Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Por que estudar matemática? Uma tentativa de resposta

Daniel Dunck Cintra

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza**

Cuiabá-MT

dezembro de 2017

Por que estudar matemática? Uma tentativa de resposta

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Daniel Dunck Cintra e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 15 de fevereiro de 2018.

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Prof. Dr. Vinicius Machado Pereira dos Santos
Prof. Dr. Edgar Nascimento

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

C575q Cintra, Daniel Dunck.
Por que estudar matemática? Uma tentativa de resposta / Daniel Dunck Cintra. -- 2018
xi, 74 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Aldi Nestor de Souza.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2018.
Inclui bibliografia.

1. Ensino da matemática. 2. Argumentação. 3. Formação crítica. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCACÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUACÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
Av. Fernando Corrêa da Costa. 2367 - Boa Esperança – 78.060-900 - Cuiabá/MT
Tel : (65) 3615-8576 – E-mail: profmat@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: "Por que estudar matemática? uma tentativa de resposta"

Autor: **Daniel Dunck Cintra**

defendida e aprovada em 19/01/2018.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca/Orientador Doutor Aldi Nestor de Souza Aldi Nestor de Souza
Instituição : Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Interno Doutor Vinicius Machado Pereira dos Santos
Instituição : Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Externo Doutor Edgar Nascimento
Instituição : Instituto Federal de Mato Grosso

Cuiabá. 19/01/2018.

Agradecimentos

Agradeço a minha esposa, Caroline, pela paciência, pelo consolo nas horas de angústia, pela grande ajuda durante um período crítico do mestrado e por sempre me dar forças.

Agradeço a minha mãe, Ema Marta, por ter o privilégio de ter uma professora em casa que me ajudou muito desde criança, por me servir como exemplo como pessoa, por sempre acreditar e confiar em mim, por ajudar a desenvolver meus pensamentos e por me ensinar a ser uma pessoa que busca justiça.

Agradeço a meu pai, Luiz Carlos, por me servir de exemplo, pelas caronas à rodoviária sempre com alegria e por sempre confiar em meu potencial.

Agradeço a minha irmã, Letícia, por sempre acreditar em mim e me animar com conversas descontraídas quando chegava de viagens cansativas à noite em Cuiabá para mais um dia de aula.

Agradeço a meus sogros, Ropson e Gracileide, pelas caronas à rodoviária e por confiarem na minha capacidade.

Agradeço ao meu orientador, professor Aldi, pelas orientações e por considerá-lo um exemplo profissional que pretendo seguir.

Agradeço aos amigos do PROFMAT pelos apoios mútuos e por serem grandes companheiros durante o decorrer do curso.

Agradeço a todos demais, familiares e amigos, que de alguma forma ajudaram na conclusão desse curso de mestrado.

Na condição de seres históricos, os homens são seres que caminham para frente, que olham para frente; seres a quem o imobilismo ameaça de morte; para quem o olhar para trás não deve ser uma forma nostálgica de querer voltar, mas um modo de melhor conhecer o que está sendo, para melhor construir o futuro.

Freire (2014).

Resumo

Neste trabalho, a partir de uma pesquisa qualitativa e de revisão bibliográfica, procuramos dar uma resposta de o porquê estudar matemática. Queremos mostrar que essa disciplina pode trazer muito mais benefícios do que a mera reprodução de algoritmos e aplicações no cotidiano, pois defendemos que ela colabora no desenvolvimento argumentativo do discente, consequentemente, pode transformá-lo em um sujeito que se posiciona no contexto onde está inserido. Como sugestão, trouxemos dois exemplos de práticas que consideramos possíveis de serem realizadas pelos professores. Uma, chamamos de problemas argumentativos e, a outra, de realização de pequenas demonstrações utilizando divisão Euclidiana. Ambas visam ao desenvolvimento da argumentação do aluno e contribuem na sua formação, transformando-o em um cidadão argumentador e crítico. Concluímos que tais práticas podem trazer alguns benefícios para o desenvolvimento argumentativo dos estudantes a curto ou médio prazo, por conseguinte, colaboram para seu desenvolvimento como um sujeito que pensa e se posiciona na sociedade, não sendo um mero expectador e reprodutor de ideias e respostas prontas e formatadas.

Palavras chave: Ensino da matemática, argumentação, formação crítica.

Abstract

In this work, from a qualitative research and bibliographical review, we look for an answer of the reason to study mathematics. We want to show that this discipline can bring much more benefits than the mere reproduction of algorithms and applications in the daily life, since we believe that it collaborates in any argumentative development of the student, consequently, can transform him into a subject that places himself in the context where he is inserted. As a suggestion, we have brought two examples of practices that we consider to be possible for teachers to do. One, we call argumentative problems and, the other, the realization of small demonstrations, using Euclidean division. Both aim at the development of the student's argument and collaborate in his formation, transforming him into an argumentative and critical citizen. We conclude that such possibilities can bring some benefits to the development of the student program in the short or medium term, therefore collaborating for its development as a subject that thinks and positions itself in society, is not a mere spectator and reproducer of ideas and ready and formatted answers.

Keywords: Mathematics teaching, argumentation, critical formation.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

> “Existe uma estreita conexão entre a forma de argumentar na matemática e o discurso democrático, pois, em ambos, há um favorecimento do geral (no sentido de *abstrato* e de *público*) sobre o particular e específico”
>
> (Skovsmose, 2008, p. 76)

É de conhecimento público que a educação básica no Brasil é, infelizmente, de baixa qualidade, em particular, a educação matemática. Esse fato foi sendo criado ao longo das décadas (Druck, 2004).

Além disso, Druck (2004) diz que:

> A progressiva decadência da qualidade do ensino da Matemática atinge hoje a própria Licenciatura em Matemática, completando assim um circulo vicioso. Dados objetivos evidenciam o problema: no Provão, a Matemática tem sido a última colocada, em todos os anos entre as áreas avaliadas.

Do mesmo modo, quando observamos os dados disponibilizados pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (Inep), da última edição do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), percebemos que ainda se enfrentam problemas na proficiência de matemática.

Ao se fazer uma breve análise, percebemos que uma parte considerável dos estudantes ainda se encontra nos níveis mais baixos da Escala de Proficiência, principalmente no 9º ano do Ensino Fundamental (Brasil, 2017a). Isso tudo mostra que há muito, ainda, a ser feito.

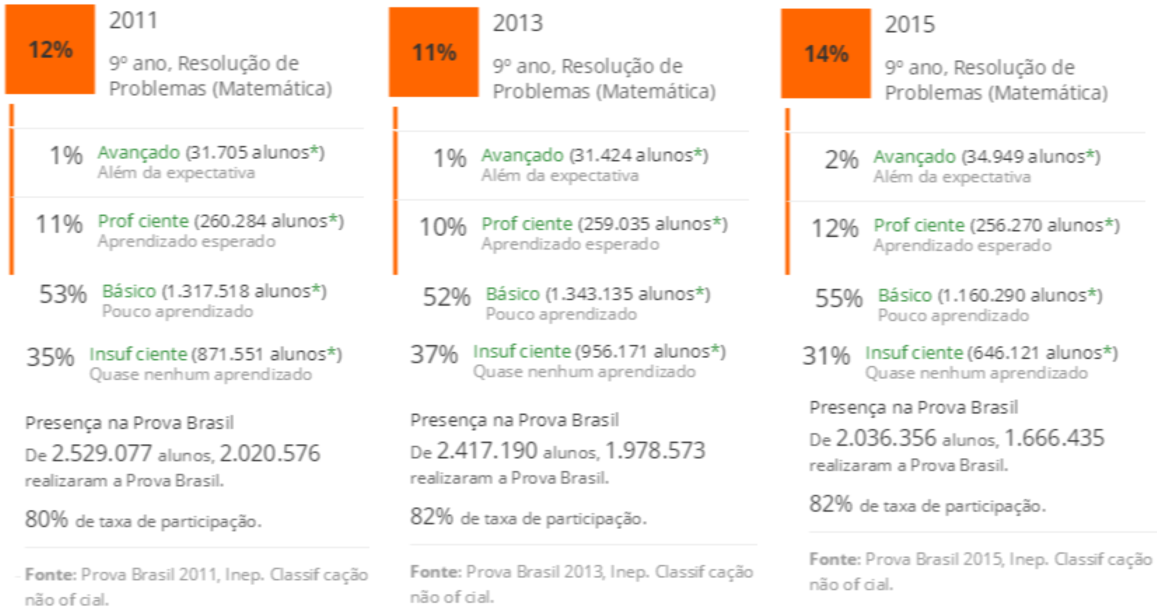


Figura 1: Proficiência em matemática

Os dados da tabela acima apontam que os estudantes têm limitações na compreensão e resolução de problemas que envolvam a linguagem matemática.

Diante disso, defendemos que seja importante desenvolver um trabalho durante o PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) que auxilie nas práticas profissionais em sala de aula, pois, de acordo com PROFMAT-SBM (2017), "Os produtos gerados pelo Programa devem guardar uma estreita relação com as atividades realizadas nas salas de aula, de forma a possibilitar que os discentes do curso possam melhorar suas práticas educacionais".

Nesse sentido, vamos mostrar, no decorrer deste trabalho, algumas práticas em sala de aula que defendemos que podem mudar essa situação e colaborar para que os alunos a compreendam melhor a utilidade da disciplina e, quem sabe, ajudem a dar pequenos passos para uma melhor avaliação da matemática no Brasil e, ao mesmo tempo, colaborem para a formação de cidadãos mais críticos.

De início, tentaremos dar uma resposta para a pergunta: "Por que estudar matemática?". Sabe-se que há várias respostas e não temos a pretensão de dizer, definitivamente, qual seria a certa e qual seria a errada, no entanto, vamos refletir sobre uma que consideramos verdadeira. Para isso, levantaremos reflexões sobre uma das possíveis respostas que defendemos que ajudam os estudantes a se desenvolverem como cidadãos críticos.

Por que estudar matemática é uma pergunta, aparentemente, trivial e diversos tipos de respostas são dadas quando realizamos essa indagação. Em meio às várias respostas, a mais difícil ainda é encontrar qual poderia ser a melhor para tal questionamento.

Em busca de o porquê estudar matemática, elaboramos um questionário que se encontra descrito e interpretado no primeiro capítulo. Ele foi respondido tanto por alunos que cursam os ensinos médio, técnico e superior, como por professores de matemática.

Ao longo do trabalho, tentaremos mostrar como boa parte do ensino da matemática realizado nos dias de hoje não é interessante, pois ensina o aluno a praticar manipulações e algébricas e a reproduzir algoritmos sem reflexão, o que requer pouca utilidade da matemática e pouco contribuem para seu desenvolvimento. O manuseio de expressões numéricas e símbolos algébricos acaba não exigindo criatividade, imaginação ou capacidade para raciocinar de maneira abstrata (Lima, 2003, p. 142).

Defendemos que algumas práticas relativamente simples podem ajudar a mudar a utilidade da matemática em médio ou curto prazo. Nesse trabalho trataremos de duas delas, além de mostrar uma experiência realizada com uma dessas práticas no ensino médio.

No primeiro capítulo, traremos uma reflexão "Usamos mesmo matemática no cotidiano?". Tentaremos mostrar que estudá-la nos dias de hoje não encontra sustentação em motivos similares a "devemos estudar a matemática, pois a usamos em nosso cotidiano". Os questionários aplicados aos professores e alunos nos auxiliarão na interpretação e busca dessa resposta.

Já no segundo capítulo, vamos propor uma alternativa relativamente simples que defendemos que possa melhorar a curto ou médio prazo a capacidade matemática argumentativa dos alunos, com a perspectiva de que ele possa levar esse aprendizado para sua vida também fora do ambiente matemático.

No terceiro capítulo, a ideia é semelhante a do segundo capítulo, entretanto, a proposta é que se crie nos alunos a capacidade de realizar pequenas demonstrações matemáticas utilizando o conteúdo de divisão euclidiana. Defendemos que essa prática pode, também, ajudá-los a desenvolver sua capacidade argumentativa e crítica.

No quarto capítulo descrevemos uma experiência realizada com alunos do ensino médio. Para esses foi elaborado um minicurso que teve como conteúdo principal a divisão euclidiana. Também apresentaremos uma sugestão de abordagem e materiais que podem ser utilizados.

Nas considerações finais, mostraremos que a importância de se estudar matemática vai muito além da aplicabilidade no cotidiano que, como tentaremos mostrar no primeiro capítulo, utiliza-se pouca matemática, inclusive pouca matemática que se faz presente no currículo dos alunos. Queremos mostrar que sim, a matemática é importante, e devemos estudá-la, mas essa importância tem de ter relação com o desenvolvimento de um cidadão mais crítico, questionador e argumentador.

Capítulo 1

Usamos mesmo matemática no cotidiano?

Neste capítulo tentaremos responder se usamos matemática no cotidiano. Defendemos que não seja tão difícil achar resposta para essa pergunta.

Matemática é uma disciplina obrigatória na educação básica no Brasil, como pode ser observado no artigo 26, parágrafo primeiro da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.

> Art. 26. Os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos.
> § 1º Os currículos a que se refere o caput devem abranger, obrigatoriamente, o estudo da língua portuguesa e da matemática, o conhecimento do mundo físico e natural e da realidade social e política, especialmente do Brasil. (Brasil, 1996)

No documento da Base Nacional Comum, em fase de implementação, pois foi publicado recentemente, em 2016, quando se trata da área de matemática, logo em seu primeiro parágrafo, está posto o seguinte:

> O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais. (Brasil, 2016)

Nessa mesma linha, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, (Brasil, 1987), apontam que:

> A Matemática faz-se presente na quantificação do real contagem, medição de grandezas e no desenvolvimento das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas. No entanto, esse conhecimento vai muito além, criando sistemas abstratos, ideais, que organizam, inter-relacionam e revelam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados quase sempre a fenômenos do mundo físico.

Além disso, a Lei número 13.415, sancionada em 2017, que define o novo ensino médio e estabelece a matemática como disciplina obrigatória nessa etapa da educação básica (Brasil, 2017b).

Logo, a matemática sendo obrigatória, deve ser ensinada. Mas como está sendo ensinada? Ela está sendo ensinada de maneira que cause alguma reflexão nos alunos? Os conteúdos de matemática estão sendo utilizados fora da sala de aula de alguma maneira?

Será levantada a questão sobre se realmente o ensino da matemática, praticado nos dias de hoje, acha sustentação em argumentos como "grande aplicação em nosso cotidiano", como nos foi dado como resposta por alunos e professores. Além disso, cabe perguntar: Quem aplica a matemática aprendida em sala de aula no cotidiano? Como ela ocorre?

Para irmos além das leis que "orientam" o porquê de se estudar matemática, elaboramos um questionário que foi respondido por alunos do ensino médio, técnico, superior e professores de matemática.

O questionário foi elaborado via *google forms* e encaminhado por *e-mail* para os alunos e professores. O público-alvo foram alunos do ensino médio, técnico e superior do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso – IFMT. Já para ter acesso aos professores de matemática, fizemos uma solicitação dos *e-mails* para o coordenador da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), que nos concedeu a lista. Além disso, ele foi disponibilizado via redes sociais, o que permitiria que professores de todo o Brasil, caso quisessem, poderiam participar. O resultado final importou em 250 respostas de alunos e 70 de professores.

A pergunta principal, que embasou a elaboração do questionário, tinha como objetivo estabelecer qual a importância da matemática na vida das pessoas. Além disso, queríamos saber os motivos que as levavam a estudar essa disciplina.

Uma das nossas curiosidades era saber se havia diferenças entre as respostas dadas pelos professores de matemática comparadas com as respostas dadas pelos discentes. Será que o professor estaria conseguindo mostrar a importância da matemática para a vida daquele aluno? Será que os alunos conseguiriam entender a importância da matemática somente assistindo às aulas e reproduzindo o conteúdo ministrado pelo professor?

Propomos-nos a fazer, primeiramente, uma análise das respostas dos discentes, em seguida, dos docentes e, na sequência, trazer algumas comparações entre as respostas.

Entre as perguntas enviadas aos discentes, havia uma objetiva que era: “Qual importância você daria para a matemática em sua vida?”. Obtivemos 247 respostas.

Abaixo o gráfico que representa essas respostas:

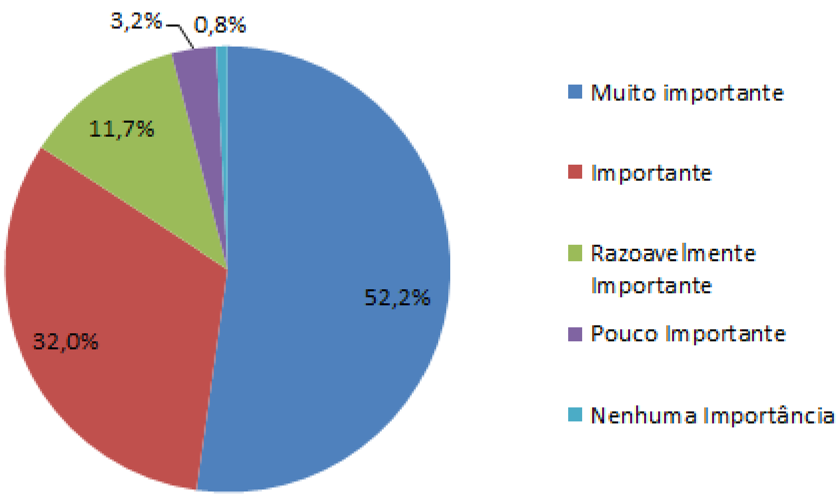


Figura 1.1: Gráfico sobre a importância da matemática

Note que mais de 80% dos alunos consideram a matemática importante ou muito importante em sua vida. Essa é uma resposta muito interessante, uma vez que a matemática é considerada uma das vilãs na educação brasileira. Interpretamos esse resultado da seguinte forma: apesar de a matemática causar dificuldades nos alunos, os mesmos percebem que ela é um dos “motores” que movem nosso mundo. Uma pesquisa chamada “Relação com o saber e matemática”, realizada em Aracaju entre julho de 2014 e março de 2016 junto a alunos de 1ª a 5ª série, concluiu que eles têm a matemática como uma disciplina difícil e,

> Além de ser difícil, a matemática é “importante”. Quando perguntados sobre as profissões em que é útil ser bom em matemática, alguns alunos são convencidos da importância desta a ponto de citar profissões sem relação particular com a matemática, mas importantes “por si”, como médico, advogado, jornalista e modelo. É como se alguém que pratica uma profissão importante tivesse de conhecer coisas importantes e difíceis. (Silva, 2008).

Isso nos leva a perceber que, até quem não tem simpatia pela matemática, a tem estima, e esse pensamento vem de longa data.

> O facto é que existem poucas disciplinas tão «populares» como a matemática. A maioria das pessoas tem alguma estima pela matemática, do mesmo modo que a maioria consegue apreciar uma melodia agradável; e, com toda a probabilidade, há mais pessoas realmente interessadas em matemática do que em música. As aparências podem até sugerir o contrário, mas há explicações simples para o fenómeno. A música pode ser usada para estimular a emoção das massas, ao passo que a matemática não; se a incapacidade musical é reconhecida (e bem) como ligeiramente descredibilizante, a maior parte das pessoas sente tal pavor pelo nome da matemática que está genuinamente disposta a exagerar a sua estupidez na matéria (Hardy, 2007, p. 74).

A pergunta principal do questionário foi: "Em sua opinião, quais os principais motivos para se estudar matemática? Comece com o qual você considera mais importante e assim sucessivamente". Observou-se que a maioria das respostas só elencou um motivo, como exemplificado: "A matemática está em tudo, precisamos dela para qualquer coisa", ou "Matemática faz parte do nosso cotidiano", ou "para fazer ENEM e vestibular".

Entretanto, alguns alunos deram respostas que consideramos mais interessantes, como "Para a colaboração na construção de um pensamento crítico e ágil", ou "Aplicações na vida, conhecimento, pesquisa, avanço do mundo, raciocínio, evolução", ou "A matemática possibilita um desenvolvimento de raciocínio lógico e mantém a mente sempre ativa". Entretanto, pouquíssimas respostas tiveram esse viés, ou seja, foco em respostas que buscam sentido em dizer que a matemática pode auxiliar no desenvolvimento de uma pessoa crítica, argumentativa, com um grau mais elevado de raciocínio lógico.

Defendemos que o formato da matemática ensinada aos alunos faz com que poucas respostas como as últimas apresentadas apareçam, pois, em sua maioria, o aluno é ensinado apenas a reproduzir algoritmos matemáticos, sem incentivo a resolução com argumentos e raciocínio lógico (Boavida, 2005; Skovsmose, 2008). Pouco se percebe do benefício da matemática além do "uso no cotidiano". Discutiremos sobre esse assunto neste capítulo.

As outras duas perguntas geraram um paradoxo nas respostas que a maioria dos alunos apresentaram, pois disseram que a matemática está em tudo e que a usam no cotidiano, mas como veremos a seguir, isso não observado nos conteúdos que eles usam em seu dia a dia. Para essas respostas, as perguntas foram as seguintes: "Quais conteúdos de matemática você já usou em seu cotidiano?" e "Quais conteúdos de matemática você nunca usou em seu cotidiano".

A maior parte das respostas referente aos conteúdos já utilizados em seu cotidiano foram as quatro operações (soma, subtração, multiplicação e divisão), razão e proporção, juros, porcentagem e regra de três. Ao mesmo tempo, as respostas referentes aos conteúdos que nunca foram utilizados no cotidiano apresentam, especialmente, boa parte dos conteúdos ministrados no ensino médio.

Assim, muitos que consideravam a matemática importante ou muito importante e que alegaram que a "matemática está em tudo", reconhecem que grande parte do que se estuda na disciplina não é utilizada no cotidiano. Ao mesmo tempo, boa parcela deles provavelmente nunca mais estudarão matemática, pois escolherão carreiras profissionais que não necessitam utilizá-la além da sua forma elementar. Desse modo, como considerar a matemática tão importante assim ou simplesmente alegar que a matemática está em tudo? Essa é uma questão que merece alguma reflexão.

Já para os professores de matemática não vimos a necessidade de fazer a pergunta sobre a importância da matemática na vida deles. Entretanto, as outras três foram realizadas. Como anteriormente, a principal pergunta foi "Na sua opinião, quais os principais motivos para se estudar matemática? Comece com o qual você considera mais importante e assim sucessivamente". Aqui, diferentemente das respostas dadas pelos alunos, boa parte das respostas foram: "Conhecimento, melhora o raciocínio, torna a vida mais prática", "A matemática está em tudo a nossa volta. Presente na interpretação de resultados" e "Desenvolvimento do raciocínio lógico, aumento da criatividade, aplicação para encontrar soluções nas mais diversas áreas", "Organizar pensamento, base de diversas profissões", "Aplicabilidade, Aptidão, desenvolvimento de raciocínio lógico", "Se tornar crítico, criar um raciocínio baseado na razão e lógica, criar o hábito de verificar informações, aprender a visualizar padrões, entender e aplicar o processo de resolução de problemas (em qualquer área de sua vida) e buscar autonomia em qualquer tipo de aprendizado".

Consideramos essas respostas como as mais interessantes e diremos o porquê durante o desenvolvimento deste trabalho, entretanto, também houve uma parcela considerável de respostas como "A matemática é uma ciência exata que está por toda parte. A necessidade de se estudar matemática se dá por conta que necessitamos dela para fazer atividades simples como comprar pães, ir ao supermercado ou à feira livre fazer algumas compras, tudo isso precisa do conhecimento matemático para não ser lesado.", "A matemática é essencial em nossa vida, sem ela não poderíamos fazer nada, pois tudo está ligado com a matemática", "Desenvolver raciocínio lógico, saber operar contas úteis no cotidiano". Essas últimas respostas se assemelham muito às respostas dadas pelos alunos e consideramos respostas menos estimulantes para o estudo da matemática, como veremos no decorrer deste capítulo.

Reunimos algumas respostas que consideramos que sintetizam todas as demais, no apêndice desta dissertação.

Note que a maior parte dos professores tem uma ideia que defendemos ser mais relevante para o ensino da matemática que é o de formar pessoas mais críticas, com raciocínio lógico mais apurado e capazes de interpretar a realidade em sua volta. Entretanto, poucos alunos tem essa visão, por quê? O que pode ser feito para mudar essa realidade? Defendemos que algumas práticas relativamente simples podem ajudar a mudar a visão da utilidade da matemática em médio prazo.

De acordo com a pesquisa realizada, vemos que uma parcela considerável das respostas sobre por que as pessoas devem estudar matemática se converge para as seguintes afirmações:

I- Nós usamos matemática em nosso cotidiano, em tudo que fazemos;

II- A matemática ajuda a interpretar o mundo ao redor de nós;

III- A matemática nos ajuda a pensar com mais lógica;

Os motivos relacionados acima, principalmente o primeiro, aparecem tanto quando perguntamos para alunos, como também para professores de matemática. Uma primeira constatação é que essas respostas estão relacionadas com os objetivos das leis que orientam a educação. O que se pretende, agora, é justamente refletir sobre o primeiro motivo.

1.1 Nós usamos a matemática em nosso cotidiano e em tudo que fazemos?

Essa afirmação, de que trata essa seção, consideramos como, possivelmente, a menos verdadeira. Essa afirmativa é muito comum de ser encontrada e muitos a usam para tentar encorajar o aluno a estudar matemática, ainda mais sabendo que grande parte deles farão exames em que matemática é parte integrante. Vale dizer que uma parcela dessa afirmação é questionável. Quando alguém que faz essa afirmativa é indagado em que momento se pode encontrar essa matemática em tudo que fazemos, surgem algumas respostas prontas, que estão no imaginário coletivo, como exemplificado a seguir:

I- Usamos a matemática para calcular desconto ou parcelar pagamentos em uma loja;

II- Usamos a matemática quando vamos dividir um doce com um amigo;

III- Usamos a matemática quando vamos olhar as horas em um relógio analógico;

IV- Usamos matemática para saber a distância da nossa casa à igreja;

V- Usamos matemática na cozinha para fazer uma receita;

VI- Usamos a matemática para calcular nossas notas escolares;

VII- Usamos a matemática para fazer medições;

VIII- Usamos a matemática para usar o computador ou telefone;

IX- Usamos a matemática para calcular porcentagens, razões e proporções;

Das várias respostas obtidas por meio do questionário, em grande parte, são variações dessas relacionadas acima.

Queremos refletir aqui que usar a justificativa apenas do uso da matemática no dia a dia não é uma resposta que por si só encerra tudo o que significa a importância dela, muito menos leva o aluno a desenvolver uma capacidade maior que a reprodução de fórmulas para resolver exercícios, sem muitas vezes entender o conteúdo matemático, relacionando-o com que está desenvolvendo.

A primeira afirmação, que aponta sobre descontos e parcelas em um pagamento, é questionável, uma vez que quase sempre o desconto já é apresentado de modo que a pessoa nem precisa ter o trabalho de fazer o cálculo ou entender como ele funciona, a não ser que o objetivo ali seja o de observar se, realmente, o desconto anunciado é o que está sendo aplicado. O que se tem, nessas situações, é que, quando se pede parcelamento em uma loja, as prestações já saem prontas com ou sem juros e o comprador, em sua maioria, não tem muita opção a não ser, quase sempre, aceitar as condições e efetuar a compra sem questionar os cálculos já realizados, afinal, "é um computador que está fazendo, não tem erro". Vale ressaltar que situações similares a essa podem ser usadas para uma verificação do real valor, mas que, em sua grande maioria, não são utilizadas. Outro aspecto que pode influenciar é a desconfiança ou confiança do comprador em relação à loja que, muitas vezes, nem é feita uma checagem do preço antigo, pois é uma ação que dá um certo trabalho e quem está comprando muitas vezes não tem nem tempo ou nem não vai se importar com isso.

A segunda afirmação alega que usamos matemática para dividir algo com outra pessoa. Ora, até quem não tem conhecimento sistemático sobre matemática consegue dividir as coisas em partes proporcionais, pois a intuição está claramente presente nesse momento, não precisamos sentar em uma mesa e estudar matemática por horas para isso. Até mesmo uma criança bem pequena percebe quando, ao dividir algo com o colega, se está com o pedaço maior ou menor, sem precisar ter estudado matemática para isso.

A terceira afirmação diz que usamos a matemática para usar o relógio analógico. A afirmação é considerada correta, mas com duas ressalvas, a primeira é que o relógio analógico está cada vez mais em desuso, principalmente os de pulso, uma vez que quase todos têm acesso à celular ou relógio digital. Mesmo assim, o máximo de matemática exigida para olhar um relógio é saber a multiplicação, especialmente, pelo número cinco, ou seja, pouquíssima matemática é utilizada.

A quarta afirmação diz que usamos a matemática para calcular a distância de um lugar ao outro. Dificilmente alguém faz isso. Quando questionadas sobre distância, as pessoas geralmente respondem, "é aqui perto", ou "é meio longe", ou "fica à duas quadras daqui", ou "mais ou menos trezentos metros". Quase ninguém conta passos e então converte para metros para saber a distância de um local ao outro, isso é trabalhoso e, na sua grande maioria, desnecessário, a não ser em casos específicos e distâncias bem pequenas. Para distâncias maiores, as pessoas verificam por meio da quilometragem de automóvel, do GPS (Global Positioning System), ou ainda de outros aplicativos que se encontram à disposição da sociedade e, nesses casos, a distância já se apresenta pronta, sem precisar fazer cálculo algum.

A quinta afirmação diz que se usa matemática para fazer receita. Aqui podemos entender que a matemática é usada para preparar algo no dia a dia. Hoje, quase tudo já tem elementos e recursos pré-definidos que minimizam o erro de preparação de algo para quase zero. Já existem copos para receitas em que você acrescenta o ingrediente até o número pretendido e basta usar, não precisa nem ter muita noção de quantidade ou peso. Além disso, é bem provável que muitas pessoas conheçam alguém que seja um excelente cozinheiro com pouquíssima escolarização. Desse modo, justificar o estudo de horas de matemática para realizar uma receita não faz muito sentido. Também ao montar um computador, por exemplo, as peças já tem locais e cabos pré-definidos, de modo que é extremamente difícil que algo saia errado, basta uma breve leitura no manual. Ou seja, muitas coisas do cotidiano que precisam ser preparadas hoje em dia, requerem pouco raciocínio matemático.

A sexta afirmação é que usamos a matemática para calcular médias. De fato, a usamos para isso, entre elas a ponderada quando se trata de média escolar, por exemplo. Entretanto, essas médias quase sempre se apresentam calculadas. Nas escolas, por exemplo, os professores lançam as notas em um sistema e, em seguida, o sistema apresenta a média já calculada. Já a média aritmética que, em tese, é a mais utilizada no dia a dia é a aritmética que requer pouco conhecimento matemático.

A sétima afirmação é a que usamos a matemática para fazer medições. De fato, para fazer uma medição pode-se usar uma trena ou os passos. Feito isso, anota-se um número e realizam-se operações elementares para calcular perímetro, área e volume. Porém, muitos reproduzem as fórmulas sem entender o significado, apenas utilizam os números encontrados, digitam na calculadora e pronto, sem a necessidade de estudar muita matemática para isso.

A oitava afirmação, talvez a menos verdadeira, diz que usamos matemática para utilizar computador ou telefone. Ora, as crianças estão usando ambos cada vez mais cedo e, às vezes, de forma mais fluente que os adultos, pois são nativas digitais, e muitas tem um conhecimento quase nulo em matemática e, portanto, não necessitam dela para tal ação, isso significa que essa justificativa não encontra respaldo. Além disso, há casos de pessoas que não sabem dizer o número de CPF (Cadastro de Pessoa Física) ou número de matrícula de algum lugar, mas, para lembrar do número, simulam digitando em um teclado um primeiro número, e, nesses casos, o número passa a ser algo secundário, o que vale é a posição das teclas.

A nona afirmação, talvez a mais verdadeira, é que a usamos para calcular porcentagem, razão e proporção. Isso é verdade, mas quem realmente vê e usufrui dessa justificativa são aquelas que possuem algum conhecimento Matemático e apreciam em usá-lo. Boa parte das pessoas recorrem rapidamente à calculadora sem ter interesse em saber como esses cálculos acorrem. O mesmo vale para razão e proporção, mesmo quem já estudou evita falar coisas como: “três quintos das pessoas foram à palestra”, é mais fácil dizer a quantidade específica ou mais ou menos o percentual. De modo que muitos que as utilizam, aprenderam a utilizar cotidianamente, sem a necessidade de um estudo mais aprofundado em matemática.

Essas análises acima foram feitas com dois objetivos. Um objetivo, mais evidente, foi mostrar que essas afirmações são questionáveis e merecem nossa reflexão, pois não encontram muita sustentação quando pensamos mais profundamente sobre elas, o que fazem é mostrar que o conhecimento de matemática exigido nessas circunstâncias não são, assim, tão extraordinários que justificariam o estudo sistemático da matemática para esses fins. Defendemos que tais afirmações reforçam o uso da matemática pouco questionadora, pois alimentam a prática de resolução de problemas com pouca ou nenhuma justificativa, usando a matemática apenas para representar expressões e chegar a um resultado com pouca ou nenhuma análise do processo que foi realizado, estimulando o aluno apenas a decorar e aplicar fórmulas matemáticas.

É evidente que saber matemática traz suas contribuições no cotidiano, isso é inegável, entretanto, na maioria deles, ela se torna quase desnecessária para aplicações no dia a dia, pelos motivos já relacionados. Além disso, justificar anos de estudos em matemática para apenas essas pequenas aplicações que mesmo quem não estudou ou pouco estudou matemática consegue aplicar, não mostra a grandeza de se estudar essa disciplina. Concordamos com Ruiz (2008, p. 12):

> Nesse sentido, quando falamos de matematização do cotidiano nossas preocupações nada têm a ver com a matemática escolar. Pois ela pertence a outro tempo e a outra concepção de mundo, muito mais simples que a conhecida a partir das contribuições dos gregos [...] Estamos, isto sim, dizendo que os não-matemáticos precisam ter acesso ao espírito da matemática do nosso tempo.

Outro questionamento a ser feito é o seguinte: Diante das respostas obtidas dá para se observar que foram elencados conteúdos que representam uma parte bem pequena da matemática que aprendemos ao longo da educação básica. E os demais conteúdos? Quando serão utilizados? Por exemplo, equação do segundo grau, logaritmos, números complexos, matrizes e determinantes, área do trapézio, e muitos outros. Quando esses conteúdos aparecerão "em tudo que fazemos"? Em resumo, para resolver as situações apresentadas acima, não precisamos estudar matemática por horas e horas, ou seja, esse não é um bom argumento para defender a obrigatoriedade do estudo da matemática. Além disso, temos que pensar em problemas que envolvam a maior quantidade dos conteúdos de matemática possível, e isso não é tão simples assim.

Desse modo, defender que devemos estudar matemática pois a usamos em nosso dia a dia não é uma afirmação que se sustenta muito facilmente. Bastou um pouco de reflexão para vermos que temos de ponderar, relativizar ao tratar sobre isso com os alunos em sala de aula. Não negamos aqui situações hipotéticas que podem aparecer em problemas, mas não devemos considerar isso como o motivo principal para estudar matemática, alegando que o aluno usará aquilo em seu dia a dia. Ainda mais quando consideramos que boa parte dos problemas apresentados aos estudantes contam com situações completamente fora da realidade deles. Segundo Lima (2003, p. 142):

> Abundam nas salas de aula, nas listas de exercícios e nos exames exames as operações algébricas, os cálculos de radicais, as equações com uma ou mais incógnitas, as identidades trigonométricas e vários outros tipos de questões que, embora necessárias para o adestramento dos alunos, não são motivadas, não provêm de problemas reais, não estão relacionadas com a vida atual, nem como as demais ciências e nem mesmo com outras áreas da Matemática.

O que se tem, muitas vezes, são problemas apresentados em sala de aula de forma a apenas reproduzir algoritmos sem desenvolver a capacidade argumentativa dos alunos. Assim, se faz necessário repensarmos como trabalhar um problema matemático em sala de aula, não mais o resolvendo por resolver, como um mero exercício.

Para exemplificar um tipo de problema fora da realidade dos alunos. Observe o problema abaixo:

> Gerador é um aparelho que transforma qualquer tipo de energia em energia elétrica. Se a potência P (em watts) que certo gerador lança em um circuito elétrico é dada pela relação $P(i) = 20i - 5i^2$, em que i é a intensidade da corrente elétrica que atravessa o gerador, determine o número de watts que expressa a potência P quando $i = 3$ ampères (Dante, 2013, p. 106).

Esse exercício defendemos que pouco tem a ver com a realidade dos alunos, pois, potência, gerador, circuito elétrico são coisas difíceis de se enxergar. Além disso, o livro no qual tem esse problema refere-se ao primeiro ano do ensino médio e não do terceiro, quando, normalmente, esse conteúdo é estudado. Ele muito provavelmente somente jogará o valor de $i = 3$ na função dada, obterá a resposta e pronto. Está resolvido, sem muito questionamento.

Entretanto, no mesmo livro, encontramos o seguinte problema também envolvendo função quadrática, Dante (2013, p. 109) diz que: "Os 180 alunos de uma escola estão dispostos de forma retangular, em filas, de tal modo que o número de alunos de cada fila supera em 8 o número de filas. Quantos alunos há em cada fila?".

Entendemos que esse problema seja mais interessante, note que ele tem uma certa relação com a realidade do aluno, pois trata de ambiente escolar e, mais que isso, ele não requer simplesmente uma "aplicação de fórmula", porque é necessária uma interpretação e organização das ideias para, posteriormente, aplicar a fórmula e encontrar o resultado esperado.

Observamos também que nesse livro existem uma quantidade muito grande de exercícios e poucos problemas, isso é fácil de entender, pois criar problemas matemáticos não é uma prática simples e é possível que muitos matemáticos e professores de matemática pensem que seja um tanto desnecessária a resolução de muitos deles. Segundo Lima (2003, p.143), "exercícios de manipulação são imprescindíveis mas precisam ser comedidos, simples, elegantes e, sempre que possível, úteis para emprego posterior". Entretanto, consideramos que ficar resolvendo somente exercícios e problemas que não requerem mais que uma aplicação de fórmula ou manipulação algébrica, encorajam somente a reprodução de algoritmos e manipulações algébricas exigindo pouca reflexão e argumentação por parte dos alunos. Além disso, queremos buscar a reflexão do professor de modo que mude gradativamente algumas práticas docentes.

> [...] o professor que acredita que o aluno aprende aprende Matemática através da memorização de fatos, regras ou princípios transmitidos pelo professor ou pela repetição exaustiva de exercícios, também terá uma prática diferenciada daquele que entende que o aluno aprende construindo os conceitos a partir de ações reflexivas sobre materiais e atividades, ou a partir de situações-problema e problematizações do saber matemático. (Fiorentini, 1995, p. 5)

Tendo essa ideia como mola propulsora, que a matemática não é apenas reprodução do que se faz, de repetição, de um não pensar e raciocinar, queremos mostrar, nos capítulos seguintes, duas formas que consideramos importantes para estudar matemática e que podem surtir efeito a curto ou médio prazo, mas que são pouco utilizadas pelos professores. Defendemos que as estratégias que apresentaremos podem acrescentar um desenvolvimento crítico nos alunos de modo que eles não somente reproduzam fórmulas e algoritmos. Segundo Carvalho (2008, p. 76), "Esta percepção de que o ensino de Ciências e Matemática destina-se a preparar cidadãos para agir de maneira crítica e consciente em uma sociedade altamente complexa é recente". Além disso, de acordo com Freire (2015, p. 67), "A memorização mecânica do perfil do objeto não é aprendizado verdadeiro do objeto ou do conteúdo. Neste caso, o aprendiz funciona muito mais como *paciente* da transferência do objeto ou do conteúdo do que como sujeito crítico [...]".

Esperamos que as propostas que serão apresentadas levem o aluno a se tornar um cidadão mais reflexivo na sociedade ao desenvolver capacidades argumentativas, mas, para isso, elas devem ser desafiadoras. Carvalho (2008, p. 88) diz que "O desafio é ensinar Matemática útil e relevante para o cidadão, sem perder as especificidades e a estrutura inatas à Matemática".

Tentaremos, assim, levar o estudante, por meio da matemática, a desenvolver sua capacidade crítica e argumentativa nos aspectos sociais que o cercam. Pensamos que isso possibilitará a ele ter mais facilidade em fazer análises lógicas, capacitando-o para perceber e enfrentar as situações a ele apresentadas durante sua vida e que podem torná-lo um cidadão mais consciente do e em seu meio social.

Segundo Carvalho (2008, p. 81) "De maneira geral, podemos afirmar que hoje o educador matemático tem consciência de sua responsabilidade social. A Matemática não pode ser nem uma brincadeira intelectual descomprometida, nem uma ferramenta usada para maior domínio e controle da sociedade. Como construção social, ela pertence a toda a sociedade, para seu bem".

Para concluir este capítulo, consideramos que usamos pouquíssima matemática em nosso cotidiano. Além disso, a matemática utilizada no dia a dia não requer muito estudo, pois quase toda ela pode ser aprendida com quase nenhuma escolarização, não se tornando estudo por anos da disciplina. Desse modo, defendemos que isso não pode ser um motivo principal para estudá-la e nem que isso seja uma grande justificativa usada pelo professor para incentivar o estudos dos conteúdos da matemática.

Uma das perguntas que guiará parte deste trabalho é "A alfabetização matemática poderia ajudar as pessoas a reorganizar suas visões sobre instituições sociais, tradições e possibilidades em ações políticas?" (Skovsmose, 2001, p. 67).

Em outras palavras, a matemática pode ajudar o aluno a enxergar e interpretar a realidade social na qual ele está inserido? Outra pergunta muito importante que tentaremos encontrar resposta, que também consta em Skovsmose (2001, p. 67), é a "Que tipo de competência, se alguma, importante para participar de uma democracia, pode ser apoiada pelo desenvolvimento da alfabetização matemática?". É o que pretendemos refletir.

Capítulo 2

Como não estudar matemática. Apresentando "problema argumentativo"

O objetivo deste capítulo é tentar mostrar como não estudar matemática. Nesse caso, a palavra "como" é entendida como método de ensino e aprendizagem praticados por boa parte dos professores de matemática no Brasil.

Na sociedade brasileira, uma grande parcela da população trabalha de maneira assalariada para uma empresa. Essa pessoa que trabalha para determinada corporação geralmente cumpre uma série de tarefas de modo metódico com pouco questionamento sobre o significado daquilo que está fazendo, em que seu trabalho pode trazer de benefícios para o contexto social na qual está inserida. Quando recebe o salário ao final do mês, significa que seu trabalho foi realizado com sucesso, não importando muito o sentido de todo o processo. Segundo Skovsmose (2007, p. 216):

> A tradição matemática escolar pode fornecer qualidades, como obediência, crença nos números, crença exagerada na autoridade etc. Esses aspectos são considerados consequências problemáticas da educação matemática. Mas, como indicado previamente, poderia ser o caso que essas competências, cultivadas pela tradição matemática da escola, de fato hoje tenham uma função na sociedade. Em muitos empregos, é essencial que as pessoas sigam manuais e prescrições [...] A tradição matemática escolar pode preparar estudantes para funcionar em funções de emprego subordinadas no processo de produção, onde cuidado e obediência são qualidades essenciais. Essa tradição pode cultivar uma docilidade que qualifica a maioria para operar de um modo acomodado na sociedade hoje.

Consideramos isso muito ruim para o desenvolvimento do cidadão pois o trata como objeto e não como sujeito da história (Freire, 2015, p. 53).

Defendemos que isso seja o resultado de uma educação que chamaremos de estruturalista, na qual a matemática está inserida. Definiremos estruturalismo usando as palavras de Skovsmose (2001, p. 20):

> O *estruturalismo* é caracterizado pelas seguintes afirmações: a essência da matemática pode ser determinada cristalizando conceitos fundamentais por meio de análise lógica das teorias matemáticas existentes; esses conceitos fundamentais podem ser transmitidos para o aprendiz por meio de concretizações apropriadas de acordo com o potencial epistemológico da criança.

Nesse tipo de matemática, tradicionalmente ensinada nas escolas do Brasil, seguem determinados procedimentos que pouco incentivam a reflexão dos alunos no desenvolvimento do conteúdo, muito menos provocam uma reflexão sobre a realidade social em que eles estão inseridos. De acordo com Ponte, (2004, p. 69) “As tarefas de natureza estruturada, em especial os exercícios, parecem continuar a ter um papel hegemónico nas práticas lectivas dos professores. As questões da comunicação na aula de Matemática só recentemente começaram a merecer uma atenção significativa”.

Resumidamente, os procedimentos geralmente realizados pelos professores para ensinar determinado conteúdo de matemática são:

1º Anunciar o conteúdo que será ministrado na aula;

2º Explicar o conteúdo com deduções e demonstrações (a parte de deduções e demonstrações são raramente contempladas por uma série de justificativas, entre elas, a de tempo).

3º Resoluções de exercícios e problemas.

O que foi dito anteriormente também é corroborado por Skovsmose (2008, p.15):

> Nas suas observações de salas de aula inglesas, Tony Cotton (1998) notou que a aula de matemática é dividida em duas partes: primeiro, o professor apresenta algumas ideias e técnicas matemáticas e, depois, os alunos trabalham com exercícios selecionados. Ele também observou que existem variações nesse mesmo padrão: há desde o tipo de aula em que o professor ocupa a maior parte do tempo com exposição até aquela em que o aluno fica a maior parte do tempo envolvido com resolução de exercícios. De acordo com essas e muitas outras observações, a educação matemática tradicional se enquadra no paradigma do exercício.

Infelizmente, boa parte dos professores não demonstram os conteúdos matemáticos utilizados em sala de aula. Segundo Lima (2003, p. 143) “a grande maioria dos estudantes brasileiros sai da escola, depois de onze anos de estudo, sem jamais ter visto uma demonstração”. Consideramos que pelo menos algumas demonstrações sejam importantes para incentivar o aluno a simplesmente não aceitar o conteúdo sem questionamento. De acordo com Lima (2003, p. 143):

> Um dos maiores méritos educativos da Matemática é o de ensinar aos jovens que toda conclusão se baseia em hipóteses, as quais precisam ser aceitas, admitidas para que a afirmação final seja válida [...]
> Evidentemente as demonstrações pertencem à componente Conceituação. Elas devem ser apresentadas por serem parte essencial da natureza da Matemática e por seu valor educativo. A nível escolar, demonstrar é uma forma de convencer com base na razão, em vez da autoridade.

A princípio, pode-se observar como essa matemática estruturada está relacionada com a nossa sociedade, como já foi reportado no início desse capítulo. É um ensino muito pouco questionador, em que os alunos recebem uma informação como verdade e logo em seguida começam a resolver exercícios mecânicos que reproduzem algoritmos que muitas vezes sequer foram demonstrados se são realmente válidos e, ao mesmo tempo, resolvem problemas matemáticos que chamaremos de pseudoproblemas, pois, apesar de muitos serem enunciados de uma forma que aparentam alguma aplicação, é quase certo que o aluno dificilmente passará por uma situação parecida em sua vida em que pudesse aplicar algo semelhante ao usado na resolução do problema. Skovsmose (2001, p. 24) diz que “Problemas não devem pertencer a “realidades de faz-de-conta” sem nenhuma significação exceto como ilustração da matemática como ciência das situações hipotéticas”. Além disso,

> Nem o professor, nem os alunos participam da elaboração dos exercícios. Eles são estabelecidos pelo autor de um livro-texto. Isso significa que a justificativa para a relevância dos exercícios não faz parte da lição em si mesma. Os textos e exercícios matemáticos costumam ser, para aqueles que vivenciam a prática e a comunicação em sala de aula, elementos preestabelecidos. (Skovsmose e Alrø, 2006, p. 52).

Sabemos que é muito difícil fugir dos pseudoproblemas, mas devemos buscar um meio-termo de maneira que possamos tentar mudar a realidade da matemática estruturada usada na sala de aula.

Pessoas críticas a esse tipo de matemática já existem no Brasil desde a criação da USP (Universidade de São Paulo) em 1934, em seu primeiro corpo docente, a universidade contou com professores italianos de matemática prestigiados na época, como Luigi Fantapiè, segundo (Silva, 2005, p. 51), Fantapiè já naquela época combatia o que ele chamou de "ensino enciclopédico, pleno de conhecimentos isolados, de fórmulas e regras a serem decoradas que nada contribuíam para formação da personalidade do indivíduo". Observe que já existia uma preocupação da função da matemática na formação do cidadão.

O documento relativo aos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, Lamport (1987), mostra, logo em seu início que esses parâmetros

> Visam à construção de um referencial que oriente a prática escolar de forma a contribuir para que toda criança e jovem brasileiros tenham acesso a um conhecimento matemático que lhes possibilite de fato sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura.

Ou seja, a matemática deve ser aliada na formação humana do cidadão, de maneira que aquilo que ele aprende, deverá reproduzir em seu dia a dia de algum modo. Isso significa dizer que, se ele, o estudante, for ensinado a ser mais questionador e argumentador, de fato os docentes estarão usando a matemática para formar um cidadão mais crítico no meio em que vive. Em seguida, esse mesmo documento, ao se referir sobre as principais características da matemática, expõe que:

> A Matemática caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural.
> Esta visão opõe-se àquela presente na maioria da sociedade e na escola que considera a Matemática como um corpo de conhecimento imutável e verdadeiro, que deve ser assimilado pelo aluno [...]
> Em contrapartida, não se deve perder de vista os caracteres especulativo, estético não imediatamente pragmático do conhecimento matemático sem os quais se perde parte de sua natureza.

Assim, a matemática aprendida em sala de aula deve ter algum sentido para o aluno, ao passo que não pode perder sua essência de caráter lógico-dedutivo, da razão. Então, o problema argumentativo é caracterizado como algo que podemos chamar de meio-termo. Ao mesmo tempo que se apresenta um problema que faça algum sentido para o aluno, mesmo que tenha características de pseudoproblema, é difícil nos desviarmos dele, mas, principalmente, é cobrado que ele responda de maneira argumentativa, utilizando-se das ferramentas matemáticas da maneira correta para chegar a uma conclusão.

Exercício é uma coisa, e problema é outra. Segundo Ponte (2004, p. 52), "O que muitos professores consideram como um problema, outros podem considerar apenas como um exercício". Nesse caso, consideraremos como exercício a reprodução dos algoritmos e fórmulas apresentadas pelo professor. Infelizmente, uma quantidade de exercícios razoável é necessária para que o aluno não decore, mas tenha familiaridade com a utilização do conteúdo matemático aprendido. Um passo seguinte, é a sua utilização nos problemas. Defendemos que se deva evitar os pseudoproblemas, que nada mais são que exercícios disfarçados em que o aluno resolve de maneira automática sem de fato ter uma reflexão mais profunda e significativa acerca daquilo que está fazendo.

Sugerimos que os problemas apresentados ao aluno os levem, de alguma maneira, a se enxergar neles e que consigam deduzir a resposta com algum significado maior do que simplesmente "encontrar a resposta". Note que essa é uma tarefa muito desafiadora e que, dependendo do conteúdo que se está sendo ensinado, é trabalhoso conseguir imaginar e criar problemas que contemplem características de um problema argumentativo.

Mas, tentaremos a seguir, exemplificar uma situação hipotética com pseudoproblemas que são disseminados durante o ensino da matemática. Em seguida, mostraremos uma releitura de como se pode pode aplicar os exercícios de maneira que levem aos alunos a se enxergarem no problema e tentarem resolvê-lo de modo dedutivo com maior reflexão e sentido para ele. Entendemos que seja de grande importância, de alguma forma, que o estudante seja afetado e se sinta participante do processo (Freire, 2014, 2015).

Suponha que um professor esteja ensinando o Teorema de Pitágoras. Na maioria das vezes, o teorema será enunciado sem nenhuma demonstração, entretanto, ao menos duas deveriam ser dadas segundo Lima (2003, p. 144). Logo em seguida os alunos serão apresentados a exercícios com este padrão:

1. Um avião percorreu a distância de 5 000 metros na posição inclinada, e em relação ao solo, percorreu 3 000 metros. Determine a altura do avião.

2. Do topo de uma torre, três cabos de aço estão ligados à superfície por meio de ganchos, dando sustentabilidade à torre. Sabendo que a medida de cada cabo é de 30 metros e que a distância dos ganchos até à base da torre é de 15 metros, determine a medida de sua altura.

Observe que os problemas relacionados acima são claramente pseudoproblemas, são situações que dificilmente farão parte da vida de alguém em algum momento, mais ainda, é quase impossível de o aluno conseguir se enxergar nesses problemas, além disso, nada mais são que exercícios disfarçados. No primeiro exercício basta o aluno, por exemplo, escrever a seguinte resolução:

$$5000^2 = 3000^2 + x^2 \implies x = \sqrt{5000^2 - 3000^2} \implies x^2 = \sqrt{16.000.000} \implies x = 4000$$

Desse modo, propomos uma alternativa menos superficial, que defendemos que ainda não seja modo ideal de se tratar matemática, entretanto, é uma possibilidade considerada meio-termo que pode ser utilizada sem muitas dificuldades pelos professores. A ideia é que podemos transformar pseudo-problemas em problemas que chamaremos de **problemas argumentativos**, apesar de considerarmos ainda um pseudoproblema, o problema argumentativo faz com o que o aluno consiga se enxergar de algum modo naquela situação e, além disso, o mais importante é que ele exige do aluno uma solução que não apresente somente uma reprodução fria do algoritmo que o conteúdo apresentou, mas que argumente de maneira lógica sobre o porquê de a sua solução estar correta. Feito assim, defendemos que a matemática pode ser uma ferramenta que contribua para o aluno pensar de maneira mais organizada e que consiga trabalhar a argumentação lógica juntamente com a matemática e que, talvez, possa fazer mais sentido na sua formação como uma pessoa crítica.

Definiremos então **problema argumentativo** como um problema matemático em que o aluno possa se enxergar de algum modo dentro da situação-problema apresentada e que, mais importante ainda, seja exigido dele uma argumentação lógico-matemática, enunciando o que vai ser realizado, qual conteúdo será utilizado para resolver o problema, ligando os passos de suas deduções, e que ao fim conclua a resposta descrevendo a solução.

Apesar do enunciado muitas vezes apresentar um pseudoproblema, achamos interessante que ele tenha alguma conexão com a realidade do aluno. Segundo Freire (2015, p. 32),

> Por que não estabelecer uma "intimidade" entre os saberes curriculares fundamentais aos alunos e a experiência social que eles têm como indivíduos? [...] "Porque, dirá um educador reacionariamente pragmático, a escola não tem nada que ver com isso. A escola não é partido. Ela tem que ensinar os conteúdos, transferi-los aos alunos. Aprendidos, estes operam por si mesmos".

Vejamos o exemplo de um possível problema argumentativo relacionado ao conteúdo Teorema de Pitágoras: Suponha que você queira encontrar seu amigo e ele se encontra na ponta de uma praça retangular, entretanto você se encontra na ponta oposta da praça. Na praça, fazendo o trajeto a pé, há três caminhos possíveis para seguir, ou se anda na diagonal em linha reta até seu amigo, ou anda para esquerda depois para cima percorrendo dois lados da praça, ou anda para cima depois para esquerda, também percorrendo dois lados da praça. Sabendo que os lados da praça medem 300 e 400 metros, **mostre** o menor caminho possível para se percorrer até chegar ao seu amigo.

Observe a diferença no enunciado acima dos outros dois enunciados apresentados anteriormente. Nesse enunciado, tentamos atinar a imaginação do aluno fazendo com que ele se sinta como parte do problema, queremos que ele trabalhe a imaginação em algo relativamente plausível, como, por exemplo, encontrar um amigo que está em uma praça. Supondo que ele tenha algumas informações do local, como as medidas laterais e que possui um caminho na diagonal em linha reta que ele pode percorrer para encontrar o amigo, qual seria o menor caminho possível a ser percorrido? Note que destacamos a palavra "mostre" para enfatizar que ele precisa argumentar para responder e não simplesmente escrever o algoritmo friamente e apresentar o resultado. Nesse momento, o papel do professor é muito importante, pois deve explicar para o aluno como se resolve um problema matemático de maneira "demonstrativa", descrevendo os passos necessários. Aqui é realizada a parte principal do problema argumentativo, a prática em elaborar respostas com argumentações. Segue um exemplo desse tipo de resposta para o problema:

Existem três caminhos possíveis, eu posso começar indo para esquerda e depois para cima, ou indo para cima depois para esquerda, ou indo pela diagonal em linha reta. O primeiro caminho será de $300 + 400 = 700$ metros, o segundo caminho será de $400 + 300 = 700$ metros, o terceiro caminho será a diagonal em linha reta. Como não sei o tamanho do caminho e a praça é retangular, esse caminho forma com as laterais da praça um triângulo retângulo, portanto, vou utilizar o Teorema de Pitágoras para calcular esse trajeto, chamando o comprimento do caminho da diagonal de d, temos que: $d^2 = 300^2 + 400^2 \implies d = \sqrt{16000} \implies d = 500$ metros. Portanto, o caminho da diagonal é o mais curto para eu encontrar meu amigo.

Observe que, como já ressaltamos, o problema argumentativo se assemelha em algum aspecto com o pseudo-problema, ao passo que eles podem apresentar situações que jamais os alunos vão presenciar. Entretanto, sugerimos que o problema argumentativo seja de uma realidade mais próxima ao aluno, algo que ele possa imaginar, ver. Uma praça, por exemplo, é algo se vê quase todo dia, diferente de um avião, ou torres gigantescas. Além disso, a parte principal do problema argumentativo é a elaboração da resposta que deve ser elaborada de maneira argumentativa, apresentando todos os passos necessários, ligação das ideias apresentadas, quais ferramentas matemáticas foram utilizadas, se possível, quais outras respostas não estariam corretas e o porquê de serem incorretas. Defendemos que isso seja uma forma de ajudar a desenvolver a capacidade do aluno para a argumentação. No seu dia-a-dia as pessoas dialogam e, constantemente, são colocadas em situação que precisam argumentar, debater, questionar, criticar, perceber se alguém está falando ou afirmando algo sem lógica ou fora da realidade. A matemática pode ser, sim, uma ferramenta de auxílio nessas percepções. Defendemos, por conseguinte, que ao praticar essas argumentações nesses tipos de problema, pode ser algo que leve o aluno a se preparar para sua vida como cidadão reflexivo, crítico e que saiba se posicionar em determinadas situações da sua vida.

Apresentamos, a seguir, mais um exemplo de pseudoproblema e, na sequência, um problema argumentativo que pode substituí-lo envolvendo um conteúdo muito famoso e sempre lembrado pelos alunos: função quadrática e seus valores máximo ou mínimo.

1. Uma fábrica produz um produto com o custo definido pela função

$$C(x) = x^2 - 50x + 1000$$

Considerando o custo C em reais e x a quantidade de unidades produzidas, determine a quantia de unidades para que o custo seja mínimo e o seu valor.

Uma possível resposta apresentada pelo alunos seria:

$$Q_{min} = \frac{-b}{2a} \implies Q_{min} = \frac{50}{2} = 25$$

$$C_{min} = 25^2 - 50 \times 25 + 1000 \implies C_{min} = 375$$

Observe que o problema acima é apenas um exercício disfarçado, ou seja, um pseudoproblema. O aluno simplesmente decora o algoritmo e reproduz sem reflexão ou quase nenhum questionamento. Abaixo, apresentamos um problema argumentativo que poderia ser aplicado envolvendo equação do segundo grau e valores de máximo e mínimo.

Para esse conteúdo vamos utilizar como referência um exercício do livro Temas e Problemas Elementares (Lima et al., 2005, p. 59). Para isso, vamos adaptar o enunciado de modo que se enquadre melhor como um problema argumentativo:

1. Suponha que você seja o gerente de uma casa de festas e que um ingresso custe $R\$30,00$. Com o preço a esse valor, você percebe que aparecem em média 500 espectadores. Com o passar do tempo, você também notou que a cada 1 real de desconto no preço do ingresso, público aumentava em média 40 pessoas. Mostre qual deve ser o preço do ingresso para que a receita seja máxima.

Observe que apresentamos um problema que força o aluno a imaginar uma situação em que ele possa estar inserido (apesar de que seja muito improvável que uma situação dessa apareça durante sua vida), é algo que está presente no dia a dia dos alunos, compras, descontos, festas, ingressos e tudo mais. Nesse exercício em questão, ele deve se imaginar como gerente de uma casa de festas e que, ao dar um desconto nas vendas, aumenta o público pagante, ou seja, percebe-se que existe alguma matemática aí. Nesse caso a ideia é provocar uma reflexão sobre a situação e que ele suspeite que um caminho é montar uma função quadrática. Observe que não é possível simplesmente aplicar a as fórmulas conhecidas de máximo e mínimo de uma vez, pois a função não é dada de maneira simples no enunciado. Ressaltamos que a parte principal é a resposta argumentativa, nesse momento o professor deve acompanhar e incentivar que os alunos respondam de maneira completa, utilizando argumentos lógicos e o conteúdo matemático em questão. Uma possível resposta para esse problema seria:

Como ao dar descontos está implicando que mais pessoas apareçam ao show, existe a possibilidade de que ao dar um determinado desconto, a receita que eu receba cresça, ao mesmo tempo não posso dar muito desconto, pois um ingresso muito barato gera pouca receita. Desse modo, como o ingresso custa 30 reais, chamando x de desconto que posso dar, o preço com desconto será $30-x$. Como a cada 1 real de desconto a quantidade de espectadores aumenta em 40, temos então que a quantidade de espectadores aumenta proporcionalmente em $500+40x$. Logo, chamando $R(x)$ de receita, temos que

$$R(x) = (30 - x)(500 + 40x)$$

assim,

$$R(x) = -40x^2 + 700x + 15000$$

Usando a fórmula que encontra o x máximo (preço máximo) para função de segundo grau, o preço x do ingresso que maximiza a receita é

$$x_{max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-700}{-80} = 8,75$$

Logo, devo vender o ingresso no valor de R\$8,75 para obter a seguinte receita máxima:

$$R(8,75) = -40 \times 8,75 + 700 \times 8,75 + 15000 = 18.062,50$$

Ou seja, a receita máxima será de R\$18052,50.

Às vezes, dificilmente conseguiremos modificar um enunciado de modo que se apresente como algo mais próximo da realidade do estudante. Entretanto, se exigirmos que ele responda de maneira argumentativa o problema, isso já provoca nele uma atitude argumentativa que consideramos muito importante para seu desenvolvimento.

Veja o exemplo a seguir. Enunciaremos um problema simples de contagem. A primeira resposta seria como normalmente vemos em resoluções, a outra resposta seria a que consideramos argumentativa:

1. Certa bandeira é formada por três listras horizontais. Dispondo de três cores distintas de tintas. De quantas maneiras podemos pintá-la?

Uma resposta que provavelmente encontraríamos com mais frequência seria:

$$3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$$

ou seja, 27 maneiras.

Essa é uma resposta que consideramos que não exige uma prática argumentativa do aluno. Quem lê essa resposta sem ler o enunciado, não tem ideia do que está sendo realizado.

Agora observem esta resposta que consideramos argumentativa: Como dispomos de três cores para pintar a bandeira e podemos pintá-la sem restrição, logo, podemos pintar de três maneiras a primeira listra, de três maneiras a segunda listra e de três maneiras a terceira listra. Desse modo, usando o princípio fundamental da contagem, podemos pintar a bandeira de

$$3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$$

ou seja, 27 maneiras.

Como já dito, nem sempre será possível que o professor elabore um problema que contenha um enunciado com uma relação mais direta com o estudante, de modo que ele possa se enxergar em tal situação de sua vida. No entanto, se a esse aluno é solicitado que argumente e justifique sua resposta e que não apenas reproduza um algoritmo de maneira fria, consideramos isso de grande importância para seu desenvolvimento, pois, nesse momento ele praticará sua argumentação, o que implicará na sua formação como alguém que se posiciona diante de fatos, não sendo um mero espectador, receptador e reprodutor de respostas prontas e acabadas.

É claro que um problema argumentativo não é fácil de ser formulado, dependendo do conteúdo matemático defendemos que seja muito difícil, mas é necessário que os professores voltem o olhar com mais cuidado para esse tipo de problema, pois defendemos que seja uma maneira pouco trabalhosa de usar a matemática para uma melhor formação do aluno, ajudando a se tornar uma pessoa com mais capacidade argumentativa na resolução dos problemas e que esse aprendizado possa ser levado para a sua formação enquanto cidadão.

Consideramos, então, que responder pseudoproblemas, ainda mais apenas aplicando fórmulas, é uma prática que prejudica o estudante. Avaliamos isso como não estudar matemática, pois pouco se exige de argumentação e reflexão que são práticas que consideramos importantes enquanto sua formação como cidadão.

Como já foi dito, é fácil de observar que mais importante que formular um problema argumentativo, é exigir do aluno uma resposta argumentativa adequada e devemos estimulá-los a responder como se precisassem convencer alguém de que sua resposta esteja certa, mostrando inclusive respostas que poderiam ser erradas caso outros caminhos fossem tomados. Uma alternativa interessante é responder de uma maneira que quem esteja lendo a resposta não precise nem saber qual pergunta foi realizada para saber do que está se tratando. A resposta deve um seguir um caminho com argumentações fortes e lógicas de modo que não fique nenhuma “ponta solta”. Por exemplo, se no problema é pedido para mostrar que determinado caminho é o melhor e existem mais caminhos, deve-se mostrar, se possível, que os outros são piores e os motivos que levam para ser piores, em seguida mostrar o caminho melhor ou vice-versa.

Essas argumentações fazem parte da vida das pessoas. Ao conversar com alguém sempre tentamos achar meios de dar sentido ao que falamos e convencer o outro do que está sendo dito, praticamos isso diariamente. Ao mesmo tempo, quando o outro está falando algo, involuntariamente procuramos ver se existe sentido naquilo que está sendo dito e, se as hipóteses usadas confirmam as teses. Desse modo, resolver problemas argumentativos tem também como objetivo incentivar a reflexão na fala e no agir, verificar sempre se existe sentido no que está sendo feito, visto ou ouvido, se está existindo causa e consequência.

Note que a capacidade de argumentar para resolver um problema argumentativo tem certa similaridade ao de realização de uma demonstração matemática.

> Em contrapartida, a ideia de que há uma distância cognitiva entre argumentação e prova é fortemente contestada por um grupo de investigadores italianos que defendem que a exploração, pelos alunos, de problemas abertos que requeira a formulação de conjecturas e a avaliação da sua plausibilidade, pode favorecer uma significativa actividade argumentativa que, em muitos casos, se revela muito útil na construção da prova (Boero, 1999; Bussi, 2000; Pedemonte, 2002 *apud* Boavida, 2005, p. 9).

Por isso, defendemos que o aluno, além de resolver problemas argumentativos, que é o caso mais simples do uso de uma matemática mais argumentativa, com hipótese e tese, deve-se incentivar a utilização de pequenas demonstrações afim de que ele possa praticar mais rigorosamente a argumentação matemática parao que tenha noção dessa parte da matemática que envolve o processo dedutivo e não somente o resultado final. Essa é a proposta desse próximo capítulo.

Desse modo, problema argumentativo é nossa primeira sugestão para melhorar a prática da argumentação matemática em sala de aula. É uma alternativa mais fácil, ao passo que se resume na formulação e resolução de problemas que incentivam uma maior reflexão por parte dos alunos. Pode ser uma possibilidade que traga resultados a médio prazo, pois muitas práticas matemáticas usadas que são voltadas para a repetição e reprodução de algoritmos devem ser mudadas, questionadas. Práticas essas, que como foi dito, reproduzem aquilo que na realidade é, em sua grande maioria, a sociedade, pois pouco se reflete, se questiona, se argumenta e se propõe. O que mais se vê é a reprodução automática de comportamentos, de ações, seres humanos robotizados que cumprem suas tarefas, com pouco questionamento acerca do que se faz, sendo, por exemplo, o imediatismo, na nossa opinião um ponto marcante dessa pouca reflexão.

Capítulo 3

Desenvolvendo a argumentação matemática utilizando Divisão Euclidiana

Como dito no capítulo anterior, um dos papéis que consideramos importante na matemática, e que está silenciado nos dias de hoje, é a de formar cidadãos mais críticos. Defendemos que a matemática possa ajudar nesse sentido, formando cidadãos com melhor capacidade de argumentação e discernimento. Pensamos assim, que uma introdução à matemática mais argumentativa na figura de divisão euclidiana pode ser um passo interessante para a prática de pequenas demonstrações que exigem um grande papel de argumentação, raciocínio lógico e conexões entre hipóteses e teses até a conclusão final da demonstração que tem por objetivo mostrar um resultado geral que serve para ocasiões similares.

> [...] a importância actualmente atribuída ao envolvimento dos alunos em actividades de argumentação, em particular na aula de Matemática, decorre da sinergia de vários argumentos de que destaco: (a) a valorização do raciocínio matemático nas suas múltiplas vertentes numa perspectiva que não põe a ênfase no rigor e formalismo entendidos como um fim em si mesmo, (b) a recomendação de que os alunos aprendam Matemática com compreensão, (c) o valor atribuído às linguagens naturais e à interacção social para a aprendizagem, (d) a aproximação da comunicação na aula de Matemática da existente na comunidade dos matemáticos, (e) dificuldades encontradas na aprendizagem da prova e a procura de caminhos que facilitem esta aprendizagem e (f) a relevância da escola proporcionar a todos os alunos condições necessárias para desenvolverem certas competências transversais, entre as quais está a competência argumentativa, fundamentais ao exercício pleno de uma cidadania responsável numa

> sociedade democrática (Boavida, 2005, p. 7).

Além disso, defendemos que a prática argumentativa pode ser amplamente usada em matemática, pois é uma disciplina que evita ambiguidade e requer precisão em suas resoluções. Desse modo, consideramos a prática da argumentação uma ferramenta poderosa para alcançar esses objetivos.

> A generalidade com que valem as proposições matemáticas exige precisão, proíbe ambiguidades e por isso requer mais concentração e cuidado por parte do estudante. Por outro lado, o exercício dessas virtudes durante os anos de escola ajuda a formar hábitos que serão úteis no futuro. A perseverança, a dedicação e a ordem no trabalho são qualidades indispensáveis para o estudo da Matemática. Note-se que não se trata de talentos e que não se nasce dotados deles (Lima, 2003, p. 3).

Conjecturamos assim que despertar no aluno esses cenários de demonstração também seja um passo importante para sua formação enquanto cidadão argumentador e crítico. Entendemos que isso possa ser realizado com estudo da aritmética dos inteiros referente à divisão euclidiana. Pequenas demonstrações podem ser realizadas pelos professores para desenvolverem a capacidade de argumentação dos alunos. Introdução de termos como *Definição*; *Propriedade*; Teorema; *Se,...,então...*; *...se, e somente se,...*; *contraexemplo*; etc. Também conectivos lógico como *e* e *ou*.

A utilização da lógica e argumentação matemática está sempre presente nas demonstrações, por menores que sejam. Feito isso, os alunos podem praticar as demonstrações de modo que fiquem familiarizados com as técnicas e que percebam, inclusive, quando estão se equivocando, ou seja, quando seus argumentos lógicos não estão sendo coerentes. Essa é uma lição que pode ser de grande aprendizado para a vida do estudante.

A partir daqui, daremos sugestões de como apresentar uma matemática mais argumentativa e dedutiva aos alunos. Pensamos que nunca seja tarde para começar essa abordagem, pois existem vários conteúdos que podem ser trabalhados com esse propósito, mas nossa sugestão é com a Divisão Euclidiana.

Primeiramente, temos que despertar o interesse nos alunos nas generalizações, explicando que mesmo mostrando diversos casos particulares que dão certo, não significa necessariamente que isso vale para todos os casos (isso, por exemplo, é bem fácil de constatar usando divisão euclidiana, porém deixaremos isso para depois). Mas, uma sugestão, é antes de trabalhar com divisão euclidiana, apresentar, por exemplo, uma atividade bem semelhante ao que aparece em Skovsmose (2008, p.20):

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

Figura 3.1: Números inteiros consecutivos

Vamos dar foco nos retângulos destacados acima. Podemos pedir para os alunos multiplicarem o terceiro número da primeira linha com o primeiro da segunda linha e subtrair, pela multiplicação do primeiro da primeira linha, pelo terceiro da segunda linha. Eles obterão as seguintes respostas ao realizar esse procedimento nesses dois retângulos:

$$24 \times 32 - 22 \times 34 = 768 - 748 = 20$$

$$39 \times 47 - 37 \times 49 = 1833 - 1813 = 20$$

O professor pode começar a questionar os alunos: Se mudarmos o retângulo de lugar, mantendo sua forma "deitada" e realizando a mesma conta, a resposta continuará sendo 20? Após algumas tentativas, os alunos provavelmente responderão que sim, pois estarão calculando os números de outros retângulos e verificando que o resultado sempre está sendo o mesmo. Então o professor pode realizar a seguinte pergunta: Se nossa tabela tiver infinitos números, sempre vai dar certo? Os alunos provavelmente responderão que sim, pois já realizaram vários exemplos. Então o professor deve deixar claro que em matemática, saber alguns exemplos, não significa que vale para todos, mas somente para aqueles exemplos que foram calculados. Na matemática, a intuição não pode ser usada como resposta, mas somente como um auxílio na elaboração da resposta. Nesse momento, então, o professor pode explicar como funciona uma generalização na matemática. Para isso, o professor pode expor o seguinte: Vamos chamar o primeiro número da primeira linha de a, o terceiro número da primeira linha será quanto? A ideia é que eles respondam $a + 2$. Esses são os números dos cantos da primeira linha, o primeiro número da segunda linha pode ser escrito como sabendo que o número acima dele é o a? A ideia é que os alunos respondam $a + 10$. Então o professor também pergunta: O terceiro número da segunda linha pode ser escrito como? A ideia é que eles respondam $a+12$. Então ficaremos com uma tabela como a apresentada:

a		a+2
a+10		a+12

Figura 3.2: Retângulo para generalizar

Nesse momento, o professor pede para o aluno realizar a operação novamente, resultando na seguinte expressão:

$$(a+2)(a+10) - a(a+12) = a^2 + 12a + 20 - a^2 - 12a = 20$$

O professor, então, conclui dizendo que como a pode representar qualquer número inteiro na tabela que foi criada, de fato acontece uma generalização e o resultado 20 sempre vai aparecer quando as contas forem realizadas. Assim, o professor pode colocar números quaisquer no lugar de a na expressão $(a+2)(a=10) - a(a+12)$ e fazer uma verificação com os alunos com mais exemplos. Termina enfatizando que para provar que alguma coisa sempre acontece ou não na matemática, deve ser demonstrada com generalizações (ou contra-exemplos).

Nesse momento, o professor pode começar a indagar aos alunos: E se a tabela selecionada fosse de tamanho 2×2, a conta continuaria resultando em 20? Os alunos vão perceber que o resultado nesse caso será 10, então o professor pode pedir uma generalização disso, de modo que eles possam praticar. E se a figura for um losango? Ou um paralelogramo? E se mudarmos a operação realizada? Nesse momento é muito interessante e recomendado que o professor use expressões como: *e se...* para que os alunos possam refletir com as novas possibilidades. A ideia é que eles mesmos criem novas operações e que possam demonstrar a validade, que participem com o professor das descobertas e do discurso matemático. De acordo com Ponte (2004) "considera-se importante que os alunos participem no discurso da aula, mas também se considera essencial que desenvolvam a sua competência para comunicar ideias matemáticas, oralmente e por escrito".

Segundo Skovsmose (2008, p. 21) "Quando os alunos assumem o processo de exploração e explicação, o cenário para investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem. No cenário para investigação, os alunos são responsáveis pelo processo".

O que é também tratado por Freire (2015, p. 83) que diz que um ambiente de diálogo entre professor e aluno deve ser procurado

> A dialogicidade não nega a validade de momentos explicativos, narrativos em

que o professor expõe ou fala do objeto. O fundamental é que o professor e alunos saibam que a postura deles, do professor e dos alunos, é dialógica, aberta, curiosa, indagadora e não apassivada, enquanto fala ou enquanto ouve. O que importa é que professor e alunos se assumam epistemologicamente curiosos.

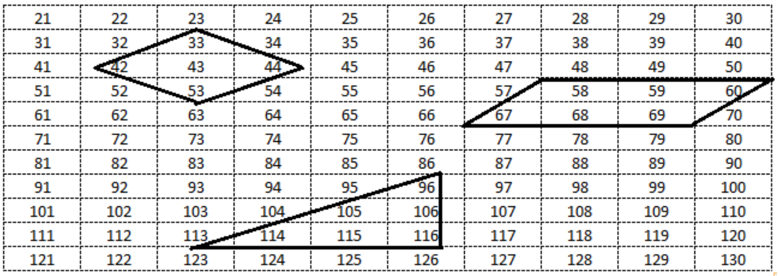


Figura 3.3: Números com várias possibilidades

Assim, essa é uma sugestão para um primeiro contato com demonstração e generalização matemática envolvendo números inteiros. A partir daqui, vamos sugerir uma outra abordagem com números inteiros, utilizando basicamente os primeiros conceitos com divisão euclidiana.

Um material muito bom e gratuito que pode ser utilizado para a abordagem que proporemos nesse capítulo é a apostila Iniciação a Aritmética de Hefez (2010). Usaremos uma parte dos conteúdos e exercícios apresentados por ela no desenvolvimento desse capítulo.

Sabe-se que, ao longo do ano, em virtude do tempo, não é possível um aprofundamento nos conteúdos de aritmética, mas há tempo suficiente para uma abordagem no sentido de possibilitar que o aluno entenda a divisão euclidiana e que possa realizar pequenos exercícios de demonstração e generalização matemática a fim de desenvolver sua capacidade argumentativa.

3.1 Prática argumentativa utilizando Divisão Euclidiana

Defendemos que a divisão euclidiana seja um bom começo para praticar a matemática argumentativa na figura de pequenas demonstrações matemáticas, pois se precisa muito pouco como pré-requisito para o estudo desse conteúdo. O aluno, para conseguir acompanhar as explicações, tem que saber realizar divisões com números inteiros e saber identificar o divisor, quociente, dividendo (o número que está sendo dividido) e o resto da divisão. Com posse dessas informações, todo o conteúdo se desenvolve.

Antes de entrar no conteúdo de divisão euclidiana, é importante que o professor defina divisibilidade. A definimos como: seja $a, b, c \in \mathbb{Z}$, a divide b, então $b = a \times c$. Em seguida, o professor pode dar exemplos de algumas propriedades e, logo depois, pedir para que ela sejam demonstradas. Seguem alguns exemplos:

a) Mostre que se a divide b e b divide c, então a divide c.

b) Se a divide b e a divide c, então a divide $bx + cy$ com x e y naturais.

c) Mostre que se c e d são múltiplos comuns de a e b, então $c - d$ e $c + d$ também são múltiplos comuns de a e b

Assim, tomando como exemplo a primeira propriedade acima, o professor pode realizar a seguinte abordagem. Primeiro mostrar, por exemplo, usando o algoritmo de divisibilidade conhecido pelos alunos, que 3 divide 6 e 6 divide 36, logo 3 divide 36. Então, o professor pode perguntar para os alunos: Como podemos fazer isso na linguagem de divisibilidade? O professor junto com os alunos podem mostrar que, $6 = 3 \times 2$, logo 3 divide 6, e $36 = 6 \times 6$, logo 6 divide 36. Mas, $36 = 6 \times 6 = 3 \times 2 \times 6 = 3 \times 12$, então 3 divide 36. Outros exemplos similares podem ser realizados para o professor fazer, junto com os estudantes, as demonstrações das propriedades usando generalização.

Após esse momento, começa-se a trabalhar com a divisão euclidiana. Nossa proposta inicial é que o professor apresente exemplos de divisões inteiras para os alunos. Podendo começar com o caso mais simples que é a divisão por 2. O professor pode fazer uma tabela no quadro com os números, começando por 1 e indo até o 10, por exemplo. De modo que o aluno perceba que os restos da divisão por 2 são somente 0 ou 1. Além disso, fazer com que eles percebam que se o resto da divisão for 0, então significa que aquele número é divisível por 2.

Em seguida, o professor deve escrever, com a participação dos alunos, os números do dividendo como $2 \times q + r$, em que q é o quociente e r o resto da divisão por 2. Desse modo, o professor obterá as respostas $1 = 2 \times 0 + 1$, $2 = 2 \times 1 + 0$, $3 = 2 \times 1 + 1$m $4 = 2 \times 2 + 0$, $5 = 2 \times 2 + 1$, e assim por diante.

Dando continuidade, pode pegar números maiores e dividir por 2 e, com a ajuda dos alunos, concluir realmente que o resto da divisão por 2 sempre será 0 ou 1. A ideia

Tabela 3.1: Divisão por 2

Dividendo	Divisor	Resto
1	2	1
2	2	0
3	2	1
4	2	0
5	2	1
6	2	0
7	2	1
8	2	0
9	2	1
10	2	0

é que todos concluam juntos que, desse modo, todo número natural pode ser escrito do modo $2k + 0 = 2k$ ou $2k + 1$. Também, deve fazer com que percebam que os números ímpares deixam resto 1 ao dividir por 2 e os números pares deixam resto 0 ao dividir por 2, ou seja, os números pares sempre serão divisíveis por 2, enquanto os ímpares não. Assim, os números ímpares são da forma $2k + 1$ e os números pares da forma $2k$.

Nesse momento, o docente pode provocar a turma com afirmações que a leve a praticar pequenas demonstrações matemáticas. Por exemplo, pode realizar as seguintes somas $7 + 3 = 10$, $33 + 5 = 38$, $17 + 19 = 36$, $101 + 43 = 144$, e assim por diante. Após isso, pode perguntar para os alunos: "qual a semelhança dos números que estão à esquerda da equação com os números que estão à direita?". Os estudantes devem concluir, em algum tempo, que do lado esquerdo tem a soma dois números ímpares e do lado direito tem um número par. Logo, o professor pode afirmar e perguntar: "então a soma de dois números ímpares sempre resultará em um número par, correto?". Caso tenha realizado a experiência de demonstração com as tabelas, vistas anteriormente, possivelmente alguns responderão que isso ainda não pode ser afirmado, pois foram testados apenas alguns casos particulares, sendo que muitos outros podem responder que isso é verdade.

Nesse momento, deve dizer realmente que isso ainda não se pode afirmar, pois existem infinitos casos para serem testados, e seria impossível provar todos os eles. Assim, uma generalização matemática deve acontecer para mostrar que tal situação vale para todos.

Em seguida, pode resolver os exercícios junto com os alunos. A ideia é que os próximos sejam resolvidos com pouca participação do docente. Assim, pode começar questionando-os: "Vamos representar um número ímpar qualquer, como posso fazer isso?"

O que se imagina é que respondam que se pode escrever um número ímpar da forma $2k+1$ e que isso representa qualquer número ímpar. Então pergunta: "Vamos representar um outro número ímpar, como podemos escrever?", muito provavelmente a resposta será novamente $2k+1$. E, entretanto, como queremos somar números ímpares que podem ser distintos, essa notação não fica correta, então deve dizer que para representar um outro número, diferente do anterior, deve-se trocar o k por outra variável, a fim de que possa ser um outro número ímpar qualquer. Dessa maneira, pode sugerir que seja escrito então da forma $2t+1$, por exemplo. Assim, propõe que os alunos somem os números $2k+1$ e $2t+1$. Eles obterão a resposta $2k+2t+2 = 2(k+t+1)$. Para concluir, pode chamar $k+t+1 = d$, tendo assim que a soma dos dois números vale $2d$, ou seja, é um número que deixa resto 0 ao ser dividido por 2, ou seja, é divísivel por 2, logo, é um número par. Nesse momento, diz para os alunos que pode ser afirmado realmente que a soma de dois números ímpares resultará sempre em número par, podendo inclusive realizar testes, substituindo números aleatórios no lugar de k e t, assim, exemplificando a demonstração.

Nessa hora, os discentes já estão com alguma familiaridade de como proceder em uma generalização matemática. O professor pode, nesse sentido, propor diversos exercícios, como:

a) Dê alguns exemplos e depois mostre que a multiplicação de um número ímpar por um número ímpar sempre resultará em número ímpar.

b) Mostre que um número ímpar elevado ao quadrado sempre resultará em um número ímpar. (Alguns alunos podem usar o exercício anterior para resolver esse, visto que é um caso particular do anterior)

Não consideramos os exercícios acima como pseudoproblemas, pois, apesar de não serem problemas que envolvam situações que os alunos estejam familiarizados, é necessária uma argumentação matemática para a resolução ficar correta. Caso o aluno não argumente corretamente, o professor deve orientar o estudante para melhorar sua resposta de maneira que quem leia o exercício seja convencido de que ela esteja correta.

Note que diversos exercícios semelhantes a esses podem ser propostos usando apenas a divisão euclidiana pelo número 2. Uma gama enorme de exercícios aparecerá quando for apresentada a divisão euclidiana por números maior que 2, como o 3, 4, 5 e assim por diante.

Nesse ponto, ao resolver os exercícios, assim como no capítulo anterior, é interessante que o professor cobre que os alunos respondam da maneira mais clara realizando todas as argumentações necessárias de modo que o exercício seja respondido por completo. Um exemplo de resposta interessante para o primeiro exercício seria:

Observe que $3 \times 7 = 21$, $5 \times 9 = 45$, $7 \times 11 = 77$, *assim, desconfiamos que a multiplicação de um número ímpar por outro número ímpar resulta em um número ímpar. Entretanto, precisamos provar, sejam* a *e* b *números ímpares, logo, posso representar* a *como* $2k+1$ *e* b *como* $2d+1$, *onde* k *e* d *são números naturais. Assim, ao multiplicarmos* a *por* b *obtemos* $a \times b = (2k+1)(2d+1) = 4dk + 2k + 2d + 1 = 2(2dk + k + d) + 1$, *chamando* $t = 2dk + k + d$, *temos que* $a \times b = 2t + 1$, *ou seja, a multiplicação de* a *por* b *resulta em um número ímpar. Desse modo, a multiplicação de dois números naturais ímpares sempre resultará em um número ímpar.*

Apesar de ser uma resposta longa, esse tipo de resolução exercita a capacidade argumentativa dos alunos. O professor deve deixar claro para os alunos que quem vai ler a resposta não sabe o que está passando na cabeça de quem elaborou a resposta, desse modo, todo detalhe é imprescindível no desenvolvimento da resposta do exercício. As conexões lógicas entre hipótese e tese sempre devem estar alinhadas, nada pode ser deixado de lado pensando que quem está lendo possa saber do que se trata.

Em seguida, o professor realiza uma tabela semelhante à apresentada na divisão euclidiana por 2, mas com números maiores que 2, como, por exemplo, o 3.

Tabela 3.2: Divisão por 3

Dividendo	Divisor	Resto
1	3	1
2	3	2
3	3	0
4	3	1
5	3	2
6	3	0
7	3	1
8	3	2
9	3	0
10	3	1

Assim, o docente deve concluir, junto aos alunos, que todo número natural é escrito na forma $3k+0$, ou $3k+1$, ou $3k+2$. De semelhante modo, o professor pode criar a tabela para número 4, 5, 6, etc. O estudante deve perceber que se dividir o número por um número b, por exemplo, os restos irão variar de 0 a $b-1$. Aqui, o professor pode afirmar que dado um número natural qualquer a, esse número ao ser dividido por b, deixa um resto r tal que $0 \leq r < b$. Além disso, diz que essa escrita é única. Note que nesse momento a intuição está muito aguçada devido aos vários exemplos que podem ser apresentados para mostrar que isso é verdade. Não é recomendada a demonstração dessa afirmação, pois não é considerada simples para apresentar nesse momento. A ideia principal é que, usando essa afirmação, os alunos possam resolver diversos exercícios que envolvam generalização em matemática.

Num primeiro momento, pode-se pedir para que o aluno faça a divisão euclidiana de diversos números para que se familiarize bem com a escrita deles na forma $a = bq + r$. A partir daí, pode-se pedir para demonstrarem algumas propriedades básicas de divisibilidade. Caso tenham dúvidas, o professor pode levantar questionamentos a fim de que caminhem sozinhos nas respostas.

Note que o professor deve explicar desde o início para os alunos o conceito de *hipótese* e *tese*, talvez não seja necessário utilizar essas palavras, pode-se usar expressões como "o que nós temos" e "aonde queremos chegar", e mostrar para o aluno o que se está tomando como verdade e onde se deseja chegar. Além disso, é altamente recomendado que o professor faça alguns exemplos das propriedades, de maneira que os alunos desconfiem que as mesmas sejam verdadeiras, para aí então propor as demonstrações. Existem outras propriedades que podem ser demonstradas, caso haja tempo e seja desejo do professor. O interessante da divisibilidade é que existem muitas propriedades relativamente simples que podem ser trabalhadas pelo professor juntamente com os alunos, e os exemplos são inúmeros.

Seguem abaixo alguns exemplos de exercícios que podem ser apresentados na sequência de maneira a exercitar a argumentação matemática com generalizações, usando divisão euclidiana. Os exercícios podem ser encontrados em Hefez (2010) ou também Hefez (2014).

1) Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$ e $c \neq 0$. Mostre que ac divide bc se, e somente se, a divide b.

2) Mostre que o produto de n números consecutivos é divisível por $n!$.

3) Mostre que $6|n(n+1)(2n+1)$

4) Mostre que, para todos $a \in \mathbb{N}$ temos que:

a) 2 divide $a^2 - a$

b) 3 divide $a^3 - a$

5) Seja n natural. Mostre que um, e apenas um, número de cada terno abaixo é divisível por 3:

a) $n, n+1, n+2$

b) $n, n+2, n+4$

c) $n, n+1, 2n+1$

6) Mostre que, se um número a não é divisível por 3, então a^2 deixa resto 1 na divisão por 3.

7) Seja n um número natural, prove que a divisão de n^2 por 6 nunca deixa resto 2.

8) Mostre que, se um inteiro é um quadrado e um cubo, então é da forma $7k$ ou $7k+1$.

9) Mostre que nenhum quadrado ou soma de dois quadrados é da forma $4k+3$.

10) Mostre que nenhum elemento da sequência $11, 111, 1111, 11111, ...$ é um quadrado ou soma de quadrados

Esses são alguns exercícios interessantes que podem ser propostos para os alunos. Colocaremos as respostas deles no apêndice deste trabalho para verificação.

Defendemos que essa introdução já tenha conteúdo suficiente para despertar o interesse do aluno em generalizações e demonstrações matemáticas e que também permita exercitar alguma habilidade de demonstração em nível de educação básica.

Sugerimos que o professor, havendo tempo e tendo a vontade de seguir em frente, apresente mais conteúdos relacionados à divisibilidade, pois pensamos que esse possa ser de grande valia para o desenvolvimento da capacidade argumentativa dos alunos.

No próximo capítulo, será mostrado um caso de ensino de conteúdo de números inteiros desde indução matemática até o teorema fundamental da aritmética para estudantes do ensino médio.

Defendemos que essa abordagem matemática pode fazer com que o aluno se torne um cidadão mais questionador e com uma melhor argumentação na sociedade em que esteja inserido. A partir do momento que ele busca alicerces verdadeiros para suas afirmações, convicções e razão para suas argumentações, percebe o que pode ser usado como verdade para, então, realizar uma reflexão crítica para ver se, aquilo que está fazendo, vendo ou ouvindo, realmente se encontra dentro de algo verdadeiro. Concordamos com Boavida (2005, p. 7) que diz que " a educação para a argumentação é um objectivo democrático decisivo, pelo que importa pensá-la não apenas pelo ângulo intelectual, mas também pelo social e ético".

Um exemplo é o que ocorre em nossa sociedade, pois, muitos políticos afirmam e fazem promessas absurdas em seus programas eleitorais e muitas vezes são pouco questionados. E, entretanto, quem possui um conhecimento argumentativo, e é conhecedor daquilo que ocorre com a população que mais sofre no país, pode eventualmente se tornar mais questionador, no sentido de verificar se as hipóteses usadas são válidas para a afirmar as teses muitas vezes sem sustentação quando relacionadas com a vida do povo, ou seja, teses que não possuem sustentações em hipóteses.

Como, por exemplo, um político prometer uma linha de metrô, e que a mesma ficará pronta no prazo de um ano. Talvez alguém menos questionador veja uma promessa dessa e a tome como verdade, sem análise alguma. Outro mais questionador e argumentador pode fazer as seguintes reflexões: De onde virá o financiamento? Já foi feito um processo licitatório? A obra é necessária naquele local? Um ano é tempo hábil para execução dessa obra? Qual é o empresário responsável por essa obra? Por que isso não foi feito antes?

Ao mesmo tempo, essa prática matemática pode ajudar o cidadão também a questionar o contexto do trabalho que está inserido. Muitas pessoas trabalham em tarefas pré-determinadas que não são alvos de questionamento algum e, o que se pretendeu nesse capítulo é exercitar uma matemática que auxilie o cidadão a jogar contra esse tipo de comportamento.

De acordo com Skovsmose (2007, p. 187) "a matemática pode ser disponível em pacotes, que exigem capacidade para serem usados, embora os detalhes sobre como o pacote funciona podem não ser entendidos pelas pessoas que operam com eles". Observe que exemplos particulares não tornam uma coisa verdadeira. Ora, se todos agem de determinado modo, quer dizer que isso é o correto, não pode ser questionado?

É difícil avaliar todos os benefícios que aprender argumentar matematicamente podem trazer. Defendemos que essa argumentação matemática pode ser traduzida em argumentação para ser usada em nosso meio social, especialmente quando ela está jogando a favor daqueles que historicamente tiveram seus direitos, os mais primários, negados na sociedade. Entre eles o acesso a uma educação mais questionadora, reflexiva e crítica. A ideia é que a curto ou médio prazo se possa desenvolver cidadãos um pouco mais críticos que rompam com alguns paradigmas de nossa sociedade. O desejo é que as pessoas, gradativamente, se libertem de tudo que foi imposto sobre ela sem que ao menos ela pudesse questionar. Uma sociedade questionadora é uma sociedade mais justa.

De acordo com Freire (2015, p. 121) "É imprescindível, portanto, que a escola instigue constantemente a curiosidade do educando em vez de "amaciá-la ou "domesticá-la". Temos consciência que o proposto aqui é um passo bem pequeno, mas é um passo na direção de uma educação mais libertadora.

Como dito antes, não temos pretensão de que o resultado desse trabalho seja algo impactante, as ideias apresentadas aqui são somente tentativas de romper um pouco com a matemática do paradigma do exercício que é a que toma conta da sociedade atual Lima, (2005), em particular a sociedade brasileira. Em consequência a isso, esperamos que as pessoas, ao desenvolverem sua capacidade argumentativa em matemática, se desenvolvam, como pessoas capazes de argumentar e questionar na sociedade.

> Na verdade, a tradição matemática escolar tem criado sérios obstáculos para esse tipo de reflexão. Os alunos que adquirirem proficiência provavelmente foram preparados para ver a matemática de uma forma descontextualizada e para aplicá-la cegamente. Eles poderão vir a se tornar os disseminadores "funcionais" da especialização. Os inúmeros alunos que não chegam a dominar apropriadamente a matemática - e que a tradição matemática escolar rotula como tendo dificuldades em matemática - também poderão obter uma competência funcional para exercer certas posições na ordem social. Então, se é que uma especialização cega deve prevalecer, é necessário que uma ampla maioria aceite os efeitos dessa especialização - e quem melhor para isso do que uma audiência que foi educada a ver matemática como algo que não é para si? (Skovsmose, 2008, p. 72).

Assim, a ideia é buscar alternativas para essa matemática pré-estabelecida que aparentemente molda os cidadãos para pertencer a um determinado modelo de sociedade de modo que ele pouco pode fazer para mudar seu futuro. Os que conseguem mudar, geralmente, são casos especiais, pontos fora da curva, e que muitas vezes são usados como exemplo de que tudo é possível, mas para a grande maioria da população, que tem direitos negados, pouco é possível.

Capítulo 4

Uma experiência envolvendo introdução à aritmética no Ensino Médio

Neste capítulo, relataremos uma experiência envolvendo alunos do IFMT Campus Rondonópolis onde ocorreu um curso de uma pequena introdução à aritmética. Ela teve como objetivo introduzir a linguagem de demonstração matemática envolvendo, principalmente, divisibilidade nos números inteiros, a fim de que os alunos pudessem exercitar a argumentação matemática e, quem sabe, essa experiência pudesse contribuir para sua formação enquanto cidadão argumentador e crítico.

O curso foi elaborado para ter a duração de aproximadamente sete horas. Além daquilo que estava previsto sobre a temática principal, que era a introdução à linguagem de demonstração matemática envolvendo números inteiros, também havia a preocupação de se ter um diálogo com os alunos sobre a importância da matemática, qual a visão que eles tinham sobre esse tema. Enfim, um diálogo introdutório que permitisse uma aproximação entre o docente e os estudantes e também, serviria, para que o ministrante tivesse uma noção daquilo que os estudantes pensavam sobre o estudo da matemática. E assim ocorreu durante esse curso. Desse modo, os estudos não focaram exclusivamente nos conteúdos.

O que se propõe, a partir de agora, é apresentar essa experiência relatando as impressões que foram obtidas tanto do ministrante do curso como dos alunos. Vale ressaltar que o que ocorreu também permitiu ao professor cursista refletir sobre o que havia sido planejado e de como poderia fazer diferente numa próxima oportunidade.

Além disso, serão dadas sugestões de abordagem pautadas na nas leituras realizadas e comentários feitos pelos alunos. O que se pode destacar, de antemão, a partir da reflexão de como se processaram as aula, é que alguns conteúdos não precisam ser trabalhados, enquanto outros podem ser mais facilmente abordados. O que tentaremos mostrar aqui também.

4.1 Contextualizando a Proposta

Após a decisão de se ofertar esse minicurso aos estudantes, além de se pensar na proposta, era necessário que se tivesse um público participante. Assim, foi feito um convite a todos os alunos do *campus*. O número de participação não foi o desejado, e alguns fatores podem ter contribuído para tal situação. O primeiro deles pode ser o fato de que os alunos cursam o ensino médio juntamente com o curso técnico, com uma carga horária elevada, tendo em média dezesseis disciplinas para estudar, restando, assim, pouco tempo para outras atividades extracurriculares. Após uma análise das datas possíveis para o minicurso, a opção foi a de que ocorreria às quarta-feiras, dia em que a maioria dos alunos estariam livres no período vespertino.

Outro aspecto que pode ter impactado na pouca adesão é a questão de que ainda há uma grande parcela dos estudantes que não se sentem motivados, atraídos pela matemática. Enfim, mesmo tendo o cuidado de se fazer um convite animando-os, dizendo que as atividades todas seriam realizadas em sala, de que não levariam exercícios a serem resolvidos em casa que o único pré-requisito seria que o aluno soubesse realizar divisão com resto inteiro entre números inteiros, a adesão não foi a esperada.

Além disso, alguns alunos que mostraram interesse estavam realizando o estágio obrigatório do curso no período vespertino e por isso não puderam cursar. No entanto, mesmo com uma quantidade menor do que a desejada de participação efetiva dos alunos, nos foi possível ter alguns diagnósticos, achados, os quais passaremos a descrever a partir de agora.

Após a descrição da atividade realizada em cada etapa, deixaremos uma sugestão de material a ser utilizado que foi montado utilizando as literaturas de Hefez (2010, 2014).

4.2 Indução matemática

A temática do primeiro encontro foi "Indução matemática". Para demonstrar esse assunto, fizemos uma analogia com o dominó. No entanto, foi um tópico que gerou muita dificuldade de participação dos alunos, pois a maioria deles não mostrou entendimento do conteúdo, apesar de o terem achado interessante, principalmente porque perceberam que com ele seriam capazes de provar a validade de igualdades como

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Após, então, uma avaliação do que fora planejado e do que foi executado, é nos possível dizer que, apesar de acharmos um conteúdo de extrema importância, defendemos que não seja necessário seu ensino nesse formato de curso para os alunos em um primeiro momento, ainda mais quando retomamos aquilo que é o objetivo principal que seria a resolução de exercícios de divisibilidade que não envolvem, a princípio, o princípio da indução matemática.

Outra reflexão importante aqui é que, caso o professor queira trabalhar o conteúdo de indução e gostaria que houvesse um maior envolvimento do aluno, é viável que se apresentem casos particulares de modo a despertar a curiosidade nele. O conteúdo de indução matemática é propício para isso, vários exemplos podem ser realizados para os alunos, mostrando a suposta validade da afirmação e, após isso, pode ser realizada a demonstração da afirmação usando a ferramenta em questão.

Para esse primeiro encontro, o conteúdo foi apresentado somente utilizando-se do quadro e para os alunos foi entregue uma lista de exercícios. A partir do segundo encontro, achamos interessante enunciar parte do conteúdo juntamente com a lista de exercícios.

Note que alguns exercícios de indução envolvem divisibilidade. Portanto, caso o ministrante trabalhe indução matemática, esses exercícios devem ser resolvidos após trabalhar o conteúdo de divisibilidade e divisão euclidiana. Por exemplo, um conhecimento básico necessário é saber que a divide b se, e somente se, $b = a \times c$, e isso será tratado somente no encontro seguinte.

Segue abaixo um exemplo de lista de exercícios que pode ser apresentada em situações de estudo sobre indução matemática.

Lista de exercícios de indução matemática

1. Mostre, por indução, que as seguintes fórmulas são verdadeiras para todo natural n:

   a) $1+2+3+4+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

   b) $1+3+5+7+...+2(n-1)+1=n^2$

   c) $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

   d) $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

   e) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$;

   f) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n\cdot(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

   g) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+...+n\cdot n!=(n+1)!-1$;

   h) $1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$.

2. Demonstre, por indução, as seguintes desigualdades:

   a) $2^n>n$, para todo natural n;

   b) $n!>n^2$, para todo n natural com $n\geq 4$;

   c) $n!>3^n$, para todo n natural com $n\geq 7$.

3. Prove que, para qualquer número natural n:

   (a) $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ é divisível por 9;

   (b) $3^{2n+2}+8n-9$ é divisível por 16;

   (c) $11^{n+2}+12^{2n+1}$ é divisível por 133.

4. Dados n ($n\geq 2$) objetos de pesos distintos, prove que é possível determinar qual o mais leve e qual o mais peado fazendo $2n-3$ pesagens em uma balança de pratos. Mostre, também, que este é o número mínimo de pesagens que permitem, com certeza, determinar o mais leve e o mais pesado.

5. Qual o número náximo de pedaços em que uma pizza pode ser dividida por n cortes retilínios? (pizza de Steiner).

4.3 Divisibilidade e Divisão Euclidiana

Já para o segundo encontro foi apresentado o conteúdo principal que era "Divisibilidade e divisão euclidiana" que , basicamente, resume os conteúdos do curso. Sendo esse o foco principal do minicurso, para ele foram deixados dois encontros para que fosse possível resolver a maior quantidade de exercícios em sala, pois, como foi dito, era basicamente o único momento de resolução de exercícios uma vez que os alunos não levavam tarefa para casa.

Durante a explicação do conteúdo, houve grande aceitação e entendimento dos alunos. Foram feitos vários exercícios em sala com uma participação bem expressiva dos estudantes.

Outro conteúdo que chamou a atenção e houve uma ótima participação foram as demonstrações das propriedades da divisão. Pode-se perceber que boa parte deles achou interessante o modo de se demonstrar as propriedades, generalizando-as.

Conforme já apontamos anteriormente em relação à metodologia, primeiramente dávamos alguns exemplos, para depois então fazermos a demonstração. Por exemplo, a propriedade: Seja $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se a divide b e b divide c, então a divide c.

Para introduzir a temática, primeiramente despertamos a curiosidade deles com alguns exemplos, para depois, então, juntos demonstrarmos usando generalização com as definições de divisibilidade. Deixávamos alguns minutos para fazer um ou outro exercício, em seguida, respondíamos juntos no quadro fazendo passo a passo a demonstração, escrevendo o máximo possível, para que de fato pudéssemos praticar a argumentação.

O método utilizado no decorrer do curso era usar os teoremas como verdade para então resolver os exercícios. Somente foram apresentadas tabelas de divisão, de modo que a intuição dos alunos aceitasse a divisão euclidiana como verdade. Entretanto, conforme as atividades eram discutidas, corrigidas, deixamos claro que nos exercícios a intuição não podia ser utilizada como resposta, mas que seria necessária realizar a demonstração da resposta.

Note que a proposta inicial era o uso das práticas de demonstrações para formação de cidadãos mais críticos. Aqui acontece um paradoxo, pois estamos exigindo dos alunos que resolvam exercícios que requerem demonstração, ao passo que a ferramenta que eles vão utilizar não foi demonstrada. Defendemos que algumas ferramentas matemáticas, como a divisão euclidiana, requerem uma maturidade matemática um pouco mais elevada para o entendimento, de maneira que caso fosse apresentada, existe grande possibilidade de não entendimento pela maior parte dos alunos, fazendo com que o ministrante pudesse perder muito tempo do curso e ainda assim não obter um resultado satisfatório quanto ao entendimento da demonstração. O teorema da divisão euclidiana diz que:

Sejam a e b dois números inteiros com $a \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r, com $0 \leq r < |a|$ tais que

$$b = a \times q + r$$

.

A seguir, a demonstração que consta em Hefez (2010):

> Considere o conjunto
>
> $$S = \{x = b - ay; y \in \mathbb{Z}\} \cap (\mathbb{N} \cup 0)$$
>
> **Existência:** Pela Propriedade Arquimediana, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n(a) > b$, logo $b - na > 0$, o que mostra que S é não vazio. O conjunto S é limitado inferiormente por 0, logo, pelo princípio da boa ordenação, temos que S possui um menor elemento r. Suponhamos então que $r = b - aq$. Sabemos que $r \geq 0$. Vamos mostrar que $r < |a|$. Suponhamos por absurdo que $r \geq |a|$. Portanto, existe $s \in \mathbb{N} \cup 0$ tal que $r = |a| + s$, logo $0 < r$. Mas isto contradiz o fato de r ser o menor elemento de S, pois $s = b(q \pm 1)a \in S$, com $s < r$.
> **Unicidade:** Suponha que $b = aq + r = aq' + r'$, onde $q, q', r, r' \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < |a|$ e $0 \leq r' < |a|$. Assim, tempos que $|-a| < -r \leq r' - r < |a|$. Logo, $|r' - r| < |a|$. Por outro lado, $a(q - q') = r' - r$, o que implica que
>
> $$|a||q - q'| = |r - r'| < |a|,$$
>
> o que só é possível se $q = q'$ e $r = r'$.

Observe que a demonstração acima não é trivial de entender, o estudante tem que ter conhecimento de simbologia matemática, demonstração por contradição e uma lógica já apurada.

Desse modo, defendemos que grande parte dos alunos podem ter dificuldades em assimilar essa demonstração. Pensamos que aceitá-la usando a intuição, através de exemplos de divisibilidade, seja algo razoável de se fazer em um primeiro momento de maneira que os alunos possam acreditar no resultado.

Por exemplo, podem ser apresentadas, aos alunos, diversas tabelas de divisibilidade aliadas a exemplos desse tipo: ao dividir 14 por 3, obtemos

$$14 = 3 \times 4 + 2$$

Existe outra maneira de escrever 14 como $14 = 3 \times q + r$, de modo que $0 \leq< r < 3$? Vamos tentar multiplicar o 3 por 3 e depois por 5 para ver o que acontece.

$$14 = 3 \times 3 + 5$$

$$14 = 3 \times 5 + (-1)$$

Note que o único formato que obedece a divisão euclidiana em que $0 \leq< r < 3$ é quando $q = 4$. Assim, a escrita de 14 dividido por 3 na divisão euclidiana é única. Vários exemplos desses podem ser feitos para que os alunos aceitem.

De acordo com Lima (2003, p. 143), “Se demonstrar é uma forma de convencer por meio da razão, para que perder tempo provando algo do qual todos já estão convencidos?”. Assim, acreditamos que os exemplos juntamente com a intuição dos alunos é capaz de fazer com que eles se convençam facilmente da escrita única da divisão euclidiana.

Caso o ministrante ache que a turma tenha capacidade para entender essa demonstração, não vemos problemas em apresentá-la.

Segue abaixo o material apresentado para os alunos juntamente com a lista de exercícios.

Divisibilidade

Definição: Dados dois números inteiros a e b, dizemos que a divide b, escrevendo $a|b$, quando existir $c \in \mathbb{Z}$, tal que $b = ca$.

Proposições:

i- $a|a$, para todo $a \in \mathbb{Z}$

ii- Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a|b$ e $b|c$, entao $a|c$

iii- Se $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, e se $a|b$ e $c|d$, então $ac|bd$.

iv- Se $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tais que $a|(b \pm c)$, Então $a|b \iff a|c$.

v- Se $a, b, c \in \mathbb{Z}$ são tais que $a|b$ e $a|c$, então para todo $x, y \in \mathbb{Z}$, $a|(xb + yz)$

vi- Se $a, b \in \mathbb{Z}$, onde $b \neq 0$, temos que, $a|b$, então $|a| \leq |b|$

Divisão euclidiana (Lema)

Sejam a e b dois números inteiros com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que

$$a = bq + r$$

com $0 < |b|$

Proposição:

Sejam $a, b, n \in \mathbb{N} \cup 0$, então $(a+b)^n = ka + b^n$, com $k \in \mathbb{N} \cup 0$

Exercícios

1 Mostre que: $ac|bc$ se, e somente se, $a|b$.

2 Com quantos zeros termina o número 100!?

3 Mostre que $6|n(n+1)(2n+1)$.

4 Seja abc um número, onde a, b e c são os algarismos. Mostre que, se $a+b+c$ é divisível por 3, então o número abc é divisível por 3. Isso vale para um algarismo de n dígitos?

5 mostre que, para todo $n \in \mathbb{N} \cup 0$

a) $10|11^n - 1$

b) $8|3^{2n} - 1$

c) $6|5^{2n+1} + 1$

d) $3|10^n - 7^n$

6 Mostre, para todo $a \in \mathbb{Z}$

a) $2|a^2 - a$,

b) $3|a^3 - a$,

c) $5|a^5 - a$.

7 Discuta a paridade

a) da soma de dois números

b) da diferença de dois números

c) do produto de dois números

8 Dado um número inteiro a e dados dois números naturais n e m, não nulos, mostre que são sempre pares os números: $a^n + a^m$ e $a^n - a^m$.

9 Seja n u número natural.Mostre que um, e apenas um número de cada terno abaixo é divisível por 3.

a) $n, n+1, n+2$

b) $n, n+2, n+4$

c) $n, n+1, 2n+1$

10 Mostre que, se n é ímpar, então $n^2 - 1$ é múltiplo de 8.

11 Mostre que, se um número a não é divisível por 3, então a^2 deixa resto 1 na divisão por 3.

12 A partir do exercício anterior, mostre que, se a e b são inteiros tais que 3 divide $a^2 + b^2$, então a e b são divisíveis por 3.

13 Seja n um número natural, prove que a divisão de n^2 por 6 nunca deixa resto 2.

14 O resto da divisão de um inteiro N por 20 é 8. Qual o resto da divisão de N por 5?

15 Mostre que, se um inteiro é um quadrado e um cubo, então é da forma $7k$ ou $7k + 1$.

16 Mostre que o alarismo das unidades de um quadrado só pode ser um dos seguintes: $0, 1, 4, 5, 6$ ou 9.

17 Mostre, que nenhum dos números $22, 222, 222, 2222, ...$ ou $33, 333, 3333, ...$, ou $77, 777, 7777, ...$, ou ainda $88, 888, 8888, ...$, pode ser um quadrado.

18 Mostre que nenhum quadrado ou soma de dois quadrados é da forma $4n + 3$.

19 Mostre que nenhum elemento da sequência $11, 111, 1111, ...$ é um quadrado ou soma de dois quadrados.

20 Mostre que, de n inteiros consecutivos, um, e apenas um, deles é divisível por n.

21 Um número é dito "livre de quadrados" se não for divisível pelo quadrado de nenhum número diferente de 1.

a) Determine qual é o maior quantidade de números naturais consecutivos livres de quadrados.

b) E números livres de cubos?

4.4 Máximo Divisor Comum

No terceiro encontro trabalhamos máximo divisor comum. Boa parte dos alunos já o conhecia, entretanto, não sabiam das propriedades e nem as formas de se encontrar o máximo divisor comum entre dois números inteiros. Assim, em um primeiro momento, definimos máximo divisor comum, em seguida enunciamos o lema principal para descobrir o máximo divisor comum de dois números, $(a, b) = (a, b-na)$. Com isso, realizamos alguns exercícios para descobrir o MDC entre dois números inteiros. Além disso, apresentamos proposições que poderiam ser utilizadas nos exercícios, mas que não foram demonstradas, pois pensamos que pudessem trazer algumas dificuldades de entendimento e o nosso foco principal era usá-las nos exercícios.

Segue abaixo o material entregue para os alunos que contém parte do conteúdo de MDC e a lista de exercícios trabalhados em sala:

Máximo divisor comum

Definição 1 - Divisor Comum: Dados dois inteiros a e b, distintos ou não. Um número inteiro será dito um *divisor comum* de a e b se $d|a$ e $d|b$.

Definição 2 - Máximo Divisor Comum: Dizemos que um número inteiro $d \geq 0$ é um máximo divisor comum (MDC) de a e b, se atender as seguintes propriedades:

i- d é um divisor comum de a e b.

ii- d é divisível por todo divisor comum de a e b.

Denotaremos mdc entre a e b é igual d, como $(a,b)=d$.

Calcular MDC (Lema):

Sejam $a,b,n \in \mathbb{Z}$. Se existe $(a,b-na)$, então, (a,b) existe e $(a,b)=(a,b-na)$.

Propriedades do MDC:

i- Se $a \neq 0$, então $(a,0)=a$;

ii- $(a,b)=(b,a)$.

Exemplo: Vamos Calcular o MDC entre 27 e 12:
$(27,12)=(12,27-2\cdot 12)=(12,3)=(3,12-4\cdot 3)=(3,12-12)=(3,0)=0$

Proposições do MDC:

i- O MDC entre a e b é o menor resultado da combinação linear $ma+nb$ com m e n inteiros.

ii- Dois números inteiros a e b são primos entre si se, e somente se, existem números inteiros m e n tais que $ma+nb=1$

iii- Sejam a,b,c números inteiros. Se $a|bc$ e $(a,b)=1$, então $a|c$.

Para praticar: Calcule o MDC entre $(372,162)$ e escreva como a combinação linear $(372,162)=m\cdot 372+n\cdot 162$ com m e n inteiros.

Exercícios

1 Para cada par de números naturais a e b dados abaixo, ache (a,b) e determine números inteiros m e n tais que $(a,b)=ma+nb$.

a) 648 e 1218

b) 551 e 874

c) 7328 e 8485

d) 996 e 123

2 Seja $n \in \mathbb{N}$. Mostre que:

a) $(n, 2n+1) = 1$

b) $(n+1, n^2+n+1) = 1$

c) $(2n+1, 9n+4) = 1$

d) $(n!+1, (n+1)!+1) = 1$

3 Mostre que $(a, a^2+na+b)|b$, quaisquer que sejam $a, b, n \in \mathbb{N}$

4 Mostre que

a) se $(a, b) = 1$, $a|c$ e $b|c$, então $ab|c$

b) se $(a, b) = 1$, então $(ac, b) = (c, b)$

c) $(ac, b) = 1$ se, e somente se, $(a, b) = (c, b) = 1$

4.5 Equações Diofantinas Lineares

No quinto encontro foi trabalhado "Equações diofantinas". Esse conteúdo também despertou interesse dos alunos. Mostramos que quando uma equação diofantina tem solução e que, caso tenha, ao descobrir uma solução, conseguimos encontrar infinitas soluções.

Mais uma vez não demonstramos como chegamos às soluções das equações diofantinas lineares, entretanto, usamos as soluções para resolver os exercícios que despertaram interesse e curiosidade dos alunos, principalmente os que requerem soluções nos números naturais, em que é necessário fazer uma análise antes de apresentar a resposta final. Observe que os alunos acharam interessante usar a ferramenta sem saber da demonstração, pois a ferramenta apenas requer operações com contas matemáticas, no fim das contas, eles não entendem muito bem o que estão fazendo.

Infelizmente esse tipo de abordagem consideramos como uma educação bancária. Freire (2014, p. 97) diz que "a prática bancária implica uma espécie de anestesia, inibindo o poder criador dos educandos". Assim, para fugir da aplicação da fórmula para achar as soluções da equação diofantina sem provocar uma reflexão maior dos estudantes, recomendamos que os professores, caso seja possível, demonstrem como chegar nessas soluções, para então realizar os exercícios, pois, nesse caso, dificilmente a intuição dos alunos aceitará facilmente que as soluções são aquelas.

A seguir, o material entregue aos alunos para trabalhar o conteúdo de equações diofantinas:

Equações diofantinas lineares

O que é uma Equação Diofantina Linear? Muitos problemas de aritmética recaem na resolução em números inteiros, em equações como $ax + by = c$, com $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Essas equações são chamadas de Equações Diofantinas Lineares

Note que nem sempre essas equações têm solução, por exemplo, $4x+6y = 13$ não possui soluções x_0, y_0 tais que $4x_0 + 6y_0 = 13$.

Proposição 1: Sejam $a, b \in \mathbb{Z} \neq 0$ e $c \in \mathbb{Z}$. A equação $ax + by = c$ tem solução se $(a, b)|c$.

Proposição 2 (Soluções de uma Equação Diofantina): Seja x_0, y_0 solução de uma equação $ax + by = c$. Então, as soluções x, y em $\mathbb{Z}$ da equação são

$$x = x_0 + bt,\ y = y_0 - at,\ t \in \mathbb{Z}$$

Exemplo: Passo a passo para resolver a equação diofantina $24x + 14y = 18$:

A equação tem solução, pois $(24, 14) = 2$ e $2|18$. Note que podemos dividir a equação por 2 encontrando a equação equivalente $12x + 7y = 9$. Usando o algoritmo de Euclides, vamos encontrar x_0, y_0 que satisfazem a equação.

$12 = 1 \cdot 7 + 5$

$7 = 1 \cdot 5 + 2$

$5 = 2 \cdot 2 + 1$

$2 = 2 \cdot 1 + 0$

Assim, temos que $1 = 5 - 2 \cdot 2$, além disso $2 = 7 - 1 \cdot 5$ e $5 = 12 - 1 \cdot 7$.

Fazendo as substituições, vamos encontrar a solução $1 = 3 \cdot 12 + (-5) \cdot 7$. Logo, multiplicando a equação por 9, ficamos com:

$$9 = 27 \cdot 12 + (-45) \cdot 7$$

Ou seja, as soluções iniciais são $x_0 = 27$ e $y_0 = -45$. Como $a = 12$ e $b = 7$. Todas as soluções serão dadas por $9 = (27 + 7t)12 + (-45 - 12t)7$.

Exercícios:

1) Resolva em $\mathbb{Z}$ as seguintes equações:

   a) $90x + 28y = 22$

   b) $50x + 56y = 74$

   c) $40x + 65y = 135$

   d) $8x + 13y = 23$

   e) $16x + 7y = 601$

   f) $47x + 29y = 288$

2) Resolva em $\mathbb{N}$ as equações:

   a) $19x + 3y = 185$

   b) $16x + 7y = 1001$

3) Dispondo de 100 reais, de quantas maneiras se pode gastar comprando revistas de 5 reais e 7 reais?

4) De quantas maneiras pode-se comprar selos de 3 reais e 5 reais de modo que se gaste 50 reais?

5) Dispondo de baldes de 5 e 10 litros, de quantas maneiras podemos encher uma caixa d'água de 500 litros?

4.6 Teorema Fundamental da Aritmética

Em nosso último encontro tratamos do "Teorema Fundamental da Aritmética" que é um conteúdo que, se fosse possível trabalhar, seria de grande aprendizado para os alunos, pois nele são apresentados os números primos que são fascinantes por sua natureza e a manifestação deles nas expressões matemáticas. Por exemplo, saber o porquê de fato uma fração com números inteiros é considerada irredutível, poder montar frações irredutíveis através de generalizações, descobrir que existem infinitos números primos etc.

Nesse encontro, fizemos questão de demonstrar que existem infinitos números primos, apresentando para eles a técnica de demonstração que usa redução ao absurdo. Notamos que eles foram capazes de entender essa demonstração e acharam interessante o método utilizado.

Outro aspecto interessante sobre esse conteúdo foi o cálculo da quantidade de divisores de um número inteiro, em que usamos o teorema fundamental da aritmética aliado aos princípios de contagem. Vale ressaltar que essa parte despertou grande interesse e curiosidade também.

Feito isso, a partir daqui, uma extensa gama de exercícios podem ser trabalhados, pois uma vez que os alunos entenderam bem a divisão euclidiana, MDC e o teorema fundamental da aritmética, várias portas se abrem para novos conteúdos.

Entendemos que para uma abordagem inicial no ensino médio, chegar até o teorema fundamental da aritmética seja suficiente para a prática da matemática argumentativa. Na verdade, se for possível chegar até divisão euclidiana e resolver exercícios relacionados àquele tema já seria algo bem importante e produtivo. O que nos propusemos a demostrar, aqui, é que com poucas horas de trabalho, pode-se aprofundar mais nos conteúdos.

Segue abaixo o material entregue para os alunos para trabalhar o teorema fundamental da aritmética:

Números primos

Definição:: Um número natural maior do que 1 é chamado de *número primo*, se ele só possui como divisores o 1 ele próprio

Observação: Um número maior do que 1 que não é primo será chamado de *composto*.

Proposição 1: Sejam $a, b, p \in \mathbb{Z}$, com p primo. Se $p|ab$, então $p|a$ ou $p|b$

Proposição 2: Se $p, p_1, p_2, ..., p_n$ são números primos, e se $p|p_1p_2 \cdots p_n$, então $p = p_i$ para algum $i = 1, 2, ..., n$

Teorema fundamental da aritmética

Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.

Uma consequência desse teorema é que dado um inteiro $n \neq 0, 1, -1$, existem primos $p_1, p_2, ..., p_n$ e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r \in \mathbb{N}$, unicamente determinados, tais que $n = \pm p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$.

Quantidade de divisores positivos de um número

Seja n um número natural, a quantidade de divisores de n será denotada por $d(n)$. Se

$$n = \ p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r},$$

então

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$$

.

Teorema da infinitude dos primos

Existem infinitos números primos. Demonstração: Suponha, por absurdo, que existam finitos números primos, $p_1, p_2, ..., p_r$. Logo,

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_r + 1$$

não é divisível por nenhum primo $p_1, p_2, ..., p_r$, isso é uma contradição.

Lema: Verificação de primo

Se um número natural $n > 1$ não for divisível por nenhum número primo p tal que $p^2 \leq n$, então ele é primo.

Exercícios:

1) Calcule a quantidade de divisores dos números abaixo:

   a) 28

   b) 322

   c) 121

   d) 78

   e) 480

2) Ache os possíveis valores de $n, m \in \mathbb{N} \cup 0$ de modo que o número $9^n 10^n$ tenha:

   a) 27 divisores

   b) 243 divisores

3) Qual é a forma geral dos números naturais que admitem:

   a) um só divisor além de 1 e dele próprio?

   b) um número primo de divisores?

4) Dois números são primos entre si e foram multiplicados por 28. Qual o mdc desses novos números?

5) Qual é o menor valor do número natural n que torna $n!$ divisível por 1000?

6) Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, com $(a, b) = 1$. Mostre que, se ab é um quadrado, então a e b são quadrados. Generalize para ab uma potência r-ésima.

7) Mostre que todo número primo $p > 2$ escreve-se de modo único como a diferença de dois quadrados.

8) Quais dos números abaixos são primos?

   a) 239

   b) 241

c) 247

d) 253

e) 1789

4.7 Algumas reflexões sobre o curso ministrado

Pudemos perceber que boa parte dos alunos teve interesse e conseguiu acompanhar o desenvolvimento dos conteúdos e das resoluções dos exercícios.

O que se deve enfatizar é que sempre foi cobrado que os estudantes deviam argumentar da melhor maneira possível ao resolver os exercícios, pois quem está lendo não sabe sobre os pensamentos de quem elaborou a resposta, por isso, todos os detalhes dos conteúdos utilizados são importantes no desenvolvimento da resposta.

Durante o desenvolvimento do curso, houve alguns complicadores como atrasos para começar, pois alguns alunos tinham atividades marcadas por outros professores antes dos encontros e, como eram poucos alunos, esperávamos todos chegarem antes de começar. Também outros encontros tiveram que acabar mais cedo devido às reuniões pedagógicas que aconteciam na escola, quase sempre próximo ao horário do curso.

Entretanto, como foi dito, o curso durou cerca de sete horas dividido em sete semanas e se pode trabalhar bastante conteúdo de aritmética. Se tivéssemos trabalhado somente divisão euclidiana em sete horas, uma gama imensa de exercícios poderiam ter sido resolvidos, com proposta de distribuirmos os exercícios para que todos pudessem ir no quadro, por exemplo, entretanto isso não foi possível. Caso seja possível que os alunos resolvam o exercício no quadro, seria um momento de grande valia, pois se pode interagir com a sala de maneira que os outros alunos devam dizer se estão convencidos que a resposta apresentada pelo colega apresenta argumentação correta.

Para concluir, defendemos que esse pode ser um passo inicial simples que o professor pode dar em busca de uma matemática mais argumentativa, que faça com que o aluno busque praticar demonstrações e deduções matemáticas de maneira mais simples, utilizando números inteiros, na esperança de que de alguma maneira isso o ajude enquanto um cidadão crítico e argumentador.

Como dito nos capítulos anteriores, defendemos que praticar essas argumentações matemáticas pode ajudar o indivíduo em sua vida tornando-o mais questionador. De acordo com Boavida (2005, p. 115), a prática da argumentação matemática é importante

> por construir uma cultura de sala de aula regulada por normas que apoiem a ideia de que o raciocínio e a argumentação são as fontes primeiras de legitimidade de ideias e asserções e em que os alunos se sintam confortáveis e seguros para partilharem ideias emergentes e titubeantes, bem como para explicarem, justificarem e defenderem os seus pontos de vista.

Desse modo, a ideia é que se quebre um pouco com a matemática aprendida na educação básica que quase sempre se remete à reprodução de algoritmos que pouco incentivam o questionamento e a argumentação. Pensamos que isso não seja fácil, entretanto, com algum esforço por parte dos professores podemos mudar pelo menos um pouco esse quadro.

> Constatando, nos tornamos capazes de intervir na realidade, tarefa incomparavelmente mais complexa e geradora de novos saberes do que simplesmente a de nos adaptar a ela. É por isso também que não me parece possível nem aceitável a posição ingênua ou, pior, astutamente neutra de quem estuda, seja o físico, o biólogo, o sociólogo, o matemático, ou o pensador da educação. Ninguém pode estar no mundo, com o mundo e com os outros de forma neutra. Não posso estar no mundo de luvas nas mãos constatando apenas. A acomodação em mim é apenas caminho para a inserção, que implica decisão, escolha, intervenção na realidade. Há perguntas a serem feitas insistentemente por todos nós e que nos fazem ver a impossibilidade de estudar por estudar. De estudar descomprometidamente como se misteriosamente de repente nada tivéssemos que ver com o mundo, um lá fora e distante mundo, alheado de nós e nós dele (Freire, 2015, p. 75).

Por que estudar matemática? Considerações finais

No decorrer deste estudo, refletimos sobre a resposta que se tem quando se indaga sobre o porquê estudar matemática.

Ensinar exige rigorosidade metódica:

> O educador democrático não pode negar-se o dever de, na sua prática docente, reforçar a capacidade crítica do educando, sua curiosidade, sua insubmissão. Uma de suas tarefas primordiais é trabalhar com os educandos a rigorosidade metódica com que devem se "aproximar" dos objetos cognoscíveis. E esta rigorosidade metódica não tem nada a ver com o discurso "bancário" meramente transferidor do perfil do objeto ou do conteúdo. É exatamente nesse sentido que ensinar não se esgota no "tratamento" do objeto ou do conteúdo, superficialmente feito, mas se alonga à produção das condições em que aprender criticamente é possível (Freire, 2015, p.28).

Assim, defendemos que estimular o desenvolvimento de um cidadão mais crítico é um direito do aluno e um dever do educador. Apesar de ser uma tarefa muito difícil, pensamos que pequenas atitudes podem ajudar a alcançar, gradativamente, esse objetivo.

Desse modo, refutamos o tipo de ensino mecânico em que do aluno é somente exigida a reprodução automática do conteúdo apresentado pelo professor, sem questionamento algum sobre o processo, muito menos é exigida do aluno capacidade de argumentação na resolução de problemas matemática. Aparentemente esse tipo de educação acha funcionalidade na sociedade atual. De acordo com Skovsmose (2007, p. 216), "A inclusão restrita e a funcionalidade aparente da desqualificação destacam de novo a situação crítica em que a educação matemática está operando". Além disso, segundo Freire (2014, p. 58), esse tipo de comportamento leva os alunos somente a uma memorização mecânica do que está sendo narrado pelo professor e que os docentes que realizam bem tal tarefa são considerados "bons" do mesmo modo que os alunos que são submetidos docilmente a esse tipo de educação também são considerados "bons", assim, conclui que

> Eis aí a concepção "bancária" da educação, em que a única margem de ação que se oferece aos educandos é a de receberem os depósitos, guardá-los e arquivá-los. Nesta distorcida visão da educação, não há criatividade, não há transformação, não há saber. Só existe saber na invenção, na reinvenção, na busca inquieta, impaciente, permanente, que os homens fazem no mundo, com o mundo e com os outros [...] (Freire, 2014, p. 58).

Sabemos que a educação crítica que Skovsmose (2001, 2006, 2007, 2008) e Freire (2014, 2015) buscam vai muito além do que apresentado nesse trabalho, aliás, talvez tenha pouco a ver com nossas propostas, entretanto, consideramos que ensinar criticamente é o objetivo ideal, algo que infelizmente ainda estamos longe de conseguir, uma vez que a nossa própria formação pouco nos propicia a esse tipo de educação.

Assim, enquanto não conseguimos aplicar uma educação mais crítica, voltada à emancipação das pessoas, queremos, pelo menos, com algumas mudanças de atitudes na sala de aula, fazer com que os alunos possam desenvolver ao menos sua capacidade de argumentação e crítica, de maneira que eles possam levar isso para sua vida e se tornem mais questionadores. O que se espera, com isso, é que eles consigam se posicionar, argumentar, tornando-se sujeitos de suas respostas, de suas vidas.

Queremos que a matemática também possa ser enxergada como tendo um papel importante no desenvolvimento crítido do cidadão. Segundo Skovsmose (2007, p. 167),

> Nós não temos qualquer tradição de desenvolvimento de crítica cultural na qual a crítica matemática tenha um papel. Nós temos uma tradição rica de crítica literária, artística e musical. Nós temos tradição de escrever sobre ciência, e a história da ciência continua sendo a metodologia de um museu - expondo coisas, mostrando coisas. Mas não temos um método para reflexão sistemática a respeito de nossa situação aporética presente.

Por isso, propusemos duas maneiras que consideramos, em tese, simples, mas que podem servir de estímulo para o desenvolvimento desse perfil crítico nos alunos.

A primeira delas são os problemas argumentativos. Na realidade eles são problemas matemáticos em que o aluno consegue percebê-lo como algo acreditável e que, além disso, mais importante, faça com que o aluno, ao resolver o problema, argumente da melhor maneira possível até chegar à conclusão do problema dele.

O aluno deve fazer as conexões entre hipótese, conteúdo a ser utilizado, por que foi utilizado, quais outros caminhos que poderiam estar errados e por que é assim. Feito e verificado isso, observando se sua resposta está completa, de modo que quem fosse ler sua resposta argumentativa não teria dúvida alguma do desenvolvimento e conclusão do exercício.

Defendemos que os problemas argumentativos não exigem muito trabalho dos professores e podem ser aplicados durante toda educação básica, criando assim uma cultura de argumentação nos alunos. Entendemos que nem sempre é possível aplicar esse tipo de atividade, pois dependendo do conteúdo, é muito difícil certas situações que permitam tal problema argumentativo. Entretanto, se os alunos puderem ter um contato razoável com esse tipo de problema, defendemos que colaborará para sua formação crítica.

Já a segunda proposta requer um pouco mais de conhecimento do professor, pois exige um pouco de prática na realização de demonstrações e, talvez, justamente alguns professores possam ter dificuldades em dominar essa ferramenta matemática por virem de uma educação menos argumentativa e pouco praticarem a argumentação e demonstração em sala de aula como citamos na página 21.

Por isso, nossa proposta é que essa prática em demonstrações seja realizada, num primeiro momento, somente com números inteiros, especialmente com o conteúdo de divisão euclidiana. Pensamos, inclusive, que com poucas horas de estudo, os professores consigam aprender esse conteúdo e colocar em prática com os alunos.

Para isso há muito material online encontrado gratuitamente na internet e que pode ser utilizado, inclusive a apostila de iniciação em aritmética que citamos nesse trabalho encontra-se disponível nessas circunstâncias.

Defendemos, então, que a matemática, como uma área do conhecimento, pode também ser transformadora nas vidas das pessoas desde que suas competências sejam desenvolvidas de modo a fazer com que dê suporte ao desenvolvimento de cidadãos críticos.

> A noção de matemácia significa competências relacionadas à matemática, significado similar à noção de aptidão literária, como desenvolvida por Paulo Freire. A tarefa de Freire não foi simplesmente ensinar pessoas analfabetas a lerem e escreverem, pois ler poderia significar leitura de uma situação sociopolítica, e não apenas de um texto, aberto a interpretações críticas [...] Nesse sentido Freire ampliou o programa de alfabetização como suporte para o desenvolvimento de cidadãos críticos, implicando que as pessoas não necessitam ver a si mesmas como afetadas pelo processo político, mas, também, como possíveis participantes nesse processo. Do mesmo modo que letramento, a matemática se refere a diferentes competências. Uma delas é lidar com noções matemáticas; uma segunda é aplicar essas noções em diferentes contextos; a terceira, é refletir sobre essas aplicações. Esse componente reflexivo é crucial para a competência da matemática (Skovsmose, 2007, p. 74-75).

Desse modo, pensamos que pequenos passos podem ser dados a uma educação matemática que possa desenvolver cidadãos críticos e conscientes do meio social em que estão inseridos, se enxergando como parte do processo e não apenas um objeto. Essa é nossa principal resposta sobre por que estudar matemática.

Esperamos que esse trabalho contribua um pouco com o desenvolvimento da matemática em sala de aula e, em particular, no desenvolvimento de cidadãos críticos. Defendemos que, se ao menos uma parcela de professores conseguir aplicar alguma das ideias aqui apresentadas, podemos, quem sabe, ter resultados positivos na formação de uma sociedade mais crítica, argumentadora e reflexiva.

Referências Bibliográficas

Boavida, A. M. R. (2005). A argumentação em matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração.

Boero, P. (1999). Argomentazione e dimostrazione: una relazione complessa, produttiva e inevitabile nella matematica e nella didattica della matematica. *Newslwetter on proof.*

Brasil (1996). Lei de Diretrizes e Bases. URL: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm Acesso em 15/11/2017.

Brasil (2016). Base Nacional Comum Curricular. URL: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/pdf/4.2_BNCC-Final_MA.pdf Acesso em 15/11/2017.

Brasil (2017a). Distribuição dos alunos por nível de proficiência. URL: http://www.qedu.org.br/brasil/proficiencia Acesso em 11/12/2017.

Brasil (2017b). Lei 13.415 - Novo Ensino Médio. URL: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/l13415.htm/ Acesso em 15/11/2017.

Bussi, M. G. B. (1998). Verbal interaction in the mathematics classroom: A vygotskian analysis. *Language and communication in the mathematics classroom*, páginas 65–84.

Carvalho, J. B. P. (2008). Avaliação e perspectivas da área de ensino de matemática no brasil. *Em Aberto*, 14(62).

Dante, L. R. (2013). *Matemática: Contexto e Aplicações.* Ática, São Paulo.

Druck, S. (2004). A crise no ensino de Matemática no Brasil. *Revista do professor de matemática*, 53(53):1–5.

Fiorentini, D. (1995). Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. *Zetetiké*, 3(1):1–38.

Freire, P. (2014). *Pedagogia do Oprimido*. Paz e Terra, Rio de Janeiro.

Freire, P. (2015). *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. Paz e Terra, Rio de Janeiro.

Hardy, G. H. (2007). *Apologia de Um Matemática*. Gradiva, Portugal.

Hefez, A. (2010). Iniciação à Aritmética. URL: http://www.obmep.org.br/docs/apostila1.pdf Acesso em 11/12/2017.

Hefez, A. (2014). *Aritmética*. SBM, Rio de Janeiro.

Lamport, L. (1987). Parâmetros curriculares nacionais. URL: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf Acesso em 15/11/2017.

Lima, E. L. (2003). *Matemática e Ensino*. Ed. SBM, Rio de Janeiro.

Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., e Morgado, A. C. (2005). *Temas e Problemas Elementares*. Ed. SBM, Rio de Janeiro.

Pedemonte, B. (2002). Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration, co-tutelle Università di Genova and Université Joseph Fourier, Grenoble.

Ponte, J. P. (2004). Práticas profissionais dos professores de matemática. *Quadrante*, Volume 13.

PROFMAT-SBM (2017). PROFMAT: Uma reflexão e alguns resultados. URL: http://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2017/07/PROFMAT-relatorio_DIGITAL.pdf Acesso em 16/11/2017.

Ruiz, A. R. (2008). Matemática, matemática escolar e o nosso cotidiano. *A Página da Educação, Porto, Portugal*, 20.

Silva, C. P. (2005). *A Matemática no Brasil: História de seu Desenvolvimento*. Ed. Edgard Blücher, São Paulo.

Silva, V. A. (2008). Relação com o saber na aprendizagem matemática: uma contribuição para a reflexão didática sobre as práticas educativas. *Revista Brasileira de Educação*, 13(37).

Skovsmose, O. (2001). *Educação Matemática Crítica: A Questão da Democracia*. Ed. Papirus, S. Paulo.

Skovsmose, O. (2007). *Educação Crítica: Incerteza, Matemática e Responsabilidade*. Ed. Cortez, São Paulo.

Skovsmose, O. (2008). *Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica*. Ed. Papirus, S. Paulo.

Skovsmose, O. e Alrø, H. (2006). *Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática*. Ed. Autêntica, Belo Horizonte.

Apêndice

A.1 Questionários enviados

Pesquisa sobre por que estudar Matemática

Três perguntas que contribuirão para um trabalho do Mestrado Profissional em Matemática da UFMT. Apenas a primeira pergunta é obrigatória, as outras duas são optativas, mas caso haja resposta, será de grande contribuição. Ressalto que as respostas são anônimas.

Na sua opinião, quais os principais motivos para se estudar Matemática? Comece com o qual você considera mais importante e assim sucessivamente. *

Texto de resposta longa

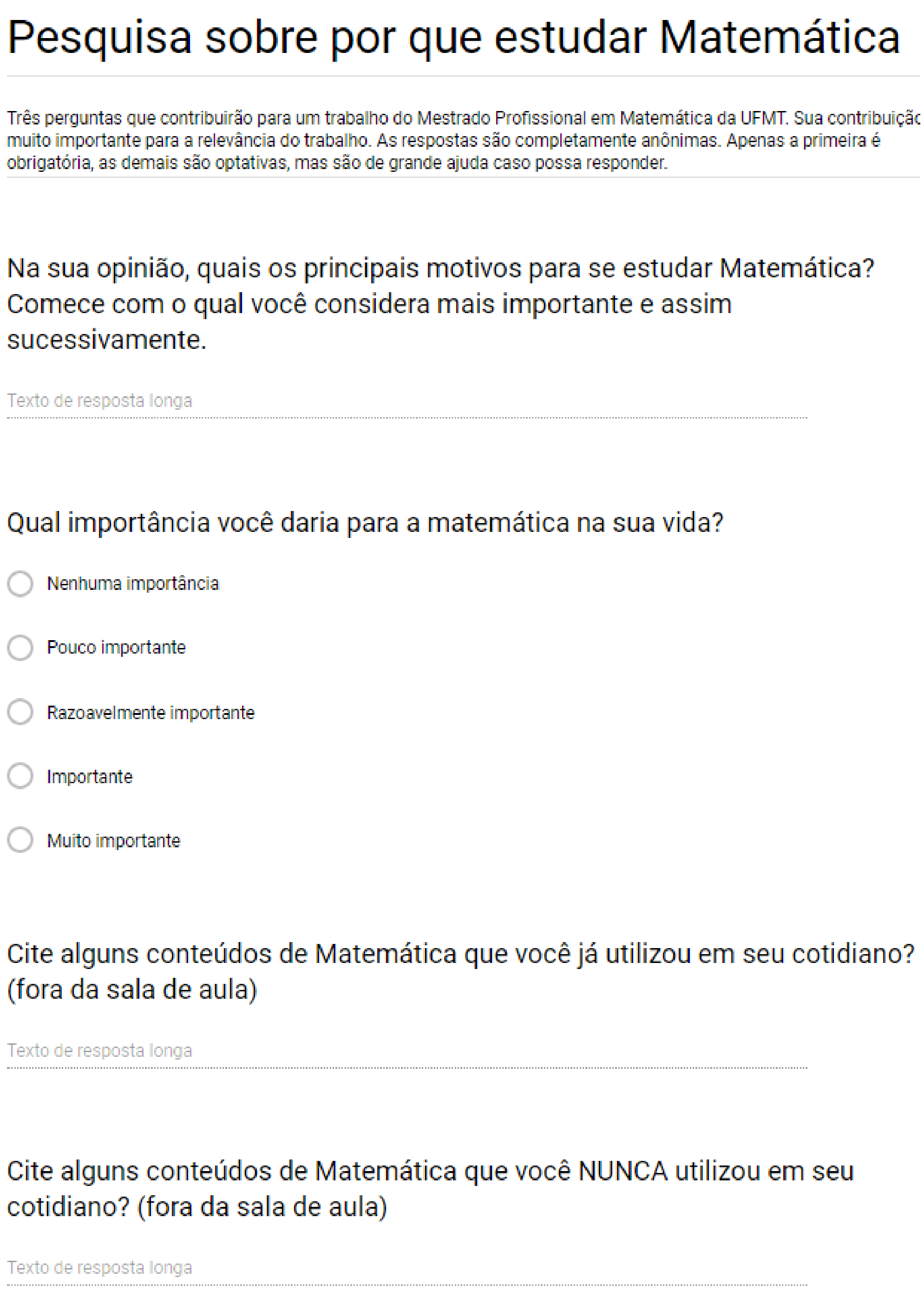
Cite alguns conteúdos de Matemática que você já utilizou em seu quotidiano? (fora da sala de aula)

Texto de resposta longa

Cite alguns conteúdos de Matemática que você NUNCA utilizou em seu quotidiano? (fora da sala de aula)

Texto de resposta longa

Figura A.1: Questionário enviado aos professores



Pesquisa sobre por que estudar Matemática

Três perguntas que contribuirão para um trabalho do Mestrado Profissional em Matemática da UFMT. Sua contribuiçã muito importante para a relevância do trabalho. As respostas são completamente anônimas. Apenas a primeira é obrigatória, as demais são optativas, mas são de grande ajuda caso possa responder.

Na sua opinião, quais os principais motivos para se estudar Matemática? Comece com o qual você considera mais importante e assim sucessivamente.

Texto de resposta longa

Qual importância você daria para a matemática na sua vida?

- Nenhuma importância
- Pouco importante
- Razoavelmente importante
- Importante
- Muito importante

Cite alguns conteúdos de Matemática que você já utilizou em seu cotidiano? (fora da sala de aula)

Texto de resposta longa

Cite alguns conteúdos de Matemática que você NUNCA utilizou em seu cotidiano? (fora da sala de aula)

Texto de resposta longa

Figura A.2: Questionário enviado aos alunos

Na sua opinião, quais os principais motivos para se estudar Matemática? Comece com o qual você considera mais importante e assim sucessivamente.	Cite alguns conteúdos de Matemática que você já utilizou em seu quotidiano? (fora da sala de aula)	Cite alguns conteúdos de Matemática que você NUNCA utilizou em seu quotidiano? (fora da sala de aula)
Creio que a Matemática é o motor propulsor de desenvolvimento das sociedades. Muito dos avanços científicos estão relacionados direta ou indiretamente à Matemática.	1-Medidas de comprimento, superfície e área. 2-Função Afim. 3- Estatística e Probabilidade.	Geometria Analítica
Para melhor entender o mundo ao meu redor...pois a Matemática está em todos os lugares desse universo.	Operações no conjunto dos naturais...no conjunto dos racionais...calculo de área de figuras planas...etc	Nunca usei matriz...aquela parte de principio fundamental de contagem...permutação...arranjo...binômio de newton...
1. Desenvolvimento do raciocínio lógico. 2. Aumentar a criatividade. 3. Aplicação para encontrar soluções nas mais diversas áreas.	Cálculo de área, volume, análise combinatória, trigonometria	Determinante e binômio de newton
Desenvolver o raciocínio.	Regra de três	Logaritmos, trigonometria, análise combinatória etc.
Pensamentos lógico, desenvolvimento científico e Controle financeiro	Matemática financeira, razão e proporção, geometria	Complexos,
Você tem uma dependência direta da matemática em tudo, peso, massa, distância área volume, divisões, multiplicações etc... Não dá pra ficar sem.	Cálculo de area, volumes, preços, composições e variações de custos , Mat. Fi anceira, probabilidades, análise combinatória,...muita matemática.	Polinomios, PA, Números complexos.
A maior importância eh econômica no dia a dia leve três e pague dois juros sobre juros multas e outras coisas que enganam os consumidores	Matemática financeirá logaritmo equações regra de 3	Derivadas e integrais
O conhecimento matemático é fundamental para compreender a nossa sociedade e tudo que nos rodeia.	Matemática financeira (proporção, regra de três, porcentagem, juros...), estatística, geometria plana e espacial, análise combinatória, equação linear, sistema linear...	Matrizes e determinantes, equações e funções exponenciais, logarítmicas, quadráticas e trigonométricas, números complexos, geometria analítica, equações polinomiais.
A Matemática ajuda no desenvolvimento do raciocínio lógico e está presente no nosso dia a dia. Considero este os dois fatores principais para se estudar Matemática.	Os números estão presentes constantemente em nossa rotina (número do rg, CPF, números de telefone, preços, transações bancárias). Utilizamos no planejamento financeiro, pesquisas de campo, combinações de roupa, construções de casas, compra e venda, etc.	Geralmente conteúdos de álgebra (polinômios, equações algébricas), números complexos são exemplos de conteúdos nos quais é difícil encontrar aplicações práticas utilizadas em nosso dia a dia.
Para mim estudar matemática é importante porque utilizamos sempre no nosso dia a dia.	Horas, fazer contas (adicionar, subtrair, dividir e multiplicar) entre outros.	Gostava de estudar mas não me lembro ter utilizado é raiz de bascara
Se tornar crítico, criar um raciocínio baseado na razão e lógica, criar o hábito de verificar informações, aprender a visualizar padrões, entender e aplicar o processo de resolução de problemas (em qualquer área de sua vida) e buscar autonomia em qualquer tipo de aprendizado.	As operações básicas, porcentagem, juros simples e compostos, figuras planas mais simples (triângulo, retângulo e quadrado), área e perímetro, trigonometria básica, frações, números inteiros, números naturais, números racionais, regra de três simples, equação e inequação do primeiro grau, ângulos, probabilidade, estatística básica, combinatória básica, geometria plana e espacial.	Números complexos, círculo trigonométrico, logaritmo, equações de grau maior ou igual a 2, Binômio de Newton e Fatoração de polinômios.
Desenvolve o raciocínio e ensina as operações necessárias para resolver as demais atividades matemáticas, podemos dizer que matemática está em todos os lugares, usamos matemática em tudo e para tudo, motivos pelos quais deve -se estudar matemática.	As 4 operações, porcentagem.	expressão numérica.

Figura A.3: Algumas respostas dos professores

Na sua opinião, quais os principais motivos para se estudar Matemática? Comece com o qual você considera mais importante e assim sucessivamente.	Qual importância você daria para a matemática na sua vida?	Cite alguns conteúdos de Matemática que você já utilizou em seu cotidiano? (fora da sala de aula)	Cite alguns conteúdos de Matemática que você NUNCA utilizou em seu cotidiano? (fora da sala de aula)
Saber as operações matemática, mexer com números, conhecer o mundo matemático.	Importante	Operações básicas da matemática, sistema, criptografia	Trigonometria
precisamos Dela para qualquer coisa	Muito importante	Regra de três	Bhaskara
A matemática está em todo o lugar do mundo, desde o micro até o macro. Principalmente o curso de informática em que um computador é pura matemática. Além do controle do dinheiro.	Muito importante	Matemática Financeira, Comercial, Geometria.	
problemas que podem estar ou não relacionados a matematica Para organizar os gastos e não acabar tendo problemas financeiros Para reger bem uma empreza Para não ser enganado facilmente.	Muito importante	Porcenragens Regra de 3 Frações Contas de + - × ÷	Bhaskara / Progressão
Raciocínio, Interação com o mundo, Melhor tomada de descisão	Muito importante	simples e compostas, porcentagem, juros simples e compostos, equações, combinação.	logaritmo, matrizes e determinantes, números complexos, inequações.
Pelo simples fato de você poder comprar algo e saber quantos tem que dar e quantos receber de troco; Pelo fato de saber quanto tempo falta para tal horário, são N situações que considero crucial para o estudo da matemática	Muito importante	Probabilidades, porcentagem, multiplicação, soma, divisão, média, subtração	Cálculo integral, equação de 2 grau, matriz
Desenvolvimento do Raciocínio, Convivência diária, Desenvolvimento de tecnologias.	Muito importante	Matemática Básica, Porcentagem, Estatística, Probabilidade, Teorema de Pitágoras.	
Para saber contar, fazer contas relacionadas a dinheiro, sabermos a proporção das coisas, chegar em um numero exato em alguma coisa.	Muito importante	Contas de multiplicação, divisão, subtração e soma.	Raiz quadrada, logaritmo, Pi.
A matemática está presente em tudo, visivelmente ou não. Além disso, é necessário estudar pra passar de ano.	Muito importante	Regra de três, estatísticas, porcentagem, juros...	Bhaskara, Pitagoras...
Para não ter dificuldades em várias áreas que no dia-a-dia se usa bastante e também porquê a matemática é um "leque" para várias outras matérias que usa a matemática.	Muito importante	Geometria, matemática básica, trigonometria...	Logaritmo.
desenvolver raciocínio lógico, resolver problemas mais rápido e da melhor forma	Muito importante	regra de três, operações básicas, financeiro, lógica, probabilidade e etc.	
Para saber pelo menos conceitos básicos e assim, sobreviver ao mundo capitalista	Importante		Bhaskara
A maior importância é saber o básico para o cotidiano, de resto, é so para quem quer seguir no ramo.	Pouco importante	Soma, multiplicação, divisão subtração, geometria básica.	Todos os outros conteúdos menos os que eu citei na questão anterior.
Seu uso no cotidiano,administrar,vestibulares	Razoavelmente importante	Razão e proporção,funções de 1 2 graus	Logaritmos,função exponencial,P.a e P.g
ENEM. Dia - a - dia	Razoavelmente importante	Fração, adição, subtração, divisão, multiplicação.	Bhaskara, geometria plana, geometria espacial, logaritmo, função quadrática, entre outros.
Para calcular coisas do cotidiano, porém na minha opinião não gosto dos conteúdos do ensino médio.	Razoavelmente importante	Adição, multiplicação, subtração,divisão.	Conteúdos do ensino médio.

Figura A.4: Algumas respostas dos alunos