



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Campus de São José do Rio Preto

Tiago Fernando dos Reis

Ensino de áreas de polígonos e círculo por meio de
materiais manipulativos

São José do Rio Preto
2017

Tiago Fernando dos Reis

Ensino de áreas de polígonos e círculo por meio de
materiais manipulativos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: Capes

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Rita de Cássia Pavan Lamas

São José do Rio Preto
2017

Reis, Tiago Fernando dos.

Ensino de áreas de polígonos e círculo por meio de materiais manipulativos / Tiago Fernando dos Reis. -- São José do Rio Preto, 2017
67 f.

Orientador: Rita de Cássia Pavani Lamas

Dissertação (Mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Geometria euclidiana - Estudo e ensino. 3. Círculo. 4. Matemática - Metodologia. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Tiago Fernando dos Reis

Ensino de áreas de polígonos e círculo por meio de
materiais manipulativos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Banca Examinadora

Prof.^a Dr.^a Rita de Cássia Pavan Lamas
UNESP – São José do Rio Preto
Orientadora

Prof.^a Dr.^a Ana Paula Tremura Galves
UFU – Uberlândia

Prof.^a Dr.^a Michelle Ferreira Zanchetta Morgado
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
01 de Setembro de 2017

*“Ainda que minha mente e meu corpo enfraqueçam, Deus
é a minha força, Ele é tudo o que eu sempre preciso.”*

Salmo 73:26

Dedico este trabalho a Deus, que nos criou e foi criativo nesta tarefa. Seu fôlego de vida em mim me foi sustento e me deu coragem pra questionar realidades e propor sempre um novo mundo de possibilidades. E dedico também à minha esposa e filha, Daniela e Alice.

AGRADECIMENTOS

A Deus, primeiramente, que em sua infinita misericórdia e amor permitiu que esse sonho se tornasse realidade.

À minha orientadora Prof^a. Dr^a Rita de Cássia Pavan Lamas, pela orientação, apoio, confiança, por todo o empenho dedicado na elaboração deste trabalho, pelo conhecimento transmitido, pela amizade e conselhos nos momentos difíceis.

A todos os docentes do Departamento de Matemática do IBILCE, por tamanha dedicação e comprometimento não só didaticamente falando, mas também com várias demonstrações de cuidado e afeto para comigo e com os meus colegas.

A minha esposa Daniela, pelo amor, incentivo e apoio incondicionais. Meu apoio e incentivo nas horas difíceis, de desânimo e cansaço e por ter comemorado comigo a cada vitória conquistada.

Meus agradecimentos aos meus colegas de pós-graduação, pela amizade inesquecível, pelos incentivos e por tão grande companheirismo que demonstraram.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

RESUMO

Os materiais manipuláveis são indicados para auxiliar as crianças na passagem do concreto para o abstrato. Isso, aliado ao fato da dificuldade dos alunos na geometria ao utilizar o ensino tradicional em anos anteriores, motivou a utilização de materiais manipulativos no ensino de Geometria Euclidiana Plana.

O trabalho foi desenvolvido com o 9º Ano da Escola Municipal Marciano Maciel da Silva, Tanabi/SP, com 24 alunos que estavam com dificuldade na compreensão e fixação dos conteúdos de geometria. O mesmo envolveu as atividades práticas do capítulo 3. Utilizamos materiais manipulativos a fim de que o alunado se tornasse capaz de compreender conceitos de Geometria Euclidiana Plana.

O objetivo deste trabalho é apresentar a teoria de Geometria Euclidiana Plana, em particular, áreas de regiões poligonais elementares, comprimento de circunferência e áreas de regiões circulares, a qual corresponde às atividades práticas desenvolvidas no 9º ano, e os resultados obtidos com relação à aprendizagem dos alunos com o uso dos materiais manipulativos.

Observou-se que o trabalho com materiais manipulativos cumpriu o seu papel de capacitar e engajar os alunos para a compreensão e estudo dos conteúdos ministrados.

Palavras chave: Geometria, Polígonos, Circunferência, Círculo, Áreas, Ensino, Material Manipulativo.

ABSTRACT

Manipulative materials are essential to help children in the transition from concrete to abstract. That, besides students' difficulty in geometry using the traditional teaching in previous years, motivated the use of manipulative materials when teaching Euclidean Plane Geometry.

This work was developed with the 9th grade of Marciano Maciel da Silva Municipal School in Tanabi, SP, with 24 students who presented a great difficulty understanding and fixing contents of geometry. The same involved practical activities of Chapter 3. Manipulative materials were used so that the students would be able to understand Euclidean Plane Geometry concepts.

The goal of this paper is to present the Euclidean Plane Geometry theory, particularly, areas of elementary polygonal regions, circumference length and areas of circular regions, which concerns practical activities developed in the 9th grade, and results obtained in relation to students learning through the use of manipulative materials.

It was observed that the work with manipulative materials fulfilled its role of enabling and engaging students to understand and study the content presented.

Keywords: Geometry, Polygons, Circumference, Circle, Areas, Teaching, Manipulative Material.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Polígono convexo	17
Figura 2: Polígono não convexo	17
Figura 3: (a) Região triangular. (b) Região poligonal	18
Figura 4: (a) Região poligonal convexa. (b) Região poligonal não convexa.....	19
Figura 5: Paralelogramo $ABCD$, com diagonal \overline{AC}	21
Figura 6: Quadrado $(b + h) \times (b + h)$	22
Figura 7: Triângulo Retângulo.....	24
Figura 8: Quadrilátero $QRPR'$	24
Figura 9: Triângulo com ortocentro interior	25
Figura 10: Triângulo com ortocentro exterior	26
Figura 11: Triângulo ABC com H_a entre B e C	27
Figura 12: Triângulo ABC com C entre B e H_a	27
Figura 13: Triângulos ABC e XBC com mesma base \overline{BC}	29
Figura 14: Paralelogramo $ABCD$ e altura de medida h	29
Figura 15: Paralelogramo $PQRS$	30
Figura 16: Trapézio $ABCD$ e sua altura h	31
Figura 17: Trapézio $ABCD$	31
Figura 18: Losango $ABCD$	33
Figura 19: Quadrado Q e a circunferência $\mathcal{C}(0, r)$	35
Figura 20: Triângulo $OA_{i-1}A_i$	36
Figura 21: $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{A'_1A'_2}$	38
Figura 22: Polígonos P_3 e Q_3 inscritos	40
Figura 23: Triângulo PQR , formado por três vértices consecutivos do polígono S_m	42
Figura 24: Pentágono $A_1A_2A_3A_4A_5$	43
Figura 25: Região poligonal R_n inscrita.....	43
Figura 26: Polígonos S e S' inscritos nos círculos \mathcal{C} e \mathcal{C}' , respectivamente.....	45
Figura 27: Materiais manipulativos da atividade 1	54

Figura 28: Respostas do questionário da Atividade 1	54
Figura 29: Materiais manipulativos da atividade 2	55
Figura 30: Respostas do questionário da Atividade 2	55
Figura 31: Materiais manipulativos da atividade 3	55
Figura 32: Respostas do questionário da Atividade 3.....	56
Figura 33: Materiais manipulativos da atividade 4	56
Figura 34: Respostas do questionário da Atividade 4.....	57
Figura 35: Materiais manipulativos da atividade 5	57
Figura 36: Resposta do questionário da atividade 5.....	58
Figura 37: Círculo dividido em quatro setores.....	59
Figura 38: Materiais manipulativos da atividade 6	60
Figura 39: Resposta do questionário da atividade 6	61
Figura 40: Materiais manipulativos da atividade 7. (a) Círculos divididos em setores equivalentes. (b) Setores equivalentes rearranjados	61
Figura 41: Resposta do questionário da atividade 7	62
Figura 42: Aproveitamento que os alunos obtiveram na primeira prova diagnóstica.....	63
Figura 43: Aproveitamento que os alunos obtiveram na segunda prova diagnóstica.....	63

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Tabela que relaciona as dimensões dos retângulos R_1, R_2, R_3 e R_4	52
Tabela 2: Tabela que relaciona o comprimento C com o diâmetro D	58

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1: Introdução	13
CAPÍTULO 2: Área de polígonos e círculo	16
Regiões poligonais e setor circular	16
Áreas de regiões poligonais	19
Comprimento da Circunferência	33
Área do Círculo.....	39
CAPÍTULO 3 Atividades para sala de aula e resultados	49
Áreas de Polígonos	51
Área do Círculo.....	58
CAPÍTULO 4: Conclusão	64
Referências	65
Anexo I	66
Anexo II	67

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

Quando os alunos ingressam no Ensino Fundamental II, percebemos que a interação entre professores e alunos muitas vezes deixa de existir e dá lugar ao giz, lousa, livro didático, etc. O método colaborativo dá lugar ao método tradicional de ensino, o aluno passa a ser tratado de maneira vertical, ou seja, em geral, o único detentor do conhecimento passa a ser o professor, que entra em sala com o simples objetivo de transmitir um conhecimento pronto e imutável. Muitas vezes não existe interação entre professores e alunos, o relacionamento que antes era uma porta aberta, agora dá lugar a uma muralha intransponível.

Essa mudança no relacionamento entre professores e alunos cria um reflexo, muitas vezes irreversível, no que diz respeito à absorção e compreensão dos conteúdos obrigatórios dos currículos escolares. Não diferente, dentre estes conteúdos matemáticos se encontra a Geometria, área da Matemática que exige muito a imaginação e criatividade dos alunos.

Rêgo e Rêgo (2000), destacam a necessidade da introdução de novas metodologias de ensino, onde o aluno seja sujeito ativo da aprendizagem, respeitando suas experiências pessoais e levando em conta aspectos recreativos e lúdicos das motivações pessoais, sua imensa curiosidade e desejo de realizar atividades em grupos.

De acordo com os PCNs (1998),

[...] o estudo de Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente... O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação das propriedades das figuras, além da construção de outras relações. (BRASIL, 1998, p. 51)

Segundo Lamas et al. (2014), podemos concluir que o estudo dos conceitos geométricos desenvolve no aluno um tipo de pensamento que o

ajuda a compreender melhor sua relação com o mundo, com a comunidade local a qual está inserido, pois estimula a observação, a percepção de semelhanças e diferenças, identificação de regularidades e outros aspectos matemáticos. E para que esse pensamento seja desenvolvido é necessário pensar em práticas pedagógicas que favoreçam a exploração e resolução de situações problemas.

Contudo, é preciso ressaltar que o uso de materiais manipulativos como estratégia pedagógica não pode recair em uma vivência desprovida de significado. É preciso conciliar a utilização do suporte da materialidade no ensino de Geometria sem perder de vistas seus valores educativos (PAIS, 1999).

Com um papel fundamental no processo de ensino e aprendizagem, os professores precisam se manter atentos no que diz respeito ao estímulo dos alunos em resolver situações problema. É preciso que os professores se preocupem com a construção e organização de ideias dos alunos.

Segundo Polya (2006),

Se o professor de matemática preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos com operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios de alcançar este objetivo. (POLYA, 2006, p.5)

Pensando na importância de se trabalhar novas práticas de ensino e aprendizagem, Silva e Martins (2000) afirmam que,

[...] os materiais manipuláveis são fundamentais se pensarmos em ajudar as crianças na passagem do concreto para o abstrato, na medida em que eles apelam a vários sentidos e são usados pelas crianças como uma espécie de suporte físico numa situação de aprendizagem. Assim sendo, parece relevante equipar as aulas de Matemática com todo um conjunto de materiais manipuláveis (cubos, geoplanos, tangrans, régua, papel pontilhado, ábaco, e tantos outros) feitos pelo professor, pelo

aluno ou produzidos comercialmente, em adequação com os problemas a resolver, as ideias a explorar ou estruturados de acordo com determinado conceito matemático. (SILVA e MARTINS, 2000, p.4)

Diante do que foi exposto, neste trabalho aplicamos em sala de aula sete atividades práticas utilizando materiais manipulativos (capítulo 3), no 9º ano de uma escola municipal, com o objetivo de tornar mais interessante e significativo a aprendizagem de conceitos geométricos. O capítulo 2, refere-se à teoria relacionada as mesmas.

CAPÍTULO 2: ÁREA DE POLÍGONOS E CÍRCULO

Neste capítulo, faremos um estudo teórico sobre todos os conceitos matemáticos que serão utilizados no capítulo relacionado as atividades com materiais manipuláveis aplicadas em sala de aula. Em particular, apresentamos postulados e Teoremas envolvendo áreas de regiões planas, a área de uma região triangular e, a partir dela, áreas de regiões poligonais.

Também trabalhamos com comprimento de circunferência e área do círculo, onde novamente utilizamos áreas de regiões triangulares, mas só que, desta vez, a partir de “uniões aproximadas” de tais regiões. Para isso, precisamos de resultados sobre limites de sequências de números reais e também propriedades de subconjuntos do conjunto dos números reais.

As definições e Teoremas a seguir foram baseadas principalmente em Rezende (2008), Barbosa (2004) e Lima (1985).

A notação \overline{AB} será utilizada para representar o segmento de extremidades A e B , e AB para sua medida.

REGIÕES POLIGONAIS E SETOR CIRCULAR

2.1 Definição. Seja $A_1, A_2, \dots, A_n, n \geq 3$, uma sequência de n pontos distintos do plano tais que os segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$ e $\overline{A_nA_1}$ têm as seguintes propriedades:

- (a) nenhum par de segmentos se intersecciona a não ser nas suas extremidades.
- (b) nenhum par de segmentos com extremidade comum está na mesma reta.

A união dos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ é chamada **polígono**, o qual denotamos por polígono $A_1A_2 \dots A_n$. Os pontos A_1, \dots, A_n são chamados **vértices** do polígono e os segmentos são seus **lados**.

Os polígonos são nomeados de acordo com o número de lados. Por exemplo, o polígono de três lados é o triângulo, com quatro lados é o quadrilátero, etc.

2.2 Definição. Um polígono é dito **convexo** se nenhum par de seus pontos está em semiplanos opostos relativamente a cada reta que contém um de seus lados.

Assim, é convexo o polígono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (Figura 1) e não é convexo o polígono $FGHIJ$ (Figura 2).

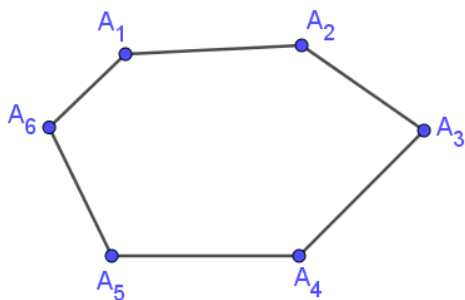


Figura 1: Polígono convexo.

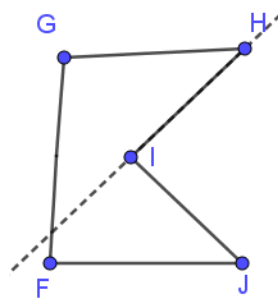


Figura 2: Polígono não convexo.

Na Figura 1, o polígono é de seis lados, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_4A_5}$, $\overline{A_5A_6}$ e $\overline{A_6A_1}$, e é chamado hexágono. Na Figura 2, o polígono é de cinco lados, \overline{FG} , \overline{GH} , \overline{HI} , \overline{IJ} e \overline{JF} , e é chamado de pentágono.

2.3 Definição. Uma **região triangular** (Figura 3(a)) é um conjunto de pontos do plano formado por todos os segmentos cujas extremidades estão sobre os lados de um triângulo. O triângulo é chamado de **fronteira** da região triangular. O conjunto de pontos de uma região triangular que não pertencem a sua fronteira é chamado de **interior** da região triangular.

2.4 Definição. Uma **região poligonal** (Figura 3(b)) é a união de um número finito de regiões triangulares que duas a duas não tem pontos interiores em comum.

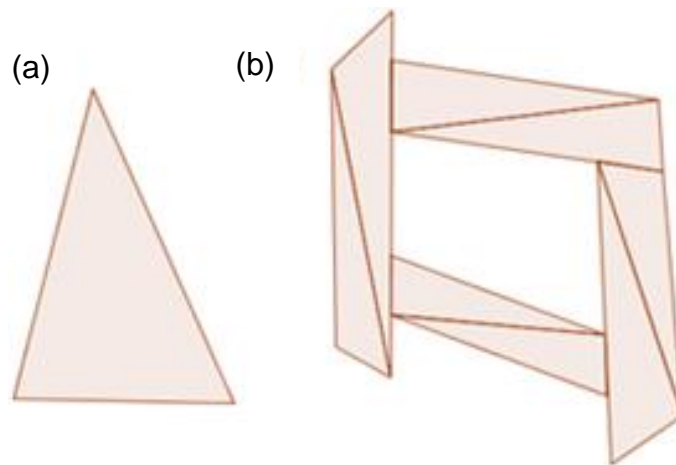


Figura 3: (a) Região triangular; (b) Região poligonal.

2.5 Definição. Um ponto é **interior** a uma região poligonal se existe alguma região triangular contida na região poligonal e contendo o ponto no seu interior. O **interior** da região poligonal é o conjunto dos pontos que lhe são interiores. A **fronteira** da região poligonal é constituída pelos pontos da região que não pertencem ao seu interior.

2.6 Definição. (a) A união de um polígono convexo com o conjunto de seus pontos interiores é chamada **região poligonal convexa**.

(b) A união de um polígono não convexo com o conjunto de seus pontos interiores é chamada **região poligonal não convexa**.

Uma região poligonal convexa pode ser vista como a união de um número finito de regiões triangulares tais que, se duas quaisquer delas se interseccionam, então a intersecção é um segmento de reta ou um ponto. Como exemplo, temos a Figura 4(a).

2.7 Definição. Seja O um ponto do plano e r um número real positivo. A **circunferência** de centro O e raio de medida r é o conjunto constituído por todos os pontos P do plano tais que $OP = r$. O **círculo** de centro O e raio r é o conjunto constituído por todos os pontos Q do plano tais que $OQ \leq r$.

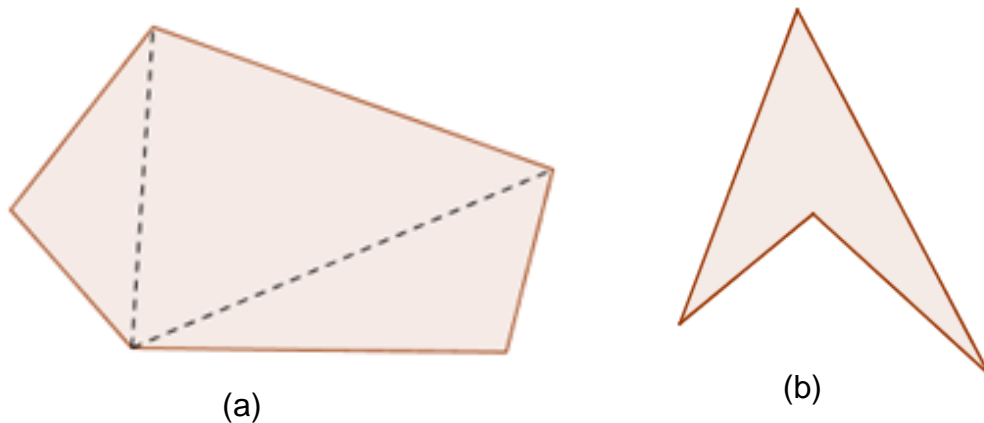


Figura 4: (a) Região Poligonal Convexa; (b) Região Poligonal não convexa.

Observação 1: Consideremos \widehat{AB} um arco de circunferência conforme (REZENDE, 2008, pg. 90)

2.8 Definição. Seja \widehat{AB} um arco de circunferência de centro O e raio r . Chamamos de **setor circular**, ou simplesmente **setor**, à reunião de todos os segmentos \overline{OP} , onde P é um ponto qualquer de \widehat{AB} . O arco \widehat{AB} é chamado **arco de setor** ou **arco fronteira** e r é a medida de seu **raio**.

Vamos considerar uma classe \mathcal{M} de regiões tal que nela estejam contidas todas as regiões poligonais e todos os setores circulares e círculos.

ÁREAS DE REGIÕES POLIGONAIS

Postulado 1. A cada região de \mathcal{M} corresponde um único número real positivo.

2.9 Definição. A **área** de uma região de \mathcal{M} é o número real que lhe corresponde pelo Postulado 1.

Denotamos a área de uma região R por *área* R .

Postulado 2. Se R e S são duas regiões de \mathcal{M} , com $R \subset S$, então *área* $R \leq$ *área* S .

Postulado 3. Se uma região R , de \mathcal{M} , é a união $R_1 \cup R_2$, com R_1 e R_2 sendo regiões de \mathcal{M} que se interseccionam em um número finito de pontos ou segmentos, então a área de R é igual à soma das áreas de R_1 e R_2 .

Nesta seção trataremos de áreas de regiões poligonais. Por abuso de linguagem, fala-se, por exemplo, área de polígono ao invés de área de região poligonal. Observamos que, em um polígono só faz sentido medirmos o seu perímetro e não a sua área. No entanto, usaremos a expressão “área de um polígono” ao invés de “área de uma região poligonal”, para ficar de acordo com os livros didáticos do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio, por exemplo, Dante (2013).

Seja \hat{A} um ângulo qualquer, a notação $m(\hat{A})$ será utilizada para representar a medida, em graus, do ângulo \hat{A} .

2.10 Definição. Um **paralelogramo** é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos (Figura 5). O segmento com extremidades em 2 vértices não consecutivos de um polígono (não estão no mesmo lado), é chamado **diagonal** do polígono. Na Figura 5, \overline{AC} é diagonal do paralelogramo $ABCD$.

No caso particular, em que os ângulos do paralelogramo são retos, o mesmo é nomeado **retângulo**. Um retângulo com todos os lados congruentes é nomeado de **quadrado**.

Postulado 4. Se um quadrado tem lado de medida a , então sua área é a^2 .

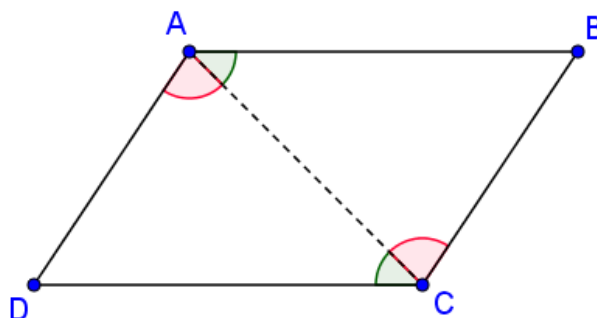


Figura 5: Paralelogramo $ABCD$, com diagonal \overline{AC} .

Observação 2: É válida a equivalência: Duas retas são paralelas se, e somente se, os ângulos alternos internos são congruentes.

A demonstração pode ser encontrada em Rezende (2008, pg. 58). Este resultado será utilizado na demonstração de alguns resultados que seguem.

2.11 Teorema. Em um paralelogramo os lados e ângulos opostos são congruentes.

Demonstração: Seja $ABCD$ um paralelogramo (Figura 5). Considere a diagonal \overline{AC} . Como \overline{AB} e \overline{DC} são paralelos, então $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ACD})$. Os segmentos \overline{AD} e \overline{BC} também são paralelos, então $m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{ACB})$. Além disso, \overline{AC} é comum aos triângulos ABC e CDA . Logo, estes triângulos são congruentes, pelo caso de congruência ângulo-lado-ângulo (A.L.A.). Portanto, $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D})$, $AB = CD$ e $BC = DA$. Também,

$$m(\widehat{A}) = m(\widehat{DAC}) + m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BCA}) + m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{C}).$$

2.12 Teorema. A área de um retângulo é o produto das medidas de dois de seus lados não paralelos.

Demonstração: Consideremos o retângulo com lados de medidas b e h (Figura 6), cuja área denotamos por A_3 .

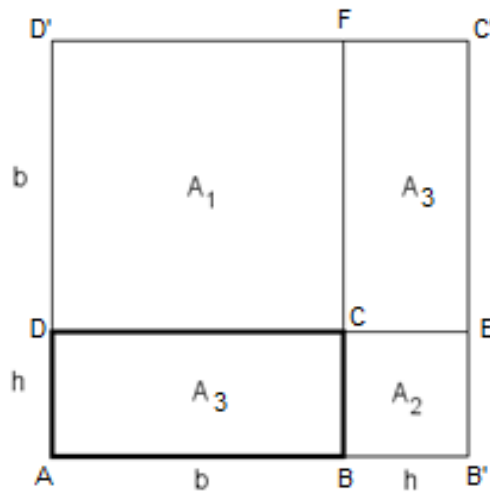


Figura 6: Quadrado de lado de medida $b + h$.

A partir dele construímos um quadrado $AB'C'D'$ com lados de medida $b + h$, o qual é formado pela união dos quadrados de áreas A_1 e A_2 , respectivamente, e retângulos de área A_3 (Figura 6).

De fato, $AB'C'D'$ é um quadrado. Considere $r = \overrightarrow{AB}$ e $s = \overrightarrow{AD}$. As retas r e s são perpendiculares, já que $m(\widehat{BAD}) = 90^\circ$, ângulo interno de um retângulo. Seja D' um ponto de s tal que $AD' = b + h$ e $D \in \overline{AD'}$, t a reta perpendicular à reta s por D' , B' um ponto de r tal que $\overline{AB'} = b + h$ e $B \in \overline{AB'}$ e u a reta perpendicular à reta r por B' . Seja $\{C'\} = t \cap u$.

Como $\overline{C'D'}$ e $\overline{AB'}$, por construção, são perpendiculares à reta s , então $\overline{C'D'}$ e $\overline{AB'}$ são paralelos. Analogamente, $\overline{AD'}$ e $\overline{B'C'}$ são paralelos. Ou seja, $AB'C'D'$ é um paralelogramo. Pelo Teorema 2.11, $AD' = B'C'$ e $AB' = C'D'$. Como, por construção, $AD' = b + h = AB'$, então todos os lados do paralelogramo $AB'C'D'$ têm a mesma medida. Além disso, por construção, $\widehat{AD'C'} = \widehat{D'C'B'} = \widehat{C'B'A} = \widehat{B'AD'} = 90^\circ$. Portanto, $AB'C'D'$ é um quadrado.

Seja E e F pontos definidos conforme a Figura 6. Por construção, \overline{CE} é paralelo à $\overline{BB'}$, \overline{BC} é paralelo à $\overline{B'E}$ e $BC = h = BB'$. Pelo Teorema 2.11, $BCEB'$ é um paralelogramo com todos os lados de mesma medida. Como $m(\widehat{CBB'}) = m(\widehat{BB'E}) = m(\widehat{B'EC}) = m(\widehat{ECB}) = 90^\circ$, então $BCEB'$ é um quadrado e $CE = h$. Da mesma forma, mostramos que $CDD'F$ é um

quadrado com lado de medida b . Assim, $CEC'F$ é um retângulo com lados de medidas b e h . Logo, $\text{área } CEC'F = \text{área } ABCD = A_3$.

Pelo Postulado 3,

$$\text{área } AB'C'D' = 2A_3 + A_1 + A_2.$$

Por outro lado, pelo Postulado 4, como A_1 e A_2 são regiões quadradas de lados b e h , respectivamente, então $\text{área } A_1 = b^2$ e $\text{área } A_2 = h^2$.

Logo,

$$\text{área } AB'C'D' = 2A_3 + b^2 + h^2. \quad (2.1)$$

Pelo Postulado 4, como $AB'C'D'$ é uma região quadrada de lado $b + h$, então

$$\text{área } AB'C'D' = (b + h)^2 = b^2 + 2bh + h^2. \quad (2.2)$$

De (2.1) e (2.2),

$$2A_3 + b^2 + h^2 = b^2 + 2bh + h^2.$$

Portanto,

$$A_3 = bh.$$

Postulado 5. Se dois triângulos são congruentes, então suas regiões triangulares têm a mesma área.

2.13 Definição. Seja ABC um triângulo e seja D um ponto da reta s que passa por B e C . O segmento \overline{AD} chama-se **altura** do triângulo relativamente ao lado \overline{BC} , se \overline{AD} for perpendicular a reta s .

2.14 Teorema. A área de um triângulo retângulo é a metade do produto de seus catetos.

Demonstração: Consideremos o triângulo QRP (Figura 7), retângulo em R e com catetos de medidas a e b . Denotemos sua área por A .

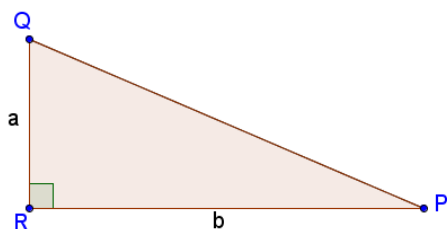
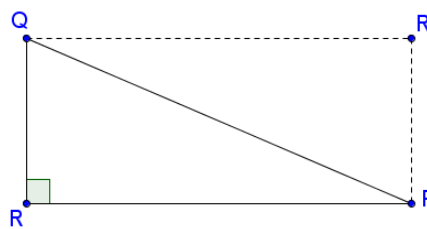


Figura 7: Triângulo Retângulo

Figura 8: Quadrilátero $QRPR'$.

Seja R' a intersecção da paralela à \overleftrightarrow{PR} que passa por Q e da paralela que à \overleftrightarrow{QR} que passa por P (Figura 8). O quadrilátero $QRPR'$ assim formado é um retângulo. De fato, se \overline{QR} é perpendicular a \overline{RP} e $\overline{R'P}$ é paralelo a \overline{QR} , então $m(\widehat{R'PR}) = 90^\circ$. Analogamente, $m(\widehat{RQR'}) = 90^\circ$ e $m(\widehat{P'R'Q}) = 90^\circ$. Assim, $QRPR'$ é quadrilátero, com

$$m(\widehat{QRP}) = m(\widehat{R'PR}) = m(\widehat{RQR'}) = m(\widehat{P'R'Q}) = 90^\circ.$$

Pelo caso de congruência de triângulos lado-lado-lado (L.L.L.), os triângulos QRP e $QR'P$ são congruentes. Pelo Postulado 5, os triângulos QRP e $QR'P$ têm a mesma área A .

Logo,

$$\text{área } QRPR' = 2A. \quad (2.3)$$

Por outro lado, pelo Teorema 2.12,

$$\text{área } QRPR' = a \cdot b. \quad (2.4)$$

De (2.3) e (2.4),

$$2A = ab.$$

Portanto,

$$A = \frac{ab}{2}.$$

A partir deste teorema, podemos obter a fórmula da área de qualquer triângulo. Para isto, utilizaremos o Lema 2.15, a seguir.

2.15 Lema. Num triângulo, o produto de cada um de seus lados pela altura relativa a esse lado é constante.

Demonstração: Considere um triângulo ABC e as alturas $\overline{AH_a}$ e $\overline{BH_b}$ relativas aos lados \overline{BC} e \overline{AC} , respectivamente. Temos dois casos a considerar.

1º Caso: Suponhamos que o ortocentro do triângulo, intersecção de suas alturas, seja um ponto interior a ele (Figura 9).

Os triângulos AH_aC e BH_bC , retângulos em H_a e H_b , respectivamente, são semelhantes, pelo caso ângulo-ângulo (A.A.), pois \hat{C} é ângulo comum e $m(\widehat{BH_bC}) = 90^\circ = m(\widehat{AH_aC})$. Logo, vale a relação,

$$\frac{AH_a}{BH_b} = \frac{AC}{BC}$$

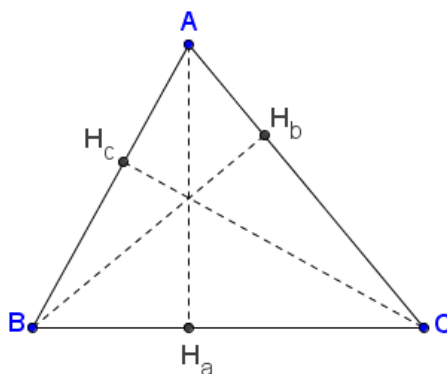


Figura 9: Triângulo com ortocentro interior.

Assim,

$$BC \cdot AH_a = AC \cdot BH_b.$$

Analogamente, demonstramos que $AB \cdot CH_c = BC \cdot AH_a$.

Portanto, o produto de cada lado de um triângulo pela altura relativa a esse lado é constante e igual a $BC \cdot AH_a$.

2º Caso: Suponhamos agora que o ortocentro do triângulo seja um ponto exterior a ele (Figura 10).

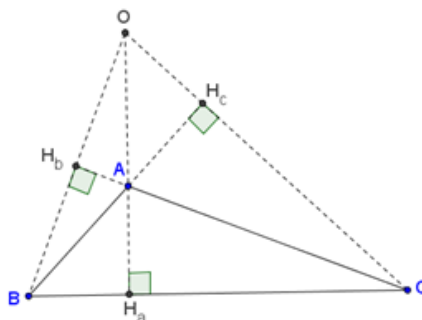


Figura 10: Triângulo com ortocentro exterior.

Os triângulos AH_aC e BH_bC , retângulos em H_a e H_b , respectivamente, são semelhantes, pelo caso A.A., pois \hat{C} é comum e $m(\widehat{AH_aC}) = 90^\circ = m(\widehat{BH_bC})$. Logo, vale a relação,

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AH_a}{BH_b}.$$

Assim,

$$AC \cdot BH_b = BC \cdot AH_a.$$

Analogamente, demonstramos que $AB \cdot CH_c = AC \cdot BH_b$.

Portanto, o produto de cada lado de um triângulo pela altura relativa a esse lado é constante e igual a $BC \cdot AH_a$.

Desta forma, demonstramos o lema.

2.16 Teorema. A área de um triângulo é a metade do produto da medida de qualquer de seus lados pela medida da altura correspondente.

Demonstração: Consideremos o triângulo ABC e a altura AH_a , relativa ao lado BC .

Chamemos de b e de h as medidas dos lados \overline{BC} e da altura $\overline{AH_a}$, respectivamente.

Utilizando o Lema 2.15, basta mostrar que $\text{área } ABC = \frac{1}{2}bh$.

Se H_a coincidir com B ou com C , não há o que demonstrar, pois nesse caso o triângulo ABC é retângulo e pelo Teorema 2.14,

$$\text{área } ABC = \frac{1}{2}bh.$$

Temos dois casos a considerar.

1º Caso: Vamos supor inicialmente que H_a está entre B e C . Assim, $\overline{AH_a}$ divide o triângulo ABC em dois triângulos AH_aB e AH_aC , ambos retângulos em H_a e com catetos de medidas b_1 e h , e b_2 e h , respectivamente, sendo $b_1 + b_2 = b$ (Figura 11).

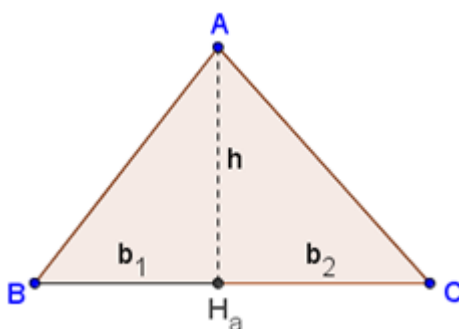


Figura 11: Triângulo ABC com H_a entre B e C .

Como os triângulos AH_aB e AH_aC são duas regiões triangulares tais que $ABC = AH_aB \cup AH_aC$ e $AH_aB \cap AH_aC = \overline{AH_a}$, com $m(\widehat{AH_aB}) = 90^\circ = m(\widehat{AH_aC})$. Do Postulado 3 e Teorema 2.14,

$$\text{área } ABC = \text{área } AH_aB + \text{área } AH_aC = \frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}b_2h = \frac{1}{2}bh.$$

2º Caso: Vamos supor agora que C está entre B e H_a (Figura 12).

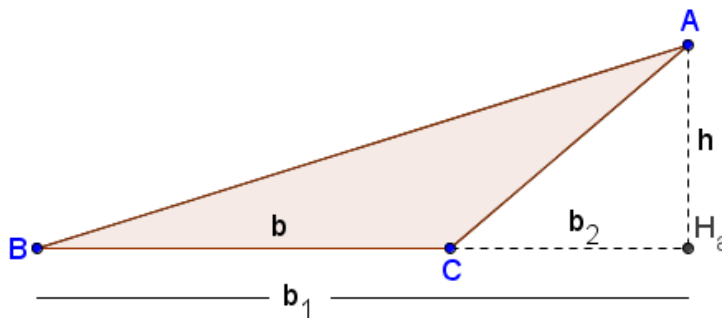


Figura 12: Triângulo ABC com C entre B e H_a .

Consideremos $b_1 = b + b_2$.

Pelo Postulado 3,

$$\text{área } ABH_a = \text{área } ABC + \text{área } ACH_a.$$

Pelo Teorema 2.14,

$$\text{área } ABH_a = \frac{1}{2}b_1h \text{ e } \text{área } ACH_a = \frac{1}{2}b_2h.$$

Logo,

$$\text{área } ABC = \text{área } ABH_a - \text{área } ACH_a.$$

Assim,

$$\text{área } ABC = \frac{1}{2}b_1h - \frac{1}{2}b_2h = \frac{1}{2}(b_1 - b_2)h.$$

Como $b = b_1 - b_2$,

$$\text{área } ABC = \frac{1}{2}bh$$

Para o caso em que B está entre H_a e C , a demonstração é análoga.

2.17 Corolário. Dado um triângulo ABC , qualquer outro triângulo tendo lado \overline{BC} e o terceiro vértice pertencente à reta r , paralela a \overline{BC} passando por A , terá área igual à área de ABC .

Demonstração: Seja s a reta que contém \overline{BC} , r a reta paralela à reta s passando pelo ponto A e h a medida do lado \overline{BC} (Figura 13).

Como a reta r é paralela à reta s , então a distância entre as retas r e s é constante e nomeada de h . Assim, a medida da altura do triângulo ABC em relação ao lado \overline{BC} é h e $\text{área } ABC = \frac{1}{2}BC \cdot h$.

Dado $X \in r, X \neq A$, mostremos que $\text{área } BXC = \text{área } ABC$.

Seja X é um ponto de $r, X \neq A$ (Figura 13).

Como a distância entre as retas r e s é constante e $X \in r$, então a distância entre X e a reta s também é igual a h , que é a medida da altura do triângulo BXC em relação ao lado \overline{BC} .

Logo, $\text{área } BXC = \frac{1}{2}BC \cdot h = \frac{1}{2}bh = \text{área } ABC$.

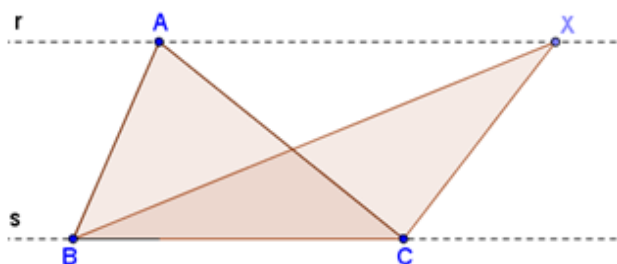


Figura 13: Triângulos ABC e XBC com mesma base \overline{BC} .

2.18 Definição. Duas figuras planas que possuem a mesma área são chamadas **figuras equivalentes**. Dizemos que dois polígonos são **equivalentes** quando suas regiões poligonais correspondentes possuem a mesma área.

2.19 Definição. Dado um paralelogramo $ABCD$ (Figura 14), seja P um ponto de \overline{AB} . Considere a perpendicular r a \overline{AB} por $P \in \overline{AB}$. Seja $\{Q\} = \overline{CD} \cap r$. O segmento \overline{PQ} é chamado **altura** do paralelogramo, cuja medida será h .

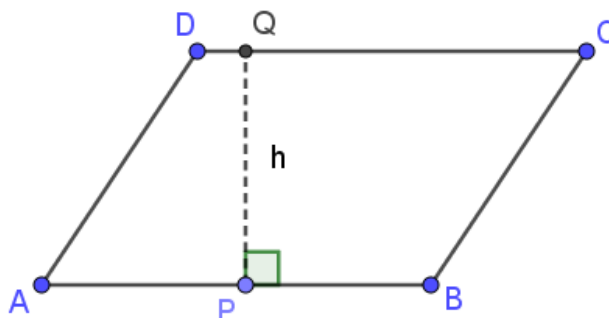


Figura 14: Paralelogramo $ABCD$ e altura de medida h .

2.20 Teorema. A área de um paralelogramo é o produto de qualquer um de seus lados pela altura correspondente.

Demonstração: Considere o paralelogramo $PQRS$ (Figura 15), escolhamos $b = QR$ e $h = PH$ a altura correspondente ao lado escolhido.

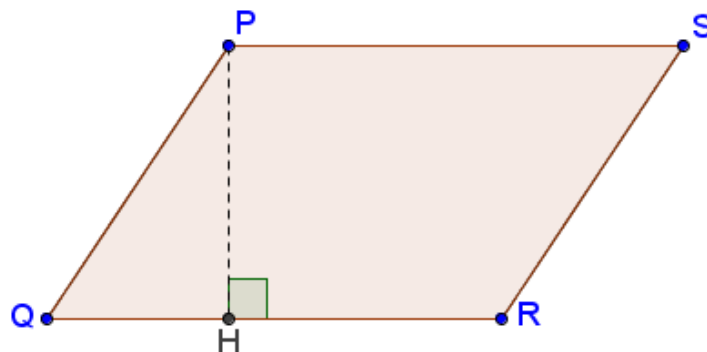


Figura 15: Paralelogramo $PQRS$.

Observe que, utilizando a diagonal \overline{PR} , podemos dividir este paralelogramo em dois triângulos PQR e RSP , que são congruentes pelo caso L.L.L., pois $\overline{PQ} \equiv \overline{RS}$, $\overline{PS} \equiv \overline{RQ}$ e \overline{PR} é comum. Logo,

$$\text{área } RSP = \text{área } PRQ = \frac{1}{2}bh.$$

Pelo Postulado 3,

$$\text{área } PQRS = \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}bh = bh.$$

A demonstração será análoga se for considerado qualquer outro lado do paralelogramo com a altura correspondente a ele.

Desta forma,

$$\text{área } PQRS = bh.$$

2.21 Definição. Um **trapézio** é um quadrilátero em que apenas dois lados são paralelos. Os lados paralelos são chamados **bases**, maior e menor, do trapézio e os outros dois lados são chamados **laterais**.

2.22 Definição. Dado um trapézio $ABCD$ (Figura 16), onde \overline{AB} e \overline{CD} são as bases do trapézio, seja Q um ponto de \overline{CD} . Considere a perpendicular r a \overline{AB} por Q . Seja $\{P\} = \overline{AB} \cap r$. O segmento \overline{PQ} é chamado **altura** do trapézio, cuja medida será h .

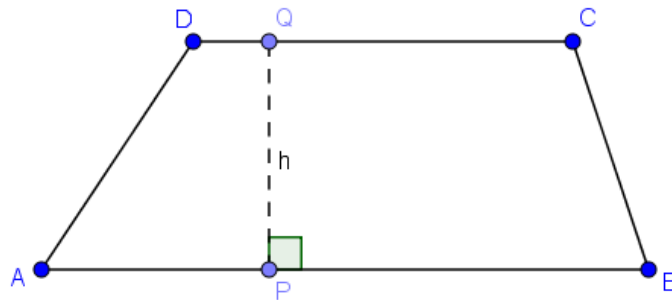


Figura 16: Trapézio $ABCD$ e sua altura h .

Observação 3: A altura do trapézio independe do ponto Q escolhido em \overline{CD} . A demonstração deste resultado baseia-se no Teorema 2.11.

2.23 Teorema. A área de um trapézio é a metade do produto de sua altura pela soma de suas bases.

Demonstração: Consideremos o trapézio $ABCD$ (Figura 17).

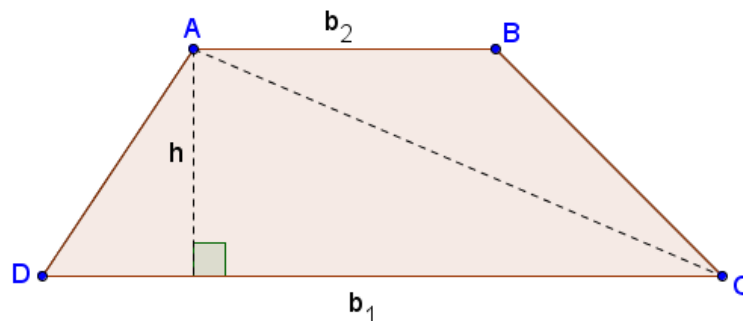


Figura 17: Trapézio $ABCD$.

Sejam $b_1 = DC$ e $b_2 = AB$ as medidas das bases do trapézio e h a medida de sua altura.

Consideremos os triângulos ADC e ACB , como na Figura 17.

Usando o Postulado 3 e o Teorema 2.16,

$$\text{área } ABCD = \text{área } ADC + \text{área } ACB = \frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}b_2h = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h.$$

Logo,

$$\text{área } ABCD = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h.$$

2.24 Definição. Um **losango** é um paralelogramo cujos lados têm a mesma medida.

2.25 Proposição. As diagonais de um losango são perpendiculares e se bisseccionam.

Demonstração: Seja $ABCD$ um losango, \overline{AC} e \overline{BD} suas diagonais e $\{E\} = \overline{AC} \cap \overline{BD}$ (Figura 18). Os triângulos ABC e ADC são congruentes pelo caso L.L.L., pois, pela Definição 2.24, $AB = BC = CD = AD$ e AC é comum aos dois triângulos.

Logo,

$$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{DAC}).$$

Os triângulos BAE e DAE são congruentes pelo caso lado-ângulo-lado (L.A.L.), pois $AB = AD$, $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{DAC})$ e \overline{AE} é comum aos dois triângulos. Assim, $m(\widehat{AEB}) = m(\widehat{AED})$ e $BE = DE$. Como $m(\widehat{AEB}) + m(\widehat{AED}) = 180^\circ$, então

$$m(\widehat{AEB}) = 90^\circ = m(\widehat{AED}).$$

Analogamente, prova-se que $AE = CE$.

Portanto, as diagonais do losango $ABCD$ são perpendiculares e se bisseccionam.

2.26 Teorema. A área de um losango é a metade do produto de suas diagonais.

Demonstração: Considere o losango $ABCD$ (Figura 18). Sejam $d_1 = BD$ e $d_2 = AC$ as medidas das diagonais, o ponto E tal que $\{E\} = \overline{BD} \cap \overline{AC}$ e $h = AE$ a metade da medida da diagonal \overline{AC} , pela Proposição 2.25.

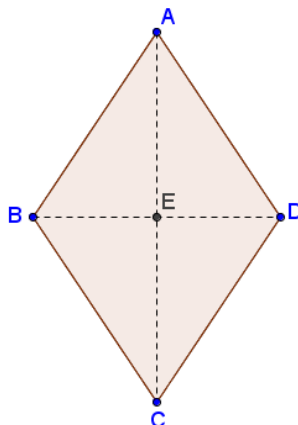


Figura 18: Losango $ABCD$.

Observe que, utilizando a diagonal BD , podemos dividir este losango em dois triângulos BDA e BDC , que são congruentes pelo caso L.L.L., pois $AB = BC = CD = DA$, pela Definição 2.24, e \overline{BD} é comum.

Logo, pelo Postulado 5,

$$\text{área } BDA = \text{área } BDC.$$

A altura \overline{AE} do triângulo BDA é,

$$h = AE = \frac{AC}{2} = \frac{d_2}{2}.$$

Daí,

$$\text{área } BDC = \text{área } BDA = \frac{1}{2}d_1h.$$

Pelo Postulado 3,

$$\text{área } ABCD = \frac{1}{2}d_1h + \frac{1}{2}d_1h = d_1h.$$

Como $h = \frac{d_2}{2}$,

$$\text{área } ABCD = \frac{d_1d_2}{2}.$$

COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

Consideremos um polígono $P_n = A_1 \dots A_n$ inscrito em uma circunferência, e denotemos por,

$$p_n = \left(\sum_{i=2}^n A_{i-1}A_i \right) + A_nA_1$$

o seu perímetro.

Vamos definir o comprimento da circunferência em termos de p_n .

2.27 Definição. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se **limitado superiormente** quando existe algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Neste caso, diz-se que b é uma **cota superior** de X . Analogamente, diz-se que o conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é **limitado inferiormente** quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$. O número a chama-se uma **cota inferior** de X . Se X é limitado superior e inferiormente, diz-se que X é um conjunto **limitado**. Ou seja, X está contido em algum intervalo limitado $[a, b]$ ou, equivalentemente, que existe $k > 0$ tal que $|x| \leq k$, para todo $x \in X$.

2.28 Definição. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente e não vazio. Um número $b \in \mathbb{R}$ chama-se **supremo** do conjunto X quando é a menor das cotas superiores de X . Mais explicitamente, b é o supremo de X quando cumpre as duas condições:

1. para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$.
2. se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$, então $b \leq c$.

Escrevemos $b = \sup X$ para indicar que b é o supremo do conjunto X .

Axioma do Completamento. Todo conjunto $X \subset \mathbb{R}$, não vazio e limitado superiormente possui supremo $b = \sup X$, tal que $b \in \mathbb{R}$.

Denotamos por $\mathcal{C}(O, r)$, a circunferência de centro no ponto O e raio de medida r .

2.29 Teorema. Se P é o conjunto de todos os números p_n que são os perímetros de todos os polígonos $A_1 \dots A_n$ inscritos em uma circunferência,

$n \geq 3$, ou seja,

$$P = \left\{ p_n; p_n = \sum_{i=2}^n A_{i-1}A_i + A_nA_1 \right\}, n \geq 3,$$

então P admite supremo.

Demonstração: Consideremos o polígono $A_1 \dots A_n$ inscrito na circunferência $\mathcal{C}(0, r)$, e seja Q um quadrado contendo essa circunferência em seu interior (Figura 19).

Vamos considerar, em Q , os pontos Q_1, \dots, Q_n tais que $Q_i, i = 1, \dots, n$, é o ponto em que $\overrightarrow{OA_i}, i = 1, \dots, n$, intersecciona Q .

Afirmamos que o perímetro do quadrado é um limitante superior para P .

De fato, basta mostrarmos que, para cada i , vale a relação $A_{i-1}A_i < Q_{i-1}Q_i$.

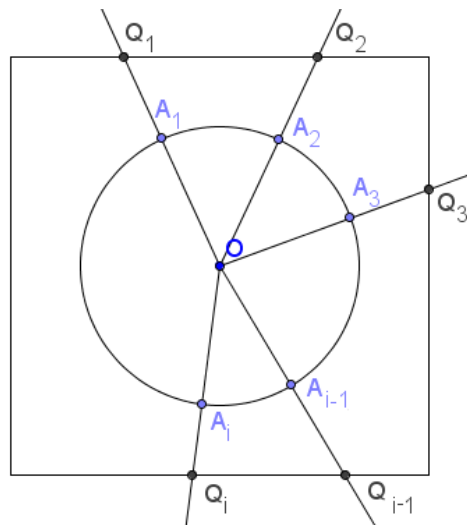


Figura 19: Quadrado Q e a circunferência $\mathcal{C}(0, r)$.

Consideremos então o triângulo $OA_{i-1}A_i$, isósceles, com base $\overline{A_{i-1}A_i}$, e os correspondentes pontos Q_{i-1} e Q_i em Q , com $OQ_{i-1} > OQ_i$ (o caso em que $OQ_i > OQ_{i-1}$ é análogo e o caso em que $OQ_{i-1} = OQ_i$ é trivial), como mostra a Figura 20.

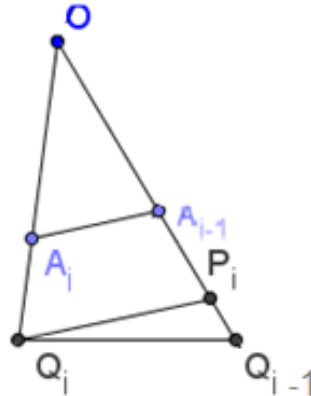


Figura 20: Triângulo $OA_{i-1}A_i$.

Tracemos por Q_i o segmento $\overline{P_i Q_i}$ paralelo a $\overline{A_{i-1} A_i}$, determinando assim outro triângulo isósceles $OP_i Q_i$, semelhante ao triângulo $OA_{i-1} A_i$ (Figura 20).

Como $OA_i < OQ_i$, pela semelhança dos triângulos $OP_i Q_i$ e $OA_{i-1} A_i$,

$$A_{i-1} A_i < P_i Q_i. \quad (2.5)$$

Ainda, como $Q_i \widehat{P_i} Q_{i-1}$ é um ângulo obtuso do triângulo $Q_i P_i Q_{i-1}$, então $Q_i \widehat{Q_{i-1}} P_i$ é agudo, e conseqüentemente, $Q_i \widehat{Q_{i-1}} P_i < Q_i \widehat{P_i} Q_{i-1}$. Logo,

$$P_i Q_i < Q_{i-1} Q_i. \quad (2.6)$$

De (2.5) e (2.6),

$$A_{i-1} A_i < Q_{i-1} Q_i, i = 1, \dots, n.$$

Assim,

$$p_n < \sum_{i=2}^n Q_{i-1} Q_i + Q_n Q_1,$$

para todo $n \geq 3$.

Logo o perímetro do quadrado é um limitante superior para P .

Portanto, pelo Axioma do Completamento dos números reais, P admite supremo. O supremo de P será utilizado para definir o comprimento da circunferência.

2.30 Definição. Seja P conforme definido no Teorema 2.29. O **comprimento c da circunferência** é definido como $c = \sup P$.

Os Teoremas 2.33 e 2.34 fornecem mais informações sobre c . Porém, para demonstrá-los, demonstramos inicialmente o Lema 2.32.

2.31 Definição. Sejam Q um subconjunto do conjunto dos números reais e k uma constante. Denotamos por kQ o conjunto dos números na forma kq com q pertencente a Q .

2.32 Lema. Seja Q um subconjunto de \mathbb{R} e k uma constante positiva. Se Q admite supremo, então $\sup(kQ) = k \cdot \sup Q$.

Demonstração: Seja d o supremo do conjunto Q . Por definição de supremo, $x \leq d$, para todo $x \in Q$. Como $k > 0$, então $kx \leq kd$, para todo $x \in Q$. Por definição, concluímos que kd é uma cota superior do conjunto kQ .

Vamos supor, por absurdo, que existe b , cota superior de kQ , tal que $b < kd$. Como b é cota superior de kQ , então $kx \leq b$, para todo $x \in Q$. Como $k > 0$, então $x \leq \frac{b}{k}$, para todo $x \in Q$. Logo, $\frac{b}{k}$ é uma cota superior de Q .

Como d é o supremo de Q , então $d \leq \frac{b}{k}$. Daí, $b \geq kd$, o que é um absurdo.

Portanto, kd é o supremo de kQ .

2.33 Teorema. Considere duas circunferências $\mathcal{C} = \mathcal{C}(0, r)$ e $\mathcal{C}' = \mathcal{C}(0, r')$ de comprimentos c e c' , respectivamente. Então $\frac{c}{2r} = \frac{c'}{2r'}$.

Demonstração: Seja um polígono $P_n, A_1A_2 \dots A_n$, com n lados, inscrito em \mathcal{C} . Considere $\overline{A_1A_2}$ um de seus lados ao qual corresponderá o lado $\overline{A'_1A'_2}$ do polígono $P'_n, A'_1A'_2 \dots A'_n$, inscrito em \mathcal{C}' , tal que P'_n é obtido pelo prolongamento dos raios que contêm os vértices de P_n (Figura 21).

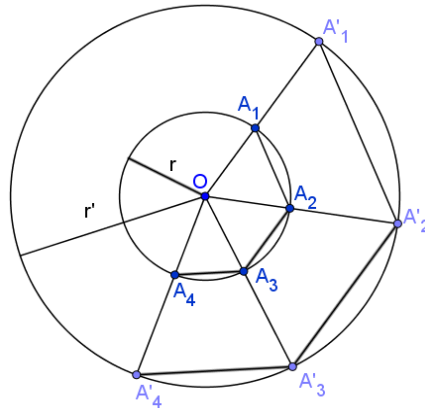


Figura 21: $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{A'_1A'_2}$.

Como r e r' são as medidas dos raios das circunferências \mathcal{C} e \mathcal{C}' , respectivamente, então $0 < r < r'$.

Como $OA_1 = r = OA_2$ e $OA'_1 = r' = OA'_2$, os triângulos OA_1A_2 e $OA'_1A'_2$ são isósceles de bases $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{A'_1A'_2}$. Por construção, o ângulo \hat{O} é comum. Logo, $m(\widehat{OA_1A_2}) = m(\widehat{OA_2A_1}) = m(\widehat{OA'_1A'_2}) = m(\widehat{OA'_2A'_1})$. Assim, os triângulos OA_1A_2 e $OA'_1A'_2$ são semelhantes pelo caso de semelhança ângulo-ângulo (A.A.).

Logo,

$$\frac{A'_1A'_2}{A_1A_2} = \frac{OA'_1}{OA_1} = \frac{r'}{r}.$$

Assim, quaisquer dois lados destes polígonos obtidos de maneira análoga à anterior, serão semelhantes.

Se p_n e p'_n denotam, respectivamente, os perímetros dos polígonos P_n e P'_n , então,

$$\begin{aligned} \frac{p'_n}{p_n} &= \frac{\sum_{i=2}^n A'_{i-1}A'_i + A'_nA'_1}{\sum_{i=2}^n A_{i-1}A_i + A_nA_1} = \frac{\sum_{i=2}^n \frac{r'}{r} A_{i-1}A_i + \frac{r'}{r} A_nA_1}{\sum_{i=2}^n A_{i-1}A_i + A_nA_1} = \\ &= \frac{r'}{r} \cdot \frac{\sum_{i=2}^n A_{i-1}A_i + A_nA_1}{\sum_{i=2}^n A_{i-1}A_i + A_nA_1} = \frac{r'}{r}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$p'_n = \frac{r'}{r} p_n. \quad (2.7)$$

Seja P definido conforme o Teorema 2.29 e P' definido de forma análoga a P . Como (2.7) vale para quaisquer p_n e p'_n , então $P' = \frac{r'}{r}P$.

Sejam $c = \sup P$ e $c' = \sup P'$, como $P' = \frac{r'}{r}P$ e como $\frac{r'}{r} > 0$, pelo Lema 2.32,

$$\sup P' = \sup \frac{r'}{r}P = \frac{r'}{r} \sup P.$$

Ou seja,

$$c' = \frac{r'}{r}c.$$

Daí,

$$\frac{c'}{r'} = \frac{c}{r}.$$

Portanto,

$$\frac{c'}{2r'} = \frac{c}{2r}.$$

2.34 Teorema. O comprimento c de uma circunferência de raio r é dado por $c = 2\pi r$.

Demonstração: Pelo Teorema 2.33, a razão $\frac{c}{2r}$ é uma constante, a qual é representada por π . De $\frac{c}{2r} = \pi$,

$$c = 2\pi r,$$

para o comprimento de qualquer circunferência de raio r .

O número π é um número irracional, conforme lezzi (1977), e as aproximações por números racionais mais usadas são 3,14; $3\frac{1}{7}$; 3,1416; 3,141592.

ÁREA DO CÍRCULO.

Os dois teoremas que seguem dão, respectivamente, uma aproximação por falta e uma aproximação por excesso para a área de um

círculo. Para demonstrá-los faremos o uso do Lema 2.36 a seguir.

2.35 Definição. A **malha** de um polígono, representada por Δ , é o comprimento do maior lado do polígono.

2.36 Lema. Seja \mathcal{C} uma circunferência de comprimento $c = \text{sup } P$, onde P é o conjunto dos perímetros p_n de todos os polígonos P_n inscritos em \mathcal{C} . Para todo número positivo $\varepsilon > 0$ existe um número δ tal que, se a malha de P_n é menor que δ , então $p_n > c - \varepsilon$. Neste caso, diz-se que p_n se aproxima de c quando a malha se aproxima de zero.

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$. Seja $Q_s = B_1 \dots B_s$ um polígono de perímetro p_s inscrito na circunferência \mathcal{C} , tal que,

$$p_s > c - \frac{\varepsilon}{2},$$

cujas existência se verifica pela definição de P .

Seja $P_n = A_1 \dots A_n$ um outro polígono de perímetro p_n inscrito em \mathcal{C} , cuja malha Δ é tal que $\Delta < \frac{\varepsilon}{2s}$.

Consideremos o polígono $S_m = C_1 \dots C_m$ de perímetro s_m formado pela união dos vértices de P_n com os de Q_s .

Por exemplo, se $P_3 = A_1 A_2 A_3$ e $Q_3 = B_1 B_2 B_3$, então S_m é tal que $m \leq 6$ e, no máximo, $S_6 = C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6$ (Figura 22).

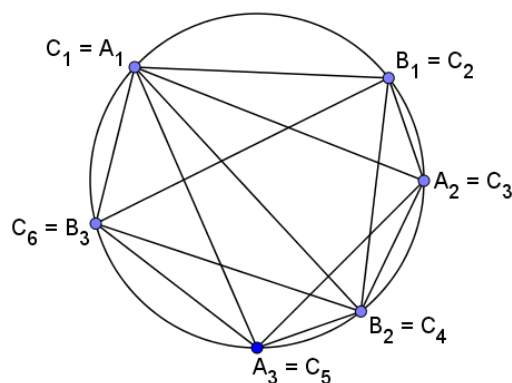


Figura 22: Polígonos P_3 e Q_3 inscritos.

No triângulo $C_1C_2C_6$, pela desigualdade triangular,

$$C_1C_6 + C_1C_2 > C_2C_6,$$

ou seja,

$$C_1C_6 + C_1C_2 > B_1B_3.$$

O mesmo ocorre nos triângulos $C_2C_3C_4$ e $C_4C_5C_6$, nos quais,

$$C_2C_3 + C_3C_4 > B_1B_2$$

e

$$C_4C_5 + C_5C_6 > B_2B_3,$$

respectivamente.

Somando, membro a membro, estas desigualdades,

$$C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_4 + C_4C_5 + C_5C_6 + C_1C_6 > B_1B_2 + B_2B_3 + B_1B_3.$$

Assim,

$$s_6 \geq p_3.$$

Generalizando, e aplicando a desigualdade triangular repetidas vezes, obtém-se $s_m \geq p_s$, ou seja,

$$s_m > c - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.5)$$

Isto quer dizer que, à medida que acrescentamos vértices ao polígono inscrito, o perímetro aumenta.

Na verdade, dados três vértices P, Q e R de S_m , sendo P e R vértices de P_n e Q um vértice de Q_s , como na Figura 23, temos $PR < PQ + QR$, e o aumento é $PQ + QR - PR$, o qual aparece no máximo s vezes, já que há no máximo s possibilidades para Q .

Ainda ocorre que, como \overline{PR} é o maior lado do triângulo PQR , então,

$$\begin{cases} PQ < PR \\ QR < PR \end{cases}$$

Logo,

$$PQ + QR < 2 \cdot PR.$$

Assim,

$$PQ + QR - PR \leq PR. \quad (2.6)$$

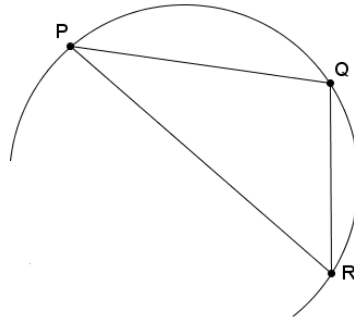


Figura 23: Triângulo PQR , formado por três vértices consecutivos do polígono S_m .

Considerando que a desigualdade em (2.6) vale para todos os possíveis triângulos formados por vértices consecutivos do polígono S_m , e, sendo Δ a malha de P_n , somando membro a membro todas as desigualdades do tipo (2.6),

$$s_m - p_n \leq s \cdot \Delta. \quad (2.7)$$

Ou seja,

$$s_m - p_n \leq s \cdot \frac{\varepsilon}{2s} = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.8)$$

De (2.5) e (2.8),

$$c - \frac{\varepsilon}{2} - p_n < s_m - p_n \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim,

$$c - p_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto,

$$p_n > c - \varepsilon,$$

o que prova o Lema.

Para exemplificar a desigualdade (2.7), considere $S_5 = C_1C_2C_3C_4C_5$ (Figura 24).

Observe que,

$$s_5 \leq 5 \cdot \Delta,$$

pois $\Delta \geq C_iC_{i+1}$, para todo $i \in \{1,2,3,4\}$ e $\Delta \geq C_5C_1$.

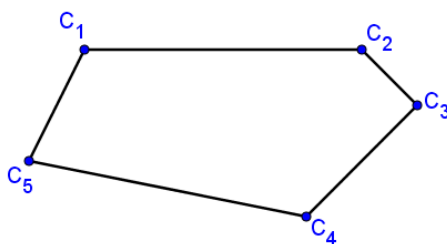


Figura 24: Pentágono $C_1C_2C_3C_4C_5$.

2.37 Teorema. Seja \mathcal{C} um círculo de raio r e R_n uma região poligonal regular $A_1 \dots A_n$ inscrita na circunferência fronteira de \mathcal{C} , $n \geq 3$. Existe uma sequência de regiões poligonais regulares R_3, R_4, \dots, R_n , todas contidas em \mathcal{C} , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{área } R_n = \pi r^2.$$

Demonstração: Consideremos o círculo \mathcal{C} de centro O e raio r . Seja b_n a medida de $A_{n-1}A_n$, um de seus lados e a_n a altura do triângulo $A_{n-1}OA_n$, como representado na Figura 25.

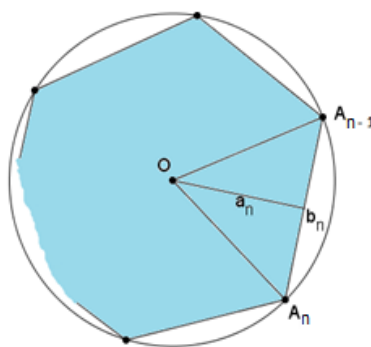


Figura 25: Região poligonal R_n inscrita.

A área da região poligonal R_n é dada por,

$$\text{área } R_n = n \cdot \frac{1}{2} b_n a_n.$$

Vejamos o que acontece com a área R_n quando $n \rightarrow \infty$.

Como $n b_n$ é o perímetro da linha poligonal A_1, \dots, A_n , temos

$$nb_n \leq 2\pi r; n \geq 3.$$

Assim,

$$b_n \leq \frac{2\pi r}{n}.$$

Logo, a malha de R_n tende a zero quando n tende a infinito e, pelo Lema 2.26,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nb_n = 2\pi r.$$

Obtém-se na Figura 25, que pela desigualdade triangular,

$$r < a_n + \frac{b_n}{2}.$$

Desta forma,

$$r - \frac{b_n}{2} < a_n < r.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(r - \frac{b_n}{2} \right) = r.$$

Como r é constante,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(r - \frac{b_n}{2} \right) = r \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} r = r.$$

Pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r.$$

Com isso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{área } R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} a_n n b_n = \frac{1}{2} r 2\pi r.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{área } R_n = \pi r^2.$$

Com este resultado, demonstramos que a aproximação por falta para a área de um círculo é πr^2 .

2.38 Teorema. Seja \mathcal{C} um círculo de raio r e seja ε um número real positivo qualquer. Então existe uma região poligonal S' contendo \mathcal{C} , tal que

$$\text{área } S' < \pi r^2 + \varepsilon.$$

Demonstração: Consideremos o círculo \mathcal{C} de centro O e raio r .

Seja \mathcal{C}' outro círculo de centro O , mas de raio $r' > r$. Sejam c e c' os comprimentos das circunferências de \mathcal{C} e \mathcal{C}' , respectivamente.

Seja $S' = A'_1A'_2 \dots A'_n$ um polígono regular inscrito na circunferência \mathcal{C}' , e $S = A_1A_2 \dots A_n$ o correspondente polígono regular inscrito na circunferência \mathcal{C} (Figura 26).

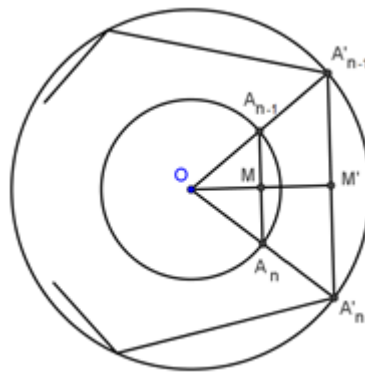


Figura 26: Polígonos S e S' inscritos nos círculos \mathcal{C} e \mathcal{C}' , respectivamente.

Sejam b'_n a medida do n -ésimo lado de S' e a'_n o apótema correspondente, b_n a medida do n -ésimo lado de S e a_n o apótema correspondente. Desta forma,

$$\text{área } S' = n \frac{1}{2} a'_n b'_n.$$

Pelo Teorema 2.33,

$$\frac{c}{r} = \frac{c'}{r'}.$$

Logo,

$$c' = \frac{r'}{r} c,$$

e

$$n \cdot b'_n < \frac{r'}{r} c, \quad (2.9)$$

uma vez que $n \cdot b'_n$ é o perímetro de S' .

Como, \overline{OM} e $\overline{OM'}$ são alturas dos triângulos $A_{n-1}OA_n$ e $A'_{n-1}OA'_n$,

respectivamente,

$$m(\widehat{OMA}_{n-1}) = 90^\circ = m(\widehat{OM'A'_{n-1}}).$$

Além disso,

$$m(\widehat{MA}_{n-1}) = m(\widehat{M'A'_{n-1}}).$$

Pelo caso ângulo-ângulo (A.A.), o triângulo OMA_{n-1} é semelhante ao triângulo $OM'A'_{n-1}$.

Assim,

$$\frac{a'_n}{a_n} = \frac{OA'_{n-1}}{OA_{n-1}} = \frac{r'}{r}.$$

e,

$$a'_n = \frac{r'}{r} a_n.$$

De (2.9) e $a_n < r$,

$$\text{área } S' = \frac{1}{2} \cdot (a'_n) \cdot (n \cdot b'_n) < \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r'}{r} \cdot a_n\right) \cdot \left(\frac{r'}{r} \cdot c\right) < \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r'}{r} \cdot r\right) \cdot \left(\frac{r'}{r} \cdot c\right)$$

Assim,

$$\text{área } S' < \frac{1}{2} \frac{(r')^2}{r} c.$$

Isto vale para todo n e para todo $r' > r$.

Escolhemos $r' > r$, tal que

$$r' < \sqrt{r^2 + 2\varepsilon \frac{r}{c}}.$$

Com esse C' de raio r' escolhido,

$$\text{área } S' < \frac{1}{2r} \left(r^2 + 2\varepsilon \frac{r}{c}\right) \cdot c = \frac{1}{2} rc + \varepsilon. \quad (2.10)$$

Substituindo $c = 2\pi r$ em (2.10),

$$\text{área } S' < \frac{1}{2} r \cdot 2\pi r + \varepsilon = \pi r^2 + \varepsilon.$$

Com este resultado, demonstramos que a aproximação por excesso para a área de um círculo também é πr^2 .

2.39 Teorema. A área de um círculo C de raio r é dada por $\text{área } C = \pi r^2$.

Demonstração: Seja o círculo \mathcal{C} de raio r . Considerando R_1, R_2, \dots , uma seqüência de regiões poligonais regulares como no Teorema 2.37,

$$\text{área } R_n \leq \text{área } \mathcal{C},$$

para todo n .

Assim,

$$\pi r^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{área } R_n \leq \text{área } \mathcal{C}.$$

Afirmamos que não podemos ter $\pi r^2 < \text{área } \mathcal{C}$.

De fato, suponhamos que isso ocorra.

Seja $\varepsilon = \text{área } \mathcal{C} - \pi r^2$ e S uma região poligonal como no Teorema 2.38.

Logo,

$$\text{área } \mathcal{C} \leq \text{área } S < \pi r^2 + \varepsilon = \text{área } \mathcal{C}.$$

Assim,

$$\text{área } \mathcal{C} < \text{área } \mathcal{C},$$

o que não pode ocorrer.

Portanto,

$$\text{área } \mathcal{C} = \pi r^2.$$

2.40 Corolário. A área de um setor circular \mathcal{L} de raio r e arco de fronteira com medida θ , em graus, é dada por $\text{área } \mathcal{L} = \frac{\pi r^2 \theta}{360}$.

Demonstração: Pelo Teorema 2.39, a área do círculo \mathcal{C} de raio r é dada por πr^2 . Além disso, 360 graus é a medida do ângulo central do círculo \mathcal{C} .

Daí,

$$\begin{array}{ccc} \pi r^2 & \longrightarrow & 360^\circ \\ \text{área } \mathcal{L} & \longrightarrow & \theta \end{array}$$

Ou seja,

$$\frac{\text{área } \mathcal{L}}{\theta} = \frac{\pi r^2}{360}.$$

Portanto,

$$\text{área } \mathcal{L} = \frac{\pi r^2 \theta}{360}.$$

Desta forma, dividindo o círculo em n setores de mesmo comprimento, pelo Postulado 3 a área do círculo é exatamente igual a soma das áreas dos setores circulares obtidos através da referida divisão.

CAPÍTULO 3: ATIVIDADES PARA SALA DE AULA E RESULTADOS

Neste capítulo será apresentada uma proposta de como desenvolver os conceitos do Capítulo 2 em sala de aula, a qual envolve sete atividades, adaptadas para o Ensino Fundamental, que ilustram um trabalho com materiais manipulativos, o qual pode auxiliar no ensino e aprendizagem de conceitos de Geometria Euclidiana Plana.

As atividades foram aplicadas no único 9º ano/8ª série do Ensino Fundamental da escola municipal de Tanabi/SP Marciano Maciel da Silva, que contava com vinte e quatro alunos, divididos em oito grupos de três alunos, através de sorteio.

As atividades práticas aplicadas em sala de aula ocuparam um total de 9 aulas, contando as duas provas diagnósticas, uma no início e outra no final das atividades, e mais uma aula para cada atividade descrita na próxima seção. Para cada atividade, de 1 a 7 desenvolvidas em sala de aula, foi distribuído um kit contendo a descrição da atividade e os materiais manipuláveis.

Vale ainda ressaltar que foram realizadas duas provas diagnósticas, cujo modelo se encontra no Anexo I. A primeira antes da realização das atividades utilizando material concreto que levava em conta o conteúdo e os conceitos que já teriam sido ministrados aos alunos nos anos anteriores. E a segunda, idêntica à primeira, após a realização das atividades, com o objetivo de avaliar e comprovar a aprendizagem dos alunos.

Tal como sugerido pelos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais, 1998), as atividades têm foco nas construções geométricas, utilizando para isso régua, compasso, Etinil Vinil Acetato (EVA) e barbante, que são materiais de baixo custo.

Segue uma orientação para o professor de como proceder em sala de aula durante a execução das atividades para conseguir extrair o máximo de atenção e empenho dos alunos. O objetivo desta mediação é instruir o professor a ajudar o aluno durante a resolução das atividades para que siga

seu próprio caminho e assim participar das aulas de maneira ativa na construção do seu conhecimento, baseado em Polya (2006).

“Um dos mais importantes deveres do professor é o de auxiliar os seus alunos, o que não é fácil, pois exige tempo, prática, dedicação e princípios firmes.

O estudante deve adquirir experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho.” (POLYA, 2006, pag. 1)

Em outras palavras, o auxílio deve ser moderado, as perguntas devem ser colocadas de maneira a instigar o aluno a pensar e de maneira que as respostas sejam abertas e produtivas, criando assim um ambiente favorável às discussões.

Durante o desenvolvimento das atividades, é importante lembrar com os alunos a definição de área de uma região plana. Sugere-se perguntar:

1. “O que é área de um polígono?”. Geralmente as respostas são, “base x altura” ou “lado x lado”, ou seja, frequentemente os alunos associam o conceito de área com as fórmulas utilizadas para calcular áreas de alguns polígonos. Na verdade, para o bom desenvolvimento deste trabalho o professor precisará instruir os alunos de que as fórmulas são apenas ferramentas matemáticas para que se possa determinar a área de um determinado polígono ou círculo. Feito esse passo, o professor precisa formalizar com os alunos o conceito de área, conforme Definição 2.9.

2. Quais são as definições de triângulo, quadrado, retângulo, trapézio, losango, paralelogramo, circunferência e círculo?

3. Quais suas principais propriedades e quais são as principais consequências dessas propriedades. Por exemplo, faça-os entender que todo quadrado também é um retângulo. Isso facilitará, por exemplo, as conclusões exigidas no item quatro da atividade 1.

Estas atividades também são propícias para introduzir os conceitos de perpendicularismo, paralelismo, o que é altura de um polígono referente a uma determinada base e equivalência de áreas.

No item 1 da atividade 2, por exemplo, o aluno precisa saber qual é a definição de paralelogramo e como desenhar uma altura do paralelogramo referente a base escolhida.

Nos itens 2 e 3 da atividade 2, por exemplo, o conceito de equivalência de áreas é muito importante. O aluno precisa entender que a área inicial não foi alterada com as manipulações realizadas.

É claro que no decorrer das atividades em sala de aula, vários outros assuntos e dúvidas podem surgir, a medida que os alunos estiverem mais ou menos interessados. Por isso, o professor deve estar preparado para sanar essas dúvidas e formalizar alguns conceitos. Para isso, o professor pode utilizar o Capítulo 2, que apresenta todos os principais conceitos, axiomas, proposições e teoremas, inclusive com demonstrações, que podem proporcionar maior segurança para o professor durante o desenvolvimento das atividades.

ÁREAS DE POLÍGONOS

As atividades propostas nesta seção tiveram como objetivo introduzir os conceitos de áreas de polígonos, com o uso de materiais manipulativos.

Atividade 1 (Área do retângulo e do quadrado):

1. Cubra os retângulos R1, R2, R3 e R4 utilizando as unidades de área sem sobreposição.
2. Preencha a Tabela 1.
3. O que representa os números de quadrados utilizados para cobrir cada retângulo? Relacione esses números com as medidas da largura e do comprimento. O que você pode concluir?

Tabela 1: Tabela que relaciona as dimensões dos retângulo R_1, R_2, R_3 e R_4 .

Retângulo	Nº quadrados na largura	Nº de quadrados no comprimento	Total de quadrados utilizados
R1			
R2			
R3			
R4			

4. Escreva a área de um retângulo de dimensões **a** e **b**.
5. Qual é a área de um quadrado cujo lado tem medida **a**?

Atividade 2 (Área de um paralelogramo):

1. Trace a altura h do paralelogramo relativo ao lado CD e depois o recorte na altura.
2. Com as duas figuras obtidas construa um novo polígono, cuja área você já conhece. Qual é a área do novo polígono?
3. Qual é a área do paralelogramo inicial?

Atividade 3 (Área de um triângulo):

1. Construa:
 - a) Dois triângulos retângulos congruentes.
 - b) Dois triângulos obtusângulos congruentes.
 - c) Dois triângulos acutângulos congruentes.
2. Como podemos unir dois triângulos congruentes para formar uma figura cuja área você já sabe calcular? Que figura você formou?
3. Qual é a área do polígono obtido em 2?
4. Qual é a área de cada triângulo inicialmente construído?

Atividade 4 (Área de um trapézio):

1. Construa dois trapézios congruentes.

2. Como podemos unir os dois trapézios congruentes para formar uma figura cuja área você já sabe calcular? Que figura você formou?
3. Qual é a área do polígono obtido em 2?
4. Qual é a área de cada trapézio inicialmente construído?
5. Qual é a fórmula para calcular a área de um trapézio qualquer?

Atividade 5 (Área de um losango):

1. Construa um losango qualquer.
2. Como podemos dividir o losango em dois polígonos congruentes para uní-los e formar uma figura cuja área você já sabe calcular? Que figura você formou?
3. Qual é a área do polígono obtido em 2?
4. Qual é a área do losango inicialmente construído?
5. Qual é a fórmula para calcular a área de um losango qualquer?

Apresentamos a seguir a análise dos dados e resultados produzidos pelos grupos durante o desenvolvimento das atividades 1 a 5, descritas anteriormente.

Na atividade 1, o aluno precisava preencher os retângulos com quadrados, cujo medida de área é unitária (Figura 27). Conseqüentemente o aluno conseguiu perceber na prática que medir a área de uma região plana é equivalente a contar quantos quadrados de área unitária são necessários para preencher toda a região plana. O objetivo central desta atividade era que o aluno pudesse usar de toda autonomia para descobrir a fórmula matemática que calcula a área de regiões retangulares e quadradas quaisquer.

No questionário da atividade 1 obtemos respostas muito relevantes, como podemos ver na Figura 28. Cerca de 87,5% dos alunos responderam corretamente o questionário.

Na atividade 2 os alunos precisavam lembrar o conceito de perpendicularismo para traçar uma altura do paralelogramo. Feito isso, eles

fizeram um recorte sobre a altura do paralelogramo, obtendo assim duas regiões planas, que unidas formaram um retângulo, região plana cuja área os alunos já haviam estudado durante a atividade 1 (Figura 29).

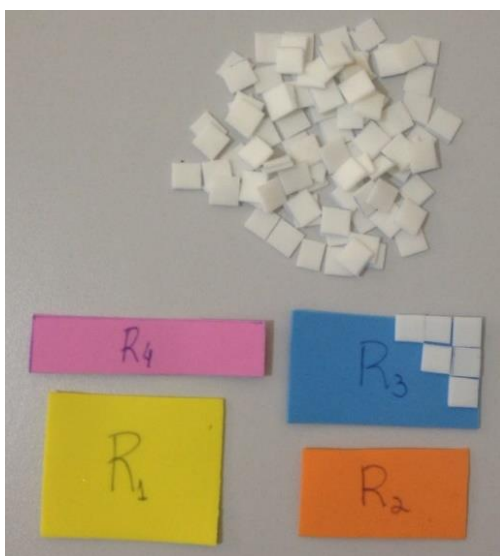


Figura 27: Materiais manipulativos da atividade 1.

2A: Área do retângulo. Se multiplicarmos os dois lados o valor da área. Que a área é igual largura vezes comprimento.

3A: Área = $A \cdot b$.

4A: Área = A^2

Figura 28: Respostas do questionário da atividade 1.

Vejamos na Figura 30 algumas respostas obtidas através do questionário da atividade 2. Pode-se observar que os alunos perceberam que, mesmo realizando todo o procedimento proposto pela atividade 2, a área da região plana permaneceu inalterada. Cerca de 83% dos alunos responderam corretamente o questionário.

O objetivo da atividade 3 era que os alunos percebessem que juntando dois triângulos congruentes formamos um paralelogramo, região plana cuja área foi estudada na atividade 2. Além disso, os alunos precisavam entender que a área do paralelogramo era o dobro da área do

triângulo inicial, pois são necessários 2 triângulos congruentes para construir o paralelogramo (Figura 31).

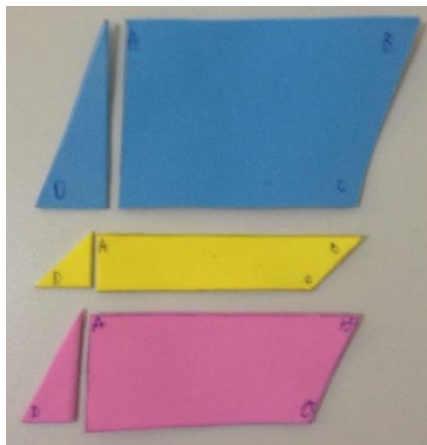


Figura 29: Materiais manipulativos da atividade 2.

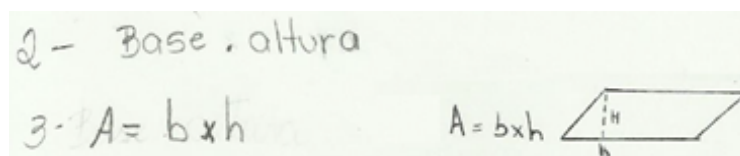


Figura 30: Respostas do questionário da atividade 2.



Figura 31: Materiais manipulativos da atividade 3.

Os resultados indicam que cerca de 79% dos alunos compreenderam os objetivos da atividade 3 e responderam corretamente o questionário. Veja a resposta de um aluno na Figura 32.

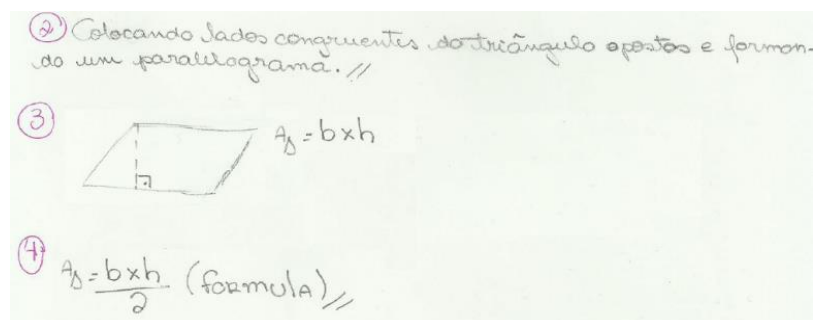


Figura 32: Respostas do questionário da atividade 3.

Analogamente ao processo desenvolvido na atividade 3, no caso da atividade 4 os alunos precisavam perceber que é possível juntar dois trapézios congruentes e formar um paralelogramo. Além disso, um dos objetivos desta atividade é que os alunos percebessem que a medida da base do paralelogramo é exatamente a soma algébrica das medidas das bases do trapézio (Figura 33).

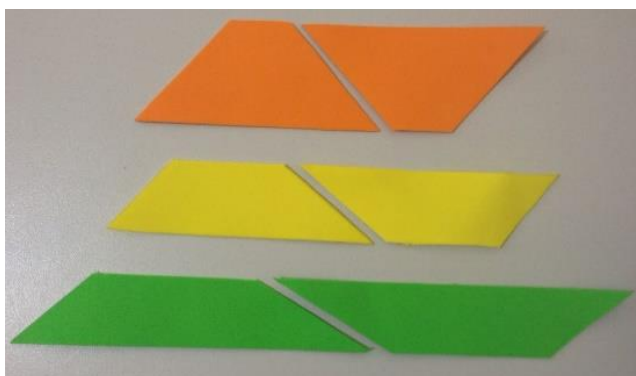


Figura 33: Materiais manipulativos da atividade 4.

O aproveitamento nesta atividade atingiu aproximadamente 92% de acertos e ótimas respostas como segue na Figura 34.

Para desenvolver a atividade 5 os alunos perceberam que se cortarmos o losango por uma de suas diagonais formamos dois triângulos, e unindo-os obtemos um paralelogramo, cuja área é igual a área do losango inicial, a base possui a mesma medida de uma das diagonais e a altura é

exatamente igual a metade da outra diagonal do losango (Figura 35). Como visto na atividade 2, os alunos já sabiam calcular a área do paralelogramo.

2.R: Um ao lado do outro fazendo encostar os lados congruente formando um paralelogramo cujo a base é a junção da base maior com a base menor do trapézio.

3.R: Área do laranja: $14 \cdot 6 = 84$ De forma geral
 Área do roxo: $12 \cdot 11 = 132$ $A = (b+B) \cdot h$
 Área do verde: $18 \cdot 8 = 144$

4.R: Área do laranja: 42
 Área do roxo: 102
 Área do verde: 72

5.R: De forma geral a área do trapézio é $A = \frac{(b+B) \cdot h}{2}$

Figura 34: Respostas do questionário da atividade 4.

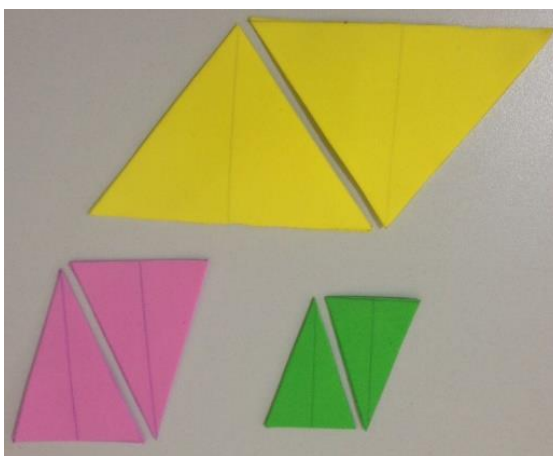


Figura 35: Materiais manipulativos da atividade 5.

O aproveitamento desta atividade foi de 75% de acertos. Confira na Figura 36 uma das respostas:

ÁREA DO CÍRCULO

Inicialmente foi necessário introduzir o comprimento da circunferência

conforme atividade 6.

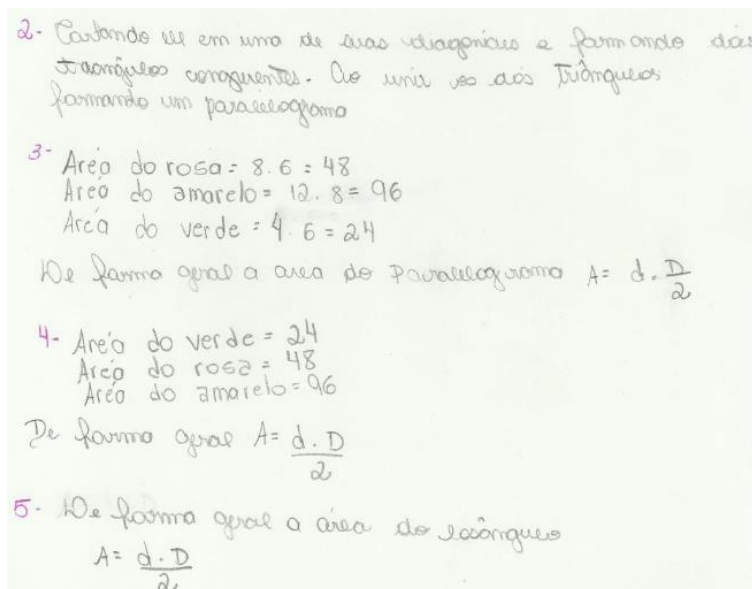


Figura 36: Resposta do questionário da atividade 5.

Atividade 6 (Comprimento de uma circunferência):

1. Nomeie cada circunferência correspondente aos círculos de C_1 , C_2 e C_3 . Utilize o mínimo de barbante possível para contornar cada círculo. Usando a régua meça cada pedaço de barbante. Essa medida é, aproximadamente, o comprimento da circunferência. Complete a primeira coluna da Tabela 2.

2. Complete a Tabela 2 com o diâmetro D e com as razões $\frac{C}{D}$, de cada circunferência.

3. O que você conclui sobre as razões $\frac{C}{D}$?

Tabela 2: Tabela que relaciona o comprimento C com o diâmetro D .

Círculo	Comprimento C	Diâmetro D	Razão $\frac{C}{D}$
C_1			
C_2			
C_3			

4. Escreva uma fórmula matemática que pode ser usada para o cálculo do comprimento C de uma circunferência de raio R .

Atividade 7 (Área de um círculo):

1. Recorte os círculos C_1 , C_2 e C_3 de mesmo raio R em setores circulares de comprimentos distintos. Por exemplo, o círculo da figura foi dividido em quatro setores circulares.

2. Utilize todos os setores circulares que compõem o círculo C_1 para montar uma figura que se aproxime de um polígono cuja área já foi trabalhada anteriormente.

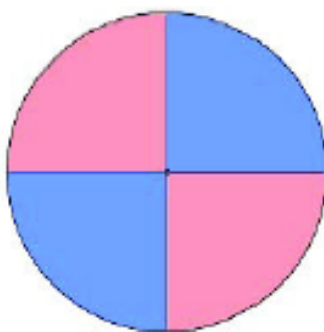


Figura 37: Círculo dividido em quatro setores.

3. Repita o 2º passo para os setores circulares que compõem os círculos C_2 e C_3 .

4. Comparando as figuras obtidas no segundo e terceiros passos, a medida que o número de setores aumentou as figuras se aproximaram de qual polígono?

5. Qual é a área desse polígono aproximadamente?

6. Como pode ser obtida a área do círculo inicial?

7. Qual é a área do círculo de raio R ?

A seguir apresentamos a análise dos dados e resultados produzidos pelos grupos durante o desenvolvimento das atividades 6 e 7.

Na atividade 6 calculamos o quociente entre o comprimento e o diâmetro dos círculos entregues para os alunos (Figura 38). Como

sugestão, durante a execução desta atividade, pode-se realizar os mesmos cálculos com as medidas de outros objetos circulares que fazem parte do cotidiano dos alunos, entre eles: roda de bicicleta, tampa de panela e relógio de parede, etc.

É muito importante lembrar que as medidas obtidas são aproximadas, pois as ferramentas não são de precisão e nem apropriadas para as medições efetuadas. Por isso, nem sempre o quociente entre o comprimento e o diâmetro do círculo era o valor esperado (3,1415...).

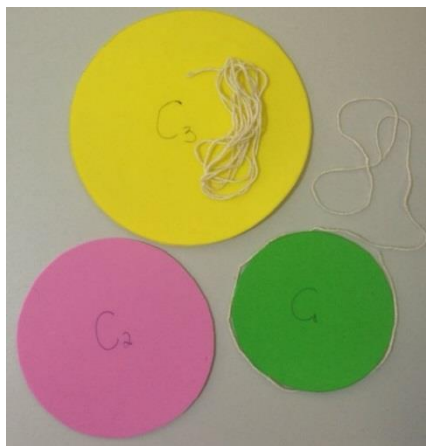


Figura 38: Materiais manipulativos da atividade 6.

Após entender as limitações que o desenvolvimento da atividade apresenta, costuma-se obter ótimos resultados, comprovados pelo aproveitamento de aproximadamente 91% de acertos. Uma das respostas obtidas está na Figura 39.

Na atividade 7 os alunos demoraram cerca de 30 minutos para perceber que a medida que aumentavam o número de setores circulares, mais próximos de um retângulo era o polígono formado (Figura 40 (a) e (b)).

Feito este estudo com os alunos, a atividade teve um ótimo rendimento e um aproveitamento de aproximadamente 91% de acertos. Os alunos conseguiram perceber que a base do polígono formado era

exatamente igual a metade da medida do comprimento da circunferência e que a altura do polígono era igual a medida do raio.

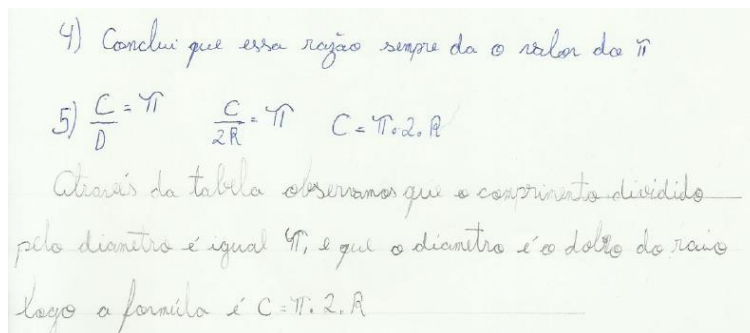


Figura 39: Resposta do questionário da atividade 6.

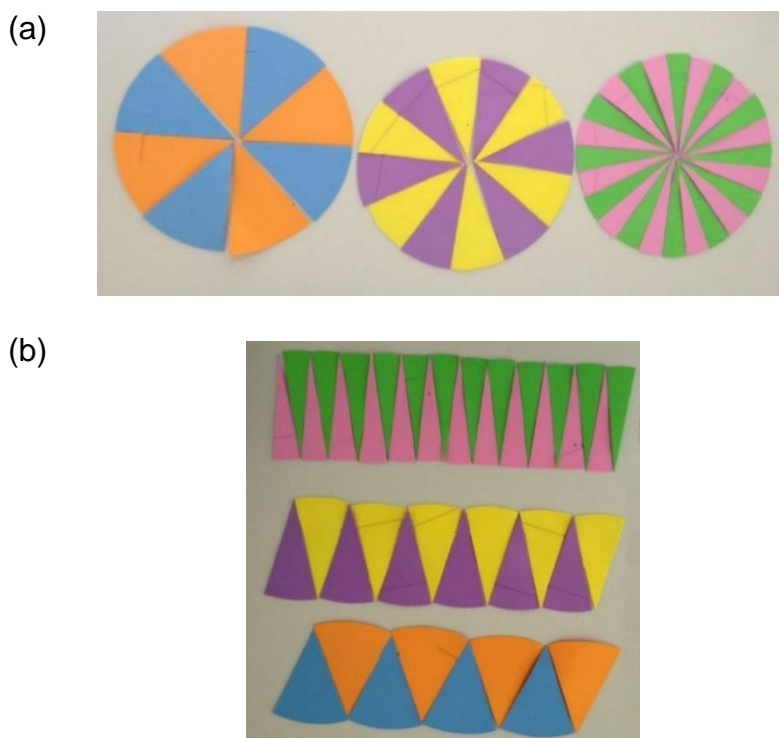


Figura 40: Materiais manipulativos da atividade 7. (a) Círculos divididos em setores equivalentes. (b) Setores equivalentes rearranjados.

A Figura 41 mostra uma resposta obtida através do questionário da atividade 7.

É evidente que durante a realização das atividades descritas acima, alguns alunos precisaram de atenção especial, por isso, em alguns

momentos o atendimento individual se tornou necessário. Esse fato nos mostra que cada aluno tem sua dificuldade e particularidade. O importante é que após o atendimento individual os alunos se tornaram capazes de seguir participando da atividade em curso.

Handwritten mathematical formulas on a light green background:

- 4. $A = \frac{b \cdot h}{2}$ (with a note above: "ps. acima de retângulo")
- 5. $A = \frac{C \cdot r}{2}$
- 6. $A = \frac{L \cdot \pi \cdot H}{L}$ (with a note above: "ps. acima de cilindro")
- $A = \pi \cdot r \cdot h$
- 7. $A = \pi \cdot r^2$

Figura 41: Resposta do questionário da atividade 7.

Após a realização destas 7 atividades, os alunos responderam novamente a prova diagnóstica, com a intenção de verificarmos qual foi o nível de aprendizagem que os alunos obtiveram. Uma grande parcela dos alunos responderam a prova de forma impecável, em especial um aluno que teve aproveitamento de 100%, como segue no Anexo II, com ressalva às unidades de medidas, que nem foram objetivos deste trabalho. O surpreendente deste aluno é que o aproveitamento obtido por ele na primeira prova foi de apenas 20%.

Em geral, os resultados foram ótimos. A saber, a segunda prova diagnóstica teve um aproveitamento médio de aproximadamente 67,15%, bem diferente da primeira que atingiu um aproveitamento médio de aproximadamente 13,6%.

As Figuras 42 e 43 nos mostram o aproveitamento (em %) em cada um dos itens da primeira e segunda provas diagnósticas, respectivamente, que foram respondidas pelos alunos antes e depois da realização das 7 atividades propostas, respectivamente.

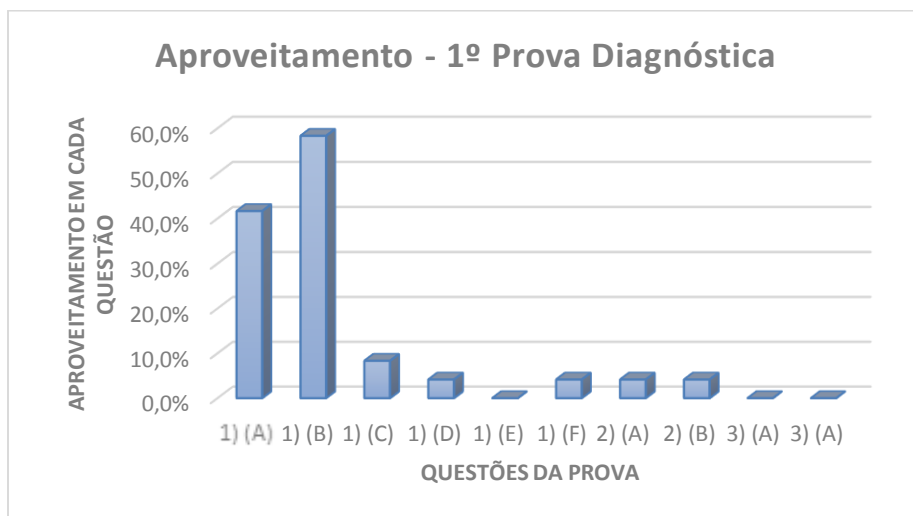


Figura 42: Aproveitamento que os alunos obtiveram na primeira prova diagnóstica.

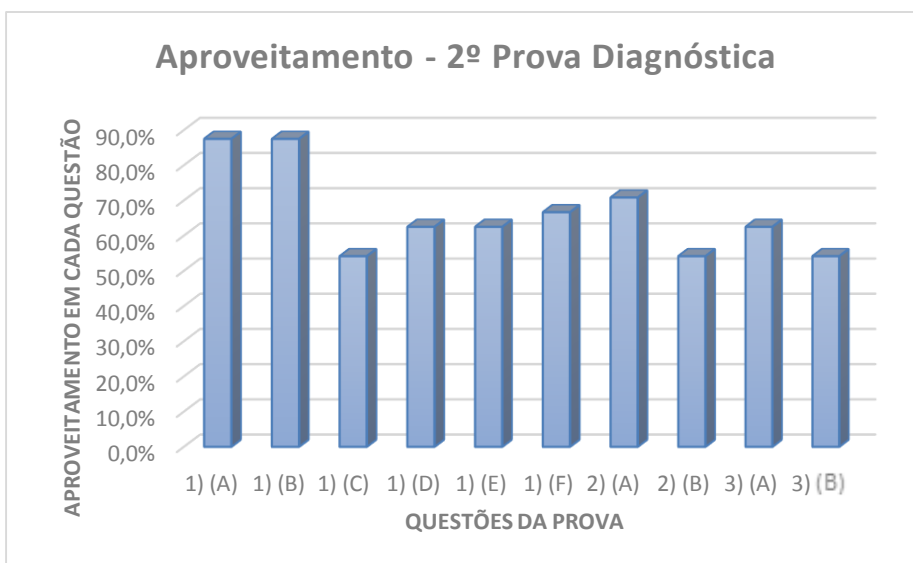


Figura 43: Aproveitamento que os alunos obtiveram na segunda prova diagnóstica.

CAPÍTULO 4: CONCLUSÃO

Quando eu li em Silva e Martins (2000) que os materiais manipulativos são essenciais para ajudar os alunos na passagem do concreto para o abstrato, jamais havia dimensionado o quanto o trabalho com materiais manipulativos enriquece as aulas.

Os alunos que participaram das atividades descritas nesta dissertação apresentavam grande dificuldade e falta de entusiasmo durante as aulas de geometria. As aulas eram pouco produtivas, e a maioria dos alunos preferia estudar álgebra a estudar geometria. Porém, após a realização das atividades com materiais manipulativos o panorama das aulas mudaram.

Já na primeira aula pude notar o brilho nos olhos, a empolgação, o entusiasmo, e tão logo já me questionaram quando aconteceria a próxima aula. Essa empolgação se refletiu nos resultados, como podemos confirmar nos gráficos representados nas Figuras 42 e 43. Sem dúvidas as atividades práticas com os materiais manipulativos auxiliaram na aprendizagem dos alunos.

Apesar das péssimas condições encontradas no cenário educacional brasileiro, ficou evidente que o trabalho desenvolvido com materiais manipulativos trouxe benefícios ao processo de ensino-aprendizagem.

O presente trabalho contribuiu muito para o meu enriquecimento profissional, e tenho plena convicção que fará diferença para os professores que se aproveitarem dele para trabalhar os conteúdos em sala de aula. Com certeza continuarei utilizando este método para ensinar este e outros conceitos da teoria de Geometria Euclidiana Plana.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**, Rio de Janeiro: SBM, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental**, Brasília: MEC/SEF, 1998a.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCNs + Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**, Brasília, 1998b.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicações**, São Paulo: Ática, 2013.

IEZZI, G.. **Fundamentos de Matemática Elementar**, São Paulo: Atual, 1977.

LAMAS, R.C.P. **A Área do Círculo: Atividades Experimentais**, In: Núcleos de Ensino da Unesp. Ed. São Paulo: Cultura Acadêmica, p. 727-735, 2011.

LAMAS, R.C.P.; OLIVEIRA, P.S.; ANTUNES, M.B.; RODRIGUES, M.A.S. **Materiais Concretos na Prática Escolar: Experiências no Ensino de Geometria**, In: Núcleos de Ensino da Unesp. 1 ed. São Paulo: Cultura Acadêmica, p. 196-208, 2014.

LIMA, E. L. **Análise Real**. – vol. 1 – Rio de Janeiro: SBM, 1985.

PAIS, L. **Transposição didática**. In: MACHADO, S. (Org.). Educação Matemática uma Introdução. São Paulo: Educ, 1999.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

RÊGO, R.G.; RÊGO, R.M. **Matemática ativa**. João Pessoa: Universitária/UFPB, INEP, Comped: 2000.

REZENDE, E. Q. F. e de QUEIROZ, M. L. B. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas**, Campinas: UNICAMP, 2007.

SILVA, A.; MARTINS, S. **Falar de Matemática hoje é...** Millenium – Revista do ISPV: Instituto Superior Politécnico de Viseu. Disponível em: http://www.ipv.pt/millenium/20_ect5.htm Acessado em 20 de Julho de 2017.

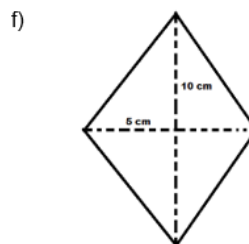
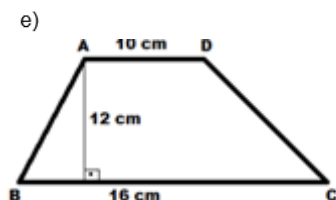
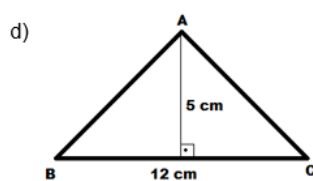
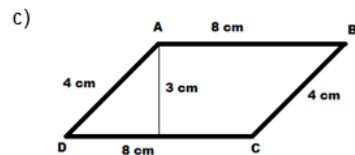
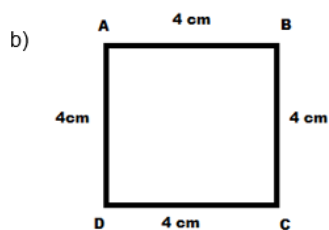
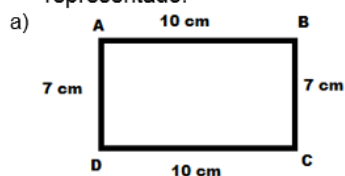
ANEXO I: PROVA DIAGNÓSTICA.



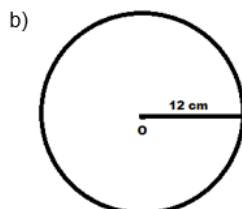
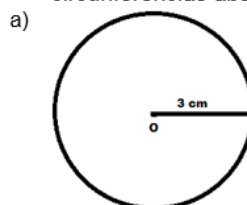
PREFEITURA MUNICIPAL DE TANABI
SECRETARIA MUNICIPAL DA EDUCAÇÃO
E.M. "MARCIANO MACIEL DA SILVA" - TANABI
R: ANTILHA S/Nº-Bº IBIPORANGA- Tanabi- CEP. 15.170-000- Fone: (017) 3274-8120
Email : marciano-maciel@hotmail.com

Nome do aluno:		Nº	
Profº: Tiago Fernando dos Reis		9º Ano	Data / /
Disciplina: Matemática	PROVA DIAGNÓSTICA	Nota:	

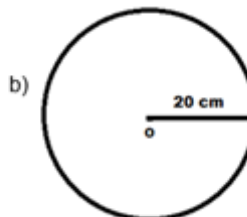
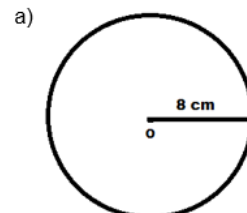
1. Calcule a área de cada polígono abaixo representado:



2. Calcule o comprimento das circunferências abaixo:



3. Calcule a área das seguintes circunferências:



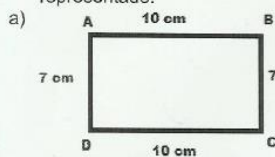
ANEXO II: PROVA DIAGNÓSTICA REALIZADA POR UM ALUNO PARTICIPANTE DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS COM MATERIAIS MANIPULÁVEIS.



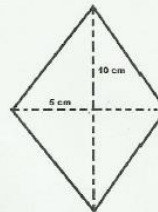
PREFEITURA MUNICIPAL DE TANABI
SECRETARIA MUNICIPAL DA EDUCAÇÃO
E.M. "MARCIANO MACIEL DA SILVA" - TANABI
R: ANTILHA S/N°-B° IBIPORANGA- Tanabi- CEP. 15.170-000- Fone: (017) 3274-8120
Email : marciano-maciel@hotmail.com

Nome do aluno: <u>Wan umacedo</u>	Nº <u>193</u>
Profº: <u>Tiago Fernando dos Reis</u>	9º Ano
Disciplina: <u>Matemática</u>	Data <u>20/11/2016</u>
PROVA DIAGNÓSTICA	Nota: <u>10</u>

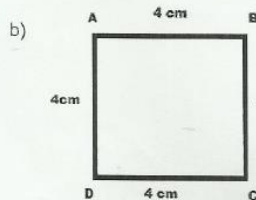
1. Calcule a área de cada polígono abaixo representado:



$$A = 10 \cdot 7 = 70 \text{ cm}^2$$

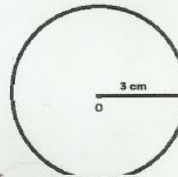


$$A = \frac{10 \cdot 6}{2} = 30 \text{ cm}^2$$

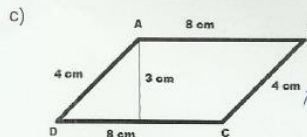


$$A = 4 \cdot 4 = 16 \text{ cm}^2$$

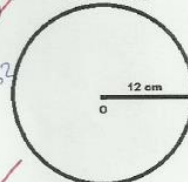
2. Calcule o comprimento das circunferências abaixo:



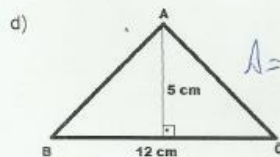
$$C = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18 \text{ cm}$$



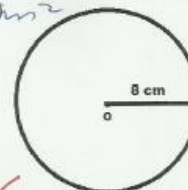
$$A = 8 \cdot 3 = 24 \text{ cm}^2$$



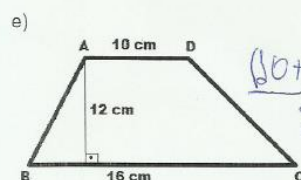
$$C = 2 \cdot 12 \cdot 3 = 72 \text{ cm}$$



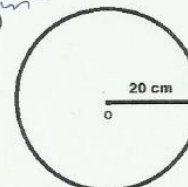
$$A = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30 \text{ cm}^2$$



$$A = 3 \cdot 8^2 = 192 \text{ cm}^2$$



$$A = \frac{(10+16) \cdot 12}{2} = 156 \text{ cm}^2$$



$$A = 3 \cdot 20^2 = 1200 \text{ cm}^2$$