**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ**

**DICKSON MAGNO SILVA**

# OFICINAS DE MATEMÁTICA EXPERIMENTAL
**Um Inglês em Salvador**

**Ilhéus-Bahia**
**2017**

**DICKSON MAGNO SILVA**

# OFICINAS DE MATEMÁTICA EXPERIMENTAL
## Um Inglês em Salvador

**Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz, para obtenção do título de Mestre em Matemática.**

**Área de Concentração: Análise Combinatória**
**Orientador: Nestor Felipe Castañeda Centurión.**

**Ilhéus-Bahia**
**2017**

S586 Silva, Dickson Magno.
Oficinas de matemática experimental : um inglês em Salvador / Dickson Magno Silva. – Ilhéus : UESC, 2017.
90f. : il.
Orientador: Nestor Felipe Castañeda Centurión.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Inclui referências e anexos.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Análise combinatória. I.Centurión, Nestor Felipe Castañeda. II. Título.

CDD – 510.7

DICKSON MAGNO SILVA

# OFICINAS DE MATEMÁTICA EXPERIMENTAL: UM INGLÊS EM SALVADOR.

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Trabalho aprovado, Ilhéus, 20 de dezembro de 2017.

Prof. Dr. Nestor Felipe Castañeda Centurión
(Orientador)

Prof. Dr. Germán Ignacio Gomero Ferrer
(UESC)

Profa. Me. Mariluce de Oliveira Silva
(IFBA - Campus de Ilhéus)

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por mais essa conquista e a todas as pessoas que contribuíram diretamente ou indiretamente para realização desse sonho.

Ao programa PROFMAT, à UESC e aos professores que nos acompanharam nesses de dois anos e mais alguns meses de curso, sempre à disposição para nos ajudar, em especial ao professor Vinícius Arakawa.

Ao meu Orientador, professor Nestor, por todo incentivo, pelo apoio e orientação durante o desenvolvimento e escrita desse trabalho, por toda paciência diante das prorrogações no prazo de entrega, motivadas pela enorme sobrecarga de compromissos de minha atividade docente e empresarial.

A todos os colegas meus colegas do PROFMAT, em especial a Gabriela Nery, única conterrânea da turma, pela companhia nas viagens semanais para UESC, pela ajuda nos estudos e nas aplicações da oficina.

A Milton Jr, Sidnéia e Leiliane, pela ajuda, dedicação e dinamismo nas aplicações da oficina.

Aos Diretores, Professores, coordenadores, demais funcionários do Colégio Modelo, do Colégio Faraíldes e do IFBA, Instituições de ensino de Jequié por nos receber com cordialidade e boa vontade para as aplicações da oficina e aos alunos por terem participado da mesma com afinco e também com boa vontade e cordialidade.

A toda equipe do Expert e do Colégio Dimensão por entender as ausências nas atividades, principalmente as de cunho administrativo, por conta das minhas atividades e aulas do mestrado.

A minha namorada Catiule, por todo apoio, compreensão, companheirismo, incentivo e ajuda.

E a minha família, em especial a Francisco e Madalena, meu pai e minha mãe, pela compreensão, incentivo e pelos esforços que contribuíram para minha formação.

# RESUMO

Este trabalho tem o propósito de encontrar estratégias inovadoras de ensino da matemática e testar o potencial delas em aumentar o interesse pelo estudo dessa disciplina, e em tornar as aulas mais agradáveis e participativas, com vistas na melhoria do aprendizado. Nesse sentido, aplicamos a Oficina de Matemática Experimental “um Inglês em Salvador”, por nós desenvolvida, no Colégio Modelo Luís Eduardo Magalhães, no Colégio Estadual Professora Faraíldes Santos e no Instituto Federal da Bahia – Campus Jequié. Essa oficina, apresenta como situação-problema da fase 1, a escolha, em um mapa com vias especiais nas direções Norte-Sul e Leste-Oeste, de caminhos mais curtos que liguem, por essas vias, o Aeroporto de Salvador ao Parque de Pituaçu e o Aeroporto de Salvador ao Farol da Barra, para indicar a Peter, o jovem Inglês. A situação-problema da fase 2, é transformar essas indicações de caminhos em códigos para serem transmitidos para o *Pager* de Peter. As duas situações-problema estão relacionadas aos problemas de duas possibilidades, da Análise Combinatória. Na aplicação da oficina, a estória nela contada, divertiu, prendeu a atenção e motivou os alunos, e estes, aprenderam matemática e também se divertiram. O interesse, a participação e o aprendizado foram maiores do que nas metodologias tradicionais de ensino da matemática, por isso, o resultado da aplicação foi considerado muito satisfatório. Assim, a metodologia de ensino Oficinas de Matemática Experimental, em Análise Combinatória, com seu caráter lúdico, desafiador e divertido, é apresentada como uma boa alternativa para melhoria o ensino aprendizagem da matemática.



Palavras-chave: Matemática Experimental, Oficinas de Matemática, Estratégias Inovadoras, Análise Combinatória.

## ABSTRACT

This work aims to find innovative strategies in Maths teaching, test their potential to stimulate the interest in Maths and make the classes more enjoyable and participatory in order to improve its learning. In this sense, we developed and organized the "Experimental Maths Workshop" named “An Englishman in Salvador” at Luís Eduardo Magalhães Model High School, Teacher Faraíldes Santos State School and Federal Institute of Bahia - Jequié Campus. Our workshop presented as a problem situation in phase 1 the choice Peter – the Englishman – should make among shorter routes from Salvador Airport to Pituaçu Park and from Salvador Airport to Barra Lighthouse using a map with special routes in north-south and east-west direction. The problem situation in phase 2 is to transform these routes into codes to be transmitted to Peter’s *Pager*. The two problem situations are related to the problems of two possibilities from Combinatorial Analysis. During the workshop, the story told entertained, drew attention and motivated the students to learn this topic in Maths. The interest, participation and learning were more meaningful compared to traditional methodologies used in Maths teaching. Therefore, the results of this workshop were very satisfactory. The teaching methodology using Experimental Maths Workshops in Combinatorial Analysis is a good option to improve the Maths learning/teaching mostly due to its ludic, challenging and amusing character.



Keywords: Experimental Maths, Maths Workshops, Innovative Strategies, Combinatorial Analysis.

## LISTA DE TABELAS

## LISTA DE QUADROS

## LISTA DE FIGURAS

**SUMÁRIO**

# 1 INTRODUÇÃO

Com os avanços na legislação educacional brasileira trazidos pela constituição de 1988 e posteriores regulamentações e com o aumento da percepção dos prejuízos sociais e econômicos causados pela baixa qualidade da educação no Brasil, principalmente a partir da segunda metade da década de mil novecentos e noventa, passou a haver uma maior disposição dos governos, em especial do governo federal, em melhorar a educação básica (ensino fundamental e ensino médio). De lá para cá, houve um considerável aumento nos recursos destinados à educação e foram criados diversos mecanismos com a finalidade de melhorar a qualidade da educação brasileira, dentre eles: Mecanismos de financiamento, mecanismos de referência e orientação e mecanismos de avaliação.

O Fundo de Manutenção e Desenvolvimento do Ensino Fundamental e de Valorização do Magistério (FUNDEF) que foi instituído pela Emenda Constitucional n.º 14, de setembro de 1996, e regulamentado pela Lei n.º 9.424, de 24 de dezembro do mesmo ano, e pelo Decreto nº 2.264, de junho de 1997, o qual posteriormente foi substituído pelo Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação (FUNDEB), criado pela Emenda Constitucional nº 53/2006 e regulamentado pela Lei nº 11.494/2007 e pelo Decreto nº 6.253/2007 constitui, por exemplo, um mecanismo de financiamento, enquanto que, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), criados a partir da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei Federal nº 9.394), aprovada em 20 de dezembro de 1996, são exemplo de mecanismo de referência e orientação.

Dos mecanismos brasileiros de avaliação da educação básica, dois figuram entre os mais importantes: O Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), criado em 2007 pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), calculado pela taxa de rendimento escolar (aprovação) obtida a partir do Censo Escolar realizado anualmente e pelas médias de desempenho da Prova Brasil e do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), provas realizadas por alunos do quinto ano (quarta série) e nono ano (oitava série), a cada dois anos, de Língua Portuguesa (foco na leitura) e Matemática (foco na resolução de problemas); O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), para testar o nível de aprendizado dos alunos que concluíram o ensino médio no Brasil, este, posteriormente, passou a servir como forma de acesso à Universidade principalmente através do Sistema de Seleção

Unificada (SISU) e do Programa Universidade para todos (PROUNI) o que lhe conferiu bastante reconhecimento e adesão. Até o ano de dois mil e dezesseis o ENEM também foi usado para a certificação da conclusão do Ensino Médio, mas as reformas pelas quais esse exame passou em dois mil e dezessete lhe tiraram essa atribuição deixando-a apenas para o Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (ENCCEJA), que também já exercia esse papel.

O Brasil também participa de programas internacionais de avaliação, a exemplo do *Programme for International Student Assessment*, (PISA), uma iniciativa de avaliação comparada, aplicada a estudantes na faixa dos quinze anos de idade. As avaliações do PISA acontecem a cada três anos e abrangem três áreas do conhecimento Linguagem (foco em leitura), Matemática e Ciências, sendo que cada edição do programa, em ciclo, nesta ordem, é dada maior ênfase em uma dessas áreas. O PISA 2009 iniciou um novo ciclo do programa com Linguagem, em 2012, Matemática, em 2015, Ciências. Em 2015 também foram inclusas as áreas de Competência Financeira e Resolução Colaborativa de Problemas.

Atualmente, participam do PISA os trinta e quatro países membros da Organização de Cooperação e de Desenvolvimento Económico (OCDE)[1], e vários países convidados. O Grupo Ibero-americano do PISA foi oficialmente instituído em setembro de 2005, dele fazem parte Argentina, Chile, Colômbia, Espanha, México, Portugal, Uruguai, Panamá, Peru e Costa Rica. O Brasil é o único país sul-americano que participa do PISA desde sua primeira aplicação, tendo iniciado os trabalhos com esse programa em 1998.

Esses mecanismos de avaliação produziram e continuam produzindo importantes informações sobre a educação básica no Brasil que são divulgadas através de relatórios, notas e outros documentos, a exemplo do Relatório Nacional do PISA 2015, que podem ser encontrados no site do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). Compilando alguns desses dados nas tabelas 1, 2 e 3, que apresentaremos a seguir, é possível ter uma ideia da situação atual da educação brasileira e avaliar os efeitos da maior atenção e maior investimento de recursos na melhoria de sua qualidade.

[1] Para saber quais países são os membros da OCDE consulte o quadro no anexo.

Tabela 1: IDEB 2007 – 2015 e projeções para o Brasil

| | Ano | 2007 | 2009 | 2011 | 2013 | 2015 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Séries Iniciais do Ensino Fundamental** | Meta | 3,9 | 4,2 | 4,6 | 4,9 | 5,3 |
| | Observado | 4,2 | 4,6 | 5,0 | 5,2 | 5,5 |
| **Séries Finais do Ensino Fundamental** | Meta | 3,5 | 3,7 | 3,9 | 4,4 | 4,7 |
| | Observado | 3,8 | 4,0 | 4,1 | 4,2 | 4,5 |
| **Ensino Médio** | Meta | 3,4 | 3,5 | 3,7 | 3,9 | 4,3 |
| | Observado | 3,5 | 3,6 | 3,7 | 3,7 | 3,7 |

Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP), dados adaptados.

Na tabela 1, na qual as notas variam de zero a dez, observa-se que as metas são carentes de ambição e audácia, pois, mesmo para os anos iniciais do Ensino Fundamental, onde elas são maiores, sequer exigem o desempenho de sessenta por cento[2], isto é, almejou-se notas menores que seis, já nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino médio a exigência foi ainda menor, inferior a cinquenta por cento, ou seja, pretendeu-se alcançar notas inferiores a cinco. Não obstante a baixa exigência das metas, nos anos evidenciados na tabela, em qualquer dos segmentos educacionais, os resultados observados não chegaram a superar as metas em dez por cento, além disso, nos anos de dois mil e treze e dois mil e quinze, para as séries finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio, as metas não foram alcançadas, evidenciando assim, o baixo rendimento e a lenta melhoria da educação no Brasil bem como a piora dos resultados à medida que se avança do início do Ensino Fundamental para o Ensino Médio. O fraco desempenho em matemática teve considerável influência nos fracos resultados do IDEB tanto devido ao alto índice de reprovação quanto devido aos baixos resultados apurados pela Prova Brasil e pelo SAEB nessa disciplina.

Tabela 2: Notas mínimas, máximas e média nacional matemática Enem 2011 – 2016

| | Ano | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Matemática** | Mínima (0 acertos) | 321,6 | 277,2 | 322,4 | 318,5 | 280,2 | 309,7 |
| | Máxima (45 acertos) | 953,0 | 955,2 | 971,5 | 973,6 | 1008,3 | 991,5 |
| | Média Nacional | 517,0 | 509,0 | 544,4 | 473,5 | 467,9 | 489,5 |

* Notas mínimas e máximas referentes à primeira aplicação do ENEM em cada ano.
Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP), dados adaptados.

---

[2] A comparação com sessenta por cento foi estabelecida devido a adoção desse percentual como aproveitamento mínimo para aprovação por muitas instituições de ensino básico e também superior.

Os resultados expressos na tabela 2 variam segundo a escala de pontuação (régua) da prova de cada ano, sendo a nota mínima correspondente à nota do participante que obteve zero acertos e a nota máxima correspondente à nota do participante que obteve quarenta e cinco acertos (acertou todas) e a média nacional correspondente à média das proficiências dos participantes de cada ano na prova de matemática e suas tecnologias do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Em cada ano, a diferença entre a média nacional e a nota mínima é muito menor que a diferença entre a nota máxima e a média nacional, a primeira diferença vale cerca de cinquenta por cento da segunda, o que deixa a média nacional posicionada próxima do terço inferior da escala de pontuação (régua), além disso, os dados da tabela mostram que o desempenho nos três últimos anos é inferior ao desempenho nos três primeiros anos o que e denota baixo desempenho em todos os anos e uma clara involução no aprendizado de matemática no ensino médio no Brasil.

Tabela 3: Comparativo do desempenho dos alunos do Brasil com o desempenho médio dos alunos dos países membros da OCDE no PISA 2015.

| Pisa 2015 | Desempenho dos alunos do Brasil | Desempenho médio alunos dos países da OCDE | Situação do desempenho dos alunos do Brasil |
|---|---|---|---|
| **Ciências** | 401 pontos | 493 pontos | Estável. Passou de 390 pontos em 2006 para 401 pontos em 2015, o que não representou uma mudança estatisticamente significativa. |
| **Leitura** | 407 pontos | 493 pontos | Estável. Passou de 396 pontos em 2000 para 407 pontos em 2015, o que não representou uma mudança estatisticamente significativa. |
| **Matemática** | 377 pontos | 490 pontos | Instável. Passou de 356 pontos em 2003 para 377 pontos em 2015, um aumento significativo, porém caiu 11 pontos em relação a 2012. |

Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP), dados adaptados.

Novamente, agora num mecanismo internacional de avaliação, o PISA 2015, os resultados do Brasil não estão bons, especialmente em matemática. A tabela 3 mostra que a pontuação média dos alunos brasileiros de quinze anos que cursam a partir da oitava série do ensino fundamental em todas as disciplinas avaliadas foi muito inferior à média das pontuações dos países da OCDE, e em matemática além da diferença de pontuação ser a maior entre as disciplinas avaliadas, ainda houve queda na pontuação no PISA 2015 em relação ao PISA 2012.

As discussões acerca das tabelas 1, 2 e 3 indicam que, mesmo com maior atenção governamental, com mais recursos empregados e com o grande esforço da comunidade educacional brasileira, a qualidade da educação básica do Brasil ainda é baixa e a melhoria, quando ocorre, é muito lenta, especialmente em matemática. Os números apurados pelo IDEB, ENEM e PISA, mostram essa pequena evolução ou, muitas vezes até involução, da qualidade educacional brasileira. Também é perceptível uma piora nos resultados à medida que se avança na educação básica, isto é, do fundamental I, para o fundamental II, para o ensino médio, os resultados pioram (ver tabela 1). Além disso, no PISA, as notas e a posição ocupada pelo Brasil em relação aos outros países participantes são muito ruins, novamente o maior destaque negativo está relacionado à matemática, nela os alunos brasileiros tem seu pior desempenho.

Assegurar recursos para o financiamento educacional, inclusive através de fundos garantidos em lei, não tem sido, por si só, suficiente para melhorar a qualidade e os resultados da educação básica no Brasil, e, mesmo que a gestão desses recursos experimente uma substancial melhora, ainda não será. É preciso melhorar os currículos tornando-os mais flexíveis, mais customizados, talvez menores, e, especialmente, mais lúdicos e mais interessantes[3].

Tratando especificamente de matemática, disciplina objeto de interesse desse estudo, uma ciência historicamente tão rica, vasta e importante, com atributos tão fascinantes e curiosos, mesmo com todas essas qualidades, em considerável porção das práticas pedagógicas, ainda é ensinada de forma fria, isolada, descontextualizada e enfadonha. Este tipo de prática, perversa para o encantamento e o aprendizado, acontece desde o Ensino Fundamental I até o Ensino Médio e torna-se mais intensa a cada nível. No Ensino Médio ela se mostra ainda mais perversa devido a necessidade de o aluno aprender a enorme quantidade de assuntos que são exigidos pelos processos seletivos das universidades e demais instituições de ensino superior. Não é incomum ouvir de um aluno concluinte do Ensino Médio a seguinte frase “Eu

[3] No último período desse parágrafo, o autor desse trabalho está expressando a sua opinião, baseada em sua experiência de mais de vinte anos de docência em matemática na Educação Básica, especialmente no Ensino Médio.

não quero aprender matemática só quero acertar as questões do ENEM ou do vestibular”.

Várias iniciativas estão tentando melhorar o ensino aprendizado da matemática, e também das outras disciplinas da educação básica, e consequentemente garantir os bons resultados nos mecanismos de avaliação da educação brasileira. O Ensino Híbrido, metodologia que lança mão de diversos recursos didáticos aplicados simultaneamente em sala de aula e/ou outros ambientes de aprendizagem e atribui maior personalização ao ensino, a Gameficação, que utiliza jogos educativos, especialmente eletrônicos, como estratégia para melhorar a aprendizagem e as Oficinas de Matemática Experimental, são bons exemplos dessas iniciativas. Eles buscam ampliar a ludicidade, o interesse e a satisfação de todos os entes envolvidos no compartilhamento do conhecimento matemático.

Movido pela ideia testar novas metodologias de ensino da matemática e devido ao fato de eu ter conhecido, a convite de meu orientador professor Nestor, o Projeto Oficinas de Matemática Experimental (POME), iniciado em 2015, inspirado e referenciado pelo livro *This Is MEGA – Mathematics! STORIES AND ACTIVITIES FOR MATHEMATICAL THINKING PROBLEM-SOLVING AND COMMUNICATION* dos autores Nancy Casey e Mike Fellows, fruto de uma parceria entre a Área de Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC) e o Colégio da Polícia Militar Rômulo Galvão, de Ilhéus, projeto coordenado pelo professor Germán Gomero Ferrer, fiz a opção por realizar o trabalho de conclusão do meu curso de mestrado no tema Oficinas de Matemática Experimental.

Exercendo à docência em matemática no Ensino Médio há mais de vinte anos, vendo tantos alunos, mais a cada ano, desmotivados com essa disciplina, muitos deles dizendo que a odeiam, que não a entendem e que não pretendem entender, que ela não tem nem terá serventia em suas vidas, vi, em tais oficinas, potencial para ajudar a reverter esse quadro de desânimo e desolação, passei a acreditar na possibilidade delas em levarem os discentes a perceber e sentir a “verdadeira Matemática”, a que diverte, instiga e encanta de maneira irreversível quem a pratica.

Para reforçar a necessidade de mudança nas práticas pedagógicas tradicionais de ensino da matemática e também para corroborar com a crença, minha e também de outros professores com os quais tenho contato, a exemplo de participantes do POME, que existe uma matemática e uma forma de ensiná-la, mais divertida e que desperta mais curiosidade, trago ao texto um pequeno trecho do livro Almanaque das Curiosidades Matemáticas, de autoria do escritor e matemático inglês Ian Stewart[4].

> Quando eu tinha 14 anos, comecei a fazer um caderno de anotações. Anotações sobre matemática. Antes que você me considere um caso perdido, apresso-me em dizer que não eram notas sobre a matemática escolar. Mas sobre tudo que pudesse encontrar de interessante em relação a matemática que não era ensinada na escola. O que, como descobri, era bastante coisa (...)
> A matemática não se resume ao que você aprendeu na aprendeu na escola. Na verdade, boa parte dela é divertida – especialmente se você não precisa fazer provas ou acertar cálculos. (STEWART, 2008, p.9)

Em consonância com os objetivos do PROFMAT apresento, como Trabalho de Conclusão de Curso, a Oficina de Matemática Experimental (OME) intitulada "Um inglês em Salvador", a qual foi aplicada para alunos do primeiro ano do ensino médio.

A OME "Um Inglês em Salvador", conta a estória de um cidadão inglês que chega em Salvador e quer conhecer, rapidamente, alguns pontos turísticos da cidade. Através da estória, são lançados, sucessivamente, os desafios de determinar caminhos mais curtos que ligam o aeroporto a dois desses pontos turísticos, de encontrar a estratégia que leva a encontrar tais caminhos, de criar códigos com poucos caracteres para passar sugestões desses caminhos para o inglês e de encontrar as semelhanças e diferenças entre os códigos que indicam caminhos mais curtos distintos. Os elementos da estória, tais como, o mapa, os pontos turísticos, as ruas e avenidas imaginárias e o veículo anfíbio, mexem com o imaginário dos alunos e atribuem a ela um caráter motivacional. Por se tratar de um problema de caminhos de duas possibilidades, ela está inserida na Análise Combinatória.

Este trabalho está dividido em seis capítulos, que tratam, respectivamente: Desta Introdução; Das considerações sobre Oficinas de Matemática Experimental (OMEs); dos fundamentos matemáticos por trás da OME objeto deste estudo; Da apresentação e detalhamento da OME “Um inglês em Salvador”; dos detalhes da aplicação e da apresentação e discussão dos resultados desta oficina; Da conclusão.

[4] Ian Stewart é professor emérito da universidade de Warwick, Inglaterra, é conhecido mundialmente por tornar a matemática mais popular, em publicações como *Scientific Americam, Nature* e *New Scientist*. Recebeu vários prêmios, entre eles, a medalha Michael Faraday, da Royal Society (1995).

# 2 OFICINAS DE MATEMÁTICA EXPERIMENTAL

Para melhor compreender o conceito de Oficinas de Matemática Experimental (OMEs) é importante compreender o que são Oficinas Pedagógicas, estas, segundo (OMISTE; LÓPEZ; RAMÍREZ, 2000), são ambientes de reflexão e ação nos quais se pretende superar a separação existente entre a teoria e a prática, o conhecimento e o trabalho, a educação e a vida. Portanto as Oficinas Pedagógicas podem ser caracterizadas como espaços de produção e construção de conhecimento que aliam teoria e prática, promovem e exercitam a criatividade e a solidariedade, estimulam o compartilhamento e a aplicação do conhecimento na transformação, para melhor, da realidade. A citação que segue reforça esse entendimento.

> As oficinas pedagógicas constituem uma estratégia metodológica baseada na articulação teoria-prática, que utiliza depoimentos e histórias de vida, emprega diferentes linguagens, promove o diálogo entre diversos saberes e conhecimentos, usa técnicas participativas e favorece a construção coletiva (CANDAU, 1995, p.117-118).

Nessas oficinas, o aprendizado se dá através de vivências que têm como centro o aprendiz, diferente do que do que ainda ocorre na maioria das salas de aula brasileiras em que o aprendizado é centrado no mestre, no professor. O aluno aprende fazendo, mas não apenas. Nessa prática pedagógica ele está a todo tempo pensando, agindo, sentindo e refletindo, isto é, exercitando boa parte de sua estrutura mental e por vezes também física, para ele próprio construir seu saber, seu conhecimento. O aluno ser e se reconhecer como elemento ativo da construção do conhecimento amplia sua responsabilidade e compromisso, aumenta e consolida suas habilidades e competências acerca dos temas estudados. Gonzáles reforça essa concepção.

> Refiro-me à oficina como tempo-espaço para vivência, a reflexão, a conceitualização; como síntese do pensar, sentir e agir. Como “o” lugar para a participação, a aprendizagem e a sistematização dos conhecimentos. (...)
>
> Gosto da expressão que explica a oficina como lugar de manufatura e mentefatura. A partir das brincadeiras, da troca de experiências entre os participantes, confluem o pensamento, o sentimento e a ação. Dessa forma, a oficina pedagógica constitui o lugar do vínculo, da participação, da comunicação, da produção social de objetos, acontecimentos e conhecimentos. (GONZÁLEZ 1987, apud CANDAU, 1995, p. 117)

Embora o professor não seja o centro do aprendizado isso não significa que ele terá menos trabalho, ou que ficará à margem do processo, a realização de uma Oficina Pedagógica requer rigoroso planejamento, o que demanda muito tempo e trabalho e ainda exige muita habilidade interpessoal e autocontrole na condução do processo. Por outro lado, pode ser muito gratificante, animador e prazeroso coordenar alunos motivados por essa prática pedagógica, construtores, dentro de suas realidades, de suas próprias verdades, de seus próprios saberes, sobretudo em matemática, disciplina em que a prática tradicional tem deixado muitos alunos à margem do aprendizado.

> Se, na verdade, o sonho que nos anima é democrático e solidário, não é falando aos outros, de cima para baixo, sobretudo, como se fôssemos os portadores da verdade a ser transmitida aos demais, que aprendemos a escutar, mas é escutando que apreendemos a falar com eles (FREIRE, 1998, p.127).

As Oficinas Pedagógicas, num aspecto amplo, são inspiradas e referenciadas principalmente pelo pensamento de Paulo Freire, por isso, para fechar essa caracterização de sobre elas, cito mais uma vez esse grande educador brasileiro.

> Saber ensinar não é transferir conhecimento, mas criar possibilidades para sua própria produção ou a sua construção. Quando entro em uma sala de aula devo estar sendo um ser aberto a indagações, à curiosidade, às perguntas dos alunos, a suas inibições; um ser crítico e inquiridor, inquieto em face da tarefa que tenho — a de ensinar e não a de transferir conhecimento (FREIRE, 1996, p.47).

## 2.1 O que são Oficinas de Matemática Experimental

Segundo Pereira (2017) e Araújo (2017), as OMEs são baseadas na crença de que para ter sucesso no aprendizado da matemática, o estudante, além de possuir postura e curiosidade, habilidade em trabalhar individualmente e coletivamente, em elaborar e testar hipóteses, em fazer inferências indutivas e dedutivas, em perceber o espaço e o tempo, em avaliar possibilidades e em estabelecer analogias e comparações, deve estar altamente motivado. Para essas integrantes do POME, tais comportamentos e habilidades de cunho cognitivo, essenciais para qualquer trabalho criativo, especialmente o científico, sustentam a aquisição e o uso do raciocínio matemático empregado na resolução de problemas, porém, complementarmente a eles, é preciso despertar o interesse e o gosto do estudante pela matemática. Para isso, é preciso apresentar aos alunos, a “verdadeira matemática”, a atividade que o matemático profissional realiza, mostrando-a de modo atraente o quanto ela é interessante. Sendo assim, o professor precisa se desvencilhar do ensino tradicional muitas vezes baseado em decorar fórmulas, executar operações aritméticas, entre outras atividades rotineiras, precisa buscar novas práticas. Mas será que estimular alunos que não gostam de matemática a “fazer matemática de verdade”, a resolver problemas difíceis, não vai afasta-los ainda mais do conhecimento matemático? Elas sustentam que é possível, através de problemas realmente cativantes e desafiantes, atrair a atenção de mentes curiosas e inquisitivas, características próprias das mentes das crianças, acreditam que o desafio vai movê-las na direção do conhecimento.

Uma das questões centrais no processo de ensino aprendizagem é a de como manter o espírito inquiridor do aluno à medida que ele fica mais velho. A postura de pouca ou nenhuma curiosidade e falta de interesse em inquerir, é, por exemplo, muito observada no Ensino Médio. É preciso buscar alternativas, testar novas práticas para que o estudante se mantenha curioso e inquiridor ao longo da vida[5]. Em relatos dos trabalhos de Silva (2015), Pereira (2017), Araújo (2017) e Souza (2017), encontram-se evidências de que as Oficinas de Matemática Experimental conseguem fomentar e manter aceso o espirito inquiridor, condição essencial para o aprendizado das ciências, especialmente da matemática.

Para ampliar o entendimento sobre Oficinas de Matemática Experimental e seu potencial em tornar as aulas de matemática mais atraentes, apresento, na próxima citação, os esclarecimentos do professor Germán Gomero, um inconformado com a forma tradicional que a matemática é ensinada até hoje, e que defende a ideia de implementar as Oficinas de Matemática Experimental como metodologia de Ensino.

> Uma oficina de matemática experimental propicia um ambiente inovador de ensino e aprendizagem de matemática cujos mecanismos se sustentam em dois princípios fundamentais; o de que as maneiras mais eficientes de aprender envolvem a participação ativa do aluno (aprender fazendo), e o de que o papel do professor é o de orientar o aluno no processo de aprendizagem (professor mediador). Nestas oficinas os alunos são confrontados com situações ou problemas matemáticos fáceis de compreender e de interesse suficiente para capturar sua atenção, mas muitas vezes difíceis de resolver. O aluno, sem ser ciente desta dificuldade, se sente impelido a procurar por uma solução; é nessa busca que acontecem os processos de aprendizagem e de desenvolvimento das habilidades cognitivas. (GOMERO; SILVA, em elaboração).

[5] Observação do autor baseada em sua experiência como professor de matemática do ensino médio.

Segundo (TEIXEIRA, 1995, p.23) para uma atividade ser considerada lúdica é necessária a presença de dois elementos: O prazer, capacidade de absorver do indivíduo de forma intensa e total que cria entusiasmo e envolvimento emocional, adicionando forte teor motivacional capaz de gerar um estado de vibração e euforia; O esforço espontâneo, que ocorre em virtude da atmosfera que é gerada a qual canaliza as energias no sentido de um esforço total, involuntário e voluntário, para conquistar o objetivo. Além disso, atividades lúdicas são excitantes, mobilizam esquemas mentais, estimulam o pensamento e integram as dimensões afetiva motora e cognitiva da personalidade. Diante do supracitado, podemos concluir que a ludicidade é um elemento presente numa Oficina de Matemática Experimental, nela, o estudante faz “matemática de verdade” brincando, isto é, ele aprende sem perceber aquilo que, no ensino tradicional da matemática, o incomodava e o desestimulava. Pereira (2017) corrobora o que foi dito no período anterior quando afirma que nas OMEs, o lúdico está na criatividade, na construção coletiva e na tomada de decisões, ele contribui para que as atividades ocorram de forma mais prazerosa e menos cansativa, tornando aulas de matemática mais atrativas e mais produtivas, ampliando o aprendizado.

## 2.2 Objetivos Gerais das Oficinas de Matemática Experimental

Os objetivos gerais das OMEs estão divididos em matemáticos e não matemáticos estando os objetivos não matemáticos subdivididos em heurísticos[6] e não heurísticos. Cabe lembrar que, heurístico remete à Heurística, um conjunto de regras e métodos que conduzem à descoberta, à invenção e à resolução de problemas.

Os objetivos matemáticos de uma OME são estabelecidos após a definição da matemática a ser usada como pano de fundo dela. No caso da OME proposta neste trabalho, adianto que o pano de fundo é a Análise Combinatória, assim, os objetivos matemáticos são relacionados a este segmento da matemática. Entre tais objetivos, podemos elencar: Que os alunos consigam perceber que se pode chegar a solução de um problema por mais de uma forma e que existem formas diretas ou indiretas de

[6] Relativo Heurística, um conjunto de regras e métodos que conduzem à descoberta, à invenção e à resolução de problemas.

resolver um problema; que os alunos percebam a necessidade de demonstrações.

Entre os objetivos não matemáticos heurísticos podemos elencar: Que os alunos consigam desenvolver familiaridade com o método experimental em matemática, estimulando-os a formular e testar hipóteses e que eles consigam formular e seguir instruções de ação; Induzir o aluno, após imergi-lo nos processos de abstração e argumentação, a estabelecer analogias entre situações novas e situações familiares; Desenvolver no aluno a capacidade de introduzir a ideia de simplificação como estratégia de resolução de problemas; Reforçar no aluno o hábito de levantar hipóteses; Estimular o aluno a perceber que para invalidar uma hipótese basta um contraexemplo e que a falta de um contraexemplo não valida a hipótese; Desenvolver a habilidade de identificar padrões. Enquanto que um objetivo não matemático não heurístico é estimular o aluno a trabalhar em equipe.

Pelo fato de uma Oficina de Matemática Experimental ser sempre uma obra inacabada, a partir das experiências advindas das aplicações podem surgir novos objetivos os quais não foram previstos na gestação da oficina, são os denominados objetivos emergentes. Caso surja algum objetivo emergente dessa OME, trataremos dele no capítulo 5.

## 2.3 Recomendações gerais ao aplicar uma OME

As recomendações têm por finalidade principal socializar o conhecimento do método construído para ser utilizado na aplicação das OMEs. Elas têm a intenção de facilitar a aquisição e manutenção de práticas destinadas a melhorar o desempenho do professor e dos demais aplicadores das oficinas. É importante destacar que para tais recomendações adotou-se, com pouquíssimas modificações, o conjunto de recomendações do POME, projeto que aplica Oficinas de Matemática Experimental, com sucesso, há mais de dois anos, e que tem se preocupado, a cada uma das diversas aplicações, em avaliar e aperfeiçoar o seu método de aplicação. Em outras palavras, a oficina relativa a esse estudo adota o *know how* POME. Tais recomendações podem ser encontradas nas dissertações de Pereira (2017) e Araújo (2017), mas, para tornarmos o texto autocontido, elas serão citadas e explicadas a seguir.

### 2.3.1 Evite dar explicações longas

Durante uma OME, convém evitar dar explicações longas e definitivas à turma, a pequenos grupos ou a alunos individualmente. Os objetivos da oficina não devem ser explicitados nem no início, nem durante a execução da atividade. Estes objetivos devem ser atingidos como resultado das discussões entre os grupos, mas os alunos não precisam estar cientes deles.

Durante a execução das oficinas é recomendado não estabelecer as regras para a realização das atividades nem para os procedimentos técnicos que devem ser seguidos. Em geral, os alunos começam a fazer perguntas sobre o que pode ou não pode ser feito. Se as perguntas surgirem durante as fases de resolução de problemas, é recomendável socializá-las com o grupo ao qual o aluno pertence; ou, se os membros do grupo estiverem muito concentrados com o problema, o melhor é conversar individualmente com quem fez a pergunta.

Em uma OME não existe CERTO ou ERRADO, nem PODE ou NÃO PODE. Todas as questões, técnicas ou normativas, devem ser discutidas na turma, em pequenos grupos, ou individualmente dependendo da situação, as normas devem ser decididas com a turma. Se surgir uma questão normativa que já foi discutida com a turma, se recomenda procurar a ajuda de algum aluno do grupo para que lembre qual foi a decisão da turma. Se surgir uma questão técnica que já foi discutida com outro aluno ou grupo, uma boa ideia é orientar quem fez a pergunta consultar aquele aluno ou grupo que já tirou essa dúvida. Sempre que possível, o professor deve participar também dessa troca de informação.

Como as oficinas são espaços dedicados a promover a descoberta, nem as estratégias de resolução de problemas, nem o tipo de respostas ou soluções que os alunos devem obter, devem ser explicadas antes do início das atividades. Ao perceber que um aluno cometeu ou está cometendo um erro, ou ao identificar um aluno com dificuldades na resolução de um problema, uma sugestão é sentar na mesa do aluno e discutir o problema com ele. Os outros alunos da mesa podem participar da discussão, ou podem continuar trabalhando no problema. As respostas e soluções devem ser discutidas com os alunos, individualmente, em grupos pequenos, ou com a turma toda; dependendo da atividade.

Ao perceber que um aluno está com dificuldades para resolver um problema, deve-se discutir estratégias e não fornecer a solução do mesmo. Se um aluno está cometendo um erro no procedimento da solução, devemos ajudá-lo a perceber o erro e a descobrir como consertá-lo. Se necessário, recomendamos que o material seja fornecido novamente para que o aluno comece de novo. Durante uma discussão com um aluno, ou com um grupo deles, podemos comentar sobre os objetivos da atividade ou sobre estratégias de resolução de problemas, e até sobre o tipo de respostas que eles devem obter; mas sempre de modo casual. Como já mencionado acima, o que não é recomendável é dar explicações longas e definitivas.

No final da atividade é importante conversar com a turma sobre o que foi realizado, induzindo os alunos a expor o que aprenderam com a atividade. Como parte desta discussão final, deve-se comentar informalmente sobre os objetivos matemáticos e não-matemáticos da atividade.

### 2.3.2 Mantenha uma "bagunça produtiva"

Em OMEs percebe-se uma grande participação por parte dos alunos. Estes demonstram tanto interesse e interagem de modo tão intenso que às vezes a sala de aula parece uma confusão. Como recomendação, é sugerido ao professor que mantenha um nível de desordem bom, produtivo, onde a desorganização não atrapalhe a criatividade e o desenvolvimento da oficina. O professor deve estar atento para que o aluno não confunda a oficina com o intervalo do recreio. Uma vez que ao não levar a sério a atividade, o aluno não conseguiria atingir o objetivo proposto pela oficina.

Garanta que todos os alunos estejam sempre realizando alguma atividade. Em uma OME, atividades adicionais desenhadas para este fim são chamadas de "Cartas na manga". Para aqueles alunos que costumam concluir rapidamente as tarefas pedidas recomenda-se ter sempre atividades mais desafiadoras que as obrigatórias.

Recomenda-se também ter sempre atividades mais simples que as obrigatórias para o aluno que apresentar dificuldades na realização das tarefas pedidas; estas atividades devem ser elaboradas para ajudar o aluno a superar as dificuldades encontradas durante a realização da tarefa.

### 2.3.3 Mantenha uma boa logística

A disposição do ambiente na sala e o material a ser utilizado devem ser providenciados com antecedência. Para o bom desempenho dos alunos na oficina, é importante que a turma tenha no máximo 25 alunos, podendo ser dividida em grupos de 2 a 5 alunos a depender da atividade que será realizada. Recomenda-se ter sempre material excedente para todas as tarefas a serem realizadas. Uma boa estratégia é recolher e armazenar organizadamente o material trabalhado pelos alunos, classificando o material por atividade. OMEs não são produtos prontos: elas vão melhorando a cada aplicação com base no material trabalhado pelos alunos.

Durante a atividade é importante ter um número mínimo de 3 aplicadores, possibilitando uma maior participação dos alunos nas mesas e incentivando as discussões entre eles, antes de socializar os resultados obtidos com a turma, evitando assim que os mesmos se dispersem.

# 3 A OME “Um Inglês em Salvador”

Essa oficina “Um Inglês em Salvador”, trabalha de maneira lúdica o “problema dos caminhos mais curtos”, um “problema de duas possibilidades”. Ela foi elaborada para aplicação em turmas do primeiro ano do Ensino Médio. Esse segmento da Educação Básica foi escolhido para diferenciar do POME, que aplica suas oficinas em turmas do Ensino Fundamental II, até mesmo para efetuar posteriormente um estudo comparativo das aplicações nos diferentes segmentos, e também por conta deste autor exercer docência no referido segmento. Optou-se pela aplicação na primeira série porque constatou-se a importância de os participantes ainda não terem assistido aulas de análise combinatória, que, segundo os currículos atuais, só tem aulas ministradas no segundo ano. Como nas oficinas a construção do conhecimento é feita pelos próprios alunos através das vivências e discussões, não ter assimilado o conteúdo no todo ou em parte é pré-requisito para eles estarem com a mente mais aberta para mergulharem mais fundo na construção desses conhecimentos.

Entre seus objetivos específicos possibilitar que os alunos: consigam distinguir nos problemas relacionados a escolhas os que a ordem de escolha interfere na solução do problema dos que a ordem de escolha não interfere; percebam que existem problemas que podem ser resolvidos de forma geométrica, algébrica ou algébrico-geométrica e que determinadas formas de resolver problemas ficam complicadas quando estão envolvidos grandes quantidades de elementos ou se conseguem ou não continuar eficientes nas generalizações.

## 3.1 Aprender “brincando”

Acreditando que o lúdico tem maior eficiência para atrair a atenção e o interesse dos alunos, principalmente dos que ficam normalmente a margem do processo de aprendizado, e, para afastar preconceitos e pré-julgamentos relativos ao aprendizado matemática, a oficina “Um inglês em Salvador” proporciona, de maneira coletiva e vivencial, através do brincar de turista em Salvador, o aprendizado dos conceitos relacionados ao tema, “problemas de duas possibilidades”, da análise combinatória, além de colaborar para desconstruir a ideia de que aprender matemática e difícil e chato. Tal tema foi escolhido porque ele possibilita com muita facilidade a contextualização em diversas situações do cotidiano dos alunos.

Em meio a geografia e história de salvador, acessadas através dos pontos turísticos da primeira capital do Brasil, inicia-se, de maneira indireta, o exercício da matemática com a localização de pontos no plano. Com o desenrolar da estória, guiados pelas instruções apropriadamente elaboradas, provocados a conjecturar pelas propostas “intrigantes” proferidas nos momentos de estimulo a discussão e desafiados pela vontade de chegar a uma resposta factível aos questionamentos da OME, os alunos entram em contato algumas noções de cunho matemático tais como, noções elementares associadas a Análise Combinatória, a noção de minimalidade como ferramenta de avaliação da qualidade de uma solução, e com processos de abstração e de argumentação. Além disso, em todo o decorrer da oficina, nas duas fases, através da dinâmica própria das oficinas pedagógicas, são vivenciadas situações heurísticas e não matemáticas com potencial para desenvolver nos participantes importantes habilidades sociais, cognitivas e emocionais, situações tais como, exposição a desafio, estimulo a formulação e testagem de hipóteses introduzindo assim o método experimental, formulação de instruções e uso delas nas ações, formulação de perguntas e discussão de possíveis respostas e trabalho em equipe.

## 3.2 Detalhes logísticos e operacionais

Essa OME foi elaborada, a princípio para ser aplicada em uma só fase, em dois horários de aula, isto é, em uma hora e quarenta minutos, porém, após a primeira aplicação e conversa sobre o assunto com o Professor Nestor, orientador deste trabalho e membro do POME, baseado em sua experiência de aplicação de OMEs, aconselhou que ela fosse dividida em duas aplicações, o que foi prontamente acatado. Portanto, a partir da segunda aplicação e até o final deste trabalho, a oficina é aplicada em duas fases com previsão de uma hora e quarenta minutos para cada fase. Para a aplicação, seja na primeira ou na segunda fase, a turma é dividida em grupos, o ideal é que os grupos tenham de três a cinco componentes e que as turmas tenham, no máximo, vinte e cinco alunos, condições que nem sempre foram possíveis, principalmente a condição referente ao número de alunos por turma. Adotou-se a ideia de, sempre que possível, repetir na segunda fase de aplicação os mesmos grupos da primeira fase. Foi estipulado como número de três aplicadores, professores e monitores, como o ideal para aplicação, e que todos tivessem formação concluída ou em andamento e matemática, ou experiência na área, porém houve aplicação com dois aplicadores. Quanto aos materiais reutilizáveis para oficina, foram adquiridas canetas coloridas em quantidade suficiente para oferecer, pelo menos, quatro canetas de cores diferentes para cada mesa, porém, também depois da primeira aplicação, devido a observação que muitos alunos usaram marca textos deles próprios para destacar no mapa os caminhos, foi adquirida quantidade de tais marcadores suficiente para oferecer, pelo menos, quatro para cada mesa.

## 3.3 Atividades

Na primeira fase de aplicação, as atividades se iniciam com o professor aplicador contando a estória “um inglês em Salvador” e pedindo aos alunos para encontrarem e marcarem no mapa a maior quantidade que conseguirem de caminhos que ligam o Aeroporto ao Farol da Barra, mínimo de cinco caminhos, não importando a distância percorrida, dentro das regras. Até esse momento a única regra é que só se pode andar pelas ruas e avenidas fictícias marcadas no mapa para este fim, sendo que, em cada “viagem”, não se permitia percorrer um mesmo trecho de tais ruas ou avenidas mais de uma vez. Após cada mesa, em seu tempo, terminar a tarefa, são estimuladas na mesa as discussões motivadas pelas perguntas:

(a) Dentre os caminhos encontrados existem diferenças entre as distâncias percorridas?
(b) O caminho mais curto que cada mesa encontrou é o caminho mais curto possível?
(c) Qual estratégia nos leva a encontrar caminhos mais curtos?

A tarefa da primeira fase é considerada cumprida após cada grupo encontrar e escrever, no formulário próprio para este fim, a resposta para a pergunta C. Caso alguma mesa cumpra o requerido na atividade muito rápido, para que não aconteça desmobilização do grupo enquanto outros grupos ainda estão em atividade, é proposto para eles encontrarem e marcarem no mapa a maior quantidade que conseguirem de caminhos que ligam o Parque de Pituaçu ao Farol da Barra, mínimo de cinco caminhos. Por fim os alunos de cada grupo, após entregarem o formulário com a resposta da pergunta (C), são estimulados pensar sobre a existência de fundamento matemático por trás da estratégia que encontra os caminhos mais curtos.

Na segunda fase de aplicação, as atividades se iniciam com o professor aplicador pedindo aos alunos para encontrarem e marcarem no mapa a maior quantidade que conseguirem de caminhos mais curtos que ligam o Aeroporto ao Parque de Pituaçu, mínimo de cinco caminhos, obedecendo às regras, marcando-os na folha apropriada para tal. Após cada mesa, em seu tempo, terminar a tarefa, é pedido a cada grupo que selecione cinco dos caminhos mais curtos, entre todos os encontrados pelo grupo, e marcarem numa folha, única em cada grupo, apropriada para este fim. Após cada mesa terminar, é contada para os componentes da mesa o complemento da estória “Um inglês em Salvador” e pedido a cada grupo para transformar os cinco caminhos mais curtos selecionados pela mesa em códigos de texto em que o número de caracteres dos cinco códigos seja igual ou inferior a quarenta. Daí, após cada mesa terminar, são estimuladas na mesa as discussões motivadas pelas perguntas:

(a) Existe uma quantidade máxima de caminhos mais curtos?
(b) Podemos encontrar essa quantidade máxima de caminhos mais curtos um a um marcando no mapa?
(c) Podemos encontrar essa quantidade máxima de caminhos mais curtos através de seus respectivos códigos?
(d) O que tem de diferente e de semelhante nos códigos de texto de caminhos mais curtos distintos?

Então, é pedido para cada grupo, mesa, encontrar e escrever num formulário próprio para tal a resposta da pergunta (d). Por fim, após entregarem o formulário com a resposta da pergunta (d), são estimulados através de dicas adequadas, a encontrar o princípio matemático por trás dessa situação e encontrar outras situações da vida real que possam ser resolvidas pelo princípio encontrado.

Os guias a aplicação da oficina com modelos de formulários, mapas e demais informações, estão no apêndice dessa dissertação. As justificativas relativas às mudanças de formato ou de materiais para aplicação da mesma constam no capítulo cinco destinado às discussões.

## 3.4 Critérios de avaliação

Como esse trabalho propõe testar a capacidade das OMEs em tornar as aulas mais participativas e assim melhorar o aprendizado da análise combinatória, em particular dos problemas de duas possibilidades, adotar-se-á como principais objetos da avaliação a mensuração do “Envolvimento” e do “Êxito”.

Entende-se por envolvimento a medida do interesse, concentração e empenho na execução das atividades propostas pela oficina. Para facilitar essa avaliação confeccionou-se a tabela abaixo.

Tabela 4: Critérios de avaliação "Um inglês em Salvador" (envolvimento).

| Fase | Características da envolvimentoo dos alunos de cada turma nas atividades propostas pela OME | Envolvimento |
|---|---|---|
| 1ª e 2ª | inferior a 30% dos alunos da turma envolvidos na realização das atividades propostas pela oficina no periodo da aplicação. | Ruim |
| | De 30% até inferiror 50% dos alunos da turma envolvidos na realização das atividades propostas pela oficina no periodo da aplicação | Regular |
| | De 50% até inferior a 75% dos alunos da turma envolvidos na realização das atividades propostas pela oficina no periodo da aplicação | Bom |
| | Dde 75% até inferior a 90% dos alunos da turma envolvidos na realização das atividades propostas pela oficina no periodo da aplicação | Ótimo |
| | Maior ou igula de 90% dos alunos da turma envolvidos na realização das atividades propostas pela oficina no periodo da aplicação | Excelente |

Fonte: O autor do trabalho.

Os critérios e faixas dessa tabela orientam a avaliação de envolvimento de todas as fases da oficina. O envolvimento médio de uma turma é dado pela média aritmética dos pontos médios dos intervalos percentuais correspondentes ao envolvimento de cada grupo (mesa) que compõe a turma. O envolvimento médio de uma escola é dado pela média aritmética dos pontos médios dos intervalos percentuais correspondentes ao envolvimento de cada turma que compõe a escola.

Entende-se êxito como sendo o percentual de cumprimento das atividades propostas pela oficina calculado através das respostas expressas no formulário 1 (1ª fase) e no formulário 2 (2ª fase). Informações contidas nos rascunhos podem apoiar essa avaliação. Para facilitar essa avaliação confeccionou-se a tabela abaixo.

Tabela 5: Critérios de avaliação "Um inglês em Salvador" (êxito).

| Fase | Características da resposta de cada grupo no formulário | Percentual de êxito |
|---|---|---|
| 1ª | Não comtempla direção nem sentido nem número de trechos (lados de cada quadra) que caracterizam os caminhos mais curtos. | 0% |
| | Contempla direção e/ou sentido mas não contempla o número de trechos que caracterizam os caminhos mais curtos, ou contempla o número de trechos que caracterizam os caminhos mais curtos mas não contemplam direção e/ou sentido para percorrer tais caminhos. | 50% |
| | Contempla direção, sentido e número de trechos que caracterizam os caminhos mais curtos. | 100% |
| 2ª | Não comtempla diferença nem semelhança entre os códigos de texto dos caminhos mais curtos distintos. | 0% |
| | Contempla apenas a diferença ou apenas a semelhança entre os códigos de texto dos caminhos mais curtos distintos. | 50% |
| | Contempla a diferença e a semelhança entre os códigos de texto dos caminhos mais curtos distintos. | 100% |
| **Obs.: O percentual de êxito da turma é a média aritmética dos percentuais de êxito dos grupos que a compõe.** | | |

Fonte: O autor do trabalho.

Os critérios e faixas dessa tabela orientam a avaliação de envolvimento de todas as fases da oficina. O “êxito médio” de uma turma é dado pela média aritmética dos percentuais correspondentes ao êxito de cada grupo (mesa) que compõe a turma. O êxito médio de uma escola é dado pela média aritmética percentuais correspondentes ao êxito de cada turma que compõe a escola.

Fica como sugestão, para possível utilização em outras oficinas de matemática experimental, o método de avaliação descrito acima baseado nos critérios de envolvimento e êxito e estruturado nas tabelas 4 e 5, tal utilização poderá ocorrer integralmente ou com algumas adaptações.

# 4 A MATEMÁTICA POR TRÁS DA OME

A Oficina de Matemática Experimental objeto deste estudo propõe que os alunos encontrem caminhos mais curtos que liguem dois pontos do mapa de Salvador transitando apenas sobre uma malha quadrangular formada pelas avenidas (linhas horizontais) e ruas (linhas verticais), assim, como foi afirmado anteriormente, ela está relacionada ao problema de duas possibilidades da análise combinatória[7]. Faz-se necessário então conhecer bem a matemática por trás dela, a Análise Combinatória ou simplesmente Combinatória. Neste capítulo trataremos somente dos temas da combinatória relacionados diretamente à resolução do problema proposto por essa OME. Esse referido ramo da matemática está presente nas dissertações de Silva (2015), Pereira (2017), Araújo (2017) e Souza (2017), no âmbito do PROFMAT, as quais também usam a metodologia da Matemática Experimental. É possível acessar os demais conceitos da Análise combinatória, inclusive os que são pré-requisitos para os que serão aqui apresentados, nesses quatro trabalhos supracitados, especialmente no último deles. As explicações matemáticas desenvolvidas nesse capítulo não são destinadas nem adequadas aos alunos de ensino médio aos quais recomendamos uma abordagem mais intuitiva.

## 4.1 Definição

Segundo Morgado et al (1991), a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas, frequentemente relativos a dois tipos de problemas: Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições; contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem a certas condições dadas. Esta parte da matemática dispõe de um conjunto de técnicas gerais para enfrentar determinados tipos de problemas, tais como, Arranjos, Combinações e Permutações. Além das técnicas gerais, os "números para contagem", ou, "princípios de contagem", da Análise

[7] Para entender melhor a relação entre a OME objeto desse estudo e a análise combinatória, em especial aos problemas de duas possibilidades, consulte o mapa e as demais instruções nos guias de aplicação da OME disponíveis no apêndice.

Combinatória, que são certamente mais simples e de uso mais amplo, resolvem grande quantidade de problemas combinatórios além de ter grande aplicabilidade na resolução de problemas de probabilidades. Por isso, principalmente em um primeiro curso de Análise Combinatória, deve-se dar bastante atenção a esses “números de contagem”, pois, a limitação do ensino de Combinatória ao emprego dos conceitos gerais em situações padronizadas transformá-la-á em um mero jogo complicado de fórmulas. Um problema de Análise Combinatória, mesmo tendo um enunciado simples, exige quase sempre grande engenhosidade e compreensão. É justamente isso que a torna tão interessante, ela exige um alto grau de criatividade, assim, torna seus praticantes mais criativos, mais versáteis e com melhores performances na Matemática[8].

A partir de informações extraídas de Morgado et al (1991), foi feito e disponibilizado no apêndice, um quadro com um breve histórico em formato de linha de tempo com importantes episódios da história da Matemática relacionados a análise combinatória.

## 4.2 Conceitos básicos

Nesta seção serão abordados os conceitos relacionados aos princípios de contagem. Tais conceitos tem como referência o trabalho de Souza (2017). Nelas serão abordados os conceitos de Princípio Fundamental de Contagem (PFC) ou princípio multiplicativo, de Fatorial e de permutações com elementos nem todos distintos. Também nessa seção enunciaremos o princípio aditivo.

### 4.2.1 Princípio fundamental de contagem (PFC)

Teorema 1 – Princípio Fundamental de Contagem

Se $A$ e $B$ são dois conjuntos finitos e não vazios, então $\#(AXB) = \#(A).\#(B)$.

Em Linguagem menos formal, o Teorema do PFC pode ser assim enunciado:

[8] Neste último período do parágrafo, opinião do autor, baseada em sua experiência de mais de vinte anos de docência em matemática do Ensino Médio, em todos os quais lecionou e ainda leciona o conteúdo Análise Combinatória.

Sendo $A$ e $B$ dois conjuntos finitos, contar as possibilidades de escolher um elemento de $A$ e um elemento de $B$ é equivalente a contar quantos são os elementos de $AXB$. Para obter uma demonstração formal deste Teorema consulte a dissertação de Souza (2017).

### 4.2.2 Fatorial de um número natural

Do conceito de permutações simples de Souza (2017) temos que:

$P_1 = 1$
$P_2 = 2 \,.\, P_1 = 2 \,.\, 1$
$P_3 = 3 \,.\, P_2 = 3 \,.\, 2 \,.\, 1$
$\vdots$
$P_8 = 8 \,.\, P_7 = 8.7.6.5.4.3 \,.\, 2 \,.\, 1$
$\vdots$
$P_n = n \,.\, P_{n-1} = n(n-1)(n-2) \; \ldots \; .3 \,.\, 2 \,.\, 1$

Denomina-se fatorial de $n$ o produto $n(n-1)(n-2) \; \ldots \; .3 \,.\, 2 \,.\, 1$ que é denotado por $n!$. Segue daí que $P_n = n!,\ n \geq 1$.

Faz-se necessário definir 0!, visto que, adotamos a convenção $0 \in \mathbb{N}$. Assim adota-se $P_0 = 0! = 1$, o que é coerente, pois, para $n = 1$, pela recorrência que define o fatorial, tem-se:

$$P_n = n.P_{n-1} \Rightarrow P_1 = 1.P_0 \Rightarrow 1 = P_0 \Rightarrow P_0 = 1 \Rightarrow 0! = 1$$

### 4.2.3 Permutação de elementos nem todos distintos

Esta subseção é referenciada por (MORGADO et al., 1991), e os conceitos relacionados à permutação simples, $P_n$, e à combinação simples, $C_n^p$, necessários ao entendimento dela, podem ser encontrados em Souza (2017).

Para melhor entender a da fórmula de permutação de elementos nem todos distintos observe o exemplo comentado:

Quantos são os anagramas da palavra “BARBARA”?

É certo que o número de anagramas não é $P_7 = 7! = 5040$, esse resultado seria encontrado se a referida palavra não possuísse letras repetidas, por exemplo, se a palavra fosse “indulto”. Por ter letras repetidas o resultado será um número menor que esse. Mostraremos a seguir dois raciocínios diferentes para a resolução do problema:

(a) Para formar um anagrama da palavra “BARBARA” tem-se que arrumar 3 letras A, 2 letras B e 2 letras R em 7 lugares (3+2+2), o número de modos de escolher os lugares onde vão ser colocados a letra A é $C_7^3$ após, o número de modos de escolher os lugares onde vão ser colocados a letra B é $C_4^2$, após, por fim, tem-se um único modo de escolher os lugares para as letras R. por esse raciocínio temos que:

$$C_7^3 . C_4^2 . 1 = 35.6.1 = 210.$$

Generalizando, temos para $\alpha + \beta + \cdots + k + \lambda = n$

$$C_{n-\alpha}^{\alpha} . C_{n-\alpha-\beta}^{\beta} . \ \cdots \ . C_{n-\alpha-\beta-\cdots-k}^{\lambda}$$

$$= \frac{n!}{\alpha! \, (n-\alpha)!} \ \frac{(n-\alpha)!}{\beta! \, (n-\alpha-\beta)!} \ \cdots \frac{(n-\alpha-\beta- \ \cdots - k \,)!}{\lambda! \, (n-\alpha-\beta \cdots - k - \lambda)!}$$

$$= \frac{n!}{\alpha! \, \beta! \cdots \lambda! \, 0!} = \frac{n!}{\alpha! \, \beta! \cdots \lambda!}$$

(b) Se as letras da palavra “BARBARA” fossem diferentes, obteríamos $P_7 = 7!$ , como os 3 A são iguais, contamos cada anagrama $3!$ vezes. Analogamente, contamos $2!$ porque os 2 B são iguais e contamos $2!$ porque os 2 R são iguais. Logo,

$$\frac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210$$

Generalizando, chegasse diretamente a fórmula por esse raciocínio. Assim, o número de permutações de $n$ objetos dos quais $\alpha$ são iguais a A, $\beta$, iguais a B, $\cdots$ , $\lambda$, iguais a L, $\alpha + \beta + \cdots + k + \lambda = n$

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\cdots k!\,\lambda!}$$

Para indicar Assim, o número de permutações de $n$ objetos dos quais $\alpha$ são iguais a A, $\beta$, iguais a B, $\cdots$ , $\lambda$, iguais a L, $\alpha + \beta + \cdots + k + \lambda = n$ utilizaremos a notação:

$$P_n^{\alpha,\beta,\dots,k,\lambda}$$

Assim, a fórmula para calcular o número de tais permutações é:

$$P_n^{\alpha,\beta,\dots,k,\lambda} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\cdots k!\,\lambda!}$$

### 4.2.4 Princípio aditivo

Se $A$ e $B$ são dois conjuntos tais que $\#(A \cap B) = 0$, então $\#(AUB) = \#(A) + \#(B)$.

Em Linguagem menos formal, o princípio aditivo pode ser assim enunciado:
Sendo $A$ e $B$ dois conjuntos disjuntos, contar as possibilidades de escolher um elemento de $A$ ou um elemento de $B$ é equivalente a contar quantos são os elementos de $AUB$.

### 4.3 O Problema dos Caminhos Possíveis

No problema dos caminhos mais curtos possíveis, um problema de duas possibilidades, pode-se chegar a resposta por tentativa, isto é, sem recorrer a conceitos e propriedades matemáticas, identificando e contando um a um todos os caminhos, distintos em pelo menos um trecho, que levam de um local A para um local B, obedecendo as regras de deslocamento. Resolver um problema dessa maneira pode ser muito demorado. A matemática pode contribuir abreviar a resolução de tais problemas, com o auxílio dela, pode-se resolvê-lo rapidamente pela fórmula de combinações simples ou pela fórmula de permutação de elementos nem todos distintos. Mas, para se chegar a resolução da forma mais intuitiva, o que pode ser mais interessante e divertido para alunos do ensino médio, usaremos prioritariamente o princípio aditivo, que, por envolver se um princípio elementar e simples, é acessível mesmo a alunos do sexto ano do fundamental.

Com intuito de deixar mais clara a resolução mais intuitiva para o problema de duas possibilidades, ou, problema dos caminhos mais curtos possíveis, que é feita utilizando o princípio aditivo, segue a figura 1:

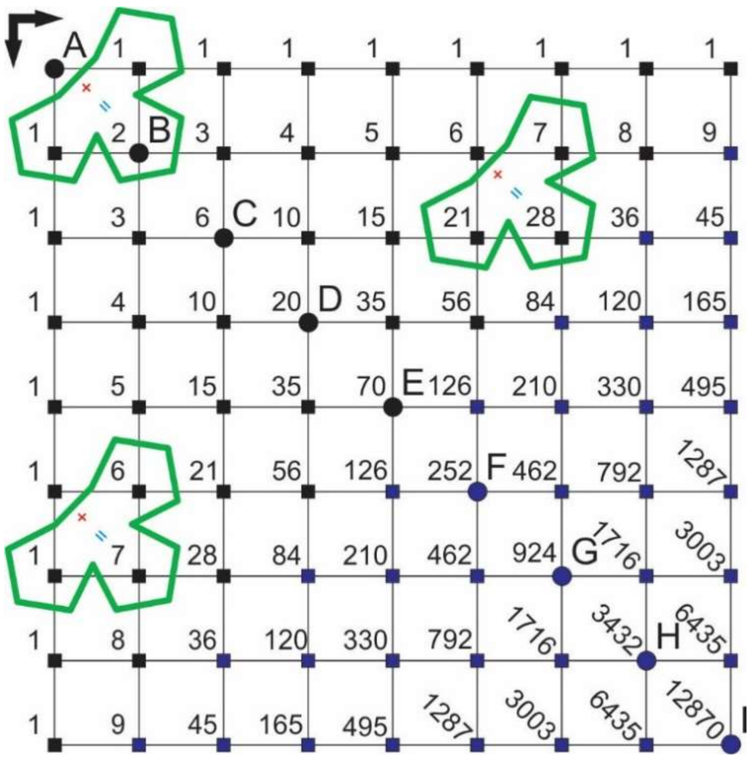



Figura 1: Caminhos mais curtos possíveis e suas quantidades partindo do ponto A.
Fonte: Produzida pelo autor.

Na figura 1, só existem duas possibilidades de deslocamento, para direita ou para baixo, como indicam as setas. Nela, partindo do vértice A e obedecendo às restrições de deslocamento, o número de maneiras distintas de chegar a um ponto genérico P em destaque da malha, exceto os que estão na mesma vertical ou horizontal de A, é igual à soma dos números de possibilidades de cada um dos dois últimos pontos em destaque pelos quais tem-se que passar para chegar a P. No interior dos três polígonos não convexos destacados é possível perceber claramente o que foi dito no período anterior deste parágrafo.

Para ficar ainda mais perceptível o raciocínio, em sua forma mais intuitiva, que encontra a quantidade de "caminhos mais curtos possíveis" para chegar a cada ponto em destaque da malha, que é um caso particular do princípio aditivo e também para mostrar que esse caso particular é uma propriedade relativa ao Triângulo de Pascal, segue a figura 2:

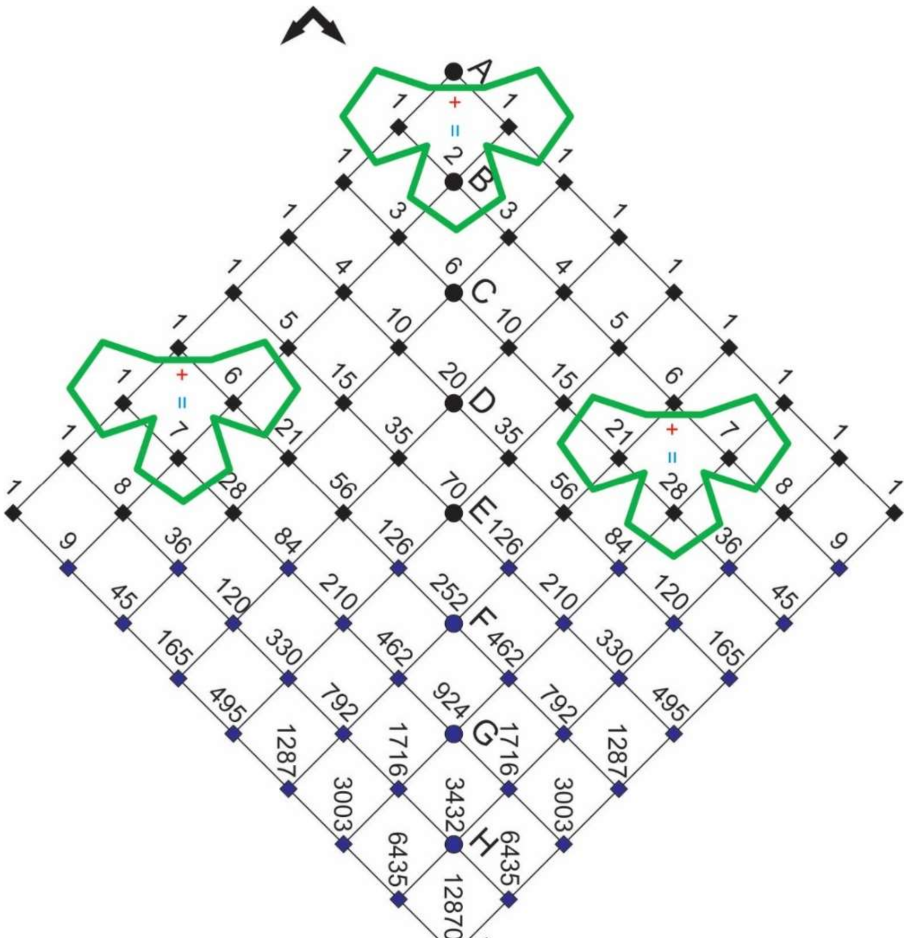



Figura 2: Rotação de 45º da figura 1, em torno do ponto E, no sentido horário.
Fonte: Produzida pelo autor.

Note na figura 3 abaixo, que os círculos pretos e os números contidos neles correspondem aos pontos em destaque preenchidos em preto da figura 2 e respetivos valores a eles associados e que os triângulos em verde e as operações no interior deles guardam correspondência com os polígonos não convexos da figura 2.

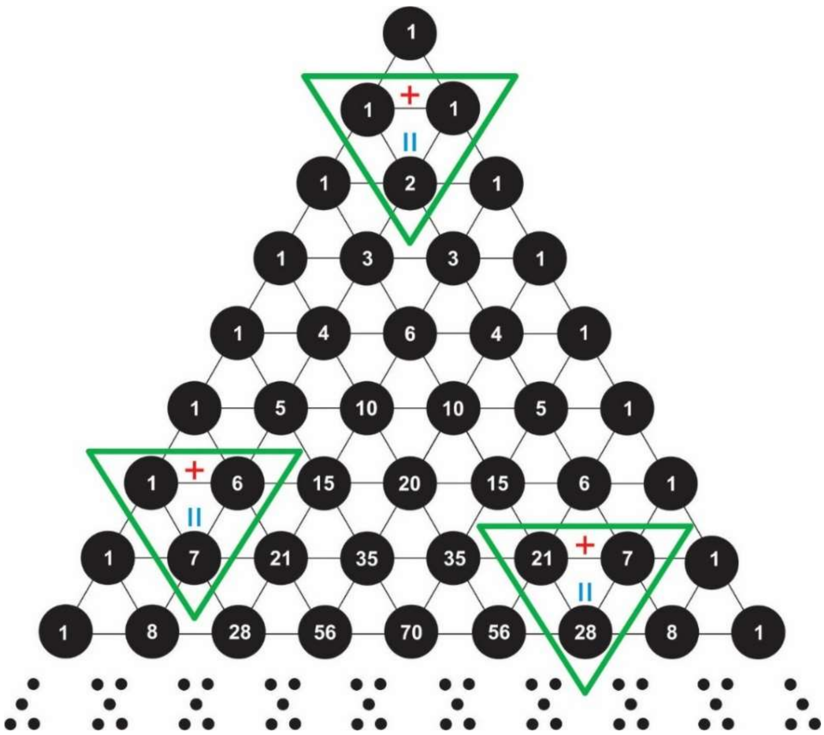


Figura 3: Parte dos valores da figura 2 em disposição triangular, alinhamento central.
Fonte: Produzida pelo autor.

De fato, a figura 3 acima é uma das disposições conhecidas e consolidadas do Triângulo de Pascal. Assim, a partir da sequência formada pelas figuras 1, 2 e 3 e dos comentários sobre elas, fica evidenciado que o princípio aditivo, aplicado para resolver o problema de duas possibilidades, nesse casso particular, é equivalente ao padrão matemático construtivo do Triângulo de Pascal.

## 4.4 O Triângulo de Pascal

. Segundo Rosadas (2016, apud Silva 2015) retrata em sua dissertação de mestrado, os primeiros registros desse triângulo são concedidos ao matemático indiano Pingala, que viveu por volta de 200 a.C., dois mil anos antes de Pascal. Rosadas (2016) afirma, no mesmo trabalho, que Apianus (1495-1551) reproduziu esse triâgulo em seu livro “*Kauffmanns-Rechnung*” sobre aritmética comercial, editado em 1527, embora com pouco destaque no canto inferior de uma das páginas. Como Apianus tem nacionalidade alemã, pode-se dizer que ele foi o primeiro ocidental a publicar sobre tal triângulo, corroborando Morgado et al (1991) que o colocam como o responsável pela chegada do Triângulo Aritmético ao ocidente. Rosadas (2016) afirma ainda que Michel Stifel (1487-1567) foi o proclamador do Triângulo Aritmético pela Europa tendo explorado suas propriedades em sua obra *Arithmetica Integra*, e que*,* posteriormente, Tartaglia, sob pseudônimo de Niccolò Fontana, estudou o referido triângulo que daí chegou ao Matemático francês Blaise Pascal (1623-1662). Pascal publicou um tratado em 1654 no qual utilizou o Triângulo Aritmético para encontrar os coeficientes do desenvolvimento do binômio $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}$.

A próxima figura é, segundo Affonso (2014), é o primeiro registro do Triângulo Aritmético feito no livro *Chandra Sutra* de Pingala, reproduzida de uma edição de 1931 desse do mesmo.


Figura 4: Triângulo Aritmético de Pingala.
Fonte: AFFONSO, 2014.

O raciocínio intuitivo mencionado várias vezes anteriormente e que está destacado nas figuras 1, 2 e 3 envolto em polígonos de lados em verde, é hoje denominado Relação de Stifel, por ter sido ele o primeiro a plocamar tal raciocínio na

Europa. Atualmente o triângulo Aritmético é mais conhecido como Triângulo de Pascal. A imagem em sequência é do escritor, filósofo, físico e matemático Blaise Pascal.

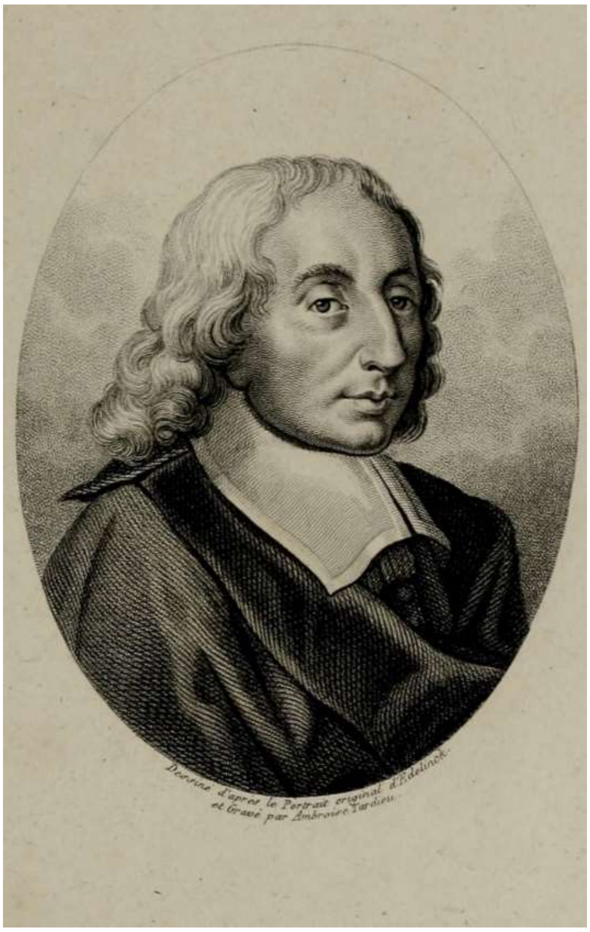


Figura 5: Imagem de Blase Pascal
Fonte: www.apuritansmind.com, acessado em 20 agosto de 2017.

O triângulo de Pascal, nas publicações das últimas décadas, foi mais popularizado em dois formatos: alinhado ao centro, como foi apresentado na figura 3, tal qual a disposição do Triangulo Aritmético de Pingala, formato apresentado anteriormente na figura 3; alinhado à esquerda, formato preferido pelos autores brasileiros de livros, pelo menos os de livros do Ensino médio[9], talvez por conta desse formato ser mais fácil para lembrar algumas propriedades. Na a imagem seguinte é do referido triângulo, provavelmente na forma mais usual, no que se refere aos dias atuais.

[9] Ao menos, todos os livros de ensino médio que utilizo ou utilizei, mais de dez, alguns em mais de uma edição, trazem o Triângulo de Pascal no formato alinhado à esquerda.

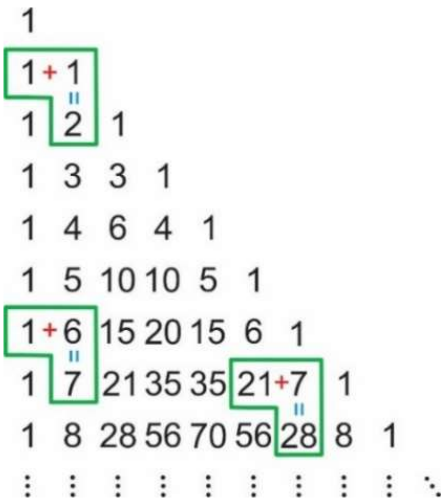


Figura 6: Triângulo de Pascal em disposição triangular com alinhamento à esquerda.
Fonte: Produzida pelo autor.

Para enfatizar a correspondência entre os valores do triângulo de Pascal, obtidos pela relação de Stifel, mostrados na figura anterior e o os coeficientes do desenvolvimento do Binômio de Newton, a próxima figura traz o Triângulo de Pascal montado com os números binomiais, outra notação para as combinações simples classe $p$ de $n$ objetos. Usou-se $\binom{n}{p}$, no lugar de $C_n^p$, por entender que mesmo a segunda notação sendo padrão para esse trabalho, a primeira traz muito mais plasticidade a figura.

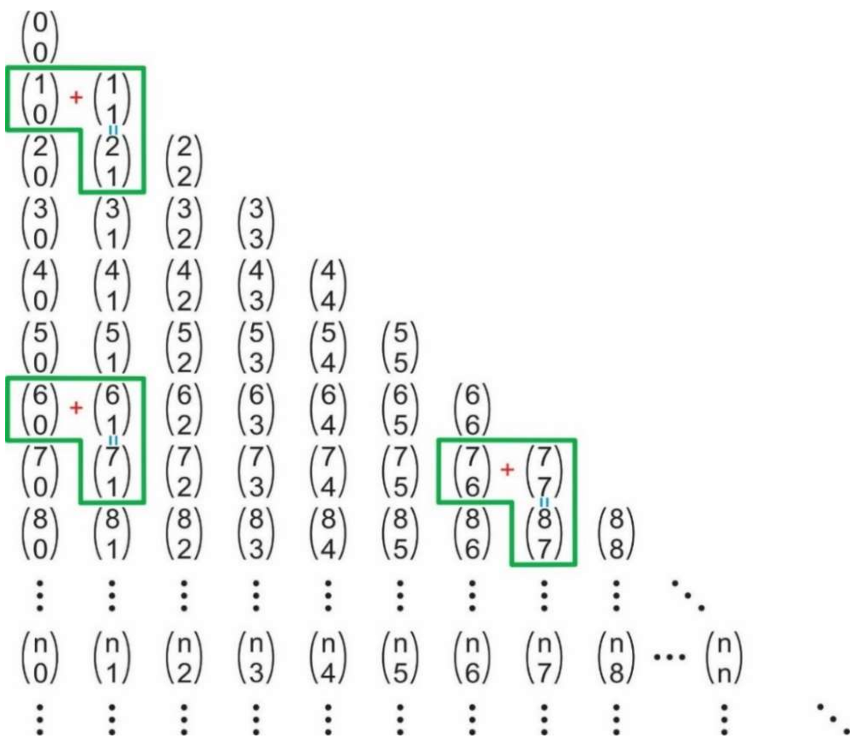
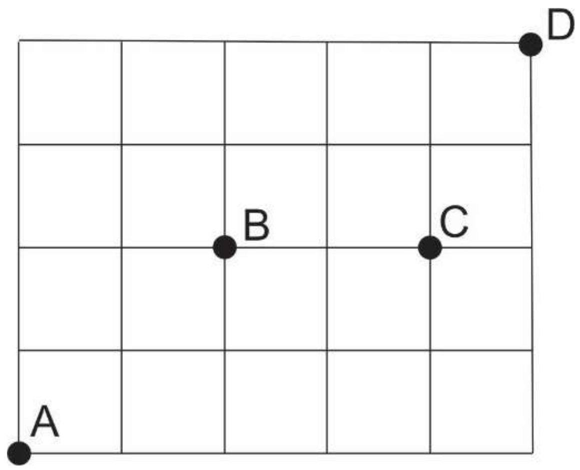


Figura 7: Triângulo de Pascal com números binomiais.
Fonte: Produzida pelo autor.

## 4.5 Resolvendo “problemas de duas possibilidades”

Existe uma correspondência, ou melhor, uma equivalência, entre os valores obtidos pelo princípio aditivo (equivalente à relação de Stifel, neste caso particular), por Combinações Simples, por números binomiais, e por permutações de elementos nem todos distintos. Essa equivalência nos possibilita resolver os problemas de duas possibilidades, entre os quais está o problema dos caminhos mais curtos possíveis, de muitos modos, utilizando essas abordagens matemáticas mencionadas. Este autor acredita que a forma mais indicada para construir a resolução desses problemas com alunos do ensino básico, principalmente por se tratar do primeiro contato com análise combinatória, seja através dos princípios de contagem. Para mostrar a resolução desse tipo de problema, seguem exemplos de problemas de duas possibilidades.

Exemplo 1: Quatro pontos estão representados na malha quadriculada abaixo. Deseja-se criar um caminho de um ponto a outro apenas com segmentos sobre as linhas tracejadas e com o menor comprimento possível.



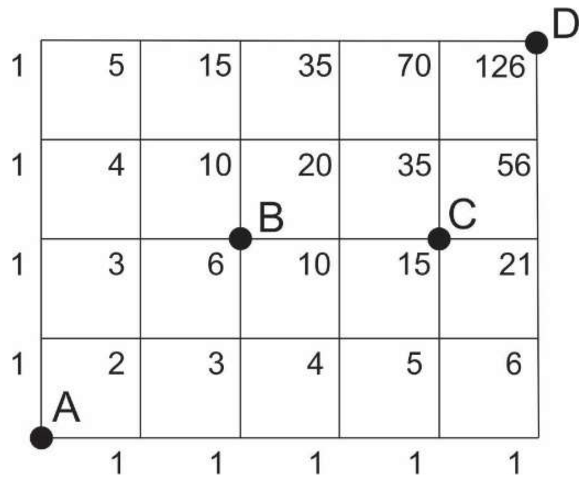

Determine:

(a) Quantos caminhos existem de A até D

(b) Quantos caminhos existem de A até D que passam por B.

(c) Quantos caminhos existem de A até D que não passam por C.

Solução 1: Basta usar o princípio aditivo (ou relação de Stifel), para encontrar o número de caminhos para chegar até cada vértice da malha, partindo do ponto A, veja na malha abaixo




Encontrado os números de caminhos e denotando por $n(PQ)$ o número de caminhos de chegar de P até Q, pontos genéricos desta malha, valores indicados na figura acima, tem-se, abaixo as respostas dos itens :

(a) $n(AD) = 126$ caminhos.

(b) Observe que, fazendo-se uma translação do retângulo de diagonal BD até o ponto B coincidir com o ponto A, o ponto D fica sobre o vértice com o número 10, assim conclui-se que $n(BD) = 10$. Daí, tem-se que o número de caminhos é:

$$n(AB).n(BD) = 6.10 = 60$$

(c) Observe que, fazendo-se uma translação do retângulo de diagonal CD até o ponto C coincidir com o ponto A, o ponto D fica sobre o vértice com o número 3, assim conclui-se que $n(CD) = 3$. Daí, tem-se que o número de caminhos é:

$$n(AD) - n(AC).n(CD) = 126 - 15.3 = 126 - 45 = 81$$

Solução 2:

(a) Basta observar que para qualquer caminho mínimo de A até D, faz-se quatro movimentos para norte (N) e cinco movimentos para leste (L), assim, o total de caminhos de A até D equivale ao total de anagramas da palavra “NNNNLLLLL” ou ao número de combinações simples de classe 4 ou de classe 5 de 9 objetos, assim, encontramos o número de caminhos que é:

$$P_9^{4,5} = \frac{9!}{4!\,5!} = C_9^4 = C_9^5 = 126$$

(b) O número de caminhos para ir de A até D passando por B é o produto do número de caminhos para ir de A até B com o número de caminhos para ir de B até D. Daí, segue-se raciocínio análogo ao utilizado para resolver o item (a). Número de anagramas da palavra “NNLL” multiplicado pelo número de anagramas da palavra “NNLLL”, assim, encontramos o número de caminhos que é:

$$P_4^{2,2\prime}.P_5^{2,3} = C_4^2.C_5^2 = \frac{4!}{2!\,2!}.\frac{5!}{2!\,3!} = 6.10 = 60$$

(c) Primeiramente, calcula-se o número de caminhos para ir de A até D passando por C que é o produto do número de caminhos para ir de A até C pelo número de caminhos para ir de C até D, seguindo raciocínio análogo ao utilizado para resolver o item (b), número de anagramas da palavra “NNLLLL” multiplicado pelo número de anagramas da palavra “NNL”. Daí basta subtrair o número de caminhos para ir de A até D, que se sabe do item (a) que é 126, do número encontrado “ primeiramente”, assim, encontramos o número de caminhos que é:

$$126 - \left(P_6^{2,4}.P_3^{2,1}\right) = 126 - \left(C_6^2.C_3^2\right) = 126 - \left(\frac{6!}{2!\,4!}.\frac{3!}{2!\,1!}\right) = 81$$

Exemplo 2: O sistema de iluminação de um palco e composto por 6 lâmpadas das quais duas quaisquer não apresentam a mesma cor. De quantas maneiras distintas pode-se iluminar essa boate acendendo apenas 3 das lâmpadas?

Solução 1: Basta construir um triângulo de Pascal pela relação de Stifel e selecionar o número da 7ª linha e 4ª coluna, ele será a resposta. Nesse caso, como já temos tal triângulo, a figura da página 40, observamos lá que são 20 as maneiras distintas de iluminar de iluminar a boate nas condições expressas no enunciado.

.

Solução 2: Basta calcular a permutação de 6 lâmpadas das quais 3 estão acesas e 3 estão apagadas.

$$P_6^{3,3} = \frac{6!}{3!\,3!} = C_6^3 = 20$$

Portanto, existem 20 maneiras distintas de iluminar a boate nas condições expressas no enunciado.

# 5 APLICAÇÃO, RESULTADO E DISCUSSÃO

A OME "Um inglês em Salvador" foi aplicada em oito turmas de primeiro ano do Ensino Médio, duas do Colégio Modelo Luís Eduardo Magalhães (CMLEM), em 01 e 02 de dezembro de 2015, duas do Colégio Estadual Professora Faraildes Santos (CEPFS), em 05 e 19 de junho de 2017, e quatro do Instituto Federal da Bahia (IFBA) Campus Jequié, em 15, 16 e 17 de agosto de 2017, todos eles da cidade de Jequié no estado da Bahia. O primeiro é um colégio estadual localizado no bairro Jequiezinho, muito perto do centro, o segundo é um colégio estadual localizado no bairro curral novo, a cerca de cinco quilômetros do centro, e o último pertence a rede federal de educação e está localizado no Bairro John Kennedy, mais conhecido como Cidade Nova, a cerca de três quilômetros do centro. Nos colégios estaduais as turmas são do Ensino Médio regular, enquanto que, no instituto federal, as turmas são de ensino médio integrado (regular e técnico), em duas delas a parte do ensino técnico é em informática e nas outras duas em eletromecânica. O grande intervalo entre a aplicação no Colégio Modelo e as demais instituições é devido ao adiamento em um semestre, solicitado por este discente, devido à sobrecarga desencadeada por outros compromissos em nível profissional os quais estavam impedindo o fluxo adequado deste trabalho de conclusão do curso de mestrado. Mesmo sendo realizada em período mais distante, julgou-se necessária a inclusão da referida aplicação no trabalho. Este autor esteve presente em todas as aplicações da oficina nas quais foi auxiliado por cinco pessoas, duas em cada turma de aplicação: Grabriela Nery (graduada e mestranda em Matemática), Sidnéia e Leiliane (graduandas em Matemática) e Milton Jr (Graduado em Gestão comercial). Participaram das aplicações, ao todo, duzentos e trinta e seis alunos, dos quais, cinquenta e oito do Colégio Modelo, sessenta e oito do Colégio Faraildes e cento e dez do IFBA.

Neste trabalho a denominação das turmas não vai ser feita da mesma maneira que as respectivas instituições as nomeiam, mas da seguinte forma: 1ºA e 1ºB, Colégio Modelo; 1ºA e 1ºB, Colégio Faraildes; 1ºA eletromecânica e 1ºB eletromecânica, 1ºA informática, 1ºB informática, IFBA.

Além da caracterização das instituições e das turmas das instituições de ensino onde foi aplicada a oficina, é importante reforçar que, para tornar mais criterioso e mais transparente o processo de avaliação dos resultados da aplicação desta OME, foram confeccionados e disponibilizados na seção 3.4 as tabelas 4 e 5 com os critérios de avaliação quanto ao êxito e quanto ao envolvimento dos grupos e das turmas participantes.

## 5.1 Turmas do Colégio Modelo

Essas foram as duas primeiras aplicações da oficina, na época ela tinha fase única, ou seja, estava prevista a aplicação de toda oficina em um só encontro de até uma hora e quarenta minutos, o que, nas aplicações de 2017, estavam previstas e foram executadas em duas fases de até uma hora e quarenta cada. A primeira das duas turmas dessa aplicação não conseguiu terminar toda a oficina no tempo inicialmente previsto, por isso, ainda durante essa primeira aplicação, resolveu-se ir até o preenchimento do formulário 1, o que nas demais aplicações constituiu o término da fase 1. A partir disso, em conversa com o orientador, ficou estabelecido que a oficina passaria a ter duas fases.

Nessa aplicação, em cujo kit de cada mesa constava quatro canetas, foi percebido que a quantidade de cores e de canetas, oferecidas a cada mesa, era insuficiente, através da observação que, em ambas as turmas, alguns alunos estavam usando materiais próprios, principalmente marca texto, inclusive alguns alunos relataram que com marca texto ficou muito melhor para identificar os caminhos no mapa. Assim, depois dessa aplicação, foram adquiridos marca textos, em quatro cores diferentes e canetas, em mais quatro tonalidades diferentes, para cada mesa.

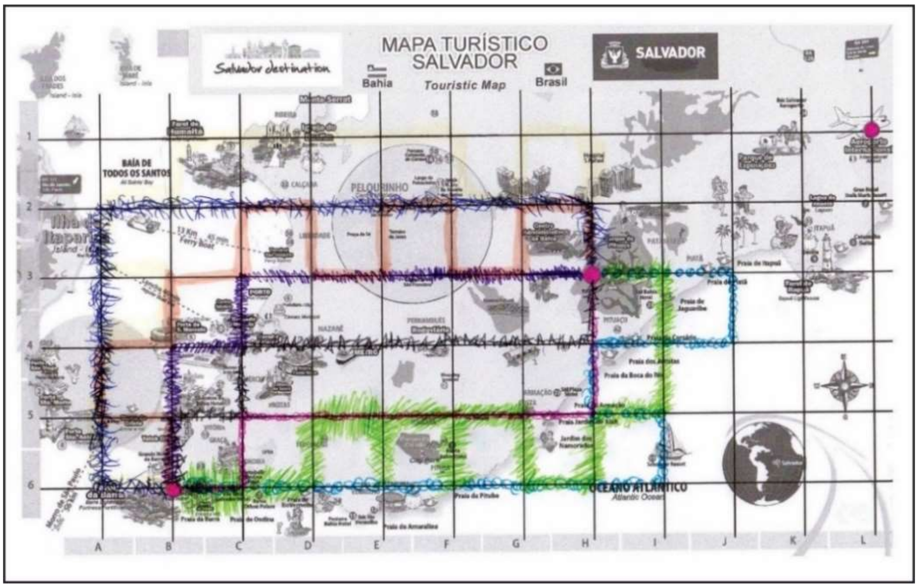



Figura 8: Mapa folha 1 com uso também de marca texto para identificar caminhos.

Nessas turmas só foi aplicado o que passou a ser denominada fase 1 da oficina, pois, um dia após a aplicação da OME, foram iniciadas as provas da quarta e última unidade do ano letivo o que impossibilitou a aplicação da segunda fase da oficina. No Colégio Modelo, participaram da OME cinquenta e oito alunos. A turma A teve ótimo envolvimento, nela, cinco grupos tiveram êxito de 50% e um grupo não alcançou êxito algum e, enquanto que, a turma B teve excelente envolvimento, e nela, os cinco grupos alcançaram 100% de êxito. A tabela 5, traz mais informações e proporciona uma visão geral dos resultados dessa aplicação.

Tabela 6: Resultados do Colégio Modelo, fase 1, “Um Inglês Em Salvador”.

| Turma | Número de alunos | Número de grupos | Percentual medio de êxito | Envolvimento | Comentário |
|---|---|---|---|---|---|
| 1º A | 33 | 6 | 42% | Ótimo | Muito obedientes, porém com menos iniciativa do que a turma B. Entenderam bem as regras da oficina, no entanto, a cada passo, perguntavam se podiam ou não realizar daquela forma. Todos os grupos levaram mais de uma hora e vinte minutos para concluir o que se tornou a fase 1 oficina. |
| 1º B | 25 | 5 | 100% | Excelente | Muito criativos e com muita iniciativa. Entenderam bem as regras da oficina as não ficaram prisioneiros delas. Com uma hora de aplicação todos os grupos já haviam concluído o que passou a ser denominado a fase 1 da oficina. Obtiveram conceito máximo nos dois critérios avaliativos. |

Fonte: O autor do trabalho.

´ Comparando as duas turmas quanto às atitudes ao longo da aplicação da OME, é notório que, mesmo elas tendo entendido igualmente bem as regras de aplicação da oficina, manifestaram comportamentos diferentes em relação a elas. No 1º A os alunos pareciam ter “disciplina em excesso”, pois, a todo momento e em todos os grupos, a cada passo que os alunos iam dar, eles perguntavam se podiam ou não dar o passo, mesmo estando dentro das regras as quais reitero que eles tinham bom entendimento. Para a equipe de aplicação, inclusive e principalmente este autor, ficou a impressão que a disciplina estava aprisionando o espírito inquiridor, comportamento primordial para o bom desempenho em OMEs e para aprendizado da matemática. No entanto, no 1ºB, a boa compreensão das regras não bloqueou a iniciativa, a criatividade e o espirito inquiridor deles, pelo contrário, a oficina tornou latentes esses importantes comportamentos.

Outro fato dessa aplicação da OME chamou bastante atenção, apesar do professor que cedeu os horários para aplicação da oficina ter relatado, “não é aconselhável aplicar a oficina nessa turma pois os alunos são malcomportados e descompromissados com a aula e com o estudo, vou passar vergonha”, se referindo ao 1ºB, e, “é a melhor das quatro turmas de primeiro ano do Colégio Modelo”, se referindo ao 1ºA. Em contrariedade aos relatos, o desempenho do 1ºB foi máximo, superando o 1ºA na avaliação do envolvimento e, mais intensamente, na avaliação de êxito. Além disso, a turma B concluiu em menor tempo que a turma A.

Pode-se destacar que a aplicação da OME no CMLEM, influenciou para aprimorar o formato de aplicação, pois, foi a partir dela que ficou consolidado o formato de duas fases e o kit de mesa composto por oito canetas e quatro marca textos. E, ficou sinalizada, pelo exposto no parágrafo imediatamente anterior, a possibilidade desta OME, que tem como pano de fundo a Análise Combinatória, ter potencial, neste ramo da matemática, em trazer para o processo de aprendizagem alunos e turmas que ficam a margem dele.

## 5.2 Turmas do Colégio Faraildes

Figura 9: Aplicação da oficina no Colégio Faraildes.

Nessa escola as duas turmas realizaram as duas fases da OME com quinze dias de intervalo entre ambas, as aplicações em segundas feiras, sendo que a segunda fase da OME foi aplicada após um feriado prolongado e, por isso, na aplicação referente a segunda fase, a quantidade de alunos foi bem menor que na primeira fase.

Sessenta e oito alunos participaram da primeira fase dessa OME. O 1ºA e o 1º B foram avaliados como regular quanto ao envolvimento, e, na classificação quanto ao êxito, no 1ºA, dois grupos tiveram êxito de 50% e três grupos tiveram 0%, enquanto que, no 1ºB cinco grupos tiveram 0% e um grupo teve 50% de êxito. A tabela 7 que segue, fornece mais informações e proporciona uma visão global dos resultados dessa aplicação da oficina.

Tabela 7: Resultados do Colégio Faraildes, fase 1, “Um Inglês Em Salvador”.

| Turma | Número de alunos | Número de grupos | Percentual medio de êxito | Envolvimento | Comentário |
|---|---|---|---|---|---|
| 1º A | 33 | 6 | 17% | Regular | A oficina não conseguiu prender a atenção dos alunos. Três alunos abandonaram a sala e, pouco menos da metade dos alunos que permaneceram, se dedicaram a atividade. Alguns alunos ficaram jogando ao celular. Foi necessário uma hora e quarenta minutos para conclusão das atividades, não obstante, houve grupo que não concluiu. |
| 1º B | 35 | 7 | 7% | Regular | O clima também foi de pouco interesse e de pouca iniciativa. Houve uso de celular e conversa. Os alunos não entenderam de modo satisfatório as regras da oficina. Utilizou-se uma hora e quarenta minutos para a conclusão das atividades, mesmo assim, houve grupo que não conseguiu concluir. |

Fonte: O autor do trabalho.

Nessa fase, o desempenho nas duas turmas foi muito baixo nos dois itens de avaliação. O 1ºB, turma que, segundo informações obtidas na sala dos professores em momento de intervalo, tem as melhores notas, na avaliação do êxito, teve desempenho ainda pior do que o 1ºA. Na avaliação do envolvimento, ambas ficaram no segundo patamar mais baixo da escala avaliativa. As duas turmas utilizaram todo o tempo disponível e mesmo assim, em ambas, houve grupo que não conseguiu concluir a atividade proposta. A figura 10 do apêndice traz, a resposta do formulário 1 de três grupos (mesas)[10] nos quais é possível identificar o baixo êxito nas respostas e perceber algumas dificuldades dos alunos relativas às noções de orientação e de escrita e aos conceitos distância, tempo e velocidade.

O desinteresse e o baixo êxito manifestados na aplicação da primeira fase desta OME no Colégio Faraíldes preocupou e levou este autor e sues colaborados na aplicação a refletir sobre a razão desse comportamento. A reflexão indicou algumas singularidades relativas ao dia e/ou a turma da aplicação da OME e alguns problemas crônicos relativos a aprendizagem, especialmente em matemática, nessa instituição de ensino, percebidas em conversas com professores das diversas áreas de conhecimento. Entre as singularidades, destaco: falta de dois professores a escola no dia da aplicação, fazendo com que os horários após a aplicação da oficina fossem vagos; uma comemoração de aniversário em uma turma de outra série durante o horário de aula e de aplicação da oficina, que despertou o interesse dos alunos em ir para festa e foi o motivo do abandono da oficina por parte de alguns alunos; falta de conhecimento prévio dos aplicadores em relação às turmas, elas careciam de explicação mais detalhada do funcionamento da OME, de mais intervenções que estimulassem a indagação e de mais tempo para realização da oficina. Entre os fatores crônicos, destaco: disparidade muito grande entre o conhecimento e habilidades dos discentes e o saber e habilidades próprios da série que estudam; docentes desiludidos, que não mais acreditam na capacidade de aprendizado das turmas; discentes com baixíssima autoestima, principalmente em relação à matemática. A junção dessas duas categorias de “geradores de desinteresse”, em graus diferentes de intensidade, apresenta grande chance de ter sido a causa de os resultados terem se revelado bem abaixo do esperado. Acredito que a influência das singularidades foi bem maior, especialmente a falta de conhecimento prévio sobre as turmas.

A reflexão reforçou neste discente de mestrado e professor do ensino médio, a percepção de que as práticas inovadoras de ensino da matemática, em especial as OMEs, devem contemplar alunos, pelo menos, desde as séries iniciais do Ensino

[10] Neste trabalho, grupos e mesas têm o mesmo significado, conjunto de pessoas que formam cada unidade de aplicação da OME.

Fundamental II, pois, muitas vezes, os alunos chegam ao Ensino Médio tão desmotivados que mesmo as práticas inovadoras de ensino, das quais se tem fortes indícios de eficiência em termos de aumento da motivação, especialmente as OMEs em análise combinatória, cujo poder motivador já foi testado em trabalhos já citados nessa dissertação, podem se revelar pouco eficientes para motivá-los.

A atitude de refletir também levou este autor a concluir que algo teria que ser feito para que os alunos do 1ºA e do 1ºB do Colégio Faraíldes encontrassem motivação para melhorar a participação nesta oficina, em segunda fase. Assim, já conhecendo os perfis das turma, como estratégia para ampliar o empenho por parte dos alunos na realização das atividades propostas na referida fase da oficina, decidiu-se que seria necessário e importante: conversar com as turmas no sentido de mostrar a importância do estudo para a melhoria das condições de vida das pessoas, citando exemplos, inclusive de pessoas da comunidade, que usufruem dessa melhoria; ampliar a quantidade de dicas estimulantes de indagação; reforçar com os eles, no momento inicial da segunda fase, a estratégia que leva aos caminhos mais curtos, resposta requerida na fase 1 da oficina, a qual é essencial para o entendimento das atividades de segunda fase, e que poucas mesas tinham encontrado.

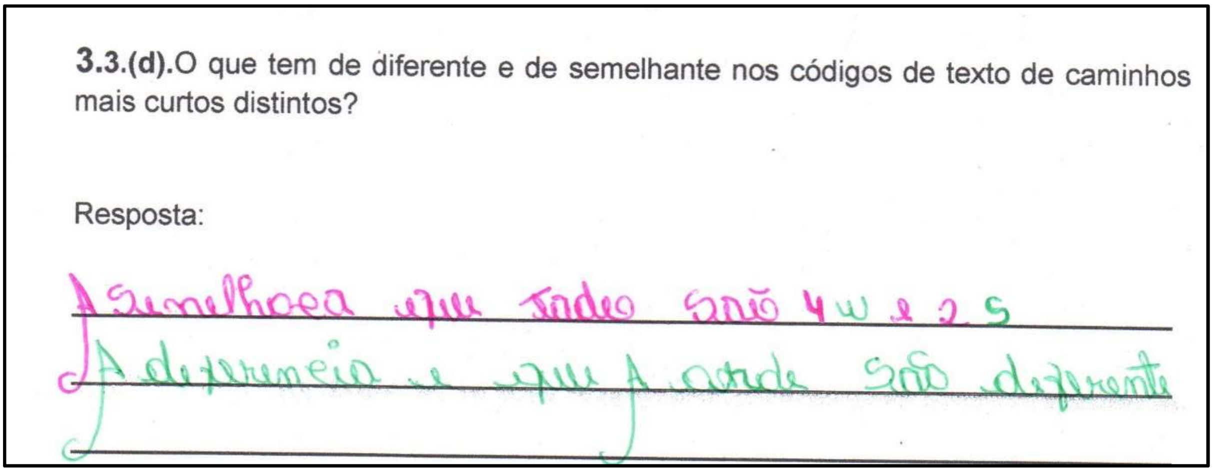
Com a adoção dessas medidas e o menor número de alunos participando da oficina, o resultado melhorou consideravelmente, como pode ser visto na tabela que segue.

Tabela 8: Resultados do Colégio Faraildes, fase 2. “Um Inglês Em Salvador”.

| **Turma** | **Número de alunos** | **Número de grupos** | **Percentual medio de êxito** | **Envolvimento** | **Comentário** |
|---|---|---|---|---|---|
| 1º A | 16 | 5 | 90% | Ótimo | O desempenho melhorou muito em relação à primeira fase. Todos os grupos indicaram o sentido utilizando W (West) e S (South) e terminaram a oficina em uma hora e vinte minutos, quinze minutos a menos que a turma B. |
| 1º B | 19 | 5 | 60% | Òtimo | O desempenho melhorou em relação à primeira fase. Utilizou-se um repertório variado para indicar o sentido, W (West) e S (South), D (Descer) e E (Esquerda), O (Oeste) e S (Sul). Conseguiram um bom desempenho nessa fase da oficina, porém, inferior ao da turma A. |

Fonte: O autor do trabalho.

Devido ao motivo relatado no primeiro parágrafo desta subseção, menos alunos participaram da segunda fase da oficina, assim, foi possível dar mais atenção a eles, além disso, com a melhoria na estratégia de aplicação, principalmente a partir de um melhor conhecimento dos perfis das turmas e das mudanças na aplicação a partir dele, e também pela conversa motivadora antes da aplicação, o desempenho dos grupos e consequentemente das turmas, na segunda fase, melhorou bastante. As duas turmas aumentaram o envolvimento para ótimo, segundo patamar mais alto da escala avaliativa. O êxito também melhorou, na turma B, dois grupos alcançaram 100%, dois grupos obtiveram com 50% e um grupo obteve êxito de 0%, porém, a melhora foi bem menor que a da turma A, na qual, quatro grupos tiveram 100% de êxito e um grupo obteve 50% de êxito. A figura abaixo é um exemplo de formulário 2 de um grupo da turma A, que foi avaliado com conceito 100% em êxito. Nele, é possível perceber que a semelhança e a diferença entre os códigos de caminhos mais curtos foram expressas de maneira clara e objetiva.



**3.3.(d).** O que tem de diferente e de semelhante nos códigos de texto de caminhos mais curtos distintos?

Resposta:

A semelhança que todos são 4 w e 2 s

A diferença é que a ordem são diferente

Figura 11: Reprodução de resposta do formulário 2, 1ºB do Colégio Faraildes.

No rascunho de algumas mesas, recolhido a partir da segunda escola de aplicação, observou-se que alguns alunos já possuem um bom nível de organização, inclusive utilizando cores distintas para identificar os diferentes, como pode ser notado na figura abaixo.

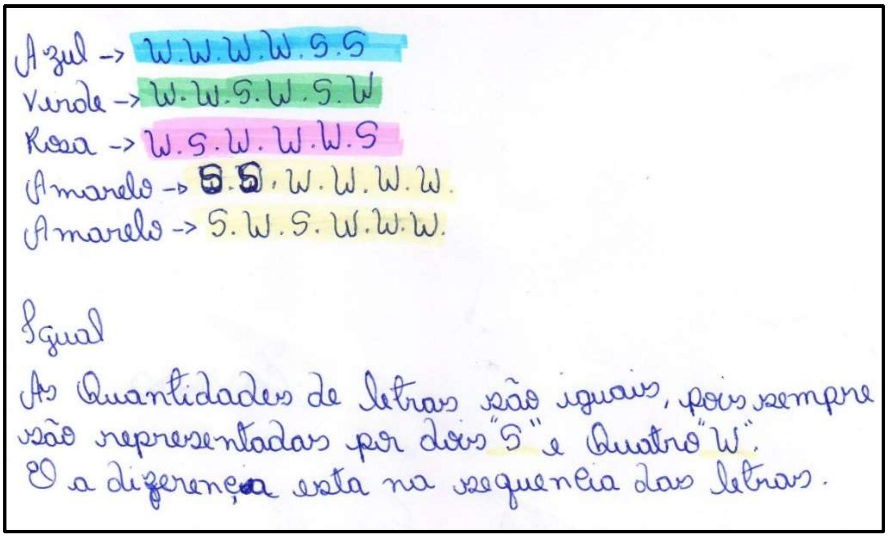


Figura 12: Reprodução de um rascunho, 1ºA Colégio Faraíldes

Pode-se também constatar, a partir avaliação do êxito, tanto da fase 1 quanto da fase 2, que é necessário melhorar as percepções de direção e sentido, bem como, de distância, tempo e velocidade dos estudantes dessas duas turmas, pois, em mais da metade dos formulários, os alunos confundiram algum desses conceitos. Dessa constatação, surgiu mais um objetivo para a OME deste estudo, o chamado objetivo emergente, que é, treinar a percepção e os conceitos de direção, sentido, distância, tempo e velocidade.

Na aplicação da segunda fase da OME deste estudo no Colégio Faraildes, uma importante tendência surgida na aplicação do Colégio Modelo, se fortalece, o melhor desempenho na oficina foi da turma com desempenho mais fraco no processo tradicional de ensino aprendizagem da matemática é mais uma vez percebido, o 1ºA, tido pelos professores como a turma mais apática e desinteressada e sendo a turma de menores notas dentre as duas que participaram da oficina, na primeira fase e principalmente na segunda fase, na qual a aplicação ocorreu sem problemas, teve melhor desempenho do que o 1ºB, turma considerada mais interessada, mais estudiosa e de melhor desempenho quando são seguidas as práticas pedagógicas tradicionais de ensino da matemática.

## 5.3 Turmas do IFBA

Após aplicações da OME em duas escolas, com a não realização da segunda fase no Colégio Modelo e devido ao problema já relatado da aplicação, em primeira fase, no Colégio Faraíldes, algumas coisas ainda não estavam tão claras quanto se pretendia que estivessem, por isso, surgiu a necessidade de aplicar a oficina em mais uma escola. Como as outras duas escolas onde já haviam sido aplicadas a oficina eram da rede estadual, em busca de diferenças que possibilitassem mais diversidade de comportamentos na aplicação, optou-se por aplicar a oficina “um inglês em Salvador” no IFBA, que, além de se diferenciar das duas outras escolas por ser da rede federal de ensino, traz também, pelo menos, duas outras características diferentes: suas turmas são integradas, isto é, são ao mesmo tempo de ensino médio regular e de ensino técnico; o ingresso neste instituto federal é feito por seleção através de provas.

É importante mencionar que na confecção do guia de aplicação da primeira fase da OME no IFBA, cometeu-se um equívoco, ao invés de “pedir aos alunos para encontrar da forma mais diversa possível, dentro das regras, caminhos que liguem o Aeroporto ao Farol da Barra”, foi colocado “pedir aos alunos para encontrar da forma mais diversa possível, dentro das regras, caminhos que liguem o aeroporto ao Parque de Pituaçu”.  Para exemplificar tal mudança, a figura abaixo traz um mapa folha 1 com marcações segundo o guia após a mudança. Observando-a e comparando-a com a figura 8, tem-se uma boa ideia da mudança bem como pode-se perceber, a partir da comparação, que o equívoco não traz prejuízos para a aplicação pois a mudança por ele provocada não modificou a ideia central da aplicação.


Figura 13: Mapa folha 1 com mudança aplicado no IFBA, na primeira fase da OME

No Campus Jequié do IFBA, a OME foi aplicada para quatro turmas na primeira fase e para três turmas na segunda fase, pois, no dia da aplicação da segunda fase havia apresentação de um trabalho da disciplina física que acabou ultrapassado o tempo previsto para sua excussão, e isso inviabilizou a aplicação da oficina em uma das turmas. Diferentemente das aplicações nas duas escolas estaduais que foram realizadas no turno matutino, no IFBA, a oficina foi aplicada no turno vespertino, nas turmas desse instituto as aulas são em tempo integral, o que configura outra diferença em relação as escolas estaduais nas quais a OME foi aplicada.

A tabela abaixo, proporciona uma visão geral dos resultados e traz outras informações acerca da aplicação, em primeira fase, da oficina.

Tabela 9: Resultados do IFBA, fase 1, “Um Inglês Em Salvador”.

| Turma | Número de alunos | Número de grupos | Percentual médio de êxito | Envolvimento | Comentário |
|---|---|---|---|---|---|
| 1º A MEC | 24 | 4 | 100% | Excelente | Todos os grupos alcançaram conceito máximo nas duas avaliações e finalizaram a oficina em menos de cinquenta minutos. Foi perceptível durante a aplicação que eles já tinham desenvolvido habilidades e que conheciam métodos de resolução de problemas. |
| 1º B MEC | 19 | 5 | 100% | Excelente | Todos os grupos conseguiram completar a oficina em menos de cinquenta minutos. A turma se mostrou bastante criativa e com muita iniciativa. Todos grupos conquistaram conceito máximo nas duas avaliações. |
| 1º A INFO | 34 | 6 | 83% | Excelente | Quatro grupos alcançaram 100% e dois grupos tiveram 50% na avaliação de êxito. Todos os grupos concluíram a atividade em menos de uma hora. Todos os seis grupos receberam conceito máximo na avaliação de envolvimento. |
| 1º B INFO | 33 | 6 | 75% | Excelente | Quatro grupos alcançaram 100%, um grupo alcançou 50% e um grupo obteve 0% na avaliação de êxito. Todos os grupos concluíram a atividade em menos de uma hora. Todos os seis grupos receberam conceito máximo na avaliação de envolvimento. |

Fonte: O autor do trabalho.

Como pode ser observado na tabela acima, na aplicação da primeira fase, os alunos do IFBA tiveram grande envolvimento e alto desempenho na avaliação de êxito, além disso, foram muito rápidos na execução das atividades da OME, tão rápidos que alguns alunos reclamaram da facilidade de resolução da atividade. Duas turmas conseguiram responder à pergunta relativa a fase em menos de meia hora e para elas foi usada a “carta na manga”. Parte do aumento da velocidade de resolução do problema, pode ser creditada ao encurtamento dos caminhos ocorrido por conta da mudança referida anteriormente. Também nessa aplicação e nessa fase, as turmas de eletromecânica, que, segundo relatos dos professores da instituição colhidos durante os três dias de aplicação, tem desempenho menor que as turmas de informática nas avaliações as quais seguem o padrão do ensino tradicional da matemática, em oposição a isso, nessa aplicação da OME, o 1ºA e o 1ºB de eletromecânica teve desempenho superior ao das turmas de informática, inclusive, todos os grupos das turmas de eletromecânica obtiveram desempenho máximo nos dois critérios avaliativos da oficina.

Figura 14: Aplicação da oficina no IFBA – Campus Jequié.

Na aplicação em segunda fase, as turmas do IFBA, agora em número de três, mantiveram o brilhante desempenho. Também nessa aplicação e nessa fase, a turmas 1ºB eletromecânica, que, como já informado, tem desempenho menor que as turmas de informática nas avaliações do ensino tradicional da matemática, também nessa fase da OME, teve desempenho superior ao das turmas de informática. A tabela que segue, corrobora e complementa as informações e fornece uma visão geral sobre as aplicações em segunda fase da oficina nesse instituto.

Tabela 10: Resultados do IFBA, fase 2, “Um Inglês Em Salvador”.

| Turma | Número de alunos | Número de grupos | Percentual médio de êxito | Envolvimento | Comentário |
|---|---|---|---|---|---|
| 1º B MEC | 16 | 4 | 88% | Excelente | Todos os grupos conseguiram completar a oficina em menos de cinquenta minutos. A turma novamente se mostrou bastante criativa e com muita iniciativa. Três grupos atingiram 100% de êxito e um 50% de êxito. Todos tiveram conceito máximo em envolvimento. As indicações de sentido utilizadas foram: O (Oeste) e L (Leste), E (Esquerda) e B (Baixo). |
| 1º A INFO | 15 | 3 | 83% | Excelente | Dois grupos conseguiram 100% de êxito e um conseguiu 50% de êxito. Todos os grupos concluíram a atividade em menos de cinquenta minutos. Todos tiveram conceito máximo em envolvimento. As formas usadas para indicar o sentido foram: E (Esquerda) e B (Baixo), L (Left) e D (Down), O (Oeste) e B (Baixo). |
| 1º B INFO | 28 | 5 | 80% | Excelente | Três grupos conseguiram 100% de êxito e dois responderam com 50% de êxito. Todos tiveram conceito máximo em envolvimento. Todos os grupos concluíram a atividade em menos de cinquenta minutos. Todos os grupos indicaram o sentido usando W (West) e S (South). |

Fonte: O autor do trabalho.

Como pode ser observado na tabela acima, os grupos concluíram as atividades da segunda fase de forma muito rápida, acrescento aqui a informação que três grupos concluíram em menos de trinta minutos e lembro que, nessa fase, as regras e caminhos foram idênticos aos utilizados na aplicação da OME no Colégio Faraildes. É possível que essa maior velocidade de resolução das atividades de tenha relação com o fato da turma ter contato, nas aulas práticas relacionadas à parte técnica dos cursos, com o método experimental, que, embora tenha diferenças com às Oficinas de Matemática Experimental, em parte, utilizam e desenvolvem, as mesmas habilidades, entre essas, as habilidades relacionadas à heurística e também ao trabalho em equipe. O uso de tais habilidades está muito presente no cotidiano dos alunos do IFBA. Um bom exemplo desse uso, são aulas de robótica, nelas, são propostos problemas e as equipes se desdobram para produzir soluções. Pistas relacionadas a familiaridade com métodos de resoluções de problemas e a habilidade em trabalhar em equipe foram observadas nos comportamentos dos alunos de muitos grupos durante a aplicação da oficina, em alguns rascunhos apareceram indícios dessa familiaridade em relação a heurística.

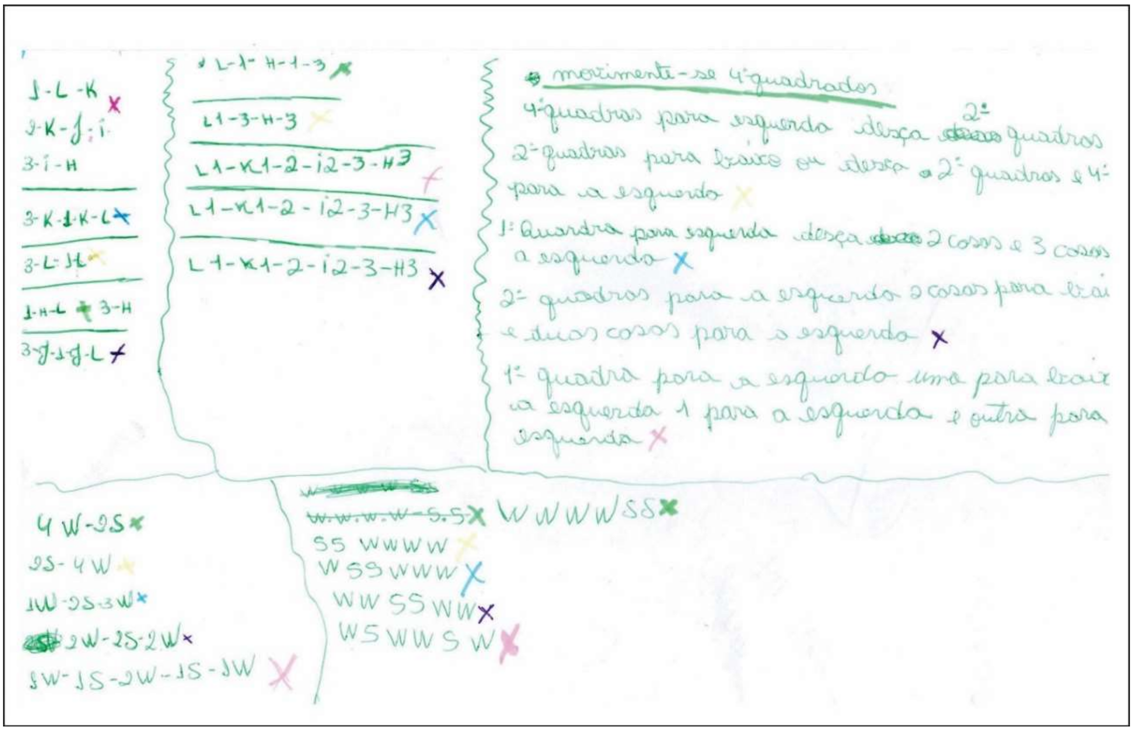


Figura 15: Cópia de folha de rascunho com noções de método resolutivo de problemas.

Pela figura acima, é possível perceber que eles sabem o que querem encontrar, isto é, identificaram qual é a incógnita, e que conhecem as condicionantes e buscam satisfazê-las, comportam-se de acordo com o primeiro conjunto de instruções estabelecido por Polya (1975) de como resolver um problema, o que ele denomina compreensão do problema. Também é possível perceber, por exemplo, observando em sequência, na figura 15, a região superior do centro, a região inferior esquerda e a região inferior direita, que eles partem de um problema conhecido, ir de um local a outro de por ruas e avenidas por caminhos mais curtos dentro das regras, por exemplo, em (l1-k1-2-i2-3-h3), evoluem para códigos alfanuméricos, (4w-2s), por exemplo e, por fim, chegam ao que querem, códigos só com letras, a exemplo de (wwwwss), ou seja, partiram do simples e conhecido e foram evoluindo até chegarem onde queriam, o que revela que comportam-se de acordo com o segundo conjunto de instruções estabelecido por Polya (1975) de como resolver um problema, o estabelecimento de um plano. Notem também os “x” que aparecem em todas as etapas da figura, eles denotam que os resultados foram verificados, o que configura retrospecto, o quarto conjunto de instruções estabelecido por Polya (1975) para resolver um problema. As observações proferidas nos períodos anteriores a esse deste parágrafo, exemplificam e comprovam o uso, por alunos do IFBA de métodos de resolução de problemas.

Na aplicação da segunda fase da OME, na parte das discussões que precedem e orientam a conclusão do raciocínio da fase e a consequente confecção da resposta à pergunta relativa a mesma, momento em que os alunos pensam em como encurtar os códigos para ser possível transmiti-los dentro das regras da oficina, foram utilizadas dicas para induzir, de modo sutil, os grupos das mesas a escolherem códigos que contenham apenas letras[11]. Tais dicas e procedimentos também foram realizados na segunda fase no Colégio Faraildes. Nos dois colégios, a maioria das mesas chegou primeiro a códigos com letras e números, e somente depois a códigos apenas com letras. Uma das mesas do IFBA trouxe uma solução que foi considerada inovação em relação às demais respostas, continuou expressando parte do código em números, mas, ao invés dos algarismos arábicos, optou por usar algarismos romanos. A figura 15 abaixo traz cópia do rascunho com a referida inovação

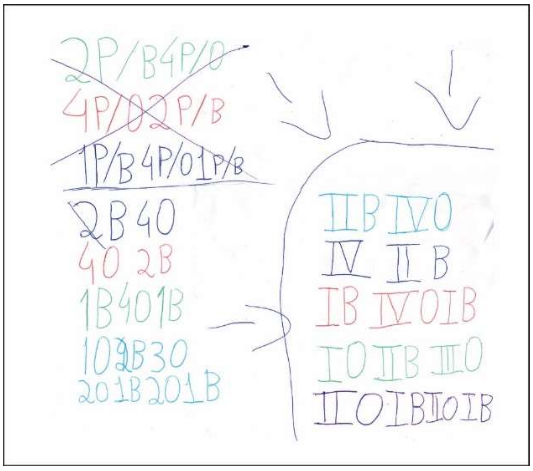



Figura 16: Cópia de folha de rascunho com código que utiliza algarismos romanos.

Da aplicação da OME no IFBA, pode-se destacar que, sinalizou a influência do ensino experimental no aprimoramento das habilidades relativas aos métodos de

[11] Faz-se essa indução para introduzir novo desafio e também porque já está sendo gestada uma nova fase desta oficina, para futuros trabalhos, a partir de códigos formados apenas por letras. Mas sabemos que uma OME é uma obra inacabada, assim, podem ocorrer surpresas, até mesmo melhores do que o que pensamos.

resolução de problemas e, por consequência, das habilidades importantes para o bom desempenho em OMEs e consolidou o potencial desta OME, em Análise Combinatória, em capturar para o processo de aprendizagem alunos e turmas que normalmente estão fora dele. Além disso, foi identificada uma predileção dos estudantes, manifestada por mais da metade dos grupos, em representar os comandos que orientam direção e sentido utilizando a rosa dos ventos na versão em inglês.

## 5.4 Comparativo das aplicações

Foram, ao todo, oito aplicações da OME "Um inglês em Salvador, em três unidades de ensino, O Colégio Modelo, O Colégio Faraíldes e o IFBA – Campus Jequié, nelas, foi identificada uma predileção dos estudantes, manifestada por mais da metade dos grupos, em todas as unidades onde foi aplicada a OME, em representar os comandos que orientam direção e sentido utilizando a rosa dos ventos na versão em inglês. Essa tendência de padrão de representação pode ser vista na figura que segue

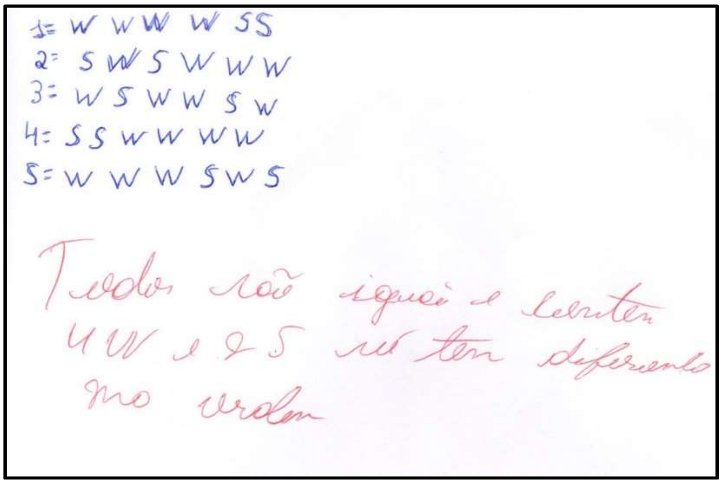



Figura 17: Cópia de rascunho com padrão predileto representação de direção e sentido.

O padrão utilizado na figura 16 foi o mais encontrado nos rascunhos da segunda fase, nele, a letra W faz referência a *West*, oeste em português e a letra S faz referência a *South*, sul em português. Por exemplo, "WWWWSS", a primeira sugestão de caminho mais curto do aeroporto ao Parque de Pituaçu da mesa que produziu o rascunho copiado e exposto na figura acima, é andar com o VATT quatro quadras para oeste e duas para o sul, nesta ordem.

Com exceção da aplicação em primeira fase no colégio Faraíldes na qual ocorreram problemas, todas as outras aplicações todas as outras aplicações desta OME foram bem-sucedidas e tiveram aproveitamento médio superior a sessenta por cento. As turmas do IFBA alcançaram os mais elevados índices de êxito e envolvimento e nas discussões do final da segunda fase já se percebia que os alunos estavam associando a resolução do “problema dos caninhos mais curtos” e já davam sinais que poderiam conseguir generalizar tal resolução. Essas percepções também aconteceram Colégio Faraíldes, mas em proporção menor e não se aplicam ao Colégio Modelo, pois se referem a segunda fase da qual essa instituição de ensino não participou. Para finalizar esta seção dando uma visão global dos resultados, segue a tabela:

Tabela 11: Comparativo dos resultados das três escolas - "Um inglês em Salvador"

| **Escola** | **Fase** | **Número de alunos** | **Percentual médio de êxito** | **Envolvimento** | **Comentário** |
|---|---|---|---|---|---|
| Colégio Modelo | 1ª | 58 | 71% | Entre ótimo e excelente | As duas turmas concluíram as atividades dentro do tempo previsto. A turma com melhor desempenho nas práticas tradicionais do ensino da matemática obteve maior desempenho na OME. |
| | 2ª | Não houve aplicação | Não houve aplicação | Mão houve aplicação | |
| Colégio Faraíldes | 1ª | 68 | 12% | Regular | A duas turmas não conseguiram concluir a atividade da 1ª fase a dentro do tempo previsto, mas conseguiram na 2ª fase. Na 1ª fase o desempenho foi muito baixo, devido aos problemas já relatados. Na 2ª fase o desempenho melhorou muito nos dois aspectos avaliados. Nas duas fases da oficina a turma com menor desempenho nas práticas tradicionais do ensino da matemática obteve maior desempenho na OME. |
| | 2ª | 35 | 75% | Ótimo | |
| IFBA | 1ª | 110 | 90% | Excelente | Todas as turmas tiverem excelente envolvimento e concluíram em tempo recorde as atividades das duas fases. As turmas de eletromecânica que detém o menor desempenho nas práticas tradicionais do ensino da matemática obtiveram menor desempenho na OME |
| | 2ª | 59 | 84% | Excelente | |

Fonte: O autor do trabalho.

# 6 CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Utilizando minha experiência na docência da matemática e os conhecimentos em OMEs adquiridos nos estudos para embasar a confecção desta dissertação bem como nas vivências advindas das aplicações de minha oficina “Um Inglês em Salvador”, nessas últimas considerações deste trabalho, como parte e também reforço para os argumentos conclusivos, apresento abaixo uma exposição dos pontos fortes que percebi relativos a Oficinas de Matemática Experimental e, em alguns casos, suas vantagens em relação a algumas características que são culturalmente atribuídas às práticas tradicionais do ensino da matemática:

(a) O aprendizado é guiado por estórias interessantes e motivadores. Aprender matemática disfarçada dentro estória afasta o mito muito difundido no Brasil de que a matemática e chata e difícil. A motivação amplifica a vontade de aprender.
(b) O desafio, elemento primordial de uma OME, é o combustível eficiente e renovável para propulsionar o aprendizado. O desafio amplifica e renova o desejo e o hábito de inquerir. Inquerir aos outros, professores, colegas, sites de busca, e a si próprio. Nas práticas defendidas pelas oficinas pedagógicas tais como as OMEs, e nas sinalizações advindas das aplicações da oficina concebida para este trabalho, é possível acreditar que, à medida que o indivíduo vá ficando mais velho, ele consiga manter o espírito inquiridor.
(c) A ocorrência do resgate das pessoas a margem do processo de aprendizado. A OME “Um inglês em Salvador” mostrou que as turmas que menos se destacavam no ensino tradicional foram as melhores nela.
(d) O aluno é autor e ator de seu próprio aprendizado. Cuida-se e valoriza-se muito mais as próprias criações, a só ou em parceria, do que criações de outros, empurradas “goela abaixo”.
(e) O professor é coadjuvante, mas não menos importante. Além de participar da concepção da OME, o professor coordena, junto aos demais aplicadores, a construção, pelos alunos, do aprendizado.

(f) A construção do conhecimento é coletiva. As habilidades interpessoais são de fundamental importância e tem muito valor, sobretudo atualmente. Cuida-se mais das próprias criações, assim, nas criações coletivas todos cuidam.

(g) Nas OMEs muitas vezes passa-se de situações resolvidas manualmente para situações codificadas, abstratas ou indiretas, facilitadas pela matemática. Assim, os alunos passam a valorizar mais o conhecimento matemático, que, de certa forma, atua para facilitar a sua vida e não para atrapalhar, como o ensino tradicional da matemática leva muitos alunos a pensar.

(h) O compartilhamento do conhecimento. Numa OME, todos se ajudam, todos compartilham o que sabem. Há compartilhamento de conhecimento dentro do grupo, entre os grupos, entre aplicadores e grupos, entre todos.

(i) Terreno fértil para criatividade. Como uma OME, não tem script, tem ”bagunça produtiva”, na qual tem muito espaço para a criatividade.

Com maior ou menor intensidade, todos esses atributos, de (a) a (i), se fizeram presentes na aplicação da OME “Um inglês em Salvador”, e por isso integram a conclusão deste trabalho. Os itens (b), (c) e (g), principalmente o (c), apareceram bastante na aplicação da OME relativa a este trabalho e de forma direta (imagens e resultados), ou indireta (constatações em texto de percepções relativas à aplicação).

No aspecto especifico do aprendizado da Análise combinatória, com as duas fases da OME “Um inglês em Salvador”, os alunos chegaram a identificar, inclusive na prática, situações de permutação em que nem todos os objetos são distintos e a ideia da Relação de Stifel do Triângulo Aritmético, mais conhecido como Triângulo de Pascal. Para elucidar de maneira mais contundente tais conceitos, recomenda-se a concepção de uma terceira fase da OME com atividade com objetivo de calcular a quantidade de caminhos mais curtos entre O aeroporto e o Parque de Pituaçu e depois entre o Parque de Pituaçu e o Farol da Barra.

Embasado pelos dos bons resultados auferidos pela minha OME, “Um inglês em Salvador”, que apresentou êxito médio superior a 65% (80%, se for desconsiderada a aplicação na qual ocorreu problema) e envolvimento médio ótimo, isto é, entre 75% e 90%, sustentado por um bom número de participantes, duzentos e vinte e dois, turmas, oito e de instituições de ensino, três, o Colégio Modelo, O Colégio Faraildes e o IFBA – Campus Jequié. É possível afirmar que minha OME deu certo, que neste trabalho encontram-se evidências de que uma OME em Análise Combinatória é eficiente como estratégia de ensino desse ramo da matemática, e como incentivadora do espirito inquiridor e do resgate da atenção e do interesse de alunos e das turmas que ficam a margem do processo de aprendizagem da matemática. Essa última afirmação fica ainda relevante por se trabalhar com assunto do ensino médio, segmento educacional onde estão os alunos mais carentes de fortalecimento de tais comportamentos.

Juntando-se o resultado desse trabalho aos resultados dos trabalhos de Silva (2015), Pereira (2017), Araújo (2017) e Souza (2017) ficam ainda mais fortes as evidências da eficiência de uma OME como estratégia de ensino da Análise Combinatória, o que nos dá condições de afirmar que as OMEs nesse ramo da matemática podem integrar os currículos, no todo ou em parte, das escolas e contribuir efetivamente para melhoria da aprendizagem da análise combinatória.

Espera-se, com essa dissertação, contribuir para ampliar e difundir das Oficinas de Matemática Experimental e, por consequência, melhorar o aprendizado da matemática no Brasil, com efeito na melhora das notas dos estudantes brasileiros nos mecanismos de avaliação de aprendizado nacionais e internacionais tais como ENEM e o PISA.

# 7 REFERÊNCIA


AFFONSO, ALEXANDRE. **O Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton.** Universidade Federal Fluminense (UFF). Niterói, 2014.

ARAÚJO, LUCIENE LIGER DO NASCIMENTO. **Oficinas de matemática experimental: uma história de TV**. Ilhéus, BA: UESC, 2017. 51f.

BRASIL, **Lei nº 9.424, de 24 de dezembro de 1996**. **Diário Oficial da União**. 1996.

BRASIL, Lei nº 11.494, de 20 de junho de 2007. **Diário Oficial da União**. 2007.

BRASIL, LEI Nº 9.394 de 20 de dezembro de 1996. **Diário Oficial da União**. 1996.

CANDAU, M.V. et al. **Oficinas pedagógicas de direitos humanos**. Petrópolis, RJ: Vozes, 1995.

Disponível em < http://portal.inep.gov.br/web/guest/inicio > acessado em 15 de julho de 2016

FREIRE, PAULO. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática**. São Paulo: Paz e Terra, 1996, p.47.

FREIRE, PAULO. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática**. São Paulo: Paz e Terra, 1998, p.127.

MORGADO, A.C. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

PEREIRA, KATIANE. **Oficinas de matemática experimental entrando numa fria**. Ilhéus, BA: UESC, 2017. 60 f.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2006.

SILVA, MARILUCE DE OLIVEIRA. **Do triangulo à pirâmide de pascal**. Ilhéus, BA: UESC, 2015. 52 f.

SOUZA, VINÍCIUS MODESTO SERTÓRIO DE. **Oficinas de matemática experimental: do princípio multiplicativo ao fatorial**. Ilhéus, BA: UESC, 2017. 59 f.

STEWART, I. **Almanaques das curiosidades matemáticas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

TEIXEIRA, C. E. J. **A ludicidade na escola**. São Paulo: Loyola, 1995.

# ANEXO

Quadro 1: Relação de países membros da OCDE.

| País | Ano de Entrada | País | Ano de Entrada |
|---|---|---|---|
| Alemanha | 1961 | Irlanda | 1961 |
| Austrália | 1971 | Islândia | 1961 |
| Áustria | 1961 | Israel | 2010 |
| Bélgica | 1961 | Itália | 1962 |
| Canadá | 1961 | Japão | 1964 |
| Chile | 2010 | Luxemburgo | 1961 |
| Coreia do Sul | 1996 | México | 1994 |
| Dinamarca | 1961 | Noruega | 1961 |
| Eslováquia | 2000 | Nova Zelândia | 1973 |
| Eslovênia | 2010 | Países Baixos | 1961 |
| Espanha | 1961 | Polônia | 1996 |
| Estados Unidos | 1961 | Portugal | 1961 |
| Estônia | 2010 | Reino Unido | 1961 |
| Finlândia | 1969 | República Tcheca | 1995 |
| França | 1961 | Suécia | 1961 |
| Grécia | 1961 | Suíça | 1961 |
| Hungria | 1996 | Turquia | 1961 |

Fonte: Secretaria de Assuntos Internacionais do Ministério da Fazenda do Brasil.

# APÊNDICE

## Guia de aplicação – 1ª versão – Aplicação no Colégio Modelo

## Oficinas de Matemática Experimental

# “Um Inglês em Salvador”

01 de dezembro de 2016

## 1. Objetivos

1. Objetivos Matemáticos.

   (a) Exercitar localização de pontos no plano.
   (b) Introduzir algumas noções elementares associadas a *Análise Combinatória*.
   (c) Introduzir a noção de minimalidade como ferramenta de avaliação da qualidade de uma solução.
   (d) Apresentar ao aluno o processo de abstração e argumentação.

2. Objetivos Heurísticos.

   (a) Expor o aluno ao desafio.
   (b) Apresentar ao aluno o método experimental em matemática, estimulando-o a formular e testar hipóteses.
   (c) Induzir o aluno a formular perguntas e discutir possíveis respostas.
   (d) Estimular o aluno a formular e seguir instruções de ação.
   (e) Introduzir a ideia de simplificação como estratégia para resolução de problemas.

3. Objetivo não matemático.

   (a) Estimular o aluno a trabalhar em equipe.

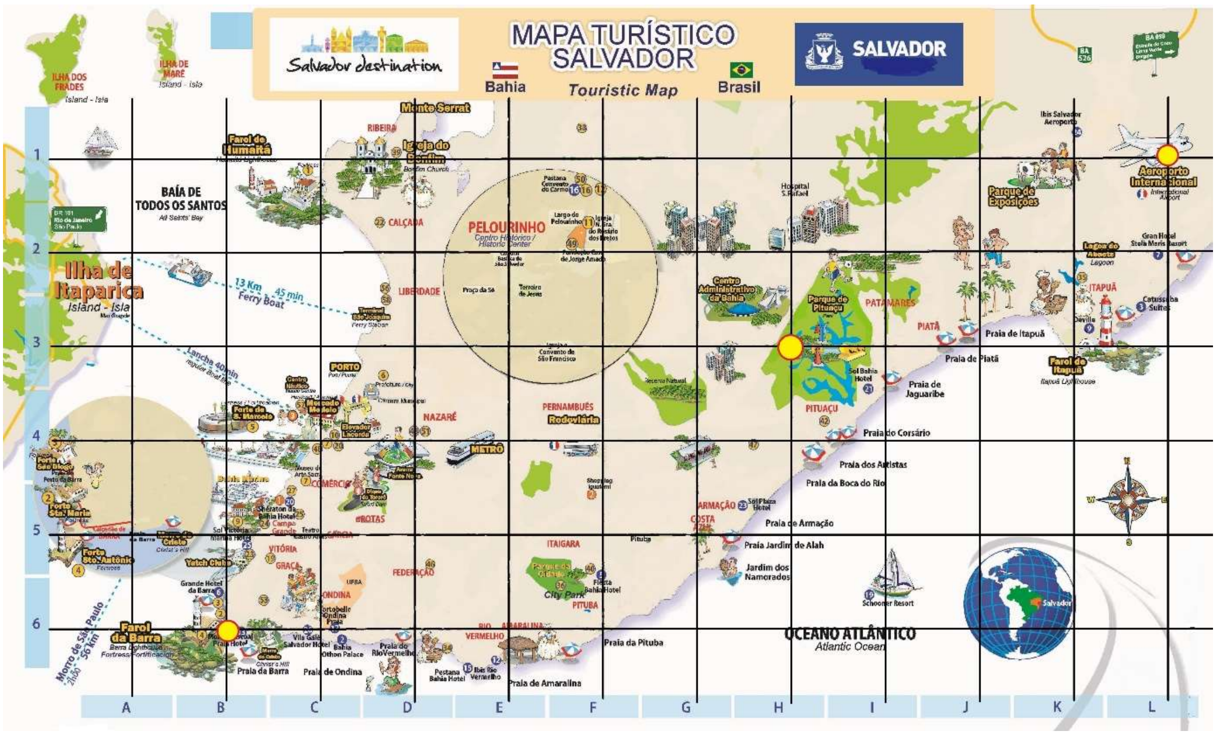



Figura 1: Mapa de avenidas (numeradas de 1 a 6) e de ruas (identificadas se A a L) vias de uso exclusivo do VATT (Veículo Anfíbio de Transporte de Turistas) da cidade de Salvador.

**Anfíbio: Veículo que consegue se locomover tanto na terra quanto na água.*


Figura 2: VATT em terra.


Figura 3: VATT na água.

## 2. Lista de Materiais

(a) Uma folha com a figura 1, impressão colorida, para cada grupo.
(b) Uma unidade do formulário 1 e uma unidade do formulário 2 para cada grupo.
(c) Três folhas numeradas de 1 a 3 com a figura 1, impressa em preto e branco, para cada um dos alunos.

(d) Canetas de cores diferentes por mesa, uma para cada membro do grupo.
(e) Duas folhas em branco por aluno.

**Um Inglês em Salvador**

Peter é um inglês de vinte e cinco anos fã de natureza e de carnaval. Ele vai aproveitar suas férias para conhecer o Brasil. Ele virá a Salvador para conhecer o Parque de Pituaçu, a maior reserva ecológica da cidade, com fauna e flora diversificadas, e o Farol da Barra, marco turístico e parte de um dos circuitos do carnaval de Salvador.

O jovem inglês chegará às 6h da manhã no aeroporto de Salvador e voará de lá para o Rio de Janeiro às 11h do mesmo dia. Na capital baiana, Peter sempre utilizará o VATT (Veiculo Anfíbio de Transporte de Turistas) que trafega tanto na terra quanto na água por vias de uso exclusivo dele. Tais vias são as avenidas (numeradas de 1 a 6) e as ruas (identificadas de A à L), conforme o mapa.

Como comprou as passagens do VATT com muita antecedência, ele terá direito a escolher os percursos do VATT. Peter precisará da nossa ajuda para sugerir diversos caminhos diferentes de VATT que o levem do aeroporto ao Parque de Pituaçu e deste ao Farol da Barra, facilitando assim a sua escolha.

***Informação importante: O VATT só pode andar nas avenidas (numeradas de 1 a 6) e de ruas (identificadas se A a L), conforme o mapa, e, em cada percurso, não pode passar em um mesmo lugar mais de uma vez.***

## 3. Atividades

### Fase 1

1. **Percebendo no mapa a localização do Parque de Pituaçu e do Farol da Barra e descobrindo alternativas de caminhos entre eles.**

   (a) Entregue a cada participante as três folhas, numeradas de 1 a 3 com os mapas impressos, as folhas de rascunho e uma caneta. As canetas dos alunos de cada mesa devem ter cores distintas. Entregue também uma folha com o mapa colorido para cada grupo.
   (b) Conte a história “Um Inglês em Salvador”.

(c) Verifique, por mesa, se todos entenderam razoavelmente as coordenadas de localização e as regras relativas aos caminhos permitidos.
(d) Peça para cada aluno preencher o nome e o grupo em cada mapa e para destacarem ainda mais no mapa (folha 1) a localização do Parque de Pituaçu e do Farol da Barra.
(e) Peça para que na folha 1 cada um dos participantes encontrem os possíveis caminhos, no mínimo cinco, do parque de Pituaçu ao Farol da Barra da forma mais diversa possível cumprindo as regras estabelecidas.

2. **Discussão 1.** Comparando os diversos caminhos obtidos.

(a) Lembrem-se, Peter tem pouco tempo, vai preferir os caminhos mais curtos. Dentre os caminhos encontrados existem diferenças entre as distâncias percorridas?
(b) O caminho mais curto que cada mesa encontrou é o caminho mais curto possível?
(c) Existe mais de um caminho mais curto?
(d) Qual estratégia nos leva a encontrar caminhos mais curtos?
***Obs.: A resposta à essa pergunta (d) deverá ser escrita no formulário 1. Uma resposta por grupo.***

## Fase 2

3. **Percebida a estratégia que encontra os caminhos mais curtos, destacando ainda mais a localização do aeroporto e o Parque de Pituaçu e encontrando diversas alternativas de caminhos mais curtos entre eles.**
4. 

(a) Peça para cada destacar ainda mais a localização do aeroporto e do Parque de Pituaçu nos mapas das folhas 2 e 3.
(b) Peça para cada um encontrar, no mapa da folha 2, três caminhos mais curtos e distintos entre o aeroporto e Parque de Pituaçu.
(c) Peça para cada grupo encontrar a maior quantidade que conseguirem de caminhos mais curtos que levem do aeroporto ao Parque de Pituaçu utilizando a folha 3.

5. **Encontrando códigos de voz e códigos de texto para representar os caminhos mais curtos.**

   (a) Conte aos alunos o complemento da estória:

   Teremos que informar hoje a Peter as nossas sugestões de caminhos mais curtos. Mas o jovem inglês trabalha numa plataforma de petróleo e a comunicação com os tripulantes da plataforma só é possível através de mensagens de celular para o ***pager*** que cada pessoa embarcada tem que só pode receber uma mensagem por hora de, no máximo, 20 caracteres. Peter estará aguardando a mensagem de voz e/ou de texto.

   (b) Peça para cada grupo pensar estratégias de envio das sugestões de caminho mais curto a Peter que atendam as regras de comunicação com ele.
   (c) Peça para cada grupo transformar todos os caminhos encontrados em códigos de voz de mesma natureza, um código para cada caminho.
   (d) Peça para cada grupo transformar todos os caminhos encontrados em códigos de texto de mesma natureza, um código para cada caminho.

6. **Discussão 2.** Analise os diversos caminhos mais curtos obtidos. Compare os caminhos entre si, os caminhos com os respectivos códigos e os códigos entre si.

   (a) Existe uma quantidade máxima de caminhos mais curtos?
   (b) Podemos encontrar essa quantidade máxima de caminhos mais curtos um a um marcando no mapa?
   (c) Podemos encontrar essa quantidade máxima de caminhos mais curtos através de seus respectivos códigos?
   (d) O que tem de diferente e de semelhante nos códigos de texto de caminhos mais curtos distintos?
   ***Obs.: A resposta à essa pergunta (d) deverá ser escrita no formulário 2. Uma resposta por grupo.***
   (e) Como saber a quantidade de caminhos mais curtos sem ter que contar? Existe um princípio matemático para encontrar essa quantidade?

7. **Abrindo a cabeça**

   (a) Estimular os alunos, através de dicas adequadas, a encontrar o princípio matemático por trás dessa situação.
   (b) Convidar os alunos a encontrar situações da vida real que possam ser resolvidas pelo princípio encontrado.

# 4. Recomendações

**1.** Em relação às regras para percorrer os caminhos.

(a) Se você perceber que algum participante está encontrando dificuldade para entender as regras, NÃO AS EXPLIQUE.
- Se essa dificuldade ainda estiver generalizada, socialize a questão com a turma.
- Se a dificuldade for de um aluno remanescente, socialize a questão com a mesa.

(b) Se você perceber que algum participante está seguindo regras diferentes às que deveria seguir, NÃO DIZER QUE ESTÁ ERRADO, socialize a questão com a MESA dele, não com a turma toda. Neste momento muitos alunos já estarão concentrados trabalhando na resolução do problema; não os distraia com uma discussão desnecessária para eles, mas estimule sempre a troca de informações entre as mesas.

**2.** Se alguém tiver sérias dificuldades para resolver a parte 1 da atividade. Verifique se o participante entendeu e/ou está aplicando corretamente as regras.

(a) Se ainda não entendeu as regras, ou está aplicando de forma errada, siga a Recomendação 1.

(b) Se entendeu as regras, mas está encontrando dificuldades de abordagem para resolver o problema, socialize a questão na mesa, não com a turma toda.

**3.** Respeite o tempo da MESA.

(a) Passe para próxima etapa da atividade sempre que (e apenas quando) todos os membros da mesa tiverem terminado a etapa anterior.

(b) Quando alguns alunos da mesa tiverem terminado com alguma atividade estimule a que ajudem aqueles que ainda não a fizeram, mas avise a eles que não é para lhes dizerem como se faz, nem para fazerem a atividade por eles.

## 5. Cartas na manga

1. Ter a disposição pelo menos uma folha com o mapa por mesa. No caso de alguma terminar muito rápido toda a atividade, pedir aos alunos para que encontrem o número de caminhos para ir do aeroporto ao Farol da Barra passando pelo Parque de Pituaçu.

## 6. Anexos

**Oficinas de Matemática Experimental**

# “Um Inglês em Salvador”

# Formulário 1

Grupo: ___________

**3.2.(d)** Qual estratégia nos leva a encontrar caminhos mais curtos?

Resposta:

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________.

**Oficinas de Matemática Experimental**

# “Um Inglês em Salvador”

# Formulário 2

Grupo: __________

**3.5.(d).** O que tem de diferente e de semelhante nos códigos de texto de caminhos mais curtos distintos?

Resposta:

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________.

**Guia de aplicação Fase 1 – Versão definitiva – Aplicação no Colégio Faraíldes e no IFBA.**

## Oficinas de Matemática Experimental

# “Um Inglês em Salvador”

5 de julho de 2017

## 1. Objetivos

1. Objetivos Matemáticos.

    (a) Exercitar localização de pontos no plano.
    (b) Introduzir algumas noções elementares associadas a *Análise Combinatória*.
    (c) Introduzir a noção de minimalidade como ferramenta de avaliação da qualidade de uma solução.
    (d) Apresentar ao aluno o processo de abstração e argumentação.

2. Objetivos Heurísticos.

    (a) Expor o aluno ao desafio.
    (b) Apresentar ao aluno o método experimental em matemática, estimulando-o a formular e testar hipóteses.
    (c) Induzir o aluno a formular perguntas e discutir possíveis respostas.
    (d) Estimular o aluno a formular e seguir instruções de ação.
    (e) Introduzir a ideia de simplificação como estratégia para resolução de problemas.

3. Objetivo não matemático.

    (a) Estimular o aluno a trabalhar em equipe.

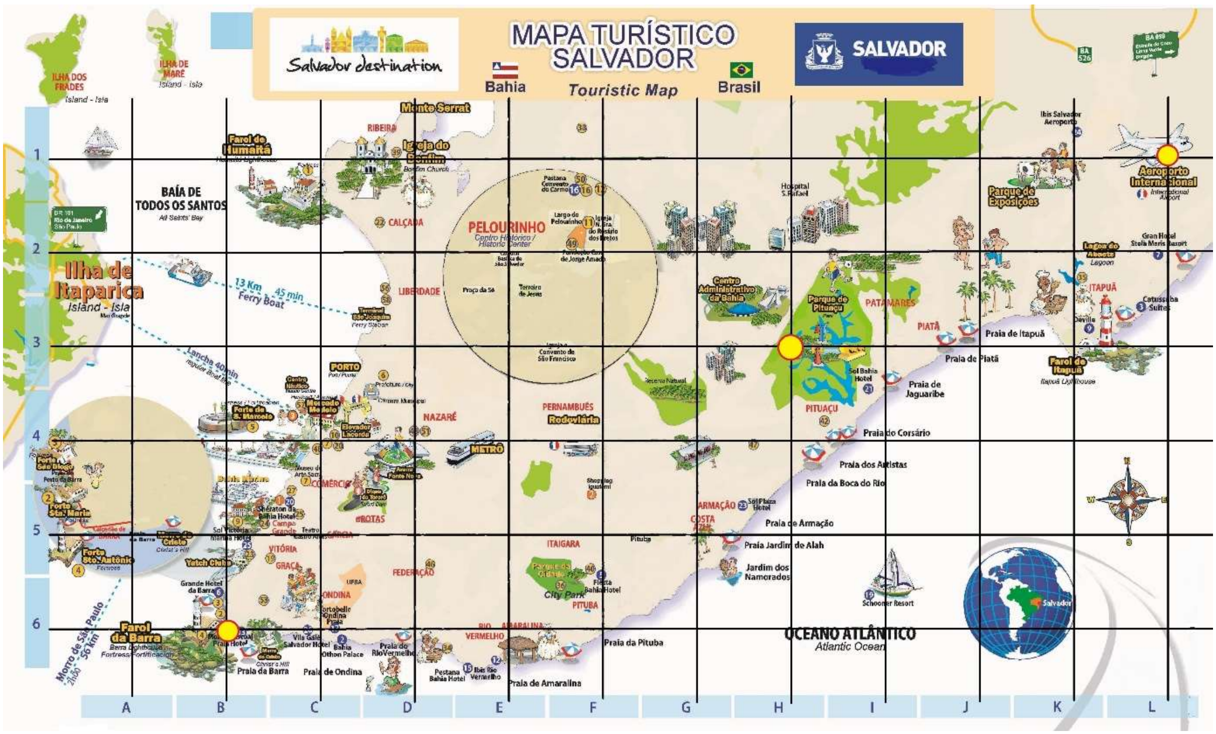



Figura 1: Mapa de avenidas (numeradas de 1 a 6) e de ruas (identificadas se A a L) vias de uso exclusivo do VATT (Veículo Anfíbio de Transporte de Turistas) da cidade de Salvador.

**Anfíbio: Veículo que consegue se locomover tanto na terra quanto na água.*


Figura 2: VATT em terra.


Figura 3: VATT na água.

## 2. Lista de Materiais

(a) Uma folha com a figura 1, impressão colorida, para cada grupo.
(b) Uma unidade do formulário 1 para cada grupo.
(c) Duas folhas numeradas de 1 a 2 com a figura 1, impressa em preto e branco, para cada um dos alunos.
(d) Canetas e marca-textos de cores diferentes por mesa, ao menos dois para cada membro do grupo.
(e) Duas folhas em branco por aluno.

**Um Inglês em Salvador**

Peter é um inglês de vinte e cinco anos fã de natureza e de carnaval, ele vai aproveitar suas férias para conhecer o Brasil. Ele virá a Salvador para conhecer o Parque de Pituaçu, a maior reserva ecológica da cidade, com fauna e flora diversificadas, e o Farol da Barra, marco turístico e parte um dos circuitos do carnaval de Salvador.

O jovem inglês chegará às 6h da manhã no aeroporto de Salvador e voará de lá para o Rio de Janeiro às 11h do mesmo dia. Na capital baiana, Peter sempre utilizará o VATT (Veiculo Anfíbio de Transporte de Turistas) que trafega tanto na terra quanto na água por vias de uso exclusivo dele. Tais vias são as avenidas (numeradas de 1 a 6) e de ruas (identificadas se A a L), conforme o mapa.

Como comprou as passagens do VATT com muita antecedência ele terá direito a escolher os percursos do VATT. Peter precisará da nossa ajuda para sugerir diversos caminhos diferentes de VATT que o levem do aeroporto ao Parque de Pituaçu e deste ao Farol da Barra, facilitando assim a sua escolha.

***Informação importante: O VATT só pode andar nas avenidas (numeradas de 1 a 6) e de ruas (identificadas se A a L), conforme o mapa, e, em cada percurso, não pode passar em um mesmo lugar mais de uma vez.***

## 3. Atividades

1. **Percebendo no mapa a localização do Parque de Pituaçu e do Farol da Barra e descobrindo alternativas de caminhos entre eles. (Fase 1)**

(a) Entregue a cada participante as três folhas, numeradas de 1 a 3 com os mapas impressos, as folhas de rascunho e uma caneta. As canetas dos alunos de cada mesa devem ter, duas a duas, cores distintas.
(b) Conte a história “Um Inglês em Salvador”.
(c) Verifique, por mesa, se todos entenderam razoavelmente as coordenadas de localização e as regras relativas aos caminhos permitidos.
(d) Peça preencherem o nome e o grupo em cada mapa e para destacarem ainda mais no mapa (folha 1) a localização do Parque de Pituaçu e do Farol da Barra.

(e) Peça para que na folha 1 os participantes encontrem os possíveis caminhos da forma mais diversa possível cumprindo as regras estabelecidas.

2. **Discussão.** Compare os diversos caminhos obtidos.

(a) Lembrem-se, Peter tem pouco tempo, vai preferir os caminhos mais curtos. Dentre os caminhos encontrados existem diferenças entre as distâncias percorridas?
(b) O caminho mais curto que cada mesa encontrou é o caminho mais curto possível?
(c) Existe mais de um caminho mais curto?
(d) Qual estratégia nos leva a encontrar caminhos mais curtos?
***Obs.: A resposta à essa pergunta (d) deverá ser escrita no formulário 1. Uma resposta por grupo.***

3. **Abrindo a cabeça**

(a) Estimular os alunos, através de dicas adequadas, a encontrar o princípio matemático por trás dessa situação.
(b) Convidar os alunos a encontrar situações da vida real que possam ser resolvidas pelo princípio encontrado.

## 4. Recomendações

1. Em relação às regras para percorrer os caminhos.

(a) Se você perceber que algum participante está encontrando dificuldade para entender as regras, NÃO AS EXPLIQUE.
- Se essa dificuldade ainda estiver generalizada, socialize a questão com a turma.
- Se a dificuldade for de um aluno remanescente, socialize a questão com a mesa.

(b) Se você perceber que algum participante está seguindo regras diferentes às que deveria seguir, NÃO DIZER QUE ESTÁ ERRADO, socialize a questão com a MESA dele, não com a turma toda. Neste momento muitos alunos já estarão concentrados trabalhando na resolução do problema; não os distraia com uma discussão desnecessária para eles, mas estimule sempre a troca de informações entre as mesas.

**2.** Se alguém tiver sérias dificuldades para resolver a parte 1 da atividade. Verifique se o participante entendeu e/ou está aplicando corretamente as regras.

(a) Se ainda não entendeu as regras, ou está aplicando de forma errada, siga a Recomendação 1.
(b) Se ainda não entendeu as regras, ou está aplicando de forma errada, siga a Recomendação 1.
(c) Se entendeu as regras, mas está encontrando dificuldades de abordagem para resolver o problema, socialize a questão na mesa, não com a turma toda.

**3.** Respeite o tempo da MESA.

(a) Passe para próxima etapa da atividade sempre que (e apenas quando) todos os membros da mesa tiverem terminado a etapa anterior.
(b) Quando alguns alunos da mesa tiverem terminado com alguma atividade estimule a que ajudem aqueles que ainda não a fizeram, mas avise a eles que não é para lhes dizerem como se faz, nem para fazerem a atividade por eles.

## 5. Cartas na manga

**1.** Ter a disposição pelo menos uma folha com o mapa por mesa. No caso de alguma terminar muito rápido toda a atividade, pedir aos alunos para que encontrem o número de caminhos para ir do aeroporto ao Farol da Barra passando pelo Parque de Pituaçu.

# 6. Anexos

## 1. Formulário 1

**Oficinas de Matemática Experimental**

“Um Inglês em Salvador”

Formulário 1

Grupo: __________

**3.2.(d)** Qual estratégia nos leva a encontrar caminhos mais curtos?

Resposta:

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________.

**Guia de aplicação Fase 2 – Versão definitiva – Aplicação no Colégio Faraíldes e no IFBA.**

## Oficinas de Matemática Experimental

# “Um Inglês em Salvador”

19 de julho de 2017

## 1. Objetivos

1. Objetivos Matemáticos.

   (a) Exercitar localização de pontos no plano.
   (b) Introduzir algumas noções elementares associadas a *Análise Combinatória*.
   (c) Introduzir a noção de minimalidade como ferramenta de avaliação da qualidade de uma solução.
   (d) Apresentar ao aluno o processo de abstração e argumentação.

2. Objetivos Heurísticos.

   (a) Expor o aluno ao desafio.
   (b) Apresentar ao aluno o método experimental em matemática, estimulando-o a formular e testar hipóteses.
   (c) Induzir o aluno a formular perguntas e discutir possíveis respostas.
   (d) Estimular o aluno a formular e seguir instruções de ação.
   (e) Introduzir a ideia de simplificação como estratégia para resolução de problemas.

3. Objetivo não matemático.

   (a) Estimular o aluno a trabalhar em equipe.

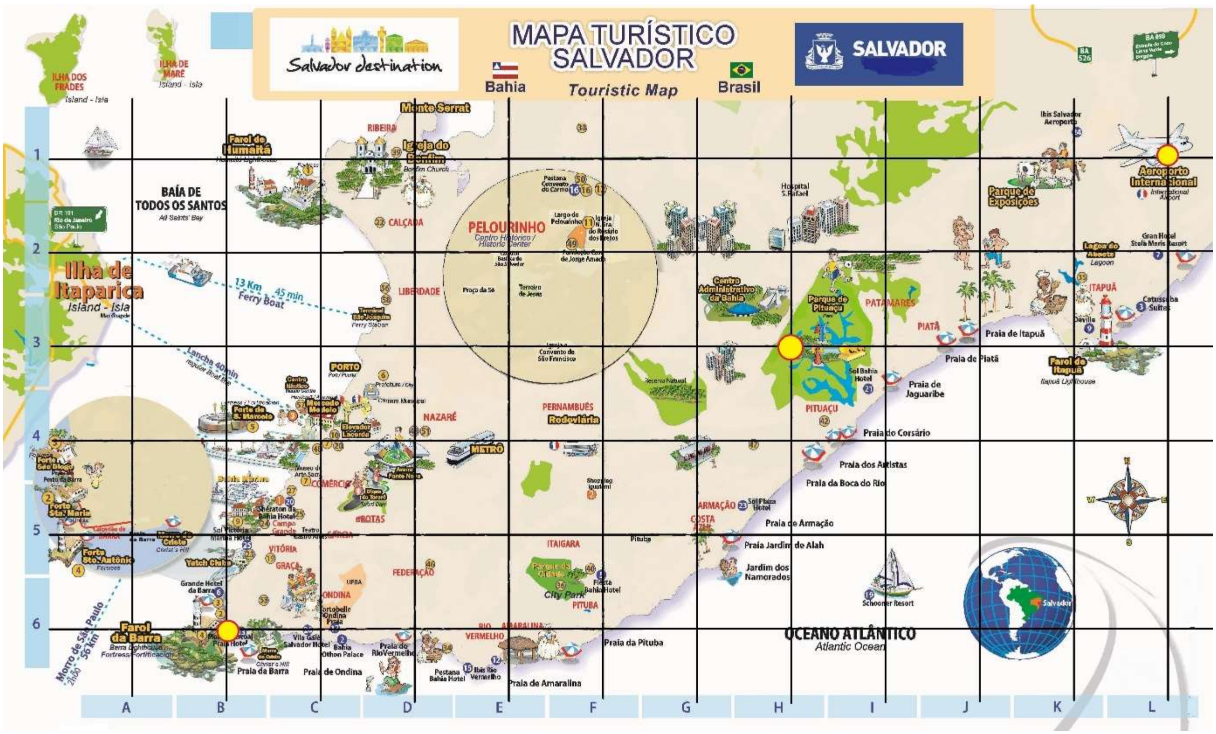



Figura 1: Mapa de avenidas (numeradas de 1 a 6) e de ruas (identificadas se A a L) vias de uso exclusivo do VATT (Veículo Anfíbio de Transporte de Turistas) da cidade de Salvador.

**Anfíbio: Veículo que consegue se locomover tanto na terra quanto na água.*


Figura 2: VATT em terra.


Figura 3: VATT na água.

## 2. Lista de Materiais

(a) Uma folha com a figura 1, impressão colorida, para cada grupo.
(b) Uma unidade do formulário 2 para cada grupo.
(c) Duas folhas numeradas de 2 a 3 com a figura 1, impressa em preto e branco, para cada um dos alunos.
(d) Canetas de cores diferentes por mesa, uma para cada membro do grupo.
(e) Duas folhas em branco por aluno.

**Um Inglês em Salvador**

Peter é um inglês de vinte e cinco anos fã de natureza e de carnaval, ele vai aproveitar suas férias para conhecer o Brasil. Ele virá a Salvador para conhecer o Parque de Pituaçu, a maior reserva ecológica da cidade, com fauna e flora diversificadas, e o Farol da Barra, marco turístico e parte um dos circuitos do carnaval de Salvador.

O jovem inglês chegará às 6h da manhã no aeroporto de Salvador e voará de lá para o Rio de Janeiro às 11h do mesmo dia. Na capital baiana, Peter sempre utilizará o VATT (Veiculo Anfíbio de Transporte de Turistas) que trafega tanto na terra quanto na água por vias de uso exclusivo dele. Tais vias são as avenidas (numeradas de 1 a 6) e de ruas (identificadas se A a L), conforme o mapa.

Como comprou as passagens do VATT com muita antecedência ele terá direito a escolher os percursos do VATT. Peter precisará da nossa ajuda para sugerir diversos caminhos diferentes de VATT que o levem do aeroporto ao Parque de Pituaçu e deste ao Farol da Barra, facilitando assim a sua escolha.

***Informação importante: O VATT só pode andar nas avenidas (numeradas de 1 a 6) e de ruas (identificadas se A a L), conforme o mapa, e, em cada percurso, não pode passar em um mesmo lugar mais de uma vez.***

## 3. Atividades

1. **Percebida a estratégia que encontra os caminhos mais curtos, em oficina anterior, destacando ainda mais a localização do aeroporto e o Parque de Pituaçu e encontrando diversas alternativas de caminhos mais curtos entre eles.**

   (a) Peça para cada destacar ainda mais a localização do aeroporto e do Parque de Pituaçu nos mapas das folhas 2 e 3.
   (b) Peça para cada um encontra, no mapa da folha 2, ao menos três caminhos mais curtos e distintos entre o aeroporto e Parque de Pituaçu.
   (c) Peça para cada grupo encontrar a maior quantidade que conseguirem de caminhos mais curtos que levem do aeroporto ao Parque de Pituaçu utilizando a folha 3.

2. **Encontrando códigos de texto para representar os caminhos mais curtos.**

(e) Conte aos alunos o complemento da estória:
Teremos que informar hoje a Peter as nossas sugestões de caminhos mais curtos. Mas o jovem inglês trabalha numa plataforma de petróleo e a comunicação com os tripulantes da plataforma só é possível através de mensagens de celular para o ***pager*** que cada pessoa embarcada tem, que só pode receber uma mensagem de, no máximo, 30 caracteres. Peter estará aguardando a mensagem de texto.
(f) Peça para cada grupo pensar estratégias de envio das sugestões de caminho mais curto a Peter que atendam as regras de comunicação com ele.
(g) Peça para cada grupo transformar todos os caminhos encontrados em códigos de texto de mesma natureza, um código para cada caminho.

3. **Discussão.** Analise os diversos caminhos mais curtos obtidos. Compare os caminhos entre si, os caminhos com os respectivos códigos e os códigos entre si.

(a) Existe uma quantidade máxima de caminhos mais curtos?
(b) Podemos encontrar essa quantidade máxima de caminhos mais curtos um a um marcando no mapa?
(c) Podemos encontrar essa quantidade máxima de caminhos mais curtos através de seus respectivos códigos?
(d) O que tem de diferente e de semelhante nos códigos de texto de caminhos mais curtos distintos?
***Obs.: A resposta à essa pergunta (d) deverá ser escrita no formulário 2. Uma resposta por grupo.***
(e) Como saber a quantidade de caminhos mais curtos sem ter que contar? Existe um princípio matemático para encontrar essa quantidade?

4. **Abrindo a cabeça**

(a) Estimular os alunos, através de dicas adequadas, a encontrar o princípio matemático por trás dessa situação.
(b) Convidar os alunos a encontrar situações da vida real que possam ser resolvidas pelo princípio encontrado.

## 4. Recomendações

1. Em relação às regras para percorrer os caminhos.

(a) Se você perceber que algum participante está encontrando dificuldade para entender as regras, NÃO AS EXPLIQUE.

- Se essa dificuldade ainda estiver generalizada, socialize a questão com a turma.
- Se a dificuldade for de um aluno remanescente, socialize a questão com a mesa.

(b) Se você perceber que algum participante está seguindo regras diferentes às que deveria seguir, NÃO DIZER QUE ESTÁ ERRADO, socialize a questão com a MESA dele, não com a turma toda. Neste momento muitos alunos já estarão concentrados trabalhando na resolução do problema; não os distraia com uma discussão desnecessária para eles, mas estimule sempre a troca de informações entre as mesas.

**2.** Se alguém tiver sérias dificuldades para resolver a parte 1 da atividade. Verifique se o participante entendeu e/ou está aplicando corretamente as regras.

(a) Se ainda não entendeu as regras, ou está aplicando de forma errada, siga a Recomendação 1.
(b) Se entendeu as regras, mas está encontrando dificuldades de abordagem para resolver o problema, socialize a questão na mesa, não com a turma toda.

**3.** Respeite o tempo da MESA.

(a) Passe para próxima etapa da atividade sempre que (e apenas quando) todos os membros da mesa tiverem terminado a etapa anterior.
(b) Quando alguns alunos da mesa tiverem terminado com alguma atividade estimule a que ajudem aqueles que ainda não a fizeram, mas avise a eles que não é para lhes dizerem como se faz, nem para fazerem a atividade por eles.

## 5. Carta na manga

**1.** Ter a disposição pelo menos uma folha com o mapa por mesa. No caso de alguma terminar muito rápido toda a atividade, pedir aos alunos para que encontrem o número de caminhos para ir do aeroporto ao Farol da Barra passando pelo Parque de Pituaçu.

# 6. Anexos

## 1. Formulário 2

**Oficinas de Matemática Experimental**

# “Um Inglês em Salvador”

# Formulário 2

Grupo: __________

**3.3.(d).** O que tem de diferente e de semelhante nos códigos de texto de caminhos mais curtos distintos?

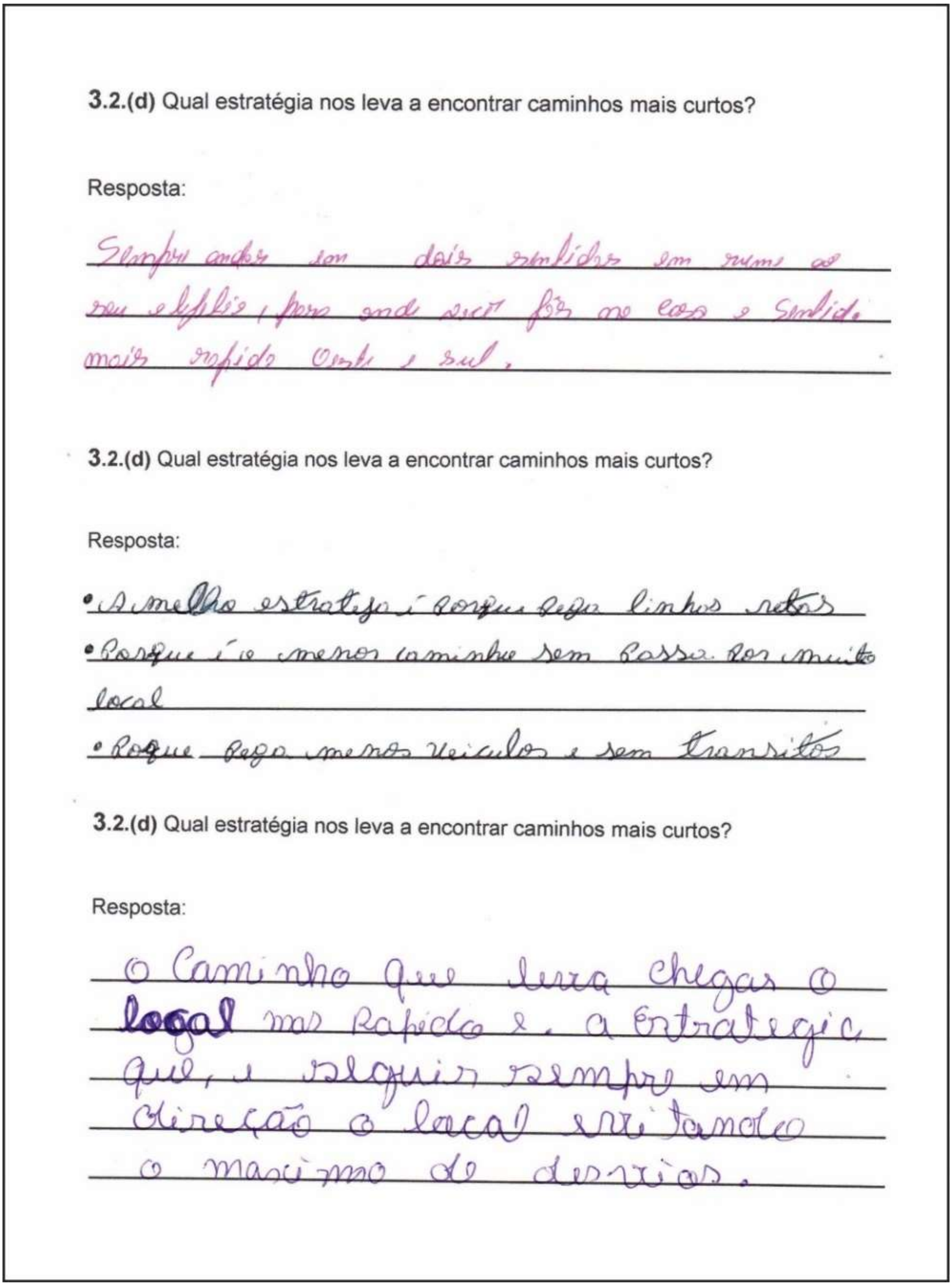
Resposta:

.

Quadro 2: Evolução histórica da Análise Combinatória.

| **Período** | **Matemático** | **Origem** | **Episódio da História da Matemática** |
|---|---|---|---|
| Em torno de 300 a. C. | Euclides | Grega | Desenvolveu o binômio $(1+x)^n$ para $n=2$ e publicou em Elementos. |
| No final do século X | Al-Karaji | Árabe | Conhecia a lei de formação dos elementos do Triângulo de Pascal $C_{n+1}^{p+1}= C_n^{p+1}+ C_n^p$ . |
| (1114 - 1185) | Báskhara | Hindu (Indiana) | Sabia calcular o número de permutações, de combinações e arranjos de n objetos. |
| Em torno de 1300 d. C. | Chu Shih-Chieh | Chinesa | Conhecia o Triângulo de Pascal. |
| (1288 - 1344) | Levi Ben Gerson | Francesa | Sabia calcular o número de permutações, de combinações e arranjos de n objetos. |
| (1486 - 1567) | Michael Stifel | Inglesa | Introduziu o nome coeficiente binonial e mostrou como calcular $(1+x)^n$ a partir do desenvolvimento de $(1+x)^{n-1}$. |
| (1495 - 1552) | Petrus Apianus | Alemã | Foi o responsável pela chegada do Triângulo de Pascal no ocidente no frontispício de um livro por ele próprio. |
| (1499 - 1559) | Niccolò Fontana Tartaglia | Italiana | Relacionou os elementos do triângulo de Pascal com as potências de $(x+y)$. |
| (1623 - 1662) | Blaise Pascal | Francesa | Publicou um tratado de 1654 mostrando como utilizar o hoje denominado Triângulo de Pascal para encontrar os coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^n$. |
| (1654 - 1705) | Jaime Bernoulli | Suiça | Em *Ars Conjectandi* com a idéia de Pascal mostrou que $(x+y)^n= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} x^{n-i}y^i$ e dedicou a segunda parte do livro à teoria das combinações e permutações. |
| (1646 - 1727) | Isaac Newton | Inglesa | Mostrou $(1+x)^n$ sem calcular $(1+x)^{n-1}$ e que cada coeficiente pode ser calculado por $\binom{n}{r+1}= \frac{n-r}{r+1}\binom{n}{r}$. |

Fonte: (MORGADO et al., 1991), dados adaptados.



**3.2.(d)** Qual estratégia nos leva a encontrar caminhos mais curtos?

Resposta:

Sempre andar com dois sentidos em rumo ao seu objetivo, para onde você for no caso o sentido mais rápido Oeste e sul.

**3.2.(d)** Qual estratégia nos leva a encontrar caminhos mais curtos?

Resposta:

• A melhor estratégia é porque pega linhas retas
• Porque é o menor caminho sem passar por muito local
• Poque pega menos veiculos e sem transitos

**3.2.(d)** Qual estratégia nos leva a encontrar caminhos mais curtos?

Resposta:

O caminho que leva chegar o local mas Rapido e a Estrategia que, e seguir sempre em direção o local evitando o maximo de desvios.

Figura 10: Reprodução de respostas do formulário 1, Colégio Farаildes.

.