UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Fernanda Machado Pinheiro

Explorando o jogo "Avançando com o resto" como recurso didático para o ensino e aprendizagem de alguns conteúdos matemáticos, na perspectiva da resolução de problemas

São José do Rio Preto
2017

Fernanda Machado Pinheiro

Explorando o jogo “Avançando com o resto” como recurso didático para o ensino e aprendizagem de alguns conteúdos matemáticos, na perspectiva da resolução de problemas

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Profª. Drª. Évelin Meneguesso Barbaresco

São José do Rio Preto
2017

Pinheiro, Fernanda Machado.
Explorando o jogo “Avançando com o resto” como recurso didático para o ensino e aprendizagem de alguns conteúdos matemáticos, na perspectiva da resolução de problemas / Fernanda Machado Pinheiro. -- São José do Rio Preto, 2017
90 f. : il.

Orientador: Évelin Meneguesso Barbaresco
Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Aprendizagem baseada em problemas. 3. Jogos em educação matemática. 4. Números – Divisibilidade. 5. Matemática - Metodologia. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 37:51

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Fernanda Machado Pinheiro

Explorando o jogo "Avançando com o resto" como recurso didático para o ensino e aprendizagem de alguns conteúdos matemáticos, na perspectiva da resolução de problemas

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Profª. Drª. Évelin Meneguesso Barbaresco
UNESP – São José do Rio Preto
Orientadora

Profª. Drª. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado
UNESP – São José do Rio Preto

Profª. Drª. Francielle Rodrigues de Castro Coelho
UFU – Universidade Federal de Uberlândia

São José do Rio Preto
1 de novembro de 2017

Dedico este trabalho ao meu querido esposo Edilson e nossa filha Ana, um presente recebido neste período. A meus pais Rubens e Maria Luiza, pelo carinho e educação que me permitiram esta conquista. Sem vocês, não valeria a pena.

AGRADECIMENTOS

À Deus por ter me dado vida e sabedoria para superar as dificuldades e realizar este sonho.

À minha família, porque, com amor, me acompanharam. Reconheço que dividiram momentos importantes com este projeto, compreendendo e suprindo minha ausência.

Especialmente à Profª. Drª. Évelin Meneguesso Barbaresco, a quem aprendi a admirar, pela sabedoria, dedicação e serenidade com que conduziu a orientação desta dissertação. Muito obrigada pela confiança e por compartilhar seu tempo e conhecimento, com simplicidade e competência, sem os quais seria impossível a realização deste trabalho.

Ao PROFMAT, pela oportunidade de fazer este curso, e a todos os professores do Departamento de Matemática envolvidos neste projeto desde a primeira turma, por se tornarem corresponsáveis por minha formação, com competência, exigência e acolhimento de mestres.

Agradeço aos alunos e equipe da escola onde as atividades propostas para sala de aula neste trabalho foram desenvolvidas, por compor de forma encantadora uma parte importante deste trabalho.

A todos os amigos que, direta ou indiretamente, participaram desta conquista, compartilhando sonhos, alegrias e caminhos. Pelo constante incentivo e cumplicidade em todos os momentos, meus sinceros agradecimentos!

“Se cheguei até aqui foi porque me apoiei no ombro dos gigantes.”

Isaac Newton

RESUMO

Explorar o jogo “Avançando com o resto” sob a perspectiva da resolução de problemas constitui-se num recurso didático que favorece consolidar e ampliar o conhecimento dos alunos sobre diversos conteúdos matemáticos, em particular, o algoritmo da divisão euclidiana. Escrevemos a fundamentação teórica deste trabalho a partir de problemas que representam situações vivenciadas no jogo. Conceituamos e demonstramos os principais teoremas e resultados relacionados à divisão euclidiana, como Múltiplos e Divisores de números naturais, Paridade, Números primos e compostos, Congruência (aritmética modular), Sistema de Numeração Decimal e Critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5 e 6. Este estudo nos permitiu apresentar uma sugestão de atividade direcionada às turmas do 5º ano do Ensino Fundamental, explorando os diferentes significados da divisão e o estudo reflexivo do algoritmo, planejada de acordo com as orientações curriculares presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais e no Currículo de Matemática do Estado de São Paulo. Considerando as dificuldades encontradas no ensino desta operação matemática e o potencial lúdico do jogo para aprendizagem, apresentamos uma possibilidade de abordagem significativa do algoritmo da divisão euclidiana, envolvendo e motivando os alunos para a aprendizagem de conceitos, competências e habilidades inerentes ao Currículo de Matemática.

Palavras-chave: Jogos Matemáticos. Avançando com o Resto. Divisão Euclidiana. Metodologia da Resolução de Problemas. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

Exploring the game "Advancing with the rest" from the perspective of problem solving is a didactic resource that favours consolidating and expanding students' knowledge about the various mathematical contents, in particular algorithm of the Euclidean division. We write the theoretical basis of this study from problems that represent situations experienced in the game. We conceptualize and demonstrate the main theorems and results related to the Euclidean division, such as Multiples and Divisors of Natural Numbers, Parity, Prime and Compound Numbers, Congruence (Modular Arithmetic), Decimal Numbering System and Divisibility criteria by 2, 3, 4, 5 e 6. This study allowed us to present a suggestion of activity directed to the 5th grade classes of Elementary School, exploring the different meanings of the division and the reflexive study of the algorithm, planned according to the curricular guidelines present in National Curricular Parameters and the Mathematics São Paulo State Curriculum. Considering the difficulties encountered in teaching this mathematical operation and the playful potential of the game for learning, we present a possibility of a significant approach to the algorithm of the Euclidean division, involving and motivating students to learn concepts, skills and abilities inherent to the Mathematics Curriculum.

Keywords: *Mathematical Games. Advancing with the Rest. Euclidean Division. Methodology of Solving Problems. Teaching of Mathematics.*

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No ensino de Matemática, temos enfrentado muitos desafios, os resultados relacionados à qualidade do ensino e da aprendizagem em Matemática nos níveis de Ensino Fundamental e Médio são insatisfatórios.

Especificamente no ensino e aprendizagem das operações matemáticas fundamentais, observamos que, com relação à divisão, alunos do Ensino Fundamental e também do Ensino Médio não conseguem resolver problemas simples que envolvam este conceito, ou então, não compreendem o algoritmo que usam para dividir.

Reconhecemos que enfrentar os desafios que o ensino de Matemática coloca para os professores não é tarefa fácil, mas muito se tem feito para atender às orientações propostas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) com relação às operações, indicando que

> Com relação às operações, o trabalho a ser realizado se concentrará na compreensão dos diferentes significados de cada uma delas, nas relações existentes entre elas e no estudo reflexivo do cálculo, contemplando diferentes tipos – exato e aproximado, mental e escrito. (BRASIL, 2001, p.55)

As dificuldades que os alunos enfrentam com a divisão são frequentemente abordadas na formação de professores, inicial ou continuada, e também no meio acadêmico. Saiz (2001) apresenta os resultados de um estudo exploratório de algumas das dificuldades apresentadas pelos alunos de professores que participaram de um curso de aperfeiçoamento, constatando que a expressão “dividir um número por outro”, na realidade, seja uma expressão pouco específica. Segundo a autora,

> Em geral, o ensino das operações matemáticas está baseado na comunicação de um procedimento de cálculo associado posteriormente a um pequeno universo de problemas que, supõe-se, “darão conta” do significado do conceito. (SAIZ, 2001, p.162)

Kamii (1998) afirma que o algoritmo de qualquer operação matemática é conveniente àqueles que já compreenderam o funcionamento do sistema de numeração decimal. Entendemos que também para Kamii (1998), é indiscutível a importância da compreensão das diferentes ideias envolvidas em um cálculo, bem como, do algoritmo que convencionalmente se usa para as operações matemáticas. Segundo a autora, *“Quando não ensinamos algoritmos à criança, e, em vez disso, a encorajamos a pensar e inventar procedimentos de cálculo, seu raciocínio segue um caminho diferente daquele dos algoritmos convencionais.”* (KAMII,1998, p.57)

Neste contexto, e considerando a necessidade de contribuir para a superação dos desafios enfrentados no ensino da divisão euclidiana na escola, buscamos uma possibilidade de abordagem significativa do algoritmo desta operação matemática, por meio do jogo “Avançando com o resto”. Neste trabalho, escolhemos explorar o jogo como recurso didático para o ensino da divisão, por acreditarmos no seu potencial de motivação para a aprendizagem. Além disso, também acreditamos que os conceitos e resultados matemáticos explorados a partir de situações vivenciadas neste jogo, ganham significado quando os alunos são desafiados a resolver os problemas propostos a partir do jogo.

Sobre o recurso aos jogos, segundo os PCNs,

> [...] um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver. (BRASIL, 2001, p.49)

A versão do jogo “Avançando com o resto” que escolhemos está descrita no site do Laboratório de Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas – IBILCE da Universidade Estadual Paulista – UNESP, Campus de São José do Rio Preto, cuja versão foi adaptada de Borin (2004). Este jogo também vem sendo difundido em importantes competições realizadas entre escolas públicas, como a “Jornada de Matemática”, realizada pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo e o “Campeonato Escolar de Jogos de Tabuleiro - CEJTA”, realizado pelo Laboratório de Matemática da UNESP/IBILCE/São José do Rio Preto, em parceria com as Diretorias de Ensino Regiões (DER) de José Bonifácio e São José do Rio Preto.

Observamos no jogo “Avançando com o resto” a possibilidade de explorar conceitos e resultados matemáticos de grande importância, como o Algoritmo da Divisão Euclidiana, Múltiplos e Divisores de Números Naturais, Divisibilidade, Paridade, Números Primos e Compostos, Congruência (aritmética modular), Sistema de Numeração Decimal e Critérios de Divisibilidade por 2, 3, 4, 5 e 6.

O objetivo principal deste trabalho foi consolidar e ampliar o conhecimento dos alunos sobre a divisão, que foi explorada no jogo sob a perspectiva da resolução de problemas. Consideramos as dificuldades encontradas no cálculo desta operação matemática e exploramos o potencial lúdico do jogo para aprendizagem.

Este trabalho está organizado em três capítulos. No Capítulo 1, apresentamos os conceitos e resultados matemáticos explorados no jogo “Avançando com o resto”, numa sequência organizada pela discussão de problemas produzidos no contexto do jogo. Iniciamos pela discussão do algoritmo da divisão euclidiana, abordando o problema da divisão, para em seguida, introduzir o conceito de divisibilidade por 2 (paridade) e por números maiores que 2, incluindo neste contexto a apresentação dos conceitos de múltiplos e divisores. Apresentamos também os conceitos de números primos e compostos, adentrando em congruência, na discussão de aritmética modular. Finalizamos apresentando alguns critérios de divisibilidade como aplicações da noção de congruência.

Discutimos cada um dos problemas propostos com soluções simples, detalhadas e intuitivas, que nos permitiram, na sequência, apresentar os conceitos matemáticos pertinentes, assim como enunciar e demonstrar alguns teoremas e resultados relacionados.

No Capítulo 2, apresentamos uma proposta de atividade para ser realizada em sala de aula, com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. Antes da aplicação do jogo em sala de aula, apresentamos alguns problemas para uma avaliação diagnóstica e fizemos a discussão dos diferentes significados da divisão. Os problemas pensados no desencadeamento da teoria apresentada no capítulo 1 foram propostos aos alunos, como questionamentos orais e escritos, para exploração e sistematização dos conceitos e resultados matemáticos. A proposta de atividade para ser desenvolvida em sala de aula é apresentada neste capítulo com detalhes, desde o planejamento, descrição da realização e análise dos resultados observados, favorecendo a compreensão e a realização das atividades pelo professor. Acreditamos que os registros das observações feitas são úteis como subsídio para replicação futura deste trabalho em outras turmas, colaborando para a aprendizagem significativa da divisão euclidiana e diversificando as estratégias utilizadas para o ensino de matemática.

No Capítulo 3, analisamos a abordagem do algoritmo da divisão euclidiana, e outros conceitos relacionados, em documentos oficiais de ensino, como os Parâmetros Curriculares Nacionais e o Currículo do Estado de São Paulo, justificando a opção pelo uso de jogos e resolução de problemas como recursos para o ensino de Matemática.

O jogo e a resolução de problemas presentes neste trabalho possibilitaram envolver e motivar os alunos para a aprendizagem de conceitos, competências e habilidades inerentes ao Currículo de Matemática.

CAPÍTULO 1 - CONTEÚDOS MATEMATICOS EXPLORADOS NO JOGO "AVANÇANDO COM O RESTO"

Inicialmente observamos que as principais referências para este capítulo são [HEFEZ, 2011] e [CADAR e DUTENHEFNER, 2015].

Essencialmente, o que vamos apresentar neste capítulo são os conceitos e resultados matemáticos que podem ser explorados, a partir de situações problemas, no jogo "Avançando com o resto", como o Algoritmo da Divisão Euclidiana, Múltiplos e Divisores de Números Naturais, Divisibilidade, Paridade, Números Primos e Compostos, Congruência (aritmética modular), Sistema de Numeração Decimal e Critérios de Divisibilidade por 2, 3, 4, 5 e 6.

Sendo assim, consideramos oportuno apresentar inicialmente o jogo com suas regras, materiais e objetivos, adaptado de Borin (2004).

O jogo "Avançando com o resto" consiste em propor situações de divisão nas quais o aluno se depara com a necessidade de identificar o resto obtido na operação matemática para avançar com seu marcador. À medida que o jogo se desenvolve, outros resultados e conceitos matemáticos podem ser explorados pela percepção do aluno e também pela mediação do professor, por meio de bons questionamentos.

Os materiais necessários para a realização do jogo são: um tabuleiro, um dado de 6 faces, dois marcadores e duas tabelas elaboradas para registro dos cálculos efetuados pelos jogadores. Participam do jogo duas equipes (duplas de alunos), que alternam as jogadas.

FIGURA 1 – Tabuleiro do jogo "Avançando com o resto"

Fonte: Laboratório de Matemática IBILCE/UNESP

Objetivo do jogo: Ser a primeira equipe a levar seu marcador até a casa com a palavra FIM.

Regras:

1. Duas equipes jogam alternadamente. Cada equipe movimenta seu marcador iniciando na casa com o número 39, como indicado no tabuleiro.
2. Cada equipe, na sua vez, joga o dado e efetua a divisão onde:
   - o dividendo é o número da casa onde seu marcador se encontra;
   - o divisor é o número obtido no lançamento do dado.

   Em seguida, a equipe movimenta seu marcador o número de casas igual ao resto da divisão efetuada.
3. A equipe que, na sua vez, efetuar um cálculo errado, perde a vez de jogar.
4. Ganha o jogo a equipe que primeiro alcançar com seu marcador, a casa com a palavra FIM.
5. Para alcançar a casa com a palavra FIM, a equipe deve obter o número exato de movimentos, sem ultrapassá-la. Se houver excesso, deve retroceder o número de casas que excede o movimento até a casa com a palavra FIM.

O objetivo principal deste trabalho foi consolidar e ampliar o conhecimento dos alunos sobre a divisão, que foi explorada no jogo sob a perspectiva da resolução de problemas. Assim, queremos apresentar alguns conceitos e resultados matemáticos que podem ser explorados a partir de problemas que representam momentos vivenciados no jogo. Mas para isso, antes precisamos apresentar as principais definições, resultados e teoremas relacionados com a divisão euclidiana.

1.1 Divisão Euclidiana

Definição 1.1: Dados dois números naturais a e b com $a \neq 0$, diremos que a divide b, escrevendo $a|b$, quando existir $q \in \mathbb{N}$ tal que $b = a \cdot q$. Neste caso, diremos também que a é um **divisor** ou um **fator** de b ou, ainda, que b é um **múltiplo** de a.

Hefez (2011), ao introduzir o Teorema da Divisão Euclidiana, afirma que *“Mesmo quando um número natural a não divide o número natural b, Euclides, nos seus Elementos, utiliza, sem enunciá-lo explicitamente, o fato de que é sempre possível efetuar a divisão de b por a, com resto.”* (HEFEZ, 2011, p.35)

Temos, assim, o algoritmo da divisão euclidiana, que é um método rápido, eficaz e válido para todo número natural, cujo teorema vamos enunciar e demonstrar. Mas para isso, precisamos do seguinte lema.

Lema 1.2 (Princípio da Boa Ordem): Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento.

Demonstração: A demonstração será feita por contradição.

Seja S um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ e suponha que S não possui um menor elemento. Queremos mostrar que S é vazio, conduzindo a uma contradição.

Considere o conjunto $T = S^C$, complementar de S em $\mathbb{N}$. Queremos, portanto, mostrar que $T = S^C = \mathbb{N}$.

Defina o conjunto $I_n = \{k \in \mathbb{N}; k \leq n\}$, onde $n \in \mathbb{N}$ e considere a sentença aberta $p(n)$: $I_n \subset T = S^C$.

Provemos, usando o Princípio de Indução Finita, que $p(n)$ é verdadeira.

Como $0 \leq n$, para todo n, segue-se que $0 \in T$, pois, caso contrário, 0 seria um menor elemento de S. Logo $p(0)$ é verdadeira.

Suponha agora que $p(n)$ seja verdadeira. Se $n + 1 \in S$, como nenhum elemento de I_n está em S (por hipótese de indução), teríamos que $n + 1$ é um menor elemento de S, o que não é permitido. Logo, $n + 1 \in T$, seguindo daí que

$$I_{n+1} = I_n \cup \{n + 1\} \subset T,$$

o que prova que $\forall n,\ I_n \subset T$; portanto, $\mathbb{N} \subset T \subset \mathbb{N}$ e, consequentemente, $T = \mathbb{N}$ e assim $S = T^C = \emptyset$.

□

Teorema 1.3 (Teorema da Divisão Euclidiana): Sejam a e b dois números naturais com $0 < a < b$. Existem dois únicos números naturais q e r tais que

$$b = a \cdot q + r, \quad \text{com} \quad 0 \leq r < a.$$

Demonstração:

Suponha que $b > a$ e considere, enquanto fizer sentido, os números:

$$b, b - a, b - 2a, \dots, b - na, \dots$$

Pelo Princípio da Boa Ordem, o conjunto S formado pelos elementos acima tem um menor elemento $r = b - q \cdot a$. Vamos provar que r tem a propriedade requerida, ou seja, que $r < a$.

Se $a|b$, então $r = 0$ e nada mais temos a provar.

Se, por outro lado, a não divide b então $r \neq a$ e, portanto, basta mostrar que não pode ocorrer $r > a$. De fato, se isto ocorresse, existiria um número natural $c < r$

tal que $r = c + a$. Consequentemente, sendo $r = c + a = b - q \cdot a$, teríamos $c = b - (q + 1) \cdot a \in S$, com $c < r$, contradição com o fato de r ser o menor elemento de S.

Portanto, temos que $b = a \cdot q + r$ com $r < a$, o que prova a existência de q e r.

Agora, vamos provar a unicidade.

Note que, dados dois elementos distintos de S, a diferença entre o maior e o menor desses elementos, sendo um múltiplo de a, é pelo menos a. Logo, se $r = b - a \cdot q$ e $r' = b - a \cdot q'$, com $r < r' < a$, teríamos $r' - r \geq a$, o que acarretaria $r' \geq r + a \geq a$, absurdo. Portanto $r = r'$.

Daí segue-se que $b - a \cdot q = b - a \cdot q'$, o que implica que $a \cdot q = a \cdot q'$ e, portanto $q = q'$.

□

Na divisão de b por a, o número b é chamado de *dividendo* e a é chamado de *divisor*. Os números q e r são chamados, respectivamente, de *quociente* e de *resto* da divisão de b por a.

Podemos aplicar estes conceitos e resultados na resolução dos seguintes problemas:

Problema 1:

Conhecendo as regras do jogo "Avançando com o resto", o primeiro jogador lança o dado e obtém o resultado 6. Seu marcador está na casa inicial do tabuleiro com o número 39. Quantas casas este jogador deve avançar seu marcador?

Solução: Com o resultado obtido no lançamento do dado, para movimentar seu marcador, o jogador deve efetuar a divisão do número 39 pelo número 6, e isto nos coloca diante do algoritmo da divisão, que pode ser organizado da seguinte maneira:

$$\begin{array}{r|l} 39 & 6 \\ \cline{2-2} 3 & 6 \end{array}$$

Isto significa que o número 39 pode ser representado como $39 = 6 \cdot 6 + 3$.

Esta igualdade também pode ser pensada do seguinte modo: o número 39 está organizado em 6 grupos de 6 elementos, restando 3 elementos que não formam um novo grupo de 6.

Portanto, embora o resultado obtido no dado seja 6, o jogador avança 3 casas porque, segundo a regra, deve movimentar seu marcador o número de casas igual ao resto da divisão efetuada.

Problema 2:

Na sua primeira jogada, isto é, com seu marcador na casa com o número 39, o jogador deve torcer para obter qual resultado no lançamento do dado, se desejar movimentar seu marcador o maior número de casas possível?

Solução: Note que, considerando todos os resultados possíveis no lançamento do dado, ainda pelo algoritmo da divisão euclidiana, podemos também escrever o número 39 como:

$$39 = 6 \cdot 6 + 3$$

$$39 = 5 \cdot 7 + 4$$

$$39 = 4 \cdot 9 + 3$$

$$39 = 3 \cdot 13$$

$$39 = 2 \cdot 19 + 1$$

$$39 = 1 \cdot 39$$

Portanto, 4 é o maior resto que pode ser obtido na divisão de 39 pelos números do dado. Logo, 4 é o maior número de casas que se pode avançar a partir do número 39, o que é possível quando o resultado obtido no lançamento do dado for 5.

Vamos agora pensar no seguinte problema:

Problema 3:

Quais números do tabuleiro do jogo "Avançando com o resto" permitem avançar o maior número de casas possíveis, obtendo resultado 6 no lançamento do dado?

Solução: Na solução deste problema, buscamos encontrar um número natural que dividido por 6 resulta um quociente q e tem resto maior possível. Já sabemos que 5 é o maior resto possível numa divisão por 6. Segue disso que $n = q \cdot 6 + 5$.

Note que,

$$q = 0 \Rightarrow n = 5$$
$$q = 1 \Rightarrow n = 11$$
$$q = 2 \Rightarrow n = 17$$
$$q = 3 \Rightarrow n = 23$$
$$q = 4 \Rightarrow n = 29$$
$$q = 5 \Rightarrow n = 35$$
$$q = 6 \Rightarrow n = 41$$
$$q = 7 \Rightarrow n = 47$$
$$q = 8 \Rightarrow n = 53$$
$$q = 9 \Rightarrow n = 59$$
$$q = 10 \Rightarrow n = 65$$
$$q = 11 \Rightarrow n = 71$$
$$q = 12 \Rightarrow n = 77$$
$$q = 13 \Rightarrow n = 83$$
$$q = 14 \Rightarrow n = 89$$
$$q = 15 \Rightarrow n = 95$$

E estes são todos os números naturais menores que 100 que deixam resto 5 quando divididos por 6. Destes resultados, apenas 5, 59, 65, 83 e 95 não estão no tabuleiro do jogo.

Portanto, é possível avançar 5 casas, obtendo resultado 6 no lançamento do dado, a partir das casas com os números 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 71, 77 e 89.

Por outro lado, a demonstração do Teorema 1.3 fornece um algoritmo para encontrar o quociente e o resto da divisão de um número por outro, por subtrações sucessivas, o que vamos explorar na resolução do seguinte problema:

Problema 4:

Imagine que um jogador está com seu marcador na casa com o maior número do tabuleiro do jogo. Qual resultado precisa obter no lançamento do dado para avançar o maior número de casas possível?

Solução: O maior número no tabuleiro do jogo é 97. Para resolver este problema precisamos encontrar o resto da divisão de 97 por 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Para achar o quociente e o resto da divisão de 97 por 6 podemos, por exemplo, considerar as diferenças sucessivas:

$$97 - 6 = 91, \qquad 97 - 2 \cdot 6 = 85, \qquad \cdots \quad 97 - 15 \cdot 6 = 7, \qquad 97 - 16 \cdot 6 = 1 < 6$$

Isto nos dá $q = 16$ e $r = 1$.

Note que

$$97 = 6 + 91,\ 97 = 2 \cdot 6 + 85,\ \cdots\ \ 97 = 15 \cdot 6 + 7,\ 97 = 16 \cdot 6 + 1,$$

mas apenas na igualdade $97 = 16 \cdot 6 + 1$, identificamos imediatamente o 1 como resto da divisão de 97 por 6, pois o resto deve ser um número natural menor que o divisor, e neste caso, apenas 1 é menor que 6.

Da mesma forma, podemos obter

$$97 = 19 \cdot 5 + 2$$

$$97 = 24 \cdot 4 + 1$$

$$97 = 32 \cdot 3 + 1$$

$$97 = 48 \cdot 2 + 1$$

Portanto, estando com o marcador na casa com o número 97, o jogador avança o maior número de casas possível quando obtém o resultado 5 no lançamento do dado.

1.2 DIVISIBILIDADE

1.2.1 Paridade ou divisibilidade por $\boldsymbol{a = 2}$

Segue, da divisão euclidiana, que dado um número natural $n \in \mathbb{N}^*$ qualquer, e considerando $a = 2$, temos duas possibilidades:

(i) o resto da divisão de n por 2 é 0, isto é, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2q$; ou

(ii) o resto da divisão de n por 2 é 1, ou seja, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2q + 1$.

Definição 1.4: Os números naturais se dividem em duas classes: a dos números que são escritos na forma $2q$, para algum $q \in \mathbb{N}$, chamados de números **pares**, e a dos números que são escritos na forma $2q + 1$, para algum $q \in \mathbb{N}$, chamados de números **ímpares**.

Segundo Hefez (2011), "*uma das estruturas mais básicas do conjunto dos números naturais é a sua divisão em números pares e ímpares. (...) Os números* *naturais são classificados em pares e ímpares, pelo menos, desde Pitágoras, 500 anos antes de Cristo”*. (HEFEZ, 2011, p.37)

A paridade de um número natural é o caráter do número ser par ou ímpar. Apesar de ser um procedimento muito simples, a análise da paridade dos números pode ser utilizada na solução de vários problemas interessantes.

No jogo, uma possibilidade de explorar a paridade de um número é pedir para que os alunos identifiquem todos os números do tabuleiro que são divisíveis por 2.

Problema 5:

Quais são os números das casas em que o marcador de um jogador não se desloca quando o resultado obtido no dado for o número 2?

Solução: Note que são várias as formas de fazer esta pergunta para se obter a mesma resposta: no tabuleiro do jogo, quais são os números divisíveis por 2? Ou ainda, quais são os números múltiplos de 2?

Concluímos que para a solução deste problema, basta enumerar os números pares do tabuleiro, isto é, 32, 30, 26, 76, 28, 50, ...

1.2.2 Divisibilidade por $\boldsymbol{a \neq 2}$

Segue também da divisão euclidiana que, dado um número natural $\mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$ qualquer, e sendo agora $a > 2$, pode-se sempre escrever n, de modo único, na forma $n = a \cdot q + r$, onde $q, r \in \mathbb{N}$ e $r < a$.

Por exemplo, se $a = 3$, todo número natural n pode ser escrito em uma, e somente uma, das seguintes formas:

$$3q,\ 3q + 1,\ 3q + 2.$$

Ou ainda, se $a = 4$, todo número natural n pode ser escrito em uma, e somente uma, das seguintes formas:

$$4q,\ 4q + 1,\ 4q + 2,\ 4q + 3.$$

Problema 6:

Suponha que um jogador está com seu marcador na casa com o número 60. Para quais resultados obtidos no dado este jogador não avança nenhuma casa?

Solução: Uma possível solução para este problema consiste em identificar entre os resultados que podem ser obtidos no dado, quais são divisores de 60.

Analisando todas as possibilidades concluímos:

- Se o resultado obtido no dado for 1, o jogador não avança pois 1 divide 60 e o resto da divisão é zero.

De fato, $60 = 1 \cdot 60 + 0$.

- Se o resultado obtido no dado for 2, o jogador também não avança pois 2 divide 60 e o resto da divisão é zero.

De fato, $60 = 2 \cdot 30 + 0$.

- Se o resultado obtido no dado for 3 o jogador também não avança pois 3 divide 60 e o resto da divisão é zero.

De fato, $60 = 3 \cdot 20 + 0$.

- Se o resultado obtido no dado for 4 o jogador também não avança pois 4 divide 60 e o resto da divisão é zero.

De fato, $60 = 4 \cdot 15 + 0$.

- Se o resultado obtido no dado for 5 o jogador também não avança pois 5 divide 60 e o resto da divisão é zero.

De fato, $60 = 5 \cdot 12 + 0$.

- Se o resultado obtido no dado for 6 o jogador também não avança pois 6 divide 60 e o resto da divisão é zero.

De fato, $60 = 6 \cdot 10 + 0$.

Portanto, a partir do número 60, o jogador não avança seu marcador para qualquer que seja o resultado obtido no lançamento do dado, e assim, perde o jogo.

Isto porque todos os resultados que podem ser obtidos no lançamento de um dado de 6 faces pertencem ao conjunto dos divisores positivos de 60:

$$D(60) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30\ e\ 60\}.$$

Observamos que na divisão de 60 por um número d, o resto desta divisão é zero somente quando d é um divisor de 60, isto é, somente quando $d \in D(60) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30\ e\ 60\}$. Qualquer número $d \notin D(60)$ faz com que a divisão de 60 por d tenha um resto diferente de zero.

Se m e n são dois números naturais, o produto $p = m \cdot n$ é um múltiplo tanto de m quanto de n. Neste caso, também dizemos que m e n são fatores de p.

Por exemplo, na multiplicação $24 = 4 \cdot 6$, podemos dizer que:

- 24 é múltiplo de 4 e é múltiplo de 6,
- 4 e 6 são fatores (ou divisores) de 24.

Observamos que, neste contexto, a palavra fator é um sinônimo da palavra divisor.

Evidentemente, dado um número natural a, se d é um divisor positivo de a, então $1 \leq d \leq a$. Assim, todo número natural possui uma quantidade finita de divisores positivos, enquanto possui uma quantidade infinita de múltiplos.

1.3 Números Primos

Definição 1.5: Um número natural maior do que 1 que só é divisível por 1 e por si próprio é chamado de **número primo**.

Por exemplo, 7 é primo pois os únicos divisores positivos de 7 são 1 e 7. Já o número 12 não é primo, pois ele possui divisores diferentes de 1 e 12, como por exemplo, o número 2.

Definição 1.6: Quando um número não é primo, ele é chamado de **composto**. Em outras palavras, podemos definir um número composto como produto de dois números, ambos diferentes de 1.

Por exemplo, 12 é composto, pois 2 é um divisor de 12 e isto significa que $12 = 2 \cdot 6$. Repetindo o mesmo raciocínio, para cada um dos fatores deste produto, observamos que 2 é primo, pois seus únicos divisores positivos são os números 2 e 1. Já o número 6 é composto pois pode ser escrito como $6 = 2 \cdot 3$. Segue daí que:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3.$$

Agora, neste produto cada um dos fatores é um número primo. Quando chegamos neste ponto, dizemos que $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ está fatorado como um produto de números primos, ou que $2 \cdot 2 \cdot 3$ é uma fatoração do número 12 em números primos. Esse resultado vale para qualquer número natural maior que 1. O que garante isso é o seguinte teorema:

Teorema 1.7 (Teorema Fundamental da Aritmética): Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.

Demonstração:

Usaremos a segunda forma do Princípio de Indução sobre n para esta demonstração, e no seu desenvolvimento precisamos do seguinte corolário:

Corolário. Se $p, p_1, \dots, p_n$ são números primos e se $p | p_1, \dots, p_n$, então $p = p_i$ para algum $i = 1, \dots, n$.

Se $n = 2$, o resultado é obviamente verificado.

Suponhamos o resultado válido para todo número natural menor do que n e vamos provar que vale para n. Se o número n é primo, nada temos a demonstrar. Suponhamos, então, que n seja composto. Logo, existem números naturais n_1 e n_2 tais que $n = n_1 n_2$, com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. Pela hipótese de indução, temos que existem números primos $p_1, \dots, p_r$ e $q_1, \dots, q_s$ tais que $n_1 = p_1 \dots p_r$ e $n_2 = q_1 \dots q_s$. Portanto, $n = p_1 \dots p_r \, q_1 \dots q_s$.

Vamos agora provar a unicidade da escrita. Suponha, que $n = p_1 \dots p_r = q_1 \dots q_s$, onde os p_i e os q_j são números primos. Como $p_1 | q_1 \dots q_s$, pelo corolário acima, temos que $p_1 = q_j$ para algum $j = 1, \dots, s$ que, após reordenamento de $q_1, \dots, q_s$, podemos supor que seja q_1. Portanto,

$$p_2 \dots p_r = q_2 \dots q_{s.}$$

Como $p_2 \dots p_r < n$, a hipótese de indução acarreta que $r = s$ e os p_i e os q_j são iguais, aos pares.

□

Os números primos menores que 100 são: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 e 97.

Os números primos que aparecem no tabuleiro do jogo são os seguintes: 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 e 47.

Problema 7:

No jogo “Avançando com o resto”, um jogador sabe que nunca avança com seu marcador quando o resultado obtido no lançamento do dado é 1. Mas observou que para todos os outros resultados obtidos, estando com o marcador nas casas com números primos ele sempre avança. Quais são os números primos do tabuleiro?

Solução: Para solução deste problema, basta enumerar os números primos do tabuleiro, isto é, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 e 47.

Problema 8:

Há no tabuleiro um único número ímpar composto onde o jogador sempre avança quando o resultado obtido no dado é diferente de 1. Qual é esse número?

Solução: Como os números primos são divisíveis apenas por 1 e por ele mesmo, a divisão dos números primos do tabuleiro por qualquer resultado obtido no dado diferente de 1 sempre deixará resto diferente de zero e permitirá avançar o marcador.

Então, uma solução para o problema proposto está na identificação dos números do tabuleiro que não são divisíveis por 2, 3, 4, 5, ou 6. Como estamos procurando um número ímpar, basta verificar a divisibilidade por 3 ou 5, pois os números divisíveis por 2, 4 ou 6 são pares. Nestas condições, encontramos o número 77, cujos divisores são 1, 7, 11 e 77. Observe:

$$77 = 2 \cdot 38 + 1$$

$$77 = 3 \cdot 25 + 2$$

$$77 = 4 \cdot 19 + 1$$

$$77 = 5 \cdot 15 + 2$$

$$77 = 6 \cdot 12 + 5$$

Concluímos então que é sempre possível avançar a partir da casa com número 77, desde que o resultado obtido no lançamento do dado seja diferente de 1.

1.4 CONGRUÊNCIA: ARITMÉTICA MODULAR

Uma possibilidade de exploração significativa de congruência a partir do jogo "Avançando com o resto" poderia partir da solução do seguinte problema:

Problema 9:

Quais são os números das casas do tabuleiro que permitem avançar com o marcador o número máximo de casas possíveis no jogo?

Solução: Primeiro observamos que o número máximo de casas que se pode avançar com um marcador é 5, o que ocorre no maior resto possível para a divisão por 6, que é o maior resultado obtido no lançamento do dado.

Assim, o que procuramos é identificar quais são os números que deixam resto 5 quando são divididos por 6, isto é, $n \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$n = q \cdot 6 + 5.$$

Fazendo $q = 0, 1, 2, 3, \dots, 15$, obtemos todos os números que deixam resto 5 quando são divididos por 6, menores que 100. A saber,

$$n = 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, 65, 71, 77, 83, 89 \ e \ 95,$$

dos quais, os números 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 71, 77 e 89 estão no tabuleiro do jogo.

Intuitivamente, listamos números que são congruentes módulo 6, como veremos nos resultados que apresentamos a seguir:

Definição 1.8: Seja m um número natural diferente de zero. Diremos que dois números naturais a e b são **congruentes módulo m** se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m, denotamos por

$$a \equiv b \ mod \ m.$$

Por exemplo, $21 \equiv 13 \ mod \ 2$, já que os restos da divisão de 21 e de 13 por 2 são iguais a 1.

Quando a relação $a \equiv b \ mod \ m$ não for verdadeira, diremos que a e b não são congruentes, ou que são incongruentes, módulo m. Escreveremos, neste caso,

$$a \not\equiv b \ mod \ m.$$

Como o resto da divisão de qualquer número natural por 1 é sempre zero, temos que $a \equiv b \ mod \ 1$, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Isto torna desinteressante a aritmética dos restos módulo 1. Portanto, consideraremos sempre $m > 1$.

Definição 1.9: Uma relação R sobre um conjunto X não vazio é chamada **relação de equivalência** sobre X se, e somente se, R é reflexiva, simétrica e transitiva. Ou seja, R deve cumprir as seguintes propriedades:

i) se $x \in X$, então $x \ R \ x$ (reflexiva);

ii) se $x, y \in X$, e $x \ R \ y$ então $y \ R \ x$ (simétrica);

iii) se $x, y, z \in X$, com $x \ R \ y$ e $y \ R \ z$ então $x \ R \ z$ (transitiva).

Decorre imediatamente da definição que a congruência, módulo um inteiro fixado m, é uma relação de equivalência, pois é reflexiva, simétrica e transitiva, como mostraremos na seguinte proposição:

Proposição 1.10: Seja $m \in \mathbb{N}$, com $m > 1$. Para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$, tem-se que:

i) $a \equiv a \, mod \, m$.

De fato, a definição da divisão euclidiana garante a unicidade do resto da divisão de a por m.

ii) Se $a \equiv b \, mod \, m$, então $b \equiv a \, mod \, m$.

Como $a \equiv b \, mod \, m$ então, por definição, $a = q \cdot m + r \; e \; b = q' \cdot m + r$, ou seja, as divisões de a e b por m deixam o mesmo resto r. Logo $b \equiv a \, mod \, m$.

iii) Se $a \equiv b \, mod \, m$ e $b \equiv c \, mod \, m$, então $a \equiv c \, mod \, m$.

De fato, como $a \equiv b \, mod \, m$ então, por argumento análogo ao utilizado acima, temos $a = q \cdot m + r \; e \; b = q' \cdot m + r$. Também $b \equiv c \, mod \, m$ por hipótese, assim, $e \; b = q' \cdot m + r$ e $c = q'' \cdot m + r$.

Como vemos, mais uma vez temos o mesmo resto r nas divisões de a, b e c por m. Logo $a \equiv c \, mod \, m$.

□

Para verificar se dois números são congruentes módulo m, não é necessário efetuar a divisão euclidiana de ambos por m para depois comparar os seus restos. É suficiente aplicar o seguinte resultado:

Proposição 1.11: Suponha que $a, b \in \mathbb{N}$ são tais que $b \geq a$. Tem-se que $a \equiv b \, mod \, m$ se, e somente se, $m | b - a$.

Demonstração:

Sejam $a = mq + r$, com $r < m$ e $b = mq' + r'$, com $r' < m$, as divisões euclidianas de a e b por m, respectivamente. Assim,

$$b - a = \begin{cases} m(q' - q) + (r' - r), & se \; r' \geq r \\ m(q' - q) - (r - r'), & se \; r \geq r' \end{cases}$$

Onde $r' - r < m$ ou $r - r' < m$. Como $a \equiv b \, mod \, m$ se, e somente se, $r = r'$, então $b - a = m \cdot (q' - q)$ o que é equivalente a dizer que $m | b - a$.

□

Note que todo número natural é congruente módulo m ao seu resto pela divisão euclidiana por m e, portanto, é congruente módulo m a um dos números $0, 1, \ldots, m-1$. Além disso, dois desses números distintos não são congruentes, módulo m, entre si.

Portanto, para encontrar o resto da divisão de um número a por m, basta encontrar o número natural r dentre os números $0, 1, \ldots, m-1$, que seja congruente a a módulo m.

Proposição 1.12: Sejam $a, b, c, d, m \in \mathbb{N}$, com $m > 1$.

(i) Se $a \equiv b \ mod\ m$ e $c \equiv d \ mod\ m$, então $a + c \equiv b + d \ mod\ m$.

(ii) Se $a \equiv b \ mod\ m$ e $c \equiv d \ mod\ m$, então $ac \equiv bd \ mod\ m$.

Demonstração:

Suponhamos que $a \equiv b \ mod\ m$ e $c \equiv d \ mod\ m$. Podemos, sem perda de generalidade, supor que $b \geq a$ e $d \geq c$. Logo, temos que $m|b - a$ e $m|d - c$.

Basta observar que $m|(b - a) + (d - c)$ e, portanto, $m|(b + d) - (a + c)$, o que prova que $a + c \equiv b + d \ mod\ m$.

Note que $bd - ac = d(b - a) + a(d - c)$. Assim,

$$m|(b - a) \Rightarrow m|d \cdot (b - a) \quad \text{e} \quad m|(d - c) \Rightarrow m|a \cdot (d - c).$$

Logo $m|d(b - a) + a(d - c) = bd - ac$. Portanto $ac \equiv bd \ mod\ m$.

□

Exemplo 1:

Nas divisões de 163 *e* 360 *por* 7 *obtemos, respectivamente, restos* 2 *e* 3. *Ou seja,* $163 = 7 \cdot 23 + 2$ *e* $360 = 7 \cdot 51 + 3$. *Qual é o resto da divisão de* $163 + 360$ *por* 7*?*

Solução: Ao propor uma solução para este problema, consideramos a possibilidade de calcular o valor da soma $163 + 360$ e, em seguida, dividir este resultado por 7, para obter a resposta desejada.

Mas seria possível calcular o resto da divisão de uma soma por um divisor apenas somando os restos das divisões de cada uma das parcelas pelo mesmo divisor?

Neste raciocínio, apresentamos outra estratégia para a solução, onde o que pretendemos fazer é achar a resposta sem calcular a soma $163 + 360$.

A ideia é imaginar que você tenha 163 bolinhas, que, conforme o enunciado, estão organizadas em grupos de 7 bolinhas (exatamente 23) mais um grupo menor de 2 bolinhas. Da mesma forma, imaginamos também 360 bolinhas organizadas em grupos de 7 bolinhas (exatamente 51) mais um grupo menor de 3 bolinhas. Agora, juntando todas as bolinhas, obtemos $163 + 360$ bolinhas que estão organizadas em vários grupos de 7 (exatamente 23 mais 51, isto é, num total de 74 grupos), um grupo de 2 e um grupo de 3 bolinhas, sendo que estes dois últimos grupos podem ser unidos em um único grupo de 5 bolinhas. Portanto todas as $163 + 360$ bolinhas estão organizadas em vários grupos de 7 e um grupo de 5 bolinhas. Como 5 é um número menor que 7, o que foi feito significa que o resto da divisão de $163 + 360$ por 7 é igual a $5 = 2 + 3$.

Acompanhe o seguinte desenvolvimento:

$$163 + 360 = (7 \cdot 23 + 2) + (7 \cdot 51 + 3) = 7 \cdot (23 + 51) + (2 + 3) = 7 \cdot 74 + 5$$

Nesta igualdade identificamos imediatamente o número 5 como o resto da divisão de $163 + 360$ por 7.

Portanto, neste exemplo, vimos que para calcular o resto da divisão da soma $163 + 360$ por 7, bastou somar os restos das divisões dos números 163 e 360 por 7.

Usando a notação de congruência e aplicando a proposição 1.12(i), resolvemos o mesmo problema da seguinte maneira:

Sendo $163 \equiv 2\, mod\; 7$ e $360 \equiv 3\, mod\; 7$ temos, pela proposição, que $163 + 360 \equiv 2 + 3\, mod\; 7$, isto é, $163 + 360 \equiv 5\, mod\; 7$, de onde concluímos que 5 é o resto da divisão da soma $163 + 360$ por 7.

Exemplo 2:

Nas divisões de 106 *e* 197 *por* 6 *obtemos, respectivamente, restos* 4 *e* 5*. Ou seja,* $106 = 6 \cdot 17 + 4$ *e* $197 = 6 \cdot 32 + 5$*. Qual é o resto da divisão de* $106 + 197$ *por* 6*?*

Solução: Como vimos no exemplo anterior, é possível calcular o resto da divisão de uma soma por um divisor apenas somando os restos das divisões de cada uma das parcelas pelo mesmo divisor. Mas, e quando a soma dos restos for maior que o divisor, o que fazemos?

Para encontrar a resposta sem calcular a soma $106 + 197$, vamos imaginar que temos esta quantidade de bolinhas e queremos dividi-las em grupos de 6. Aquela quantidade $r < 6$ que não puder ser agrupada para formar um novo grupo de 6 é o resto da divisão.

Assim, do enunciado, sabemos que 106 bolinhas podem ser agrupadas em 17 grupos de 6 mais um grupo menor de 4 bolinhas. E que 197 bolinhas podem ser agrupadas em 32 grupos de 6 mais um grupo menor com 5 bolinhas. Juntando todas as bolinhas, vemos que as 106 + 197 bolinhas podem ser agrupadas em 17 + 32 = 49 grupos de 6 bolinhas, um grupo com 4 e um grupo com 5, sendo que estes dois últimos grupos podem ser unidos em um grupo com 9 bolinhas. Agora este grupo de 9 bolinhas pode ser dividido em um grupo com 6 bolinhas e um outro grupo com 3 bolinhas. Deste modo, vemos que as 106 + 197 bolinhas podem ser organizadas em 49 + 1 = 50 grupos de 6 bolinhas e um outro grupo menor com 3 bolinhas. Como 3 < 6 identificamos este número 3 como o resto da divisão de 106 + 197 por 6.

Utilizando a propriedade distributiva poderíamos reescrever esta solução do seguinte modo:

$$106 + 197 = (6 \cdot 17 + 4) + (6 \cdot 32 + 5) = 6 \cdot (17 + 32) + (4 + 5) = 6 \cdot 49 + 9 =$$
$$= 6 \cdot 49 + (6 + 3) = 6 \cdot (49 + 1) + 3 = 6 \cdot 50 + 3.$$

Nesta igualdade, identificamos o 3 como o resto da divisão de 106 +197 por 6. Portanto, como no exemplo anterior, para calcular o resto da divisão da soma 106+197 por 6, somamos os restos das divisões dos números 106 e 197 por 6. Neste caso obtivemos 4+5=9. Como este número é maior que 6, ele ainda pode ser dividido por 6, resultando um resto igual a 3.

Usando a notação de congruência e aplicando agora a proposição 1.12 (i), resolvemos o mesmo problema da seguinte maneira: sendo $106 \equiv 4 \; mod \; 6$ e $197 \equiv 5 \; mod \; 6$, temos que $106 + 197 \equiv 4 + 5 \; mod \; 6,$ isto é, $106 + 197 \equiv 9 \equiv 3 \; mod \; 6$, de onde concluímos que 3 é o resto da divisão da soma $106 + 197$ por 6.

1.5 Critérios de Divisibilidade

A seguir, vamos apresentar alguns critérios de divisibilidade como aplicações do conceito de congruência. Dutenhefner e Cadar observam que “em muitos casos, o uso de um critério de divisibilidade só faz sentido para números “grandes”. Para números “pequenos”, o problema de decidir se um dado número é divisível ou não por outro pode ser resolvido através do uso da tabuada ou de uma simples divisão. Além disso, como “ser divisível por” e “ser múltiplo de” são conceitos que estão intimamente relacionados, é importante ter em mente que um critério de divisibilidade também é um critério de multiplicidade”.

Vamos nos deter apenas aos critérios de divisibilidade que podem ser utilizados como estratégia para o jogo “Avançando com o resto”, na versão que envolve apenas um dado. Isto é, faremos a demonstração dos critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5 e 6 e, para isso, antes precisaremos descrever o sistema de numeração decimal.

1.5.1 Sistema de Numeração Decimal

No sistema de numeração decimal, todo número é representado por uma sequência formada pelos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Por serem dez os algarismos, o sistema é chamado decimal.

O sistema de numeração decimal também é posicional, pois na escrita de um número, cada algarismo usado, além do seu valor absoluto, possui um peso que lhe é atribuído em função da posição que ele ocupa no número. Esse valor relativo, sempre uma potência de dez, varia do seguinte modo: o algarismo da extrema direita tem peso um; o seguinte, sempre da direita para a esquerda, tem peso dez; o seguinte tem peso cem, o seguinte tem peso mil, etc.

Por exemplo, o número 2017, na base 10, é a representação de

$$2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 7.$$

Os sistemas de numeração posicionais, como o sistema de numeração decimal, baseiam-se no seguinte resultado, que é uma aplicação da divisão euclidiana:

Teorema 1.13: Dados $a, b \in \mathbb{N}$, com $b > 1$, existem números naturais $c_0, c_1, \dots, c_n$ menores do que b, univocamente determinados, tais que

$$a = c_0 + c_1 b + c_2 b^2 + \cdots + c_n b^n.$$

Demonstração: Vamos demonstrar o teorema usando a segunda forma do Princípio de Indução sobre a.

Se $a = 0$, ou se $a = 1$, basta tomar $n = 0$ e $c_0 = a$. Isto é, $0 = 0 \cdot b^0$ e $1 = 1 \cdot b^0$.

Supondo o resultado válido para todo natural menor do que a, vamos prová-lo para a.

Pela divisão euclidiana, existem q e r únicos tais que

$$a = bq + r, \text{ com } r < b.$$

Como $q < a$, pela hipótese de indução, segue-se que existem números naturais n' e $d_0, d_1, \dots, d_{n'}$, com $d_j < b$, para todo $j = 1, \dots, n$, tais que

$$q = d_0 + d_1 b + \cdots + d_{n'} b^{n'}.$$

Considerando as igualdades acima destacadas, temos que

$$a = b \cdot q + r = b \cdot \left(d_0 + d_1 b + \cdots + d_{n'} b^{n'}\right) + r,$$

donde o resultado segue pondo $c_0 = r$, $n = n' + 1$ e $c_j = d_{j-1}$ para $j = 1, \dots, n$.

A unicidade segue das unicidades estabelecidas.

□

A representação dada no teorema acima é chamada de expansão relativa à base b, o que também nos fornece um algoritmo para determinar a expansão de um número qualquer relativamente à base b.

Trata-se de aplicar, sucessivamente, a divisão euclidiana, como segue:

$$a = bq_0 + r_0, \quad r_0 < b,$$

$$q_0 = bq_1 + r_1, \quad r_1 < b,$$

$$q_1 = bq_2 + r_2, \quad r_2 < b,$$

e assim por diante. Como $a > q_0 > q_1 > \cdots$, deveremos, em um certo ponto, ter $q_{n-1} < b$ e, portanto, de $q_{n-1} = bq_n + r_n$, decorre que $q_n = 0$, o que implica $0 = q_n = q_{n+1} = q_{n+2} = \cdots$ e, portanto, $0 = r_{n+1} = r_{n+2} = \cdots$.

Assim, temos que

$$a = r_0 + r_1 b + \cdots + r_n b^n.$$

A expansão numa dada base b nos fornece um método para representar os números naturais. Para tanto, escolha um conjunto S de b símbolos

$$S = \{s_0, s_1, \dots, s_{b-1}\},$$

com $s_0 = 0$, para representar os números de 0 a $b - 1$. Um número natural a na base b se escreve da forma

$$x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0,$$

com $x_0, \dots, x_n \in S$ e n variando, dependendo de a, representando o número

$$x_0 + x_1 b + \cdots + x_n b^n.$$

No sistema decimal, isto é, de base $b = 10$, usa-se

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Por exemplo, escrevemos o número 210515 da seguinte maneira:

$$2 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 5.$$

Daremos a seguir critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5 e 6, que são os possíveis resultados obtidos no lançamento de um dado de 6 faces.

1.5.2 Critério de divisibilidade por 2

Um número natural é divisível por 2 quando seu algarismo da unidade é 0, 2, 4, 6 ou 8.

De fato, dado um número $n = n_r n_{r-1} \dots n_1 n_0$, na base 10, sua expansão decimal é dada por $n = n_r 10^r + n_{r-1} 10^{r-1} + \cdots + n_1 10 + n_0$.

Como $10 \equiv 0 \; mod \; 2$, temos que $10^i \equiv 0 \; mod \; 2$ e $n_i 10^i \equiv 0 \; mod \; 2; \; i \geq 1$. Assim, temos que

$$n \equiv n_0 \; mod \; 2.$$

Isto é, n é divisível por 2 se, e somente se, n_0 é divisível por 2.

1.5.3 Critério de divisibilidade por 3

Um número natural é divisível por 3 se a soma de seus algarismos é divisível por 3.

De fato, como $10 \equiv 1 \; mod \; 3$, temos que $10^i \equiv 1 \; mod \; 3$ e $n_i 10^i \equiv n_i \; mod \; 3$; $i \geq 1$.

Isto mostra que, se n é representado na base 10 como $n = n_r n_{r-1} \dots n_1 n_0$ e sua expansão decimal é dada por $n = n_r 10^r + n_{r-1} 10^{r-1} + \cdots + n_1 10 + n_0$ então

$$n \equiv n_r + n_{r-1} + \cdots + n_0 \; mod \; 3,$$

o que prova que n é divisível por 3 se, e somente se, $n_r + n_{r-1} + \cdots + n_0$ é divisível por 3.

1.5.4 Critério de divisibilidade por 4

Um número natural é divisível por 4 quando o número formado pelos seus dois últimos algarismos é divisível por 4.

De fato, se n é representado na base 10 como $n = n_r n_{r-1} \dots n_2 n_1 n_0 = n_r n_{r-1} \dots n_2 \cdot 100 + n_1 n_0$, e considerando que $100 = 4 \cdot 25 \equiv 0 \; mod \; 4$, segue que

$$n = n_r n_{r-1} \dots n_2 n_1 n_0 = n_r n_{r-1} \dots n_2 \cdot 100 + n_1 n_0 \equiv 0 + n_1 n_0 \; mod \; 4.$$

Isto mostra que,

$$n \equiv n_1 n_0 \; mod \; 4,$$

o que prova que n é divisível por 4 se, e somente se, $n_1 n_0$ é divisível por 4.

1.5.5 Critério de divisibilidade por 5

Um número natural é divisível por 5 quando termina em 0 ou 5.

De fato, como $10 \equiv 0 \; mod \; 5$, temos que $n_i 10^i \equiv 0 \; mod \; 5; \; i \geq 1$.

Assim, dado um número $n = n_r n_{r-1} \dots n_0$, na base 10, temos que $n \equiv n_0 \; mod \; 5$. Isto é, n é divisível por 5 se, e somente se, n_0 é divisível por 5, ou seja, $n_0 = 0$ ou $n_0 = 5$.

1.5.6 Critério de divisibilidade por 6

Um número natural é divisível por 6 quando é divisível, ao mesmo tempo, por 2 e por 3, isto é, quando é um número par que tem a soma de seus algarismos divisível por 3.

Aplicando os critérios de divisibilidade apresentados e usando o algoritmo da divisão sempre que for necessário, podemos propor como problema aos alunos a organização de uma tabela, fazendo um trabalho de tratamento da informação:

Problema 10:

Complete a tabela de dupla entrada identificando os pares de números (número do tabuleiro, resultado obtido no lançamento do dado) com a marcação dos restos obtidos na divisão entre eles:

FIGURA 2 – Tabela: Restos obtidos na divisão do número da casa do tabuleiro do jogo “Avançando com o resto” pelo resultado obtido no lançamento do dado

Número da casa (Dividendo)	Resultados obtidos no lançamento do dado (Divisor)					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
39	0	1	0	3	4	3
32	0	0	2	0	2	2
35	0	1	2	3	0	5
30	0	0	0	2	0	0
27	0	1	0	3	2	3
26	0	0	2	2	1	2
29	0	1	2	1	4	5
76	0	0	1	0	1	4
41	0	1	2	1	1	5
28	0	0	1	0	3	4

37	0	1	1	1	2	1
50	0	0	2	2	0	2
97	0	1	1	1	2	1
92	0	0	2	0	2	2
15	0	1	0	3	0	3
16	0	0	1	0	1	4
21	0	1	0	1	1	3
14	0	0	2	2	4	2
53	0	1	2	1	3	5
68	0	0	2	0	3	2
55	0	1	1	3	0	1
60	0	0	0	0	0	0
47	0	1	2	3	2	5
12	0	0	0	0	2	0
13	0	1	1	1	3	1
84	0	0	0	0	4	0
71	0	1	2	3	1	3
22	0	0	1	2	2	4
33	0	1	0	1	3	3
18	0	0	0	2	3	0
85	0	1	1	1	0	1
39	0	1	0	3	4	3
77	0	1	2	1	2	5
34	0	0	1	2	4	4
31	0	1	1	3	1	1
42	0	0	0	2	2	0
0	0	0	0	0	0	0
19	0	1	1	3	4	1
88	0	0	1	0	3	4
25	0	1	1	1	0	1
36	0	0	0	0	1	0
43	0	1	1	3	3	1
20	0	0	2	0	0	2
23	0	1	2	3	3	5
24	0	0	0	0	4	0
17	0	1	2	1	2	5
89	0	1	2	1	4	5
11	0	1	2	3	1	5
43	0	1	1	3	3	1

Fonte: Elaboração da autora

CAPÍTULO 2 - ATIVIDADE PROPOSTA PARA SALA DE AULA

Neste capítulo apresentaremos uma proposta de uso do jogo "Avançando com o resto" em sala de aula como recurso didático para o ensino de alguns conteúdos matemáticos. Diversos jogos são utilizados na escola pelo seu potencial para o ensino e a aprendizagem, especialmente nas aulas de matemática, quando o uso de jogos favorece a aprendizagem significativa e o desenvolvimento de competências e habilidades, como afirma Smole:

> O trabalho com jogos nas aulas de matemática, quando bem planejado e orientado, auxilia o desenvolvimento de habilidades como observação, análise, levantamento de hipóteses, busca de suposições, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização, as quais estão estreitamente relacionadas ao assim chamado raciocínio lógico. (SMOLE, 2007, p.9)

Assim, tivemos o cuidado de relatar a atividade realizada com riqueza de detalhes, para apoiar o professor nas tarefas de planejamento e mediação do jogo como recurso didático, explorando a ludicidade inerente ao jogo, além de todo o seu potencial educativo. Planejar uma aula com uso de jogos não é tarefa fácil, *"exige uma série de intervenções do professor para que, mais que jogar, mais que brincar, haja aprendizagem."* (SMOLE, 2007, p.15)

Nossa proposta de utilização do jogo está baseada na metodologia da resolução de problemas. Embora durante o jogo surjam naturalmente inúmeras situações-problema, apresentamos nesta atividade, proposta de problematização para o momento do jogo e a partir do jogo.

Também consideramos as orientações curriculares dos PCNs e Currículo de Matemática do Estado de São Paulo ao planejar esta sequência didática indicada para as turmas de 5º ano do Ensino Fundamental.

2. 1 Planejamento da atividade

Para a aplicação do jogo em sala de aula, elaboramos uma sequência de atividades organizadas em três etapas: avaliação diagnóstica, aplicação do jogo e questionamentos para exploração de conceitos matemáticos através do jogo. No planejamento desta sequência didática detalhamos nossos objetivos, conteúdos explorados, materiais utilizados e avaliação das aprendizagens.

Sequência Didática: A divisão no jogo “Avançando com o resto”

Público-alvo: Alunos do 5º ano do Ensino Fundamental.

Justificativa: Consolidar e ampliar o conhecimento dos alunos sobre a divisão de números naturais, considerando as dificuldades encontradas por eles nesta operação básica, necessária à resolução de inúmeras situações do cotidiano.

Objetivos:

- Analisar, interpretar e resolver problemas, compreendendo diferentes significados da divisão;
- Consolidar e ampliar o uso de procedimentos de cálculo convencionais, a partir do estudo reflexivo do algoritmo da divisão euclidiana, considerando procedimentos e estratégias pessoais;
- Explorar conceitos matemáticos envolvidos no algoritmo da divisão euclidiana, a partir do jogo “Avançando com o resto”.

Conceitos matemáticos explorados: Divisão entre números naturais; Múltiplos e divisores de números naturais; Divisibilidade; Paridade; Números primos e compostos; Congruência: aritmética dos restos; Sistema de Numeração Decimal e Critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5 e 6.

Recursos necessários:

- Avaliação diagnóstica;
- Jogo “Avançando com o resto”;
- Tabela para registro das divisões efetuadas no jogo;
- Problemas propostos a partir do jogo.

Observação: todo material produzido para realização desta atividade está organizado em folha para o aluno, disponível em anexo para apreciação e uso.

Metodologia:

Conversa inicial

Inicie uma conversa com os alunos comentando que irão retomar alguns conhecimentos sobre a divisão. Pergunte se sabem fazer divisões, se gostam de resolver problemas, se querem aprender um jogo.

Explique que é muito importante para a continuidade dos trabalhos, que se dediquem na resolução de alguns problemas que você irá propor. Peça para que todos façam o melhor que puderem para responder as perguntas dos problemas. Oriente para que caprichem no registro da solução, indicando que podem fazer contas, esquemas, desenhos e outros recursos que queiram, para explicar a estratégia que usaram para resolver os problemas. Finalmente, diga que os problemas não são difíceis, mas que precisam ler com atenção, quantas vezes forem necessárias, para que compreendam a história e encontrem uma forma de resolver.

Atividade 1: Sugestão de problemas para avaliação diagnóstica sobre a divisão.

FIGURA 3 – Modelo de avaliação proposta aos alunos

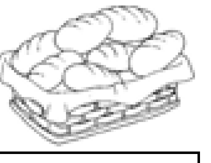
unesp IBILCE PROFMAT

Escola Municipal "Prof. João Arnaldo Andreu Avelhaneda" Data: ____/____/________

Nome:	Turma:

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

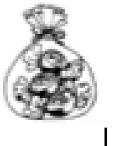
(Simulado da Prova Brasil – adaptado)



Questão 1: Uma merendeira preparou 78 pães que foram distribuídos igualmente em 6 cestas. Quantos pães foram colocados em cada cesta?

Resolução:

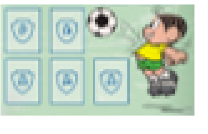
Resposta:



Questão 2: Ana está organizando sacolinhas para um aniversário. Ela tem 78 balas e quer colocar 6 balas em cada sacolinha. De quantas sacolinhas Ana precisa?

Resolução:

Resposta:



Questão 3: Davi juntou 63 figurinhas para colar no seu álbum. Em cada página cabem 5 figurinhas. Quantas páginas do álbum Davi irá preencher?

Resolução:

Resposta:

Fonte: Elaboração da autora

Os problemas propostos foram adaptados de simulado da Prova Brasil, com o objetivo de avaliar a compreensão dos diferentes significados da divisão e também o uso do algoritmo da divisão euclidiana, envolvendo divisão com números naturais e resto diferente de zero.

A avaliação foi composta pelas seguintes questões:

Questão 1: *Uma merendeira preparou 78 pães que foram distribuídos igualmente em 6 cestas. Quantos pães foram colocados em cada cesta?*
Questão 2: *Ana está organizando sacolinhas para um aniversário. Ela tem 78 balas e quer colocar 6 balas em cada sacolinha. De quantas sacolinhas Ana precisa?*
Questão 3: *Davi juntou 63 figurinhas para colar no seu álbum. Em cada página cabem 5 figurinhas. Quantas páginas do álbum Davi irá preencher?*

De acordo com Cardoso (2005), podemos considerar que o primeiro problema envolve a ideia da divisão em partes iguais, sugerindo a divisão através de subtrações sucessivas. Já o segundo problema envolve a ideia de medida, o que consiste em sucessivas estimativas para descobrir "quantas vezes cabem". No terceiro problema apresentamos uma situação onde o resto da divisão é diferente de zero.

Realizada a atividade, é preciso interessar-se pelas respostas dos alunos, especialmente aquelas que não apresentam a solução esperada, convencional, correta. É preciso compreender o que sabem os alunos que erram, para planejar intervenções pontuais e eficazes.

Na correção das atividades, é muito importante discutir os problemas e socializar as diferentes respostas, inclusive as erradas ou parcialmente corretas, sem ofender ou constranger os alunos. Sugerimos que as situações sejam representadas com uso de materiais que podem ser manipulados pelos alunos e permitam explorar a divisão como uma sequência de subtrações. Este processo será abreviado quando o aluno fizer estimativas do resultado, mesmo que com auxilio de tabuadas, favorecendo a compreensão das etapas do algoritmo da divisão euclidiana.

Atividade 2: Aplicação do jogo "Avançando com o resto".

Smole (2007) propõe formas de explorar os jogos nas aulas de matemática para que os alunos possam divertir-se, mas também aprender com o jogo. Para o planejamento do trabalho com os jogos, nos sugere apresentar o jogo aos alunos, organizar a classe para jogar, fazer a gestão do tempo, e problematizar o jogo.

Para aplicação do jogo “Avançando com o resto”, organizamos as etapas sugeridas a partir do seguinte roteiro:

- Apresentar o jogo aos alunos (tabuleiro, dado, marcador e tabela para registro das jogadas) e convidá-los a explorar as peças do jogo.
- Ler e discutir as regras do jogo de modo que todos compreendam o modo de jogar e orientar para que façam o registro dos cálculos realizados em suas jogadas.
- Organizar os alunos em grupos (preferencialmente de 4 pessoas) para que possam jogar em equipes (duplas).
- Acompanhar os alunos jogando para intervenções pontuais e questionamentos oportunos que favoreçam a aprendizagem, na perspectiva da resolução de problemas.

FIGURA 4 – Modelo de ficha para registro do jogo

unesp IBILCE PROFMAT

Escola Municipal "Prof. João Arnaldo Andreu Avelhaneda" Data: ____/____/________

Equipe:

Jogador 1:
Jogador 2:

REGISTROS DO JOGO 'AVANÇANDO COM O RESTO"

	Dividendo (Número da casa do tabuleiro)	**Divisor** (Número obtido no lançamento do dado)	**Cálculo** (Algoritmo da divisão) Dividendo ⌊ Divisor, Resto Quociente	**Quociente** (Resultado da divisão)	**Resto** (Número de casas que avança o marcador)
Jogador 1					
Jogador 2					
Jogador 1					
Jogador 2					

Fonte: Elaboração da autora

Durante o jogo, enquanto observa os alunos jogando, o professor pode pedir para que eles expliquem uma jogada ou justifiquem uma decisão. *“Essa problematização no ato do jogo favorece sua percepção das aprendizagens, das dúvidas, das confusões, do envolvimento dos alunos na própria ação de jogar”* (SMOLE, 2007, p.20). É possível prever algumas jogadas e planejar alguns questionamentos que podem ser feitos na problematização do jogo. Sugerimos algumas questões:

- *A partir do número 39 (início do jogo), o que acontece quando sai o número 3 no dado?*
- *A partir do número 39 (início do jogo), o que acontece quando sai o número 4 no dado?*
- *O que acontece quando sai o número 1 no dado?*
- *A partir do número 30, que número precisa sair no dado para conseguir movimentar o marcador?*
- *Quando sai o número 2 no dado, quantas casas é possível avançar?*
- *Quando sai o número 6 no dado, sempre avança muitas casas?*
- *Qual é o maior número de casas que uma equipe consegue avançar seu marcador, em uma jogada?*
- *Para cada divisor, quais são os possíveis restos?*
- *Por que na casa com o número zero está escrito TCHAU?*
- *O que acontece quando o marcador para na casa com o número 60?*
- *Quais são os números das casas que não permitem avançar o marcador quando sai o número 5 no dado?*
- *A partir do número 20, é possível ganhar o jogo em uma única jogada?*
- *A partir do número 43, quais são os números que devem sair no dado para que você ganhe o jogo numa única jogada?*
- *A partir do número 43, para que números do dado você não avança seu marcador?*
- *A partir do número 43, seguindo as regras do jogo, o que acontece quando sai o número 5 no dado?*

Outro aspecto importante a ser acompanhado nos grupos no momento do jogo é o registro das jogadas, é importante observar se há um rodizio entre os alunos da equipe para o registro das jogadas, se está havendo a colaboração entre os alunos especialmente no recurso às tabuadas, mas principalmente, se os cálculos estão corretos e os alunos estão de fato considerando o resto para avançar o marcador. Este é um momento favorável para intervir na realização do algoritmo da divisão, fazendo a recuperação contínua das dificuldades observadas na avaliação diagnóstica.

Atividade 3: Problematização do jogo.

Ao escolher o jogo como recurso didático para o ensino de matemática, na perspectiva da resolução de problemas, o que pretendemos é ir além dos objetivos iniciais do jogo, queremos explorar todo o seu potencial para a aprendizagem, promovendo a consolidação e o aprofundamento de aprendizagens, por meio de problemas que desenvolvam o pensamento crítico daqueles que jogam.

Sobre a possibilidade de exploração a ser feita após o jogo, entre várias propostas de problematização possíveis, Smole sugere que sejam escolhidas *"possíveis jogadas para os alunos analisarem, criadas perguntas que lhes permitam pensar em aspectos do jogo que podem ser aprofundados, simular situações nas quais analisem algumas jogadas possíveis (...)".* (SMOLE, 2007, p.20).

Para sistematização de aprendizagens que podem ser exploradas no jogo, apresentamos a proposta de problematização, a partir de questões apoiadas no desenvolvimento teórico apresentado no capítulo 1 deste trabalho.

FIGURA 5 – Modelo de atividade proposta aos alunos com problemas a partir do jogo

Escola Municipal "Prof. João Arnaldo Andreu Avelhaneda" Data: ____/____/________

Nome:	Turma:

SITUAÇÕES PROBLEMA A PARTIR DO JOGO 'AVANÇANDO COM O RESTO"

Problema 1: Conhecendo as regras do jogo "Avançando com o resto", suponha que o primeiro jogador lança o dado e obtém o resultado 6. Seu marcador está na casa inicial do tabuleiro com o número 39. Quantas casas este jogador deve avançar seu marcador?

Resolução:

Resposta:

Problema 2: Suponha que no início do jogo, o marcador do segundo jogador esteja na casa inicial do tabuleiro com o número 39. Desejando avançar o maior número de casas possível, este jogador deve torcer para obter qual resultado no lançamento do dado?

Resolução:

Resposta:

Problema 3: Suponha que um jogador está com seu marcador na casa com o número 30. Para quais resultados obtidos no dado este jogador não avança seu marcador?

Resolução:

Resposta:

Problema 4: Suponha que um jogador obteve resultado 1 no lançamento do dado quando seu marcador estava nas casas 32, 50 e 21. Nestas situações, quantas casas ele avançou seu marcador?

Resolução:

Resposta:

Problema 5: No tabuleiro do jogo, a casa com o número 0 está marcada com a palavra "Tchau". O que pode acontecer quando o marcador de um jogador para nesta casa?

Resolução:

Resposta:

Problema 6: Assim como o número 0 (zero), há no jogo outro número que não permite avançar o marcador para nenhum dos resultados obtidos no lançamento dos dados?

Resolução:

Resposta:

Problema 7: Qual é o maior número de casas que um jogador pode avançar com seu marcador numa rodada? Quando isso acontece?

Resolução:

Resposta:

Fonte: Elaboração da autora

A seguir, os enunciados dos problemas propostos:

Problema 1: *Conhecendo as regras do jogo “Avançando com o resto”, suponha que o primeiro jogador lança o dado e obtém o resultado 6. Seu marcador está na casa inicial do tabuleiro com o número 39. Quantas casas este jogador deve avançar seu marcador?*

Problema 2: *Suponha que no início do jogo, o marcador do segundo jogador esteja na casa inicial do tabuleiro com o número 39. Desejando avançar o maior número de casas possível, este jogador deve torcer para obter qual resultado no lançamento do dado?*

Problema 3: *Suponha que um jogador está com seu marcador na casa com o número 30. Para quais resultados obtidos no dado este jogador não avança seu marcador?*

Problema 4: *Suponha que um jogador obteve resultado 1 no lançamento do dado quando seu marcador estava nas casas 32, 50 e 21. Nestas situações, quantas casas ele avançou seu marcador?*

Problema 5: *No tabuleiro do jogo, a casa com o número 0 está marcada com a palavra “Tchau”. O que pode acontecer quando o marcador de um jogador para nesta casa?*

Problema 6: *Assim como o número 0 (zero), há no jogo outro número que não permite avançar o marcador para nenhum dos resultados obtidos no lançamento dos dados?*

Problema 7: *Qual é o maior número de casas que um jogador pode avançar com seu marcador numa única rodada? Quando isso acontece?*

Problema 8: *Complete a tabela de dupla entrada identificando os pares de números (número do tabuleiro, resultado obtido no lançamento do dado) com a marcação dos restos obtidos na divisão entre eles:*

FIGURA 6 – Tabela: Restos obtidos na divisão do número da casa do tabuleiro do jogo “Avançando com o resto” pelo resultado obtido no lançamento do dado

Número da casa (Dividendo)	***Resultados obtidos no lançamento do dado (Divisor)***					
	1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***
39						
32						
35						
30						
27						
26						
29						
76						
41						
28						
37						
50						
97						
92						
15						
16						
21						
14						
53						
68						
55						
60						
47						
12						
13						
84						
71						
22						
33						
18						
85						
39						
77						
34						
31						
42						
0						
19						
88						
25						
36						
43						
20						
23						
24						
17						
89						
11						
43						

Fonte: Elaboração da autora

AVALIAÇÃO

Neste trabalho, sugerimos a avaliação diagnóstica, na primeira atividade realizada pelas crianças, e também a avaliação contínua, realizada pela observação dos grupos nos momentos de jogo e pelos questionamentos feitos na problematização do jogo.

A avaliação num trabalho realizado a partir de jogos e resolução de problemas requer repensarmos sobre as finalidades da avaliação, sobre o que e como se avalia, isto porque o que se quer avaliar vai além de aprendizagens cognitivas, é preciso mapear desenvolvimento de atitudes. Por este motivo, a avaliação que propomos é uma ação constante, conforme nos apresenta Smole (2007):

> Ainda que possa parecer uma contradição, para nós o jogo nas aulas de matemática é uma atividade séria, que exige planejamento cuidadoso, avaliação constante das ações didáticas e das aprendizagens dos alunos. Nossos estudos mostram que, se bem aproveitadas as situações de jogo, todos ganham. Ganha o professor porque tem uma possibilidade de propor formas diferenciadas de os alunos aprenderem, permitindo um maior envolvimento de todos e criando naturalmente uma situação de atendimento à diversidade de aprendizagem, uma vez que cada jogador é que controla seu ritmo, seu tempo de pensar e aprender. Ganha o aluno porque fica envolvido por uma atividade complexa que permite a ele, ao mesmo tempo em que constrói noções e conceitos matemáticos, desenvolver muitas outras habilidades que serão úteis por toda a vida e para aprender não apenas matemática. (SMOLE, 2007, p.22)

Nesta perspectiva, avaliar significa acompanhar o progresso dos alunos em relação às aprendizagens construídas e ao desenvolvimento de atitudes. É a partir de suas observações que o professor faz intervenções pontuais, validando ou não os cálculos realizados, solucionando dúvidas, propondo questões que favoreçam a socialização de estratégias. Para este momento da ação didática, os PCNs sugerem questões norteadoras para a observação dos professores, como:

> Procura resolver problemas por seus próprios meios? Faz perguntas? Usa estratégias criativas ou apenas as convencionais? Justifica as respostas obtidas? Comunica suas respostas com clareza? Participa dos trabalhos em grupo? Ajuda os outros na resolução de problemas? Contesta pontos que não compreende ou com os quais não concorda? (BRASIL, 2001, p.58-59)

Embora a observação e o diálogo sejam os meios para a avaliação contínua que sugerimos, os registros desta ação são indispensáveis, sejam por meio de fichas, relatos, ou outros meios que o professor planeje usar. Os registros das observações feitas na realização deste trabalho serão destacados na próxima seção, onde faremos a descrição da atividade realizada.

2. 2 Descrição da atividade realizada em sala de aula

Realizamos a atividade planejada em uma turma de 30 alunos do 5º ano A, período da manhã, de uma escola do município de Jales, interior do estado de São Paulo. Para que todas as etapas da atividade planejada fossem cumpridas e os objetivos propostos fossem atingidos, realizamos 7 encontros de 2 aulas com a turma, a partir dos quais organizamos nosso relato.

Numa conversa inicial, apresentamos o trabalho dizendo aos alunos que aprenderiam um jogo que envolvia a divisão. De imediato já percebemos que muitos não gostaram da ideia porque não sabiam fazer divisões. Assim, em nossa fala, dissemos que podíamos ajudar e que, no jogo, também iam aprender muito com os colegas.

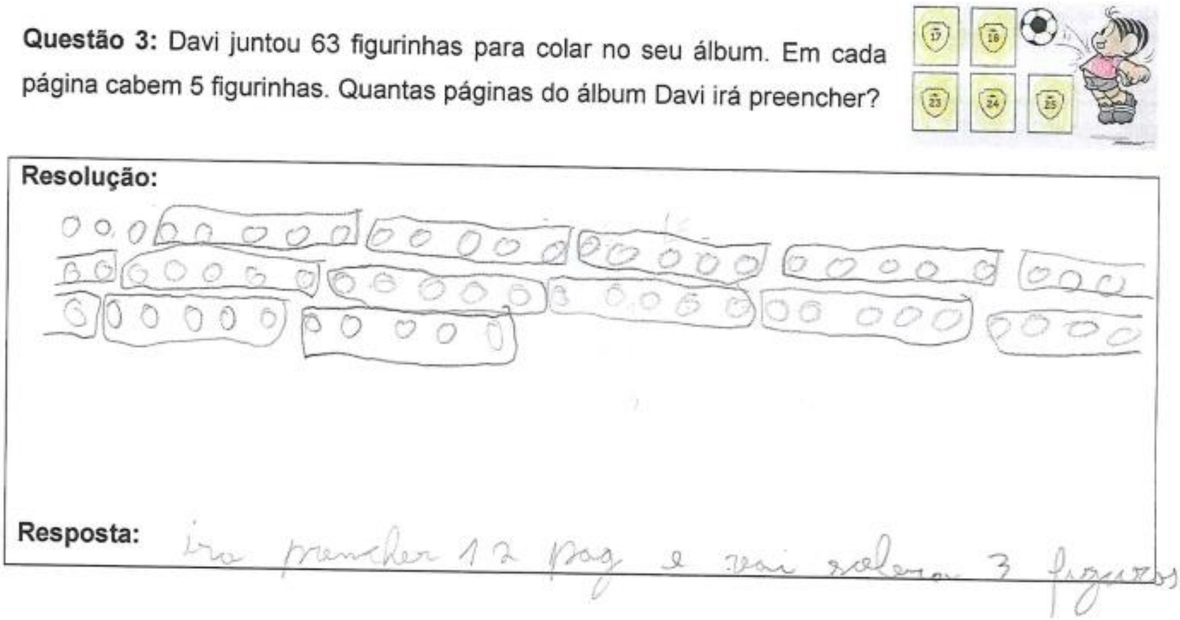
2.2.1 Primeiro encontro: Avaliação diagnóstica (aplicação e resultados)

Apresentamos aos alunos uma avaliação diagnóstica composta de três problemas cujos enunciados adaptamos de um simulado disponível da Prova Brasil, que é uma avaliação de larga escala de abrangência nacional, elaborada a partir de um matriz de referência, da qual destacamos como objeto de estudo deste trabalho, a habilidade avaliada por meio do descritor 20 “Resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados da multiplicação ou divisão: multiplicação comparativa, ideia da proporcionalidade, configuração retangular e combinatória”. Por meio deste descritor, podem ser avaliadas habilidades necessárias à resolução de problemas que envolvem a operação de divisão, em diferentes contextos. As adaptações que fizemos consideraram os números presentes no jogo que seria aplicado e também o que nos sugerem os PCNs quanto à compreensão dos diferentes significados das operações, indicando o estudo reflexivo do cálculo.

Ao orientar a resolução dos problemas, pedimos às crianças que lessem com atenção, quantas vezes fossem necessárias, até que sentissem segurança quanto à compreensão do enunciado. Orientamos para que as crianças deixassem registrado tudo que envolvesse a solução dos problemas, podendo ser o cálculo efetuado, tabuada, desenhos, esquemas ou qualquer outra estratégia utilizada, mesmo que não convencional. Enfatizamos a importância de responder a pergunta proposta pelo problema ao final da solução. Pedimos para que algumas ilustrações presentes na folha da atividade fossem coloridas quando terminassem todo o trabalho, respeitando o ritmo de cada um no desenvolvimento desta avaliação. Organizamos o desenvolvimento da sequência didática planejada a partir dos resultados observados nesta avaliação diagnóstica realizada com os alunos.

Nas imagens seguintes, apresentamos alguns trechos da avaliação diagnóstica realizada por alunos que registraram estratégias pessoais de leitura e cálculo:

FIGURA 7 – Exemplo de resolução de problema por meio de estratégia pessoal

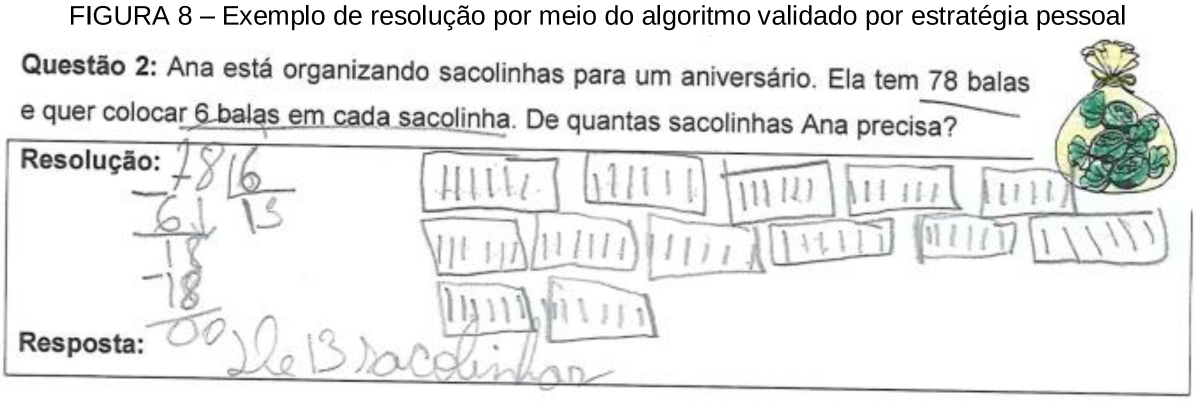

Questão 3: Davi juntou 63 figurinhas para colar no seu álbum. Em cada página cabem 5 figurinhas. Quantas páginas do álbum Davi irá preencher?

Resolução:

Resposta: ira prencher 12 pag e vai sobrar 3 figurinhas

Fonte: Elaboração da autora

FIGURA 8 – Exemplo de resolução por meio do algoritmo validado por estratégia pessoal

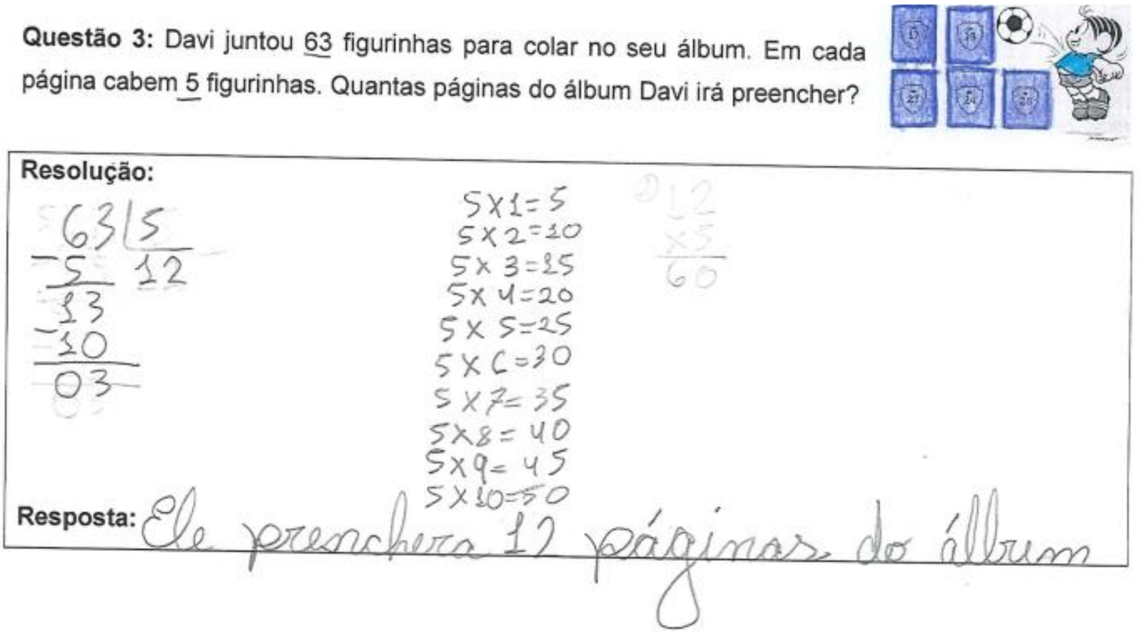

Questão 2: Ana está organizando sacolinhas para um aniversário. Ela tem 78 balas e quer colocar 6 balas em cada sacolinha. De quantas sacolinhas Ana precisa?

Resolução: 78 | 6
-6 13
18
-18
00

Resposta: Ele 13 sacolinhas

Fonte: Elaboração da autora

FIGURA 9 – Exemplo de resolução de problema por meio do algoritmo com apoio da tabuada


Questão 3: Davi juntou 63 figurinhas para colar no seu álbum. Em cada página cabem 5 figurinhas. Quantas páginas do álbum Davi irá preencher?

Resolução:

63 | 5
-5 12
13
-10
03

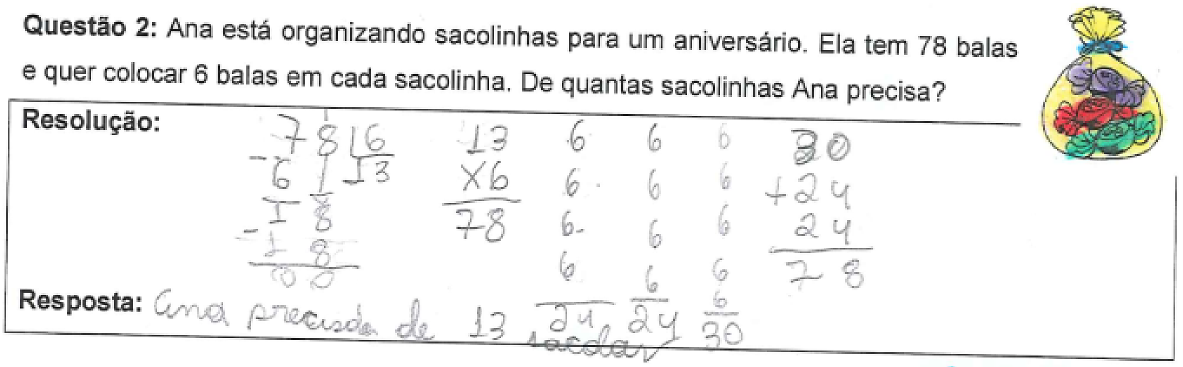
5x1=5
5x2=10
5x3=15
5x4=20
5x5=25
5x6=30
5x7=35
5x8=40
5x9=45
5x10=50

12
x5
60

Resposta: Ele prenchera 12 páginas do álbum

Fonte: Elaboração da autora

FIGURA 10 – Exemplo de resolução por meio do algoritmo validado por cálculos não convencionais


Questão 2: Ana está organizando sacolinhas para um aniversário. Ela tem 78 balas e quer colocar 6 balas em cada sacolinha. De quantas sacolinhas Ana precisa?

Resolução:

78 | 6
-6 13
18
-18
00

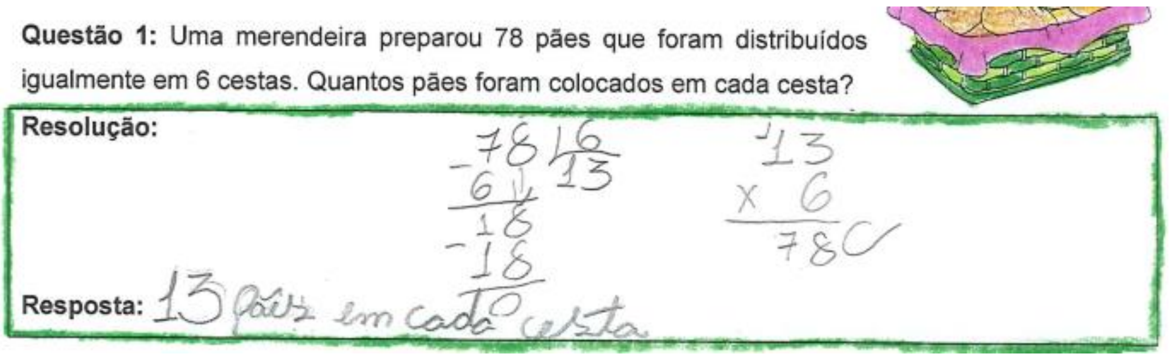
13
x6
78

30
+24
24
78

Resposta: Ana precisa de 13 sacolas

Fonte: Elaboração da autora

FIGURA 11 – Exemplo de resolução de problema por meio do algoritmo validado de forma convencional


Questão 1: Uma merendeira preparou 78 pães que foram distribuídos igualmente em 6 cestas. Quantos pães foram colocados em cada cesta?

Resolução:

78 | 6
-6 13
18
-18

13
x 6
78

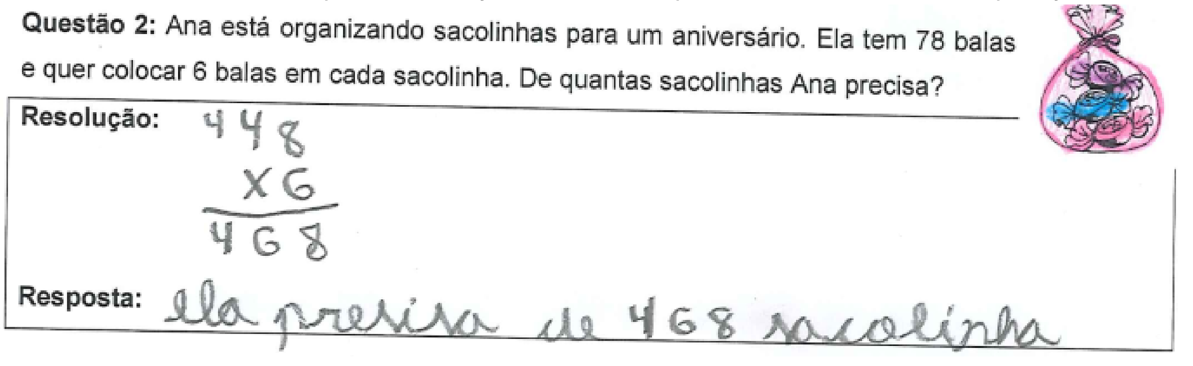
Resposta: 13 pães em cada cesta

Fonte: Elaboração da autora

As crianças resolveram em pouco tempo os três problemas propostos, mas o fizeram com segurança e capricho. Não houve nenhum desvio de comportamento que comprometesse a realização desta primeira atividade.

Dos 30 alunos que realizaram a atividade, apenas um entregou a folha em branco, porque não sabia o que fazer, embora soubesse ler. Dentre os demais, apenas um aluno não identificou a relação entre as situações propostas e operação de divisão, pois multiplicou os números apresentados no enunciado, usando convencionalmente o algoritmo para os três problemas propostos, mas não apresentou nenhuma preocupação em relação à coerência dos números apresentados como resposta.

FIGURA 12 – Exemplo de resolução incorreta do problema com uso da multiplicação


Questão 2: Ana está organizando sacolinhas para um aniversário. Ela tem 78 balas e quer colocar 6 balas em cada sacolinha. De quantas sacolinhas Ana precisa?

Resolução: 448 × 6 = 468

Resposta: ela precisa de 468 sacolinha

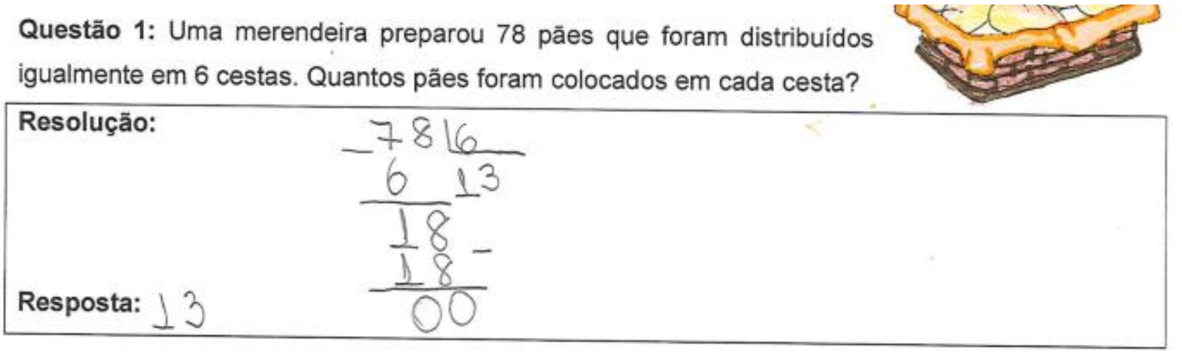
Fonte: Elaboração da autora

Dois outros alunos usaram a divisão para solução dos problemas, mas não conseguiram desenvolver o algoritmo com algum sentido, embora em algumas situações tenham apresentado a resposta esperada.

Consideramos assim que para estes 4 alunos da turma, que representam pouco mais de 13% dos alunos, o algoritmo da divisão parece não ter nenhum sentido.

Analisando as demais resoluções apresentadas pelos alunos, observamos que o algoritmo da divisão foi utilizado de forma convencional na maioria das vezes por 19 deles, que representam cerca de 63% dos alunos, mas, os outros 7 alunos, que representam quase 24% do total de alunos, usaram o algoritmo da divisão de forma não convencional, apoiando a compreensão que tiveram do problema em estratégias pessoais, por meio de cálculo mental, desenhos, esquemas e, quando usaram o algoritmo, tentaram desenvolvê-lo de forma não convencional.

FIGURA 13 – Exemplo de resolução de problema por meio do algoritmo convencional



Questão 1: Uma merendeira preparou 78 pães que foram distribuídos igualmente em 6 cestas. Quantos pães foram colocados em cada cesta?

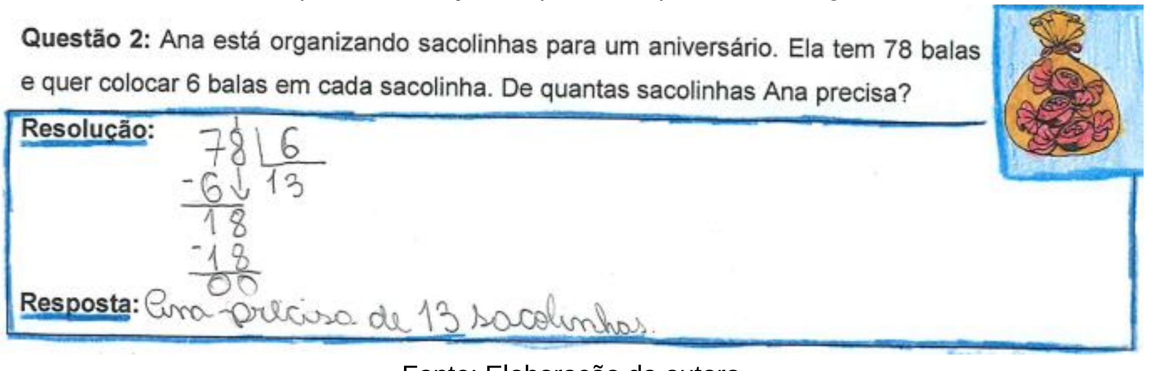
Resolução:

```
 78 |6
-6    13
 18
-18
 00
```

Resposta: 13

Fonte: Elaboração da autora

FIGURA 14 – Exemplo de resolução de problema por meio do algoritmo convencional



Questão 2: Ana está organizando sacolinhas para um aniversário. Ela tem 78 balas e quer colocar 6 balas em cada sacolinha. De quantas sacolinhas Ana precisa?

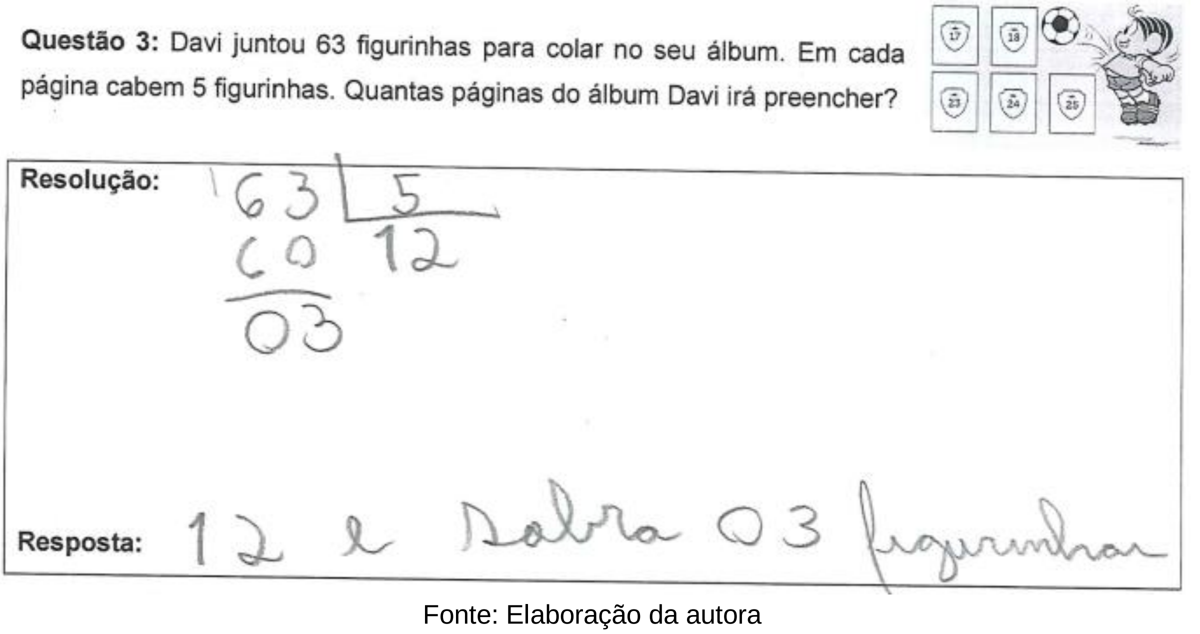
Resolução:

```
 78 |6
-6    13
 18
-18
 00
```

Resposta: Ana precisa de 13 sacolinhas.

Fonte: Elaboração da autora

FIGURA 15 – Exemplo de resolução correta de problema por meio do algoritmo não convencional – hipótese de uso do cálculo mental



Questão 3: Davi juntou 63 figurinhas para colar no seu álbum. Em cada página cabem 5 figurinhas. Quantas páginas do álbum Davi irá preencher?

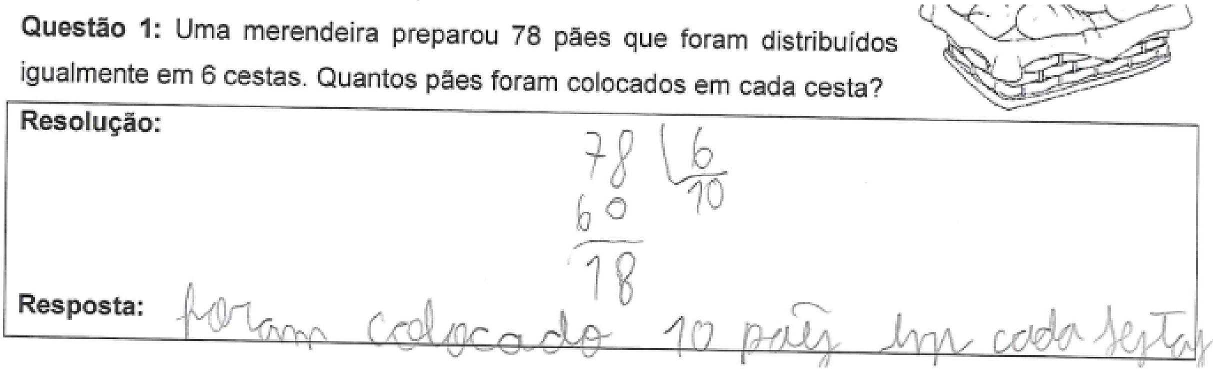
Resolução:

```
 63 |5
 60   12
 03
```

Resposta: 12 e sobra 03 figurinhas

Fonte: Elaboração da autora

FIGURA 16 – Exemplo de resolução incorreta de problema por meio do algoritmo não convencional – hipótese de uso do cálculo mental



Questão 1: Uma merendeira preparou 78 pães que foram distribuídos igualmente em 6 cestas. Quantos pães foram colocados em cada cesta?

Resolução:

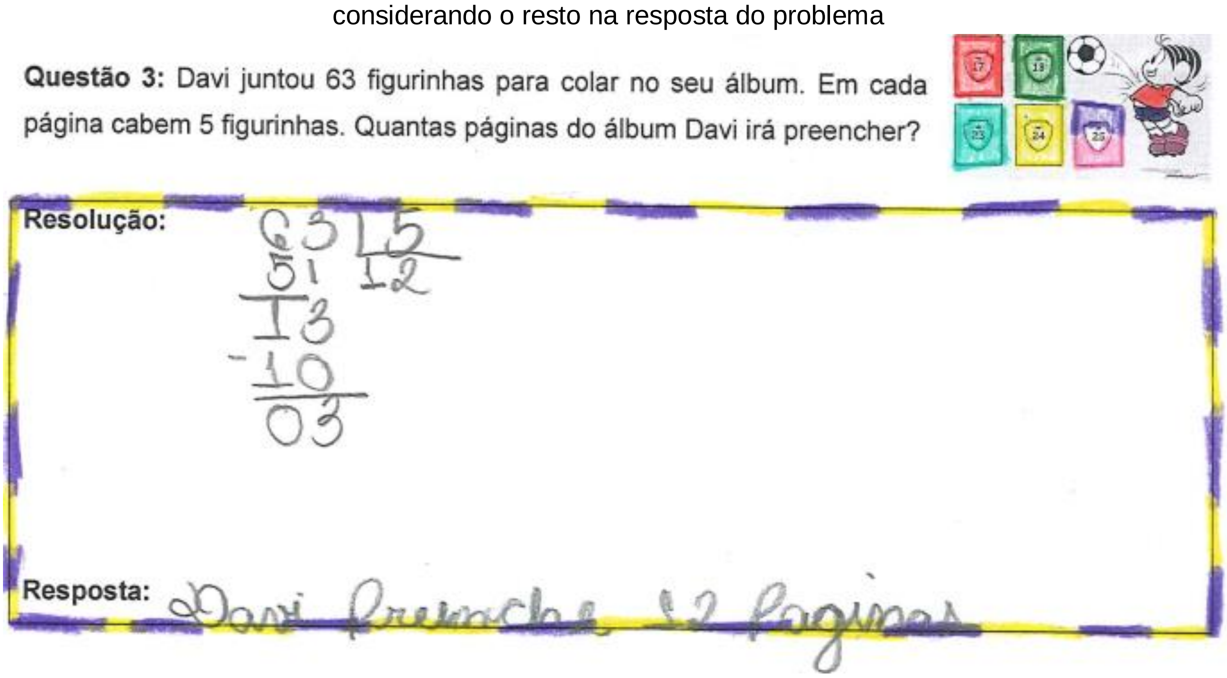
78 | 6
60   10
18

Resposta: foram colocado 10 pãez im cada sesta

Fonte: Elaboração da autora

Curiosamente, na resolução do terceiro problema que envolvia uma divisão com resto diferente de zero, a maioria dos alunos acertou no cálculo da divisão, mas ignorou o número obtido como resto da operação, considerando apenas o quociente na resposta do problema.

FIGURA 17 – Exemplo de resolução correta do problema por meio do algoritmo convencional – não considerando o resto na resposta do problema



Questão 3: Davi juntou 63 figurinhas para colar no seu álbum. Em cada página cabem 5 figurinhas. Quantas páginas do álbum Davi irá preencher?

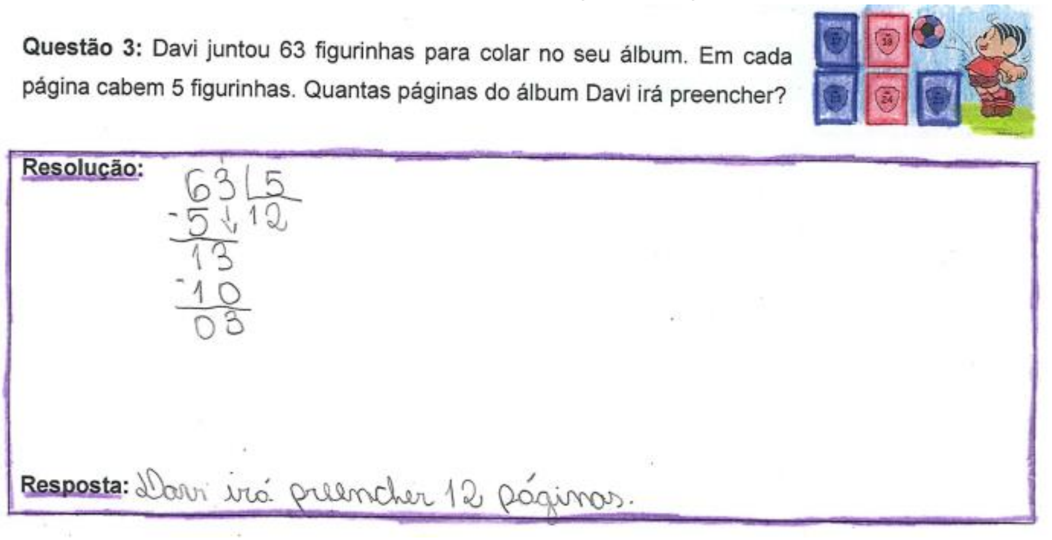
Resolução:

63 | 5
51   12
13
-10
03

Resposta: Davi Preenche 12 Paginas

Fonte: Elaboração da autora

FIGURA 18 – Exemplo de resolução correta do problema por meio do algoritmo convencional – não considerando o resto na resposta do problema



Questão 3: Davi juntou 63 figurinhas para colar no seu álbum. Em cada página cabem 5 figurinhas. Quantas páginas do álbum Davi irá preencher?

Resolução:

63 | 5
-5 ↓ 12
13
-10
03

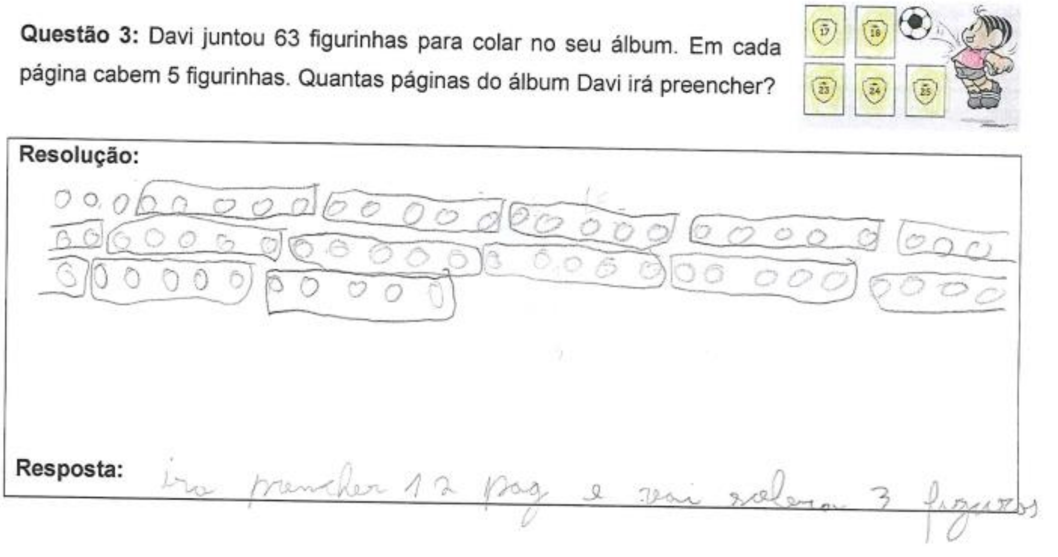
Resposta: Davi irá preencher 12 páginas.

Fonte: Elaboração da autora

Considerando as avaliações dos 26 alunos que usaram a divisão na resolução dos problemas, observamos que 5 alunos realizaram a divisão parcialmente correta, não obtendo o resto corretamente, o que corresponde a quase 20% dos alunos considerados. Em todas as outras avaliações, o resto esperado aparece mesmo nas divisões realizadas de forma não convencional.

Observamos que apenas 4 alunos indicaram o resto correto na resposta do problema, o que representa pouco mais de 15% das avaliações consideradas. Há 5 dos alunos (cerca de 20%) que, ao resolver o problema, mostram que perceberam o resto, 2 deles consideram o resto ao “tirar a prova” para validar o resultado obtido e os outros 3 usam o resto incorretamente na resposta dada ao problema, por exemplo, colocando vírgula no quociente e usando o resto como décimos.

FIGURA 19 – Exemplo de resolução correta do problema por meio de estratégia pessoal – considerando o resto na resposta do problema



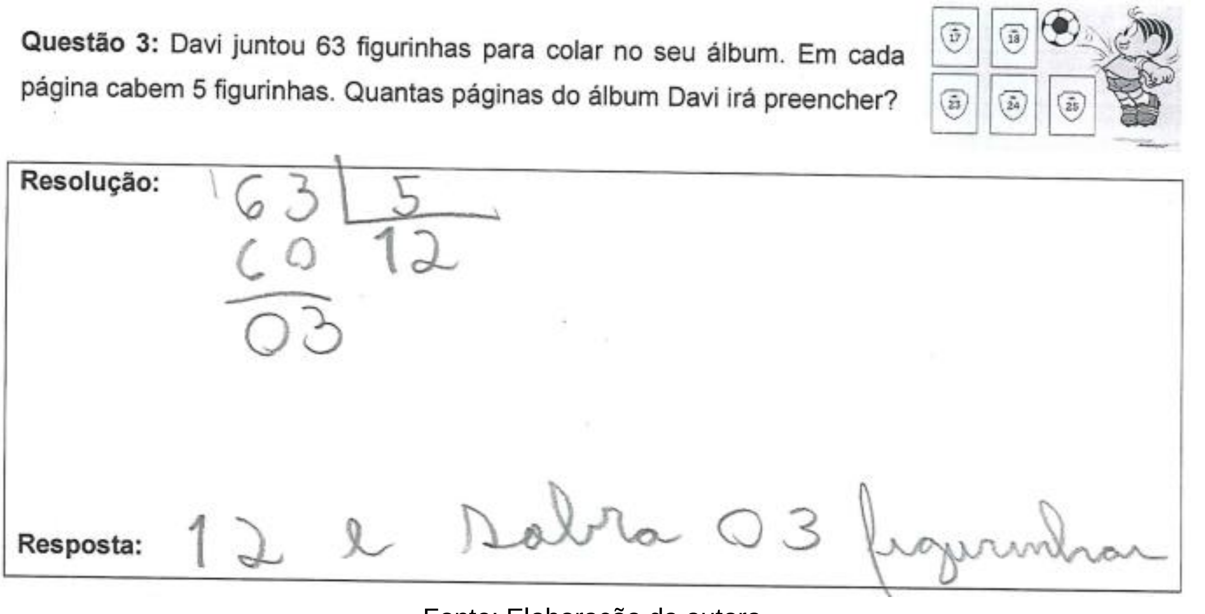
Questão 3: Davi juntou 63 figurinhas para colar no seu álbum. Em cada página cabem 5 figurinhas. Quantas páginas do álbum Davi irá preencher?

Resolução:

Resposta: ira prencher 12 pag e vai sobrar 3 figuras

Fonte: Elaboração da autora

FIGURA 20 – Exemplo de resolução correta do problema por meio de algoritmo não convencional – considerando o resto na resposta do problema


Questão 3: Davi juntou 63 figurinhas para colar no seu álbum. Em cada página cabem 5 figurinhas. Quantas páginas do álbum Davi irá preencher?

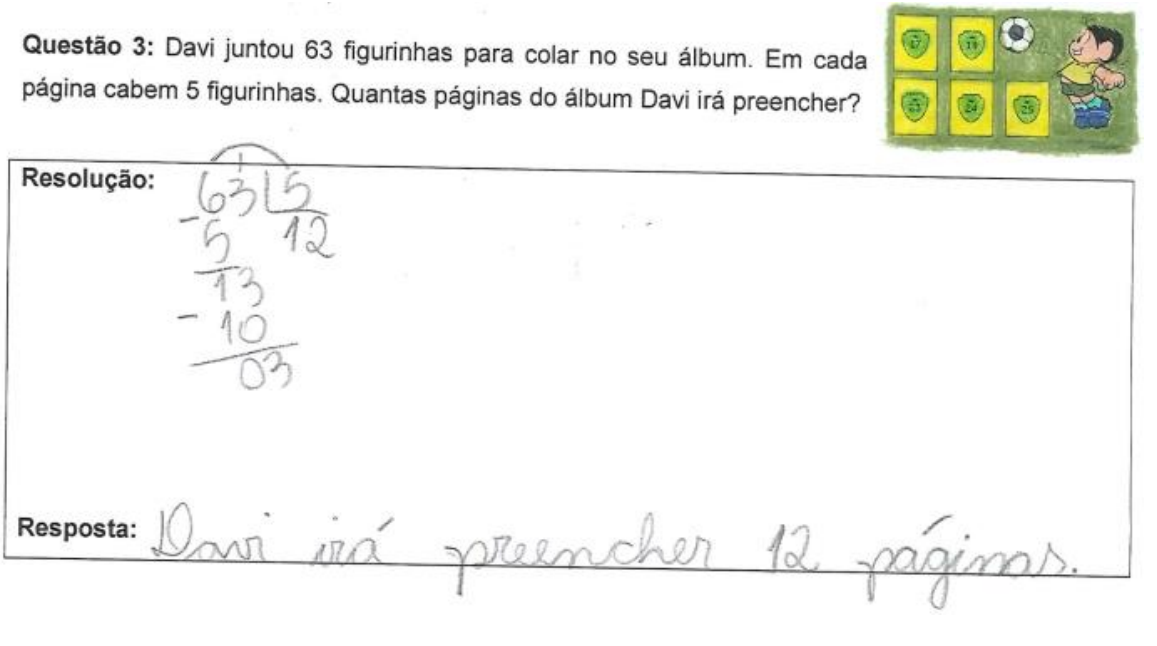
Resolução: 63 | 5
60 12
03

Resposta: 12 e sobra 03 figurinhas

Fonte: Elaboração da autora

No entanto, em 12 das avaliações consideradas, ou seja, cerca de 45 %, o resto não é considerado, o que nos levou a avaliar a adequação do verbo “preencher” empregado no enunciado, que pode ter induzido as crianças a pensar que bastava considerar o quociente para responder a pergunta do problema.

FIGURA 21 – Exemplo de resolução correta do problema por meio de algoritmo convencional – não considerando o resto na resposta do problema

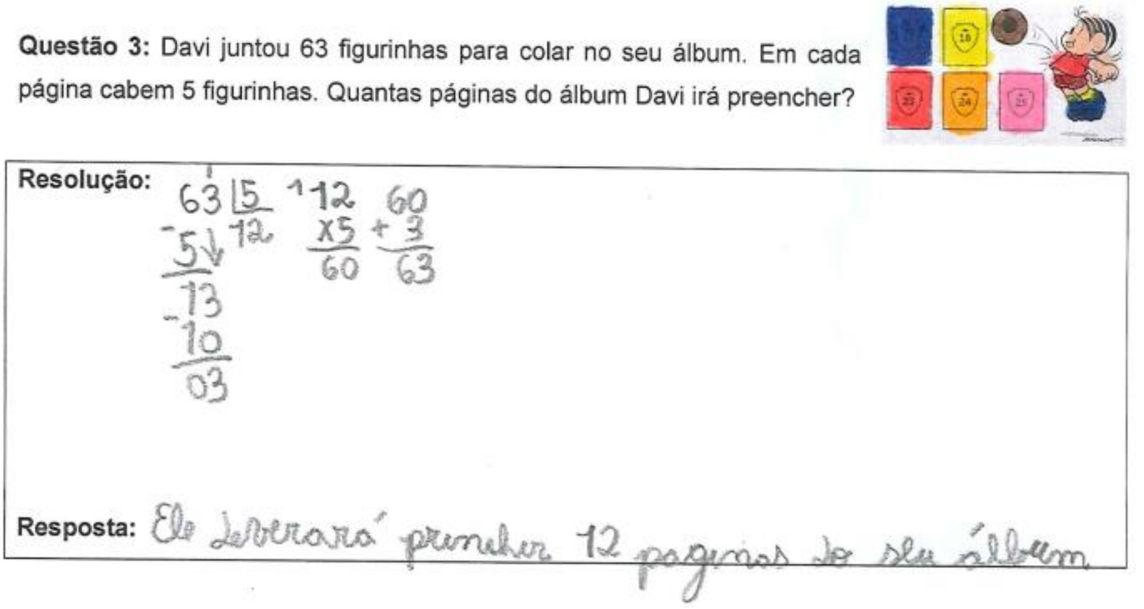

Questão 3: Davi juntou 63 figurinhas para colar no seu álbum. Em cada página cabem 5 figurinhas. Quantas páginas do álbum Davi irá preencher?

Resolução: 63 | 5
-5 12
13
-10
03

Resposta: Davi irá preencher 12 páginas.

Fonte: Elaboração da autora

FIGURA 22 – Exemplo de resolução correta do problema por meio de algoritmo convencional – não considerando o resto na resposta do problema



Fonte: Elaboração da autora

Todos os documentos oficiais que fundamentam os currículos de matemática apontam como principal objetivo que ao final do 5º ano do Ensino Fundamental os alunos conheçam as diferentes ideias relacionadas a cada operação. Considerando a divisão, observamos a operação relacionada a duas ideias essenciais que procuramos explorar nos problemas propostos aos alunos, que são a divisão em partes iguais, caracterizada por problemas do tipo “quanto para cada um”, e a comparação ou medida, para determinar quantas vezes uma quantidade cabe na outra, observando orientações dos PCNs com relação ao trabalho realizado com as operações que *“concentrará na compreensão dos diferentes significados de cada uma delas, nas relações existentes entre elas e no estudo do cálculo”* (BRASIL, 1998, p.50).

2.2.2 Segundo encontro: Discussão do primeiro problema explorando a ideia de dividir em partes iguais

A partir do diagnóstico das dificuldades enfrentadas por um número significativo dos alunos, iniciamos a discussão dos problemas resolvidos pela turma, representando as situações propostas com a participação efetiva de todos os alunos.

Cardoso (2005) apresenta uma metodologia de trabalho com a divisão onde sugere trabalhar com objetos antes da representação do cálculo com algarismos. Em seu trabalho, a autora sugere o algoritmo da divisão pelo processo americano (o que apresentamos na discussão deste problema), que vai sendo abreviado quando o aluno fizer estimativas do resultado auxiliado pela tabuada.

Transferindo a metodologia de trabalho sugerida por Cardoso (2005) para o contexto dos problemas resolvidos pelos alunos, conduzimos a discussão do primeiro problema que explorava a ideia de repartir em partes iguais, a partir da vivência da divisão, isto é, nossa ideia era interpretar a divisão por um algoritmo não convencional (processo americano) que justificasse a compreensão das etapas realizadas na divisão conhecida pela maioria dos alunos. Para isto, a própria turma sugeriu um aluno para fazer a divisão de 78 balas para outros seis colegas, considerando que esta divisão deveria ser feita em partes iguais. Intuitivamente, o aluno distribuiu uma bala para cada colega, e depois mais uma, e outra, e mais outra, e assim até que não tivesse mais balas para repartir. Representamos fielmente na lousa, a situação vivenciada, usando o seguinte algoritmo:

$$
\begin{array}{r|l}
78 & 6 \\ \cline{2-2}
-6 & 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1=13 \\ \cline{1-1}
72 & \\
-6 & \\ \cline{1-1}
66 & \\
-6 & \\ \cline{1-1}
60 & \\
-6 & \\ \cline{1-1}
54 & \\
-6 & \\ \cline{1-1}
48 & \\
-6 & \\ \cline{1-1}
42 & \\
-6 & \\ \cline{1-1}
36 & \\
-6 & \\ \cline{1-1}
30 & \\
-6 & \\ \cline{1-1}
24 & \\
-6 & \\ \cline{1-1}
18 & \\
-6 & \\ \cline{1-1}
12 & \\
-6 & \\ \cline{1-1}
6 & \\
-6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Como era de se esperar, a maioria dos alunos questionou a praticidade deste algoritmo, então apresentamos a proposta de reviver a situação, buscando uma alternativa que abreviasse os cálculos. Então, nesta motivação, o aluno decidiu que distribuiria as balas de três em três. Repetiu desta forma 4 vezes, e concluiu distribuindo uma bala para cada. Representamos a situação vivenciada pelo seguinte algoritmo:

$$
\begin{array}{r|l}
78 & 6 \\ \cline{2-2}
-18 & 3+3+3+3+1=13 \\ \cline{1-1}
60 & \\
-18 & \\ \cline{1-1}
42 & \\
-18 & \\ \cline{1-1}
24 & \\
-18 & \\ \cline{1-1}
6 & \\
-6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Ainda assim os alunos não ficaram satisfeitos com o algoritmo que não se parecia com o que conheciam, então apresentei a proposta de uma nova vivência da situação, mas para este momento, organizei as balas conforme a representação do número no sistema de numeração decimal, isto é, 7 agrupamentos de 10 balas e 8 balas num outro agrupamento. Considerando esta organização, o aluno foi convidado a rever sua estratégia, e desta vez, distribuiu 10 balas para cada um de seus colegas logo na primeira rodada, juntando as restantes, fez nova divisão de 3 balas a cada um dos 6 amigos. Desta vez, o algoritmo feito foi:

$$
\begin{array}{r|l}
78 & 6 \\ \cline{2-2}
-60 & 10+3=13 \\ \cline{1-1}
18 & \\
-18 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Concluímos a discussão do primeiro problema comparando este algoritmo com o desenvolvimento conhecido pelos alunos, buscando a compreensão da representação dos números no sistema de numeração decimal, considerada no algoritmo da divisão.

$$
\begin{array}{r|l}
78 & 6 \\ \cline{2-2}
-6\downarrow & 13 \\ \cline{1-1}
18 & \\
-18 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Todos os alunos, sem exceção, participaram com grande interesse desta atividade, participando das discussões e contribuindo para a vivência da situação.

Consideramos que a realização desta atividade poderia contribuir significativamente para a consolidação e compreensão do algoritmo, por aqueles que fizeram uso convencional dele, mas que muitas vezes o fazem de forma mecânica, especialmente aos alunos que usaram o algoritmo de forma incompleta ou equivocada.

Planejamos também para o primeiro encontro, uma rodada do jogo com os alunos. Pedimos ajuda para a professora da turma para organizar os grupos, pois entendemos que organizar a classe para jogar não é tarefa fácil, mas determinante para o alcance dos objetivos propostos, e exige por parte daquele que orienta o jogo para além do aspecto lúdico, conhecimento dos alunos, seus saberes e a forma como se relacionam com seus pares. Sobre a organização dos grupos, consideramos:

> A organização dos grupos pode ser desde uma livre escolha dos alunos que se organizam para jogar com quem desejarem até uma decisão sua em função das necessidades que perceber para seu grupo. Porém, é preciso planejar e ter critérios. Você pode organizar os grupos de modo que os alunos com mais facilidade em jogar fiquem junto com outros que precisem de ajuda para avançar. Pode também formar grupos com alunos com semelhante compreensão do jogo ou da matemática nele envolvida, deixando que alguns grupos joguem sozinhos, enquanto você acompanha aqueles que precisam de uma maior intervenção. (SMOLE, 2007, p.16)

Assim, apresentamos o jogo aos alunos, discutimos as regras e convidamos para jogar. A disposição por parte deles foi imediata, mas os objetivos que tínhamos não foram atingidos porque não conseguimos intervir e orientar o jogo em todos os 7 grupos formados. Conforme planejado, orientamos o jogo em equipes (duplas), mas a realização dos cálculos não foi alternada, e muitas vezes, o resto não era considerado para o movimento do marcador.

Combinamos com a turma retornar em um outro dia para que pudessem jogar novamente e explorar os demais problemas.

2.2.3 Terceiro encontro: Discussão do segundo problema explorando a ideia de medida na divisão (quantas vezes cabem)

Ao retornar, partimos da divisão construída no encontro anterior, buscando atribuir sentido a cada um dos números envolvidos da seguinte forma:

78 pães	6 cestas
-6↓	13 pães
18	em cada
-18	cesta...
00	

Considerando as dificuldades diagnosticadas, e seguindo a mesma estratégia do primeiro encontro, vivenciamos a situação proposta pelo segundo problema que explorava a ideia de comparação ou medida, isto é, descobrir “quantas vezes cabe”. Novamente 78, mas agora a ideia é dividir 78 balas em grupos de 6 para cada sacolinha surpresa de aniversário. Então, o aluno responsável por fazer a divisão das balas, intuitivamente, tomava um grupo de 6 balas e colocava numa sacolinha, da mesma forma, tomava mais um grupo de 6 balas e colocava em outra sacolinha, até que não restaram mais balas. Note que, nesta situação, o aluno tinha o controle sobre a quantidade de balas no agrupamento, mas precisava descobrir o número de agrupamentos possíveis. O algoritmo escrito para representar a situação vivenciada foi:

78	6
-6	1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1=13
72	
-6	
66	
-6	
60	
-6	
54	
-6	
48	
-6	
42	
-6	
36	
-6	
30	
-6	
24	
-6	
18	
-6	
12	
-6	
6	
-6	
0	

Em seguida, pela lembrança que tinham da vivência anterior, já neste momento organizei as balas de acordo com a representação do número 78 no sistema de numeração decimal, isto é, 7 grupos de 10 e um grupo de 8 balas, para que o aluno pensasse numa forma de dividir que abreviasse o algoritmo. Discutimos a possibilidade de organizar 10 sacolinhas e depois, com as balas restantes, organizamos mais 3 sacolinhas, conforme registro no seguinte algoritmo:

$$\begin{array}{r|l} 78 & 6 \\ \cline{2-2} -60 & 10+3=13 \\ \cline{1-1} 18 & \\ -18 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Buscamos a partir daí, aproximações desta representação com o algoritmo convencionalmente utilizado por eles:

$$\begin{array}{r|l} 78 & 6 \\ \cline{2-2} -6\downarrow & 13 \\ \cline{1-1} 18 & \\ -18 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Concluímos a discussão e organizamos os alunos para jogar. Considerando as frustrações do encontro anterior, e a importância do atendimento individual para consolidação e recuperação das aprendizagens, desta vez pedimos à professora que continuasse com a turma para o desenvolvimento de sua aula, e dispensasse um pequeno grupo de alunos que jogaria conosco em outro espaço da escola.

Esta organização favoreceu o rodízio de cálculos por todos e nossas intervenções a partir de questões que surgiam no contexto do jogo e possibilitavam explorar conceitos e resultados matemáticos. Neste segundo encontro foi possível acompanhar uma rodada do jogo por dois grupos apenas. Mais uma vez, combinamos com a turma retornar em outro dia para que os demais grupos pudessem jogar novamente e explorar o último problema da avaliação diagnóstica.

2.2.4 Quarto encontro: Discussão do terceiro problema explorando divisão com resto diferente de zero

Neste encontro, mais uma vez iniciamos nossa conversa a partir da divisão construída no encontro anterior, buscando atribuir sentido a cada um dos números envolvidos da seguinte forma:

78 balas	6 balas
-6↓	13 sacolinhas...
18	
-18	
00	

Considerando as dificuldades diagnosticadas, e seguindo a mesma estratégia dos encontros anteriores, vivenciamos a situação proposta pelo terceiro problema. Mas agora tínhamos 63 figurinhas para colar num álbum, sendo exatamente 5 figurinhas em cada página. A ideia da divisão explorada neste problema é também a de comparação ou medida, ou seja, quantas vezes o 5 cabe em 63. Para esta vivência, um aluno colava as figurinhas, 5 de cada vez, completava uma página, depois outra, e outra, até que restaram 3 figurinhas que não completavam uma nova página. O algoritmo escrito para representar a situação vivenciada foi:

63	5
-5	1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1=12
58	
-5	
53	
-5	
48	
-5	
43	
-5	
38	
-5	
33	
-5	
28	
-5	
23	
-5	
18	
-5	
13	
-5	
8	
-5	
3	

Em seguida, organizamos as figurinhas de acordo com a representação do número 63 no sistema de numeração decimal, isto é, 6 grupos de 10 e um grupo de 3 balas, para que o aluno pensasse numa forma de dividir que abreviasse o algoritmo. Discutimos a possibilidade de preencher 10 páginas de uma só vez e, depois, preencher mais 2 páginas com as “figurinhas” restantes, conforme registro no seguinte algoritmo:

63	5
-50	10+2=12
13	
-10	
03	

Buscamos a partir daí, aproximações desta representação com o algoritmo convencionalmente utilizado por eles:

63	5
-5 ↓	12
13	
-10	
03	

Concluímos a discussão explorando, ainda neste encontro, o significado de cada um dos termos da divisão realizada, da seguinte forma:

63 figurinhas	5 figurinhas
-5↓	12 páginas
13	preenchidas...
-10	
03 figurinhas	

Nesta situação, destacamos o significado do resto diferente de zero, a partir da situação vivenciada, onde os alunos perceberam que as 3 figurinhas restantes poderiam ser coladas no álbum, em uma página nova, que não seria preenchida por falta de outras 2 figurinhas. Exploramos neste contexto o critério de divisibilidade por 5, quando o resto da divisão é zero e o dividendo for um número com 0 ou 5 nas unidades, e também exploramos as possibilidades de resto para o divisor 5, a saber, 0, 1, 2, 3 e 4.

Ainda neste encontro, foi possível jogar com mais dois grupos, mantendo a organização do encontro anterior, onde pedimos à professora que continuasse com a turma para o desenvolvimento de sua aula, e dispensasse um pequeno grupo de alunos que jogaria conosco em outro espaço da escola.

2.2.5 Quinto encontro: Aplicação do jogo

Mais um encontro foi necessário para que outros três grupos jogassem.

Deste acompanhamento pontual do jogo por cada um dos grupos, podemos relatar diversas oportunidades de intervenção e aprendizagens construídas.

Observamos que uma das maiores dificuldades, manifestada o tempo todo do jogo, foi com relação às tabuadas. Muitas vezes os alunos erravam a divisão porque não sabiam a tabuada.

A primeira intervenção que fizemos foi verificar se haviam compreendido bem as regras do jogo. Para isso, apoiamos a nossa mediação em questionamentos como: *"Vocês iniciam o jogo com seu marcador na casa do tabuleiro com o número 39. Lançaram o dado e saiu o número 6. O que devem fazer para saber como movimentar o marcado?"* Nesta situação, os alunos indicaram corretamente que deveriam fazer a divisão, considerando o número da casa onde o marcador estava (39) como dividendo e o número obtido no lançamento do dado (6) como divisor. Feita a divisão, anotavam o quociente (9) e o resto (3), avançando com o resto, isto é, três casas até o número 30.

FIGURA 23 – Exemplo de ficha preenchida no jogo

Equipe – Nomes: Cauã Araujo
Layla Vitoria

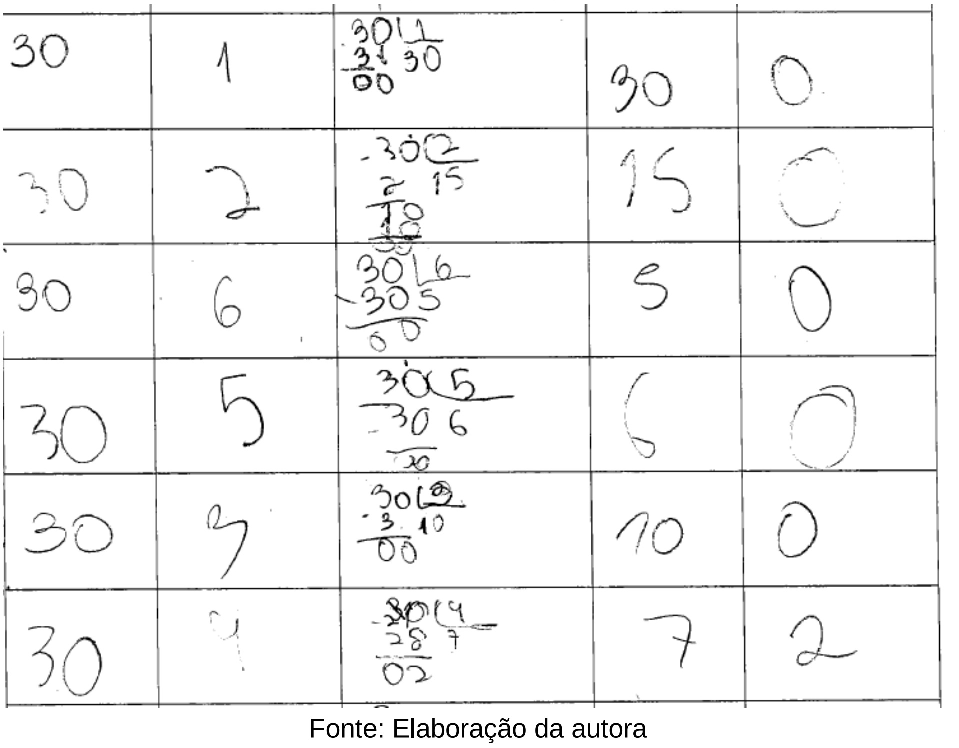
REGISTROS DO JOGO 'AVANÇANDO COM O RESTO"

Dividendo (Número da casa do tabuleiro)	**Divisor** (Número obtido no lançamento do dado)	**Cálculo** (Algoritmo da divisão) Dividendo | Divisor; Resto, Quociente	**Quociente** (Resultado da divisão)	**Resto** (Número de casas que avança o marcador)
39	06	39 | 6; -36, 6; 03	6	3
30	04	30 | 4; -28, 7; 02	7	02

Fonte: Elaboração da autora

Os divisores naturais de 30 até o número 6 também foram explorados no jogo, já que a partir do 39, o marcador avança 3 casas até o número 30, quando sai 4 ou 6 no lançamento do dado. Nesta situação, a questão era *"É difícil sair da casa com o número 30? O que está acontecendo? Será que dá pra sair com algum número do dado?"* Em alguns casos, todos os números do dado foram experimentados, o que, de certa forma, provocava os alunos. Alguns ficaram tão incomodados que viraram a folha e fizeram todos os cálculos, e chamando o trinta de “buraco”, logo perceberam que a única chance de sair desta casa seria obter o 4 no lançamento do dado.

FIGURA 24 – Exemplo de ficha preenchida no jogo

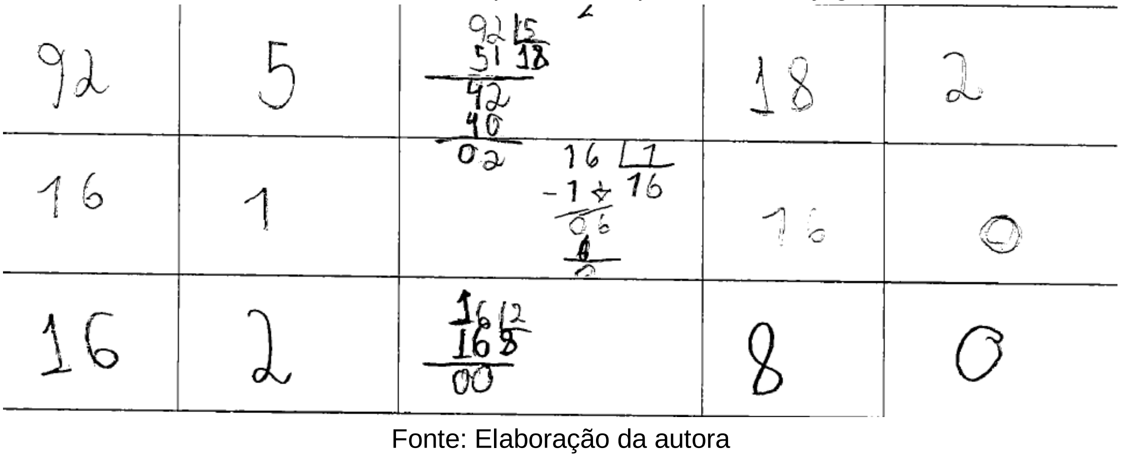


30	1	30 |1 -3 30 00	30	0
30	2	30 |2 2 15 10	15	0
30	6	30 |6 -30 5 00	5	0
30	5	30 |5 -30 6 00	6	0
30	3	30 |3 -3 10 00	10	0
30	4	30 |4 -28 7 02	7	2

Fonte: Elaboração da autora

Outra situação que foi possível explorar são as divisões por 1. Notamos que alguns alunos haviam percebido isso quando faziam torcida para sair 1 no lançamento do dado pelo adversário. Perguntamos “*O que está acontecendo quando sai o número 1 no dado?”*

FIGURA 25 – Exemplo de ficha preenchida no jogo



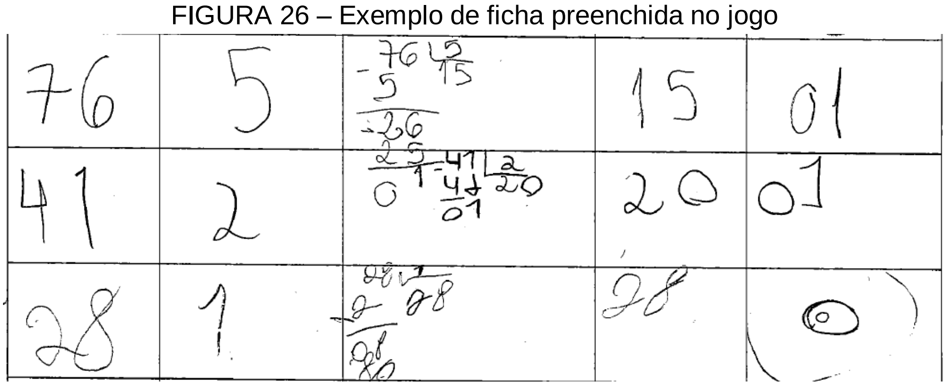
92	5	92 |5 5 18 42 40 02	18	2
16	1	16 |1 -1 16 06 6 0	16	0
16	2	16 |2 16 8 00	8	0

Fonte: Elaboração da autora

Com objetivo de ampliar esta discussão, perguntávamos *“E quando sai o número 2 no dado, quantas casas é possível avançar? E quando sai o número 6 no dado, sempre avança muitas casas? Qual é o maior número de casas que uma equipe consegue avançar seu marcador, em uma jogada?”* Nestas situações observamos grande dificuldade para generalização, mesmo para os critérios de divisibilidade mais simples como dividir por 2 ou 5. Uma das hipóteses levantadas por um aluno foi: “Acho que fica sempre parado nos números redondos.” referindo-se às dezenas 30, 50, 60... Também observamos um outro aluno que se arriscava a prever o resto quando o divisor era o 5: “Acho que vai andar 1” (referindo-se ao número 26), “Acho que vai andar 2” (referindo-se ao número 27) e “Acho que não vai andar” (referindo-se ao número 30).

Enquanto faziam as divisões, observamos grande dificuldade com o zero em situações como 41 dividido por 2. Depois de dividir as dezenas, não sabiam o que fazer para dividir as unidades, mas estranhavam apenas o 2 como quociente final.

FIGURA 26 – Exemplo de ficha preenchida no jogo



Fonte: Elaboração da autora

Enfim, muitos dos questionamentos planejados foram feitos considerando casos particulares, como por exemplo: *“Saiu 3 no dado, então quais são os restos possíveis?”*. Nesta situação, na maioria das vezes, os alunos não sabiam responder, mas iniciávamos assim a discussão sobre a importância do resto e sobre o momento certo de interromper o algoritmo da divisão.

2.2.6 Sexto encontro: Problematização do jogo (preenchimento da tabela)

Para este encontro, planejamos uma rodada do jogo em sala, com todos os alunos jogando ao mesmo tempo, já que agora conheciam bem as regras. Diferente da primeira tentativa, agora tivemos uma experiência produtiva. Os alunos jogaram e colaboraram com seus colegas. Observamos poucas dúvidas, mas grande interação e vibração durante o jogo, já que agora algumas jogadas eram esperadas e desejadas.

Depois de jogarem, pedimos ajuda para preencher a tabela sugerida no planejamento da atividade, com a seguinte estratégia: os alunos consultavam seus registros de jogo para nos informar o resto que haviam obtido para os números da tabela. Na maioria das vezes, a mesma divisão foi feita por mais de um aluno, então a validação das respostas era feita por todos. Para preenchimento da tabela, adotamos alguns critérios que nos permitiram destacar alguns conceitos: usamos a cor vermelha para o resto zero, marcando assim a relação de divisibilidade, e usamos a cor verde quando o resto era diferente de zero, indicando que foi possível avançar com o marcador.

Acreditamos que todos os alunos tenham percebido a dinâmica de preenchimento da tabela, porque levantavam as mãos e informavam os restos no momento adequado, inclusive na sequência do jogo, quando só mudavam de casa quando obtinham resto diferente de zero.

2.2.7 Sétimo encontro: Problematização do jogo (análise da tabela e aplicação de situações problema)

Considerando que este seria o último encontro possível com os alunos, antes de pedir para que resolvessem os problemas propostos a partir do jogo, convidamos para um exercício de análise da tabela, momento em que conseguimos consolidar e ampliar algumas aprendizagens. A ideia era olhar para a tabela parcialmente preenchida e descobrir alguns “segredos” que nos permitissem completar mais alguns resultados.

FIGURA 27 – Quadro preenchido com resultados observados no jogo

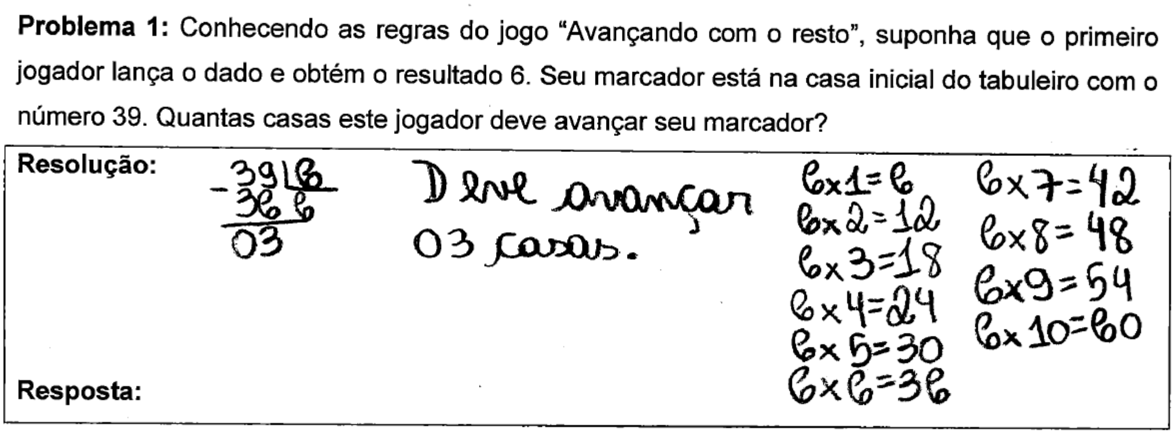
Fonte: Elaboração da autora

Apesar da insegurança observada em suas falas, talvez pela falta de familiaridade com este tipo de atividade, não houve nenhuma fala incoerente e registramos muitas regularidades que foram percebidas por diferentes alunos, como por exemplo:

- *Acho que o resto será sempre zero na divisão por 1.* (Nesta situação, intuitivamente, concluímos que quando divide por 1 não sobra resto porque o quociente é o próprio dividendo.)
- *Acho que na coluna do divisor 2, só tem 0 e 1.* (Nesta situação, validamos a descoberta, mas instigamos para que descobrissem se o zero e o um tinham relação com o tipo de número que está sendo dividido por 2.)
- *Na coluna do divisor 2, colocamos 0 quando o número é par e colocamos o 1 quando o número é ímpar. (Completou outro aluno referindo-se ao dividendo.)*
- *O 60 é divisível por todos os números, por isso o resto é sempre zero.* (Nesta situação, validei a descoberta considerando os números envolvidos no jogo. Os alunos concordaram que para o 7 por exemplo, que não estava no domínio do jogo, o resto devia ser diferente de zero.)
- *O zero é "tchau" porque zero dividido para qualquer número dá zero e sobra zero.*
- *O 5 é o maior resto nas divisões e só aparece na coluna do divisor 6.*
- *Na casa do 30 só sai com 4.*
- *Na casa do 12 só sai com 5.*

Conforme planejado para a problematização do jogo, apresentamos aos alunos alguns problemas pensados a partir de situações vivenciadas no jogo. Observamos que muitos alunos tiveram dificuldades na resolução dos problemas com enunciados mais abertos, que avaliavam generalizações ou percepção de regularidades. Mas em relação à divisão, muitos avanços foram conquistados na compreensão do algoritmo convencional.

FIGURA 28 – Exemplo de resposta obtida para o problema 1



Problema 1: Conhecendo as regras do jogo "Avançando com o resto", suponha que o primeiro jogador lança o dado e obtém o resultado 6. Seu marcador está na casa inicial do tabuleiro com o número 39. Quantas casas este jogador deve avançar seu marcador?

Resolução:

39 | 6
-36 6
03

Deve avançar 03 casas.

6x1=6
6x2=12
6x3=18
6x4=24
6x5=30
6x6=36
6x7=42
6x8=48
6x9=54
6x10=60

Resposta:

Fonte: Elaboração da autora

FIGURA 29 – Exemplo de resposta obtida para o problema 2

Problema 2: Suponha que no início do jogo, o marcador do segundo jogador esteja na casa inicial do tabuleiro com o número 39. Desejando avançar o maior número de casas possível, este jogador deve torcer para obter qual resultado no lançamento do dado?

Resolução: R: O jogador 2 vai torcer tirar 5 porque 5 ÷ 39, sobra 4.

Resposta:

Fonte: Elaboração da autora

FIGURA 30 – Exemplo de resposta obtida para o problema 3

Problema 3: Suponha que um jogador está com seu marcador na casa com o número 30. Para quais resultados obtidos no dado este jogador não avança seu marcador?

Resolução:

Resposta: 1, 2, 3, 5 e 6. Para sair do 30, apenas o número 4.

Fonte: Elaboração da autora

FIGURA 31 – Exemplo de resposta obtida para o problema 4

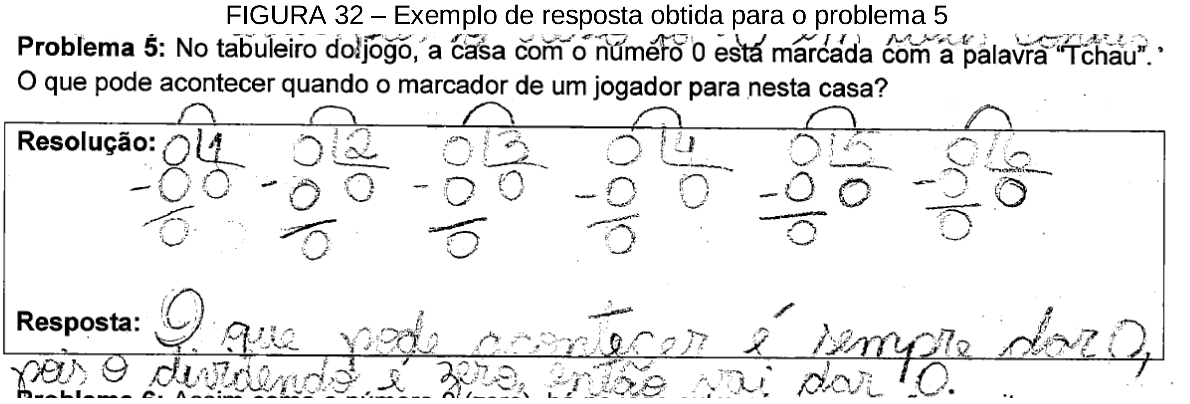
Problema 4: Suponha que um jogador obteve resultado 1 no lançamento do dado quando seu marcador estava nas casas 32, 50 e 21. Nestas situações, quantas casas ele avançou seu marcador?

Resolução:

Resposta: Ele não avançou nem uma casa

Fonte: Elaboração da autora

FIGURA 32 – Exemplo de resposta obtida para o problema 5

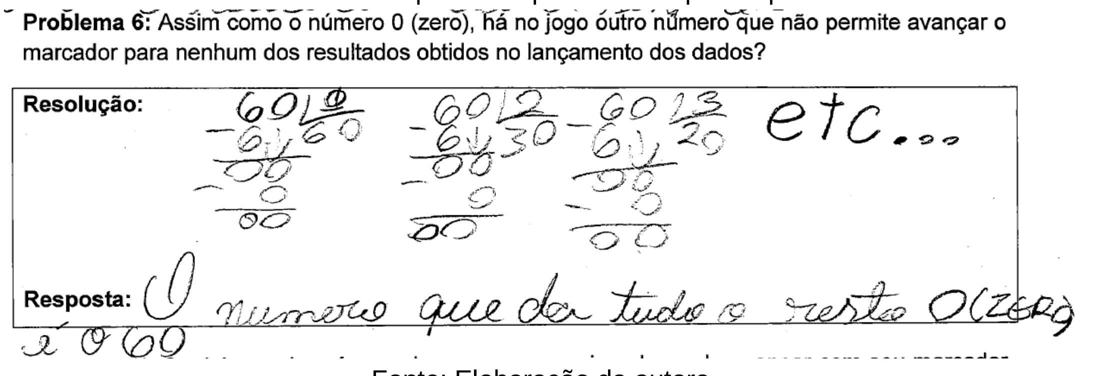

Problema 5: No tabuleiro do jogo, a casa com o número 0 está marcada com a palavra "Tchau". O que pode acontecer quando o marcador de um jogador para nesta casa?

Resolução: 0|1 0|2 0|3 0|4 0|5 0|6

Resposta: O que pode acontecer é sempre dar 0, pois o dividendo é zero, então vai dar 0.

Fonte: Elaboração da autora

FIGURA 33 – Exemplo de resposta obtida para o problema 6

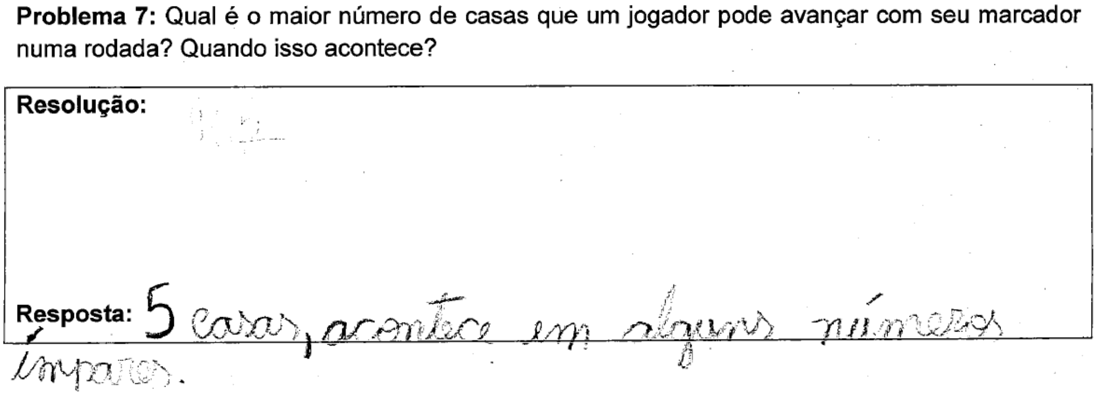

Problema 6: Assim como o número 0 (zero), há no jogo outro número que não permite avançar o marcador para nenhum dos resultados obtidos no lançamento dos dados?

Resolução: 60|1 60 60|2 30 60|3 20 etc...

Resposta: O número que dá tudo o resto 0 (zero) é o 60

Fonte: Elaboração da autora

FIGURA 34 – Exemplo de resposta obtida para o problema 7


Problema 7: Qual é o maior número de casas que um jogador pode avançar com seu marcador numa rodada? Quando isso acontece?

Resolução:

Resposta: 5 casas, acontece em alguns números ímpares.

Fonte: Elaboração da autora

CAPÍTULO 3 - A DIVISÃO NOS DOCUMENTOS OFICIAIS QUE NORTEIAM O CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DESENVOLVIDO EM SALA DE AULA

Os Currículos de Matemática desenvolvidos em sala de aula seguem orientações propostas em documentos oficiais que indicam as competências que os alunos devem desenvolver e os conteúdos essenciais para seu desenvolvimento.

Em âmbito nacional, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) são documentos vigentes de caráter normativo que definem as aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo da Educação Básica.

Vale registrar que atualmente estamos em processo de construção da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que deverá ser implementado a partir dos próximos anos, norteando os currículos dos sistemas e redes de ensino, como também as propostas pedagógicas de todas as escolas, em todo o Brasil.

> A Base estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se espera que todos os estudantes desenvolvam ao longo da escolaridade básica. Orientada pelos princípios éticos, políticos e estéticos traçados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, a Base soma-se aos propósitos que direcionam a educação brasileira para a formação humana integral e para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. (BRASIL, 2017, p.7)

Em âmbito estadual, o Currículo de Matemática vigente foi construído pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (SEE/SP), tendo como referência nacional os PCNs, possibilitando um percurso de aprendizagem comum nas disciplinas básicas, garantindo iguais oportunidades a todos os alunos de todas as escolas estaduais paulistas.

> Neste documento, são apresentados conteúdos que versam sobre currículo, planejamento e avaliação de forma a subsidiar o professor e o gestor em suas práticas para implementar o Currículo do Estado de São Paulo, organizar sua crítica e construir a Proposta Pedagógica que representa a identidade da sua escola em particular. (SÃO PAULO, 2010, p.4)

Uma das razões do baixo desempenho dos alunos em Matemática é a fragilidade da implementação do Currículo, seguindo as orientações no planejamento da aula, com objetivos, metodologia, materiais e recursos didáticos alinhados ao Currículo, uma vez que as matrizes de avaliações externas são construídas a partir destes documentos oficiais.

Neste capítulo, apresentaremos como os PCNs e o Currículo de Matemática do Estado de São Paulo, abordam o ensino da divisão euclidiana, refletindo sobre as orientações didáticas e sugestões relacionadas a este assunto, que norteiam a prática do professor em sala de aula.

Observamos que em sua organização, estes documentos contemplam o tema da divisão euclidiana ao orientar o trabalho com números e operações, o que acontece em espiral desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, sendo consolidado e aprofundado nos anos seguintes da Educação Básica.

Neste trabalho, apresentamos uma sugestão de atividade direcionada à turma do 5º ano do Ensino Fundamental, explorando a divisão euclidiana por meio de um jogo, na perspectiva da resolução de problemas, planejada de acordo com as orientações curriculares presentes nestes documentos.

3.1 Orientações para o trabalho com a divisão nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)

Ao planejar uma aula com objetivos de aprendizagem claramente definidos, é importante que o professor reconheça e valorize o que sabem seus alunos sobre o assunto que será abordado, definindo, a partir daí, metodologias e recursos que favoreçam a aprendizagem. Não há um caminho que seja o melhor para o ensino, mas acreditamos que conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula facilita a construção uma boa prática pelo professor.

De acordo com os PCNs (2001),

> Os alunos trazem para a escola conhecimentos, ideias e intuições, construídos através das experiências que vivenciam em seu grupo sociocultural. [...]
>
> Desse modo, um currículo de Matemática deve procurar contribuir, de um lado, para a valorização da pluralidade sociocultural, impedindo o processo de submissão no confronto com outras culturas; de outro, criar condições para que o aluno transcenda um modo de vida restrito a um determinado espaço social e se torne ativo na transformação de seu ambiente. (BRASIL, 2001, p.30)

Neste trabalho, exploramos dois dos recursos sugeridos pelos PCNs como possibilidades para “fazer Matemática” em sala de aula: o recurso aos jogos e à resolução de problemas.

Segundo os PCNs, ensinar matemática na perspectiva da resolução de problemas pressupõe a compreensão de que

> Resolver problema não se resume em compreender o que foi proposto e em dar respostas aplicando procedimentos adequados. Aprender a dar uma resposta correta, que tenha sentido, pode ser suficiente para que ela seja aceita e até seja convincente, mas não é garantia de apropriação do conhecimento envolvido.

> Além disso, é necessário desenvolver habilidades que permitam pôr à prova os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos, para obter a solução. Nessa forma de trabalho, o valor da resposta correta cede lugar ao valor do processo de resolução. (BRASIL, 2011, p.45)

Observamos, no entanto, baixo desempenho dos alunos diante de situações em que é proposto que resolvam problemas. Em contrapartida, notamos que, dado um jogo, a postura de enfrentamento da situação pelos alunos é diferente, pois os mesmos se envolvem ativamente na atividade.

Neste contexto, Borin (2004) afirma que *“a atividade de jogar, se bem orientada, tem papel importante no desenvolvimento de habilidades (...) necessárias para o aprendizado, em especial da Matemática, e para a resolução de problemas em geral”.* (BORIN, 2004, p.8)

No mesmo sentido, sugerem os PCNs que:

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento de ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação sem deixar marcas negativas. (BRASIL, 1998, p. 46)

Refletindo sobre estas orientações, decidimos explorar o jogo “Avançando com o resto” como recurso didático para o ensino e a aprendizagem da divisão euclidiana em sala de aula, na perspectiva da resolução de problemas.

Especificamente sobre o ensino das operações, os PCNs orientam para a compreensão dos seus diferentes significados e das relações existentes entre as operações matemáticas e também para o estudo reflexivo do cálculo, onde se incluem os algoritmos.

Quanto à organização dos conteúdos selecionados para os anos iniciais do ensino fundamental, os PCNs consideram ciclos de dois anos: o primeiro ciclo equivale aos atuais segundo e terceiro anos, e o segundo ciclo equivale aos atuais quarto e quinto anos do Ensino Fundamental.

Considerando esta estrutura, destacamos os seguintes objetivos relacionados ao ensino da divisão, propostos para cada ciclo.

Objetivos destacados propostos para o primeiro ciclo:

> - Resolver situações-problema e construir, a partir delas, os significados das operações fundamentais, buscando reconhecer que uma mesma operação está relacionada a problemas diferentes e um mesmo problema pode ser resolvido pelo uso de diferentes operações.
> - Desenvolver procedimentos de cálculo – mental, escrito, exato, aproximado – pela observação de regularidades e de propriedades das operações e pela antecipação e verificação de resultados. (BRASIL, 2001, p.65)

Objetivos destacados propostos para o segundo ciclo:

> - Resolver problemas, consolidando alguns significados das operações fundamentais e construindo novos, em situações que envolvam números naturais e, em alguns casos, racionais.
> - Ampliar os procedimentos de cálculo – mental, escrito, exato, aproximado – pelo conhecimento de regularidades dos fatos fundamentais, de propriedades das operações e pela antecipação e verificação de resultados.
> - Refletir sobre procedimentos de cálculo que levem à ampliação do significado do número e das operações, utilizando a calculadora como estratégia de verificação de resultados. (BRASIL, 2001, p.80-81)

Observamos que no primeiro ciclo segundo os PCNs, a orientação é feita no sentido que sejam explorados alguns dos significados das operações, destacando-se a adição e a subtração. Assim, neste ciclo, cálculos de multiplicação e divisão são explorados por meio de estratégias pessoais.

No segundo ciclo segundo os PCNs, os significados das operações já trabalhados no primeiro ciclo são consolidados e novas situações são propostas com vistas à ampliação do conceito de cada uma das operações, incluindo a divisão. Os recursos de cálculo são ampliados pelo fato de o aluno ter uma compreensão mais ampla do sistema de numeração decimal.

Os PCNs indicam a resolução de problemas como ponto de partida para o ensino de Matemática e apresentam ainda, orientações didáticas que contribuem para a reflexão sobre como ensinar alguns dos conteúdos propostos. Especificamente sobre o ensino das operações, estas orientações didáticas sugerem que

> [...] as técnicas operatórias usualmente ensinadas na escola também apoiam-se nas regras do sistema de numeração decimal e na existência de propriedades e regularidades presentes nas operações. Porém, muitos dos erros cometidos pelos alunos são provenientes da não-disponibilidade desses conhecimentos ou do não-reconhecimento de sua presença no cálculo. Isso acontece, provavelmente, porque não se exploram os registros pessoais dos alunos, que são formas intermediárias para se chegar ao registro das técnicas usuais. (BRASIL, 2001, p.120)

Com relação à divisão, a obtenção de quocientes parciais que depois são adicionados, é uma estratégia para explorar formas intermediárias de registros pessoais para que se possa chegar ao registro das técnicas usuais.

3.2 Orientações para o trabalho com a divisão no Currículo do Estado de São Paulo

Ao apresentar as orientações curriculares para o ensino de Matemática na rede estadual de São Paulo, referentes aos anos iniciais do Ensino Fundamental, em consonância com os PCNs, o documento de âmbito estadual sugere que:

> O cálculo é, naturalmente, parte integrante da Matemática, mas aprender procedimentos de cálculo isolados, por si só, não promove o contato dos alunos com as ideias e os modos de pensar fundamentais da Matemática e não garante que eles sejam capazes de mobilizar os conhecimentos relevantes quando tiverem que enfrentar de fato, situações problemáticas mais simples surgidas em um contexto diferente. (SÃO PAULO, 2014, p.3)

O Currículo de Matemática organiza as expectativas de aprendizagem por ano de escolaridade. Ao destacarmos as expectativas relacionadas ao ensino da divisão, observamos que não divergem em sua essência, da organização proposta pelos PCNs.

Expectativa de aprendizagem destacada proposta para o primeiro ano do ensino fundamental:

> - Indicar o número de objetos que será obtido se uma coleção for repartida em partes iguais. (SÃO PAULO, 2014, p.18)

Expectativas de aprendizagem destacadas propostas para o segundo ano do ensino fundamental:

> - Utilizar sinais convencionais (x, :, =) na escrita de operações de multiplicação e divisão.
> - Analisar, interpretar, resolver e formular situações-problema, compreendendo alguns dos significados da multiplicação e da divisão, por meio de estratégias pessoais.
> - Realizar cálculos por meio de estratégias pessoais e algumas técnicas operatórias convencionais. (SÃO PAULO, 2014, p.23)

Expectativas de aprendizagem destacadas propostas para o terceiro ano do ensino fundamental:

> - Utilizar sinais convencionais (x, :, =) na escrita de operações de multiplicação e divisão.
> - Construir fatos básicos da multiplicação e da divisão (por 2, por 3, por 4, por 5) a partir de situações problema para constituição de um repertório a ser utilizado no cálculo.
> - Calcular resultados de multiplicação e divisão, por meio de estratégias pessoais. (SÃO PAULO, 2014, p.27)

Expectativas de aprendizagem destacadas propostas para o quarto ano do ensino fundamental:

> - Calcular o resultado de adições e subtrações, multiplicações e divisões de números naturais, por meio de estratégias pessoais, cálculo mental, cálculo aproximado (por meio de estimativas e arredondamentos) e pelo uso das técnicas operatórias convencionais.
> - Analisar, interpretar, resolver e formular situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações com números naturais. (SÃO PAULO, 2014, p.31)

Expectativas de aprendizagem destacadas propostas para o quinto ano do ensino fundamental:

> - Utilizar procedimentos próprios para a realização de cálculos da multiplicação e divisão.
> - Utilizar a decomposição das escritas numéricas para a realização do cálculo mental exato e aproximado em multiplicações e divisões.
> - Utilizar a decomposição das escritas numéricas para a realização de cálculos de multiplicação e divisão.
> - Analisar, interpretar e resolver situações-problema, compreendendo os diferentes significados das operações do campo aditivo e multiplicativo envolvendo números naturais.
> - Utilizar sinais convencionais (+, -, x, : e =) na escrita de operações.
> - Formular situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações do campo aditivo e multiplicativo envolvendo números naturais. (SÃO PAULO, 2014, p.36)

Observamos que o Currículo do Estado de São Paulo prioriza o desenvolvimento da competência leitora e escritora em todas as áreas do conhecimento, destacando em Matemática as contextualizações e enfrentamento de situações-problema.

Analisando especificamente as expectativas de ensino propostas para o quinto ano, relacionadas às operações do campo multiplicativo, onde notamos que o estudo da divisão é contemplado, observamos que neste momento da escolarização, os alunos já tiveram contato com diferentes significados das operações do campo multiplicativo nas resoluções de problemas.

No entanto, ainda é preciso consolidar e ampliar estas ideias a partir de situações em que os alunos sejam capazes de avaliar o resultado de uma operação ou a solução de um problema está correto ou não e também de observar as estratégias que podem ser usadas e escolher as mais interessantes. Isto é, entendemos que o objetivo do cálculo para o quinto ano é fazer com que os alunos saibam selecionar procedimentos adequados diante dos problemas propostos e, neste sentido, é valorizada a utilização e socialização das estratégias pessoais de cálculo para que os alunos sintam-se seguros no uso dos algoritmos convencionais.

Os documentos curriculares de âmbito estadual valorizam o trabalho em que o problema é o ponto de partida para a aprendizagem e para a construção de um novo conhecimento. Neste contexto, a participação ativa dos alunos deve ser incentivada pelos professores, por meio de questionamentos que favoreçam a curiosidade, a investigação, a descoberta, a interação e a socialização de ideias.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No desenvolvimento deste trabalho, enfrentamos um grande desafio em relação ao ensino e à aprendizagem de matemática. Refletimos sobre caminhos e possibilidades de exploração de conceitos e resultados matemáticos de grande importância, para os quais observamos grande dificuldade de compreensão e aplicação por parte dos alunos, o que constatamos nos relatórios de avaliações de larga escala que apresentam índices insatisfatórios em matemática.

Exploramos todo o potencial lúdico do jogo “Avançando com o resto”, como um recurso didático motivador para o ensino e a aprendizagem. Conduzimos o desenvolvimento deste trabalho sob a perspectiva da resolução de problemas, estratégia que favoreceu a consolidação e a ampliação do conhecimento dos alunos, e em especial, favoreceu a compreensão do algoritmo da divisão euclidiana aplicado na resolução de problemas envolvendo os diferentes significados desta operação matemática fundamental.

Apresentamos o jogo em uma de suas versões mais clássicas e simples, adaptada de Borin (2004), porque identificamos grandes dificuldades em uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental, em relação ao uso do algoritmo da divisão euclidiana na resolução de problemas envolvendo tanto a ideia de dividir em partes e iguais, como a ideia de medida.

Observamos que há vantagens e desvantagens na opção pela versão do jogo descrita neste trabalho, entre as quais destacamos que, embora os números envolvidos nos cálculos estejam mais próximos do repertório já assimilado pela maioria dos alunos, o longo tempo de jogo e a impossibilidade de aplicação de estratégias criativas para vitória, são fatores de desmotivação. Assim, indicamos uma modificação disponível no site do Campeonato Escolar de Jogos de Tabuleiro – CEJTA, que atenderá ao ritmo de aprendizagem de cada aluno, oferecendo desafios a todos. A sugestão é jogar com o lançamento simultâneo de dois dados, o que amplia o número de divisores possíveis, agora de 2 a 12, implicando diretamente no ritmo do jogo, porque assim há mais possibilidades de divisão com resto diferente de zero para os números do tabuleiro, e também, porque aumenta a possibilidade de movimento dos marcadores para até 11 casas. Outra variação possível é o uso de dois marcadores para cada equipe, com liberdade de escolha para movimentação de um dos marcadores, o que possibilita definição de estratégias de jogo.

Em sala de aula, a problematização proposta para o momento do jogo e a partir do jogo, oportunizou a discussão das diferentes ideias envolvidas na divisão, o estudo reflexivo do algoritmo da divisão euclidiana e a exploração de alguns conceitos e resultados matemáticos neste contexto.

Consideramos especialmente produtiva, a observação de regularidades no preenchimento da tabela com os restos obtidos na divisão do número do tabuleiro pelo número obtido no lançamento do dado. Também destacamos que um bom planejamento da aula que envolve jogos é fundamental, já que o entusiasmo dos alunos neste tipo de atividade é desejável e inevitável.

Concluímos pela análise da participação dos alunos, que o jogo e a resolução de problemas possibilitaram envolver e motivar os alunos para a aprendizagem de conceitos, competências e habilidade inerentes ao Currículo de Matemática.

APÊNDICE

Neste apêndice, apresentamos os materiais que usamos como recursos para realização da atividade em sala de aula, com uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental, além de fotos da execução e conclusão das atividades apresentadas pelos alunos.

1) Jogo "Avançando com o resto"

Fonte: Laboratório de Matemática do Ibilce/UNESP

http://www.ibilce.unesp.br/#!/departamentos/matematica/extensao/lab-mat/jogos-no-ensino-de-matematica/6-ao-9-ano/

Objetivo do jogo: Ser a primeira equipe a levar seu marcador a casa com a palavra FIM.

Regras:

1. Duas equipes jogam alternadamente. Cada equipe movimente seu marcador iniciando na casa com o número 39, como indicado no tabuleiro.
2. Cada equipe, na sua vez, joga o dado e efetua a divisão onde:
   - o dividendo é o número da casa onde seu marcador se encontra;
   - o divisor é o número obtido no lançamento do dado.

   Em seguida, a equipe movimenta seu marcador o número de casas igual ao resto da divisão efetuada.
3. A equipe que, na sua vez, efetuar um cálculo errado, perde a sua vez de jogar.
4. Ganha o jogo a equipe que primeiro alcançar com seu marcador, a casa com a palavra FIM.
5. Para alcançar a casa com a palavra FIM, a equipe deve obter o número exato de movimentos, sem ultrapassá-la. Se houver excesso, deve retroceder o número de casas que excede o movimento até a casa com a palavra FIM.

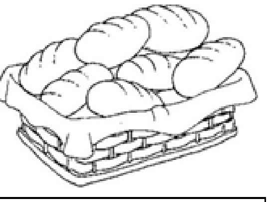
2) Avaliação diagnóstica

Escola Municipal “Prof. João Arnaldo Andreu Avelhaneda” Data: _____/_____/__________

Nome:	Turma:

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

(Simulado da Prova Brasil – adaptado)



Questão 1: Uma merendeira preparou 78 pães que foram distribuídos igualmente em 6 cestas. Quantos pães foram colocados em cada cesta?

Resolução:

Resposta:

Questão 2: Ana está organizando sacolinhas para um aniversário. Ela tem 78 balas e quer colocar 6 balas em cada sacolinha. De quantas sacolinhas Ana precisa?

Resolução:

Resposta:

Questão 3: Davi juntou 63 figurinhas para colar no seu álbum. Em cada página cabem 5 figurinhas. Quantas páginas do álbum Davi irá preencher?

Resolução:

Resposta:

3) Tabela para registro das divisões efetuadas no jogo

Escola Municipal "Prof. João Arnaldo Andreu Avelhaneda" Data: _____/_____/__________

Equipe:

Jogador 1:
Jogador 2:

REGISTROS DO JOGO 'AVANÇANDO COM O RESTO"

	**Dividendo** (Número da casa do tabuleiro)	**Divisor** (Número obtido no lançamento do dado)	**Cálculo** (Algoritmo da divisão) Dividendo | Divisor Resto Quociente	**Quociente** (Resultado da divisão)	**Resto** (Número de casas que avança o marcador)
Jogador 1					
Jogador 2					
Jogador 1					
Jogador 2					

4) Problemas propostos a partir do jogo

unesp UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO" Câmpus de São José do Rio Preto IBILCE

PROFMAT Mestrado Profissional em Matemática

Escola Municipal "Prof. João Arnaldo Andreu Avelhaneda" Data: _____/_____/__________

Nome:	Turma:

SITUAÇÕES PROBLEMA A PARTIR DO JOGO 'AVANÇANDO COM O RESTO"

Problema 1: Conhecendo as regras do jogo "Avançando com o resto", suponha que o primeiro jogador lança o dado e obtém o resultado 6. Seu marcador está na casa inicial do tabuleiro com o número 39. Quantas casas este jogador deve avançar seu marcador?

Resolução:

Resposta:

Problema 2: Suponha que no início do jogo, o marcador do segundo jogador esteja na casa inicial do tabuleiro com o número 39. Desejando avançar o maior número de casas possível, este jogador deve torcer para obter qual resultado no lançamento do dado?

Resolução:

Resposta:

Problema 3: Suponha que um jogador está com seu marcador na casa com o número 30. Para quais resultados obtidos no dado este jogador não avança seu marcador?

Resolução:

Resposta:

Problema 4: Suponha que um jogador obteve resultado 1 no lançamento do dado quando seu marcador estava nas casas 32, 50 e 21. Nestas situações, quantas casas ele avançou seu marcador?

Resolução:

Resposta:

Problema 5: No tabuleiro do jogo, a casa com o número 0 está marcada com a palavra "Tchau". O que pode acontecer quando o marcador de um jogador para nesta casa?

Resolução:

Resposta:

Problema 6: Assim como o número 0 (zero), há no jogo outro número que não permite avançar o marcador para nenhum dos resultados obtidos no lançamento dos dados?

Resolução:

Resposta:

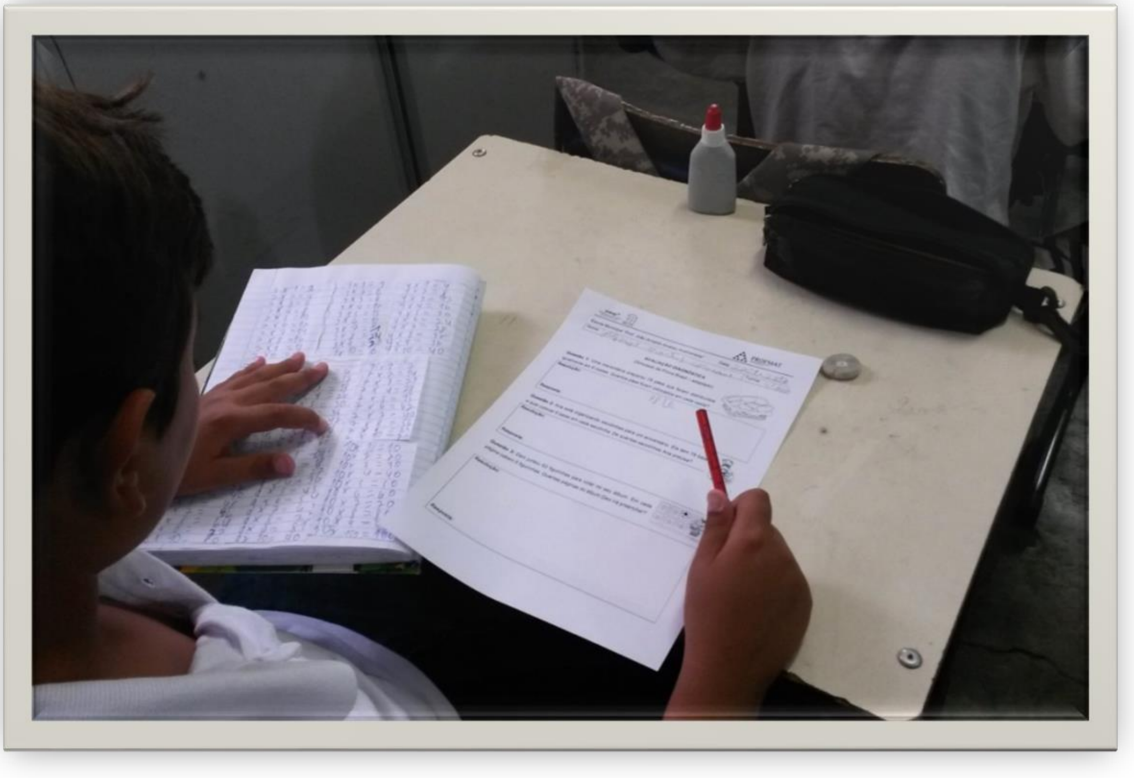
Problema 7: Qual é o maior número de casas que um jogador pode avançar com seu marcador numa rodada? Quando isso acontece?

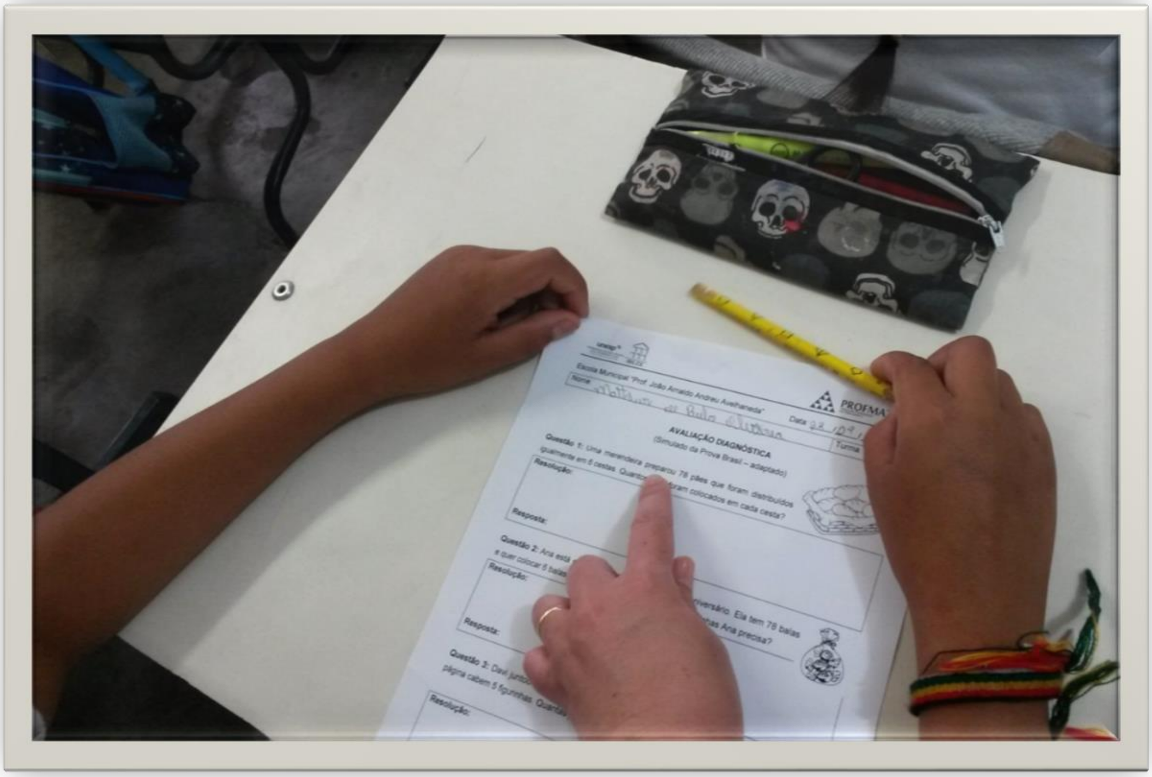
Resolução:

Resposta:

5) Fotos

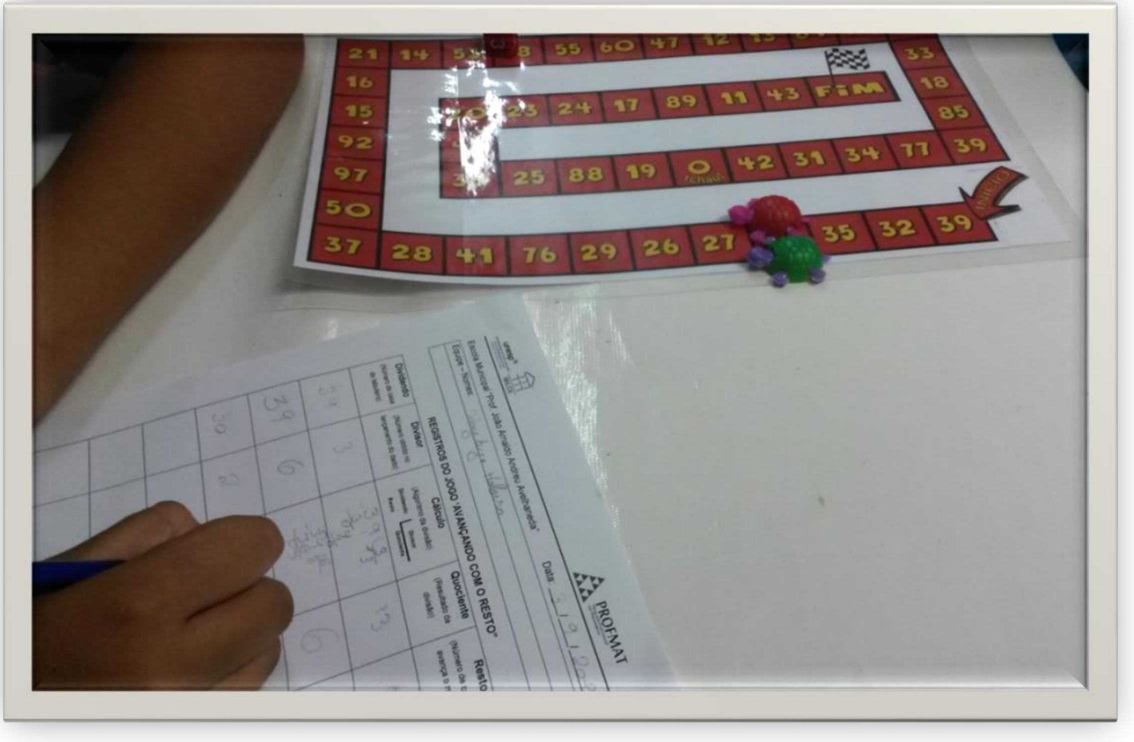
- Alunos da turma do 5º ano EF realizando avaliação diagnóstica



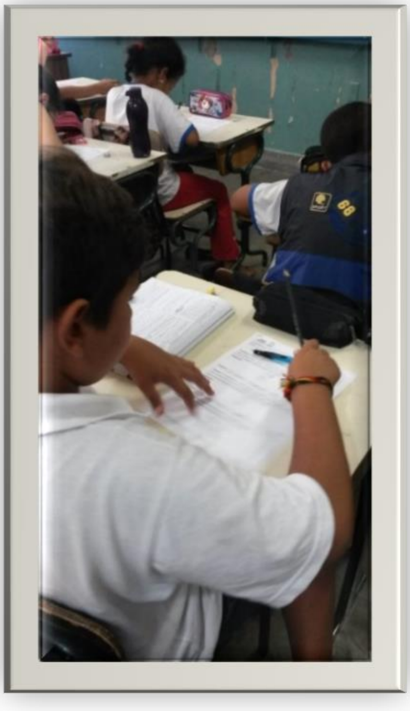

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA
(Simulado da Prova Brasil – adaptado)
Resolução:
Resposta:

- Atividade de vivência da ideia de divisão proposta no problema

- Momento de jogo



- Resolução de problemas propostos a partir do jogo



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BORIN, J. ***Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática****.* São Paulo, SP: IME-USP, 2004. 100 p.

BRASIL, Ministério da Educação. ***Base Nacional Comum Curricular****.* Brasília: MEC, 2017. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/pdf/1_BNCC-Final_Introducao.pdf . Acesso em 29 de setembro de 2017.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. ***Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, primeiro e segundo ciclos do Ensino Fundamental****.* Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 2001. 142 p.

__________. ***Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental****.* Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

BRITO, J. E. ***Avançando com o resto.*** Disponível em http://www.ibilce.unesp.br/#!/departamentos/matematica/extensao/lab-mat/jogos-no-ensino-de-matematica/6-ao-9-ano/ . Acesso em 10 de julho de 2017.

CARDOSO, V. C. ***Materiais didáticos para as quatro operações****.* São Paulo, SP: IME-USP, 2005. 75 p.

COSTA, H. L. L. CARMO, V. M. ***O jogo Avançando com o resto como proposta metodológica para o ensino de divisão.*** XII Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paluo, SP, 13 a 16 de julho de 2016. Disponível em http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/8018_3757_ID.pdf . Acesso em 26 de setembro de 2017.

DUTENHEFNER, F. CADAR, L. ***Encontros de Aritmética****.* Rio de Janeiro, RJ: Imos Gráfica e Editora, 2015. 121 p.

GRANDO, R. C. ***A construção do conceito matemático no jogo***. Revista de Educação Matemática, ano 5, n.3. São Paulo, SP: SBEM, p.13-17, 1997.

______________. ***O jogo e a matemática no contexto da sala de aula***. 3.ed. São Paulo, SP: Paulus, 2009. 120 p.

HEFEZ, A. ***Elementos de Aritmética****.* Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2011. 169 p.

KAMII, C. ***A criança e o número: implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação junto a escolares de 4 a 6 anos****.* Campinas, SP: Papirus, 1987. 124p.

______________. ***Desvendando a Aritmética: Implicações da teoria de Piaget***. Campinas, SP: Papirus, 1995. 299p.

MALAQUIAS, G.T. CARMO, V. M. ***Utilizando o jogo "Avançando com o resto" para identificar as dificuldades com a divisão.*** VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática. Canoas, RS – Brasil. 16, 17 e 18 de outubro de 2013. Disponível em http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/1222/274 . Acesso em 26 de setembro de 2017.

PARRA, C. SAIZ, I. (Org.) ***Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas***. Porto Alegre, RS: Artes Médicas, 1996. 258 p.

POLYA, G. ***A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.*** Rio de Janeiro: Interciência, 1977.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. ***Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias - Ensino Fundamental – Ciclo II e Ensino Médio***. São Paulo, SEE, 2010. 72p.

__________. ***Orientações Curriculares do Estado de São Paulo: Anos iniciais do Ensino Fundamental – Matemática***. Versão preliminar. São Paulo, SEE, 2014. 45p.

__________. ***Ler e Escrever: Jornada de Matemática***. São Paulo, FDE, 2010. 160p.

SILVA, A. B. A. R. et al. ***Aplicando o Jogo "Avançando com o resto" no Ensino de Matemática***. Disponível em http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/v2n2/v2n2_art11.pdf. Acesso em 26 de setembro de 2017.

SMOLE, K. C. S. DINIZ, M. I. S. V. MILANI, E. ***Jogos de matemática de 6º a 9º ano***. Porto Alegre, RS: Artmed, 2007. 104 p.