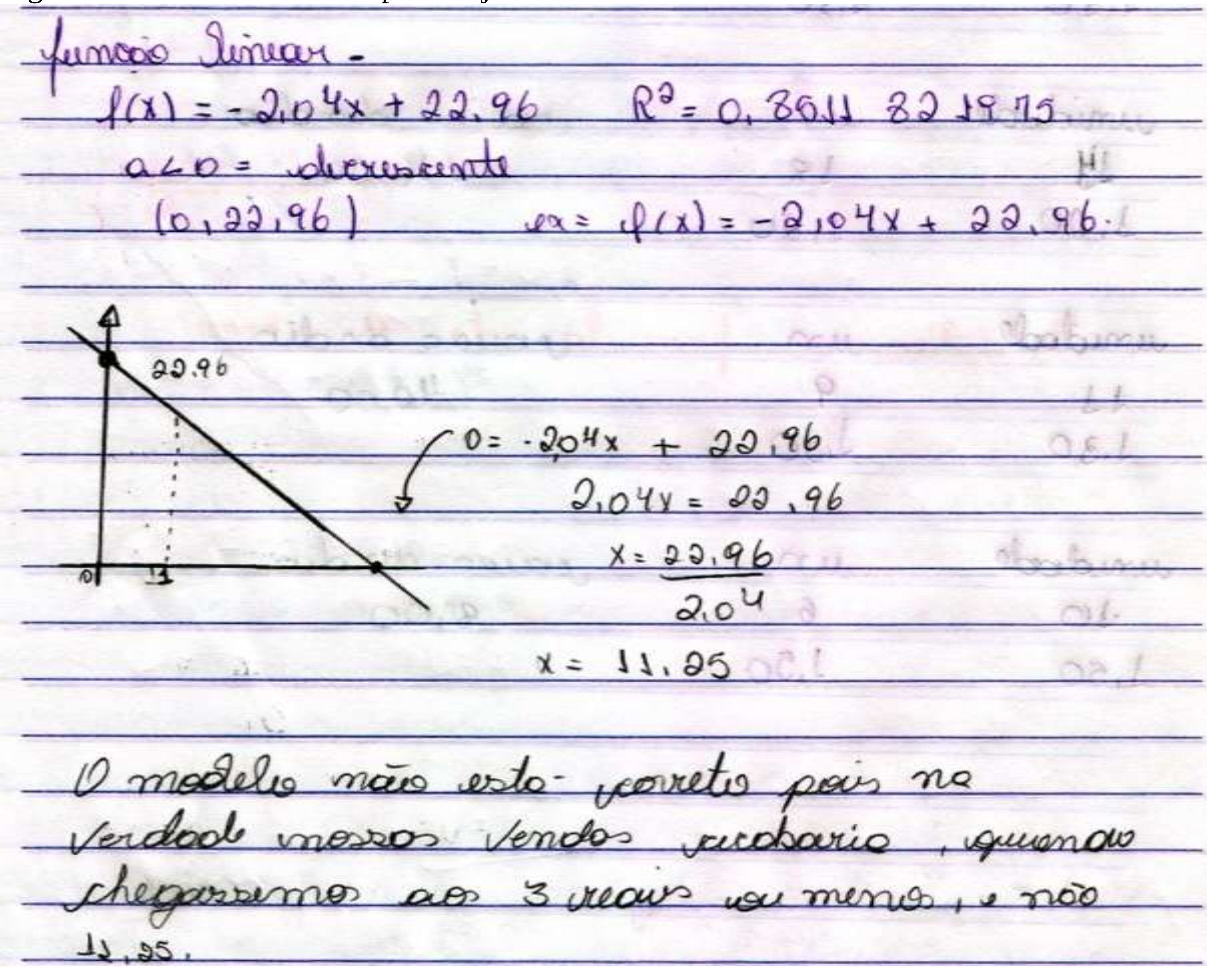
A primeira, o grupo tomou a iniciativa para representar graficamente no *software* Geogebra para demonstrar o resultado que debatiam, esta percepção conduz para uma solução dialética (C.2), através de testes computacionais (C.2.1). A outra estratégia seria pegar uma calculadora e fazer as contas (C.2.1), ou seguir o seguinte raciocínio, transcrito abaixo:

"Qualquer coisa multiplicada por zero é zero, logo -17.56 se anula e sobrará 38.43, que é o lucro obtido."

Os argumentos utilizados para o coeficiente linear, ponto de interceptação da função com o eixo das ordenadas, pode-se perceber que estão embasados na linguagem formal matemática (C.1), para justificar esta sobra de dinheiro. Nesta fala, "qualquer coisa multiplicada por zero é zero", apesar de não terem provado, a abstração está presente nesse raciocínio intuitivo, gerando uma generalização (C.2.5) que fica evidente no termo, "qualquer coisa".

Alguns grupos utilizaram de forma diferente os resultados coletados, ou seja, escolheram alguns valores enquanto que outros tiraram média aritmética desses resultados, etc. Esse tratamento diferenciado de alguns estudantes para com os dados, gerou modelos ligeiramente diferentes, ainda que todos tenham concluído de forma muito similar. A Figura 19, por exemplo, com coeficientes diferentes do modelo da Figura 18, mas com conclusões parecidas. Percebe-se uma aplicação do sinal do coeficiente angular ao afirmarem que se trata de uma função decrescente e intuitivamente perceberam onde o gráfico interceptaria o eixo y. Na escrita do coeficiente, o estudante não está preocupado com formalidades da língua adotada, seja matemática ou português, pelo contrário, ele mistura as duas escritas para dizer que o coeficiente a é negativo (Figura 19), ele se utiliza da igualdade para expressar que é decrescente, neste caso, o estudante estava mais preocupado em descrever o resultado do que com a escrita das linguagens utilizadas (C.2.4).

Figura 19 - Uma das análises para o ajuste Linear



Função Linear.

$f(x) = -2{,}04x + 22{,}96$ $R^2 = 0{,}8611\ 82\ 19\ 75$

$a < 0$ = decrescente

$(0, 22{,}96)$ ex $= f(x) = -2{,}04x + 22{,}96$.

$0 = -2{,}04x + 22{,}96$

$2{,}04x = 22{,}96$

$x = \dfrac{22{,}96}{2{,}04}$

$x = 11{,}25$

O modelo não esta correto pois na verdade nossos vendas recebario, quando chegassemos aos 3 reais ou menos, e não 11,25.

Fonte: Análise do grupo A

A utilização do computador para a construção deste modelo não afastou o uso da escrita formal (Figura 20), intuitivamente eles percebiam onde interceptava o eixo y (C.2.4), mas o eixo do x era necessário resolver uma equação (C.1) para encontrar o zero ou a raiz da função (Figura 21).

Figura 21 - Cálculos presentes

Fonte: Fotografia realizada pelo autor

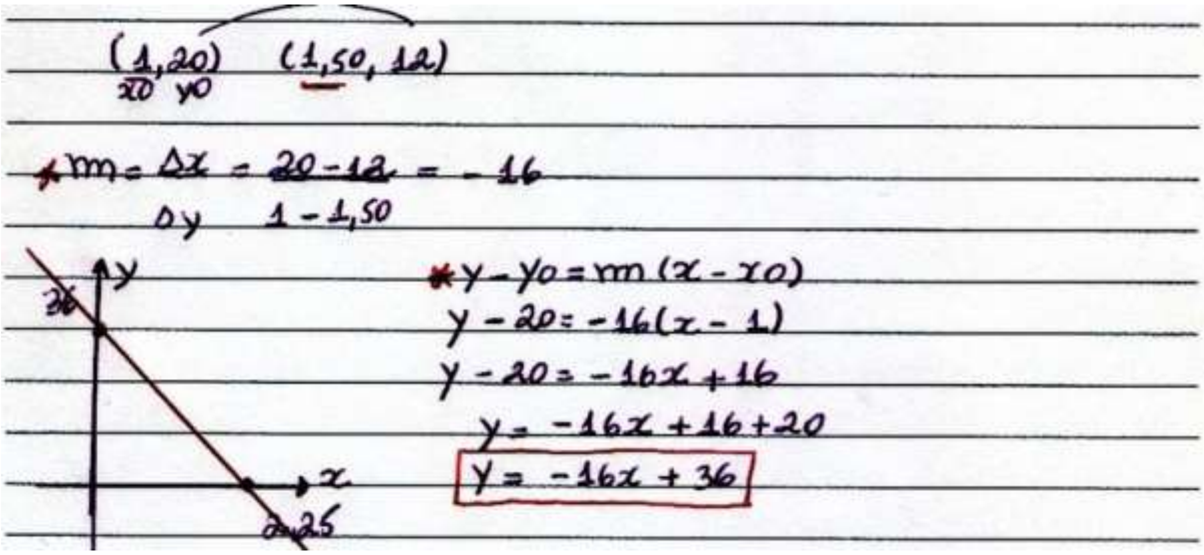
Figura 20 - Netbooks e cadernos

Fonte: Fotografia realizada pelo autor

Alguns estudantes relacionaram este modelo com o conteúdo trabalhado no início do ano letivo, Geometria Analítica. Perceberam que estavam trabalhando com ponto e reta, conceitos matemáticos explorados formalmente (A.1), questionaram ao professor se seria possível aplicar tal saber nesta atividade de modelagem sem a utilização de computadores. Encorajados com a resposta, escolheram dois pontos, apresentaram o modelo na semana seguinte, conforme o conhecimento adquirido no primeiro trimestre (C.1), Figura 22.

É importante ressaltar que os pontos não estão alinhados, pois se trata de uma atividade que envolve dados reais, portando, dependendo dos valores escolhidos, gera funções diferentes.

Figura 22 - Verificação da aplicação da Geometria Analítica



Fonte: Atividade realizada pelo grupo C

Nota: O estudante deliberadamente arredondou os valores para facilitar os cálculos.

Essa última atividade mostrou bons resultados do conteúdo desenvolvido no início do ano letivo com um excelente coeficiente de correlação de 90%, verificado no Scilab. É importante ressaltar que os estudantes foram felizes na escolha dos dois pontos, pois com outros pontos provavelmente teriam uma aproximação pior e quem sabe melhor, porém, este software foi pouco utilizado. Infelizmente a maioria mostrou dificuldade e resistência ao programa, sendo utilizado vagamente por apenas um dos grupos.

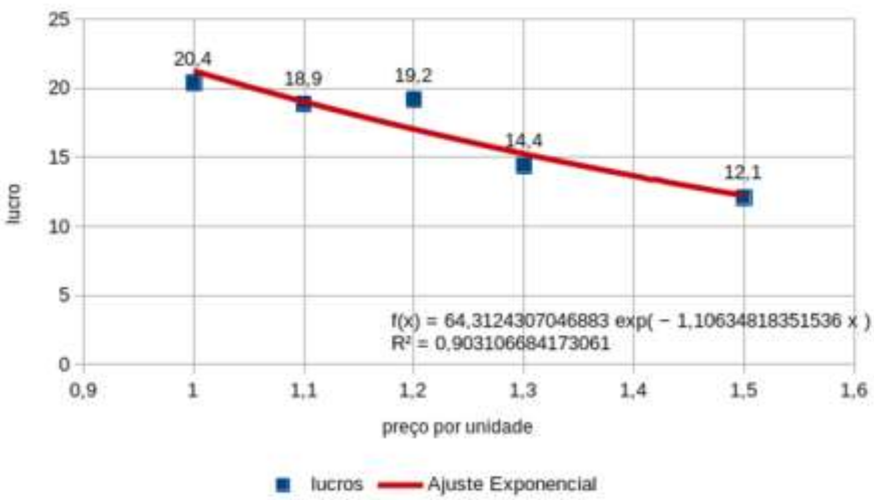
Os saberes matemáticos registrados nesta primeira atividade de ajuste linear mostraram-se de diversas maneiras. Começaram com argumentos informais (C.1) embasados em testes particulares (C.2.1), material concreto (C.2.2) e verbalização pragmática (C.2.5), após pequena sugestão de observação e a familiarização com esta modalidade de encontro sentiram-se encorajados a explorar formalmente (C.1) os principais aspectos desse modelo, respaldados pela compreensão do problema, chegando ao ponto de associar um dos temas de geometria analítica (A.1) a um fenômeno real (A.2.3). Este fato deve ser considerado importante, pois esse conteúdo foi trabalhado apenas no plano cartesiano, sem aplicação. Apesar de a sistematização pedagógica fragmentada (D.2) utilizada pelos alunos não englobar todo o conteúdo de função linear, ou seja, não fizeram uma pesquisa completa e aprofundarem o assunto, a finalidade desta primeira atividade de modelagem contemplou o desenvolvimento de resolução de problemas e a interpretação de dados (B.3) como a associação desta atividade a fenômenos reais (B.2). As possibilidades de exploração dentro desse modelo são promissoras, pois se tivesse complementaridade por parte do professor, poderia ser aprofundado o conteúdo ou introduzida a noção de limites e cálculos mais avançados.

Analisando, de uma forma geral, através do esquema da Figura 8, como se deu a desenvoltura para a construção deste modelo linear, a formulação da hipótese começou de modo algorítmico, uma vez que a resolução deste algoritmo aconteceu tanto formalmente como através do raciocínio lógico dedutivo, onde estas soluções alternavam-se entre si, conforme eram descobertas mais informações sobre o modelo, entretanto o fator predominante para análise final do modelo foi a resolução formal, pois através de características importantes desta função linear, acabaram descartando.

4.3.2 Ajuste Exponencial

Para este ajuste Exponencial, mesmo antes da sua construção (Figura 23), os estudantes, na fase da pesquisa, utilizaram as generalizações construídas no modelo anterior para invalidar este novo modelo observando apenas as características da função exponencial.

Figura 23 - Ajuste exponencial realizado pelos estudantes

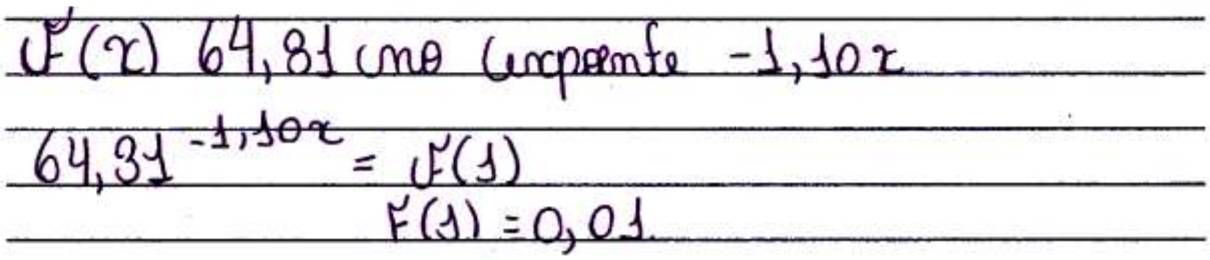


	Preço	Lucro(caixa)
✓	1	20,4
✓	1,1	18,9
✓	1,2	19,2
✓	1,3	14,4
✗	1,4	10
✓	1,5	12,1

Fonte: *Print* do LibreOffice Calc 5.2

O primeiro fato observado unanimemente pelos grupos para descartar este modelo é que a função exponencial interceptava o eixo y, verbalizando sem preocupações com a verdade (C.2.5), o possível resultado. Este fato de interceptar o eixo das ordenas (eixo y) os estudantes adotaram a partir do modelo Linear para descartar futuros modelos. Pode-se notar uma evolução da habilidade de interpretação, graças ao debate anterior, ou seja, de uma maneira geral, compreendiam as principais características do “modelo desejado”, contudo apesar de correto o raciocínio $f(0) = 64{,}31$, a função para eles era equivocadamente representada como $f(x) = 64{,}31^{-1{,}10x}$ (Figura 23), problemas específicos com a falta de prática com essa escrita computacional e matemática, exatamente com a expressão exp. Percebe-se carência de uma atenção mais rebuscada nas funções exponenciais, pois se $f(0) = 64{,}31$, logo não poderia estar representada desse modo na Figura 24, problemas internos à Matemática, principalmente no significado das expressões (A.1).

Figura 24 - Interpretação equivocada da palavra exp



Fonte: Atividade realizada pelo grupo B

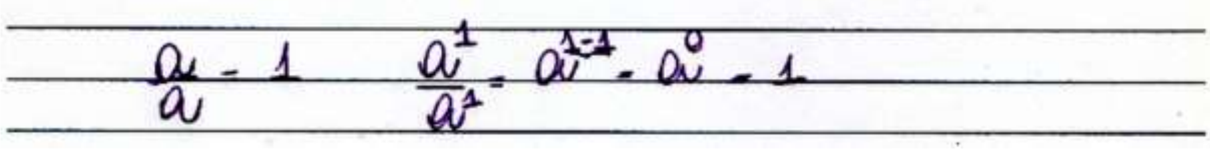
A intervenção do professor foi necessária para alertá-los sobre equívocos entre o resultado sugerido para $f(0)$ e a função representada pelos estudantes na Figura 24, problema gerado por utilização de argumentos que não consideram o significado das proposições (C.2.5). Com base nesta observação do professor, através de representações no GeoGebra (C.2.1), os alunos compreenderam que estavam interpretando de forma errada a função apresentada pelo LibreOffice Calc. Durante esta fase de releitura do argumento que tinham utilizado, surgiu uma dúvida que mobilizou a turma a refletir:

“Por que todo número elevado a zero é um e como se chega a esse resultado?”

Apesar deste fato não ser relevante para análise do modelo, os estudantes sentiram-se instigados a responder à pergunta aparentemente simples para o colega. Observando que os estudantes tinham o interesse em também compreender tal propriedade, o professor os orientou onde buscar essa explicação. A partir desse simples problema, foi possível observar a primeira demonstração generalizada dentro da modelagem (Figura 25) restrita à própria matemática

(A.1), mas parcialmente apresentava elementos de uma argumentação dialética (C.1), especificamente oral (C.2.3) sem preocupações com todos os casos (C.2.5).

Figura 25 - Aluno demonstra o resultado um para o expoente zero

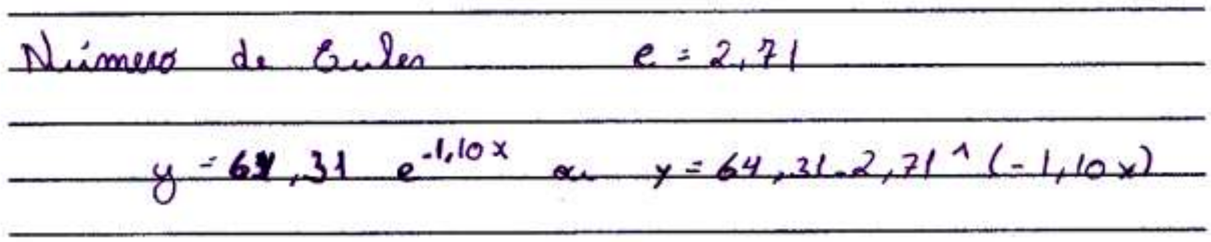


Fonte: Atividade realizada pelo grupo C

É claro que neste exemplo o expoente utilizado não representa formalmente todos os conjuntos numéricos que vale esta propriedade (Figura 25), mas da maneira deles, esclareceram que valeria para qualquer potência (C.2.5). No instante que o professor deixa de apresentar respostas e perguntas organizadamente, a conversa entre eles proporciona generalizações, sem estar demonstrado formalmente para todos os casos, reflexo de uma organização pedagógica fragmentada (D.2) e conhecimento limitado. Apesar de ser uma demonstração um pouco distante do formalismo que estamos acostumados nos livros de Matemática (A.1), no quesito da utilização de letras para representar coeficientes, introduzida por Viète e de Descartes que chamamos, respectivamente, de equação algébrica e de analítica, fica evidente que essa argumentação apresentada pelos alunos tem elementos das escolas logicistas e intuicionistas pelos testes particulares (C.2.1), com um elevado grau de abstração para estas escolas. Por outro lado, seria mais sensato afirmar que foi uma verificação ou prova real de um caso particular mesmo que apresentando problemas de escrita para ser considerada uma demonstração por alguns matemáticos mais puristas, ainda assim são resultados simples e práticos para o uso no dia a dia (C.2.5).

Na semana seguinte, os estudantes retornaram com uma reformulação do modelo (Figura 26) apresentado no encontro anterior (Figura 24), demonstrando aprofundamento no estudo sobre as funções exponenciais (D.2). Nesta representação, descobriram que a expressão exp é a representação do número de Euler (e).

Figura 26 - Correção do significado da palavra exp



Fonte: Atividade realizada pelo grupo D

Nestas atividades, curiosidades e questionamento em relação à definição de Exponencial, apareceram:

O conhecimento deles sobre função exponencial limitava-se em olhar para base para saber se era crescente ou decrescente (Figura 27) e como o número *e* se tratava de um número maior que um e encontra-se na base, logo os estudantes esperavam outro resultado, que não aconteceu, concluindo que: “o conteúdo ensinado estava errado”, argumentação sem um estudo aprofundado (C.2.5).

Figura 27 - Nestas atividades, curiosidades e questionamento em relação à definição de Exponencial, apareceram:

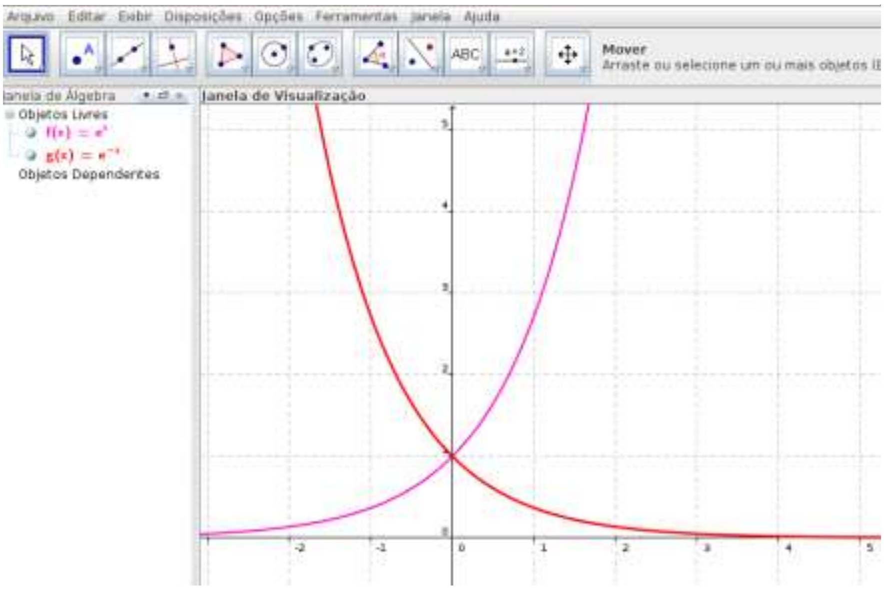
Veja no gráfico de $f(x) = 2^x$ que: $f(2 \cdot 1) = f(2) = 4$ e $(f(1))^2 = 2^2 = 4$, portanto $f(2 \cdot 1) = (f(1))^2$;

- para $a > 1$, a função é crescente $(x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2})$;
- para $0 < a < 1$, a função é decrescente $(x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2})$;
- a função exponencial é sobrejetiva: $Im(f) = CD(f)$, ou seja, para todo número real $b > 0$ existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$ (todo número real positivo é uma potência de a);
- a função exponencial é injetiva $(x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2}$ ou usando a contrapositiva $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2)$, pois ela é crescente ou decrescente;
- a função exponencial é bijetiva, logo, admite função inversa;
- a função exponencial é ilimitada superiormente.

Fonte : (Dante, 2014, p.160)

Segundo eles, através de observações empíricas no GeoGebra (C.2.2), perceberam “que o sinal do expoente” também interfere, argumento embasado na Figura 28 (C.2.1).

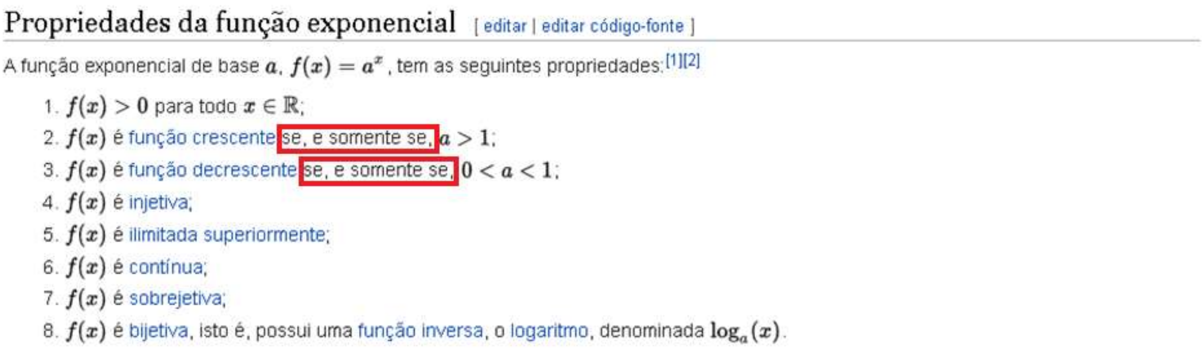
Figura 28 - Análise do sinal da exponencial na base e



Fonte: *Print* do GeoGebra 4.0

Convidados a pensar em uma explicação para este fenômeno, um dos estudantes apresentou a seguinte solução: “por causa daquele produto negativo no expoente, os números ficam invertidos na hora de substituir o x”, uma explicação matemática para a questão (A.1), com a qual 78,57% concordaram e 21,42% não souberam opinar, mas persistiram na ideia de que ensinaram errado para eles. Na busca dos elementos que induziram os estudantes a esse pensamento errado, a primeira pista estava no Wikipedia (Figura 29).

Figura 29 - Propriedade encontrada pelos estudantes na internet



Propriedades da função exponencial [editar | editar código-fonte]

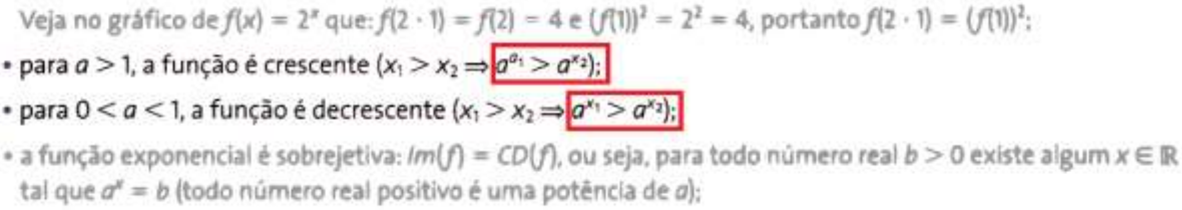
A função exponencial de base a, $f(x) = a^x$, tem as seguintes propriedades:[1][2]

1. $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
2. $f(x)$ é função crescente se, e somente se, $a > 1$;
3. $f(x)$ é função decrescente se, e somente se, $0 < a < 1$;
4. $f(x)$ é injetiva;
5. $f(x)$ é ilimitada superiormente;
6. $f(x)$ é contínua;
7. $f(x)$ é sobrejetiva;
8. $f(x)$ é bijetiva, isto é, possui uma função inversa, o logaritmo, denominada $\log_a(x)$.

Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Função_exponencial>. Acesso em: 4 de agosto 2017

A expressão se, e somente se, no contexto dos estudantes (Figura 29), é um dos fatores que iniciou a confusão, pois apresentaram dificuldades em representar o mesmo valor de outras maneiras (A.1) e essa limitação na linguagem Matemática induziu ao erro na análise do livro (Figura 27). Além dessa limitação, um equívoco de digitação do próprio livro pode ter prejudicou a análise dos estudantes, primeiro deveria ser $x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x1} > a^{x2}$ para crescente e a decrescente está mal digitado o sinal de desigualdade na Figura 30.

Figura 30 - Erros encontrados no livro didático dos estudantes



Veja no gráfico de $f(x) = 2^x$ que: $f(2 \cdot 1) = f(2) = 4$ e $(f(1))^2 = 2^2 = 4$, portanto $f(2 \cdot 1) = (f(1))^2$;

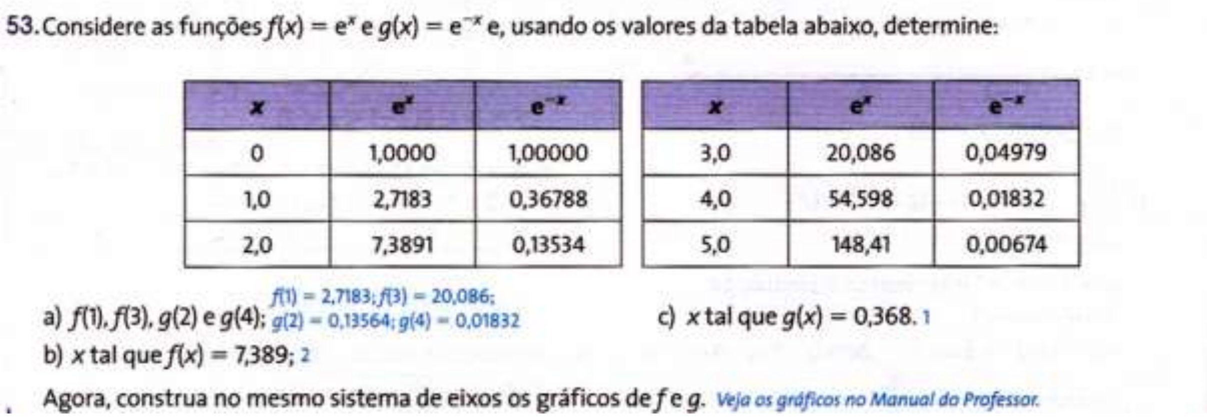
- para $a > 1$, a função é crescente ($x_1 > x_2 \Rightarrow \boxed{a^{a_1} > a^{x_2}}$);
- para $0 < a < 1$, a função é decrescente ($x_1 > x_2 \Rightarrow \boxed{a^{x_1} > a^{x_2}}$);
- a função exponencial é sobrejetiva: $Im(f) = CD(f)$, ou seja, para todo número real $b > 0$ existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$ (todo número real positivo é uma potência de a);

Fonte: (Dante, 2014, p.160)

Nota: Foi destacado o erro de digitação da Figura 27

Contudo, ainda que por falta de experiência e dificuldade na leitura provavelmente o erro de digitação do livro (Figura 30) não foi o fator preponderante para essa confusão, pois eles interpretaram apenas a primeira parte da propriedade, quando "$a > 1$ e $0 < a < 1$", não dando tanto ênfase à parte final de cada sentença. Por outro lado, atividades envolvendo expoente negativos são pouco exploradas no ensino médio. Tomamos como exemplo o livro adotado na escola. Apesar do próprio livro ter explorado muito bem a propriedade do expoente negativo nos exercícios de revisão, foi encontrado apenas um exercício que abordasse essa propriedade na função.

Figura 31 - Exercício que aborda o expoente negativo



53. Considere as funções $f(x) = e^x$ e $g(x) = e^{-x}$ e, usando os valores da tabela abaixo, determine:

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0	1,0000	1,00000	3,0	20,086	0,04979
1,0	2,7183	0,36788	4,0	54,598	0,01832
2,0	7,3891	0,13534	5,0	148,41	0,00674

a) $f(1)$, $f(3)$, $g(2)$ e $g(4)$; $f(1) = 2{,}7183$; $f(3) = 20{,}086$; $g(2) = 0{,}13564$; $g(4) = 0{,}01832$

b) x tal que $f(x) = 7{,}389$; 2

c) x tal que $g(x) = 0{,}368$. 1

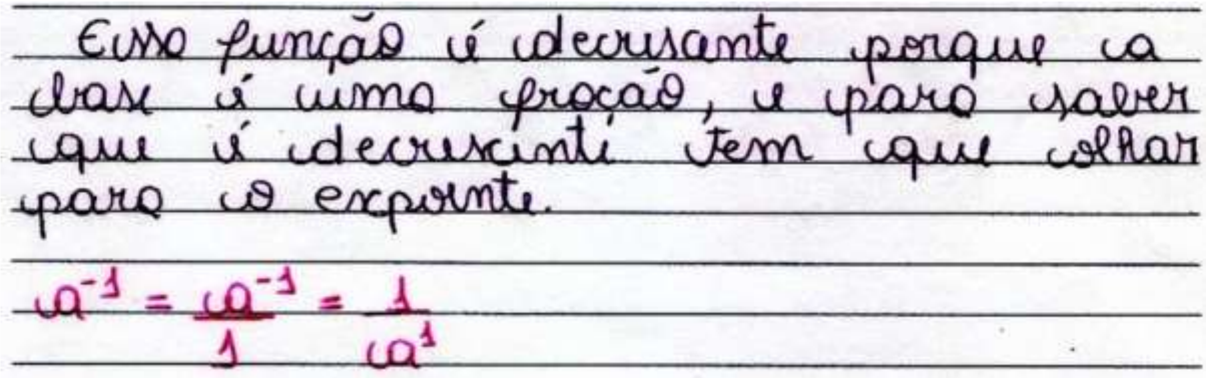
Agora, construa no mesmo sistema de eixos os gráficos de f e g. *Veja os gráficos no Manual do Professor.*

Fonte: (Dante, 2014, p.170)

Diante dos obstáculos de interpretação, os estudantes perceberam que deveriam refazer de forma mais rebuscada a pesquisa para compreender o que estava acontecendo com a Figura 32, encontrando a resposta necessária no capítulo de revisão no próprio livro didático, começaram, desse modo, os debates para analisar os detalhes matemáticos que surgiram no modelo.

Esse desafio das respostas não estarem organizadas para interpretar o modelo proporcionou a busca de resultados importantes para os estudantes compreenderem questões internas à Matemática (A.1), nas Figura 32 e Figura 33.

Figura 32 - propriedade que garante que o modelo é decrescente

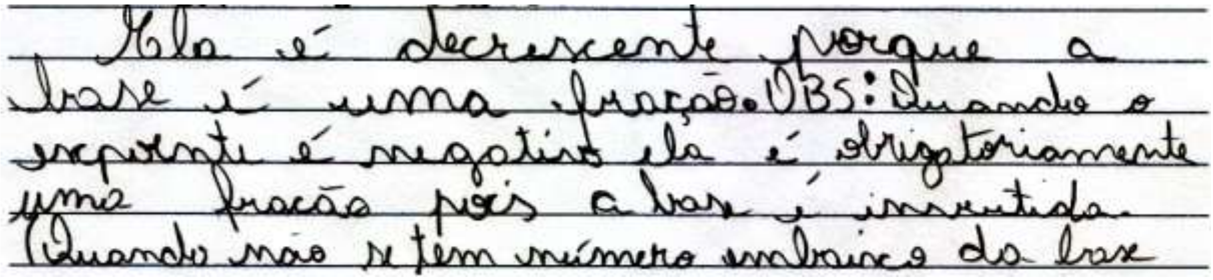


Essa função é decresante porque a base é uma fração, e para saber que é decrescinti tem que olhar para o exponte.

$a^{-1} = \frac{a^{-1}}{1} = \frac{1}{a^{1}}$

Fonte: Atividade realizada pelo grupo A

Figura 33 - Explicação dialética porque o modelo é decrescente



Ela é decrescente porque a base é uma fração. OBS: Quando o expoente é negativo ela é obrigatoriamente uma fração pois a base é invertida. (Quando não se tem número embaixo da base

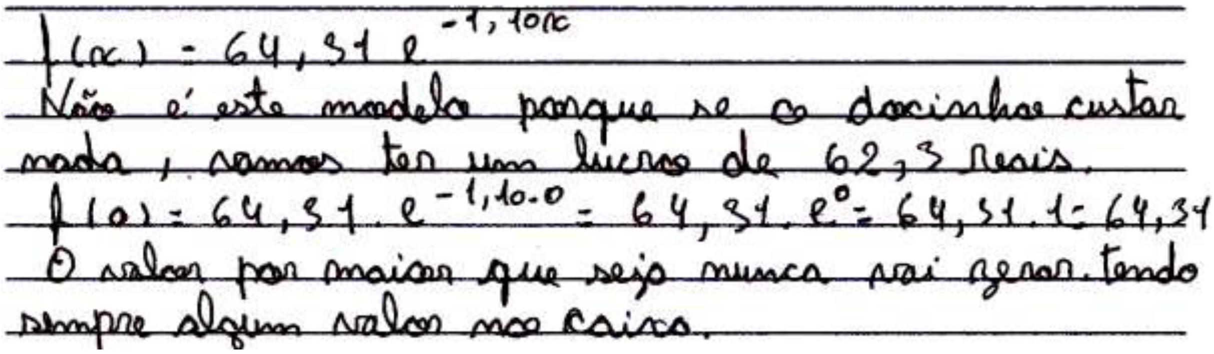
Fonte: Atividade realizada pelo grupo B
Nota: Explicação para o problema proposto, mas é uma generalização válidas só para frações impróprias.

A utilização de proposições sem preocupações com a verdade (C.2.5) pode gerar equívocos dentro da matemática. As explicações utilizadas pelos estudantes nas Figura 32 e Figura 33 até certo ponto estão corretas, precisamente, para responder apenas o problema proposto ou quando se referem a frações próprias, numerador é menor que o denominador, mas e se a base fosse uma fração imprópria, por exemplo $\left(\frac{3}{2}\right)$, provavelmente conduziria os estudantes ao erro.

Analisando alguns livros didáticos do ensino médio, este tipo de atividade, envolvendo expoentes negativos em funções exponenciais, passa a impressão que não é um caso banal haja vista os pouquíssimos exercícios encontrados, podendo ser um dos motivos para este tema ter passado despercebido pelos alunos, justificando assim essa dificuldade de reconhecer outras representações dos números racionais na base das funções exponenciais. É importante observar que, quando estamos trabalhando com modelagem e as funções algébricas não estão "organizadas" como nos livros, provavelmente vão exigir habilidade e criatividade para interpretar detalhes que passariam despercebidos, quando trabalhados com o conteúdo “preparado”. A necessidade de interpretar o modelo e as dúvidas dos estudantes permitiram uma nova investigação de temas suporte relacionados às funções exponenciais, trazendo à tona detalhes interessantes dentro da Matemática (A.1), como as propriedades que garantem o crescimento e o decrescimento em demonstrações formais (C.1), mas concluídas dialeticamente (C.2). Os detalhes necessários para a resolução deste modelo proporcionaram o desenvolvimento da habilidade matemática de interpretação e demonstração (B.3), apesar de a sistematização pedagógica ter ocorrido de forma fragmentada, ou seja, conforme o necessário (D.2).

Passando para a apresentação do modelo (Figura 34), no qual o lucro estava em função do preço por unidade, a primeira informação destacada pelos estudantes se relaciona ao eixo das ordenadas, eixo y, que unanimemente a turma respondeu que quando estiver em função de zero o valor será 64,31 reais, argumentação formal (C.1) que é um valor correto neste novo contexto, interpretação puramente matemática (A.1), mas diferentemente do argumento utilizado para quando os valores de x aumentassem infinitamente que aconteceu de forma dialética (C.2): “o valor maior que seja nunca vai zera, tendo sempre algum valor no caixa”. Dentro dessa fala, é possível identificar elementos externos à Matemática (A.2) que estão sustentando a compreensão de significados internos à Matemática (A.1). A construção da abstração deles está baseada no raciocínio lógico construído através do material concreto (C.2) para compreenderem ideias exclusivamente matemáticas (C.1) e graças a estes testes numéricos, culminou em desenvolvimento de conhecimentos sobre fenômenos reais (B.2) e ampliação das habilidades matemáticas (B.3).

Figura 34 - Análise do modelo exponencial



$f(x) = 64,31\ e^{-1,10x}$

Não é este modelo porque se os docinhos custar nada, vamos ter um lucro de 62,3 Reais.

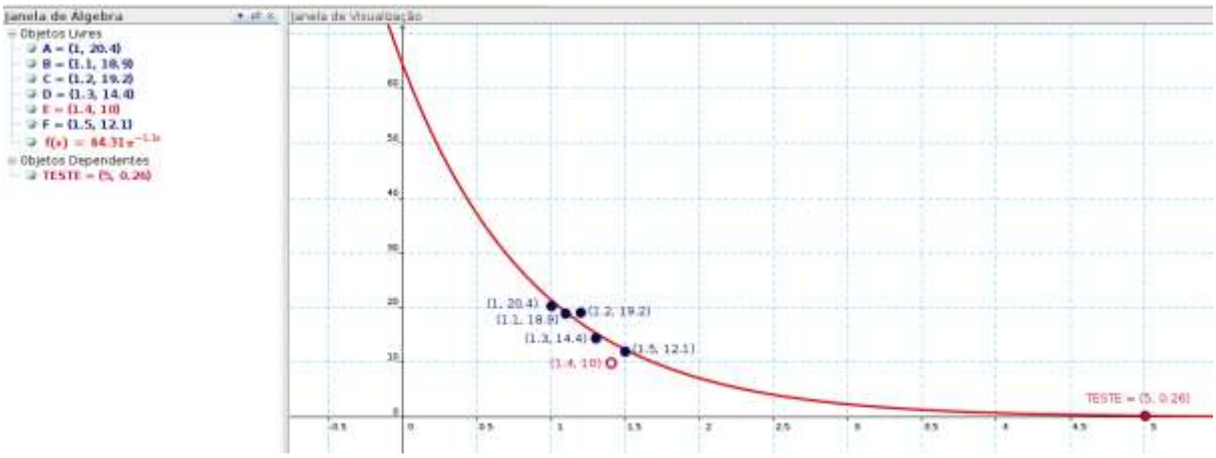
$f(0) = 64,31 . e^{-1,10.0} = 64,31 . e^{0} = 64,31 . 1 = 64,31$

O valor por maior que seja nunca vai zerar. tendo sempre algum valor no caixa.

Atividade realizada pelo grupo D

Questionados sobre a possibilidade de se considerar apenas um intervalo, descartando a parte que tende a zero e ao infinito, seria suficiente para validar este modelo? Afirmaram que, apesar de essa pergunta fazer sentido, não saberiam respondê-la. O objetivo dessa questão era conduzir os estudantes a observarem a assíntota horizontal e que valores negativos geravam lucros infinitamente grandes, mas em contrapartida, um dos grupos, 28% dos estudantes, invalidaram o modelo através da análise do gráfico do computador (Figura 35).

Figura 35 - Interpretação do modelo através do gráfico

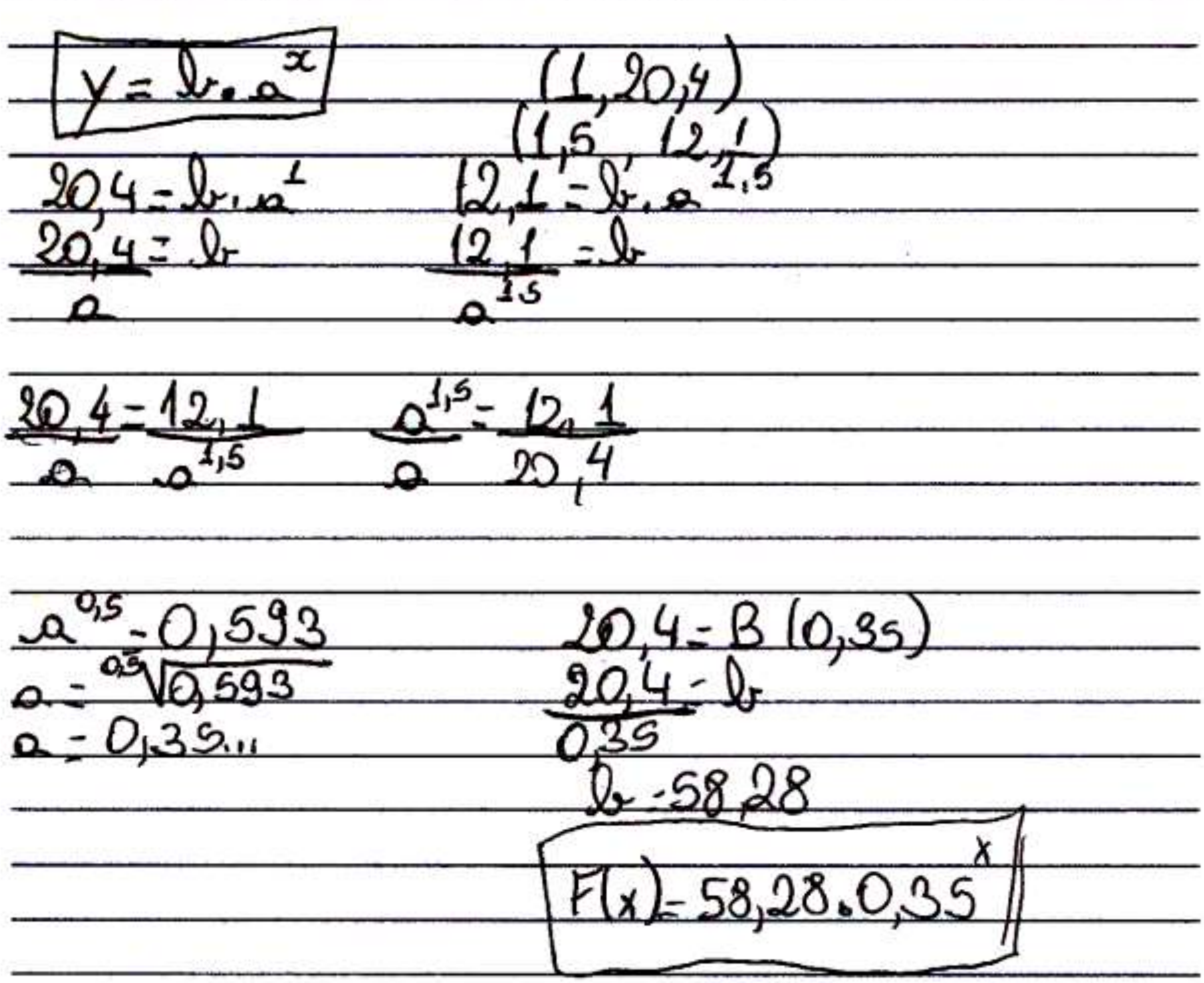


Fonte: *Print* do GeoGebra 4.0
Nota: Representação do preço por unidade por lucro total

Na Figura 35, o preço por unidade está representado no domínio da função enquanto que o lucro total está representado na imagem e com base nessas grandezas, os estudantes repararam que se cada doce custasse cinco reais, não seria possível gerar um lucro de vinte e seis centavos, ou eles venderiam pelo menos um docinho, gerando um lucro R$ 4,60, descontando o custo de R$ 0,40, ou não venderiam nada, ou seja, os valores mínimos para o caixa seria 0 ou R$ 4,60, diferente de R$ 0,26 representado na Figura 35. Essa argumentação está baseada na observação empírica, testes particulares (C.2.1), expressa em linguagem oral (C.2.2) e, apesar de não terem feito nenhum cálculo e não saberem calcular o valor de $f(x) = 64{,}32e^{-1{,}10x}$, os estudantes apresentaram a resposta de forma dialética (C.2) graças à compreensão do fenômeno a ser modelado (A.2), fato percebível no sentido atribuído para os símbolos matemáticos (A.1).

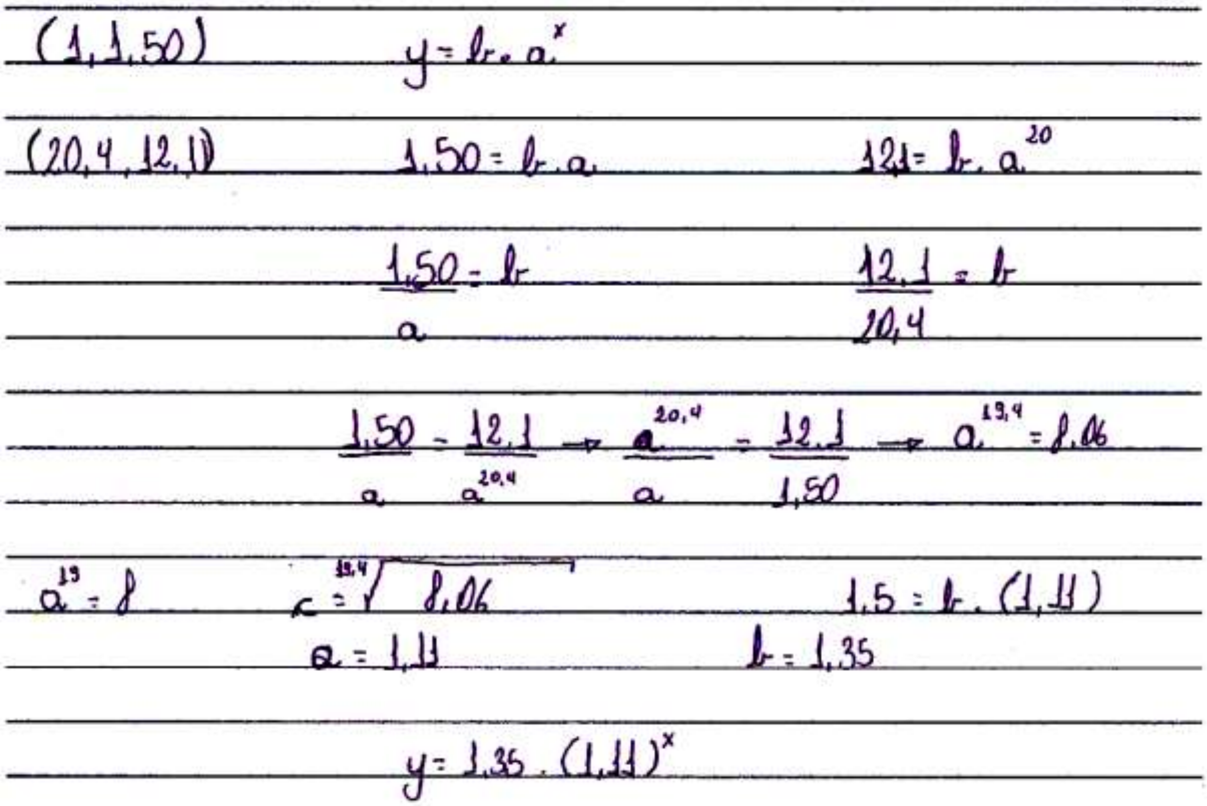
Questionados se era possível resolver sem o uso do computador, como aconteceu com as funções lineares, principalmente visando o ENEM, os estudantes imaginaram que era possível, mas não sabiam como fazer. Após realizarem pesquisas e não apresentarem nenhuma sugestão, o professor interferiu orientando-os de que o processo era muito parecido com as funções lineares, bastava escolher dois pontos e utilizar a função característica da exponencial, como $f(x) = b.a^x$. É importante lembrar que se está trabalhando com dados reais, diferente dos problemas propostos nos livros didáticos, portanto, dependendo dos pontos que escolherem gerará funções distintas. Desse modo, a maioria da turma, 78,57%, tentou realizar a tarefa, mas destes apenas 42,87% tiveram sucesso (Figura 36) e os demais acabaram errando (Figura 37) ou desistindo no meio do processo.

Figura 36 - Sucesso na construção da exponencial através de dois pontos



Fonte: Atividade realizada pelo grupo A

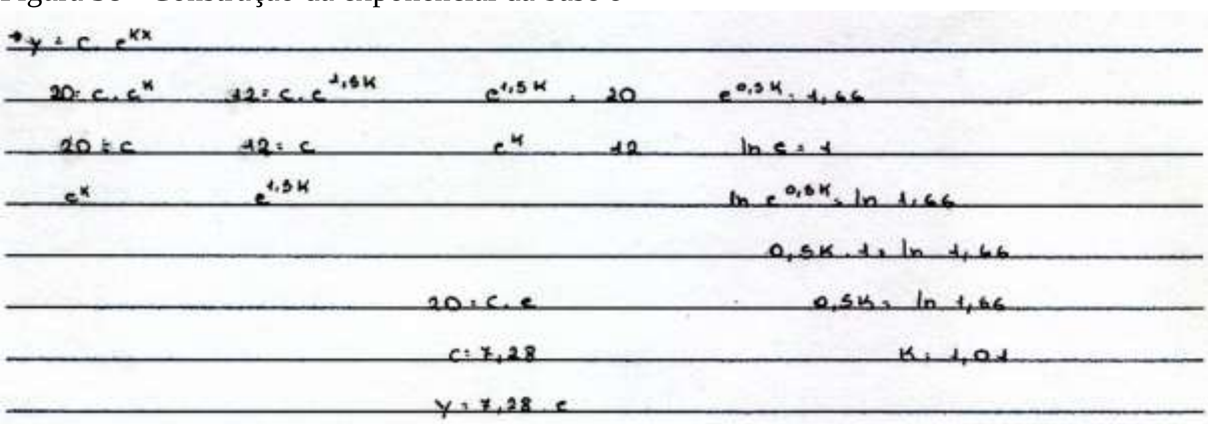
Figura 37 - Problemas na do modelo exponencial através de dois pontos



Fonte: Atividade realizada pelo grupo A
Nota: O estudante utilizou os pontos (1; 1,5) e (20,4; 12,1) onde o correto seria (1; 20,4) e (1,5; 12,1) e ao invés de passar $a^{20,4}$ dividindo passou apenas o expoente 20,4

Um dos estudantes do grupo C baseou-se no resultado apresentado pelo computador, na base e (Figura 38), e solicitou ajuda para concluir, mesmo o professor indicando onde encontrar a operação inversa, apresentou dificuldades para reescrever a função.

Figura 38 - Construção da exponencial da base e



Fonte: Atividade realizada pelo grupo C
Nota: O estudante aproximou os valores para facilitar os cálculos.

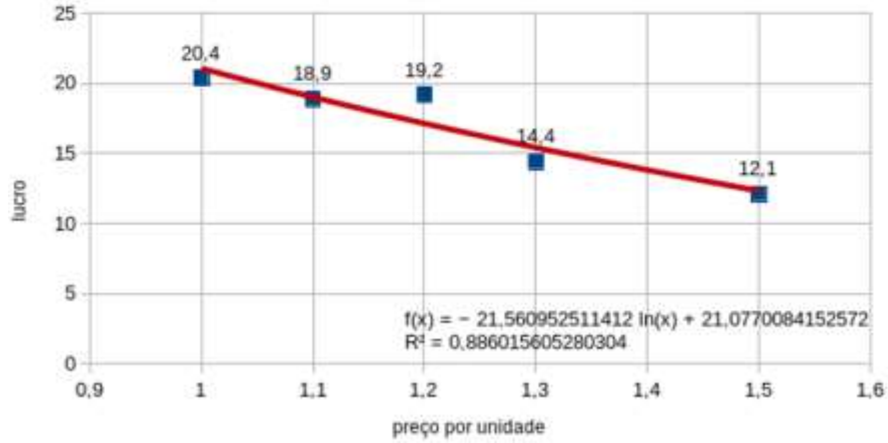
A percepção apurada dos resultados coletados para a construção do modelo, ou seja, a compreensão do fenômeno (A.2.3), encorajou 78,57% dos estudantes a tecer conjecturas, através de dois pontos, possibilitando uma construção dentro da própria Matemática (A.1), mas nas Figuras 36 e Figura 38 apesar da construção do modelo está de acordo com o Formalismo matemático, não implicou que eles conseguissem novos significados com coerência total, pois na Figura 37 inverteram o valor dos doces com o lucro, misturaram o domínio com a imagem da função do ponto de vista matemático (A.1) e outros erros, na Figura 38 esqueceram de escrever o expoente na solução, juntamente com o erro da divisão de vinte por doze ao invés de fazê-lo ao contrário para ficar de acordo com $e^{0,5}$, matematicamente apresentam problemas na argumentação formal (C.1). Por outro lado, durante o debate, o professor solicitou aos estudantes reflexão sobre os resultados apresentados, sendo que o estudante do trabalho que está na Figura 38 reconheceu que por estar trabalhando na base e, deveria pelo menos ter encontrado o coeficiente K negativo, descartando por este motivo o seu modelo. Pode-se afirmar que o modelo permitiu aos estudantes tralharem a habilidade de identificação de transformações (B.3), principalmente, o fato de saberem que o lucro era decrescente, esperava-se uma função que se comportasse do mesmo modo, uma base entre zero e um (A.1), associação importante da base da função exponencial com fenômenos reais (B.2).

Dentro das possibilidades exploradas para o desenvolvimento do modelo exponencial, pode-se dizer que o conhecimento transitou de uma forma bem mais simples comparado com o modelo anterior, começou fortemente com uma hipótese dialética , pois os estudantes conheciam previamente algumas características da função exponencial, transitando para algorítmica no momento que é representado pelo computador, mas a resolução ficou apenas na observação de resultados, (C.2.5) e testes numéricos (C.2.1), deste modo a solução do modelo aconteceu com o uso do raciocínio lógico dedutivo, com reflexões sobre relações importantes entre as características desta função (A.1) com fenômenos externos (A.2), mas não sendo suficiente para uma resolução formal (C.1), partindo do raciocínio dedutivo à validação deste modelo.

4.3.3 Ajuste Logarítmico

Na busca de uma função que mostrasse o preço ideal à ser cobrado para obtenção de lucro máximo na venda de doces, os estudantes partiram desta ideia, que a função precisaria mostrar o lucro máximo em função do preço por unidade, para isso, o domínio representaria os valores cobrados durante a fase da coleta de dados e a imagem deveria representar o lucro total para cada valor (Figura 39). Nenhum estudante comentou explicitamente que a função logarítmica está apenas definida para números positivos (A.1), este fato gerou insegurança na hora de descartar o gráfico, pois o ajuste logarítmico estava de acordo com os dados coletados, ou seja, os valores cobrados correspondiam perfeitamente com o domínio das funções logarítmicas (A.2).

Figura 39 - Ajuste logarítmico realizado pelos estudantes



	Preço	Lucro(caixa)
✓	1	20,4
✓	1,1	18,9
✓	1,2	19,2
✓	1,3	14,4
×	1,4	10
✓	1,5	12,1

Fonte: *Print* do LibreOffice Calc 5.2

A análise das características para validação deste modelo, ou não, começou após a representação da função pelo *software* (Figura 38), mas diferentemente do modelo anterior, eles não tinham argumentos suficientes para debater essas possibilidades. Nos primeiros minutos desta atividade 71,42% dos estudantes argumentaram que não compreendiam totalmente o que significava as funções logarítmicas, apesar de saberem que se trata da inversa da exponencial, sentiam certa aflição com expressão log, portanto, esses estudantes, durante a atividade extraclasse que era preparar-se para o encontro da construção desse modelo, não conseguiram relacionar o fenômeno que desejavam modelar com o comportamento desta função, problemas tanto internos (A.1) como externos da matemática (A.2). No transcorrer do encontro novas dúvidas começam a surgir, como o símbolo utilizado para o $ln(x)$ (Figura 38), pois a única função que eles reconheciam era a $log(x)$, revisada para esse encontro, mas outros problemas começaram a vir à tona, principalmente pela sistematização pedagógica não linear (D.2).

Aproximadamente 85% narraram que conseguiam resolver apenas equações logarítmicas do tipo $log_a b = c \iff a^c = b,$ mas destes 91,66% atrapalhavam-se no procedimento, e principalmente não conseguiam compreender o resultado destas equações. Ainda que o computador representasse o modelo, os problemas pertinentes em relação à função logarítmica não permitiram que os estudantes fizessem a análise correspondente. Nota-se problemas internos à Matemática (A.1), principalmente, a falta de significado externo (A.2) impedindo tanto a argumentação formal (C.1) como a informal (C.2), ou seja, se o estudante não compreende o que está sendo perguntado, não tem como responder.

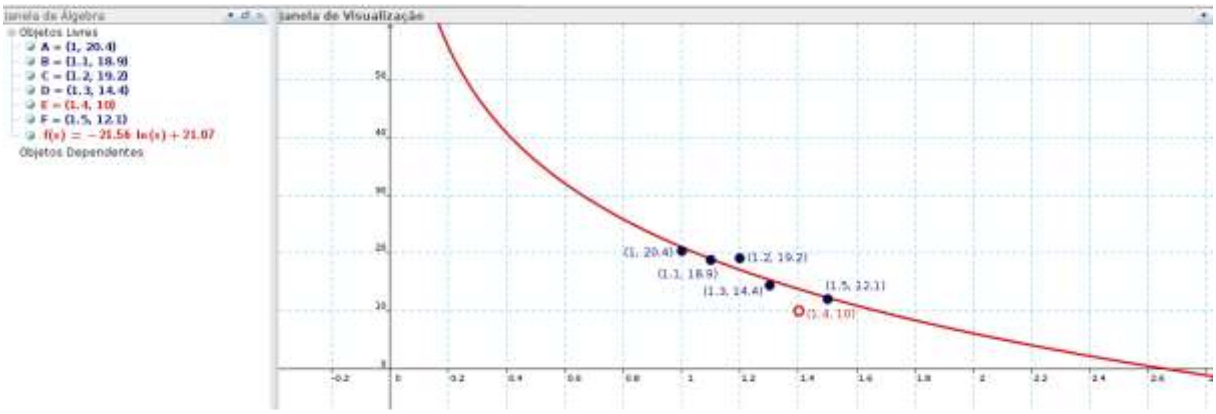
Diante deste cenário de dificuldades, os estudantes (92,85%), solicitaram utilizar o tempo destinado para este encontro de modelagem para pesquisarem novamente o assunto, e na medida do possível, esclarecer alguma dúvida. Deste modo, a organização pedagógica desta aula ficou organizada da seguinte maneira: os estudantes realizariam suas pesquisas e possíveis dúvidas que surgissem seriam apontadas, pois um dos pontos observados neste projeto é como acontece a organização pedagógica para a construção de um modelo, ou seja, durante a pesquisa a interferência do professor deverá ser mínima e sem qualquer complementaridade. A primeira pergunta saiu do capítulo anterior do livro, porque $log_a a^n = n$, aqui o professor não apresentou diretamente a resposta, foram discutidas propriedades mais simples e algumas ideias de demonstração. Essa caminhada deu suporte para a resposta que desejavam, pois quando foi perguntado “qual o expoente que devemos elevar a base a para obtermos a na n?” Eles conseguiram demonstrar formalmente a propriedade desejada (C.1).

$$log_a a^n \rightarrow a^n = a^x \rightarrow n = x$$

A intervenção do professor, mesmo que mínima, foi necessária para responder algumas dúvidas, apenas a pesquisa não foi suficiente para esclarecer relações importantes para interpretar o modelo. Apesar de que, por alguns breves instantes, parecer com o modo tradicional de ensino, a organização da aula estava conforme as dificuldades apresentadas por eles (D.2) sem as respostas prontas do professor, mas com a necessidade de alguém mais experiente para traduzir para linguagem usual alguns símbolos matemáticos (A.1). A dificuldade do modelo agregada a essa modalidade de encontros produziu uma aproximação das demonstrações para compreenderem melhor o que não dominavam. Utilizaram-se especialmente da abstração matemática (C.1) para demonstração, mas para isso foi necessário a tradução da linguagem matemática para a linguagem deles (C.2.2). Este modelo resgatou conteúdos que não estavam relacionados diretamente com a questão inicial, tornando claro que a aprendizagem foi construída conforme as necessidades (D.2).

Focando novamente no modelo, pesquisas foram feitas na internet e alguns estudantes representaram o modelo no Geogebra para compreenderem melhor as características da função (Figura 40).

Figura 40 - Representação da função logarítmica

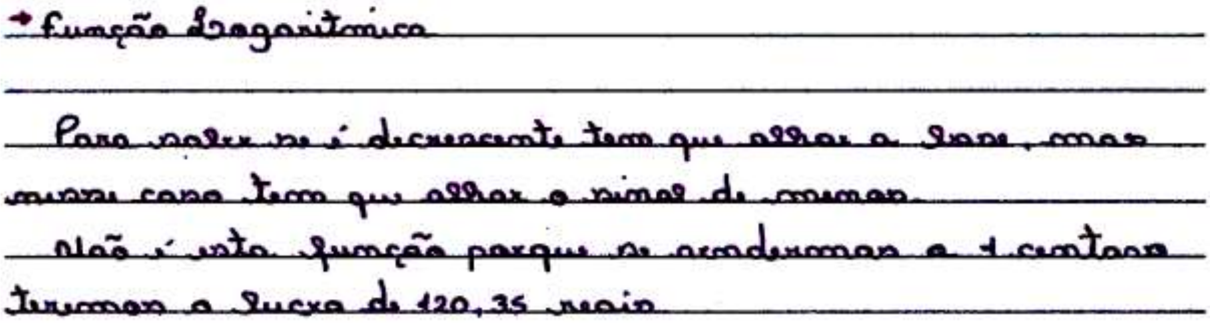


Fonte: *Print* do GeoGebra 4.0
Nota: Função que representa preço por unidade por lucro total

Apesar da explicação na língua portuguesa do livro e alguns sites, antes da construção no Geogebra, as informações conhecidas pelos estudantes sobre as características da função logarítmica não eram suficientes ainda para interpretarem o modelo. Foi no processo de representação, debate e alguns pontos sugeridos pelo professor a observar, que eles encontram significado para ilimitado superiormente e não interceptar o eixo das ordenadas, eixo y. A compreensão do modelo iniciou apoiando-se no preço por unidade e lucro total, ou seja, a resolução de uma situação problema (C.2.2) fica evidente no argumento de um dos grupos (C.2.3): "Quanto mais barato é o valor da unidade dos docinhos, mais lucro será obtido, ou seja, será infinito quando chegar perto de zero". Esta fala contém elementos de um raciocínio abstrato, quando se refere ao infinito (A.1) que intuitivamente utiliza as vendas como base de compreensão (A.2).

A interpretação inicial deste modelo foi embasada principalmente nas observações do gráfico e alguns cálculos computacionais mais simples, ou seja, primeiro tiveram que rever as informações que sabiam, como o comportamento desta função, para poderem argumentar de forma dialética (C.2) o que estavam observando (C.2.2), em outras palavras, as informações e as observações sozinhas não se sustentavam, precisaram relacionarem-se ao conhecimento interno à Matemática (A.1). Com base nessas relações, construíram novos significados para a função logarítmica, tanto matematicamente (A.1) como externamente à matemática (A.2). Dentro da Matemática Formal o único ponto que eles verificaram foi $f(1) = 20{,}07$, mas através de calculadoras, revelando assim a necessidade de aprofundamento dessas funções, sinais de uma aprendizagem não completa (D.2). Por outro lado, eles conseguiram encontrar algumas respostas para uma questão que passaria em branco se perguntada no modelo tradicional (Figura 41).

Figura 41 - Análise do modelo logarítmico pelo grupo A


→ Função Logarítmica

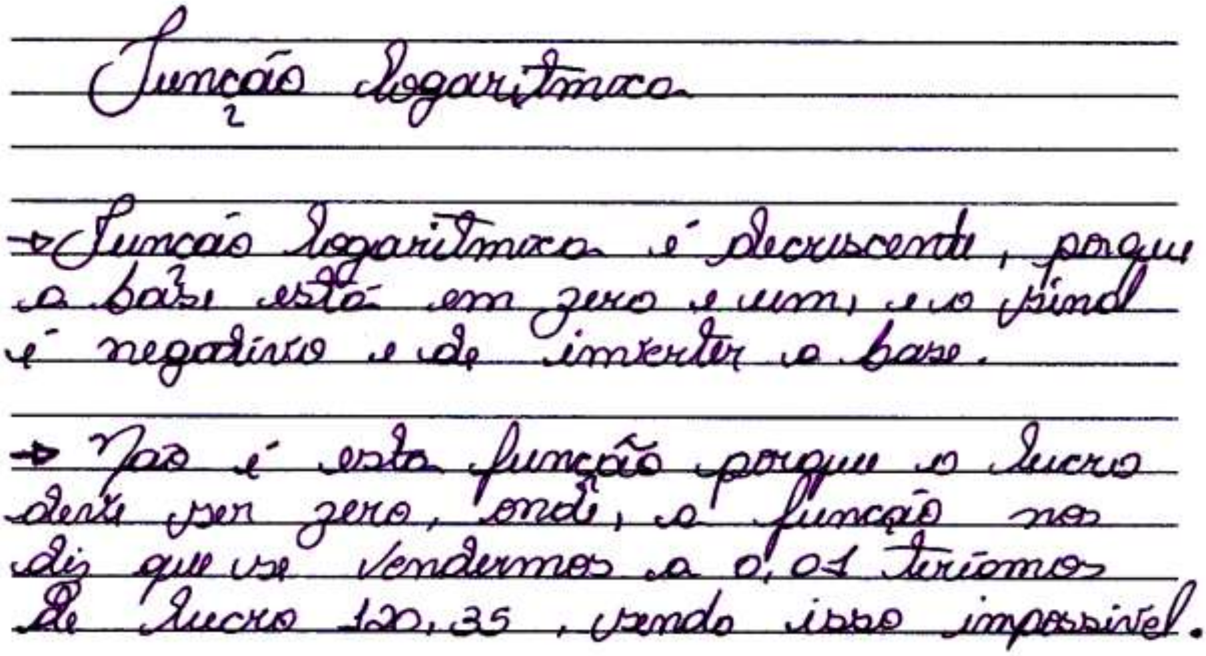
Para saber se é decrescente tem que olhar a base, mas nesse caso tem que olhar o sinal de menos.

Não é esta função porque se vendermos a 1 centavo teremos o lucro de 120,35 reais

Fonte: Atividade realizada pelo grupo A

Na aula seguinte, 85,71%, relataram que se sentiram estimulados com o acontecimento adquirido na última aula e através de novos estudos reestruturaram o modelo apresentado. Nesta nova apresentação, 71,42% do total apresentaram melhoras na interpretação quanto ao crescimento ou decrescimento dos gráficos. E partindo da mesma ideia das exponenciais, concluíram que, para $f(x) = -lnx$, tratava-se de uma função decrescente (Figura 42).

Figura 42 - Análise do modelo logarítmico pelo grupo D


Função Logarítmica

→ Função logarítmica é decrescente, porque a base está em zero e um, e o sinal é negativo e de inverter a base.

→ Não é esta função porque o lucro deve ser zero, onde, a função nos diz que se vendermos a 0,01 teríamos de lucro 120,35, sendo isso impossível.

Fonte: Atividade realizada pelo grupo D

Questionados como eles chegaram a esse lucro de R$ 120,35 e o intervalo da base entre zero e um, (Figura 42), a resposta segundo eles foi calculada com ajuda de *software* (C.2.1) e a afirmação para a base, saiu da seguinte observação: " $log_e x = lnx$ e como logaritmo de uma base fracionária é decrescente, aquele negativo do modelo, deve inverter o número de Euler", preposições baseadas apenas em suposições (C.2.5), sem demonstrações, mas observações bem colocadas, apesar de não terem revelado essa propriedade. Pode-se notar uma melhora na leitura matemática e nas relações de transformações, aprofundamento de detalhes necessários para a interpretação do modelo (D.2). Desse modo, a argumentação tem significados de uma construção concreta (C.2) e dialética, permitindo que eles explorassem suas habilidades matemáticas de reconhecimento e interpretação (B.3), conduzindo a um novo olhar para o produto de negativos no logaritmo neperiano (A.1).

Partindo da mesma ideia utilizada para a construção da função exponencial, seção 4.2.2, os estudantes tentaram construir a função escolhendo dois pontos, preço e lucro correspondente, e substituindo na função característica (Figura 43), mas cem por cento não conseguiram realizar as operações necessárias, principalmente pelo falto de não terem percebido os valores dos logarítmicos de 1 e 1,5, se tivessem aprofundado o estudo corretamente, poderiam obter sucesso partindo que $ln1 = 0$, encontrando imediatamente o coeficiente b.

Figura 43 - Construção do modelo através de dois pontos.

$F(X) = -20{,}4$ $\quad$ x : preço

$F(X) = A \ln(x) + B$ $\quad$ Y : lucro

$20{,}4 = A \ln 1 + B$

$20{,}4 = A \ln + 12{,}1 - A \ln 1{,}5$ $\quad$ $12{,}1 = A \ln 1{,}5 + B$

$20{,}4 = Ae$ $\quad$ $B = 12{,}1\ A \ln 1{,}5$

Fonte: Atividade realizada pelo grupo B

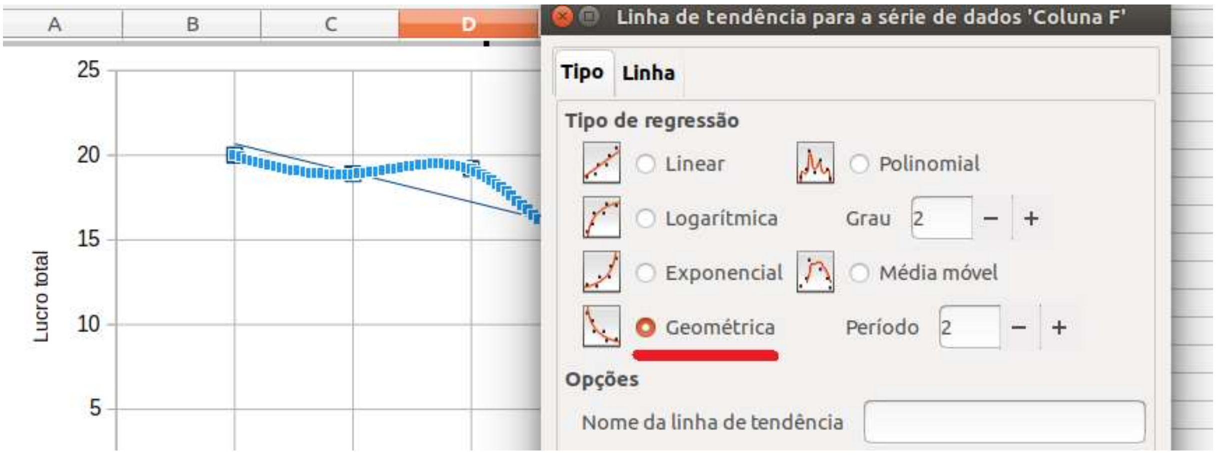
O professor ao final desta apresentação revelou o resultado dessa operação, pois a interação professor-estudante estava limitada a apenas sugerir reflexões sobre o aparecimento de novos aspectos relativos ao conteúdo e questionamentos, quando ocorressem conflitos de opinião entre os grupos. Observando as pesquisas feitas pelos estudantes, se a aula for conduzida pelo professor, pode-se trabalhar muito bem aspectos importantes da Matemática (B.3).

Analisando os caminhos utilizados pelos estudantes desde a construção para a validação da hipótese para a construção começou algoritmicamente, sendo solucionada através de raciocínio Lógico Dedutivo, pois problemas na interpretação do conteúdo não permitiram a escolha de forma dialética desse modelo e qualquer possiblidade de uma resolução formal, apesar que características importantes foram exploradas durante a análise (A.1) e algumas relações com o fenômeno modelado foram feitas (A.2), isso não garantiu que a validação do modelo acontecesse formalmente.

4.3.4 Ajuste Função Potência

A construção desse modelo não seguiu a mesma sistematização pedagógica utilizada nos modelos anteriores, pois os estudantes não conseguiram preparar-se durante a atividade extraclasse para esse encontro. Esta situação começou pela coincidência da lista das funções a serem exploradas durante as atividades de modelagem com a lista de tendência de curvas apresentadas no LibreOffice Calc na Figura 44.

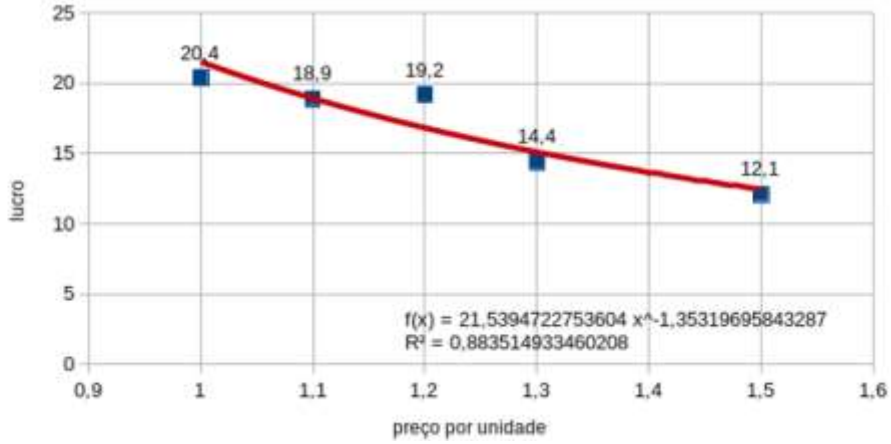
Figura 44 - Ajuste Função Potência apresentando como Geométrico



Fonte: *Print* do LibreOffice Calc 5.2

Devido a esta coincidência, os estudantes imaginaram que a organização das atividades de modelagem seguia a lista de tendências do computador, logo começaram a pesquisar por conta própria sobre funções geométricas, não encontrando nenhum assunto relacionado na internet, mas assim mesmo começaram, todavia, a construção do modelo (Figura 45) neste encontro.

Figura 45 - Ajuste “Geométrico” realizado pelos estudantes



	Preço	Lucro(caixa)
✓	1	20,4
✓	1,1	18,9
✓	1,2	19,2
✓	1,3	14,4
✗	1,4	10
✓	1,5	12,1

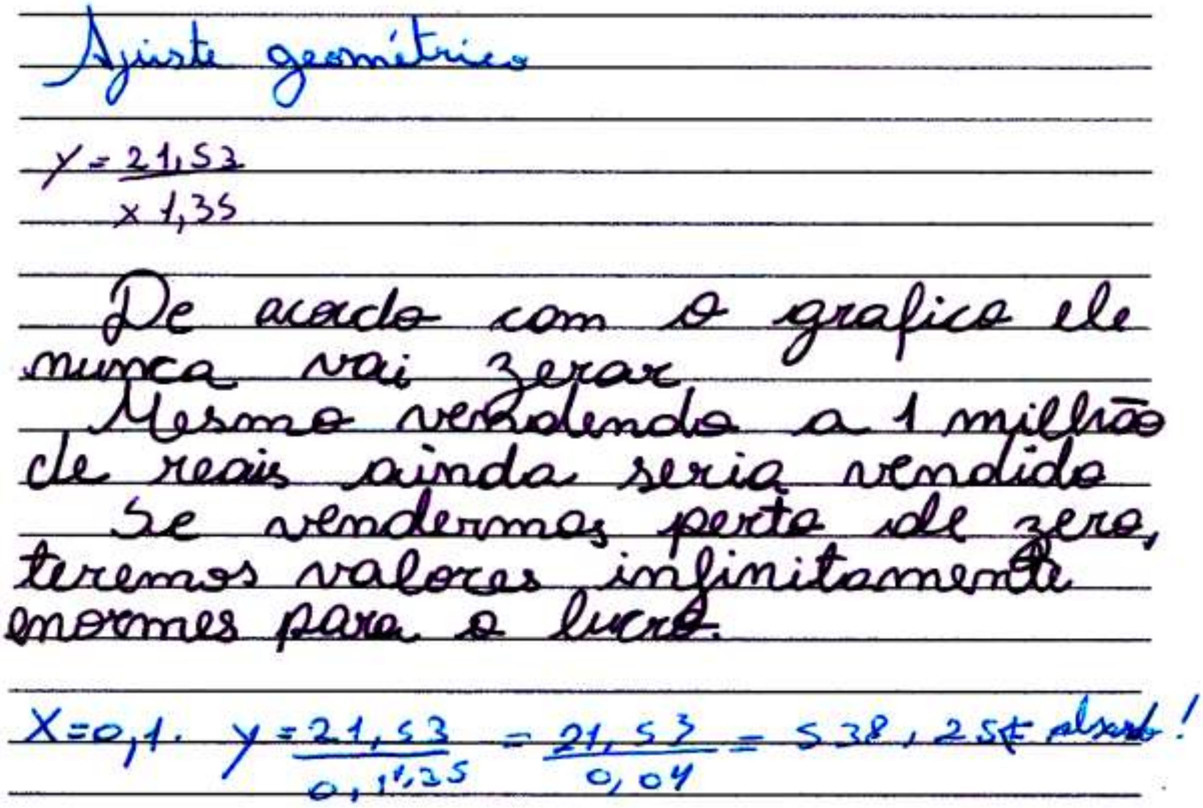
Fonte: *Print* do LibreOffice Calc 5.2
Nota: Na Matemática Chama-se Função Potência

Antes da primeira construção (Figura 45), o professor encontrava-se em uma situação totalmente nova e ao mesmo tempo embaraçosa, pois seu planejamento era observar um ou outro ajuste em vez de ajuste Geométrico, assunto desconhecido pelo professor, porém deixou os alunos concluírem a tarefa por estar ciente de que em algum momento isso iria acontecer, em virtude de que fazer modelagem é isso, segundo vários autores, ela exime o professor do cargo de possuir todas as respostas como também o retira da zona de conforto.

> Muitos professores não se sentem habilitados a desenvolver modelagem em seus cursos, por falta de conhecimento do processo ou por medo de se encontrarem em situações embaraçosas quando às aplicações de matemática em áreas que desconhecem. (BASSANEZI, 2009, p. 25)

Após observar o primeiro modelo apresentado por um dos grupos o professor comentou que se tratava de um Ajuste Função Potência, todavia essa informação não fez muita diferença, pois antes de buscar mais informações sobre esse assunto, os estudantes já tinham identificadas algumas propriedades relevantes para a interpretação do modelo. A primeira propriedade estava relacionada ao expoente negativo (Figura 46), um conhecimento exclusivo da linguagem matemática (A.1), no qual as primeiras anotações para analisar o modelo (Figura 45), percebe-se o reconhecimento de que $a^{-1} = \frac{1}{a}$, por 92,85% dos estudantes, possibilitando reescrever corretamente a função apresentada pelo software na Figura 46. Nesta primeira interpretação, é interessante observar a aprendizagem através do caráter falível da matemática proposta por Lakatos, ou seja, os alunos compreenderam o expoente negativo através dos seus erros nos modelos anteriores, que os conduziram a reconsiderar o sentido desta propriedade nesta nova situação. Dessa forma, teve uma evolução perceptível na linguagem matemática (B.3).

Figura 46 - Análise do Ajuste "Geométrico"



Ajuste geométrico

$y = \frac{21,53}{x^{1,35}}$

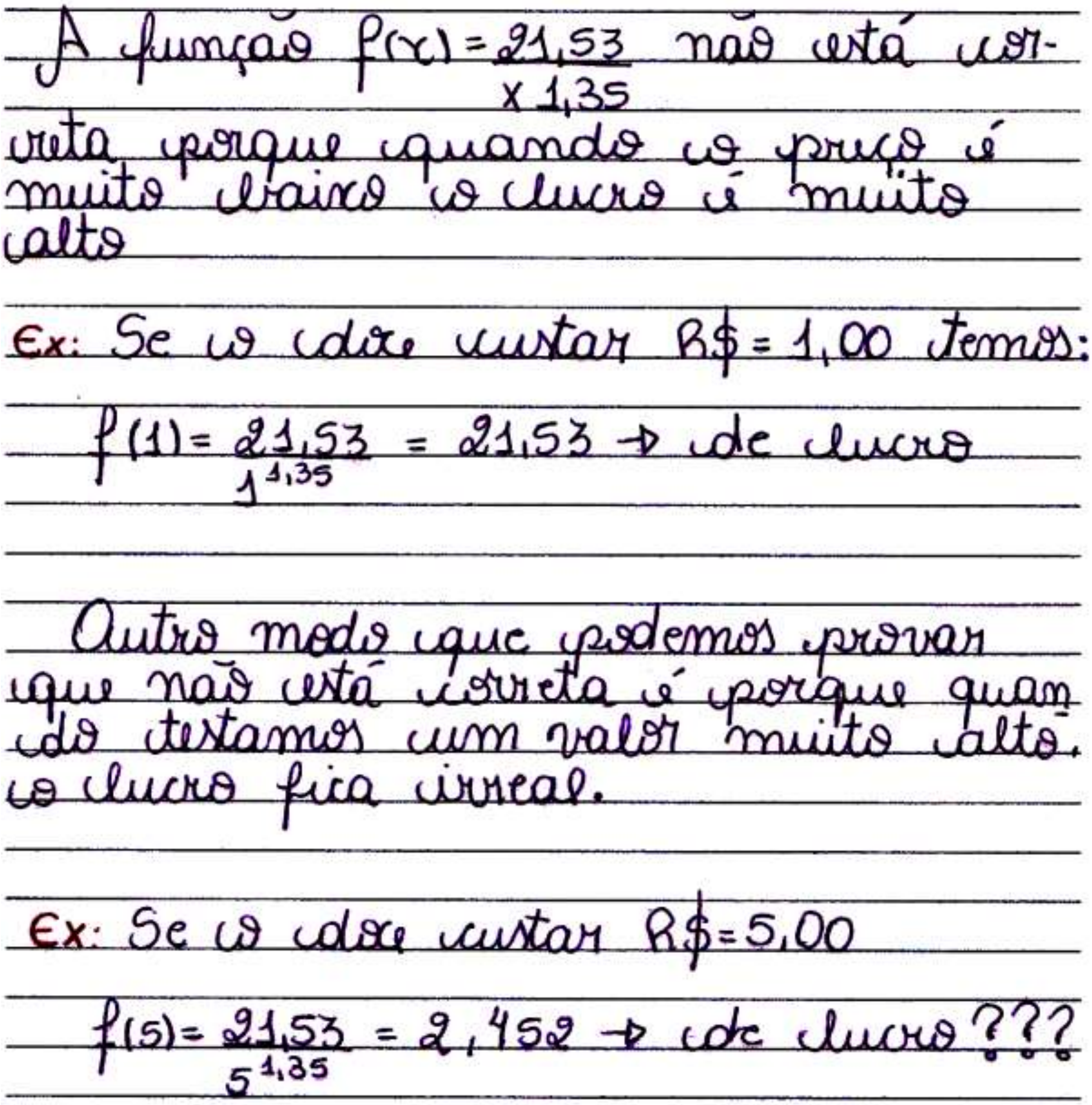
De acordo com o grafico ele nunca vai zerar.
Mesmo vendendo a 1 milhão de reais ainda seria vendido
Se vendermos perto de zero, teremos valores infinitamente enormes para o lucro.

$X=0,1.$ $y = \frac{21,53}{0,1^{1,35}} = \frac{21,53}{0,04} = 538,25$ absurdo!

Fonte: Atividade realizada pelo grupo A

Apesar de o lucro total estar em função do preço cobrado na construção deste modelo, matematicamente não discutiram para quais valores estava definido o domínio desta função (A.1), mas perceberam informalmente (C.2) algumas características importantes do domínio e imagem. O primeiro fato foi observado por 14,28% dos estudantes em relação ao x igual a zero, que era impossível calcular e o quociente aumentava conforme o x assumisse valores menores que um (A.1). Estas observações surgiram a partir de cálculos computacionais (C.2.1), no qual testaram valores como 0,1 e 0,01 para o x, e seguindo esta linha de raciocínio, cem por cento dos estudantes através das observações de gráficos e cálculos numéricos verificaram o modelo através do comportamento do x, ou seja, o que aconteceria quando o x assumisse valores pequenos e valores enormes (Figura 47).

Figura 47 - Análise completa do Ajuste Função Potência



A função $f(x) = \frac{21,53}{x^{1,35}}$ não está correta porque quando o preço é muito baixo o lucro é muito alto

Ex: Se o doce custar R$ = 1,00 temos:

$f(1) = \frac{21,53}{1^{1,35}} = 21,53 \rightarrow$ de lucro

Outro modo que podemos provar que não está correta é porque quando testamos um valor muito alto. o lucro fica irreal.

Ex: Se o doce custar R$ = 5,00

$f(5) = \frac{21,53}{5^{1,35}} = 2,452 \rightarrow$ de lucro???

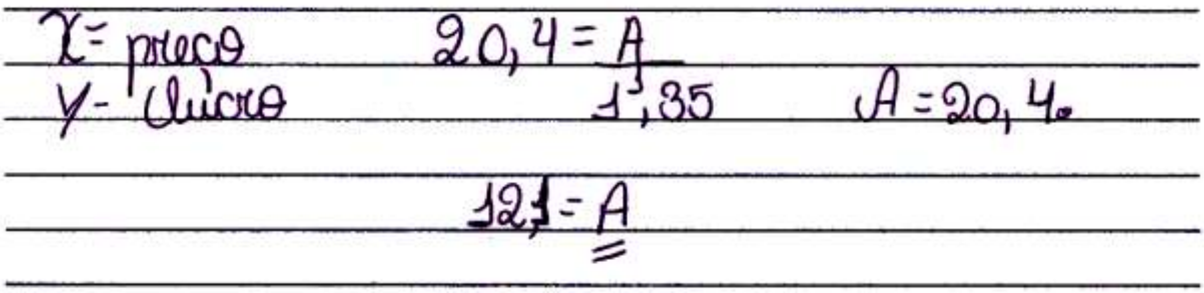
Fonte: Atividade realizada pelo grupo D

Durante a apresentação, justificaram verbalmente como corretas as principais características desta função para determinados valores (C.2.3), contudo na transcrição esses argumentos enfraqueceram-se (C.2.4). Um exemplo está na Figura 47, quando o estudante argumenta, utilizando o preço de R$ 1,00 para o produto. Não tem nada de anormal em relação com os dados coletados e apesar de $f(1)$ estar correto neste trabalho, a utilização deste ponto não era suficiente para descartar o modelo (C.2.5), pois o valor era muito próximo com o resultado coletado.

Deixando de lado esses pequenos tropeços na argumentação, o modelo ajudou atribuir novos significados para a matemática (A.1), ou seja, passaram a reparar o comportamento do quociente quando o divisor é um valor muito alto ou baixo, argumentação que foi observada após a utilização de cálculos numéricos, testes computacionais com os valores dos produtos (C.2.2). Interessante comentar, que o professor poderia ter conduzido para o estudo das assíntotas quando os estudantes realizaram os cálculos numéricos, pois, mesmo sem terem se preparados para esta atividade, empiricamente os alunos aproximaram-se desta ideia importante, para cálculos mais avançados como limites.

Convidados a resolver algebricamente, seguindo a linha das atividades anteriores, os estudantes não conseguiram, abandonando a questão, nas primeiras tentativas (Figura 48).

Figura 48 - Construção do modelo através de dois pontos



Fonte: Atividade realizada pelo grupo B

Ficou evidente, assim, limitações dos estudantes na linguagem matemática e habilidades com operações inversas (Figura 48), não permitindo que eles conseguissem argumentar algebricamente o que está sendo perguntado, ainda que compreendo o problema através de testes particulares, foi fora do formalismo que eles conseguiram expressar resultados interessantes.

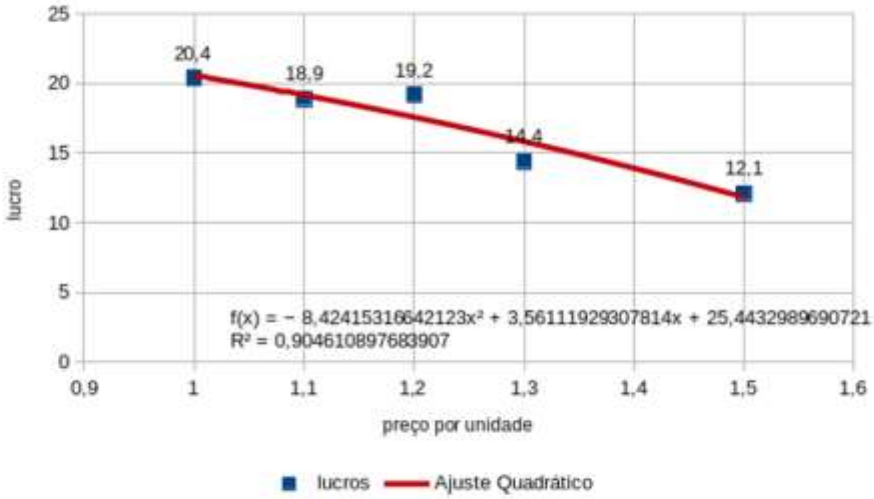
A modalidade de encontro utilizada para realizar essa atividade de modelagem, desinibiu os estudantes a debater um conteúdo, aparentemente, inédito para a maioria, pois, 78,57%, afirmaram veementemente que nunca antes terem trabalhado com esta função Potência. Logo nesta atividade, poder-se-ia afirmar, que através de suas observações experimentais (C.2) e alguns conceitos explorados em outros momentos, ajudaram a construir significados especiais para esta função (A.1) e algumas relações importantes com o fenômeno a ser modelado (A.2). Apesar de terem utilizado uma argumentação pragmática (C.2.5), ou seja, verbalizaram muitas “preposições” sem preocupações com a verdade ou demonstrá-las formalmente, conseguiram de alguma forma certa segurança para debater o modelo, ficando claro, que a modelagem é um meio ideal para o desenvolvimento da Matemática (B.1). É fato que no trabalho destes estudantes não foi criado nada novo para a Matemática, apenas para eles, mas essa possiblidade é observável nesses primeiros passos que eles deram para explorar um tema, a princípio, desconhecido por eles.

A hipótese para a utilização deste modelo, até então, desconhecida por causa do nome, começou algoritmicamente, mas nas primeiras observações e cálculos numéricos a Resolução foi através do raciocínio Lógico Dedutivo chegando desta forma a anulação deste modelo informalmente.

4.3.5 Ajuste Quadrático Part.1

Para este modelo, os estudantes preparam-se melhor durante a fase de pesquisa, mas por dominarem melhor as características da função quadrática começaram descartando este modelo antes da sua representação algébrica (Figura 49).

Figura 49 - Ajuste quadrático realizado pelos estudantes



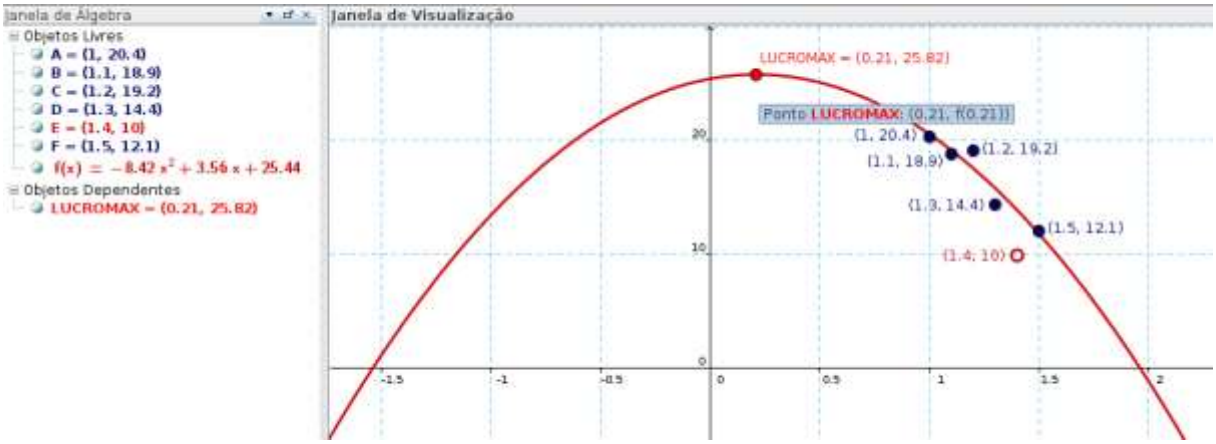
	Preço	Lucro(caixa)
✓	1	20,4
✓	1,1	18,9
✓	1,2	19,2
✓	1,3	14,4
✗	1,4	10
✓	1,5	12,1

Fonte: *Print* LibreOffice Calc 5.2

O motivo para essa especulação de descarte foi que era uma parábola, pois acreditavam que quanto mais caro cobrassem, mais lucrariam. Convidados a investigar os valores encontrados, 57,14 % lembraram que a coleta de dados foi encerrada pelo prejuízo que começaram a ter, ou seja, ganhavam mais por unidade, mas vendiam poucos produtos, resultando um lucro total baixo.

Para alcançar o objetivo buscado pelos estudantes dentro dessas atividades de modelagem, começaram a construção de uma função quadrática em que o lucro total está em função do preço por unidade (Figura 49). Começaram observando detalhes técnicos da matemática na função dada (A.1), primeiramente afirmaram que a função era decrescente pois o coeficiente de x^2 era menor que zero e identificaram o termo independente $c = 25{,}44$, com afirmação que é o ponto onde a função intercepta o eixo das ordenadas, eixo y, que comprovaram com o seguinte argumento: “basta substituir a variável x por zero, para zerar os termos que possuem x, restando apenas o termo independente, $0 + 0 + 25{,}44 = 25{,}44$”. Matematicamente os conceitos estão corretamente observados (A.1), mas essa análise do termo independente não permitia relacionar com o modelo. Para analisar melhor este comportamento do x, construíram o gráfico em um outro software (Figura 50).

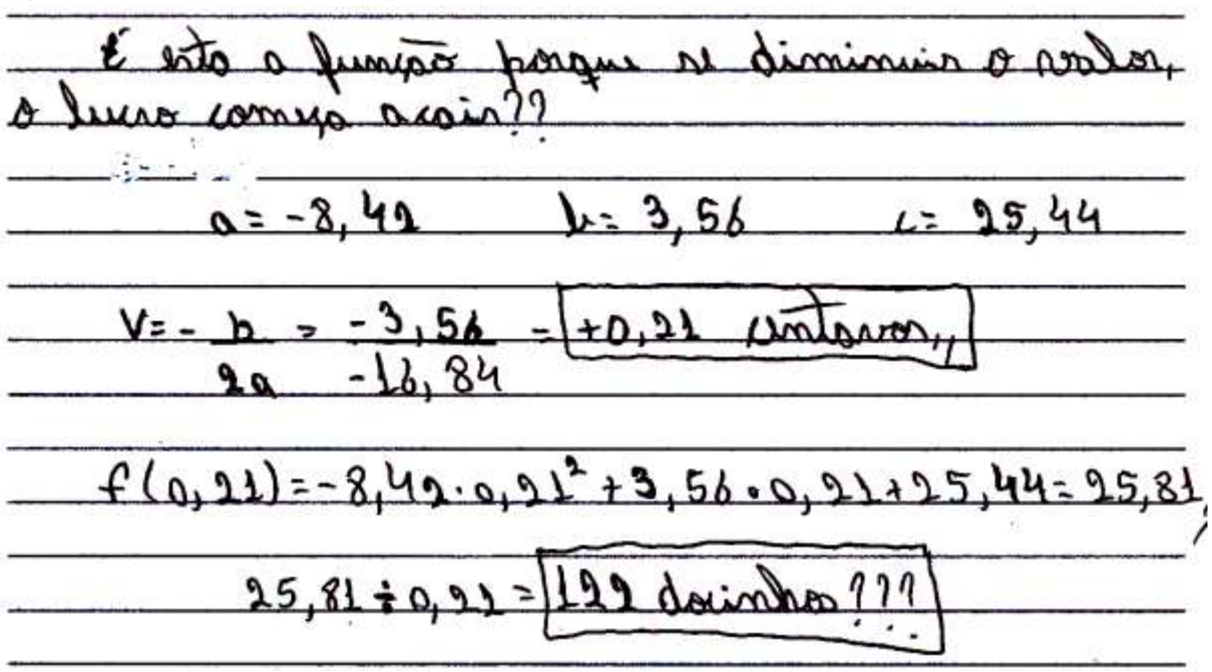
Figura 50 - Análise do modelo pelo gráfico



Fonte: *Print* do GeoGebra 4.0
Nota: O gráfico representa o preço da unidade por lucro total

Perceberam existência de um comportamento diferente em relação aos demais modelos, pois anteriormente os valores do modelo só aumentavam ou diminuam, e neste modelo, 78,57% dos estudantes observaram que antes de chegar ao eixo das ordenadas, eixo y, apresentava um “pico”. Aproximadamente 21,42 % dos estudantes reparam que zerava a função próximo aos R$ 2,00, o que fazia muito sentido para o que eles haviam observado, mas o problema estava em relação ao eixo y, quando estivesse em função de zero, ou seja, se os docinhos fossem gratuitos, não poderia gerar um lucro total de R$ 25,44. Pode-se observar significados importantes em relação as raízes da função, concavidade e termo independente, questões internas à matemática (A.1) amplamente relacionados com questões externas (A.2), ou seja, utilizaram-se simultaneamente argumentos formais (C.1) como informais para compreender o fenômeno (C.2.2). Nas pesquisas dos estudantes, 92,85% constataram que a função lucro teria esta característica, mas o problema era validar este modelo, pelo comportamento da parábola em relação ao eixo das ordenadas. Através da utilização do algoritmo para descobrir o vértice fizeram a primeira conclusão (Figura 51) que gerou discussões:

Figura 51 - Análise do ajuste quadrático



É isto a função porque se diminuir o valor, o lucro começa a cair??

$a = -8,42 \quad b = 3,56 \quad c = 25,44$

$V = -\frac{b}{2a} = \frac{-3,56}{-16,84} = \boxed{+0,21 \text{ centavos}}$

$f(0,21) = -8,42 \cdot 0,21^2 + 3,56 \cdot 0,21 + 25,44 = 25,81$

$25,81 \div 0,21 = \boxed{122 \text{ docinhos???}}$

Atividade realizada pelo grupo B

Neste debate, 42,85% dos alunos não concordaram com essa análise de 122 docinhos a 21 centavos a unidade, pois estava praticamente abaixo do custo dos docinhos, sem contar o número alto que teriam que fabricar (C.2.1), fato que ao confrontarem com os dados coletados, não fazia muito sentido, pois vendendo a um real eles obtiveram quase o mesmo lucro. Após testes computacionais aparentemente sem sucesso, fizeram algumas conjecturas, como a cada 10 centavos que aumentassem o valor do produto venderiam 6 unidades a menos, mas até o momento sem muita utilidade para eles. Decidiram utilizar a estratégia adotada nos modelos anteriores, construir o gráfico através da função característica, mas 100% dos estudantes falharam nos seguintes pontos:

a) tentaram usar dois pontos, como nos modelos anteriores;

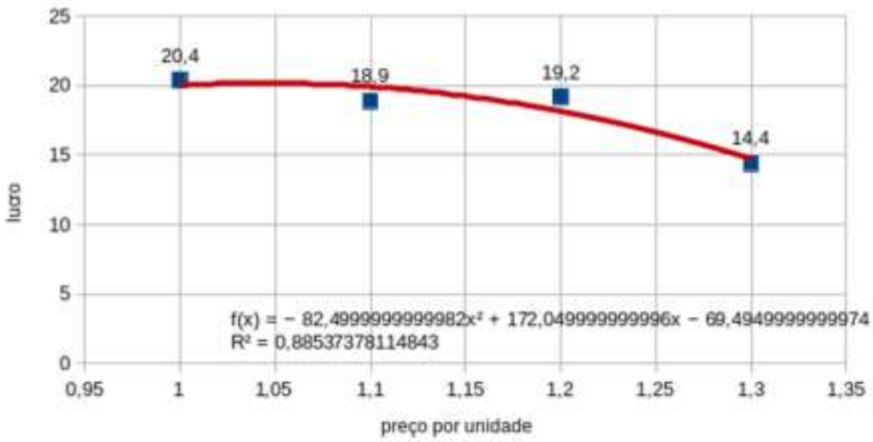
b) sugerido resolver por sistemas, não conseguiram zerar coeficientes;

c) sugerido resolver por determinantes utilizando o computador, muitos acharam trabalhoso demais a construção das matrizes, abandonando o processo.

Em relação ao item (a) não obtiveram sucesso, porque eles precisavam de três pontos para construir o sistema; o que se esperava verificar se conseguiriam armar ou analisar o sistema; no item (b) essa informação não ajudou muito, devido a suas limitações matemáticas, bem como alguma dificuldade no estudo de matrizes e determinantes, limitando qualquer construção formal (C.1), esperava-se que os estudantes construíssem apenas a matriz; e pelo item (c), esperava-se que, através do computador, explorassem as matrizes ou determinantes, inicialmente pelo LibreOffice Calc ou algum software que calcula imediatamente esses resultados, contudo esta atividade não chegou a se concretizar, poucos até lançaram os dados no programa, todavia não sabiam onde chegar, caracterizado pela falta de compreensão do conteúdo necessário (A.1).

Na atividade de rever os dados coletados e o modelo construído, um estudante sugeriu para o grupo descartar o último resultado da tabela f(1,5)=12,1 e obtiveram o seguinte modelo representado na Figura 52 e Figura 53, no qual 100% do grupo concordou com a estratégia sugerida.

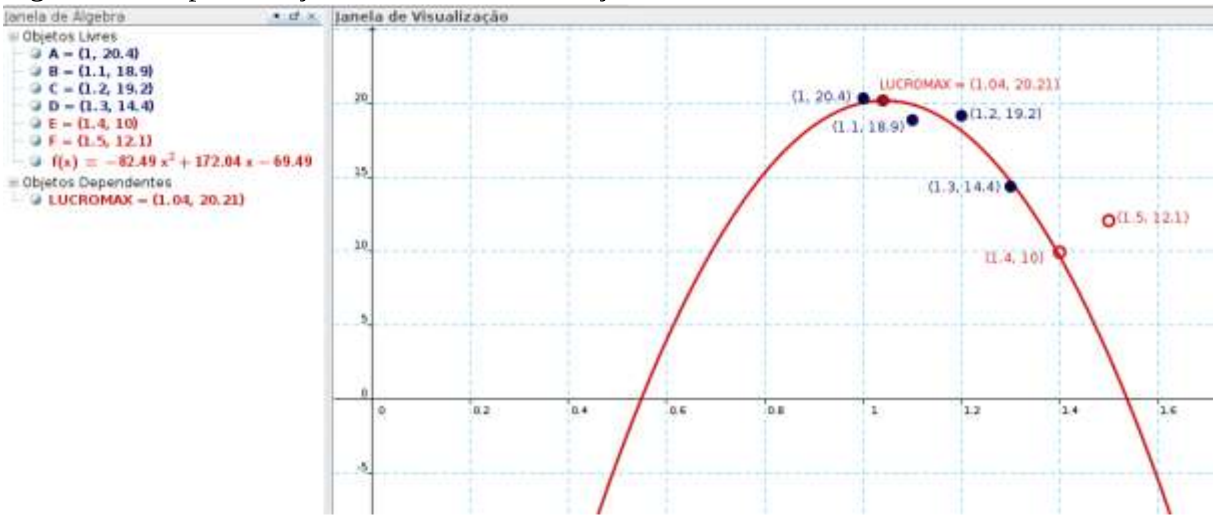
Figura 52 - Correção do modelo quadrático pelos estudantes



	Preço	Lucro(caixa)
✓	1	20,4
✓	1,1	18,9
✓	1,2	19,2
✓	1,3	14,4
✗	1,4	10
✗	1,5	12,1

Fonte: *Print* do LibreOffice 5.2
Nota: O lucro total está em função do preço por unidade e neste modelo foi desconsiderado os pontos (1,4; 10) e (1,5; 12,1)

Figura 53 - Representação do modelo de correção



Fonte: *Print* do GeoGebra 4.0
Nota: O lucro total está em função do preço por unidade

Nesta atividade exploratória do computador, pode-se notar um ganho de significado para a função quadrática, tanto internamente (A.1) como externamente (A.2), através do material concreto (C.2.2), ou seja, através do fenômeno estudado. Devido â compreensão das principais características da função para o problema a ser modelado, eles sabiam que o gráfico da Figura 51 estava correto por não interceptar o eixo das ordenadas, eixo y. Neste mesmo sentido, as raízes das funções também ganharam um significado mais aprofundando do que interceptar o eixo das abscissas, eixo x (A.1), caracterizada pela argumentação dialética (C.2) utilizada juntamente para revelar uma nova percepção em relação ao vértice da parábola, que é possível observar na seguinte conclusão: “O lucro está relacionado com o preço e as vendas, de modo que não adianta subir se vai vender pouco e não adianta reduzir o lucro se vai vender muito, tem que ter um equilíbrio”. É importante ressaltar a riqueza de significado externos (A.2) e internos (A.1), características dessa atividade de modelagem, pois permitiu através de tentativas e erros, encontrar uma solução que pudessem argumentar.

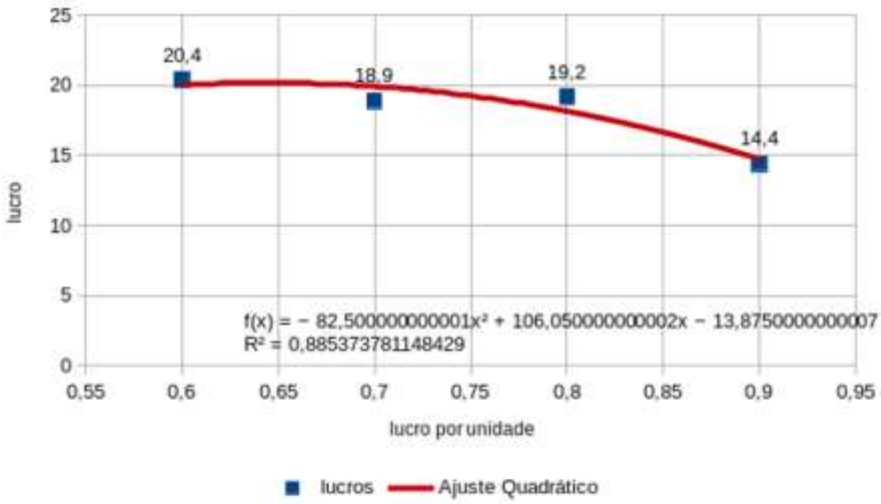
Utilizando-se do cálculo do vértice da parábola, concluíram que o preço de venda seria de R$ 1,04 e o lucro de R$ 20,21 reais, que fazia muito sentido com os dados coletados pelos estudantes na fase de inteiração.

Na etapa da preparação do modelo para a validação, surgiu um problema na interpretação dos dados (A.1), os estudantes não conseguiam encontrar através do modelo construído o número de docinhos que deveriam fabricar (A.2). O equívoco estava na divisão do lucro total pelo preço da unidade que gerava o resultado de 19 docinhos, no qual estavam convencidos através de observações que esta quantia não estava de acordo com o lucro representado no modelo (C.2).

Como o modelo se torna mais sofisticado a medida que se conhece mais sobre o fenômeno, neste caso, os estudantes perceberam a necessidade de considerar uma nova variável, quantidade, além do preço e lucro. Essa nova perspectiva exigiu dos estudantes uma análise mais aprofundada dos dados coletados, especificamente, o domínio da função, que gerou novas interpretações e modelos quadráticos.

Os estudantes reconsideraram um dos modelos construídos durante a atividade de encontrar o comportamento estranho do ajuste quadrático em relação ao eixo das ordenadas da Figura 49. A diferença do modelo da Figura 52 para o da Figura 54, está no domínio da função, enquanto este utiliza lucro por unidade, aquele considerava o preço por unidade.

Figura 54 - Modelo quadrático, lucro total por lucro por unidade



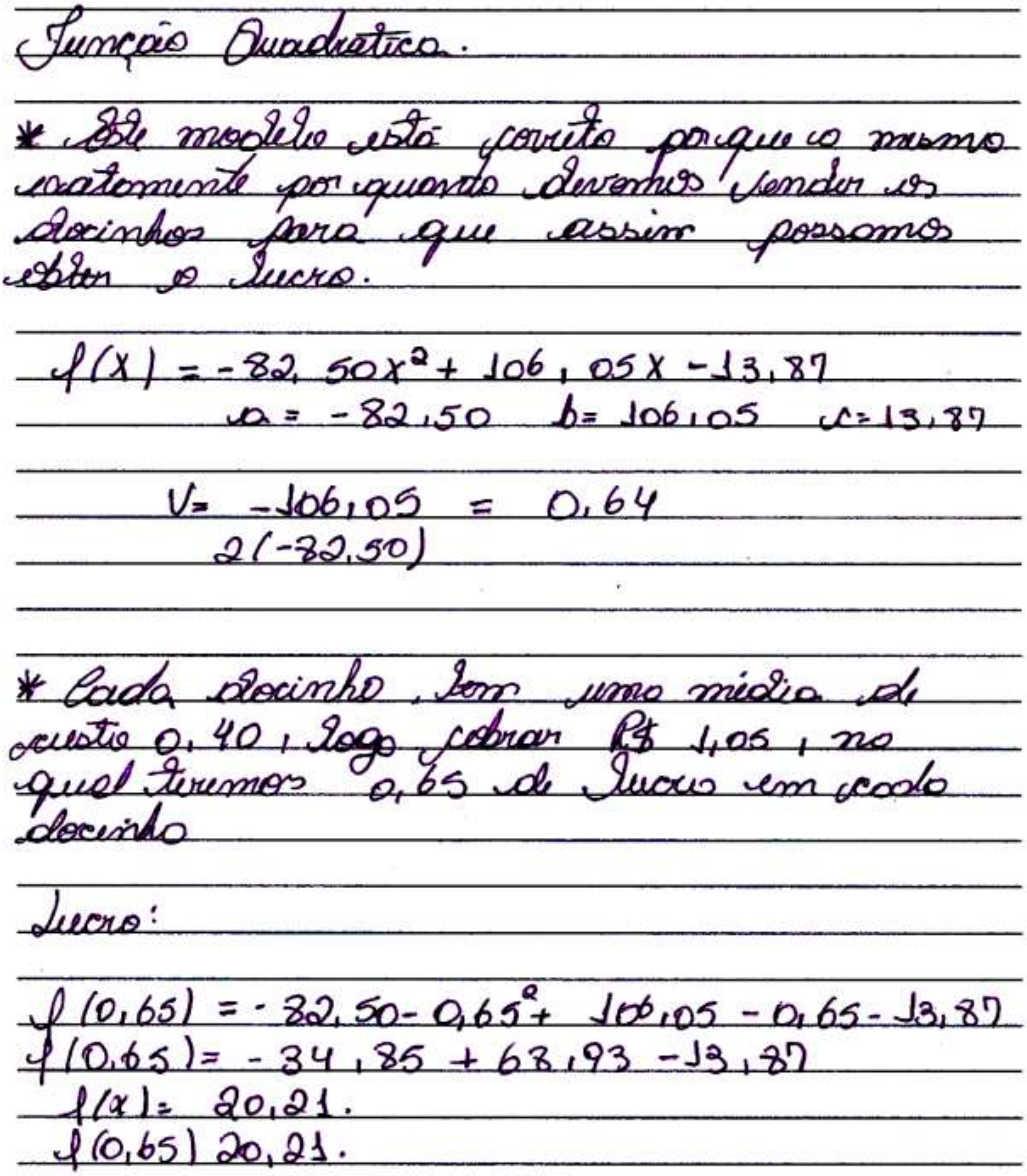
	Preço	Lucro(caixa)
✓	0,6	20,4
✓	0,7	18,9
✓	0,8	19,2
✓	0,9	14,4
✗	1,0	10
✗	1,1	12,1

Fonte: *Print* do LibreOffice Calc 5.2

O penúltimo modelo (Figura 52) satisfazia os objetivos dos estudantes até aquele determinado instante, um dos motivos para este último modelo (Figura 54) não ter ganhado importância, mas este novo contexto conduziu-os a reconsiderá-lo. O argumento para a sua reutilização estava sustentado em dois pilares. O primeiro era o coeficiente de correlação, praticamente igual da Figura 52; o segundo, o resultado imediato na divisão do lucro total pelo lucro por unidade, pois além de mostrar o lucro total de R$ 20,27 e o lucro por unidade de R$ 0,64, a divisão entre estas duas grandezas resultava no número de 32 docinhos aproximadamente (C.1), resultado empiricamente comprovado (C.2). Através desta nova análise, os estudantes perceberam que o modelo anterior era praticamente o mesmo construído, a diferença estava que naquele o preço de custo, R$ 0,40, estava presente no domínio, ou seja, o R$ 1,05 era a soma dos R$ 0,65 de lucro por unidade com os R$ 0,40 de custo.

Nota-se um refinamento no modelo e uma interpretação de dados mais rebuscada (Figura 55), e apesar dos dois modelos estarem corretos e conduzirem, praticamente, para os mesmos resultados, inclusive o mesmo coeficiente de correlação, apresentaram dificuldades diferentes. Para encontrar a quantidade de docinhos, o domínio do primeiro modelo exigiu uma interpretação mais cuidadosa, pois tinha dentro da variável independente (composição de funções), preço, outra informação embutida, ou seja, além do lucro por unidade estava presente a constante custo de produção, R$ 0,40, enquanto que no último modelo os estudantes conseguiram isolar as informações que desejavam (Figura 54) para apresentar imediatamente o número de docinhos.

Figura 55 - Análise da correção do modelo quadrático



Função Quadrática.

* Este modelo está correto porque o mesmo exatamente porquanto devemos vender os docinhos para que assim possamos obter o lucro.

$f(x) = -82,50x^2 + 106,05x - 13,87$

$a = -82,50 \quad b = 106,05 \quad c = 13,87$

$V = \frac{-106,05}{2(-82,50)} = 0,64$

* Cada docinho, tem uma média de custo 0,40, logo cobrar R$ 1,05, no qual teremos 0,65 de lucro em cada docinho

Lucro:

$f(0,65) = -82,50 - 0,65^2 + 106,05 - 0,65 - 13,87$

$f(0,65) = -34,85 + 68,93 - 13,87$

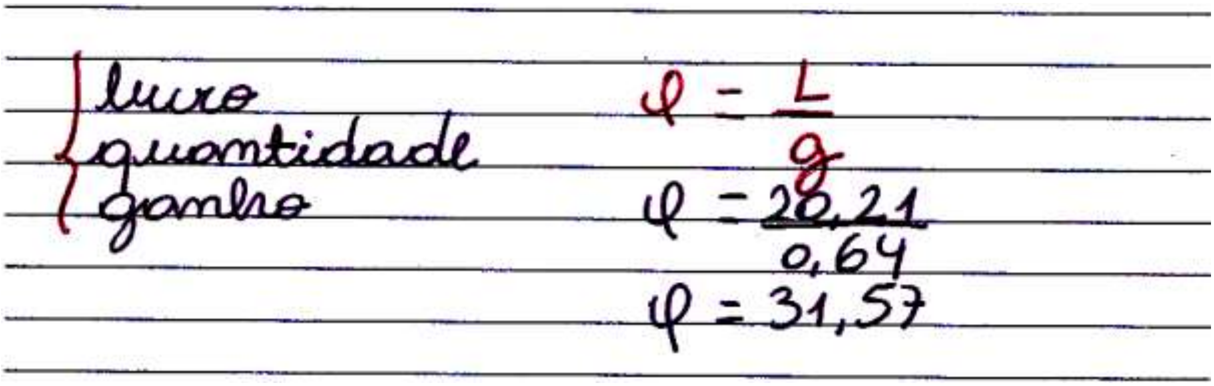
$f(x) = 20,21.$

$f(0,65)\ 20,21.$

Fonte: Atividade realizada pelo grupo B
Nota: O aluno estava comparando com o modelo anterior, que neste eles tinham o lucro, o valor e a quantidade.

Abstração surge naturalmente pela primeira fez nessa pesquisa, na representação algébrica para achar a quantidade de docinhos em função do lucro total pelo ganho por unidade (Figura 56), uma operação inversa das ideias anteriores, trabalhada perfeitamente nos moldes da Matemática pura (A.1), mesmo que carregada de significados externos a ela (A.2). A construção dessa argumentação formal (C.1) está estruturada na compreensão das grandezas que desejava-se obter, material concreto (C.2.2).

Figura 56 - Cálculo da quantidade de docinhos a partir do modelo



Fonte: Atividade realizada pelo grupo C

Indagados sobre a origem da fórmula (Figura 56), partiram da representação gráfica, que era lucro total pelo ganho individual, portando aquele lucro representado deveria ser o produto da quantidade pelo ganho por unidade. Tem-se uma manipulação algébrica com significados explícitos, principalmente as letras que utilizaram para chegar à expressão (A.2) da Figura 56, pois apesar da abstração compreendiam claramente por que estavam organizadas desta forma (A.1), ou seja, o problema dos doces deixou de ser importante por alguns instantes, quando os estudantes focaram no estudo dessas grandezas, através de uma argumentação formal (C.1) para no final retornarem com o significado concreto para o valor encontrado (C.2). Esta nova perspectiva sobre os pontos do modelo, ajudou os demais grupos que utilizaram o preço do produto por lucro total, que deveriam descontar o custo para encontrar a quantidade, ainda assim optaram por este modelo da Figura 54 por causa do coeficiente de correlação de 88%, praticamente igual ao anterior. Tanto o processo de construção como os obstáculos encontrados, conduziram a reflexões mais profundas sobre o fenômeno modelado e esclareceu para os participantes qual é o papel da ciência para o mundo, pois à medida que se descobre mais informações sobre o fenômeno estudado, novos modelos são apresentados (A.2.3). Durante o debate estudante-estudante, percebeu-se, também, que além dessa compreensão sobre fenômenos reais e o que significa "fazer ciências" (B.2), valorizou-se o estudo de funções e, principalmente, o interesse da Matemática no estudo das raízes e vértices de parábola por exemplo (B.1).

Ao final da apresentação desse modelo, o professor indagou se esta modificação feita no domínio do modelo, a utilização do lucro por unidade, e a anulação do ponto (1,5; 12,1), haviam prejudicado as análises anteriores. Aproximadamente, 71,42% da turma reconstruíram os modelos enquanto que 7,14% afirmaram prontamente não, pois eles descartaram os modelos anteriores não só pelos valores, mas pelas suas características e no contexto buscado estava de acordo a escolha do domínio. Neste último questionamento, pode-se dizer que o argumento numérico (C.2.1) e o material concreto (C.2.2) tem forte presença para a maioria dos estudantes durante as atividades da modelagem, enquanto que, para uma pequena minoria, 7,14%, capta-se uma percepção mais abstrata sobre funções (C.1).

Analisando os passos e a desenvoltura dos estudantes para construírem esse modelo, pode-se dizer de uma forma geral, que através de especulações começaram com uma hipótese dialética, mas diante da representação do computador transitaram para a hipótese algorítmica, resolvendo a partir dessa hipótese através de algoritmos, apesar de que alguns instantes o raciocínio lógico dedutivo estar presente em muitas decisões da solução, o cálculo do vértice e o seu significado foram fatores predominante para a validação do modelo, dessa forma chegando assim ao modelo formalmente.

4.3.6 Ajuste Quadrático Part.2, Explorando Uma Nova Hipótese

Durante a investigação da inconsistência do primeiro modelo quadrático (Figura 49), 14,28% dos estudantes observaram que existia um padrão na medida em que subissem o valor do produto. Dentro deste argumento, o momento era propício para uma verificação mais apurada das atividades de modelagem, pois tinha um modelo real para aplicar essa observação (C.2), para isso, entretanto, foi proposto utilizar o mesmo princípio estudado nos problemas de segundo grau, no qual, alguns estudantes demonstraram ter certa familiaridade desse processo na fase de diagnóstico dessa pesquisa (Figura 13).

Para esta última atividade, algumas dúvidas surgiram, solicitaram ao professor a resolução de dois exemplos para relembrarem (Figura 57).

Figura 57 - Atividades do livro didático dos estudantes

59. ATIVIDADE EM DUPLA (UFPE) Num voo com capacidade para 100 pessoas, uma companhia aérea cobra R$ 200,00 por pessoa quando todos os lugares são ocupados. Se existirem lugares não ocupados, ao preço de cada passagem será acrescida a importância de R$ 4,00 por cada lugar não ocupado (por exemplo, se existirem 10 lugares não ocupados o preço de cada passagem será R$ 240,00). Quantos devem ser os lugares não ocupados para que a companhia obtenha o faturamento máximo? 25 lugares.

57. ATIVIDADE EM DUPLA Um ônibus de 40 lugares foi fretado para uma excursão. A empresa exigiu de cada passageiro R$ 20,00 mais R$ 2,00 por lugar vago. Qual o número de passageiros para que a rentabilidade da empresa seja máxima? 15 passageiros.

Fonte: (Dante, 2014, 125)

Dentro desta proposta, 51,14% dos estudantes, apresentaram uma nova abordagem para o problema e novos significados para as equações do 2º grau, tanto matematicamente (A.1) como externamente (A.2). Os estudantes perceberam que as vendas caíam em média de 6 docinhos a cada 10 centavos acrescidos ao lucro do produto (Figura 59), com base nesta hipótese construíram a seguinte relação na Figura 58.

Figura 58 - Explorando modelagem e resolução de problemas

1º 2º

$f(x) = (34 - 60x)(0,6 + x)$

$f(x) = 20.4 + 34x - 36x - 60x^2$

$f(x) = 60x^2 - 2 + 20,4$

$A = 60x^2 \quad b = -2 \quad c = 20,4$

$V = \frac{-b}{2a} \quad V = \frac{-2}{120} = -0,01$

1º Quantidade a cada 0,10 que aumenta, vai caindo de 6 em 6

2º

$x = -0,01 \; (34 - 60.(-0,01))(0,6 - 0.01)$

$= 34,6 \times 0,59 = 20,41$

$\Rightarrow$ Temos que vender 35 docinhos com o lucro de 0,60.

Fonte: Atividade realizada pelo grupo A

Na Figura 58, a hipótese algorítmica nasceu das observações dos estudantes sobre o comportamento dos dados do fenômeno, uma construção totalmente dialética. Nesta nova construção do modelo, tem-se um elevado grau de abstração e aplicação matemática, graças ao domínio de assunto que os estudantes construíram através da caminhada que realizaram na aula de modelagem, oportunizou aos alunos a relacionar e explorar essa habilidade, de construir e resolver equações do segundo grau, trabalhada no ensino tradicional. Perguntados como chegaram no produto da função $f(x) = (34 - 60x)(0,6 + x)$, muitos responderam que partiram da mesma ideia para achar o lucro na Figura 56, pois precisava-se do produto da quantidade pelo ganho por unidade para o lucro total, e o decréscimo de 6 unidades descobriram através de estes numéricos (Figura 59), onde eles aplicaram a média aritmética da diferença entre as quantidades vendidas. Nesta reconstrução, tem-se todos os elementos da Matemática pura (A.1), mas com auxílio de elementos externos (A.2), ou seja, toda a argumentação formal (C.1) utilizada aqui, construiu-se a partir dos erros e acertos dos modelos anteriores (C.2).

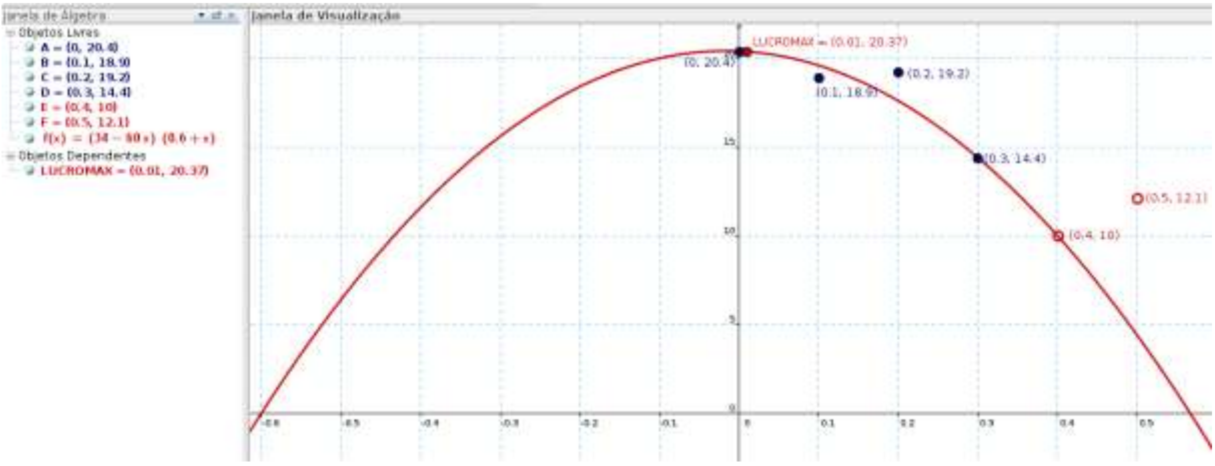
Figura 59 - Testes feitos para compreender o comportamento das vendas

Quantidade	Preço	Lucro	
34	1	20,4	34 – 27 = 7
27	1,1	18,9	27 – 24 = 3
24	1,2	19,2	24 – 16 = 8
16	1,3	14,4	Logo 7 + 3 + 8 = 18/3 = 6

Fonte: *Print* do LibreOffice Calc 5.2

A representação do novo modelo no GeoGebra (Figura 60), baseado no decrescimento de 6 unidades, em média, a cada 10 centavos, gerou debates interessantes entre os estudantes.

Figura 60 - A representação do novo modelo no GeoGebra.



Fonte: *Print* do GeoGebra 4.0
Nota: O lucro total está em função do ganho por unidade

O gráfico acima (Figura 60) representa o lucro total em função do ganho por unidade, todavia essa representação trouxe à tona, assuntos debatidos anteriormente, que pareciam estarem resolvidos. O primeiro tema é em relação ao eixo das ordenadas, eixo y, que à priori aparentava não estar de acordo com os testes numéricos realizado por eles, pois segundo eles a função encontrada estava correta para os valores verificados na Tabela 3.

Tabela 3 - Planilha detalhada de lucros

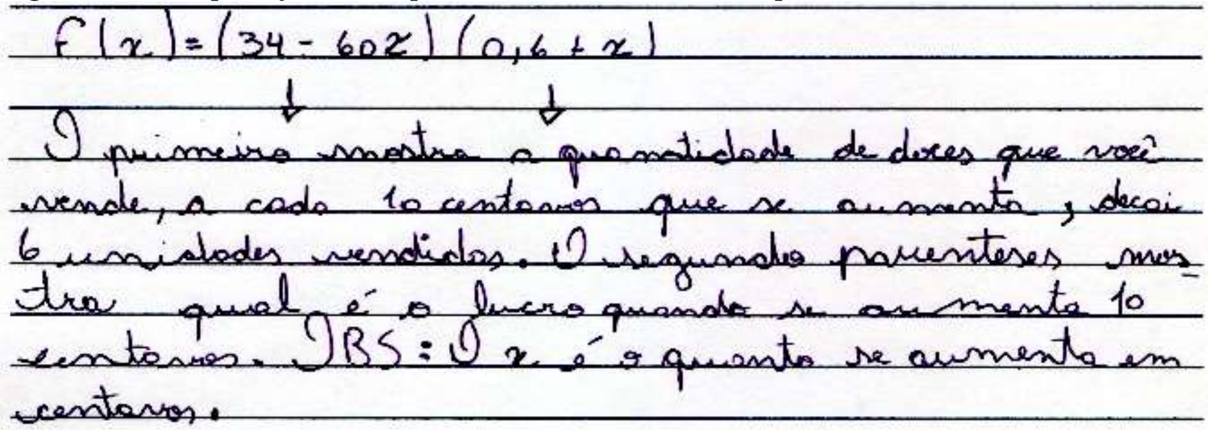
Acréscimo	Quantidade	Lucro/Unidade	Lucro Total
x	(34-60x)	(0,6+x)	f(x)
-0,6	70	0	0
-0,5	64	0,1	6,4
-0,4	58	0,2	11,6
-0,3	52	0,3	15,6
-0,2	46	0,4	18,4
-0,1	40	0,5	20
0	34	0,6	20,4
0,1	28	0,7	19,6
0,2	22	0,8	17,6
0,3	16	0,9	14,4
0,4	10	1	10
0,5	4	1,1	4,4

Fonte: *Print* do LibreOffice Calc 5.2
Nota: Os títulos da coluna foram adicionados pelo autor da pesquisa

O teste numérico (Tabela 3) está organizado da seguinte maneira: A primeira coluna representa os valores adicionais em centavos em que $f(x) > 0$, o lucro é sempre positivo para os múltiplos inteiros de dez centavos; a segunda coluna mostra a quantidade de doces vendidos conforme o x varia; a terceira coluna representa o lucro que eles podem obter além dos 60 centavos iniciais e última coluna é o produto da quantidade pelo lucro da unidade, mostrando o lucro máximo.

Discussões e observações dos testes numéricos (Tabela 3) ajudaram os estudantes com dificuldades nesta parte da modelagem a relacionar o gráfico encontrado com a lei construída (Figura 58). Olhando para a expressão sem conhecer o assunto, um matemático poderia compreender que se trata de uma função do segundo grau, onde o primeiro termo diminui conforme o x assume valores maiores e o segundo termo aumenta, e que o $f(x)$ está em função do x. Do ponto de vista desses estudantes, provavelmente pode passar despercebido muitos desses detalhes técnicos matemáticos, mas a forma de como foi construído através da modelagem matemática, com base em um raciocínio lógico e o problema vivenciado (C.2.2), a mesma expressão tem um significando mais amplo (A.2) para eles, além de prever esse comportamento matemático de cada termo da expressão (A.1), evidenciado na Figura 61.

Figura 61 - Interpretação mais aprofundada dos termos da hipótese



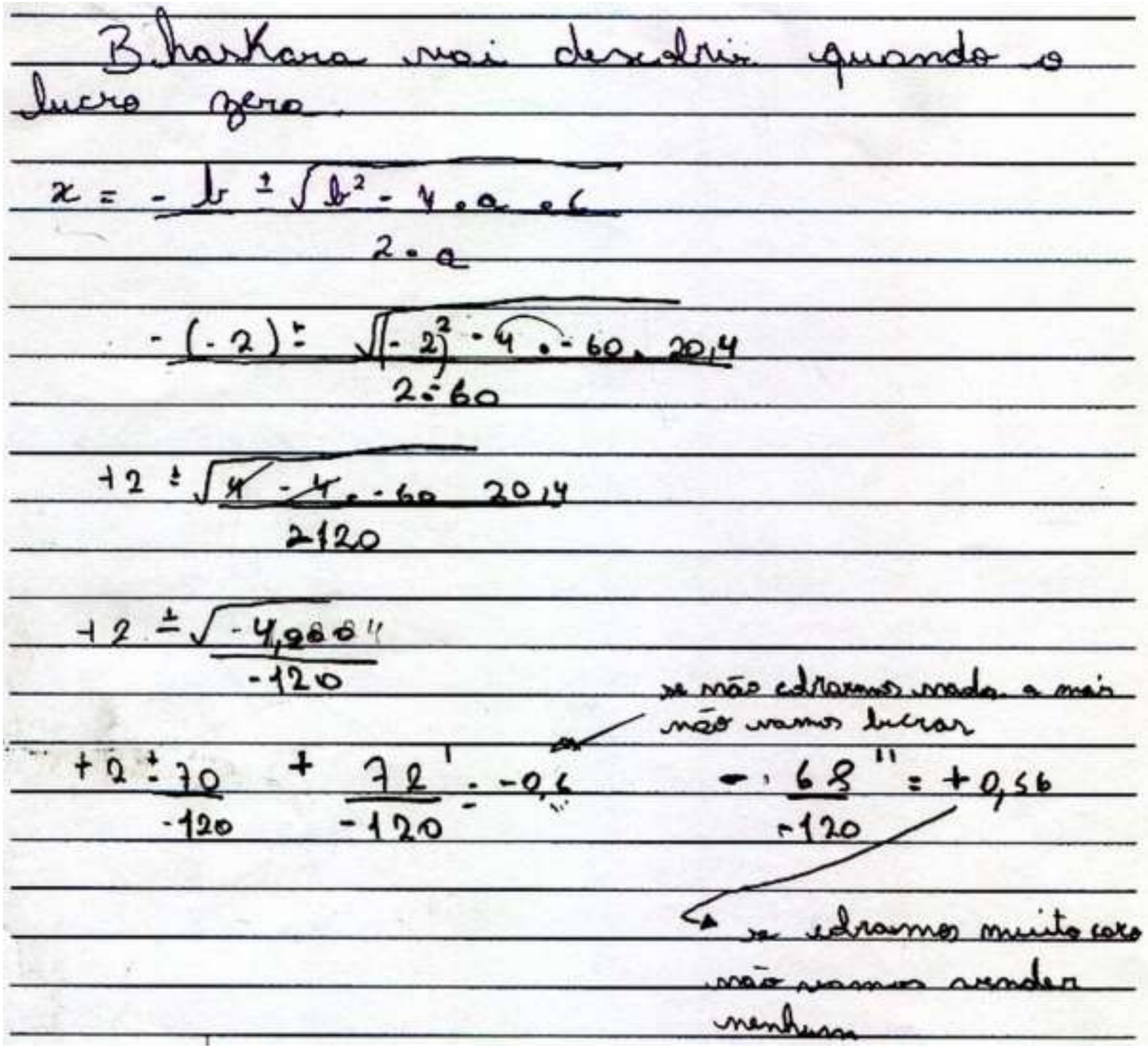
$f(x) = (34 - 60x)(0,6 + x)$

O primeiro mostra a quantidade de doces que você vende, a cada 10 centavos que se aumenta, decai 6 unidades vendidas. O segundo parenteses mostra qual é o lucro quando se aumenta 10 centavos. OBS: O x é o quanto se aumenta em centavos.

Fonte: Atividade realizada pelo grupo B

Neste modelo foi possível aplicar e estudar a fórmula de Baskhara (Figura 62) em um problema real e, apesar de não terem observados os detalhes importantes dessa fórmula (A.1), como o estudo do Delta, a resolução está de acordo com o formalismo matemático (C.1). O ponto a observar que a modelagem proporcionou aos estudantes a atribuíram significados importantes para os zeros ou raízes das funções, x' e x'', visivelmente na interpretação do resultado (Figura 61). O primeiro valor, $-0{,}6$, substituído na função zera o primeiro termo, que faz bastante sentido, já que o lucro inicial é de 60 centavos por unidade, e este desconto acabaria anulando o lucro. O segundo valor, $0{,}56$, zera o primeiro termo que representa a quantidade de produtos, ou seja, se lucrarem 56 centavos além do lucro inicial de 60 centavos, não iriam conseguir vender os docinhos, que é uma tendência muito próxima com o que foi observado na fase da coleta de dados, onde as vendas despencaram quando exploravam preços mais altos.

Figura 62 - Interpretando as raízes das equações do 2º grau



Bhaskara vai descobrir quando o lucro zera.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot -60 \cdot 20{,}4}}{2 \cdot 60}$$

$$\frac{+2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot -60 \quad 20{,}4}}{2 \cdot 120}$$

$$\frac{+2 \pm \sqrt{-4{,}896}}{-120}$$

se não cobrarmos nada a mais não vamos lucrar

$$+2 \pm \frac{70}{-120} \quad + \quad \frac{72}{-120} = -0{,}6 \qquad - \; \frac{68}{-120} = +0{,}56$$

se cobramos muito caro não vamos vender nenhum

Fonte: Atividade realizada pelo grupo D

Dentro desta atividade, foi possível revisar, aplicar e atribuir novos significados aos conhecimentos matemáticos trabalhados no primeiro ano, mas detalhes técnicos do conteúdo não foram aprofundados, como no estudo das raízes, no qual poderiam ter evitado a fórmula de Baskhara, pois tinha-se o produto de duas equações do primeiro grau, bastaria igualar a zero a função e passar um dos termos para o outro lado, sinais de uma aprendizagem fragmentada e sem direcionamento do professor (D.2).

Esta última atividade era uma possibilidade remota a ser observada nesta pesquisa, apenas foi explorada, graças a observação de alguns estudantes sobre a variação dos dados coletados, logo, tornou-se muito oportuno para observar as habilidades e competências de resolução de problemas diante do fenômeno real, possibilitando extrair mais algumas particularidades sobre a Modelagem Matemática. Durante a fase de diagnóstico foi exposto para os estudantes uma atividade similar com este último caso (Anexo – Questão 7), no qual apenas um estudante conseguiu resolver (Figura 13), diferentemente o que se observou aqui. Durante essa atividade de modelagem, 64,28% dos estudantes tiveram sucesso na elaboração e a análise do modelo através de testes particulares (C.2.1) com o material concreto (C.2.2) e atribuíram novos significados nos conhecimentos previamente construídos em outras épocas (C.2), ou seja, a proximidade com o fenômeno a ser modelado (B.2) permitiu aos estudantes compreenderem onde precisavam chegar, explorando desse modo, suas habilidades matemáticas de resolução de problemas (B.3), e mais, a valorização das produções informais dos estudantes oportunizou que participassem dessa construção. Apesar de não ser simples encontrar um tema que vá ao encontro do interesse geral do grupo, com alguns modelos adequados, acredita-se, que é possível explorar este lado mais abstrato da matemática, conforme ficou relatado neste capítulo.

4.3.7 Modelo à prova

Após esta atividade de modelagem os estudantes obtiveram sucesso com o modelo construído. Fabricando 32 docinhos o desperdício era quase zero, ou seja, conseguiriam durante os dias que comercializaram, vender constantemente em dias normais todos no valor de R$ 1,05 a unidade, mas este modelo foi colado à prova ao final de novembro de 2017. Quando os estudantes tentaram vender 35 docinhos no valor R$ 1,05 a unidade, acabava sobrando algumas vezes dois ou três docinhos, obrigando muitas vezes os mesmos a venderem na sala dos professores para não terem prejuízo. Ao final do mês de dezembro, o lucro por unidade diminui um pouco por causa da elevada de preços, mas eles não repassaram para os estudantes, mantendo 32 docinhos a R$ 1,05 até 4º semana de dezembro. Até o dia 21/12/2017 a turma arrecadou o total de R$ 806,40 na venda de doces.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A metodologia da ação não compartilhada e o registro da desenvoltura dos estudantes nas atividades de modelagem através da observação sistemática, permitiu identificar as características do conhecimento matemático nessa modalidade ensino, graças aos registros em diário de bordo e das produções escritas dos estudantes. A pesquisa bibliográfica utilizada para a construção das categorias de análise, mesmo com toda subjetividade inerente, permitiu o enquadramento dessas características.

O ganho de significado na linguagem matemática é uma característica marcante que impulsionou as outras características nesta atividade. O estudo de funções ganhou novos significados que conduziram os estudantes para soluções mais intuitivas, por exemplo, no ajuste Linear os estudantes associaram que o coeficiente linear o modelo procurado não poderia interceptar o eixo das ordenadas (eixo y) (A.1), pois está associado ao lucro zero (A.2). Nas exponenciais pode-se destacar a redescoberta do número de Euler e algumas propriedades fundamentais das potências (A.1), como o expoente negativo e sua relação com o crescimento e decrescimento, e a percepção dessa propriedade no ajuste Logarítmico e ajuste Potência, além das propriedades do ensino fundamental. Esse ganho de significado conduziu à algumas demonstrações, apesar de não estarem dentro formalismo matemático (C.2.5), tornaram-se resultados muito práticos para a resolução do problema que desejavam, observado na explicação do expoente zero. No modelo Quadrático, significados estritamente exemplificáveis, como os zeros da função associados ao lucro por unidade ou a quantidade nula, gera lucro zero. É notório essa aproximação da linguagem matemática na utilização ou criação de alguns símbolos para descobrir a quantidade de docinhos no modelo Quadrático (B.3) e (B.2). Esse ganho de significado na simbologia pode ser sintetizado da seguinte maneira: eles partiram do problema real (A.2) para a construção de alguns conceitos abstratos (A.1).

A característica da argumentação utilizada pelos estudantes apresentou-se de várias maneiras. A solução Formal (C.1) revelou-se nos conteúdos que dominavam, como nas funções lineares, algumas exponenciais e quadráticas, e nos momentos de sugestão do professor, como a resolução de problemas do segundo grau, hipótese dialética construída pela observação de um dos estudantes que algoritmicamente o grupo resolveu, mas ao final com interpretações bem interessantes para as raízes ou zeros da função. Nos demais modelos, saíram-se informalmente (C.2) utilizavam-se de testes computacionais (C.2.1) e associações ao fenômeno (C.2.2) para encontrarem alguma saída para os modelos que não dominavam. A construção da compreensão de alguns símbolos ajudou intuitivamente em algumas análises do modelo, no ajuste Potência, por exemplo, a argumentação dialética foi suficiente para resolver o problema, precisamente na observação de pontos importantes como as assíntotas (A.1), sem a necessidade de tantos testes computacionais (C.2.5).

Uma outra característica perceptível nesse trabalho são os conteúdos matemáticos trabalhados (D.2). Esta atividade foi elaborada para observar determinados conteúdos, precisamente funções, mas conteúdos inesperados fizeram-se necessário como o estudo de Estatística na utilização de Moda e Médias. Outros apresentaram-se subjetivamente em vários momentos, como a Matemática Financeira, por exemplo nas lineares, quando o lucro estava próximo do custo (A.2) perceberam que o gráfico interceptaria o eixo das ordenadas (eixo y) (A.1). Nas exponenciais e logarítmicas a associação do expoente negativo com a inversão da base. É importante destacar que esta metodologia de ação não compartilhada não conduziu os estudantes a perceberem que existem dois tipos de frações, ou seja, os estudantes exploravam os conteúdos conforme o necessário, sistematização pedagógica não linear (D.2). Apesar de impreciso ou incompleto alguns conceitos construídos e estudados, auxiliou na solução do modelo e no aprofundamento das bases matemáticas presente no ensino fundamental (B.3), mesmo não terem demonstrados para todos os casos ou estudado (C.25).

Com base nestas características citadas, esta atividade de modelagem desenvolveu habilidades e competências não só matemáticas, mas outras áreas do conhecimento (B.2) além de associarem as atividades comerciais. No descarte do R$ 1.40 os estudantes utilizaram além dos padrões matemáticos o Método Científico trabalhado com outros professores, pois perceberam que os dados coletados não estavam em condições normais. Não foi feito um impacto desse descarte no trabalho, porém, mais adiante foi necessário descartar um outro ponto.

Percebe-se notória evolução na resolução de problemas em vários modelos, principalmente no modelo Quadrático que graças a uma observação aguçada na existência de uma sequência ou padrão através de um palpite com médias aritméticas, construiu-se uma hipótese dialética (C.2.3) que culminou na sua resolução algébrica (B.1) comprovado mais tarde computacionalmente (C.2.1). Outra habilidade Matemática que se deve destacar é a abstração, que explicitamente observa-se na construção da hipótese para o problema do segundo grau (Figura 58) e na expressão para descobrir a quantidade (Figura 56).

Portanto, Modelagem Matemática pode ter como finalidade, além de relacionar a Matemática com fenômenos reais do cotidiano do estudante, permitir que ele construa e pratique suas habilidades matemáticas com assuntos de seu domínio e conhecimento, mas essa Matemática não fica restrita a das escolas filosóficas (Logicismo, Intuicionismo, Formalismo), é uma atividade que explora outros meios de fazer matemática, uma vez que permite ao estudante se manifestar, ganhar voz neste mundo abstrato dos números.

A linha de investigação proposta nesse trabalho é promissora como pesquisa em Educação Matemática. Trabalhos futuros poderão analisar o impacto dessas características no ensino e aprendizagem de Matemática no ensino médio, para esclarecer se essas características conduzem a uma aprendizagem efetiva no ensino de Matemática.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes Werle De; SILVA, Karina Pessôa Da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem Matemática na educação básic**a. São Paulo: Contexto, 2016.

ALVES, Rubem. **FILOSOFIA DA CIÊNCIA: Introdução ao jogo e suas regras**. São Paulo: Brasiliense, 1981.

ANDREI, César Cornélio et Al. **Da Química Medicinal à Química Combinatória e Modelagem Molecular**. 2. ed. Barueri: Manole, 2012.

BARBOSA, Ana Cristina Coelho. **A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2ºciclo do ensino básico**. 2009. 461 f. Dissertação (Doutoramento em Estudos da Criança Área de Conhecimento em Matemática Elementar). Universidade do Minho, Doutoramento em Estudos da Criança, Portugal, 2009.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem Matemática: O que é? Por quê? Como? **Revista Veritati**. n. 4, 2004, p. 73-80.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Modelagem Matemática - Um método científico de pesquisa ou uma estratégia de ensino e aprendizagem?** São Paulo: Contexto, 2009.

BENACERRAF, Paul; PUTNAM, Hilary. **Philosophy of mathematics**. New York: Cambridge University Press, 1983.

BIEMBENGUT, Maria Salett**. Modelagem Matemática & Implicações no Ensino-Aprendizagem de Matemática**. Blumenau: FURB, 1999.

BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola Araújo. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora LTDA, 2013.

BUNGE, Mario. **Teoria e realidade**. São Paulo: Perspectiva, 2008.

CAJUEIRO, Marcelo Papini de F. **Contribuição ao estudo histórico e crítico do pensamento matemático**. 491 f. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências). Universidade Federal da Bahia e pela Universidade Estadual de Feira de Santana, 2011.

COSTA, Newton Carneiro Afonso Da. **Ensaio sobre os fundamentos da lógica**. 3. ed. São Paulo: Hucitec, 2008.

D’AMBROSIO, Beatriz S. Como Ensinar Matemática Hoje? Temas e Debates. **SBEM**. Ano II. n.2. p. 15-19. Brasília, 1989. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Beatriz.pdf> Acesso em: 12 de fev.2017.

D’AMBROSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática**. 2. ed. Campinas: Editora da Universidade Federal de Campinas (UNICAMP), 1986.

DANTE, Luiz Roberto. **MATEMÁTICA: Contexto & Aplicação**. 2. ed. V.3, São Paulo: Ática, 2014.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. **A Experiência Matemática**. 2. ed. Rio de Janeiro: Franciso Alves, 1985.

DEVLIN, K. **Matemática – a ciência dos padrões**. Porto: Porto editora, 2002.

ESPINOZA, Miguel. Intuicionismo Y Objetividad. **Thémata, Revista de Filosofía**, n. 30, p. 101–118, jul. 2003. Disponível em: <http://institucional.us.es/revistas/themata/30/07%20espinoza.pdf> Acesso em: 20 de fev.2017.

FREGE, G. Os Fundamentos da Aritmética. **Escritos coligidos, sobre a justificação científica de uma conceitografia, os fundamentos da Aritmética**. São Paulo: Abril Cultural, 1984. p. 198–292.

FREGE, Johann Gottlob. **Lógica e Filosofia da linguagem**. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 2009.

HOUAISS, Antonio; VILLAR, Mauro de Salles; FRANCO, Francisco Manoel de Mello. **Dicionário Houaiss da língua portuguesa.** Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

JUNIOR, Francisco Ramalho; FERRERO, Nicolau Gilberto; SOARES, Paulo Antônio de Toledo. **Os Fundamentos da Física 1**. Belenzinho: Moderna, 2007.

KLINE, Morris. **O Fracasso da Matemática moderna**. São Paulo: IBRASA, 1976.

LOPES, Anemari Roesler Luersen Vieira; BORBA, Marcelo de Carvalho. Tendências em Educação Matemática. **Revista Roteiro**, n. 32, p. 49–61, jul./dez. Chapecó,1994. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/lopes_borba_tendencias_em_94.pdf> Acesso em: 12 fev. 2017.

LOUREIRO, Daniel Zampieri; KLUBER, Tiago Emanuel. As escolas do Formalismo, Logicismo e Intuicionismo: Um olhar para o Ensino de Matemática. CIAEM, 14., 2015. **Anais Eletrônicos**. México: 2015. p. 1–14. Disponível em: < http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/958/396> Acesso em: 02 mar. 2017.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria**. Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas S.A, 2013.

MARQUES, Heitor Romero; MANFROI, José; CASTILHO, Maria Augusta de; NOAL, Mirian Lange. **METODOLOGIA DA PESQUISA E DO TRABALHO CIENTÍFICO**. 4.ed. Campo Grande: UCDB, 2014.

MEYER, João Frederico da Costa A.; CALDEIRA, Ademir Donizeti; MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. **Modelagem em Educação Matemática**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora LTDA, 2013.

MILANI, Raquel; SILVA, Michela Tuchapesk da; SAULLO, Carla Regina Riani Hilsdorf. Educação Matemática Crítica: Possibilidades de Ação em Sala de Aula. **Educação Matemática em Revista**. [S.I.]: n.34, p.5-13, nov. 2011.

MONDINI, Fabiane. O Logicismo, o Formalismo e o Intuicionismo e seus Diferentes Modos de Pensar a Matemática. EBRAPEM ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2008. **Anais Eletrônicos**. Rio Claro: UNESP, 2008. Disponível em: <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/287-1-A-gt2_mondini_ta.pdf> Acesso em 25 jan.2017.

MONDINI, Fabiane; BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. A presença da Álgebra nos cursos de licenciatura em Matemática no Estado do Rio grande do Sul. **Acta Scientiae**, v. 12, n. 2, p. 43–54, 2010. Disponível em: <http://www.mariabicudo.com.br/artigos-em-peri%C3%B3dicos.php> Acesso em 13 mar. 2017.

NETO, Ernesto Rosa. **Didática da Matemática**. São Paulo: Ática S.A, 1987.

PICKARD-CAMBRIDGE, William Adair. **Os Pensadores – ARISTÓTELES I**. Tradução Leonel Vallandro e Gerd Bornheim. São Paulo. Editora Nova Cultural Ltda, 1987.

PIQUEIRA, Jose Roberto Castilho. Biomatemática: Métodos e Limitações. **Trans/Form/Ação**, São Paulo, n. 19, p. 141–149, 1996. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/trans/v19/v19a09.pdf> Acesso em: 20 mar.2017.

SILVA, Jairo José Da. **Filosofias da Matemática**. 2. ed. São Paulo: UNESP, 2007.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação matemática crítica: a questão da democracia**. Campinas: Papirus, 2001.

SNAPPER, Ernst. The Three Crises in Mathematics: Logicism, Intuitionism and Formalism. **Mathematics Magazine**, n. 4, v. 52, p. 2007–2016, set. 1979.

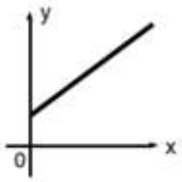
STEWART, Ian. **O fantástico mundo dos números - A matemática do zero ao infinito**. Tradução George Schlesinger. Rio de Janeiro: Zahar, 2016.

ANEXO

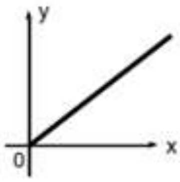
Questionário 1

1) Seja $f(x) = 2x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o gráfico que representa melhor esta função é:

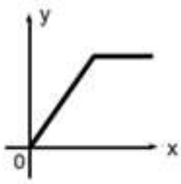
a)



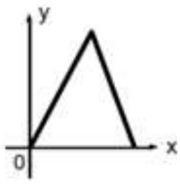
b)



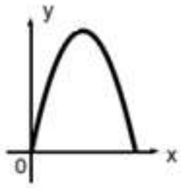
c)



d)



e)



Justifique a sua escolha:

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

1.1) Seria correto afirmar que $f(10) = 20$?

………………………………………………………………………………………………......

………………………………………………………………………………………………......

1.2) Seria correto afirmar que $f(15) = 40$?

………………………………………………………………………………………………......

………………………………………………………………………………………………......

1.3) Funções do tipo $f(x) = ax + b$, neste caso da questão 1 o $b = 0$,poderíamos dizer que representa uma progressão geométrica (PG) ou uma progressão aritmética(PA)?

………………………………………………………………………………………………......

………………………………………………………………………………………………......

………………………………………………………………………………………………......

1.4) Qual é o valor para $f(1)$?

………………………………………………………………………………………………......

………………………………………………………………………………………………......

………………………………………………………………………………………………......

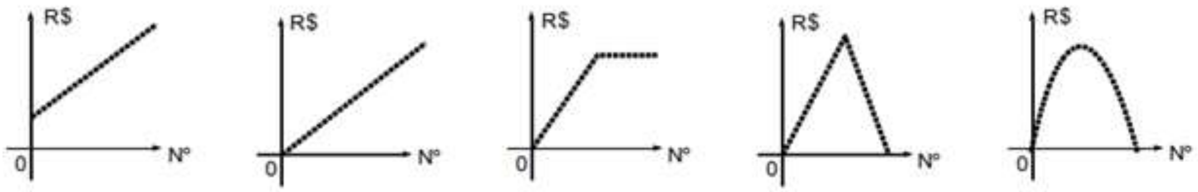
2) Você vende um produto que custa R$ 2,00 e faz apenas algumas anotações na tabela abaixo.

Tabela 1.

Nº Produtos	10	11	12	13	14	15
R$	20	22	24	26	28	30

O esboço que representa o dinheiro (R$) em função do número de produtos vendidos (N), é:

a) b) c) d) e)



Justifique a sua escolha:

…………………………………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………………………………......

2.1) Na questão anterior, quem está em função de quem?

…………………………………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………………………………......

2.2) Em relação a Tabela 1, seria correto afirmar que representa uma proporcionalidade, sim ou não, e justifique sua resposta?

…………………………………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………………………………......

2.3) Ainda em relação a Tabela 1, seria correto afirmar que representa uma progressão aritmética (PA) ou uma progressão geométrica (PG)?

…………………………………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………………………………......

2.4) Você conseguiria dizer quanto seria o valor em R$ recebidos quando o número de produtos vendidos fosse igual a 1?

…………………………………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………………………………......

2.5) Se você tivesse que representar através de uma linguagem matemática os resultados da tabela acima, como você representaria?

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

3) Das funções abaixo, qual é a melhor função que representa proporcionalidade?

a) Afim b) Exponencial c) Quadrática d) Linear e) Logarítmica

4) Por que o exercício 1 o gráfico que representa a função é uma linha contínua e no exercício dois o gráfico está da forma pontilhada?

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

5) Um automóvel gasta 24 litros de gasolina para percorrer 192 km. Para percorrer 120 km, quantos litros de gasolina gastará?

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

5.1) A questão anterior como você representaria graficamente? (Faça na folha quadriculada).

5.2) Na reparação de uma estrada, 24 operários fazem o serviço em 60 dias. Quantos dias gastariam 30 operários para fazerem exatamente o mesmo serviço?

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

5.2) A questão anterior como você representaria graficamente? (Faça na folha quadriculada).

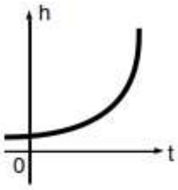
6) Um pesquisador recolheu os seguintes resultados da altura em relação ao tempo Tabela 2.

Tabela 2.

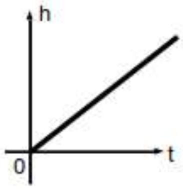
t	2	3	4	5	6
h	6	7,5	8	7,5	6

6.1) O esboço que melhor representa esta função é:

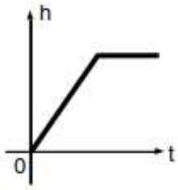
a)



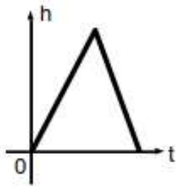
b)



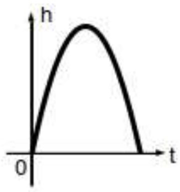
c)



d)



e)



6.2) Qual a regra e a lei que descreveria melhor os resultados da Tabela 2.

a)$f(t) = 2.t$ b)$f(t) = 3.2^t$ c)$f(t) = |4 - t|$ d)$f(t) = \frac{-t^2+8t}{2}$

e)$f(t) = log_2 t$

Justifique sua escolha:

………………………………………………………………………………………………......

………………………………………………………………………………………………......

………………………………………………………………………………………………......

………………………………………………………………………………………………......

………………………………………………………………………………………………......

………………………………………………………………………………………………......

6.3) Qual é a altura quando tempo for igual a 8?

………………………………………………………………………………………………......

………………………………………………………………………………………………......

………………………………………………………………………………………………......

………………………………………………………………………………………………......

………………………………………………………………………………………………......

………………………………………………………………………………………………......

6.4) Em quais instantes a altura é igual a 4?

………………………………………………………………………………………………......

………………………………………………………………………………………………......

………………………………………………………………………………………………......

………………………………………………………………………………………………......

………………………………………………………………………………………………......

7) Um restaurante a quilo vende 100 kg de comida por dia, a 12 reais o quilo. Uma pesquisa de opinião revelou que, por real de aumento no preço, o restaurante perderia 10 clientes, com um consumo médio de 500 g cada. Qual deve ser o valor do quilo de comida para que o restaurante tenha maior receita possível?

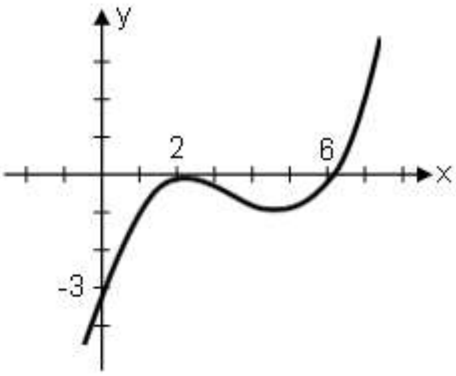
……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......



8) A função cujo gráfico é mostrado ao lado é suave e contínua, apresenta uma mudança de curvatura e se comporta no infinito como uma reta. Portanto, embora apresente apenas duas raízes reais (por quê?), não pode ser do segundo grau. Este gráfico é de um polinômio do terceiro grau tendo uma raiz repetida em x = 1 (por quê?).

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

9) Observações por longo temo mostram que, após períodos de mesma duração, a população da terra fica multiplicada pelo mesmo fator. Sabendo que essa população era de 2,68 bilhões em 1956 e 3,78 bilhões em 1972, pede-se: (a) O tempo necessário para que a população da terra dobre de valor; (b) A população estimada para o ano de 1012; (c) Em que ano a população da terra era de 1 bilhão.

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………………………......

10) Um pesquisador encontrou em suas investigações a seguinte relação entre os valores de x e y:

Tabela 3.

x	1	3	5	7
y	4	8	16	32

Que tipo de função expressa y em função de x? Justifique.

…………………………………………………………………………………………………......
…………………………………………………………………………………………………......
…………………………………………………………………………………………………......
…………………………………………………………………………………………………......
…………………………………………………………………………………………………......
…………………………………………………………………………………………………......

11) Você sabe o que é um determinante de uma matriz quadrada e para que ele serve?

…………………………………………………………………………………………………......
…………………………………………………………………………………………………......
…………………………………………………………………………………………………......
…………………………………………………………………………………………………......
…………………………………………………………………………………………………......
…………………………………………………………………………………………………......

12) Você conseguiria implantar o método de matrizes inversas ou determinantes para resolver o exercício 2.

…………………………………………………………………………………………………......
…………………………………………………………………………………………………......
…………………………………………………………………………………………………......
…………………………………………………………………………………………………......
…………………………………………………………………………………………………......