

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL - PROFMAT

ANTONIO ROBERTO DA SILVA

**Motivações Matemáticas por meio de resolução de problemas de
Probabilidade Geométrica**

NATAL

2017

ANTONIO ROBERTO DA SILVA

**Motivações Matemáticas por meio de resolução de problemas de
Probabilidade Geométrica**

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Jaques Silveira Lopes

NATAL

2017

Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado sob o título *Motivações Matemática por meio de resolução de problemas de Probabilidade Geométrica* apresentado por **Antonio Roberto da Silva** e aceito pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, sendo aprovado por todos os membros da banca examinadora abaixo especificada:

Prof. Dr. Jaques Silveira Lopes

Orientador

UFRN

Prof. Dra. Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes

Membro Interno

UFRN

Prof. Dr. Joaquim Elias de Freitas

Membro Externo

Natal-RN, vinte e nove de novembro de dois mil e dezessete.

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI

Catálogo de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Silva, Antonio Roberto da.

Motivações matemáticas por meio de resolução de problemas de probabilidade geométrica / Antonio Roberto da Silva. - 2017. 62 f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. Natal, RN, 2017.

Orientador: Jaques Silveira Lopes.

1. Probabilidade - Dissertação. 2. Geometria - Dissertação. 3. Resolução de problemas - Dissertação. 4. Aprendizagem - - Dissertação. I. Lopes, Jaques Silveira. II. Título.

RN/UF/CCET

CDU 519.2

Dedico este trabalho aos meus pais (*in memoriam*) Antônio e Ivete, a quem devo tudo. Aos meus irmãos, Tarcísio (*in memoriam*), Zelhinha e Gracinha, que sempre apostaram no meu sucesso. À minha esposa Izôlda, pelo incentivo constante e aos meus filhos Huguinho, Gabi e Felipe pelo tratamento afetuoso a mim dedicado.

AGRADECIMENTOS

A Deus, a minha família e a todos que colaboraram comigo para a realização desse trabalho.

Motivações Matemáticas por meio de resolução de problemas de Probabilidade Geométrica

RESUMO

Alicerçado em uma abordagem diferenciada, expondo cenários históricos, com ênfase nos conceitos essenciais de Probabilidade e de Geometria admissíveis no Ensino Médio, além de esclarecimentos teóricos aprofundados e resoluções de problemas motivadores de probabilidade geométrica, o presente trabalho tem por objetivo fazer uma conexão entre o binômio probabilidade e geometria no sentido de abordar determinados teoremas da geometria euclidiana plana, analítica e espacial, resolvendo problemas – que não são poucos – de probabilidade, utilizando somente a sua definição clássica. A abordagem é uma via de mão dupla, pois possibilita a interação entre os temas supracitados, facilitando e estimulando de modo concreto e prático a compreensão e aprendizagem dos temas estudados. Em função do ensinamento dessa temática, propõe-se potencializar sua aprendizagem com recursos resolutivos realmente funcionais e motivadores, uma vez que, devido a necessidade de possuir amplo conhecimento em vários âmbitos educacionais, o estudo de Probabilidade se torna um tópico imprescindível nas diversas áreas da engenharia, na medicina, administração, e, inclusive, no dia-a-dia.

Palavras-chave: Probabilidade. Geometria. Resolução de Problemas. Aprendizagem.

Motivações Matemáticas por meio de resolução de problemas de Probabilidade Geométrica

ABSTRACT

Grounded on a differentiated approach, exposing historical scenarios, with emphasis on the essential concepts of Probability and Geometry admissible in High School, in addition to in-depth theoretical clarifications and resolutions of geometric probability motivating problems, present work by objective make a connection between the binomial probability and geometry in the sense of addressing certain theorems of flat Euclidean, analytic, and spatial geometry, solving problems – which are not few – of probability, using only their classical definition. The approach is a two-way street, because it allows the interaction between the above mentioned themes, facilitating and stimulating in a concrete and practical way the understanding and learning of the subjects studied. Due to the teaching of this thematic, it is proposed to potentiate its learning with really functional and motivational resolution resources, once, due to the need to have ample knowledge in several educational environments, the Probability study becomes an indispensable topic in the various areas of engineering, medicine, administration, and even day-to-day life.

Keywords: Probability. Geometry. Problem Solving. Learning.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Nikolayevich-Kolmogorov.	14
Figura 2: Segmento l contido no segmento L	24
Figura 3: Região A contida na Região D	25
Figura 4: Pirâmide contida em cilindro.	25
Figura 5: Cubo inscrito em uma esfera.	26
Figura 6: Retas paralelas contidas em um plano α	28
Figura 7: Retas reversas.	28
Figura 8: Prisma reto de base triangular.	29
Figura 9: Semicircunferência AFB e ogiva.	30
Figura 10: Triângulo retângulo.	32
Figura 11: Divisão da circunferência em 6 partes iguais.	33
Figura 12: Triângulo retângulo ABC e suas projeções.	35
Tabela 1: Distribuição das varetas e a formação de triângulos.	36
Figura 13: Quadrado de lado $l = 9$	38
Figura 14: Triângulo equilátero ABC	39
Figura 15: Triângulos e retas paralelas.	40
Figura 16: Triângulos equiláteros ABC, ADE, BDF, DEF, EFC	40
Figura 17: Representação geométrica da Savana.	42
Figura 18: Setor circular BOA	43
Figura 19: Triângulo equilátero e setores circulares de raio unitário.	43
Figura 20: Região delimitada pelo círculo de raio 4 e a função $y = x$	45
Figura 21: Círculos concêntricos.	47
Figura 22: Quadrados sobrepostos.	49
Figura 23: Esquema de horários de Gabi e Izôlda.	50
Figura 24: Representação da região que satisfaz o encontro no horário programado.	50
Figura 25: Quadrado e área sombreada em questão.	51

Figura 26: Triângulo dividido pela sua mediana.	51
Figura 27: Quadrado dividido em 12 triângulos equivalentes.....	52
Figura 28: Quadrado referente ao enunciado da questão 19.	53
Figura 29: Quadrado apoiado nos eixos cartesianos.	53
Figura 30: Quadrado dividido pela diagonal BD e o segmento AM.....	55
Figura 31: Quadrado dividido em 12 triângulos equivalentes.....	55
Figura 32: Quadrado inscrito em uma circunferência.	56
Figura 33: Arco capaz de BC, segundo α	57
Figura 34: Quadrante e círculo.	58
Figura 35: Quadrante e círculo.	58

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO: MOTIVAÇÕES E PROPÓSITOS.....	9
2. UM POUCO DE PROBABILIDADE.....	12
2.1 CONTANDO PARTE DA HISTÓRIA.....	12
2.2 TRÊS DEFINIÇÕES DE PROBABILIDADE	15
2.2.1 Definição clássica.....	15
2.2.2 Definição frequentista de Probabilidade.....	17
2.2.3 Definição axiomática de Probabilidade (Kolmogorov, 1933).....	19
3. PROBABILIDADE GEOMÉTRICA	22
3.1 USANDO GEOMETRIA NO ENSINO DE PROBABILIDADE E VICE-VERSA.....	24
3.2 PROBLEMAS DE PROBABILIDADE GEOMÉTRICA E SUGESTÕES DE RESOLUÇÕES	26
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	60
REFERÊNCIAS	61

1. INTRODUÇÃO: MOTIVAÇÕES E PROPÓSITOS

Durante a nossa prática docente, constatamos que existe, nos alunos, uma complexidade bem acentuada na aprendizagem dos assuntos Probabilidade e Geometria. Nas séries iniciais, os alunos encontram sérias dificuldades em aprender as quatro operações, e isso, sobremaneira, traz consequências preocupantes ao aprendizado do aluno no cálculo probabilístico. Um hábito arraigado nos textos tradicionais do ensino médio, fortemente empregado na mente dos professores, e, como resultado, também nos alunos, é o mito das fórmulas e regras, uma vez que não se aprende Matemática através de receitas, decorando regras.

Por outro lado, o excesso de formalismo nos conceitos e definições na Geometria Plana Euclidiana, bem como na Geometria Espacial Euclidiana e na Geometria Analítica Plana, contribui, de forma significativa, para um baixo nível de aprendizagem por torná-las enfadonhas.

Assim sendo, esses entraves afastam os alunos das recomendações encontradas nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, PCNEM (BRASIL, 2000). O ensino deve favorecer ao aluno a possibilidade de analisar dados e tomar decisões corretas, a fim de prepará-lo para o pleno exercício da cidadania.

Para melhor discernir o método de como trabalhar esses conceitos de forma associativa, procuramos nos ancorar no pensamento de George Polya, conforme seu desenvolvimento de Heurística, nos proporcionando um caminho de construção do raciocínio lógico-dedutivo, que aparenta ser bastante útil na formação dos mais diversos conceitos.

A Heurística de resolução de um problema, segundo Polya (1978), apresenta quatro etapas:

- O primeiro passo é entender o problema.

É importante formular perguntas. Você tem que identificar a incógnita. Quais são os dados? Como posso atingir meus objetivos utilizando esses dados? Existem condições redundantes ou contraditórias?

- O segundo passo é construir uma estratégia de resolução.

Encontrar vínculo entre os dados e a incógnita. É sempre importante fazer perguntas. Você já encontrou esse problema ou um parecido? Você conhece fatos que podem ajudá-lo a resolver o problema?

- O terceiro passo é executar a estratégia.

Na maioria das vezes, esta é a etapa mais fácil do processo de resolução de um problema. Se as estratégias foram bem elaboradas e estruturadas adequadamente, fica mais fácil de executá-la. Ao realizar a estratégia, deve-se verificar minuciosamente cada passo.

- O quarto passo é revisar a solução.

Você deve examinar se seus objetivos foram inteiramente alcançados. Consoante Polya (1978), “Resolver problemas é uma habilidade prática, como nadar, esquiar ou tocar piano: você pode aprendê-la por meio de imitação e prática”. Em suma, considerando a vontade de nadar, deve-se ir à água. Dessa forma, tem-se que, uma vez querendo se tornar bom ao resolver problemas, é necessária a prática de resolver problemas.

Segundo Pozo (1998), os diversos tipos de problemas escolares relativos às Ciências da Natureza exigem dos alunos conhecimentos e habilidades diversas, cuja aquisição apresenta, em muitos casos, dificuldades de aprendizagem. O planejamento e a utilização da didática dos problemas na aula de ciências é o lugar intermediário que esses problemas precisam ocupar entre o conhecimento cotidiano e o conhecimento científico.

É necessário gerar nos alunos hábitos e estratégias mais próximas da maneira científica de resolver problemas, mas, para isso, deve-se partir da bagagem conceitual e metodológica que eles habitualmente usam.

A partir dos esquemas gerais sobre as fases envolvidas na solução de um problema, podemos identificar três aspectos ou processos fundamentais na solução de um problema científico: definição do problema e formulação de hipóteses; pesquisa e comprovação das hipóteses; reflexão dos resultados e tomadas de decisões. No entanto, na atividade escolar essas fases ocorrem sistematicamente, existe sempre uma reformulação contínua a partir de cada uma delas.

Também é importante perceber que dependendo da situação-problema a abordagem depende dos fatores, dos elementos que lhe são oferecidos, e conseqüentemente a forma de resolvê-los.

Para evidenciar, apresentamos três tipos de problemas:

- Problema fechado:

Levando em consideração que a velocidade do som no ar é 340m/s e que entre o raio e o trovão transcorre 3 segundos, calcular a distância em que se encontra a Tormenta.

- Problema aberto:

Por ocasião de uma Tormenta, você deve ter observado que costuma transcorrer um pequeno intervalo de tempo entre o raio e o trovão. A que se deveria isso? Você acha que esse intervalo pode variar ou é sempre o mesmo? Por que você acredita nisso?

- Problema semiaberto:

Pense de que maneira poderíamos medir a distância que nos separa da Tormenta, levando em consideração a velocidade do som no ar.

Complementando essa ideia, segundo Schoenfeld (1985), algumas técnicas podem ajudar os alunos a compreender e traduzir melhor uma situação-problema.

- Expressar o problema em outras palavras;
- Explicar aos colegas em que consiste o problema;
- Representar o problema com outro formato (gráficos, diagramas, desenhos, objetos, etc);
- Indicar qual é a meta do problema;
- Apontar onde reside a dificuldade do objetivo;
- Separar dados relevantes dos não relevantes;
- Indicar os dados com os quais contamos para resolver a tarefa;
- Procurar um problema semelhante que já tenhamos resolvido;
- Analisar inicialmente alguns exemplos concretos nas quais esse problema possa ter lugar.

2. UM POUCO DE PROBABILIDADE

2.1 CONTANDO PARTE DA HISTÓRIA

O interesse do homem em estudar os fenômenos que envolviam determinadas possibilidades fez surgir a probabilidade, que, por sua vez, fez surgir problemas envolvendo probabilidade geométrica, estudados inicialmente no século XVIII, sendo a resolução do problema da Agulha de Buffon, em 1777, considerada o marco inicial dessa vertente das probabilidades.

Entretanto, o surgimento da teoria das probabilidades teve início com os jogos de azar amplamente propagados na Idade Média. Esse tipo de jogo é comumente praticado através de apostas. Naquela época, também eram utilizados com o intuito de prever o futuro.

O desenvolvimento da teoria das probabilidades e os avanços dos cálculos probabilísticos devem ser atribuídos a vários matemáticos. Atribuem-se aos algebristas italianos Luca Pacioli (1445 – 1517), Girolamo Cardano (1501 – 1576) e Niccolò Tartaglia (1499 – 1557), no século XVI, as primeiras considerações acerca dos jogos de azar e das apostas, como o “O livro dos Jogos de Azar”, escrito por Girolamo Cardano, sendo o primeiro livro da história a tratar da teoria da aleatoriedade. O discernimento de Cardano sobre o funcionamento do acaso incorporava um princípio que chamaremos de lei do espaço amostral. Essa lei representava uma nova ideia e uma nova metodologia, formando a base da descrição matemática da incerteza pelos séculos que se seguiram. Na linguagem moderna, a regra de Cardano é expressa da seguinte maneira: suponha que um processo aleatório tenha muitos resultados igualmente prováveis, alguns favoráveis, ou seja, ganhar, e outros desfavoráveis, isto é, perder. A probabilidade de obtermos um resultado favorável é igual à proporção entre os resultados favoráveis e o total de casos. O conjunto de todos os resultados possíveis é chamado de espaço amostral. Uma das maiores deficiências do trabalho de Cardano foi o fato de não ter feito uma análise sistemática dos diferentes desenlaces possíveis de uma série de eventos, como o lançamento de moedas.

Através de estudos aprofundados, outros matemáticos contribuíram para a sintetização de uma ferramenta muito utilizada cotidianamente. Dentre eles, destacam-se os principais expoentes, de acordo com Sooyoung (2010):

- Blaise Pascal (1623 – 1662) contribuiu de maneira decisiva para a Geometria Projetiva, mas seu maior legado foi no ramo da probabilidade, desenvolvendo a Teoria das probabilidades, muito utilizada na economia, a fim de analisar tomada de decisões e a influência de indivíduos em eventos;

- Pierre de Fermat (1607 – 1665) também se destaca por sua contribuição na Teoria das probabilidades. Por volta de 1654, com troca de informações com Pascal, seus avanços foram ainda mais consolidados, quando passou a almejar as regras matemáticas que descrevessem as leis do acaso;
- Jacob Bernoulli (1654 – 1705), considerado o pai do cálculo exponencial, contribuiu de forma significativa para a Teoria das probabilidades e para o cálculo probabilístico, com a resolução do problema de isoperímetros;
- Pierre Simon Laplace (1749 – 1827) deu amplo suporte a Teoria das probabilidades, fomentando seu sistema matemático de raciocínio indutivo baseado em probabilidades;
- Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), muito bem reconhecido na área da física, astronomia e na matemática, sua contribuição foi tão relevante no âmbito das probabilidades, que uma lei, definida graficamente, é chamada de curva de Gauss. Além disso, em 1812, publicou o algoritmo dos mínimos quadrados, para a resolução das distribuições de probabilidade na mecânica, estatística e economia;
- Siméon Denis Poisson (1781 – 1840), engenheiro e matemático francês, descobriu a forma limitada da distribuição binomial – uma das mais importantes distribuições da probabilidade.

Os alicerces da teoria do cálculo das Probabilidades e da Análise Combinatória foram estabelecidos por Pascal e Fermat; as situações relacionando apostas nos jogos de dados levantaram diversas hipóteses envolvendo possíveis resultados, marcando o início da teoria das probabilidades como ciências. Mais precisamente, esse estudo sistemático de probabilidade começou em 1654, quando Antoine Gombaud (1607 – 1684), também conhecido como Chevalier de Méré, um jogador francês, escreveu ao matemático Blaise Pascal fazendo várias perguntas sobre as probabilidades de se ganhar no jogo de dados e outros jogos de azar. Perguntas do tipo: *O que é mais provável, rolar um “seis” em quatro jogadas de um dado ou rolar um “duplo seis” em 24 jogadas com dois dados?* (CRILLY, 2017). Pascal então escreveu a outro matemático francês, Pierre de Fermat, expondo as perguntas feitas por Chevalier de Méré.

Conhecido como pai da Teoria dos Números moderna, o francês Pierre de Fermat (1607 – 1665) escolheu o direito como profissão e perseguiu a Matemática apenas como um amador. Desenvolveu a análise algébrica, com base nas obras de Viète e desenvolveu importantes trabalhos na geometria analítica e óptica. É considerado fundador da teoria dos números moderna seguindo a tradição diofantina. (LOPES, 2017). Pág. 100.

As contribuições de Bernoulli enfatizaram os grandes números, abordando as combinações, permutações e a classificação binominal. Laplace formulou a regra de sucessão e Gauss estabeleceu o método dos mínimos quadrados e a lei de distribuição de probabilidade.

Segue, abaixo, dois problemas famosos:

- O problema da Agulha de Buffon surgiu do interesse de Georges Louis Leclerc (1707 – 1788), mais conhecido como Conde de Buffon, por volta do século XVIII, em determinar a chance de uma agulha largada aleatoriamente em um chão marcado com linhas retas paralelas igualmente espaçadas cruzar com uma das retas;
- Apresentado por Joseph Louis Bertrand (1822 – 1900), nascido em Paris, o Paradoxo de Bertrand questiona: Qual é o comprimento médio de uma corda aleatória de um círculo unitário?

Já no século XX, Andrei Nikolayevich Kolmogorov (1903–1987), um dos mais influentes matemáticos russos do século passado, desenvolveu, a partir da teoria dos conjuntos, a moderna teoria matemática da probabilidade, dando-lhe um tratamento axiomático, pilares da formalização dos teoremas que sustentam o corpo teórico da probabilidade moderna. Os estudos teóricos do cálculo de probabilidades renderam sua primeira publicação em 1929: *General Theory of Measure and Probability Theory*. Esse livro, muito importante ao Cálculo das Probabilidades, expõe a formulação de um conjunto de princípios conhecidos como a axiomática de Kolmogorov (1933).

Figura 1: Nikolayevich-Kolmogorov.



Fonte: <https://www.britannica.com/biography/Andrey-Nikolayevich-Kolmogorov>

2.2 TRÊS DEFINIÇÕES DE PROBABILIDADE

As definições e resultados que seguirão, a partir daqui, são relacionadas àquelas situações baseadas em experimentos aleatórios, que, de acordo com James (2015), são aqueles que, quando repetidos inúmeras vezes em processos semelhantes (dentro de uma situação de regularidade), possuem resultados imprevisíveis (mas que conheçamos o conjunto formado por todos os possíveis resultados). Como exemplos clássicos, temos o lançamento de um dado e a observação da face voltada para cima e o lançamento de uma moeda e a observação da face voltada para cima, sendo que no primeiro exemplo podemos ter seis resultados diferentes $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e no segundo, apenas dois resultados $\{\text{cara, coroa}\}$. Contrapondo à noção de experimento determinístico, que é aquele que, de antemão, sabemos o resultado mesmo antes da realização do experimento, como, por exemplo, a observação da temperatura de ebulição da água (dentro de condições normais de temperatura e pressão), que é sempre de 100 °C. Os experimentos aleatórios, ou estocásticos, estão presentes em várias situações cotidianas, como por exemplo, nunca sabemos quando uma lâmpada de nossa casa queimará (deixando de funcionar), ou quando irá chover. Ou quem ganhará uma simples aposta, ou, ainda, se um voo específico terá o chamado *Overbooking* (uma expressão em inglês que significa excesso de reservas, que acontece quando a venda ou reserva de bilhetes ou passagens fica acima do número de lugares realmente disponíveis no veículo ou lugar). Nem sabemos quando morreremos. E é nisso que entra a probabilidade, juntamente com a estatística, mesmo não sabendo os resultados de experimentos em tempo real, podemos olhar para traz e enxergar padrões e estabelecermos modelos que nos ajudem a fazer inferências e previsões, ainda que submetidos a certas margens de erros, que podemos controlar e ajustar.

Os experimentos aleatórios produzem possíveis resultados, e esses possíveis resultados são coletados ou agrupados em conjuntos que são denominados espaços amostrais. O espaço amostral possui subconjuntos, que submetidos a uma modelagem matemática, são denominados eventos.

2.2.1 Definição clássica.

A probabilidade de um acontecimento (evento) A , que é um subconjunto de um espaço amostral S finito, de resultados igualmente prováveis é:

$$P(E) = \frac{N(A)}{N(S)}$$

Sendo $N(A)$ e $N(S)$ as quantidades de elementos de A e de S , respectivamente.

Cada elemento de um espaço amostral finito forma um conjunto unitário, que chamamos de Evento Elementar. A cada elemento a_i do espaço amostral, associamos um número P_i que é a sua probabilidade, com a condição de que:

- i. $P_1, P_2, \dots, P_n \geq 0$
- ii. $P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$

Considerando que esse espaço amostral S é equiprovável, temos que $P_i = \frac{1}{n}$ e, daí, $P(A) = \frac{N(A)}{n}$, onde $N(A)$ é o número de elementos de A e $n = N(S)$ é o número de elementos de S .

A grande arte de estudar probabilidade é criar modelos probabilísticos que sejam equiprováveis. O que equivale a dizer que os espaços amostrais são adequados quando os modelos probabilísticos são equiprováveis.

Vejamos alguns exemplos:

- 1) Um dado é lançado 2 vezes. Qual a probabilidade de a soma dos pontos obtidos ser igual a 7?

Um espaço amostral associado a esse experimento aleatório seria:

$$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}, \text{ dessa forma, concluir-se-ia que } P(\text{Soma } 7) = \frac{1}{11}.$$

O problema não estaria errado. No entanto, o espaço amostral não é o mais adequado, pois os pontos amostrais não têm a mesma probabilidade de ocorrer. Por exemplo, é mais provável sair o 7 do que o 2.

Para esse problema, o espaço amostral S adequado seria:

$S = \{(1, 1); (1, 2); \dots; (6, 5); (6, 6)\}$. Assim, ao utilizar o princípio multiplicativo da análise combinatória, concluiríamos que $n(S) = 6 \cdot 6 = 36$.

Construindo o evento A : $A = \{(1, 6); (6, 1); (2, 5); (5, 2); (4, 3); (3, 4)\}$. E, dessa forma, $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

- 2) Uma urna contém 3 bolas brancas e 5 bolas pretas. Retiram-se duas bolas dessa urna, uma de cada vez e sem reposição. Qual é a probabilidade das duas primeiras bolas serem brancas? Poderíamos construir o seguinte espaço amostral S .

$S = \{bb, bp, pb, pp\}$, em que b é a bola branca e p é a bola preta. Mas esse espaço amostral não é o mais conveniente, pois S não é equiprovável: tem mais bolas pretas do que brancas e, portanto, é mais provável sair “bola preta” do que “bola branca”. O espaço amostral mais adequado seria: $S = \{(B_1, B_2)/B_1 \neq B_2\}$. Em que B_1 é a primeira bola retirada

e B_2 é a segunda bola retirada, sendo $B_1 \neq B_2$, uma vez que as bolas são retiradas da urna sem reposição. Mais uma vez, aplicando o princípio fundamental da contagem, teremos:

$$n(S) = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

$$n(A) = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{28}$$

- 3) Considere o experimento aleatório: Lançamento de duas moedas “Honestas” (entenda por moeda “Honesta” aquela perfeitamente simétrica, para garantir o modelo equiprovável). Associado a esse experimento, tome o evento $A = \{\text{sair exatamente duas caras}\}$. A pergunta é: Qual a probabilidade de ocorrer o evento A ?

No século XVIII, esse problema foi proposto ao famoso matemático francês Jean le Rond D’Alembert (1717 – 1783), autor de vários trabalhos sobre probabilidades, e ele resolveu o problema da moeda da seguinte forma: “O número de caras obtido em dois lançamentos pode ser 0, 1 ou 2. Como existem três resultados, raciocinou d’Alembert, a chance de cada um deve ser de $1/3$. Mas d’Alembert se enganou. E onde está o erro? O erro está em admitir que automaticamente 0, 1 e 2 têm a mesma chance de ocorrer – o que não é verdade. O fundamental, no problema, é perceber que os possíveis resultados do lançamento de duas moedas são os dados que descrevem como podem cair as duas moedas, e não o número total de caras calculado a partir desses dados, como analisou D’Alembert. Em outras palavras, deve-se considerar as sequências (cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara) e (coroa, coroa). Esses são os elementos do meu espaço amostral. Observe que cada sequência acima tem mesma probabilidade de ocorrer: se desejarmos duas caras, a probabilidade é $\frac{1}{4}$; se desejarmos duas coroas, a probabilidade também é de $\frac{1}{4}$; e se desejarmos uma cara, a probabilidade é de 50%.

2.2.2 Definição frequentista de Probabilidade.

- i. Frequência relativa de um evento.

Seja E um experimento aleatório e A um evento de um espaço amostral associado ao experimento E . Supõe-se que E seja repetido N vezes e seja M o número de vezes que A

ocorre nas N repetições de E . Então, a frequência relativa do evento A , representada por f_{R_A} , é o quociente:

$$f_{R_A} = \frac{M}{N} = \frac{\text{Número de vezes que } A \text{ ocorre}}{\text{Número de vezes que } E \text{ é repetido}}.$$

ii. Propriedades da frequência relativa.

Seja E um experimento aleatório e A e B dois eventos contidos em um espaço amostral associado S . Sejam f_{R_A} e f_{R_B} as frequências relativas dos eventos A e B respectivamente. Então:

- 1) $0 \leq f_{R_A} \leq 1$;
- 2) $f_{R_A} = 1$, se e somente se, A ocorre em todas as N repetições de E ;
- 3) $f_{R_A} = 0$, se e somente se, A nunca ocorre nas N repetições de E ;
- 4) $f_{R_{A \cup B}} = f_{R_A} + f_{R_B}$ se A e B forem mutuamente excludentes.

iii. Definição de probabilidade como frequência.

Seja E um experimento aleatório e A um evento de um espaço amostral associado S . Suponhamos que E é repetido N vezes e seja f_{R_A} a frequência relativa do evento. A probabilidade de A é definida como sendo o limite de f_{R_A} quando N tende ao infinito, ou seja:

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_{R_A}.$$

Deve-se notar que a frequência relativa do evento A é uma aproximação da probabilidade de A . As duas se confundem quando se utiliza o limite. Em geral, para um valor de N , razoavelmente grande a f_{R_A} é uma boa aproximação de $P(A)$. É o que chamamos de “Lei dos Grandes Números”.

Conforme cita Bellos (2011), “a Lei dos Grandes Números” diz que se uma moeda for jogada 3 vezes, pode ser que não dê cara uma única vez, mas se for jogada 2 bilhões de vezes, pode-se ter certeza de que dará cara em quase 50% das tentativas”.

Ele relata que, durante a segunda guerra mundial, o matemático John Kerrich, após ser preso pelos alemães na Dinamarca, resolveu experimentar a lei dos grandes números durante sua reclusão. Ele lançou uma moeda 10 mil vezes, conforme esperado, obteve cara em 5.067 lançamentos, ou seja 50,67% do total.

2.2.3 Definição axiomática de Probabilidade (Kolmogorov, 1933).

Seja E um experimento aleatório com um espaço amostral associado S . A cada evento $A \subset S$ associa-se um número real, representado por $P(A)$ e denominado de probabilidade de A que satisfaz as seguintes propriedades (axiomas):

- a) $0 \leq P(A) \leq 1$;
- b) $P(S) = 1$;
- c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se A e B forem mutuamente excludentes.

Uma definição mais formal, baseada nos axiomas de Kolmogorov, pode ser encontrada em James (2015) e que sintetizamos aqui. Note que, abaixo, fica claro que a probabilidade é uma função conjunto, que a cada evento associa um número, entre 0 e 1, que quantifica (mede) o quão provável é a ocorrência de um determinado evento.

Dados:

E : experimento aleatório.

S : espaço amostral associado a E (Conj. de todos os possíveis resultados de E).

\mathfrak{F} : σ -álgebra de eventos de S , ou seja,

Coleção de subconjuntos de S tal que

$$(i) \mathfrak{F} \neq \emptyset \quad (S \in \mathfrak{F});$$

$$(ii) A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{F};$$

$$(iii) A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{F} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{F}.$$

P : medida de probabilidade sobre (Ω, \mathfrak{F}) , ou seja,

$P : \mathfrak{F} \rightarrow [0,1]$ é uma função conjunto tal que

$$(i) \forall A \in \mathfrak{F}, P(A) \geq 0;$$

$$(ii) P(S) = 1;$$

$$A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{S}, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$$

$$(iii) \Rightarrow P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j).$$

Apresentamos, agora, uma sequência de resultados clássicos, que são sempre muito úteis quando vamos resolver problemas que envolvam o cálculo de probabilidade. As demonstrações seguem da definição axiomática de probabilidade.

Sejam S um espaço amostral associado a um experimento aleatório. A , B e C são eventos de S . \bar{A} é o evento complementar de A . Valem as seguintes proposições:

Proposição 1: $P(\emptyset) = 0$;

Prova:

$$1 = P(S) = P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset).$$

$$P(S) + P(\emptyset) = P(S) \Rightarrow P(\emptyset) = 0.$$

□

Proposição 2: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;

Sendo \bar{A} o evento complementar de A .

Prova:

$$1 = P(S) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}).$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

□

Proposição 3: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

Sendo A e B dois eventos quaisquer.

Prova:

$$A = (A - B) \cup (A \cap B) \Rightarrow P(A) = P[(A - B) \cup (A \cap B)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

□

Proposição 4: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Sendo A e B eventos quaisquer.

Prova:

$$A \cup B = (A - B) \cup B \Rightarrow P(A \cup B) = P[(A - B) \cup B] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A - B) + P(B) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

□

Proposição 5: Se A , B e C forem três eventos quaisquer, então:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Prova: A demonstração consiste em escrever $A \cup B \cup C$ na forma $(A \cup B) \cup C$ e aplicar o resultado do teorema anterior. Vejamos:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P[(A \cup B) \cup C] = P(A \cup B) + P(C) - P[(A \cup B) \cap C] = \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - [P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)] \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

□

Proposição 6: Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

Prova: Podemos decompor B em dois eventos mutuamente excludentes, na seguinte forma: $B = A \cup (B \cap \bar{A})$. Consequentemente, $P(B) = P[A \cup (B \cap \bar{A})]$.

Daí, $P(B) = P(A) + P(B \cap \bar{A}) \geq P(A)$, porque $P(B \cap \bar{A}) \geq 0$, pelo axioma I.

□

Observação: Teoremas não são, em geral, fatos óbvios; são proposições que, para serem aceitas, têm de ser demonstradas. O teorema anterior, por exemplo, é bastante intuitivo, pois ele afirma que se B deve ocorrer sempre que A ocorra, consequentemente, B é mais provável do que A . Poderíamos ter tomado o teorema anterior como um Postulado.

□

3. PROBABILIDADE GEOMÉTRICA

Estudar matemática é, em parte, resolver problemas. Assim, para iniciar todo o processo, é preciso formular os problemas de forma adequada, com criatividade, objetivando estimular o aluno a vontade de resolvê-los. É imprescindível que o aluno entenda e retenha o conceito envolvido na solução do problema. Aqui, nossos problemas serão abundantes no que se refere à geometria contida no ensino básico.

O estudo de geometria no ensino médio está relacionado ao tratamento das propriedades relacionadas às formas geométricas e as medidas que podemos obter dessas formas, mais precisamente: comprimentos, áreas e volumes. Segundo Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008) é possível compreendermos o ensino de geometria para o desenvolvimento do chamado *raciocínio espacial*, sendo que para elas esse dueto é harmonioso, ou seja, geometria e o raciocínio espacial estão intimamente interligados. Com isso, o aluno pode ganhar muito na construção das representações mentais das figuras geométricas e das propriedades concernentes. As mesmas autoras ainda ressaltam a importância do desenvolvimento do pensamento geométrico, e destacam que “[...] *esse desenvolvimento não ocorre de forma rápida, e nem somente ao longo do ensino fundamental, cabendo ao ensino médio uma parte considerável dessa tarefa*”. Neste nosso trabalho de dissertação, a probabilidade funciona como um caminho condutor para o desenvolvimento desse pensamento geométrico, com a aquisição de diversas habilidades, além, é claro, do amadurecimento dos mecanismos envolvidos nos processos de modelagem dos espaços de probabilidade.

As figuras geométricas utilizadas em nossa coletânea de problemas serão segmentos de reta, retas, triângulos, quadriláteros e círculos. Iremos trabalhar com áreas de figuras, com comprimentos e a desigualdade triangular. E o que vai definir e quantificar um espaço amostral são problemas elementares de contagem, áreas de figuras planas elementares, volumes de sólidos, etc.

Embora as definições de probabilidade geométrica não sejam totalmente discutidas no Ensino Médio, desde o corpo docente aos livros didáticos, sua necessidade é de extrema importância relativamente a resoluções de problemas que envolvem seu conceito. Wagner (1997), ao admitir que, no Ensino Médio, a abordagem de probabilidade se restringe aos casos finitos e problemas, na maioria das vezes, de contagem de casos possíveis e favoráveis, corrobora uma grande problemática: no Ensino Médio, conteúdos essenciais para formação acadêmica são insuficientemente ministrados.

Em função dessa lacuna no sistema educacional, o estudo particular da probabilidade, junto à geometria, torna-se indispensável, e, para isso, melhores mecanismos didáticos devem ser propostos e estudados, a fim de aumentar o interesse de pesquisa nesse campo específico e profícuo da matemática. Professores de Matemática do Ensino Médio devem apresentar com certa frequência problemas de probabilidade, pois assim o aluno terá potencializado seu raciocínio e consolidado sua maturidade para resolver problemas que envolvam essa modelagem estocástica (aquela associada aos experimentos aleatórios, em que os resultados não podem ser determinados de antemão). Nesse sentido:

O curso de geometria seria adequado para isso, por várias razões: 1. É fácil formular problemas de geometria envolvendo probabilidade; 2. Os problemas de geometria que incluem probabilidade são, com frequência, intrinsecamente interessantes e podem servir de motivação; 3. Os alunos terão oportunidade de aplicar, de modo diferente e surpreendente, conceitos de geometria já aprendidos; 4. O mais importante é que os alunos terão uma compreensão melhor da probabilidade ao verem conceitos importantes aplicados no contexto da geometria. (WOODWARD, E.; HOEHN, 1994)

Entretanto, algumas questões ficam em aberto: como e quando seria feita essa introdução dos problemas envolvendo probabilidade e geometria? Os próprios Woodward e Hoehn (1994) dão algumas sugestões, às quais são bem adequadas e viáveis à nossa realidade e nosso ensino médio.

“Um dos caminhos possíveis seria a introdução de um capítulo à parte sobre probabilidade no curso atual. Uma alternativa melhor, no entanto, talvez fosse a introdução oportuna de problemas bem escolhidos de probabilidade em geometria na sequência de tópicos já existentes. Esse procedimento possibilita uma transição fácil para a probabilidade, sem o rompimento da estrutura do curso atual.” (WOODWARD, E.; HOEHN, 1994).

Seguindo essa vertente, tem-se em mente utilizar tais concepções e alternativas metodológicas para minimizar o lapso de ensino presente no sistema educacional, haja vista a didática predominantemente empregada visar mais a automatização de resolução direta de problemas, ao invés da compreensão dinâmica favorável a fortificação do raciocínio lógico e criatividade de solucionar problemas de maneiras não habituais.

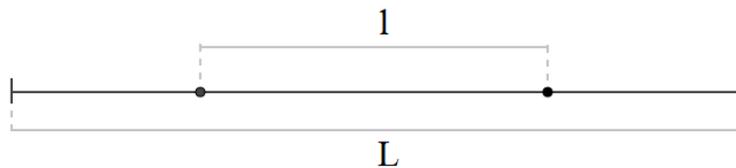
3.1 USANDO GEOMETRIA NO ENSINO DE PROBABILIDADE E VICE-VERSA

Nesta seção apresentamos uma série de problemas neste intersepto entre geometria e probabilidade, para tal apresentamos, primeiramente, alguns resultados importantes, os quais encontramos em Tunala (1992):

Resultado a) Suponhamos que um segmento l esteja contido em outro segmento de comprimento L . É bastante razoável admitir que a probabilidade de este ponto pertencer a l é diretamente proporcional ao comprimento de l e não depende do lugar que l ocupa em L . Assim, selecionando um ponto de L , a probabilidade de que este ponto pertença a l é:

$$P(l) = \frac{\text{Comprimento de } l}{\text{Comprimento de } L}$$

Figura 2: Segmento l contido no segmento L .



Fonte: Acervo pessoal.

Consideremos $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Definimos:

- i) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$
- ii) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$
- iii) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$
- iv) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$

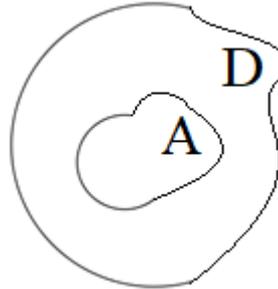
Dizemos que a e b são as extremidades e que $b - a$ é o comprimento de cada um dos intervalos supracitados. Tomando l como sendo $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) , temos que:

$$l = \text{Comp}([a, b]) = \text{Comp}([a, b)) = \text{Comp}((a, b]) = \text{Comp}((a, b)) = b - a$$

Resultado b) Quando selecionamos um ponto ao acaso em uma parte limitada do plano é, também, bastante razoável supor que a probabilidade do ponto selecionado pertencer a uma certa região seja proporcional à área dessa região. Assim,

$$P(A) = \frac{\text{Área da Região } A}{\text{Área da Região } D}$$

Figura 3: Região A contida na Região D .

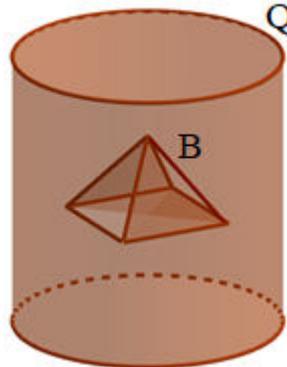


Fonte: Acervo pessoal.

Resultado c) De modo semelhante, determina-se a probabilidade de que um ponto dado em um sólido Q pertença a uma parte B deste sólido:

$$P(B) = \frac{\text{Volume de } B}{\text{Volume de } Q}$$

Figura 4: Pirâmide contida em cilindro.



Fonte: Acervo pessoal.

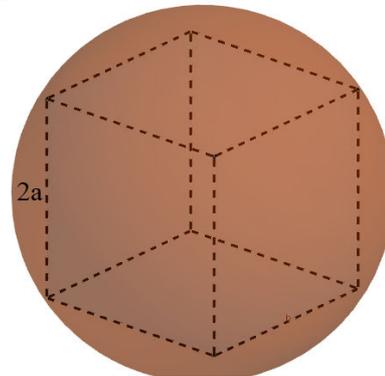
É importante ressaltar que para desenvolvermos os fundamentos probabilísticos correspondentes ao nosso trabalho, precisamos, tal somente, de noções básicas de análise combinatória: utilizaremos fortemente o Princípio Aditivo e o Princípio Multiplicativo.

3.2 PROBLEMAS DE PROBABILIDADE GEOMÉTRICA E SUGESTÕES DE RESOLUÇÕES

A partir daqui segue uma lista de vinte e três problemas com sugestão de resolução, com comentários, que pode utilizada em sala de aula pelos professores do ensino médio, como ferramenta para o ensino de geometria e de noções de probabilidade.

Problema 1: Um cubo de lado $2a$ possui uma esfera circunscrita nele. Qual é a probabilidade de, ao ser sorteado um ponto interno da esfera, esse ponto ser interno ao cubo?

Figura 5: Cubo inscrito em uma esfera.



Fonte: Acervo pessoal.

Fatos que ajudam:

- Diagonal de um Poliedro: é um segmento que parte de um vértice e vai a outro que não pertence a mesma face;
- a = Aresta do Cubo;
 D = Diagonal do Cubo;
 d = Diagonal de uma face;
 $d = a\sqrt{2}$, $D = a\sqrt{3}$;
- R = Raio da esfera.
- Volume de um Cubo: $V = a^3$;
- Volume de uma Esfera: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$;
- Cubo inscrito em uma Esfera: a diagonal do Cubo é igual ao diâmetro da Esfera.

Sugestão de Resolução:

$$Diagonal_{Cubo} = Diâmetro_{Esfera} \Rightarrow 2a \cdot \sqrt{3} = 2R \Rightarrow R = a\sqrt{3}$$

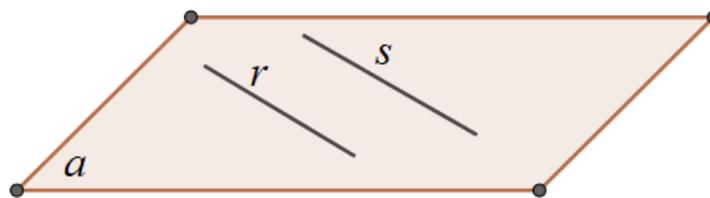
$$Probabilidade = \frac{V_{Cubo}}{V_{Esfera}} = \frac{(2a)^3}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (a\sqrt{3})^3} = \frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$$

Problema 2: Se forem tomadas ao acaso duas arestas de um prisma reto de bases triangulares, qual a probabilidade de que elas estejam em retas suporte reversas?

Fatos que ajudam:

- Retas Paralelas: Duas retas são paralelas se ambas estão contidas em um mesmo plano e não têm ponto em comum. Em outras palavras, para que duas retas r e s sejam paralelas, deve existir um plano α tal que $r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$ e, além disso, deve-se ter $r \cap s = \emptyset$. Indicamos $r \parallel s$.

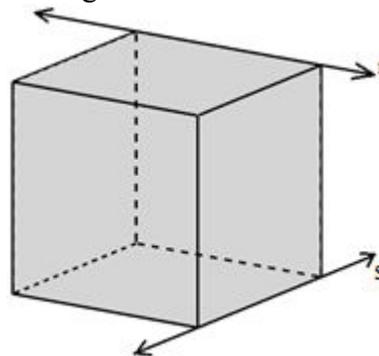
Figura 6: Retas paralelas contidas em um plano α .



Fonte: Acervo pessoal.

- Postulado das Paralelas: Dados uma reta r e um ponto P fora dela, existe uma única reta que passa por P e é paralela à reta r .
- Retas Reversas: Duas retas são reversas se não existe plano que contenha ambas.

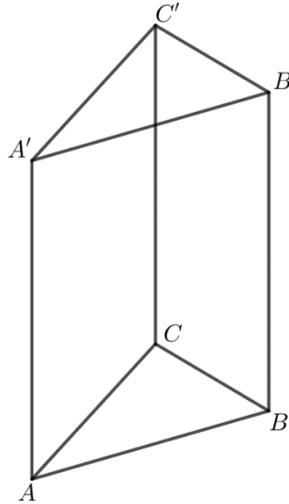
Figura 7: Retas reversas.



Fonte: Acervo pessoal.

Sugestão de Resolução:

Figura 8: Prisma reto de base triangular.



Fonte: Acervo pessoal.

Retas reversas não são paralelas e nem são concorrentes, ou seja, são retas que pertencem a planos paralelos.

Sejam ABC e $A'B'C'$ as bases do prisma.

Retas reversas:

AB com $A'B'$, com $A'C'$ e com $B'C'$ - 3 pares de retas reversas;

AC com $A'B'$, com $A'C'$ e com $B'C'$ - 3 pares de retas reversas;

BC com $A'B'$, com $A'C'$ e com $B'C'$ - 3 pares de retas reversas;

AA' com $B'C'$ - 1 par de reta reversa;

BB' com $A'C'$ - 1 par de reta reversa;

CC' com $A'B'$ - 1 par de reta reversa.

Total: 12

Total de possibilidades: $C_9^2 = 36$.

Logo, a probabilidade pedida é:

$$P = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

Problema 3: Apresentamos a seguir um problema extraído do livro “Antologia Puzzles”; Pag. 70; Problema 241. Escolhem-se, aleatoriamente, três pontos num plano. Ache a probabilidade de serem os vértices de um triângulo obtusângulo.

Fatos que ajudam:

- Triângulo obtusângulo: é aquele que tem um ângulo obtuso, ou seja, um ângulo que mede mais do que 90 graus e menos do que 180 graus.
- Axioma da Tricotomia: Se $a, b \in \mathbb{R}$, então uma, e só uma, das seguintes proposições é verdadeira: $a < b$ ou $a = b$ ou $a > b$.

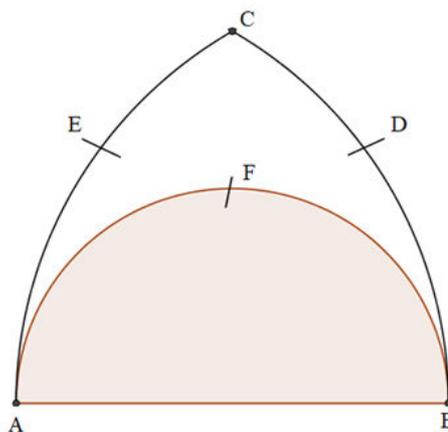
Sugestão de Resolução:

Antes de mais nada, podemos assumir que os três pontos formam um triângulo, pois a probabilidade de serem colineares é (praticamente) nula.

Seja \overline{AB} o maior lado do triângulo. Utilizando esse lado para base do triângulo, trace a semicircunferência AFB . Trace, também, com centro em A e em B e tomando para raio a distância \overline{AB} , os arcos BDC e AEC , que se intersectam em C .

Concluimos, facilmente, que o outro vértice do triângulo não pode estar no exterior da Ogiva, representada de base \overline{AB} e vértice C , uma vez que, por hipótese, \overline{AB} é o maior lado do triângulo. Se o terceiro vértice M pertencer a Ogiva e não pertencer ao semicírculo, então o triângulo ABM é acutângulo. Se o terceiro vértice M pertencer a semicircunferência, então o triângulo formado será retângulo em M . Se M pertencer ao semicírculo, então, pelo Axioma da Tricotomia, concluimos que o triângulo será obtusângulo.

Figura 9: Semicircunferência AFB e ogiva.



Fonte: Acervo pessoal.

Assim, a probabilidade P procurada é:

$$P = \frac{\text{Área do semicírculo}}{\text{Área da Ogiva}} = \frac{s}{w}$$

Tome $\overline{AB} = 2a$. Desse modo, a área s é igual a $s = \frac{\pi a^2}{2}$

$$w = 2 \cdot \text{Área do setor circular } ABCD - \text{Área do } \triangle ABC$$

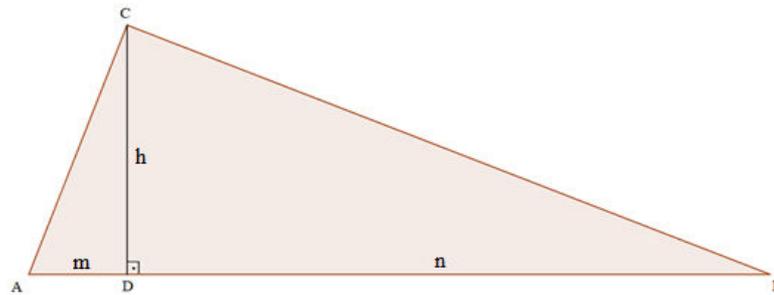
$$w = 2 \cdot \frac{4 \cdot \pi a^2}{6} - \sqrt{3} a^2 = a^2 \cdot \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \right)$$

$$P = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}} = \frac{3}{8 - \frac{6\sqrt{3}}{\pi}}$$

$$P = \frac{3}{8 - \frac{6\sqrt{3}}{\pi}}$$

Problema 4: Segue um problema transcrito do livro *Aprendendo e ensinando Geometria*; Pag. 217. Suponhamos que o ΔABC seja um triângulo retângulo com hipotenusa \overline{AB} , que \overline{CD} seja uma altura do ΔABC e que $\overline{AB} = 25$. Se \overline{AD} é um número inteiro, qual a probabilidade de que \overline{CD} seja um número inteiro?

Figura 10: Triângulo retângulo.



Fonte: Acervo pessoal.

Fatos que ajudam:

- Em todo triângulo retângulo, a altura relativa a hipotenusa é a média geométrica das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Sugestão de Resolução:

Sendo $\overline{AB} = m + n = 25$ e, por hipótese, $\overline{AD} = m$ é um número inteiro, então $\overline{DB} = n$ também é inteiro.

A equação $m + n = 25$ tem 24 soluções inteiras e positivas. Dentre essas 24 soluções, somente em quatro o produto de m por n dá um quadrado perfeito:

$$m + n = 25$$

$$h^2 = m \cdot n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m = 9 \text{ e } n = 16, \text{ ou} \\ m = 16 \text{ e } n = 9, \text{ ou} \\ m = 5 \text{ e } n = 20, \text{ ou} \\ m = 20 \text{ e } n = 5 \end{array} \right.$$

Assim, a probabilidade P , pedida é $P = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$.

Problema 5: Segue mais um problema transcrito do livro Aprendendo e ensinando Geometria; Pag. 219: Seis pontos de uma circunferência são os vértices de um hexágono regular. Se três desses seis pontos forem selecionados aleatoriamente, qual a probabilidade de se obter:

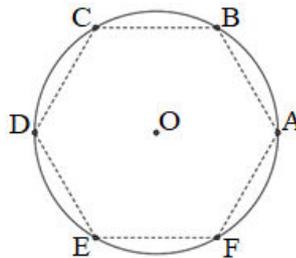
- Um triângulo equilátero?
- Um triângulo retângulo?

Fatos que ajudam:

- Por construção, o raio da circunferência tem mesma medida do lado do hexágono inscrito nessa circunferência;
- Triângulo equilátero é todo triângulo cujos lados tem mesma medida. Todo triângulo equilátero é também equiângulo, ou seja, cada ângulo interno de um triângulo equilátero mede 60° ;
- Triângulo retângulo é todo aquele que tem um ângulo reto. Nele, podemos usar o famoso teorema de Pitágoras, cujo enunciado é: em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados que tem como lados cada um dos catetos.

Sugestão de Resolução:

Figura 11: Divisão da circunferência em 6 partes iguais.



Fonte: Acervo pessoal.

Triângulos Equiláteros:

$$\triangle ACE, \triangle BDF.$$

Quantos triângulos?

$$C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 5 \cdot 4 = 20;$$

$$P_1 = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}.$$

Triângulos Retângulos:

$$\triangle DCA, \triangle DBA, \triangle DEA, \triangle DFA, \triangle DEB, \triangle ECB, \triangle DCF, \triangle ECF.$$

$$\text{Assim, } P_2 = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

Problema 6: Segue mais um problema transcrito do livro *Aprendendo e ensinando Geometria*; Pag. 217: Uma sacola contém varetas de comprimento 2, 3, 4, 5 e 6. Se três varetas são retiradas aleatoriamente da sacola, qual a probabilidade de que:

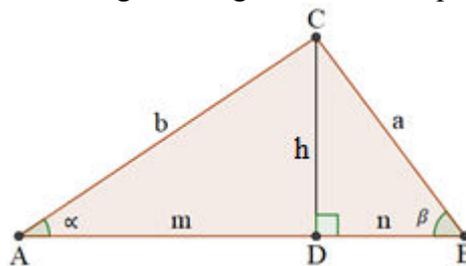
- Se possa formar um triângulo com essas três varetas?
- Se possa formar um triângulo retângulo com essas três varetas?
- Se possa formar um triângulo retângulo, admitindo-se que as três varetas possam ser usadas para formar um triângulo?

Fatos que ajudam:

- Desigualdade Triangular: A desigualdade propriamente dita pode ser enunciada como três desigualdades para qualquer triângulo ABC : $AB < AC + BC$, $AC < BC + AB$, $BC < AB + AC$, mostrando que qualquer lado do triângulo é menor do que a soma dos outros dois lados.
- Dados três pontos arbitrários A , B e C , temos $AC \geq |AB - BC|$.
- Vamos apresentar uma demonstração da Desigualdade Triangular usando Trigonometria.

Considere o ΔABC , de lados a , b e c , com $c > b > a$.

Figura 12: Triângulo retângulo ABC e suas projeções.



Fonte: Acervo pessoal.

CD é a altura relativa ao lado C no triângulo ABC .

Olhando para o triângulo ACD teremos:

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{h}{b} \Leftrightarrow h = b \cdot \sin \alpha \text{ (I)} \\ \cos \alpha = \frac{m}{b} \Leftrightarrow m = b \cdot \cos \alpha \text{ (II)} \end{cases}$$

Olhando, agora, para o triângulo BCD , teremos:

$$\begin{cases} \sin \beta = \frac{h}{a} \Leftrightarrow h = a \cdot \sin \beta \text{ (III)} \\ \cos \beta = \frac{n}{a} \Leftrightarrow n = a \cdot \cos \beta \text{ (IV)} \end{cases}$$

De *I* e *III*, concluímos que:

$$b \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \beta \text{ (V)}$$

Somando, membro a membro, *II* e *IV*, teremos:

$$m + n = b \cdot \cos \alpha + a \cdot \cos \beta \text{ (VI)}$$

Ou, $c = b \cdot \cos \alpha + a \cdot \cos \beta$.

Como α e β são ângulos agudos, temos que $0 < \cos \alpha < 1$ e $0 < \cos \beta < 1$.

Assim:

$$0 < b \cdot \cos \alpha < b \text{ e } 0 < a \cdot \cos \beta < a \text{ e daí:}$$

$$0 < b \cdot \cos \alpha + a \cdot \cos \beta < a + b \text{ ou}$$

$$0 < c < a + b, \text{ o que demonstra a desigualdade triangular.}$$

Sugestão de Resolução:

A tabela abaixo fornece uma maneira sistemática de mostrar as possíveis maneiras como as varetas podem ser agrupadas:

Tabela 1: Distribuição das varetas e a formação de triângulos.

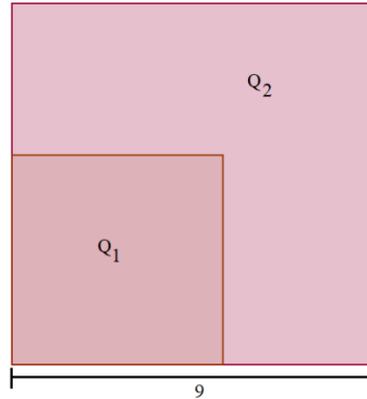
3 varetas	Triângulo?	Triângulo Retângulo?
2, 3, 4	SIM	NÃO
2, 3, 5	NÃO	NÃO
2, 3, 6	NÃO	NÃO
2, 4, 5	SIM	NÃO
2, 4, 6	NÃO	NÃO
2, 5, 6	SIM	NÃO
3, 4, 5	SIM	SIM
3, 4, 6	SIM	NÃO
3, 5, 6	SIM	NÃO
4, 5, 6	SIM	NÃO

Fonte: Acervo pessoal.

- a) Observando a Tabela 1, concluímos que existirá triângulo, segundo a Desigualdade Triangular, em 7 dos 10 agrupamentos. Assim, a probabilidade pedida P_1 é tal que $P_1 = \frac{7}{10}$.
- b) Retirando-se, aleatoriamente, três varetas da sacola, somente em um agrupamento é possível formar um triângulo retângulo ($5^2 = 3^2 + 4^2$). Dessa maneira, a probabilidade P_2 é tal que $P_2 = \frac{1}{10}$.
- c) O número de elementos do espaço amostral para os itens a) e b) é dez. Para responder c), teremos que reduzir o espaço amostral. O novo espaço amostral passa a ter sete elementos. Assim, $P_3 = \frac{1}{7}$.

Problema 7: Um quadrado de área Q_1 está contido no interior de outro maior de área $Q_1 + Q_2$. O lado do quadrado maior é 9 e os números $Q_1, Q_2, Q_1 + Q_2$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Imaginando um alvo com a forma da figura do problema, qual a probabilidade de ao lançarmos, cegamente, uma flecha sobre esse alvo, a mesma atingir a região do quadrado menor?

Figura 13: Quadrado de lado $l = 9$.



Fonte: Acervo pessoal.

Fatos que ajudam:

- Uma sequência $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ é uma Progressão Aritmética se, e somente se, cada termo, a partir do segundo, é o anterior mais uma constante que chamamos razão da Progressão Aritmética. Decorre da definição: Dados três termos consecutivos de uma P.A. (Progressão Aritmética), o termo médio é a média aritmética dos extremos.
- Área de um quadrado: $A = a^2$.

Sugestão de Resolução:

$(Q_1, Q_2, Q_1 + Q_2)$ é uma P.A.

$$Q_2 = \frac{Q_1 + Q_1 + Q_2}{2}$$

$$Q_2 = \frac{2Q_1 + Q_2}{2} \Leftrightarrow Q_2 = 2Q_1$$

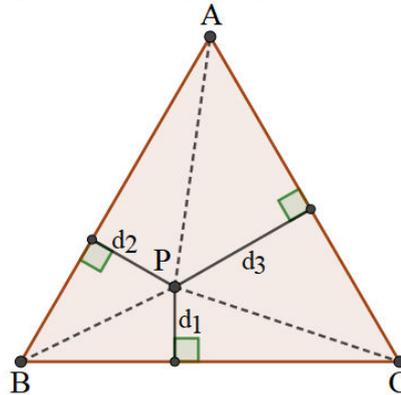
$$\begin{cases} Q_2 = 2Q_1 \\ Q_1 + Q_2 = 81 \end{cases} \Rightarrow Q_1 = 27 \text{ e } Q_2 = 54$$

Assim, a probabilidade P , pedida, é $P = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2} = \frac{27}{27 + 54} = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$.

Problema 8: Um alvo tem a forma de um triângulo equilátero de lado 1. Um dardo atinge, aleatoriamente, um ponto P no interior desse triângulo. Qual é a probabilidade de a soma das distâncias desse ponto aos lados desse triângulo ser igual a sua altura?

Sugestão de Resolução:

Figura 14: Triângulo equilátero ABC.



Fonte: Acervo pessoal.

Unindo P com os vértices do ΔABC , dividimos esse triângulo em outros três triângulos, a saber: ΔPBC , ΔAPB e o ΔAPC . É fácil ver que se somarmos as áreas desses triângulos, obteremos a área do ΔABC , ou seja:

$$\frac{1h}{2} = \frac{1 \cdot d_1}{2} + \frac{1 \cdot d_2}{2} + \frac{1 \cdot d_3}{2}$$

Donde concluímos que $h = d_1 + d_2 + d_3$.

Assim, a probabilidade P pedida é $P = 1$, já que todo ponto que está no interior do triângulo equilátero goza dessa propriedade.

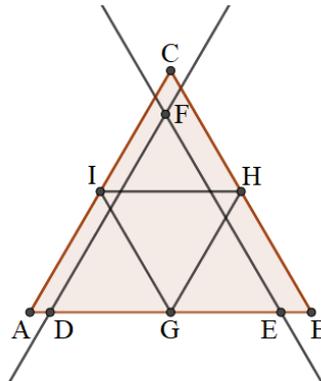
Problema 9: Se uma vareta é quebrada aleatoriamente em três partes, qual a probabilidade de que essas três partes possam ser usadas para formar um triângulo?

Sugestão de Resolução 1:

Representamos por \overline{AB} a vareta, e sejam D o ponto de quebra à esquerda e E o ponto de quebra à direita. Construímos o triângulo ABC equilátero. Indiquemos por G , H e I os pontos médios dos lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} , respectivamente, e por F a interseção da reta que passa D paralela a \overline{AC} e da reta que por E e é paralela a \overline{BC} . Então F é um ponto unicamente determinado no interior do ΔABC .

Se F está no interior do ΔGHI , então se pode formar um triângulo (desigualdade triangular), mas se F está no interior do ΔAGI ou do ΔGHB ou do ΔHIC , então não vale a desigualdade triangular e nenhum triângulo pode ser formado. Logo, a probabilidade é $\frac{1}{4}$.

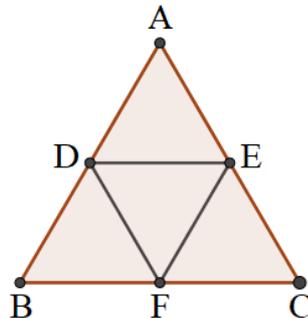
Figura 15: Triângulos e retas paralelas.



Fonte: Acervo Pessoal.

Sugestão de Resolução 2:

Figura 16: Triângulo equiláteros ABC , ADE , BDF , DEF , EFC .



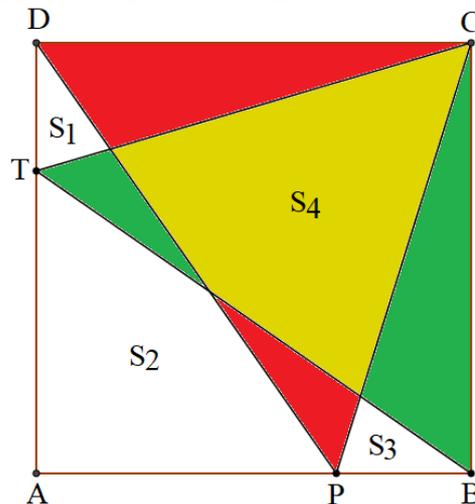
Fonte: Acervo pessoal.

Considere o triângulo equilátero ABC com altura igual ao comprimento da vareta. Os vértices do triângulo DEF são os pontos médios dos lados do triângulo ABC . Assim, o triângulo ABC fica decomposto em quatro triângulos congruentes e também equiláteros. Para qualquer ponto do interior do triângulo ABC , a soma das distâncias aos lados é constante e igual à altura do triângulo, ou seja, ao comprimento da vareta (esse teorema vale também para pontos no exterior, desde que consideremos a possibilidade de as perpendiculares poderem ter comprimentos negativos). Se o ponto estiver no interior de um dos triângulos com um vértice comum ao triângulo ABC , então há uma perpendicular maior que a soma das outras duas, não existindo a possibilidade de construir algum triângulo.

Portanto, as divisões na vareta que possibilitam a construção de um triângulo correspondem aos pontos do triângulo central, que representa um quarto da totalidade, isto é, chamando de P a probabilidade pedida, tem-se que $P = \frac{\text{Área do Triângulo } DEF}{\text{Área do Triângulo } ABC} = \frac{1}{4}$.

Problema 10: Um avião sobrevoa a área de uma Savana Africana, cuja vista superior é aproximadamente semelhante à figura abaixo:

Figura 17: Representação geométrica da Savana.



Fonte: Acervo pessoal.

Sabendo que $ABCD$ é um quadrado de lado 8km e que $S_1 + S_2 + S_3 = 36\text{km}^2$. Qual a probabilidade do referido avião pousar na área referente a S_4 ? Tome S_i como a área da região i .

Fatos que ajudam:

- Teorema dos Carpetes, citado na RPM 86 por Nunes (2014): Colocamos dois carpetes em um dormitório. Se a soma das áreas dos carpetes é igual à área do dormitório, então a área da interseção dos carpetes é igual à área da região não coberta por carpetes.

Sugestão de Resolução:

Observe que:

$$S_{DPC} + S_{TCB} = S_{ABCD} = 64\text{m}^2$$

Assim, pelo Teorema dos Carpetes, temos que $S_1 + S_2 + S_3 = S_4 = 36$.

Logo, a probabilidade P pedida será:

$$P = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}.$$

Problema 11: Um ponto é selecionado aleatoriamente dentro de um triângulo equilátero de lado $l = 3$. Qual a probabilidade de a distância a qualquer vértice ser maior que 1?

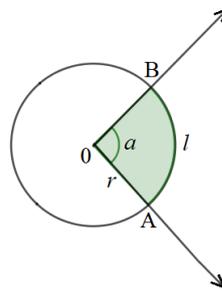
Fatos que ajudam:

- Área de um triângulo equilátero ABC :

$$S_{ABC} = \frac{l \cdot l \cdot \text{sen } 60^\circ}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{l^3 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

- Área de um setor circular:

Figura 18: Setor circular BOA.

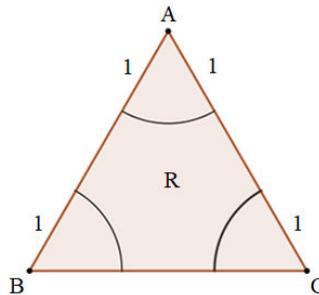


Fonte: Acervo pessoal.

$$S = \frac{\alpha \cdot r^2}{2} \text{ ou } S = \frac{l \cdot r}{2}$$

Sugestão de Resolução:

Figura 19: Triângulo equilátero e setores circulares de raio unitário.



Fonte: Acervo pessoal.

$$P = \frac{S_R}{S_{ABC}}, \text{ onde } S_R \text{ é a área da região } R \text{ e } S_{ABC} \text{ é a área da região do } \Delta ABC$$

$$S_R = S_{ABC} - 3 \cdot \text{Área do setor circular de raio } r = 1$$

$$S_R = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{\pi r^2}{2} = \frac{l^2 \sqrt{3} - 2\pi r^2}{4}$$

$$P = \frac{l^2 \sqrt{3} - 2\pi r^2}{4} \cdot \frac{4}{l^2 \sqrt{3}}$$

$$P = 1 - \frac{2\pi r^2}{l^2 \sqrt{3}} \text{ ou } P = 1 - \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$$

$$P = 1 - \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}$$

Problema 12: Tome todos os vértices de um prisma n -agonal e os combine dois a dois. Sorteando uma dessas combinações, qual é a probabilidade de ela ser diagonal do prisma?

Fatos que ajudam:

- $D = n \cdot (n - 3)$, onde D representa o número de diagonais do prisma n -agonal
- Dedução da expressão que dá o número de diagonais de um prisma n -agonal.
 - i. Um prisma n -agonal tem $2n$ vértices.
 - ii. O número de diagonais será, portanto, igual ao número de combinações simples de $2n$ elementos tomados 2 a 2, menos o número de arestas e das diagonais das faces.
 - iii. O número de arestas das bases é $2n$ e de arestas laterais é n . Assim, o número total de arestas é $3n$.
 - iv. Cada face lateral tem duas diagonais. Teremos, então, $2n$ diagonais das faces. Cada base tem $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$. Como são duas bases congruentes, teremos $n \cdot (n - 3)$ diagonais.

Designando por D o número de diagonais do prisma n -agonal, teremos:

$$D = C_{2n}^2 - 3n - 2n - n \cdot (n - 3) \Rightarrow D = n \cdot (n - 3)$$

Sugestão de Resolução:

$$C_{2n}^2 = \frac{(2n)!}{(2n-2)!2!} = \frac{(2n) \cdot (2n-1) \cdot (2n-2)!}{(2n-2)!2} = \frac{2n \cdot (2n-1)}{2} = n \cdot (2n-1)$$

$$C_{2n}^2 = n \cdot (2n - 1)$$

$$P = \frac{n \cdot (n - 3)}{n \cdot (2n - 1)} = \frac{n - 3}{2n - 1}$$

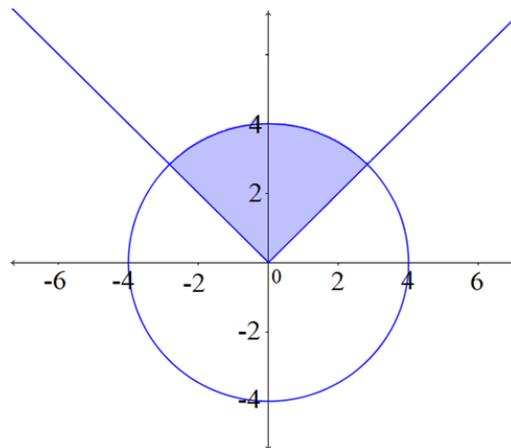
Problema 13: Escolhendo aleatoriamente um ponto do círculo $x^2 + y^2 \leq 16$, qual a probabilidade de esse ponto pertencer a região definida pelas desigualdades $x^2 + y^2 \leq 16$ e $y \geq |x|$.

Fatos que ajudam:

- A equação de uma circunferência de centro $C = (a, b)$ e raio R : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.
- Função Módulo: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, defina por $f(x) = |x|$.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Figura 20: Região delimitada pelo círculo de raio 4 e a função $y = |x|$



Fonte: Acervo pessoal.

Sugestão de Resolução:

Área do Círculo: $S_{\text{círculo}} = \pi r^2$

Observando que o setor circular corresponde a quarta parte do círculo. Concluimos que a probabilidade P , pedida é:

$$P = \frac{1}{4}$$

Problema 14:

- a) Convenciona-se transmitir sinais luminosos de uma ilha para a costa por meio de seis lâmpadas brancas e seis lâmpadas vermelhas, colocadas nos vértices de um hexágono regular, de tal modo que:
1. Em cada vértice haja duas lâmpadas de cores diferentes;
 2. Em cada vértice não haja mais do que uma lâmpada acesa;
 3. O número mínimo de vértices iluminados seja três.

Determinar o número total de sinais que podem ser transmitidos.

Sugestão de Resolução:

Para calcular o número de sinais com três vértices iluminados, consideremos os seguintes eventos e seus respectivos números de ocorrências.

A_1 : Escolha de três vértices para serem iluminados. Esse evento pode ocorrer de C_6^3 maneiras;

A_2 : Iluminação dos três vértices, após ter ocorrido A_1 . Esse evento pode ocorrer de 2^3 maneiras, pois em cada vértice devemos escolher uma lâmpada dentre duas para ser acesa. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o número de sinais com 3 vértices iluminados é $C_6^3 \cdot 2^3$.

Analogamente, calcula-se o número de sinais com quatro vértices iluminados: $C_6^4 \cdot 2^4$;

Com cinco vértices iluminados: $C_6^5 \cdot 2^5$, e com os seis vértices iluminados: $C_6^6 \cdot 2^6$.

Portanto, o número total de sinais transmitidos é: $C_6^3 \cdot 2^3 + C_6^4 \cdot 2^4 + C_6^5 \cdot 2^5 + C_6^6 \cdot 2^6 = 656$.

- b) Qual a probabilidade de que uma pessoa que está na costa, enxergar um painel luminoso cujas lâmpadas acesas são vértices de um triângulo retângulo?

Sugestão de Resolução:

$A = \{\text{painel luminoso cujas lâmpadas acesas são vértices de um triângulo retângulo}\}$

Com cada diagonal de extremidades diametralmente opostas, podemos construir quatro triângulos retângulos. Como são três diagonais com essa característica, podemos construir doze triângulos retângulos. Assim,

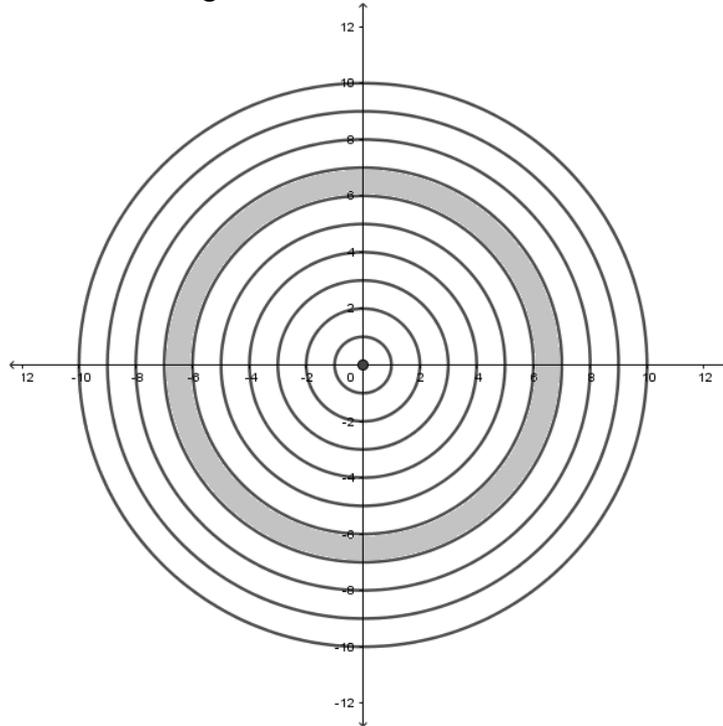
$$n(A) = 12 \cdot 2^3 = 96$$

Portanto,

$$P(A) = \frac{96}{656} = \frac{6}{41}.$$

Problema 15: Consideremos um alvo com o formato de uma família de círculos concêntricos de raios 1, 2, 3, 4, ... 10. Sejam A_0 área do círculo de raio 1 e A_n a área do n -ésimo anel ($1 \leq n \leq 10$). Lançando cegamente um dardo sobre esse alvo, qual a probabilidade de esse dardo fixar-se no sexto anel?

Figura 21: Círculos concêntricos.



Fonte: Acervo pessoal.

Sugestão de Resolução:

A_0 : Área do círculo de raio 1;

$$A_0 = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

A_1 : Área do primeiro anel;

$$A_1 = \text{Área do Círculo de raio 2} - \text{Área do Círculo de raio 1}$$

$$A_1 = \pi \cdot 2^2 - \pi = 3\pi$$

A_2 : Área do segundo anel;

$$A_2 = \text{Área do Círculo de raio 3} - \text{Área do Círculo de raio 2}$$

$$A_2 = \pi \cdot 3^2 - 4\pi = 5\pi$$

A_3 : Área do terceiro anel;

$$A_3 = \text{Área do Círculo de raio 4} - \text{Área do Círculo de raio 3}$$

$$A_3 = \pi \cdot 4^2 - 9\pi = 7\pi$$

A sequência $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_{10})$ é uma P.A. de razão $R = 2\pi$. Assim:

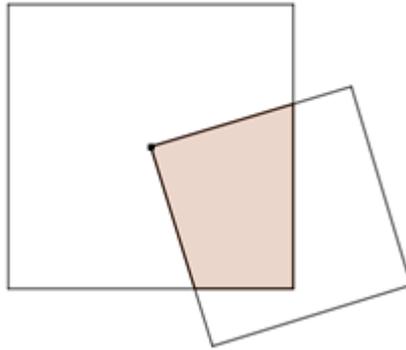
$$A_6 = A_0 + 6R \Rightarrow A_6 = 13\pi$$

$$A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_{10} = \frac{(A_0 + A_{10}) \cdot 11}{2} = \frac{(\pi + 21\pi) \cdot 11}{2} = 121\pi$$

Portanto, a probabilidade P pedida é $P = \frac{\text{Área do sexto anel}}{\text{Área do círculo de raio 11}} = \frac{13\pi}{121\pi} = \frac{13}{121}$.

Problema 16: Transcrito do livro: “Antologia Puzzles”; Pág. 166; Problema 511. A figura mostra dois quadrados sobrepostos, o maior dos quais com 10 cm de lado e o outro com lado de comprimento l bem menor que 10cm. Um dos vértices do quadrado menor situa-se no centro do quadrado maior e o seu centro está situado sobre o lado direito do quadrado maior, a 2,5cm do vértice inferior do quadrado maior. Escolhendo-se um ponto aleatoriamente na figura, qual a probabilidade de este ponto pertencer a região hachurada?

Figura 22: Quadrados sobrepostos.



Fonte: Acervo pessoal.

Sugestão de Resolução:

Se girarmos o quadrado menor em torno do centro do quadrado maior, verificamos que a figura hachurada representa um quarto do quadrado maior, uma vez que a área de sobreposição se encontra limitada por duas linhas em ângulo reto, com vértice no centro do quadrado maior. Assim, a probabilidade P pedida, é:

$$P = \frac{\text{Área do quadrado menor}}{\text{Área do quadrado maior}} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Problema 17: Gabi e Izôlda, que não são pessoas muito pontuais, marcaram um encontro às 16 horas. Se cada uma delas chegar ao encontro em um instante qualquer entre 16 horas e 17 horas e se dispõe a esperar no máximo 10 minutos pela outra, qual é a probabilidade delas se encontrarem?

Sugestão de Resolução:

Figura 23: Esquema de horários de Gabi e Izôlda.



Fonte: Acervo pessoal.

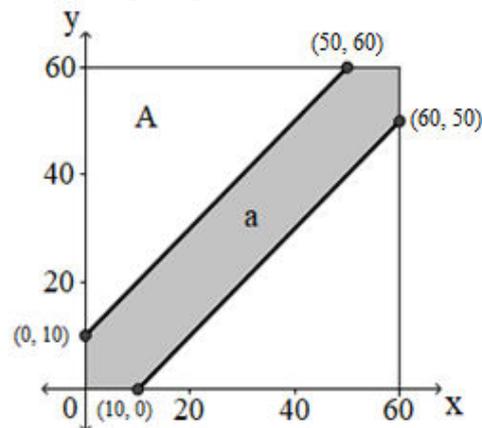
$P(\text{haver o encontro}) = ?$

Haverá encontro se, e somente se, $|x - y| \leq 10$. Além disso, por imposição do problema, temos que $0 \leq x \leq 60$ e $0 \leq y \leq 60$.

Sendo $|x - y| \leq 10$, temos: $-10 \leq x - y \leq 10$.

$$-10 \leq x - y \leq 10 \Leftrightarrow y \geq x - 10 \text{ e } y \leq x + 10$$

Figura 24: Representação da região que satisfaz o encontro no horário programado.



Fonte: Acervo pessoal.

Estas restrições definem a região hachurada a da figura acima. Assim,

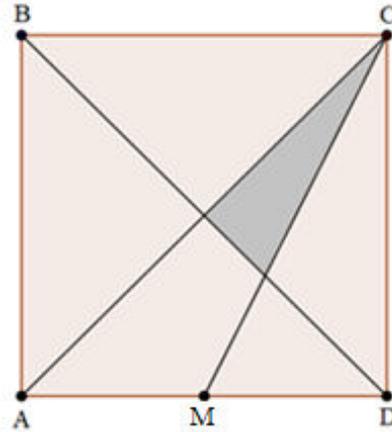
$$P = \frac{\text{Área de } a}{\text{Área de } A} = \frac{3600 - 2 \cdot \left(\frac{50 \cdot 50}{2}\right)}{3600}$$

$$P = \frac{3600 - 2500}{3600} = \frac{1100}{3600} = \frac{11}{36}$$

$$P \cong 30,56\%$$

Problema 18: Considere um alvo que tem a forma da figura abaixo. Essa figura é um quadrado de 6 m de lado. M é o ponto médio do lado AD . Uma flecha atinge aleatoriamente esse alvo. Qual a probabilidade dessa flecha atingir a área sombreada?

Figura 25: Quadrado e área sombreada em questão.

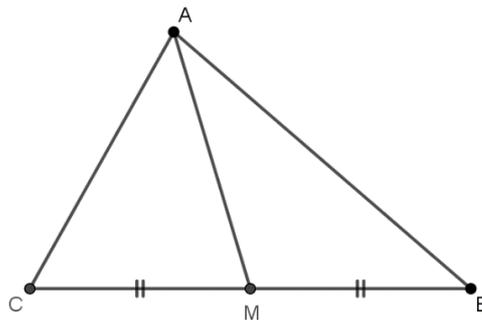


Fonte: Acervo pessoal.

Fatos que ajudam:

- A mediana de um triângulo o divide em dois triângulos equivalentes, isto é, em dois triângulos de mesma área.

Figura 26: Triângulo dividido pela sua mediana.



Fonte: Acervo pessoal.

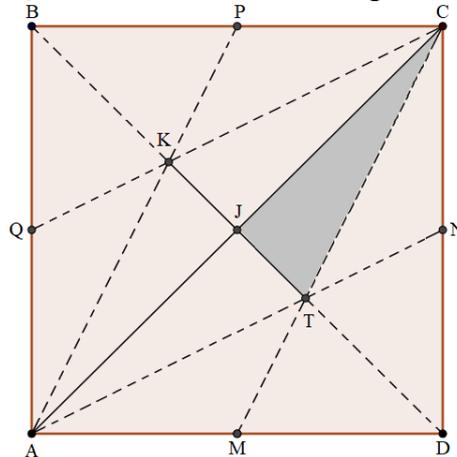
$S_{ABM} = S_{AMC}$ pelo fato de terem mesma base e mesma altura.

- As medianas de um triângulo dividem esse triângulo em 6 outros triângulos, todos de mesma área.

Sugestão de Resolução:

Considere o quadrado $ABCD$, abaixo. M é o ponto médio do lado AD ; N é o ponto médio do lado CD ; P é o ponto médio do lado BC e Q é o ponto médio do lado AB . BD e AC são as diagonais do quadrado e J é o ponto de interseção dessas diagonais. As diagonais de um quadrado biseccionam uma a outra. Assim, as medianas do triângulo ABC são BJ , AP e CQ . Seja K o baricentro desse triângulo. As medianas do triângulo ACD são DJ , CM e AN . Seja T o baricentro desse triângulo.

Figura 27: Quadrado dividido em 12 triângulos equivalentes.



Fonte: Acervo pessoal.

O quadrado fica então dividido em 12 triângulos equivalentes. Assim teremos,

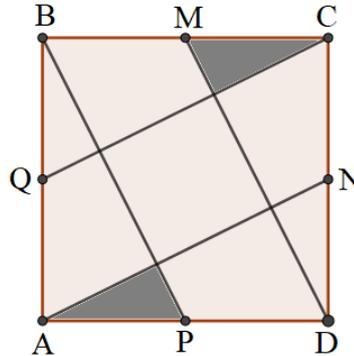
$$S_{ABCD} = 6 \cdot 6 = 36m^2$$

$$S_{TJC} = \frac{36}{12} \Rightarrow S_{TJC} = 3m^2$$

Dessa forma, a probabilidade P pedida é $P = \frac{\text{Área do Triângulo } CJK}{\text{Área do Quadrado } ABCD} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Problema 19: O quadrado $ABCD$ abaixo, de lado 1 m, representa um alvo. M , N , P e Q são os pontos médios dos lados desse quadrado. Lançando uma flecha aleatoriamente nesse alvo, qual a probabilidade de ela atingir a parte hachurada?

Figura 28: Quadrado referente ao enunciado da questão 19.



Fonte: Acervo pessoal.

Fatos que ajudam:

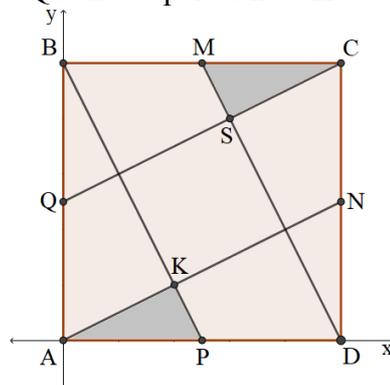
- A equação reduzida da reta: $y = mx + p$, onde m é o coeficiente angular da reta e p é o coeficiente linear.
- A área de um triângulo de vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Sugestão de Resolução:

Tracemos os eixos cartesianos de tal maneira que o lado AD esteja apoiado no eixo \overrightarrow{OX} e o lado AB apoiado no eixo \overrightarrow{OY} .

Figura 29: Quadrado apoiado nos eixos cartesianos.



Fonte: Acervo pessoal.

Vamos encontrar a equação reduzida da reta r que passa pelos pontos $B = (0, 1)$ e $P = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$:

$$n_{\overline{BP}} = \frac{0 - 1}{\frac{1}{2} - 0} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

$$y = -2x + b \quad (r)$$

$$B = (0, 1) \in r \Rightarrow 1 = -2 \cdot 0 + b \Rightarrow b = 1$$

Portanto, a equação reduzida da reta r é $y = -2x + 1$. Encontremos agora, a equação reduzida da reta s que passa por $A = (0, 0)$ e $N = \left(1, \frac{1}{2}\right)$:

$$m_{\overline{AN}} = \frac{\frac{1}{2} - 0}{1 - 0} = \frac{1}{2}$$

Como a reta passa pela origem, $b = 0$. Assim:

$$y = \frac{1}{2}x \quad (s)$$

Vamos encontrar, agora, as coordenadas do ponto k , interseção das retas (r) e (s) :

$$\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2}{5} \text{ e } y = \frac{1}{5}$$

$$k = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

S_{AKP} = Área do triângulo AKP

$$S_{AKP} = \frac{1}{2} |D|; \text{ onde } D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 2/5 & 1/5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$S_{AKP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \therefore S_{AKP} = \frac{1}{20} m^2$$

De maneira análoga, determinamos a área do triângulo MSC :

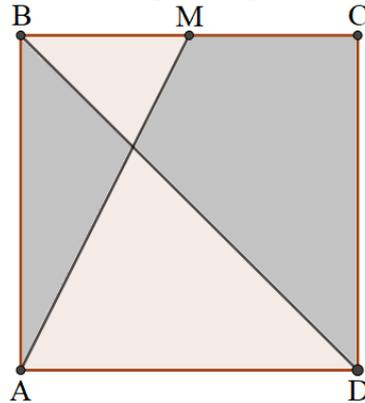
$$S_{MSC} = \frac{1}{20} m^2$$

Dessa forma, a probabilidade P pedida é tal que:

$$P = \frac{\frac{2}{20}}{1} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

Problema 20: O quadrado $ABCD$ de lado 6 m , representado abaixo, representa um alvo. Um dardo é lançado cegamente sobre esse alvo. Qual a probabilidade desse dardo atingir a parte a parte sombreada. M : ponto médio de BC .

Figura 30: Quadrado dividido pela diagonal BD e o segmento AM .

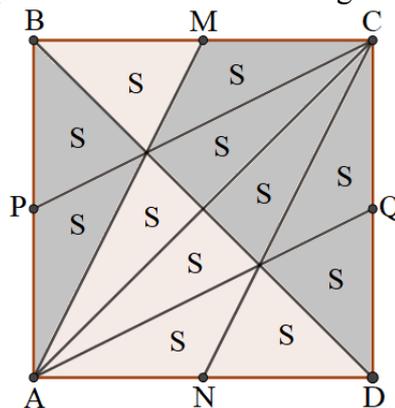


Fonte: Acervo pessoal.

Sugestão de Resolução:

Traçando as diagonais do quadrado e unindo A com M , C com N , C com P e A com Q , o quadrado fica dividido em doze triângulos de mesma área. Dessa forma, a probabilidade P pedida é $P = \frac{7}{12}$.

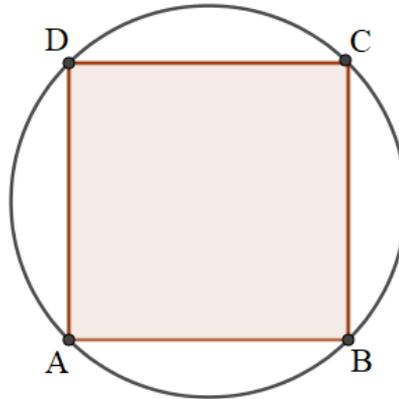
Figura 31: Quadrado dividido em 12 triângulos equivalentes.



Fonte: Acervo pessoal.

Problema 21: Na figura abaixo, A e B são vértices do quadrado inscrito no círculo.

Figura 32: Quadrado inscrito em uma circunferência.



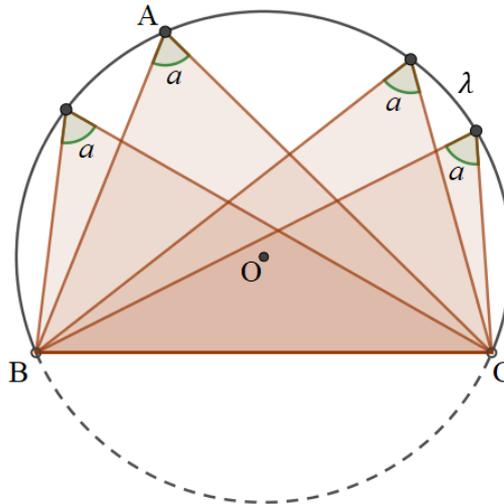
Fonte: Acervo pessoal.

Se um ponto E da circunferência, diferente de todos os vértices do quadrado, é tomado ao acaso, qual é a probabilidade de A , B e E serem vértices de um triângulo obtusângulo?

Fatos que ajudam:

- Triângulo obtusângulo é aquele que tem um ângulo obtuso;
- Ângulo Central de uma circunferência é um ângulo cujo vértice é o centro da circunferência;
- A medida de um arco é igual a medida do ângulo central subtendido;
- Ângulo inscrito é aquele cujos lados são secantes à circunferência e o seu vértice é um ponto da circunferência;
- A medida de um ângulo inscrito numa circunferência é a metade da medida do arco correspondente;
- Consideremos uma circunferência $\lambda(O, r)$ e um ângulo BAC inscrito em λ e tal que $\widehat{BAC} = \alpha$. Os ângulos de vértices no arco \widehat{BAC} cujos lados passam pelas extremidades B e C têm medida α (teorema do ângulo inscrito).

Figura 33: Arco capaz de BC, segundo α .



Fonte: Acervo pessoal.

O arco \widehat{BAC} é chamado arco capaz de BC segundo α . Excluídos os pontos B e C , dizemos que os pontos do arco \widehat{BAC} veem o segmento BC sob ângulo constante de medida α . Prova-se que o lugar geométrico dos pontos de um plano que veem um segmento de reta BC sob um ângulo de medida α é a união dos dois arcos capazes de BC segundo α , excluídas as extremidades B e C .

Sugestão de Resolução:

O arco APB é o arco capaz de AB segundo 45° e, dessa forma, \widehat{AEB} mede 135° . Noutras palavras, o triângulo AEB é obtusângulo, em que $E \in \widehat{AEB}$.

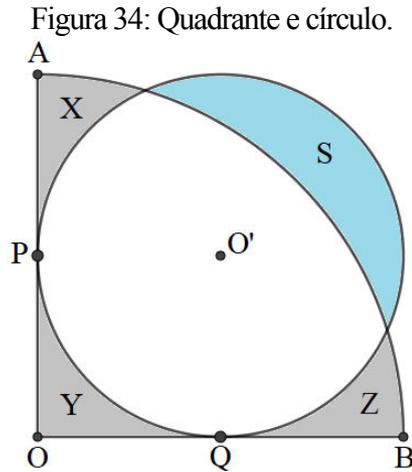
Quando o ponto E pertencer ao arco DEC o ângulo \widehat{AEB} medirá 45° . Logo, o triângulo AEB é acutângulo.

O arco BAC é o arco capaz de BC segundo 45° . Portanto, escolhendo E no arco BEC , concluímos que o triângulo BEC é obtusângulo.

O arco ABD é o arco capaz de AD segundo 45° . Assim, escolhendo E no arco AED , concluímos que o triângulo AED também é obtusângulo.

Como E tem igual chance de estar em qualquer ponto da circunferência e os vértices A, B, C, D dividem a mesma em quatro arcos de igual comprimento ($\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DA}$), então a probabilidade de o triângulo ABE ser obtusângulo é de $\frac{3}{4}$.

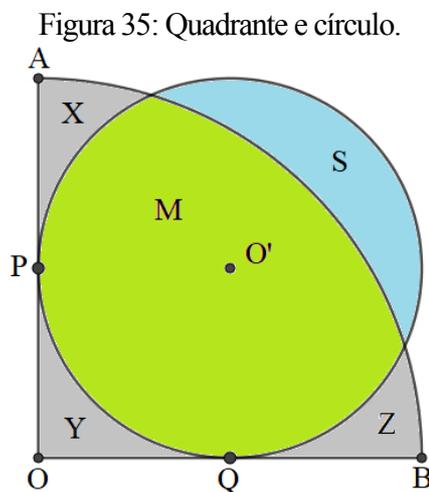
Problema 22: Atira-se cegamente um dardo contra um alvo, conforme a figura abaixo.



Fonte: Acervo pessoal.

Qual região tem mais chance de ser atingida: $(X \cup Y \cup Z)$ ou (S) ? Considere que P e Q são pontos médios dos segmentos AO e OB , respectivamente.

Sugestão de Resolução:



Fonte: Acervo pessoal.

Na figura, temos $M + S = \pi \cdot R^2$ (I), onde R é o raio do círculo de centro O' . Por outro lado, temos que $X + Y + Z + M = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (2 \cdot R)^2$, ou seja, $X + Y + Z = \pi \cdot R^2$ (II).

Pela transitividade, temos que $M + S = X + Y + Z + M$, isto é, $S = X + Y + Z$.

Assim sendo, concluímos que a probabilidade de atingir a região correspondente a $X + Y + Z$ é igual a região correspondente a S .

Problema 23: Escolhendo-se três vértices de um cubo, qual a probabilidade de serem da mesma face?

Sugestão de Resolução:

O cubo tem 8 vértices. Podemos escolher 3 dentre os 8 vértices de C_8^3 modos.

Um cubo tem um total de seis faces. Devemos escolher 3 vértices de cada face. Assim, o total de maneiras de escolher 3 vértices de cada face é:

$$6 \cdot C_4^3.$$

A probabilidade pedida P é tal que $P = \frac{6 \cdot C_4^3}{C_8^3} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esperamos que com este trabalho estejamos contribuindo ao fornecer um importante material com potencial didático, o qual poderá ser utilizado por professores de Matemática do Ensino Médio, além de alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática. Em nosso trabalho, poderá ser encontrado uma lista de exercícios com sugestão de resolução, entrelaçando conceitos fundamentais do desenvolvimento e amadurecimento dos alunos, no que refere ao raciocínio lógico e do raciocínio geométrico. Além, é claro, do que julgamos o mais importante, levando o aluno ao tratamento de problemas que envolvam modelagens de experimentos aleatórios e cálculos de probabilidade.

Os problemas aqui apresentados podem servir de espelho para a elaboração de novos problemas. Os professores podem sempre visitar ou reconstruir os conceitos da geometria euclidiana plana, espacial e analítica e, dentro desse propósito, elaborar problemas de probabilidade utilizando tão somente a definição clássica.

Fez-se necessário apresentar a definição frequentista e a definição axiomática de probabilidade, pelo fato deste trabalho estar em sintonia com a Contribuição da SBM para a discussão de Currículo de Matemática coordenada por Antônio Amaral (2014), Eduardo Wagner, Priscila Guez e Vitor Amorim.

REFERÊNCIAS

- ANTÔNIO AMARAL (Org.). Contribuição da SBM para a discussão sobre Currículo de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2014. 64 slides, color.
- BELLOS, Alex. Alex no País dos Números: Uma viagem ao mundo maravilhoso da matemática. São Paulo: Companhia das Letras, 2011. 490 p.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio). Brasília: MEC, 2000.
- CRILLY, T. *50 Ideias de Matemática que você precisa conhecer*. São Paulo: Planeta, 2017.
- DANA, M. E. *Geometria – Um enriquecimento para Escola Elementar*. In: Aprendendo e Ensinando Geometria. Org. Lindquist, M. M. e Shulte, A. P.. São Paulo: Atual Editora, 1994.
- JAMES, B. R. Probabilidade: um curso em nível intermediário. Rio de Janeiro: IMPA. 2015. 4ª. Edição.
- KOLMOGOROV, Andrei Nikolayevich. General Theory of Measure and Probability Theory. S.I: S.n., 1929.
- LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Org.). Aprendendo e Ensinando Geometria. São Paulo: Atual Editora, 1996. 308 p. Tradução de: Hygino H. Domingues.
- LOPES, C. E. *A probabilidade e a estatística no Ensino Fundamental: uma análise curricular*. Campinas: Faculdade de Educação da Unicamp, 1998. 125 p. Dissertação (Mestrado em Educação).
- LOPES, G. L. O. *A Criatividade Matemática De John Wallis Na Obra Arithmetica Infinitorum: Contribuições Para Ensino De Cálculo Diferencial E Integral Na Licenciatura Em Matemática*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Educação, UFRN, 2017.
- MLODINOW, Leonard. O Andar do Bêbado: Como o acaso determina nossas vidas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor Ltda, 2009. 261 p.
- MOREIRA, J. A.; SALSA, I. S.: *Probabilidade e estatística*. Natal, RN: EDUFRN, 2008.
- NUNES, Ana Lúcia Teixeira. O teorema dos carpetes. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, v. 86, p. 06-10, 2014.
- POLYA, George. *A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do Método matemático*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. Tradução de: Heitor Lisboa de Araújo.
- POZO, Juan Ignácio. A solução de problemas: Aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998. 177 p.
- SCHECHTER, B. *My Brain is Open: The Mathematical Journeys of Paul Erdos*. SIMON & SCHUSTER, 2000.

SCHOENFELD, A. H. Episódios e execução de decisões, na resolução de problemas matemáticos. New York: Academic Press, 1985.

SMOLE, K. S; DINIZ, M. I.; PESSOA, N.; ISHIHARA, C. *Jogos de Matemática: de 1º a 3º ano*. Porto Alegre: Artmed, 2008.

SOOYOUNG, C. *Academic Genealogy of Mathematicians*, World scientific pub, 2010.

TUNALA, N. Determinação de probabilidades por métodos geométricos. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, v. 20, p. 16-22, 1992.

WAGNER, Eduardo. *Probabilidade Geométrica*. *Revista do Professor de Matemática* – n. 34. Editora SBM, São Paulo, 1997.

WELSS, David. *Antologia puzzles*. Lisboa: Replicação, 1992. 355 p.

WOODWARD, E.; HOEHN, L. *Probabilidade na Geometria do Segundo Grau*. In: *Aprendendo e Ensinando Geometria*. Org. Lindquist, M. M. e Shulte, A. P.. São Paulo: Atual Editora, 1994.