

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CÍCERO THIAGO BERNARDINO MAGALHÃES

TÍTULO DO TRABALHO: TEOREMA DE FEUERBACH

FORTALEZA

2018

CÍCERO THIAGO BERNARDINO MAGALHÃES

TÍTULO DO TRABALHO: TEOREMA DE FEUERBACH

Tese ou Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Frederico do Vale Girão

FORTALEZA

2018

Cícero Thiago Bernardino Magalhães

TEOREMA DE FEUERBACH

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria.

Aprovada em: 22 / 02 / 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Frederico do Vale Girão (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Wesley Marinho Lozório
Unilab

Dedico este trabalho à minha filha Beatriz

AGRADECIMENTOS

Desde de 2014 venho enfrentando uma luta contra a depressão. De tal forma que minha vida profissional e estudantil foi muito afetada, inclusive a confecção desse trabalho. Muitas pessoas foram importantes para a realização desse trabalho e muitas delas são muito importantes na minha vida. Agradeço ao meu orientador Frederico do Vale Girão pela enorme paciência durante todo o período que fui seu orientando me ajudando muitas vezes na minha luta contra a depressão e, claro, na sua principal função de orientador matemático. Agradeço aos meus pais por terem sido maravilhosos durante toda a minha vida, aos meus irmãos, em especial o Júnior, por ser o maior incentivador desse mestrado, aos meus demais familiares (tios, primos,...), aos meus amigos Renato Rocha, Carlos Eduardo Lavor, Marcelo Mendes, Samuel Barbosa, Yuri Lima, Paulo Cruz e Antonio Caminha por serem muitas vezes quase irmãos, às escolas que trabalho, Colégio Ari de Sá, Colégio Master e Colégio Teleyos, por serem compreensivas nas vezes que precisei estar ausente e quando muitas vezes precisei de apoio, ao meu tio Flávio Germano por ter financiado meus estudos durante toda a minha vida escolar, ao meu tio Francisco Alcides Germano por ser uma inspiração e por ter sido um incentivador dos meus estudos em matemática, ao meu primo Régis Magalhães por me socorrer inúmeras vezes quando tive problemas com a plataforma LaTeX, aos meus médicos psiquiatras Dr. Cristiano Magalhães Clemente e Dr. Raimundo Severo, às minhas psicólogas Denise Castelo e Isadora Dias Gomes, em especial a Isadora por ter me ajudado a criar coragem e concluir esse trabalho e à minha filha, Beatriz, por ser tão maravilhosa, tão linda, tão meiga, por me amar como eu sou e que saiba que você é minha razão de viver e por você tudo eu farei.

”O mais belo teorema de geometria elementar descoberto desde o tempo de Euclides.”
Geômetra americano Julian Louvell Coolidge
(1873 – 1954)

RESUMO

A ideia desse trabalho é apresentar algumas demonstrações do belíssimo teorema de Feuerbach que seja acessível a estudantes de ensino fundamental e médio. Fiz uma introdução dos principais resultados geométricos até chegar ao círculo dos 9 pontos, em seguida uma breve discussão sobre a transformação geométrica inversão, que em raros casos é apresentada a estudantes de ensino médio quando a disciplina de desenho geométrico é oferecida, para que possamos desenvolver a primeira das três demonstrações. Logo, em seguida, uma demonstração mais simples e com resultados conhecidos por estudantes de ensino médio. Por fim, uma demonstração usando geometria analítica também bastante acessível a estudantes de ensino médio. Gostaria de concluir essa apresentação reforçando a enorme importância do estudo da geometria euclidiana plana durante todo o ciclo básico de ensino para que o aluno possa realizar uma leitura e a representação da realidade e podendo agir sobre ela.

Palavras-chave: Feuerbach.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	Teorema de Feuerbach	9
2.1	Fatos históricos	9
2.2	Primeira demonstração	9
2.3	Segunda demonstração	23
2.4	Terceira demonstração	28
	REFERÊNCIAS	29

1 INTRODUÇÃO

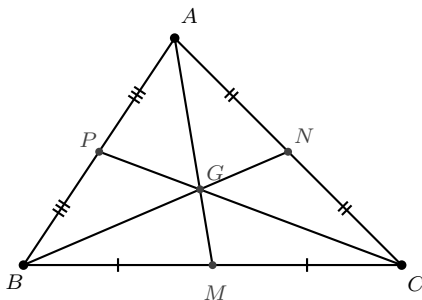
2 Teorema de Feuerbach

2.1 Fatos históricos

O círculo que passa pelos pés das perpendiculares baixadas dos vértices de um triângulo sobre os lados opostos passa também pelos pontos médios desses lados assim como pelos pontos médios dos segmentos que unem os vértices ao ponto de intersecção das perpendiculares. Esse círculo é conhecido como *Círculo dos nove pontos*. Os matemáticos Poncelet e Brianchon publicaram juntos um artigo nas *Annales de Gergonne* de 1820 – 1821 que, embora denominado "*Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère*", continha uma prova do belo teorema. Este teorema em geral não leva nem o nome de Brianchon nem o de Poncelet, mas o de um matemático alemão Karl Wilhelm Feuerbach (1800 – 1834) que, trabalhando independentemente, publicou - o em 1822. A pequena monografia contendo este teorema e algumas proposições a ele relacionadas incluía também provas de algumas fascinantes propriedades do círculo. Entre estas está o fato de o centro do círculo dos nove pontos estar sobre a reta de Euler e ser o ponto médio entre o ortocentro e o circuncentro, e o "Teorema de Feuerbach" que diz que o círculo dos nove pontos de qualquer triângulo é tangente internamente ao círculo inscrito e tangente externamente aos três círculos ex - inscritos. Um entusiasta, o geômetra americano Julian Louvell Coolidge (1873 – 1954) chamou este de "o mais belo teorema de geometria elementar descoberto desde o tempo de Euclides". Deve - se notar que o encanto destes teoremas sustentou considerável investigação na geometria de triângulos e círculos durante todo o século dezanove.

2.2 Primeira demonstração

Theorem 1. *As três medianas de um triângulo intersectam - se num mesmo ponto, chamado **Baricentro**, que divide cada uma das medianas em duas partes tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra.*



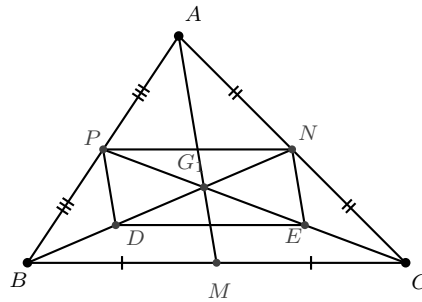
Sejam N e P os pontos médios dos lados AC e AB , respectivamente, D e E os pontos médios de BG_1 e CG_1 , respectivamente. Então,

$$NP \parallel BC \text{ e } NP = \frac{BC}{2}$$

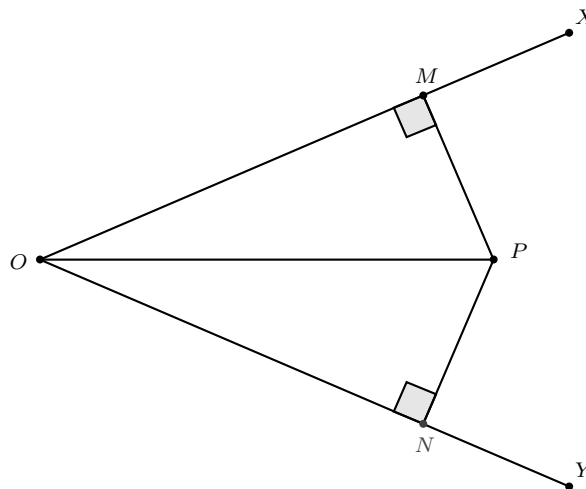
e

$$DE \parallel BC \text{ e } DE = \frac{BC}{2}$$

portanto, $PDEN$ é um paralelogramo. Com isso, $BD = DG_1 = G_1N$, $CE = EG_1 = G_1P$, então $BG_1 = 2G_1N$ e $CG_1 = 2G_1P$. De maneira análoga, as medianas AM e BN intersectam - se em um ponto G_2 tal que $AG_2 = 2G_2M$ e $BG_2 = 2G_2N$. Encontramos, então, dois pontos distintos G_1 e G_2 , no interior do segmento BN que o dividem na mesma razão, o que é uma contradição logo, $G_1 = G_2 = G$. Portanto, as três medianas intersectam - se em um mesmo ponto G que chamaremos de baricentro.



Theorem 2. *Seja $\angle XOY$ um ângulo dado e P um ponto em seu interior. Então, a distância de P a XO é igual à distância de P a YO se, e somente se, o ponto P pertence à bissetriz.*

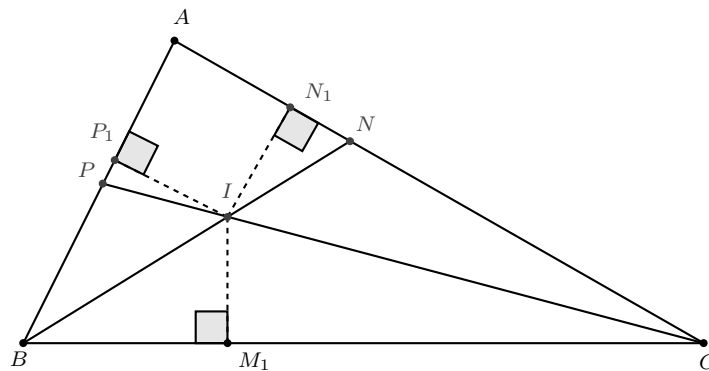


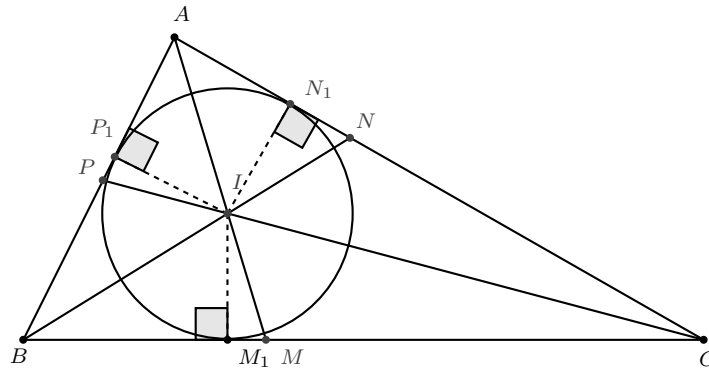
Suponha inicialmente que o ponto P pertence à bissetriz. Então $\angle XOP = \angle YOP$. Sejam M e N os pés das perpendiculares baixadas desde P sobre OX e OY , respectivamente. Podemos concluir, que $\triangle MOP \equiv \triangle NOP$, pelo caso **LAA**, pois OP é lado comum, $\angle MOP = \angle NOP$ e $\angle OMP = \angle ONP = 90^\circ$. Portanto, $PM = PN$.

Reciprocamente, suponhamos agora que $PM = PN$. Pelo caso especial de congruência de triângulos, cateto-hipotenusa, os triângulos MOP e NOP são congruentes. Portanto, $\angle MOP = \angle NOP$, e assim, P pertence à bissetriz.

Theorem 3. As três bissetrizes internas de um triângulo ABC se intersectam num ponto chamado **Incentro**, que é equidistante dos lados do triângulo.

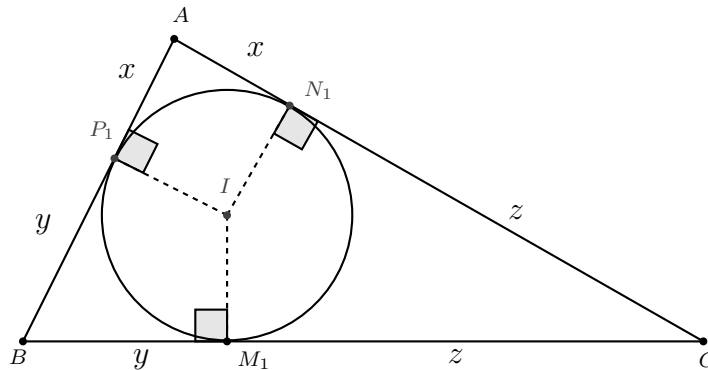
Sejam BN e CP as bissetrizes relativas aos vértices B e C , respectivamente, e I o seu ponto de interseção. Como o ponto I pertence às bissetrizes BN e CP , então $IM_1 = IP_1$ e $IM_1 = IN_1$, em que M_1 , N_1 , P_1 são os pés das perpendiculares baixadas desde I sobre os lados BC , CA e AB , respectivamente. Como $IP_1 = IN_1$, então, pela proposição anterior, I pertence à bissetriz do ângulo $\angle A$. Portanto, as três bissetrizes passam por um mesmo ponto chamado incentro que será o centro da circunferência inscrita no triângulo pois I equidista dos lados do triângulo. Além disso, M_1 , N_1 e P_1 são os pontos de tangência do círculo com os lados BC , CA e AB , respectivamente.





Theorem 4. *Seja ABC um triângulo tal que $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$. Sejam M_1 , N_1 e P_1 os pontos de tangência com os lados BC , CA e AB , respectivamente. Então, $AN_1 = AP_1 = p - a$, $BM_1 = BP_1 = p - b$ e $CM_1 = CN_1 = p - c$, em que $p = \frac{a + b + c}{2}$.*

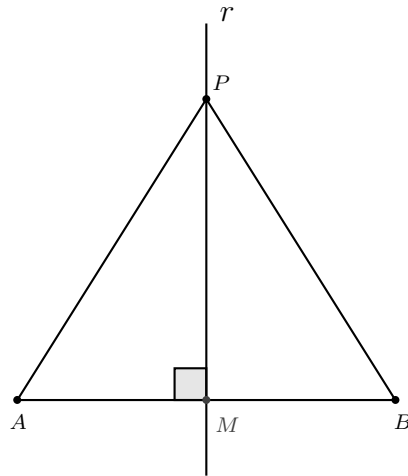
Temos que $y + z = a$, $x + z = b$ e $x + y = c$. Resolvendo o sistema encontramos $x = p - a$, $y = p - b$ e $z = p - c$.



Theorem 5. *Sejam A , B e P três pontos distintos no plano. Temos que $PA = PB$ se, e somente se, o ponto P pertence à mediatriz do segmento AB .*

*Sejam M o ponto médio de AB e r a sua mediatriz. Suponha inicialmente que P pertence à mediatriz. Com isso $AM = MB$ e r é perpendicular à AB . É fácil ver que os triângulos $\triangle AMP$ e $\triangle BMP$ são congruentes pelo caso **LAL** e, com isso, $PA = PB$. Reciprocamente, suponha agora, que $PA = PB$, com isso $\triangle ABP$ é isósceles de base AB . Tracemos a mediana relativa ao lado AB . É fácil ver que os triângulos $\triangle AMP$ e $\triangle BMP$*

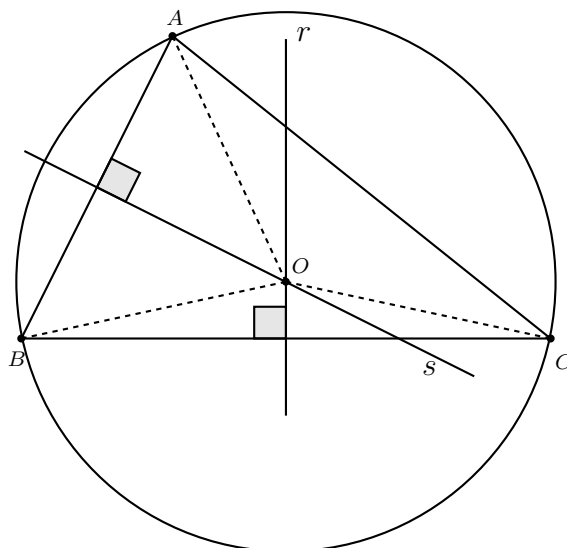
são congruentes pelo caso **LLL** e, com isso, $\angle AMP \equiv \angle BMP = 90^\circ$, ou seja, P está sobre a mediatriz.



Theorem 6. *As três mediatrizes de um triângulo ABC se intersectam num ponto chamado **Circuncentro** que é o centro da circunferência circunscrita.*

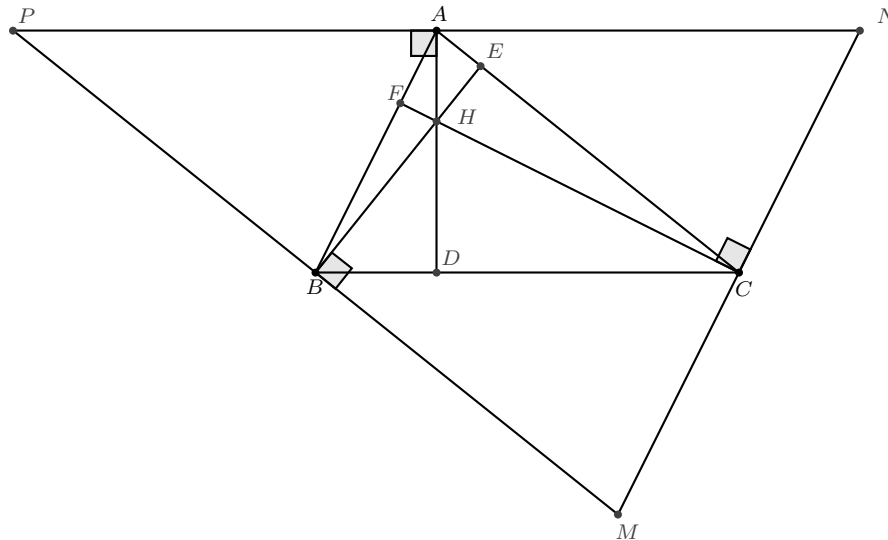
Sejam r e s as mediatrizes relativas aos lados BC e AB , respectivamente, e seja O o ponto de interseção das duas mediatrizes. Pelo teorema 5, temos que $BO = CO$ e $BO = AO$. Então, $CO = AO$ e, também pelo teorema 5, O deve estar sobre a mediatriz relativa ao lado AC .

Além disso o circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC pois é equidistante dos três vértices do triângulo.



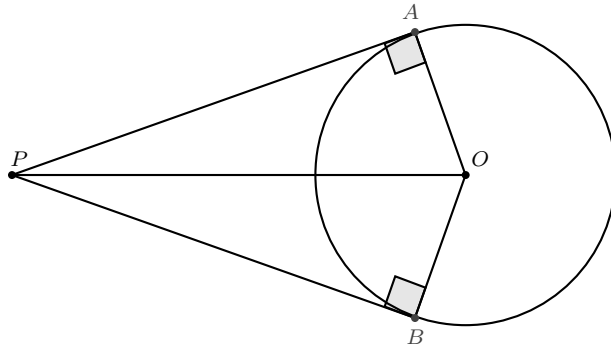
Theorem 7. *As três alturas de um triângulo ABC se intersectam num ponto chamado Ortocentro.*

Inicialmente tracemos pelos vértices A , B e C , retas paralelas aos lados BC , CA e AB , respectivamente, que determinam o triângulo MNP . Já sabemos que as três mediatrizes de um triângulo se intersectam em seu circuncentro. É fácil perceber que A , B e C são os pontos médios dos segmentos NP , MP e MN , respectivamente, pois $PACB$, $NABC$ e $ABMC$ são paralelogramos e, portanto, os lados opostos de um paralelogramo são iguais. Tracemos as mediatrizes dos segmentos MP , MN e PN que irão se intersectar no ponto H . Mas as mediatrizes do triângulo MNP são as alturas do triângulo ABC . Portanto, provamos que as três alturas de um triângulo ABC se intersectam em um ponto que será chamado de ortocentro.



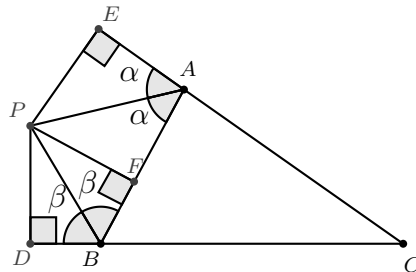
Theorem 8. ("Bico") *Seja P um ponto externo à uma circunferência Γ . Por P são traçadas tangentes à Γ e sejam A e B os pontos de intersecção das tangentes com a circunferência. Então, $PA = PB$.*

É fácil ver que os triângulos PAO e PBO são congruentes pelo caso cateto - hipotenusa. Portanto, $PA = PB$.



Theorem 9. *As bissetrizes externas de quaisquer dois ângulos de um triângulo são concorrentes com a bissetriz interna do terceiro ângulo.*

No triângulo ABC traçamos as bissetrizes externas dos ângulos $\angle A$ e $\angle B$ os quais se intersectam em P . Do teorema 3, como P pertence à bissetriz externa do ângulo $\angle A$, então $PE = PF$. Além disso, P pertence à bissetriz externa do ângulo $\angle B$, então $PF = PD$. Como $PD = PE$, pelo teorema 3, concluímos que P pertence à bissetriz do ângulo $\angle C$. Dessa forma, se P equidista dos três lados do triângulo ABC e é um ponto no exterior do triângulo então P é o centro de uma das três circunferências ex - inscritas do triângulo



ABC .

A circunferência com centro I_a e raio r_a é uma das três circunferências ex - inscritas que representaremos apenas por (I_a, r_a) . Analogamente são definidas as circunferências (I_b, r_b) e (I_c, r_c) . Os pontos I_a , I_b e I_c são os ex - incentros. Cada circunferência ex - inscrita toca um dos lados do triângulo internamente e os outros dois externamente, ou seja, toca no prolongamento. Na figura a seguir, observe que pela propriedade de segmentos tangentes a uma circunferência, vulgarmente conhecido com **Teorema do bico**, temos que $BL = BG$, além disso

$$\begin{aligned} BL + BG &= (BC + CL) + (AG + AB) \\ &= BC + CE + AE + AB = a + b + c = 2p. \end{aligned}$$

Portanto, as tangentes traçadas por B à circunferência (I_b, r_b) tem medida p . Dessa forma é fácil ver que

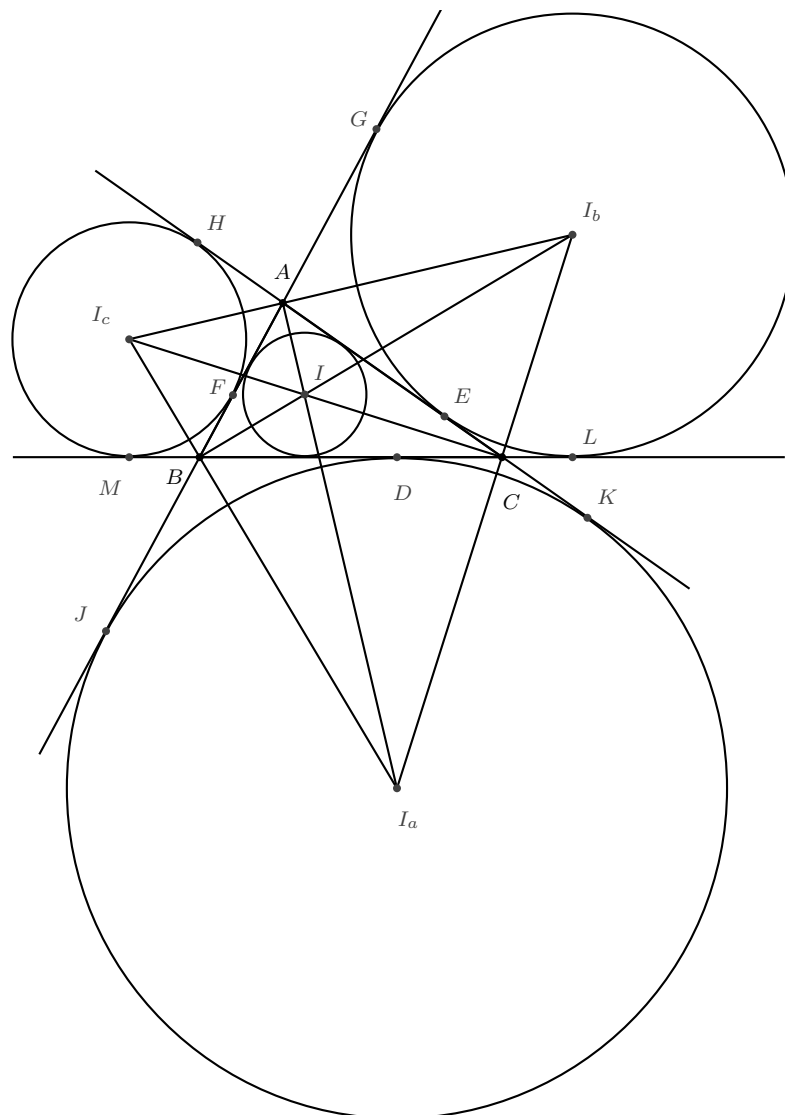
$$AJ = AK = BG = BL = CH = CM = p.$$

Além disso, $CL = BL - BC = p - a$. Então,

$$BM = BF = CL = CE = p - a,$$

$$CK = CD = AH = AF = p - b,$$

$$AG = AE = BJ = BD = p - c.$$



Theorem 10. (*Bissetriz interna*) A bissetriz interna AL do ângulo $\angle A$ de um triângulo ABC divide internamente o lado oposto BC na razão $\frac{AB}{CA}$, ou seja,

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{CA}$$

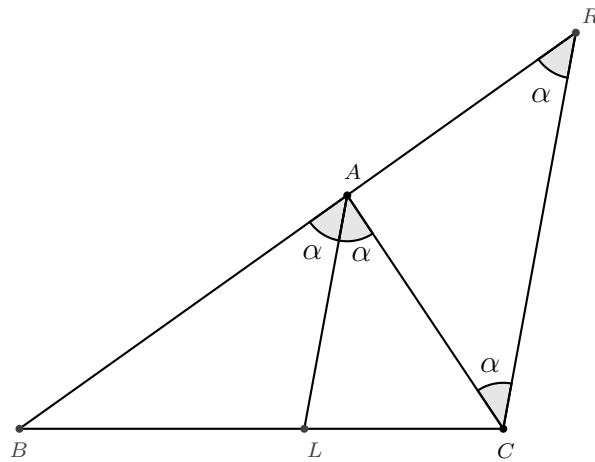
em que L é o ponto de intersecção da bissetriz interna com o lado BC .

Seja R a intersecção da paralela à bissetriz AL traçada pelo ponto C . É fácil ver que $\angle BAL = \angle CAL = \angle ACR = \angle ARC$, com isso, $AR = AC$. Pelo teorema de Tales temos que

$$\frac{AB}{AR} = \frac{BL}{LC}.$$

Como $AR = AC$, então

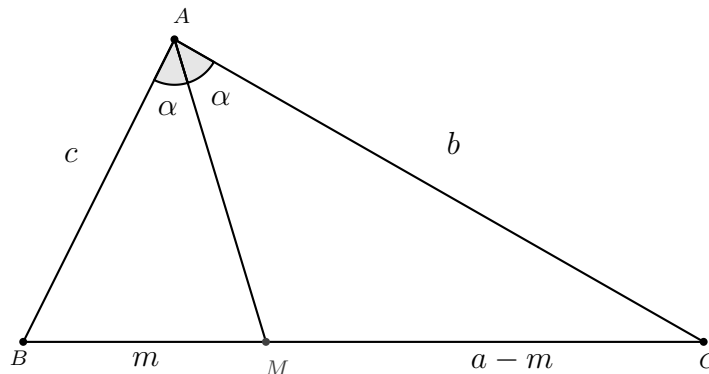
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}.$$



Theorem 11. Seja ABC um triângulo tal que $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ e seja AM a bissetriz relativa ao ângulo $\angle A$, com M em BC . Então, $BM = \frac{a \cdot c}{b + c}$.

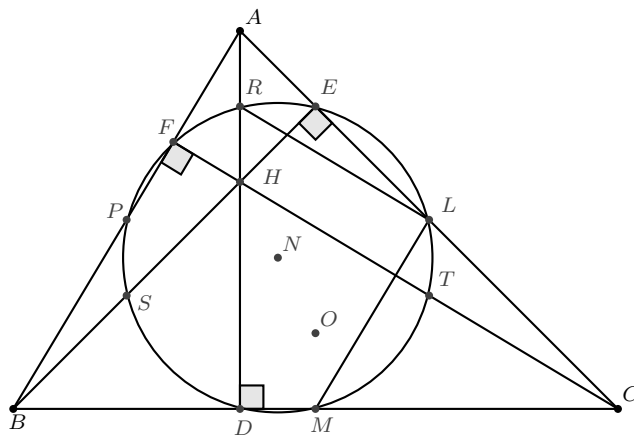
Usando o teorema da bissetriz interna temos que

$$\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CM} \Leftrightarrow \frac{c}{m} = \frac{b}{a - m} \Leftrightarrow m = \frac{a \cdot c}{b + c}.$$



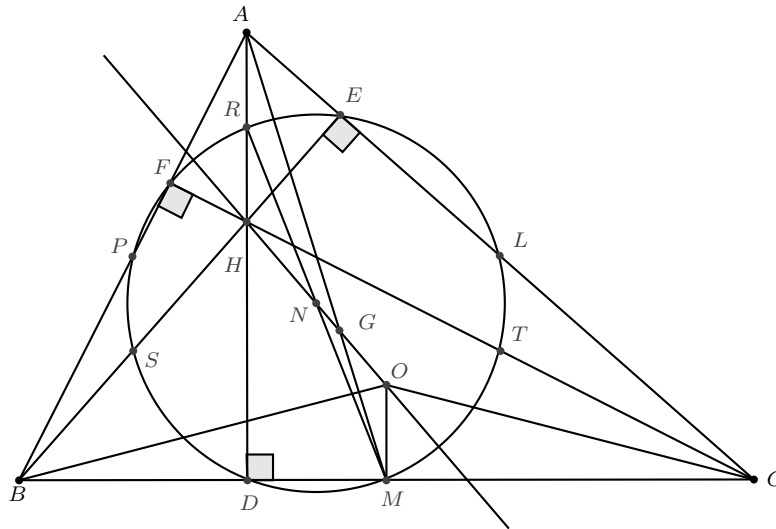
Theorem 12. *Os pés das alturas de um triângulo, os pontos médios do três lados e os pontos médios dos segmentos que ligam os vértices ao ortocentro estão sobre uma circunferência chamada **Circunferência dos 9 pontos**.*

Queremos provar que M, L, P, D, E, F, R, S e T são concíclicos. É suficiente provar que R e D estão sobre a circunferência circunscrita ao triângulo MLP , pois o restante é análogo. Considere a circunferência Γ de diâmetro RM . É fácil ver que D pertence a Γ . Por outro lado, $RL \parallel HC$, $LM \parallel AB$ e $HC \perp AB$, o que implica que $\angle RLM = 90^\circ$. Portanto, L (e por simetria P) pertence a Γ .



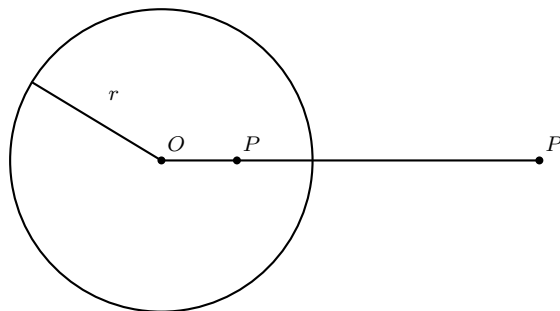
Theorem 13. *O centro da circunferência dos 9 pontos é o ponto médio do segmento formado pelo ortocentro e pelo circuncentro.*

Seja RM um diâmetro da circunferência dos 9 pontos e seja N a interseção de RM e OH . Como R é ponto médio de AH então $RH = OM$. Além disso, $AH \parallel OM$. Portanto, $\triangle RHN \cong \triangle NOM$, $RN = NM$ e $HN = ON$.



A inversão é uma transformação entre os pontos do plano e se realiza com a ajuda de uma circunferência Γ , de centro O e raio r , a que chamaremos de **circunferência de inversão**. Diremos que P' é o **ponto inverso** de P com a relação $\Gamma = (O, r)$ se

- (a) P' se encontra na reta que parte de O em direção a P .
- (b) $OP \cdot OP' = r^2$.



Da definição são imediatas as seguintes afirmações:

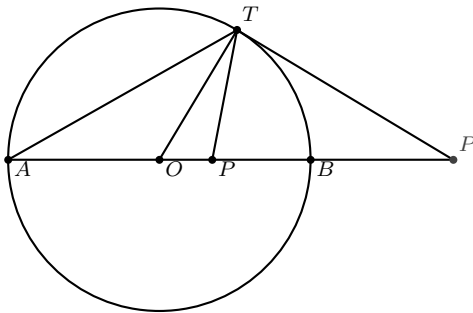
- (i) Se P' é o inverso de P , então P é o inverso de P' .
- (ii) Os pontos de Γ são seus próprios inversos e são os únicos pontos com essa propriedade.
- (iii) Para os pontos inversos P e P' , que não estão sobre Γ , temos que um se encontra no interior de Γ e o outro no exterior.
- (iv) Se P' está no exterior de Γ e T é um ponto sobre Γ tal que $P'T$ é tangente a Γ , então o pé da perpendicular de T sobre OP' é P , o inverso de P' . (Este fato segue do fato de que os triângulos OTP' e OPT são semelhantes).

(v) Se P está no interior de Γ e T é a intersecção da perpendicular a OP por P com a circunferência, então a tangente a Γ por T intersecta OP em P' , o inverso de P .

(vi) Com a ajuda de (iv) e (v) é fácil construir com régua e compasso o inverso de um ponto.

(vii) O ponto O , centro da circunferência de inversão, não possui inverso.

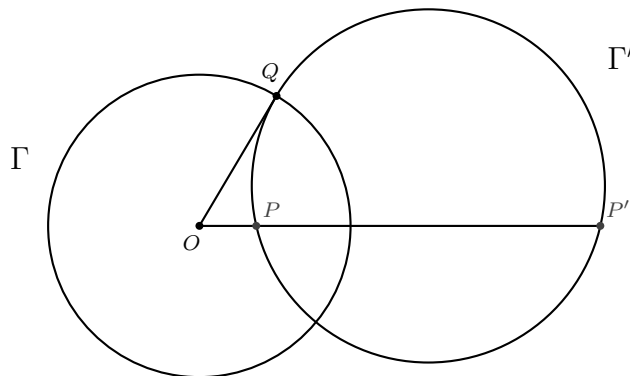
(viii) Se A e B são extremos de um diâmetro de (O, r) então os pontos P e P' são **conjugados harmônicos** com relação a A e B , ou seja, $\frac{AP}{PB} = \frac{AP'}{P'B}$.



Temos que

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AP'}{P'B} \Leftrightarrow \frac{r + OP}{r - OP} = \frac{r + OP'}{OP' - r} \Leftrightarrow (r + OP)(OP' - r) = (r + OP')(r - OP) \Leftrightarrow OP \cdot OP' = r^2.$$

(ix) Toda circunferência que passa por dois pontos inversos P e P' é ortogonal à circunferência de inversão.



Seja Q um dos pontos de intersecção de Γ com a circunferência Γ' que passa por P e P' . Como $OP \cdot OP' = r^2 = OQ^2$, (considerando a potência do O com relação a Γ'), temos que OQ é tangente a Γ' . Logo, Γ e Γ' são ortogonais.

(x) Seja Γ' uma circunferência ortogonal a Γ . O inverso P' , de um ponto P de Γ' , se encontra também em Γ' .

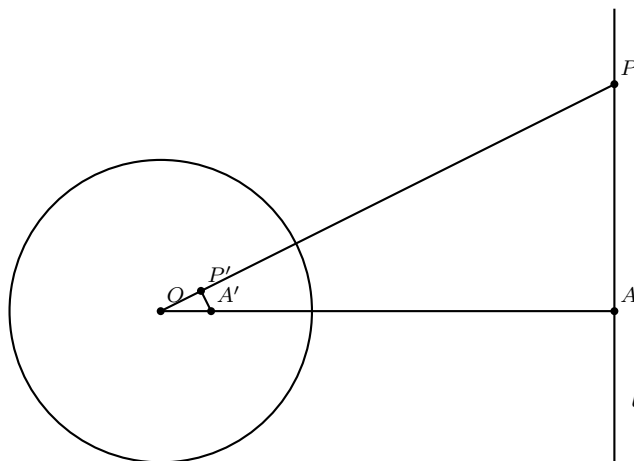
Sejam P em Γ' e P' o ponto de intersecção da reta OP com Γ . Para Q , o ponto comum às circunferências ortogonais Γ e Γ' , temos que OQ é tangente a Γ' . Como a potência de O com relação a Γ' é $OQ^2 = OP \cdot OP'$, temos que P e P' são pontos inversos.

Theorem 14. Seja $\Gamma = (O, r)$ uma circunferência de inversão.

- (i) Uma reta que passa por O , se inverte nela mesma.
- (ii) O inverso de uma reta que não passa por O , é uma circunferência que passa por O .
- (ii) O inverso de uma circunferência que passa por O , é uma reta que não passa por O .

(i) Para uma reta l que passa por O , é claro que o inverso de um ponto P de l , se encontra sobre l . Recorde que O é o único ponto que não possui inverso, o que na realidade estamos querendo inverter a reta l sem o ponto O .

(ii) Sejam l uma reta que não passa por O , A o pé da perpendicular de O sobre l e A' o inverso de A .



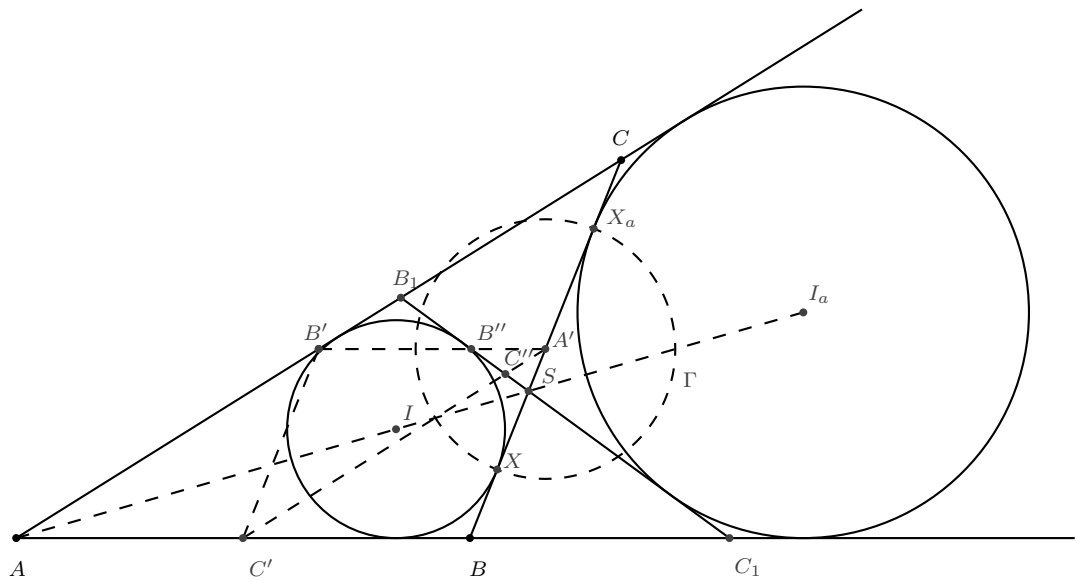
Sejam P um ponto de l e P' seu inverso, como $OP \cdot OP' = OA \cdot OA'$, os triângulos OAP e $OP'A'$ são semelhantes. Porém OAP é um triângulo retângulo com ângulo reto em A , logo o triângulo $OP'A'$ é um triângulo retângulo com o ângulo reto em P' , ou seja, P' se encontra sobre a circunferência de diâmetro OA' . Reciprocamente qualquer ponto P' de tal circunferência é inverso do ponto de intersecção da reta OP' com l . Assim o inverso de l é a circunferência de diâmetro OA' , não incluindo o ponto O .

(iii) Basta seguir os passos inversos da demonstração de (ii).

Theorem 15. (Feuerbach) O círculo dos nove pontos de um triângulo é tangente à circunferência inscrita e as três circunferências ex - inscritas.

A figura abaixo mostra o triângulo ABC , o triângulo formado pelos pontos

médios A' , B' e C' , a circunferência inscrita com centro em I que tangencia BC no ponto X , o círculo ex -inscrito com centro em I_a que tangencia BC em X_a e uma tangente comum às circunferências B_1C_1 que intersecta os três lados do triângulo ABC . Temos também a circunferência Γ com diâmetro XX_a e os pontos S , B'' , C'' que são as intersecções de B_1C_1 com BC , $A'B'$ e $A'C'$. Como Γ é ortogonal à circunferência inscrita e à circunferência ex -inscrita com, com centro em I_a , a inversão por Γ deixa ambos os círculos invariantes. Provaremos que Γ inverte o círculo dos nove pontos na reta B_1C_1 .



Já sabemos que $BX = X_aC = p - b$, que o centro de Γ é A' , ponto médio de BC e o diâmetro de Γ é $XX_a = |a - 2(p - b)| = |b - c|$. O círculo dos 9 pontos passa pelo centro A' de Γ , ou seja, sua imagem pela inversão é uma reta. Vamos mostrar que essa reta passa por B'' e C'' e, portanto, passa por B_1 e C_1 , mostrando que B'' e C'' são os inversos de B' e C' , respectivamente. Sendo S o encontro da bissetriz interna relativa ao vértice A com o lado BC , já sabemos provar que $CS = \frac{ab}{b+c}$ e $SB = \frac{ac}{b+c}$ e que $SA' = |\frac{1}{2}(CS - BS)| = \frac{1}{2}|\frac{ab}{b+c} - \frac{ac}{b+c}| = |\frac{a(b-c)}{2(b+c)}|$. Além disso, $BC_1 = |AC_1 - AB| = |AC - AB| = |b - c|$ e, de maneira análoga, $CB_1 = |b - c|$. Temos que $\Delta SA'B'' \sim \Delta SBC_1$ e $\Delta SA'C'' \sim \Delta SCB_1$, ou seja,

$$\frac{A'B''}{|b-c|} = \frac{A'B''}{BC_1} = \frac{SA'}{SB} = \frac{|b-c|}{2c}$$

e

$$\frac{A'C''}{|b-c|} = \frac{A'C''}{CB_1} = \frac{SA'}{SC} = \frac{|b-c|}{2b}.$$

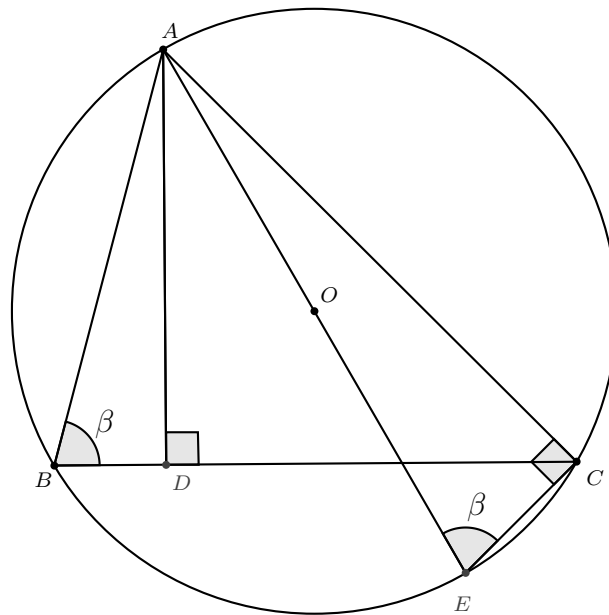
Portanto, $A'B' \cdot A'B'' = \frac{c(b-c)^2}{2 \cdot 2c} = \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$ e $A'C' \cdot A'C'' = \frac{b(b-c)^2}{2 \cdot 2b} = \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$.

Assim, Γ , cujo raio mede $\frac{|b-c|}{2}$, inverte B' em B'' e C' em C'' , como desejado. Finalmente, Γ mantém fixos pela inversão o círculo inscrito e a circunferência ex - inscrita de centro I_a e a tangente comum a esses círculos no círculo dos nove pontos e, com isso, provamos que o círculo dos nove pontos tangencia a circunferência inscrita e as três circunferências ex - inscritas.

2.3 Segunda demonstração

Theorem 16. *Seja O o centro da circunferência circunscrita ao triângulo acutângulo ABC e seja D a projeção de A sobre BC então $\angle DAB = \angle OAC$.*

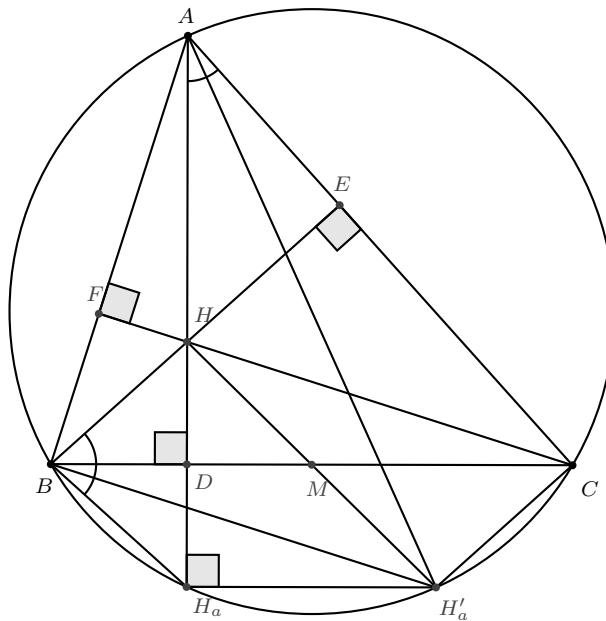
Seja AE um diâmetro. Além disso, $\angle ABC = \angle AEC$. Portanto, $\angle BAD = \angle EAC$.



Theorem 17. (Simétricos do Ortocentro) *Seja ABC um triângulo com ortocentro H . Seja H_a o simétrico de H em relação ao lado BC e seja H'_a o simétrico de H em relação ao ponto médio de BC . Defina H_b, H'_b, H_c e H'_c analogamente. Então $H_a, H'_a, H_b, H'_b, H_c$ e H'_c pertencem à circunferência circunscrita ao triângulo ABC e AH'_a, BH'_b e CH'_c são diâmetros.*

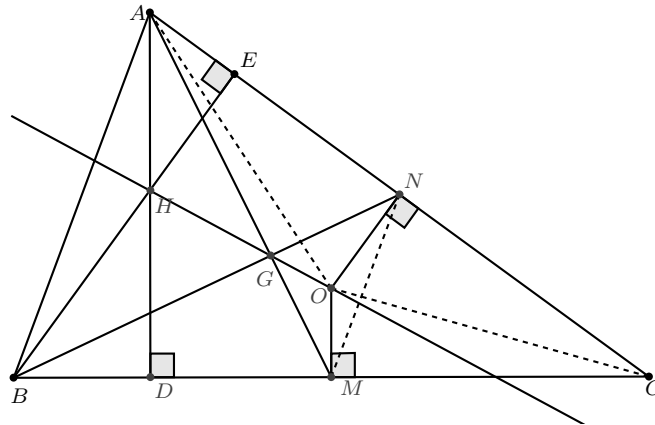
Seja H_a a intersecção da altura AD com a circunferência circunscrita ao

triângulo ABC . Temos que $\angle H_aBC = \angle H_aAC = \angle HBD$. Portanto, $\triangle HBD \equiv \triangle H_aBD$ pelo caso **ALA** e, com isso, $HD = H_aD$. Além disso, temos que $BM = CM$ e $HM = H'_aM$, em que H'_a é o simétrico de H com relação ao ponto médio M de BC , fazendo com que o quadrilátero HBH'_aC seja um paralelogramo e, com isso, $\angle BHC = \angle BH'_aC$. Mas $\angle BHC = \angle FHE = 180^\circ - \angle A$. Portanto, o quadrilátero ABH'_aC é inscrito, ou seja, H'_a pertence à circunferência circunscrita ao triângulo ABC . Agora, D é ponto médio de HH_a , M é ponto médio de HH'_a e DM é base média do triângulo $HH_aH'_a$ e, com isso, $H_aH'_a \parallel DM$. Portanto, $H_aH'_a \perp AH_a$ e, dessa forma, AH'_a é um diâmetro.



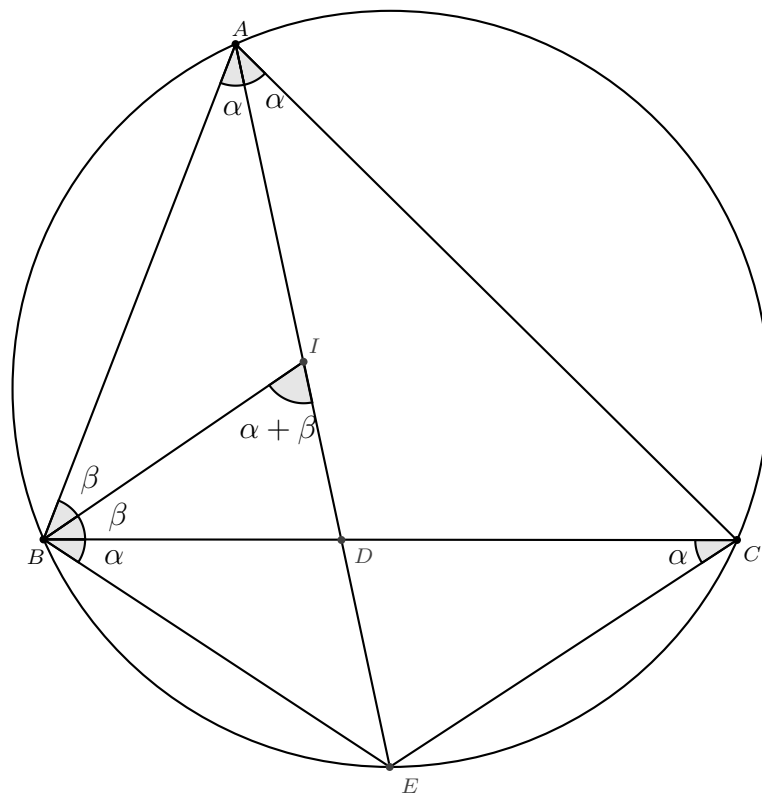
Theorem 18. O ortocentro, o baricentro e o circuncentro de um triângulo, não equilátero, são colineares. A reta determinada por esses pontos é chamada de **Reta de Euler**.

Sejam M e N os pontos médios de BC e AC , respectivamente. Então, $MN \parallel AB$ e $MN = \frac{AB}{2}$. O teorema 16 garante que $\angle BAD = \angle OAC$. Como O é o circuncentro então $OA = OC$ e, com isso, $\angle OAC = \angle OCA$. O quadrilátero $MCNO$ é inscrito então $\angle OCA = \angle NCO = \angle OMN$ e $\angle MON = 180^\circ - \angle ACB$. Além disso, o quadrilátero $DCEH$ também é inscrito e, com isso, $\angle DHE = 180^\circ - \angle ACB$. Como $\angle DHE = \angle AHB$ concluímos que o triângulo AHB é semelhante ao triângulo MNO e, com isso, $\frac{AB}{MN} = \frac{AH}{OM} = 2$. Temos que $\angle HAG = \angle GMO$ pois AH é paralelo a OM e, como G é o baricentro, $\frac{AG}{GM} = 2$. Portanto, o triângulo AHG é semelhante ao triângulo GMO e, com isso, $\angle HGA = \angle MGO$ provando então que H, G e O estão alinhados e $HG = 2GO$.



Theorem 19. *Seja ABC um triângulo e I seu incentro. Seja E o ponto de interseção de AI com a circunferência circunscrita ao triângulo ABC . Então $EI = EB = EC$.*

É fácil ver que $\angle BAE = \angle CAE = \angle CBE = \angle BCE$ e, portanto, $BE = CE$. Além disso, pela propriedade do ângulo externo, $\angle BIE = \alpha + \beta$. Portanto, $\angle BIE = \angle IBE$ e $BE = IE$.



Theorem 20. *Seja I o incentro, R o raio da circunferência circunscrita, r o raio da circunferência inscrita de um triângulo ABC e seja D a intersecção de AI com a circunferência circunscrita ao triângulo ABC . Então,*

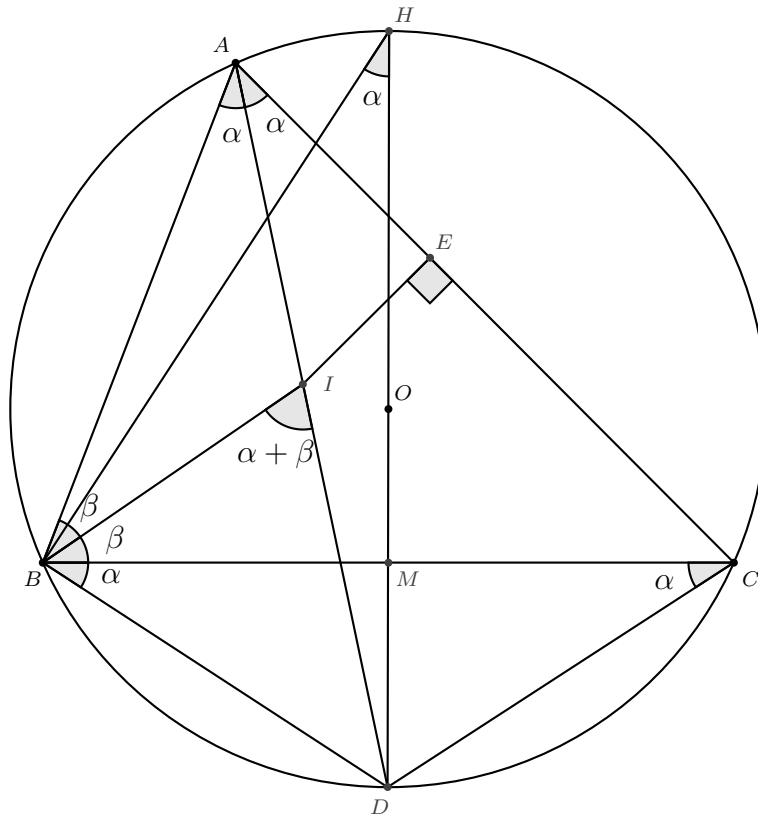
$$AI \cdot ID = 2Rr.$$

Seja $IE = r$, $DH = 2R$ e Γ a circunferência circunscrita ao triângulo ABC . É fácil ver que $\triangle IEA \sim \triangle DBH$ então

$$\frac{2R}{AI} = \frac{DB}{r} \Leftrightarrow AI \cdot DB = 2Rr.$$

Mas, já sabemos que, $DB = DI$. Então,

$$AI \cdot ID = 2Rr.$$

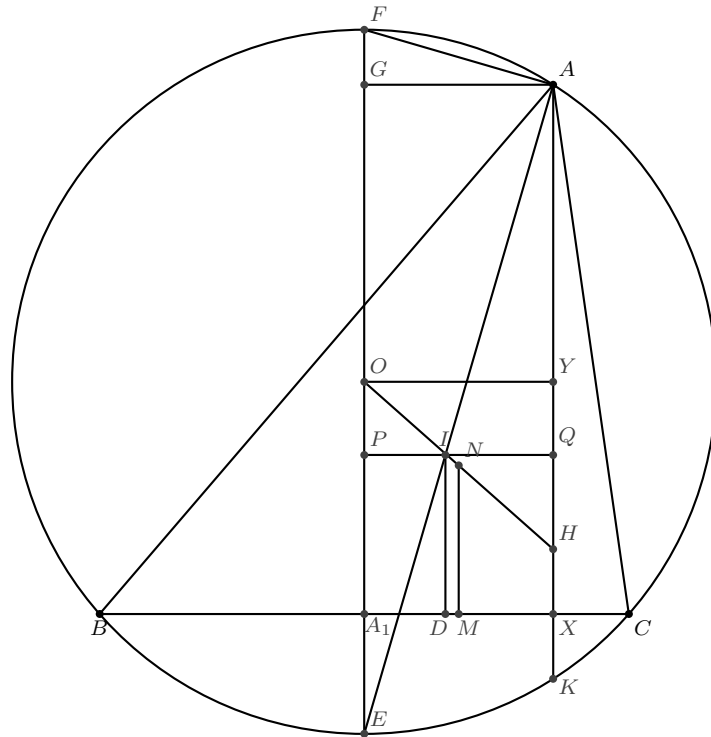


Theorem 21. (Feuerbach) O círculo dos nove pontos de um triângulo é tangente à circunferência inscrita e as três circunferências ex - inscritas.

Sejam O o centro da circunferência circunscrita Γ do triângulo ABC , A_1 o ponto médio do lado BC e EA_1OF um diâmetro da circunferência mesma circunferência. Tracemos AX perpendicular a BC e seja K a intersecção com Γ . Seja H o ortocentro do triângulo ABC e N o centro da circunferência dos 9 pontos. Seja Y a intersecção da mediatriz de AK com o próprio AK . Sejam D e M as projeções de I e N sobre BC . Trace também PQ paralelo ao segmento BC com P em EF e Q em AK . Já sabemos que $AH = 2OA_1$, $HK = 2HX$ e $AI \cdot IE = 2Rr$. Temos que $\triangle EPI \sim \triangle AGF$, pelo caso **AA** e, com isso, $\frac{PI}{IE} = \frac{FG}{AF}$. Além disso, $\triangle AQI \sim \triangle EAF$, pelo caso **AA** e, com isso,

$$\frac{IQ}{AI} = \frac{AF}{FE}. \text{ Portanto,}$$

$$\frac{PI \cdot IQ}{AI \cdot IE} = \frac{FG}{FE} \Leftrightarrow \frac{PI \cdot IQ}{2Rr} = \frac{FG}{2R} \Leftrightarrow PI \cdot IQ = r \cdot FG.$$



Temos que a projeção de IN sobre FE , cuja medida chamaremos de d , mede $d = ID - NM = r - \frac{1}{2}(OA_1 + HX) = r - \frac{1}{4}(AH + HK) = r - \frac{AY}{2}$. Assim,

$$d^2 = r^2 - 2r \cdot AY + \frac{AY^2}{4} = r^2 - 2r \cdot GO + \frac{AY^2}{4}. \quad (1)$$

Sejam $DM = A_1D - A_1M$ a projeção de IN sobre BC . Temos que

$$DM^2 = (A_1M - A_1D)^2 = A_1M^2 - 2 \cdot A_1M \cdot A_1D + A_1D^2 = A_1M^2 - A_1D \cdot DX = \frac{1}{4}A_1X^2 - PI \cdot IQ = \frac{1}{4}OY^2$$

Adicionando (1) e (2), temos que

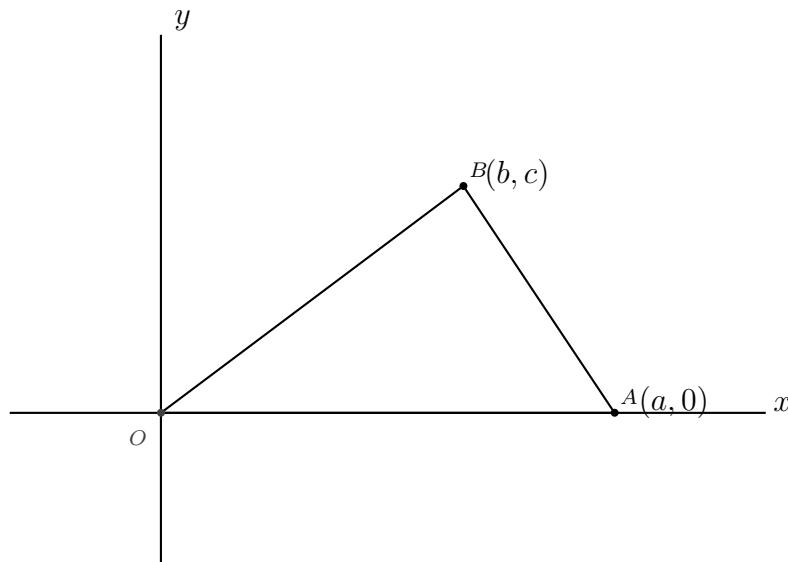
$$IN^2 = \frac{1}{4}(AY^2 + OY^2) - r(FG + GO) + r^2 = \frac{1}{4}R^2 - rR + r^2 \Leftrightarrow IN = \frac{1}{2}R - r,$$

provando que o círculo dos nove pontos é tangente à circunferência inscrita. A prova para as circunferências ex - inscritas é análoga.

2.4 Terceira demonstração

Theorem 22. (Feuerbach) *O círculo dos nove pontos de um triângulo é tangente à circunferência inscrita e as três circunferências ex - inscritas.*

Seja T o triângulo no plano cartesiano cujos vértices são $O(0,0)$, $A(a,0)$ e $B(b,c)$ com $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.



Vamos definir β , δ e λ de tal forma que $\beta^2 = b^2 + c^2$, $\delta^2 = (a-b)^2 + c^2$ e $\lambda = a + \beta + \delta$, em que β e δ podem ser positivos ou negativos e $\lambda \neq 0$, garantido pela desigualdade triangular.

Theorem 23. *A equação*

$$\left[x - \frac{a(b + \beta)}{\lambda} \right]^2 + \left(y - \frac{ac}{\lambda} \right)^2 = \left(\frac{ac}{\lambda} \right)^2, \quad (1)$$

representa a equação de um círculo tangente aos três lados de T .

As retas OA , OB e AB que determinam os três lados do triângulo podem ser representados respectivamente pelas equações

$$y = 0, \quad (2)$$

$$y = \left(\frac{c}{b} \right) x, \quad (3)$$

$$x = \frac{[(b-a)y + ac]}{c}. \quad (4)$$

Substituindo sucessivamente (2), (3) e (4) em (1) e usando as definições de λ , δ e β obtemos, respectivamente

$$\left[x - \frac{a(b + \beta)}{\lambda} \right]^2 = 0, \quad (5)$$

$$\left[\left(\frac{\beta}{b} \right) x - \frac{a(b + \beta)}{\lambda} \right]^2 = 0, \quad (6)$$

$$\left[\left(\frac{\delta}{c} \right) y - \frac{a(\delta + a - b)}{\lambda} \right]^2 = 0, \quad (7)$$

que possuem raízes de multiplicidade (2), o que prova nosso teorema.

Theorem 24. *O círculo N*

$$\left[x - \frac{(a + 2b)}{4} \right]^2 + \left[y - \frac{(ab + c^2 - b^2)}{4c} \right]^2 = \frac{\beta^2 \delta^2}{16c^2}, \quad (8)$$

passa pelos pontos médios dos lados do triângulo T.

A equação (8) pode ser reescrita da seguinte forma

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}(a + 2b)x - \frac{1}{2c}(c^2 + ab - b^2)y + \frac{1}{2}ab = 0, \quad (9)$$

Os pontos médios dos lados do triângulo possuem coordenadas $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ e $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$. Como as coordenadas desses pontos satisfazem a equação (9) então N é o círculo que passa pelos pontos médios do triângulo T.

Sejam p, r, s, ρ, σ e τ variáveis satisfazendo $s \neq 0$ e $\rho \neq 0$. Vamos definir a função $\Omega \equiv \Omega(p, r, s, \rho, \sigma, \tau)$ como segue

$$\Omega \equiv \left[\frac{p(r + \sigma)}{\rho} - \frac{p + 2r}{4} \right]^2 + \left[\frac{ps}{\rho} - \frac{(pr + s^2 - r^2)}{4s} \right]^2 - \left[\frac{\sigma\tau}{4s} - \frac{ps}{\rho} \right]^2.$$

Theorem 25. *Sejam a, b e c três números reais satisfazendo $a > 0, b > 0$ e $c > 0$. Então $\Phi \equiv \Omega(a, b, c, \lambda, \beta, \delta) = 0$.*

Substituindo $a, b, c, \lambda, \beta, \delta$ em $p, r, s, \rho, \sigma, \tau$, respectivamente, na definição de Ω , segue o resultado.

O círculo N é tangente ao círculo 1.

Em geral, a tangência de dois círculos pode ser estabelecida mostrando que o quadrado da distância entre seus centros é igual ao quadrado da soma de seus raios ou igual ao quadrado da diferença de seus raios, dependendo se os círculos são tangentes externamente ou internamente. E uma dessas situações é o caso dos círculos N e (1) estabelecido pelo desaparecimento de $\Phi \equiv \Omega(a, b, c, \lambda, \beta, \delta)$, que é a conclusão do teorema 24.

REFERÊNCIAS

- 1 *Geometría*
Radmila Bulajich Manfrino, José Antonio Gómez Ortega
Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas

- 2 *Geometry Revisited*
H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer
The Mathematical Association of America - New Mathematical Library

- 3 *Analytic proof of the Feuerbach Theorem*
J. M. Stark
Mathematics Magazine, Vol. 36, No. 2. (Mar., 1963), pp. 122 – 125.

- 4 *The Proof of the Feuerbach's Theorem*
K. J. Sanjana
Mathematical Notes (1924), 22: pp 11 – 12
Edinburgh Mathematical Society 1924

- 5 *História da Matemática*
Segunda edição - Tradução: Elza F. Gomide
Carl B. Boyer
Editora Edgard Blucher LTDA.