Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

O Uso de Grandezas Proporcionais no Ensino de Física

Antonio Marcelo Ferreira Aguiar

Teresina - 2017

Antonio Marcelo Ferreira Aguiar

Dissertação de Mestrado:

O Uso de Grandezas Proporcionais no Ensino de Física

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Me. Mário Gomes dos Santos

Teresina - 2017

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

A283u Aguiar, Antonio Marcelo Ferreira.
O uso das grandezas proporcionais no ensino de física / Antonio Marcelo Ferreira Aguiar. – Teresina, 2017.
64f. il. color

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT, 2017.
Orientador: Prof. Msc. Mário Gomes dos Santos.

1. Matemática – Ensino e Estudo. 2. Proporcionalidade. 3. Modelagem. I. Título

CDD 510

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SBM

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **Mestre em Matemática** intitulada: **O Uso de Grandezas Proporcionais no Ensino de Física**, defendida **Antonio Marcelo Ferreira Aguiar** em **01 / 12 / 2017** e aprovada pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Me. Mário Gomes dos Santos (UFPI)
Presidente da Banca Examinadora

Jurandir de Oliveira Lopes
Dr. Jurandir de Oliveira Lopes (UFPI)
Examinador Interno

Antonio Francisco Canuto do N. Rodrigues
Me. Antonio Francisco Canuto do Nascimento Rodrigues (IFCE)
Examinador Externo

Dedicatória.

À minha mãe Tereza (In memoriam)

À minha esposa Roseli, e ao meu filho Juan Antonio.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da vida.

Agradeço a minha esposa, Roseli e ao meu filho, Juan Antonio, pela compreensão enquanto estive ausente em preciosos momentos para dedicar-me ao curso.

Agradeço a minha mãe Thereza (*in memorian*), a meu pai, João Aguiar, aos meus irmãos pelos primeiros estímulos dados no estudo e por compartilharem de importantes momentos da minha vida.

Agradeço aos professores de toda a educação básica e graduação pelo conhecimento que me ajudaram a construir; numerosas e valiosas contribuições, fundamentais para esta conquista.

Agradeço aos professores da UFPI e que participaram do Profmat/SBM, Jéferson, Liane, Juscelino, Valmária, Roger, Manoel, Jurandir, Gilvan, Paulo Alexandre, Humberto, Benício (*in memorian*), Newton, Isaías e Mário Gomes pelos valorosos conhecimentos compartilhados.

Agradeço aos colegas que viraram amigos na UFPI: Jorge Tibúrcio (*in memoriam*), Gildene, Amsterdã, Assis, Antonio Canuto, Antonio Amaral, José Daissy, José Cledes, Edson Lira, Alberto Cunha, Paulo Jales, Diego Gomes, Wilson e que foram deveras importantes em toda essa jornada.

Agradeço ao corpo docente e aos núcleos gestores das escolas que sirvo (ou servi), pela compreensão durante as frequentes ausências para dedicação aos estudos do Mestrado.

Agradeço a professora Terezinha de Jesus e ao professor Figueiredo, pelas correções ortográficas no texto.

Ao Professor Me. Flávio Alves Pereira, ex-professor e importante apoiador desta jornada, e todos àqueles que de alguma forma me incentivaram a cursar e concluir este curso.

Ao meu orientador Mário Gomes pela prestreza e motivação, tão essenciais para a conclusão do curso.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

"*Não diga que a vitória está perdida, se é de batalhas que se vive a vida.*".

Raul Seixas, em Tente Outra Vez

Resumo

Neste trabalho buscamos estabelecer uma relação entre proporcionalidade e resolução de determinados problemas aplicados à Física nos quais, observamos que determinadas grandezas físicas se relacionam através de uma função da forma $f(x) = ax$, linear. Acreditamos que a compreensão de diversos fenômenos físicos deve ser modelada pela forma citada. Deste modo, procuramos subsidiar professores das séries finais do ensino fundamental e do ensino médio com base em pesquisa bibliográfica nos Parâmetros Curriculares Nacionais (2000), LIMA(2012; 2010), HALLIDAY(2009), ALVARENGA(1992), através da modelagem de determinados fenômenos físicos utilizando o conceito de proporcionalidade como recurso da compreensão de conceitos de Física ou Matemática por vezes, numa abordagem interdisciplinar. Finalizamos comentando diversas aplicações em provas de vestibulares tradicionais, Exame Nacional do Ensino Médio, Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Exame de Acesso do Profmat.

Palavras-chave: Proporcionalidade, Grandezas, Modelagem, Interdisciplinaridade, Física, Matemática.

Abstract

In this work we try to establish a relation between proportionality and resolution of some problems applied to Physics in which, we observe that certain physical quantities are have a relation through a function of the form f(x) = ax, linear. We believe that the understanding of various physical phenomena must be modelated by the quoted form. Of this In this way, we seek to help teachers of the final grades of elementary and high scool education, according to bibliographic research in the National Curriculum Parameters(2000), LIMA(2012; 2010), HALLIDAY(2009), ALVARENGA(1992), through modeling of certain physical phenomena applying the concept of proportionality as a resource the understanding of concepts of Physics or Mathematics concepts, sometimes in a interdisciplinary approach. We conclude by commenting a lot of applications in traditional vestibular tests, National Examination of the Ministry of Education, the Brazilian Mathematical Public Schools and Access Examination of Profmat.

Key words: Proportionality, Quantities, Modeling, Interdisciplinarity, Physics, Mathematics.

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Vivenciamos no ensino brasileiro um fato que tem causado impacto no processo de ensino-aprendizagem. Segundo SALDAÑA (2017), "quase metade dos professores do ensino médio do país dá aula de disciplinas para as quais não tem formação específica". Tal fato, pude vivenciar na minha primeira experiência no magistério quando atuei como professor de Ciências enquanto frequentava as cadeiras do curso de Matemática da Universidade Estadual do Vale do Acaraú (UVA), no estado do Ceará.

Como estudante do curso de Matemática, ainda iniciante no magistério, notava que o rigor, bem como aspectos da modelagem matemática, eram necessários para demonstração de resultados em Física, o que me motivou a pesquisar algo relacionado às duas disciplinas. Por mais de dez anos, apesar da formação em Matemática, cheguei a atuar mais como professor de Física na rede particular de ensino do que em minha área de formação. Este quadro que ainda persiste na educação básica de um modo mais amplo.

É inegável o quanto as disciplinas de Matemática e Física são dependentes, pois, conforme BRASIL (2000), "cabe compreender os princípios científicos presentes nas tecnologias, associá-las aos problemas que se propõe solucionar e resolver os problemas de forma contextualizada, aplicando aqueles princípios científicos a situações reais ou simuladas". Neste contexto, num mundo em que predomina a tecnologia, faz-se necessário que o trabalho docente nestas disciplinas faça uso de uma abordagem permanentemente interdisciplinar.

Neste trabalho discorremos sobre a utilização de proporcionalidade como suporte para a resolução e compreensão de problemas importantes da Física. Considerando que, conforme LIMA (2012), "ao aplicarmos o modelo matemático para uma situação concreta, devemos ter em mente os limites da validez do modelo". Isto posto, ressaltaremos casos pontuais em que possamos considerar as principais definições de proporcionalidade.

Com efeito, no capítulo 2, demonstraremos o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, representação através de função linear, a relação direta ou inversa entre duas grandezas e sua representação gráfica, bem como uma grandeza proporcional a várias outras. No capítulo 3 enfocaremos as grandezas físicas que se relacionam proporcionalmente, com ênfase em aplicações de importantes partes da Física tais como: mecânica, termologia, óptica, ondulatória, eletromagnetismo e Física moderna. Em seguida, no capítulo 4, mostramos possíveis soluções de questões de Física ou Matemática de provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), vestibulares regionais como Universidade Federal do Piauí (UFPI), Universidade Estadual do Piauí (UESPI), Universidade Estadual do Ceará (UECE), Universidade Estadual do Vale do Acaraú (UVA) e do Exame Nacional de Acesso para o Mestrado Profissional em Matemática (ENA-Profmat).

Assim, buscamos propor que a utilização do texto desta pesquisa bibliográfica servirá como um recurso para o ensino de Física, inclusive Matemática, no Ensino Médio e para as séries finais do Ensino Fundamental.

Capítulo 2

Grandezas Proporcionais

No dia-a-dia medidas de tempo, temperatura, velocidade, comprimento, volume, área, quantidade de um produto e quantidades monetárias são necessárias nas diversas atividades humanas. Conforme HALLIDAY (2009), "descobrimos a física aprendendo a medir e comparar grandezas". Ao fazermos, verificamos ser possível que tais medidas dependam umas das outras. Quando estas relações acontecem, verificamos que esta dependência entre as mesmas produz importantes consequências representadas nas situações a seguir e que têm relações com fenômenos físicos.

Situação 1:

A massa de um corpo depende do volume ocupado pelo mesmo.

Situação 2:

A dilatação de uma barra metálica depende da variação de temperatura a que se submete.

Situação 3:

O tempo gasto no percurso de um veículo em movimento depende da velocidade desprendida durante o percurso.

Denominanos grandeza àquilo que podemos medir. Para HALLIDAY (2009), "medimos cada grandeza física em unidades apropriadas, por comparação com um padrão". Ou seja, dado um certo padrão, medir um grandeza corresponde a determinar quantas vezes este padrão corresponde ao objeto de medida de mesma natureza. Costumamos em sala de aula, informalmante, indagar quantas vezes o padrão "cabe dentro" do objeto de medida. Definimos grandeza física àquelas que, efetivamente, possam estar relacionadas a um padrão de medida unitário pré-definido. Deste modo referir-se a um sentimento, como o tamanho do amor que sinto por meu filho, não constitui uma grandeza física.

Os casos relativos às situações 1, 2 e 3 tratam de grandezas físicas que se relacionam proporcionalmente. Considerando as que o fazem de maneira direta ou inversa, mostraremos estar presentes em diferentes fenômenos que envolvem medidas de grandezas físicas.

Matematicamente, diz-se que duas grandezas são *proporcionais* quando existe uma correspondência $x \mapsto y$, que associa a cada valor x de uma delas um valor y bem definido da outra, de tal modo que sejam cumpridas as seguintes condições:

1) Quanto maior for x, maior será y. Em termos matemáticos: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x'$ implica $y < y'$.

2) Se dobrarmos, triplicarmos, etc. o valor de x então o valor correspondente de y será dobrado, triplicado, etc. Na linguagem matemática: se $x \mapsto y$ então $nx \mapsto ny$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nas condições acima, a correspondência $x \mapsto y$ chama-se uma proporcionalidade.

Podemos formular a definição matemática de proporcionalidade, onde as grandezas são substituídas por números reais, que são suas medidas. Estamos considerando apenas grandezas que tem medida positiva, logo o modelo matemático da proporcionalidade leva em consideração apenas números reais positivos.

Uma proporcionalidade (numérica) é uma função $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ com as seguintes propriedades:

1) f é uma função crescente, isto é $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$ para quaisquer $x, x' \in \mathbb{R}^+$.

2) Para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $f(nx) = n.f(x)$.

Numa proporcionalidade a propriedade 2), acima admitida apenas quando $n \in \mathbb{N}$, vale para um número real positivo qualquer.

Tal fato está relacionado ao teorema que será demonstrado *a posteriori*.

2.1 Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Este teorema constitui uma generalização de proporcionalidade como função cujo domínio corresponde aos números reais não-negativos. Sua demonstração, que pode ser encontrada em LIMA (2010), enunciamos e demonstramos a seguir.

Teorema: Se $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função crescente tal que $f(nx) = n.f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo $n \in \mathbb{N}$, então $f(cx) = c.f(x)$ para quaisquer x e c em $\mathbb{R}^+$.

Demonstração:

Em primeiro lugar, para todo número racional $r = m/n$, com $m, n \in \mathbb{N}$, e todo $x \in \mathbb{R}^+$ vale

$$n.f(rx) = f(n.rx) = f(mx) = m.f(x)$$

por 2) logo $f(rx) = \frac{m}{n}f(x) = r.f(x)$. Assim, a igualdade $f(cx) = c.f(x)$ é válida quando c é racional. Suponhamos, por absurdo, que exista $c > 0$ irracional tal que $f(cx) \neq c.f(x)$ para algum $x \in \mathbb{R}^+$. Então ou $f(cx) < c.f(x)$ ou $f(cx) > cf(x)$. Consideremos o primeiro caso. Temos então $f(cx)/f(x) < c$. Seja r um valor racional aproximado de c, de modo que $f(cx)/f(x) < r < c$, logo $f(cx) < r.f(x) < c.f(x)$. Como r é racional, vale $r.f(x) = f(rx)$. Assim, podemos escrever $f(cx) < f(rx) < c.f(x)$. Em particular $f(cx) < f(rx)$. Mas, como $r < c$, tem-se $rx < cx$ e, pela propriedade 1), isso obriga $f(rx) < f(cx)$ e não $f(cx) < f(rx)$. Esta contradição mostra que não é possível ter-se $f(cx) < c.f(x)$. De modo inteiramente análogo se vê que $f(cx) > c.f(x)$ é impossível. Portanto deve ser $f(x) = c.f(x)$ para quaisquer $c, \in \mathbb{R}^+$. $\square$

2.2 Função Linear e Proporcionalidade

Ao modelarmos matematicamente fenômenos físicos através de Proporcionalidade, consideramos particularmente a função linear, cujo Corolário, demonstrado em LIMA (2010), descrevemos em seguida.

Corolário. Se $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma proporcionalidade então tem-se, para todo $x > 0$, $f(x) = ax$, onde $a = f(1)$.

Demonstração: Com efeito, pelo Teorema Fundamental, para quaisquer x, $c \in \mathbb{R}^+$, vale $f(xc) = x.f(c) = f(c).x$. Em particular, tomando $c = 1$, obtemos $f(x) = a.x$, onde $a = f(1)$. $\square$

Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$, onde $a \in \mathbb{R}$ é uma constante, chama-se uma função linear. Quando $a > 0$, a função linear $f(x) = ax$ transforma um número real positivo x no número positivo ax, logo define, por restrição, uma proporcionalidade $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Acabamos de ver que, reciprocamente, toda proporcionalidade é a restrição de uma função linear a $\mathbb{R}^+$. O coeficiente a chama-se o *fator de proporcionalidade*.

Esta última observação nos permite concluir que se $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma proporcionalidade então, para quaisquer x_1, x_2 com $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, tem-se $\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2}$. Com efeito, ambos os quocientes são iguais ao fator de proporcionalidade a. A igualdade $\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2}$ chama-se uma *proporção*.

Chama-se regra de três ao problema que consiste em, conhecendo três dos números x_1, y_1, x_2, y_2, determinar o quarto (desconhecido).

Há duas maneiras tradicionais de resolver esse problema. Suponhamos dados x_1, y_1 e x_2. O quarto elemento da proporção será chamado y. Então deve ser $\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y}{x_2}$, donde se tira $y = \dfrac{x_2 y_1}{x_1}$. Esta é uma forma de resolver a regra de três.

O outro método de resolver a regra de três chama-se "redução à unidade". Sabendo que $f(x_1) = y_1$, ou seja, $ax_1 = y_1$, obtemos $a = \dfrac{y_1}{x_1}$ e daí vem o valor do termo y que falta na proporção $\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y}{x_2}$: $y = f(x_2) = ax_2 = \dfrac{y_1 x_2}{x_1}$. O nome "redução à unidade"provém do fato de que $a = f(1)$ é o valor de $f(x)$ quando $x = 1$.

Deve-se ressaltar enfaticamente que a regra de três, proveniente da proporção $\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y}{x_2}$, só pode ser legitimamente empregada quando se tem uma proporcionalidade f, sendo $y_1 = f(x_1)$ e $y = f(x_2)$.

Outra observação a ser feita é que, em diversas situações onde se usa a proporcionalidade (ou a regra de três), o fator de proporcionalidade a é irrelevante e/ou complicado de se obter.

Existe também a noção de proporcionalidade inversa. Diz-se que duas grandezas são inversamente proporcionais quando existe uma correspondência $x \mapsto y$ que associa a cada valor x de uma delas um valor bem definido y da outra, de tal modo que sejam cumpridas as seguintes condições:

1) Quanto maior for x, menor será y. Em termos matemáticos: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x' \Rightarrow y' < y$.

2) Se dobrarmos, triplicarmos, etc. o valor de x então o valor correspondente de y será dividido por dois, por três, etc. Em linguagem matemática: se $x \mapsto y$ então $nx \mapsto \frac{y}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Portanto, dizer que y é inversamente proporcional a x equivale a dizer que y é proporcional a $\frac{1}{x}$. Segue-se então, do Teorema Fundamental da Proporcionalidade, que se y é inversamente proporcional a x então tem-se $y = \frac{a}{x}$, onde o fator de proporcionalidade a é o valor de y que corresponde a $x = 1$.

Noutras palavras, dizemos que duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. No primeiro caso, a proporcionalidade se chama direta e, no segundo caso, inversa; as grandezas se dizem diretamente ou inversamente proporcionais.

2.3 Grandezas Diretamente Proporcionais

Duas grandezas variáveis são chamadas grandezas diretamente proporcionais quando a razão entre os valores da primeira grandeza e os valores correspondentes da segunda é sempre a mesma. Ou seja, quando a razão entre a medida y de uma e a correspondente x da outra $(x \neq 0)$ for constante e diferente de zero, isto é $\frac{y}{x} = k$, em que k é uma constante diferente de zero.

Simbolicamente, representamos $y \propto x$. Lê-se: y é proporcional a x

Deste modo, podemos nos referir, de um modo geral, da seguinte forma: dadas duas sequências $(a_1, a_2, ..., a_n)$ e $(b_1, b_2, ..., b_n)$, diz-se que os números $b_1, b_2, ..., b_n$ são proporcionais aos números $a_1, a_2, ..., a_n$ quando

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = ... = \frac{b_n}{a_n}.$$

Se chamarmos de k o valor comum dessas n razões, isto significa que $b_1 = ka_1, b_2 = ka_2, ..., b_n = ka_n$. Ou ainda, isto quer dizer que os pontos do plano dados pelas coordenadas $P_1 = (a_1, b_1), P_2 = (a_2, b_2), ..., P_n = (a_n, b_n)$ acham-se todos sobre a reta *y=kx*, conforme o gráfico que segue.

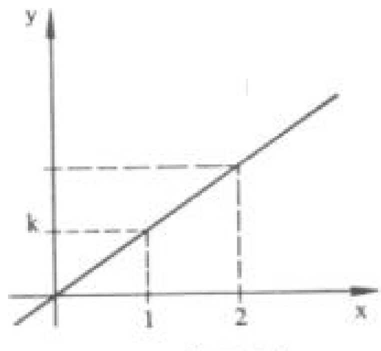

Figura 2.1: Gráfico da função $f(x) = kx$

FONTE: Livro Meu Professor de Matemática e outras histórias (p.149)

Na resolução de problemas que envolvem grandezas proporcionais, diretamente ou inversamente, o recurso mais difundido, desde as séries finais do ensino fundamental é a regra de três simples. Onde, após a verificação do tipo de proporcionalidade efetua-se o produto dos meios pelos extremos a fim de determinar a "quarta proporcional".

Consideremos um caso similar ao citado na **situação 1**, no início do capítulo, medindo as massas de blocos de ferro de diversos volumes. Encontrou-se os seguintes resultados:

- um volume $V_1 = 1cm^3$ tem massa $M_1 = 8g$;
- um volume $V_2 = 2cm^3$ tem massa $M_2 = 16g$;
- um volume $V_3 = 3cm^3$ tem massa $M_3 = 24g$;
- um volume $V_4 = 4cm^3$ tem massa $M_4 = 32g$.

e assim sucessivamente. Notamos, então, que ao duplicarmos o volume (de $1cm^3$ para $2cm^3$), a massa também duplicou (de $8g$ para $16g$); ao triplicarmos o volume (de $1cm^3$

para $3cm^3$), a massa também triplicou (de $8g$ para $24g$) e assim por diante.

Assim, concluímos que a relação de dependência expressa acima é uma **proporcionalidade direta**. Daí,

"a massa de um bloco de ferro é diretamente proporcional ao seu volume ".

O fato descrito também será observado em inúmeros casos envolvendo grandezas físicas de outras naturezas, conforme discorreremos nos demais capítulos deste trabalho.

2.4 Grandezas Inversamente Proporcionais

Duas grandezas variáveis são denominadas inversamente proporcionais quando o produto da medida y de uma e a correspondente x da outra for constante e diferente de zero, isto é, $y.x = k$, em que k é uma constante diferente de zero. Se x e y forem inversamente proporcionais, y será diretamente proporcional ao inverso de x, pois $\frac{y}{\frac{1}{x}} = k$. Daí, $y = \frac{k}{x}$.

Simbolicamente, representamos $y \propto \frac{1}{x}$. Lê-se: y é proporcional a $\frac{1}{x}$ ou, inversamente proporcional a x.

A relação entre x e y pode ser representada graficamente pela curva (chamada de *hipérbole*) formada pelos pontos $P = (x, k/x), x > 0$, a seguir:

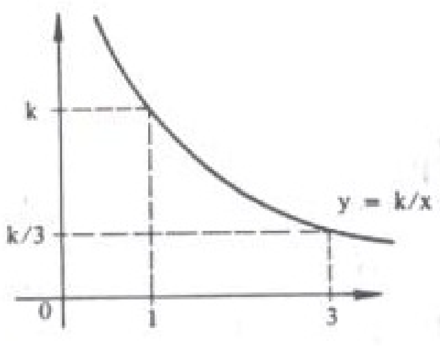

Figura 2.2: Gráfico da função $f(x) = \frac{k}{x}$

FONTE: Livro Meu Professor de Matemática e outras histórias (p.149)

Agora, vamos considerar um caso similar ao citado na **situação 3**, no início do capítulo. Suponhamos que uma pessoa, em um automóvel, faça uma viagem entre duas cidades, distanciadas de 180km. Seja x a velocidade do carro e y o tempo gasto na viagem. É fácil concluir que:

- se $x = 30km/h \rightarrow y = 6h$
- se $x = 60km/h \rightarrow y = 3h$
- se $x = 90km/h \rightarrow y = 2h$ etc.

Vemos que, duplicando x, o valor de y ficou reduzido à metade; triplicando x, o valor de y ficou dividido por 3 e assim por diante. Portanto, podemos dizer que

"o tempo de de viagem entre duas cidades é inversamente proporcional à velocidade desenvolvida".

Ao observarmos a proporcionalidade inversa veremos que outros casos no texto guardarão a mesma relação de proporcionalidade verificada.

2.5 Grandeza Proporcional a várias outras

Em muitas situações tem-se uma grandeza z, de tal modo relacionada com outras, digamos x, y, u, v, w, que a cada escolha de valores para estas últimas corresponde um valor bem determinado para z. Então z chama-se uma função das variáveis x, y, u, v, w e escreve-se $z = f(x, y, u, v, w)$.

Nestas condições, diz-se que z é (diretamente) proporcional a x quando:

1) Para quaisquer valores fixados de y, u, v, w, a grandeza z é uma função crescente de x, isto é, a desigualdade $x < x'$ implica $f(x, y, u, v, w) < f(x', y, u, v, w)$.

2) Para $n \in \mathbb{N}$ e x, y, u, v, w quaisquer tem-se $f(nx, y, u, v, w) = n.f(x, y, u, v, w)$.

Analogamente, diz-se que z é inversamente proporcional a x quando:

1') Para quaisquer valores fixados de y, u, v e w, a grandeza z é uma função decrescente de x, isto é, a desigualdade $x < x'$ implica $f(x, y, u, v, w) > f(x', y, u, v, w)$.

2') $n \in \mathbb{N}$ e x, y, u, v, w quaisquer tem-se $f(nx, y, u, v, w) = \frac{1}{n}.f(x, y, u, v, w)$.

Segue-se do Teorema Fundamental da Proporcionalidade que as propriedades 2) e 2') acima valem para $c > 0$ real qualquer em lugar de $n \in \mathbb{N}$. Isto tem a seguinte consequência: Se $z = f(x, y, u, v, w)$ é (diretamente) proporcional a x e y e inversamente proporcional a u, v e w então, tomando-se $a = f(1, 1, 1, 1)$, tem-se

$$f(x, y, u, v, w) = a.\frac{x.y}{u.v.w}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} f(x, y, u, v, w) = &\quad f(x.1, y, u, v, w) \\ = &\quad x.f(1, y, u, v, w) \\ = &\quad xy.f(1, 1, u, v, w) \\ = &\quad \frac{x.y}{u}.f(1, 1, 1, v, w) \\ = &\quad \frac{x.y}{u.v}.f(1, 1, 1, 1, w) \\ = &\quad \frac{x.y}{u.v.w}.f(1, 1, 1, 1, 1) \\ = &\quad a.\frac{x.y}{u.v.w}. \end{aligned}$$

A lei da gravitação universal, de Newton, afirma que dois corpos, de massas m e m' respectivamente, situados a uma distância d um do outro, se atraem segundo uma força cuja intensidade F é proporcional a essas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles (d^2). Resulta do acima exposto que

$$F = c.\frac{m.m'}{d^2},$$

onde a constante c depende do sistema de unidades utilizado.

Outra relação utilizada em termodinâmica, no estudo dos gases ideais, a equação de Clapeyron, afirma que a pressão p exercida por uma amostra de gás é diretamente proporcional ao número de mols n, à temperatura T e inversamente proporcional ao volume ocupado V. Donde, representamos

$$\frac{p.V}{n.T} = R,$$

onde R é a constante de proporcionalidade, denominada constante universal dos gases ideais.

Verificaremos no decorrer do texto, bem como as experimentações e deduções que neles resultaram, em que uma grandeza será proporcional a várias outras.

Capítulo 3

Grandezas Físicas que se relacionam proporcionalmente

Para fins didáticos, considerando a abordagem direcionada ao público da educação básica, os fenômenos físicos são classificados de acordo com a natureza dos elementos estudados. Assim, àqueles que se associam ao movimento são estudados pela Mecânica. Fenômenos relativos ao calor e aos seus efeitos são estudados pela Termologia. A Óptica Geométrica cuida em descrever os fenômenos provocados pela propagação da luz, desconsiderando sua natureza ondulatória. Os fenômenos que produzem propagação de ondas são estudados pela Ondulatória. Fenômenos de natureza elétrica ou magnética, pela parte denominada Eletromagnetismo. Há uma importante parte da Física, considerada a propulsora de toda a tecnologia presente no mundo moderno, denominada Física Moderna, que teve avanços significativos, principalmente a partir do final do século XIX e início do século XX. Em qualquer das áreas da Física citadas, ao tentarmos compreender suas ideias, mostraremos que são válidas as relações de proporcionalidade direta, inversa ou simultanemente, quando forem proporcionais a várias outras.

3.1 Proporcionalidade em Mecânica

Mecânica é o ramo da Física que estuda os fenômenos relacionados com o movimento dos corpos. Assim, estamos tratando de fenômenos mecânicos quando estudamos o movimento de queda de um corpo, o movimento dos planetas, a colisão de dois automóveis etc. Por organização didática, costuma-se dividí-la em Cinemática, Dinâmica e Estática. Vamos considerar os casos que seguem, em que grandezas dependerão proporcionalmente de outras, em importantes aplicações na mecânica.

3.1.1 Velocidade

Dentre os problemas de Mecânica são comumente utilizados os de cinemática, dos quais, destacamos os que envolvem velocidade. Definida como a razão entre a distância percorrida por um corpo em movimento e o tempo que este gasta para percorrer, a definição é caracterizada matematicamente por uma expressão da forma $x = \frac{z}{y}$. Notamos que, atribuindo valores a x e a y, fica determinado o valor de z. (Por exemplo, z pode ser a distância percorrida por um corpo que se desloca durante y horas com velocidade uniforme de x km/h).

A literatura sobre problemas de Cinemática é vasta e facilmente encontrada em livros de Física ou Matemática das séries finais do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio. Porém, verificam-se importantes relações de proporcionalidade como a que destacaremos do artigo de Geraldo Ávila,*apud* DRUCK (2004), mostrando que a velocidade pode ser proporcional a uma grandeza quadrática, em problemas de frenagem, conforme a formulação de uma questão simples:

Um automóvel, a 30km/h*, é freado e para depois de percorrer mais* 8m*. Se freado a* 60km/h *quantos metros percorrerá até parar?*

Se proposto dessa maneira, o aluno poderá pensar que as grandezas aí envolvidas - velocidade v e distância D percorrida até parar - são diretamente proporcionais e achar que a resposta é 16m. Mas isto é falso. O certo é que a distância é proporcional ao quadrado da velocidade, pelo menos dentro de certos limites de velocidade, e isso precisa ser dito explicitamente no enunciado do problema. Essa lei significa que se D_1 e D_2 são as distâncias correspondentes, respectivamente, às velocidades v_1 e v_2, então

$$\frac{D_1}{v_1^2} = \frac{D_2}{v_2^2}$$

Com os dados concretos do nosso problema, se tomarmos $v_1 = 30km/h$, então $D_1 = 8m$; e se pusermos $v_2 = 60km/h$, teremos a equação

$$\frac{8}{30^2} = \frac{D_2}{60^2}$$

para determinar a distância D_2 correspondente à velocidade de frenagem $v_2 = 60km/h$. Resolvendo a equação obtemos

$$D_2 = \frac{8.60^2}{30^2} = 32m$$

Vale a pena reparar no aumento da distância de frenagem, que passou de 8 para $32m$ - *quadruplicou* - quando a velocidade foi de 30 para $60km/h$ - *duplicou*. Mas, desse cálculo isolado, não podemos concluir que será sempre assim. Se quisermos saber o que ocorre com outras velocidades, podemos fazer novos cálculos, usando o mesmo racioncínio e, é até interessante, calcular as distância de frenagem correspondentes a várias velocidades, como $40, 60, 80, 100, 120km/h$.

Conforme descrevemos, vamos construir uma tabela numérica de velocidades e distâncias correspondentes e uma representação gráfica, marcando as velocidades num eixo horizontal e as distâncias num eixo vertical. Isso permitirá compreender melhor o que está acontecendo com a distância de frenagem à medida que a velocidade aumenta.

Velocidade (km/h)	Distância(m)
40	8
60	18
80	32
100	50
120	72

Tabela 3.1: Distância em função da velocidade.

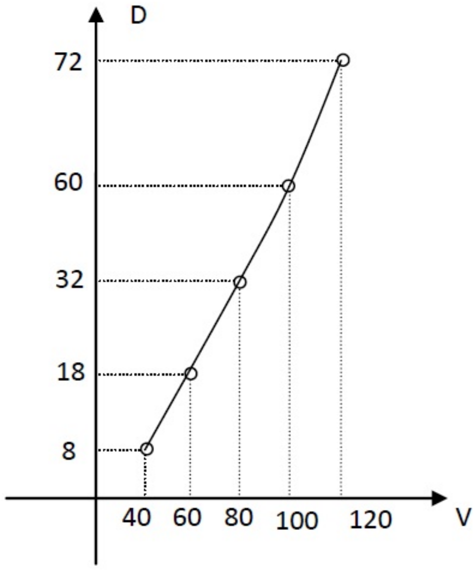

Figura 3.1: Gráfico velocidade em função da distância

FONTE: Construção do autor

3.1.2 Lei de Hooke

Consideremos a figura a seguir, em que uma mola de massa desprezível tem uma de suas extremidades fixas.

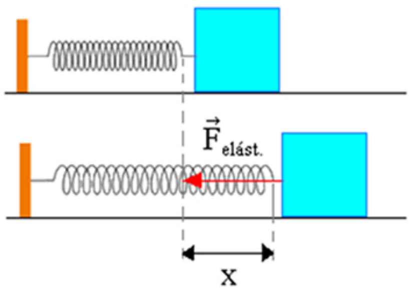

Figura 3.2: Mola Deformada

FONTE: http://alunosonline.uol.com.br/fisica/forca-elastica.html

Verificamos que inicialmente, no comprimento natural a mola, não está sujeita a ação de nenhuma força. Em seguida, ao sofrer uma força externa F, a mola irá deformar-se de um comprimento x. Realizando um experimentos, obtemos os dados representados na tabela que segue.

Graficamente, os dados da tabela podem ser plotados num gráfico cartesiano conforme fizemos abaixo.

Força (N)	deformação (m)
10	0,05
20	0,10
30	0,15
40	0,20
50	0,25

Tabela 3.2: Força em função da deformação.

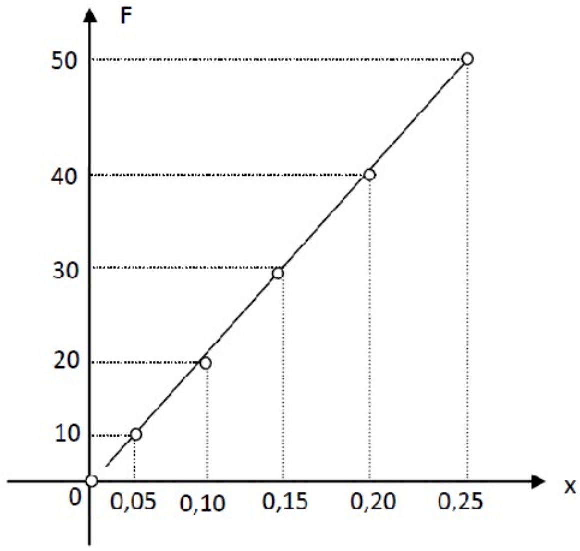

Figura 3.3: Gráfico Força em função da deformação

FONTE: Construção do autor

Conforme o experimento descrito e a representação obtida, graficamente podemos considerar, matematicamente, nos estudos sobre deformações elásticas que Hooke chegou à seguinte conclusão, que ficou conhecida como **Lei de Hooke**, assim enunciada:

Em regime elástico, a deformação sofrida por uma mola é diretamente proporcional à intensidade da força que a provoca.

A expressão matemática da Lei de Hooke é dada por

$$F = k.x \Rightarrow \frac{F}{x} = k.$$

em que F é a intensidade da força deformadora, k é a constante de proporcionalidade e x

é a deformação (alongamento ou encurtamento sofrido pela mola).

A constante de proporcionalidade k é uma qualidade da mola considerada que depende do material que é feita e das dimensões que ela possui, dentre outras características.

3.2 Proporcionalidade em Termologia

Termologia é a parte da Física que estuda o calor e os seus efeitos. Para melhor compreensão dos diferentes fenômenos térmicos, a termologia subdivide-se em Termometria (medidas de temperatura), Calorimetria (medidas de calor), Termodinâmica (calor e trabalho mecânico) e Dilatação Térmica.

Consideramos a seguir, casos em termologia em que uma grandeza é proporcional a várias outras. A Lei da Condução térmica, denominada **Lei de Fourier**, e a Dilatação térmica dos corpos são aplicações importantes.

3.2.1 Lei da Condução Térmica

Considere dois ambientes a temperaturas θ_1 e θ_2 tais que $\theta_2 > \theta_1$, separados por uma parede de área **A** e espessura **e**, conforme a figura 3.4.

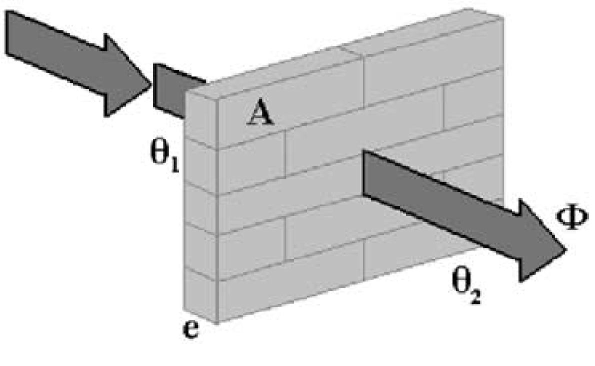

Figura 3.4: Parede sujeita a uma variação de temperatura
FONTE: http://alunosonline.uol.com.br/fisica/lei-fourier.html

Em regime estacionário, o fluxo de calor Φ (quantidade de calor que atravessa uma superfície por intervalo de tempo) depende da área **A** da parede, da espessura **e**, da diferença de temperatura $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ e da natureza do material que constitui a parede.

Verifica-se experimentalmente que, para um dado material, o fluxo de calor é tanto maior quanto maior for a área **A** quanto maior a diferença $\Delta\theta$ e quanto menor for a espessura **e**.

Em termos matemáticos, enunciamos:

Em regime estacionário, o fluxo de calor por condução num material homogêneo é diretamente proporcional à área de secção transversal atravessada e à difenrença de temperatura entre os extremos, e inversamente proporcional à espessura da camada considerada.

Esse enunciado é conhecido como **Lei de Fourier**, expresssa pela fórmula:

$$\Phi = \frac{k.A.(\theta_2 - \theta_1)}{e}.$$

A constante de proporcionalidade k depende da natureza do material, sendo denominada **coeficiente de condutibilidade térmica**. Seu valor é elevado para os bons condutores de calor (condutores térmicos), como os metais, e baixo para os isolantes térmicos.

3.2.2 Dilatação Térmica

Quando um corpo é aquecido, aumenta-se a energia de agitação de suas partículas e, consequentemente, sua temperatura. Em geral, isso provoca um aumento nas dimensões do corpo, fenômeno denominado **dilatação térmica**.

Nos sólidos, observamos que o aumento ou a diminuição da temperatura provocam variações em suas dimensões lineares, bem como nas dimensões superficiais e volumétricas. Assim, no estudo da dilatação térmica dos sólidos faz-se uma separação em três partes: dilatação linear, dilatação superficial e dilatação volumétrica.

Vamos considerar um fio metálico de comprimento L_0, quando a uma temperatura inicial θ_0. Aquecendo esse fio até uma temperatura θ ($\theta > \theta_0$), observamos que seu comprimento passa a ser L ($L > L_0$), conforme figura 3.5.

Do exposto, podemos concluir

ΔL é proporcional a L_0.

ΔL é proporcional a $\Delta\theta$.

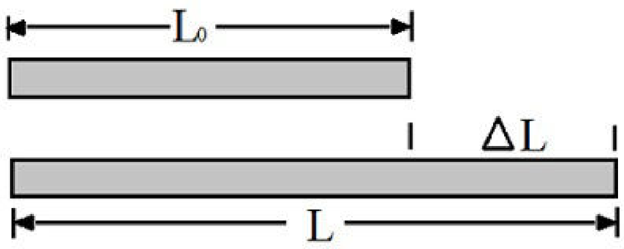

Figura 3.5: Dilatação sofrida por uma barra metálica

FONTE: http://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/fisica/o-que-e-dilatacao-termica-linear.htm

Tais conclusões expressam a Dilatação Linear a que um corpo se submete quando sofre uma variação de temperatura, representada pela relação:

$$\frac{\Delta L}{L_0.\Delta\theta} = \alpha.$$

A constante de proporcionalidade α depende da natureza do material, sendo denominada **coeficiente de dilatação linear**. O valor de α é uma característica do material e, na prática, não é rigorosamente constante, dependendo da pressão, de eventuais tratamentos térmicos e mecânicos e, principalmente, da temperatura. Entretanto, costuma-se usar o valor médio de α entre as temperaturas inicial e final consideradas.

3.3 Proporcionalidade em Ondulatória

Os fenômenos que envolvem formação e propagação de ondas são estudados pela Ondulatória. Entende-se por onda como uma perturbação que se propaga num meio.

3.3.1 Ondas Periódicas

Conforme definimos anteriormente, uma onda periódica é idealizada num meio cuja propagação ocorre em intervalos de tempos iguais, isto é, possui velocidade de propagação constante.

A representação matemática da velocidade de uma onda periódica é definida pela expressão:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = \lambda.\frac{1}{T} = \lambda.f.$$

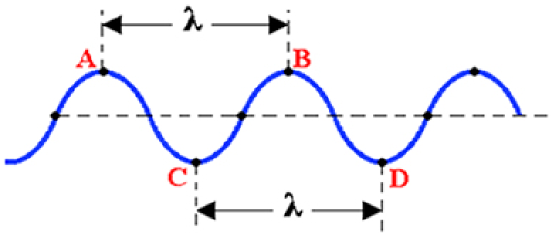

Figura 3.6: Representação de uma onda periódica

FONTE: http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/fisica/ondas-periodicas.htm

Deste modo, para uma velocidade constante, verificamos um relação de proporcionalidade inversa. Ou seja, $\lambda.f = v = constante$. Isto é, λ e f são inversamente proporcionais.

Existem fenômenos ondulatórios nos quais velocidade e comprimento de onda (λ) podem variar. Vamos considerar o fenômeno da refração de uma onda, que consiste da passagem de um pulso de onda de um meio para outro sofrendo alteração na sua velocidade. Neste caso, mantendo-se constante a frequência da onda, velocidade e comprimento de onda são diretamente proporcionais.

Considerando a velocidade do som, no ar, a determinada temperatura, é de 340 m/s. Em média, o ouvido humano é capaz de ouvir sons entre 20 Hz e 20.000 Hz. Sendo assim, vamos determinar o comprimento de onda do som mais agudo que o ouvido humano possui a capacidade de ouvir.

Convém considerarmos a ideia de proporcionalidade inversa entre a frequência e comprimento de onda, para este meio em que a velocidade de propagação da onda seja constante. Sabemos que nestas condições, comprimento de onda λ e frequência f são inversamente proporcionais, pois

$$\lambda.f = v = constante.$$

Assim, para determinar o comprimento de onda do som mais agudo, devemos considerar a maior frequência. Segue que

$$v = \lambda.f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{\lambda} = \frac{340}{20000} = 0,017m.$$

Logo, o comprimento de onda para o caso descrito vale $0,017m$.

3.4 Proporcionalidade em Óptica Geométrica

A projeção de sombras, a formação de imagens em espelhos, lentes ou em câmeras fotográficas não-digitais envolvem a propagação da luz. Convencionamos considerar propagando-se em feixe de retas. Tais fenômenos luminosos dentre outros, são estudados pela Óptica Geométrica.

3.4.1 Câmara Escura de Orifício

Consideremos a ilustração a seguir

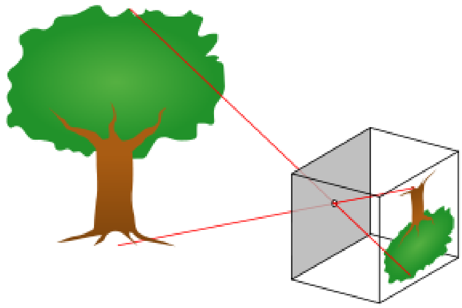

Figura 3.7: Câmara escura de orifício

FONTE: http://cinemadeanimacao11.blogspot.com.br/2010/12/camera-obscura-ou-camera-escura.html

Temos uma representação de uma câmara escura de orifício. Nela, constata-se o princípio da propagação retilínea da luz, considerando a árvore como uma fonte de luz diante da câmara, sua imagem é projetada no fundo (parede oposta e paralela à do orifício) da câmara de forma invertida. Convém ressaltarmos que os triângulos formados são semelhantes e daí, sejam h_o e d_o altura e distância do objeto diante da câmara, h_i e d_i altura e distância da imagem projetada pela câmara, temos

$$\frac{h_o}{h_i} = \frac{d_o}{d_i}.$$

Segue que, a altura da árvore (h_o) e o comprimento da câmara escura (d_i) são invariáveis. Ou seja, $h_o.d_i = h_i.d_o = \mathtt{constante}$. Logo, h_i e d_o são inversamente proporcionais.

Se considerarmos uma câmara escura de orifício que fornece a imagem de um prédio, o qual se apresenta com altura de 5cm. Aumentando-se para 100m a distância do prédio à câmara, a imagem se reduz para $4\mathtt{cm}$ de altura. Vamos determinar qual é a distância entre o prédio e a câmara na primeira posição.

Dada a situação descrita, há dois casos a considerar:

I. Na situação inicial, a câmara de comprimento l está a uma distância d do prédio de altura h, no momento em que a imagem projetada no fundo da câmara mede $5\mathtt{cm}$. Segue que

$$\frac{h}{5cm} = \frac{d}{l}.$$

II. Em seguida, a câmara de comprimento l está a uma distância de $100m$ do prédio de altura h quando a imagem passará a ter $4cm$ de altura.

$$\frac{h}{4cm} = \frac{100m}{l}.$$

Note que, nos casos I e II, o produto $h.l$ resulta numa constante de proporcionalidade, donde

$$h.l = 5.d = 4.100 \Rightarrow d = \frac{400}{5} \Rightarrow d = 80m.$$

3.5 Proporcionalidade em Eletromagnetismo

Denominamos eletromagnetismo como a parte da Física que descreve os fenômenos de natureza elétrica e/ou magnéticas. Também podemos considerar que eletrostática, eletrodinâmica e magnetismo correspondem às suas subdivisões. Verificamos dentre as importantes aplicações, as que se seguem:

3.5.1 Leis de Ohm

Vamos procurar agora, uma relação entre a diferença de potencial elétrico e a intensidade de corrente elétrica causada por ela. Para isso, consideremos o seguinte experimento: um fio metálico de tungstênio, por exemplo, é submetido a uma diferença de potencial (ddp)U, estabelecendo-se nele uma corrente elétrica de intensidade i. Suponha que um sistema de refrigeração mantenha constante a temperatura do fio.

Usando uma pilha comum, de modo a se ter U igual a $1,5V$, vamos admitir que i seja igual a $0,1A$.

Usando pilhas comuns, convenientemente interligadas, temos U igual a $3,0V$ e, nesse caso, constataremos uma corrente de intensidade i igual a $0,2A$. Note que U dobrou, de $1,5V$ para $3,0V$, o mesmo ocorrendo com i, que também dobrou, de $0,1A$ para $0,2A$.

Se for usada por uma bateria de $6,0V$, verificaremos que a corrente passará a valer $0,4A$. Note, novamente, que U quadruplicou de $1,5V$ para $6,0V$, o mesmo ocorrendo com i.

Esse resultado experimental, que também pode ser demonstrado por teoria, revela que a ddp U e a intensidade de corrente i são grandezas diretamente proporcionais, ou seja:

U(volt)	i(ampère)
1,5	0,1
3,0	0,2
6,0	0,4

Tabela 3.3: Diferença de potencial elétrico em função da corrente elétrica.

A proporcionalidade entre U e i também pode ser visualizada por meio do gráfico a seguir, construído a partir dos valores citados no texto.

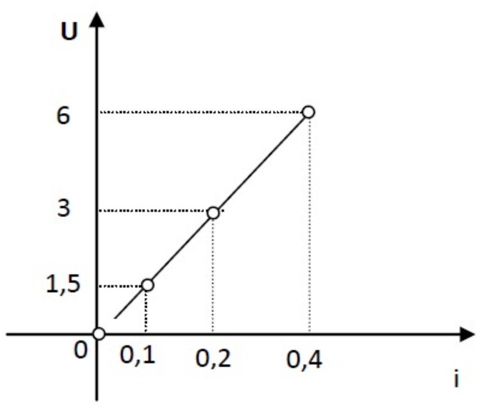

Figura 3.8: Gráfico da diferença de potencial elétrico em função da corrente elétrica.

FONTE: Construção do autor

Concluímos, então, que

$$\frac{U}{i} = constante,$$

denominada **Primeira Lei de Ohm**.

Prosseguindo nos seus trabalhos, Ohm procurou identificar as grandezas que influem na resistência elétrica, chegando, então, a outra lei.

Considere o fio condutor representado na figura 3.9. Ele tem comprimento L e seção transversal uniforme de área A.

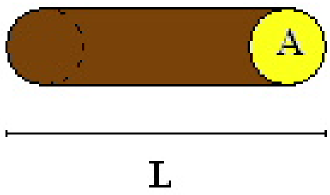

Figura 3.9: Fio cilíndrico.

FONTE: https://www.infoescola.com/fisica/segunda-lei-de-ohm/

Pode-se demonstrar que a resistência elétrica desse fio é tão maior quanto maior é seu comprimento e menor a área de seção transversal, dependo ainda do material de que é feito e da temperatura.

Todas essas variáveis estão contidas na **Segunda Lei de Ohm**.

Matematicamente, expressamos por

$$R = \frac{\rho . L}{A}$$

sendo ρ característica do material e da temperatura, denominada resistividade elétrica do material.

3.6 Proporcionalidade em Física Moderna

Todo o conhecimento científico acumulado até o século XVIII era considerado suficiente para explicar a maior parte dos fenômenos físicos conhecidos. Denominamos Física Clássica ao conjunto de todo esse conhecimento até então. O advento da Revolução Industrial e a busca pelo aperfeiçoamento de tecnologias bélicas provocaram o desenvolvimento de uma importante parte da Física denominada Física Moderna. Os conceitos de Física Quântica e Relatividade destacam-se entre suas principais partes. A seguir, consideramos uma importante aplicação.

3.6.1 Energia de um Fóton

Conforme WALKER (2009), vamos agora discutir outro mundo que também é muito diferente do nosso: o mundo das partículas subatômicas. Nele encontraremos outras surpresas que, embora às vezes pareçam desafiar o senso comum, deram aos físicos um conhecimento mais abrangente da realidade.

A física quântica (também conhecida como mecânica quântica e como teoria quântica) é, principalmente, o estudo do mundo microscópico. Nesse mundo muitas grandezas físicas são encontradas apenas em múltiplos inteiros de uma quantidade elementar; quando uma grandeza apresenta esta propriedade, dizemos que é *quantizada*. A quantidade elementar associada à grandeza é chamada de quantum da grandeza (o plural é *quanta*).

Segundo Einstein, um quantum de luz de frequência tem uma energia dada por

$$\mathsf{E} = \mathsf{h}.\mathsf{f} \Rightarrow \mathsf{h} = \frac{\mathsf{E}}{\mathsf{f}}$$

onde h, é a chamada **constante de Planck**. Pela relação, E e f são grandezas diretamente proporcionais e h é uma constante de proporcionalidade.

A menor energia que uma onda luminosa de frequência f pode possuir é $\mathsf{h}.\mathsf{f}$, a energia de um único fóton. Assim, representamos matematicamente

$$\mathsf{E} = \mathsf{h}.\mathsf{f}.$$

Consideremos que um fóton de luz visível, de cor violeta, tem frequência de $7,68.10^{14}\mathsf{Hz}$ e energia $\mathsf{E} = 318,0\mathsf{eV}$. Deste modo, a energia de um fóton de uma luz vermelha, de frequência $3,84.10^{14}\mathsf{Hz}$, terá um quantidade de energia em eV, dada pela relação de proporcionalidade acima citada.

Como $\mathsf{E} = \mathsf{h}.\mathsf{f} \Rightarrow \mathsf{h} = \frac{\mathsf{E}}{\mathsf{f}}$, E e f são diretamente proporcionais. E daí,

$$\frac{\mathsf{E}_1}{\mathsf{f}_1} = \frac{\mathsf{E}_2}{\mathsf{f}_2}$$
$$\frac{318,0\mathsf{eV}}{7,68.10^{14}\mathsf{Hz}} = \frac{\mathsf{E}_2}{3,84.10^{14}\mathsf{Hz}}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_2 &= \frac{(318,0\mathsf{eV}).(3,84.10^{14}\mathsf{Hz})}{7,68.10^{14}\mathsf{Hz}} \\ \mathsf{E}_2 &= \frac{318,0}{2} \end{aligned}$$

Concluímos que a energia do fóton de luz vermelha vale $\mathsf{E}_2 = 159,0e\mathsf{V}$, ou seja, metade da energia do fóton de luz violeta.

Capítulo 4

Aplicações nas Avaliações: Enem, Obmep, ENA e Vestibulares Tradicionais

Buscamos destacar neste capítulo o fato de, por repetidas vezes, provas de Física ou Matemática abordarem competências e habilidades que se confundem no que tange aos objetivos esperados para cada disciplina. Com efeito, conforme INEP(2009), as Matrizes de Referência para o ENEM destacam eixos cognitivos comuns a cada uma das áreas de conhecimento. São eles: dominar linguagens, compreender fenômenos, enfrentar situações-problema, contruir argumentaço e elaborar propostas.

Para Matemática e suas tecnologias, a competência: construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano elenca as habilidades

- H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.
- H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
- H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
- H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

E ainda, a competência: modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

- H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

Em Ciências da Natureza e suas tecnologias, a competência: entender métodos e procedimentos próprios das ciências naturais e aplicá-los em diferentes contextos, destaca a habilidade: relacionar informações apresentadas em diferentes formas de linguagem e representação usadas nas ciências físicas, químicas ou biológicas, como texto discursivo, gráficos, tabelas, relações matemáticas ou linguagem simbólica.

Analisaremos provas de Matemática e Física do Enem e de vestibulares tradicionais. Verificaremos que a prática é comum em ambas as provas: a abordagem do conteúdos de uma delas fazer referência à outra. E ainda, como pré-requisito de ingresso no Mestrado Profissional em Matemática(Profmat) há abordagens em alguns Exames Nacionais de Acesso (ENA). Em seguida, sugerimos soluções para cada uma delas .

4.1 Provas de Matemática

Exame Nacional do Ensino Médio - 2016 - Questão 154/Caderno 5, Amarelo

O veículo terrestre mais veloz já fabricado até hoje é o Sonic Wind LSRV, que está sendo preparado para atingir a velocidade de $3000\mathtt{km/h}$. Ele é mais veloz do que o Concorde, um dos aviões de passageiros mais rápidos já feitos, que alcança $2330\mathtt{km/h}$.

Figura 4.1: Recorte da Prova de Matemática Enem 2016

FONTE: http://inep.gov.br/provas-e-gabaritos

Para uma distância fixa, a velocidade e o tempo são inversamente proporcionais.

BASILIO, A. Galileu, mar. 2012 (adaptado).

Para percorrer uma distância de $1000km$, o valor mais próximo da diferença, em minuto, entre os tempos gastos pelo Sonic Wind LSRV e pelo Concorde, em suas velocidades máximas, é

(A) 0,1.

(B) 0,7.

(C) 6,0.

(D) 11,2.

(E) 40,2.

Solução:

Pelo que foi descrito, vamos considerar duas situações, em que ambos os veículos percorreriam uma mesma distância de $1000km$, sendo esta nossa constante de proporcionalidade. Sejam v_1, v_2, t_1 e t_2, respectivamente, velocidades e tempos gastos de viagem em cada um dos casos citados, temos:

I. O Sonic Wind, viajaria a $3000km/h$ em t_1 minutos.

II. O Concorde, viajaria a $2330km/h$ em t_2 minutos.

Sabemos que velocidade e tempo são inversamente proporcionais. Daí, matematicamente, temos

$$v_1.t_1 = v_2.t_2 = 1000km.$$

Segue que

$$\begin{aligned} 3000.t_1 &= 1000 \\ t_1 &= \frac{1000}{3000} \\ t_1 &= \frac{1}{3}h. \end{aligned}$$

Segue que $t_1 = \dfrac{1}{3} \times 60min = 20min$. De modo análogo, obtemos $t_2 = 25,7min$.

Concluímos que o veículo de maior velocidade (Sonic Wind) gasta um tempo menor para percorrer os mesmos $1000km$ que o outro veículo (Concorde), pois velocidade e tempo são inversamente proporcionais. Assim, a diferença aproximada entre o tempo gasto pelo Concorde e pelo Sonic Wind é de $(25,7-20)min = 5,7 \simeq 6min$. Alternativa (C).

Exame Nacional do Ensino Médio - 2010 - Questão 143/Caderno 3, Cinza

A resistência elétrica e as dimensões do condutor

A relação da resistência elétrica com as dimensões do condutor foi estudada por um grupo de cientistas por meio de vários experimentos de eletricidade. Eles verificaram que existe proporcionalidade entre

- resistência (R) e comprimento (L), dada a mesma secção transversal (A);
- resistência (R) e área da seção transversal (A), dado o mesmo comprimento (L) e
- comprimento (L) e área da seção transversal (A), dada a mesma resistência (R).

Considerando os resistores como fios, pode-se exemplificar o estudo das grandezas que influem na resistência elétrica utilizando as figuras seguintes.

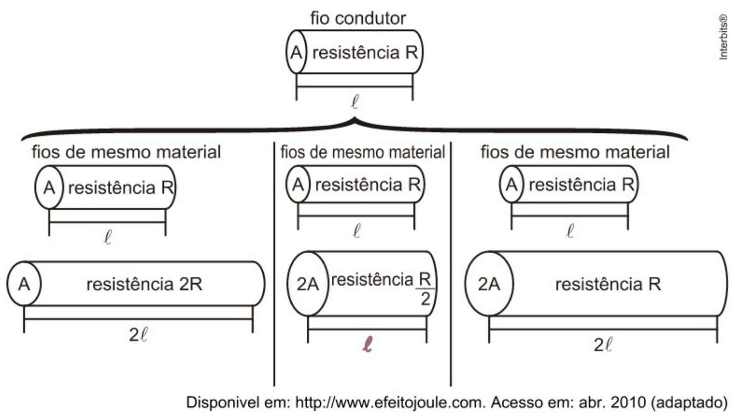

Figura 4.2: Recorte da Prova de Matemática Enem 2010

FONTE: http://inep.gov.br/provas-e-gabaritos

As figuras mostram que as proporcionalidades existentes entre resistência (R) e comprimento (L), resistência (R) e área da seção transversal (A), e entre comprimento (L) e área da seção transversal (A) são, respectivamente,

(A) direta, direta e direta.

(B) direta, direta e inversa.

(C) direta, inversa e direta.

(D) inversa, direta e direta.

(E) inversa, direta e inversa.

Solução:

O problema aborda propriedades de um condutor de eletricidade relacionadas à 2^a Lei de Ohm, conforme 3.5.1. A figura dada mostra um sequência de situações a que se submete o condutor de resistência R quando sofre alterações em sua dimensões. Em cada caso, verificamos:

I. ao dobrar-se comprimento (L) a resistência (R) também dobra, mantendo constante a área da seção transversal;

II. dobrando-se a área da seção transversal(A) a resistência (R) cai pela metade, mantendo o comprimento (L) constante;

III. dobrar o comprimento (L) quando a área da seção transversal (A) é dobrada, para resistência (R) constante.

Em I, podemos concluir que comprimento (L) e resistência elétrica (R) são diretamente proporcionais, para uma área de seção transversal (A) constante. Pois,

$$\frac{2L}{2R} = \frac{R}{L} = constante.$$

Em II, concluímos que área de seção transversal (A) e resistência elétrica (R) são inversamente proporcionais, para uma resistência elétrica R, constante. De fato,

$$2A.\frac{R}{2} = A.R = constante.$$

Em III, análogo ao caso I, temos que comprimento (L) e área de seção transversal (A) são diretamente proporcionais, para uma resistência elétrica R constante. Pois,

$$\frac{2L}{2A} = \frac{R}{A} = constante.$$

Por I, II e III, podemos concluir que as proporcionalidades existentes são respectivamente, **direta, inversa e direta**, conforme alternativa (C).

Exame Nacional do Ensino Médio - 2012 - Questão 153/Caderno 5, Amarelo

A resistência mecânica S de uma viga de madeira, em forma de um paralelepípedo retângulo, é diretamente proporcional à sua largura b e ao quadrado de sua altura d e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os suportes da viga, que coincide com o seu comprimento x, conforme ilustra a figura. A constante de proporcionalidade k é chamada de resistência da viga.

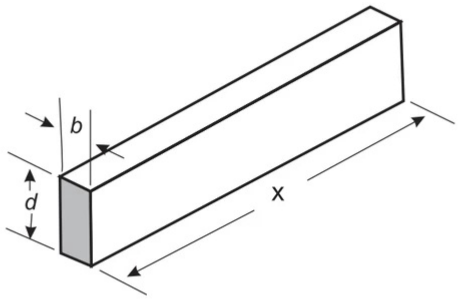

Figura 4.3: Recorte da Prova de Matemática Enem 2012

FONTE: http://inep.gov.br/provas-e-gabaritos

A expressão que traduz a resistência **S** dessa viga de madeira é

(A) $\dfrac{k.b.d^2}{x^2}$.

(B) $\dfrac{k.b.d}{x^2}$.

(C) $\dfrac{k.b.d^2}{x}$.

(D) $\dfrac{k.b^2.d}{x}$.

(E) $\dfrac{k.b.2d}{2x}$.

Solução:

A propriedade citada da viga nos remete aos conceitos de estática de corpos extensos, área da Física com importantes aplicações na Engenharia. Do texto, extrai-se que a resistência mecânica S da referida viga de madeira:

I. é diretamente proporcional à sua largura b;

II. é diretamente proporcional ao quadrado de sua altura d;

III. é inversamente proporcional ao quadrado da distância x entre os suportes da viga.

Por I, II e III temos, respectivamente, que $\frac{S}{b} = constante$, $\frac{S}{d^2} = constante$ e $S.x^2 = constante$. Segue que

$$\frac{S.x^2}{b.d^2} = k.$$

Sendo k uma constante de proporcionalidade, então

$$S = \frac{k.b.d^2}{x^2}.$$

Concluímos ser correta a alternativa (A).

Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas(OBMEP) - 2010 - Questão 8/nível 3

João vai de bicicleta ao encontro de sua namorada Maria. Para chegar na hora marcada, ele deve sair às 8 horas e pedalar a $10km/h$ ou sair às 9 horas e pedalar a $15km/h$. A que horas é o encontro dos namorados?

(A) $10h$.

(B) $10h30min$.

(C) $11h$.

(D) $11h30min$.

(E) $12h$.

Solução:

Sabemos que velocidade e tempo são grandezas inversamente proporcionais. Neste caso, vamos considerar duas situações:

I. João sairia às 8h e pedalaria a 10km/h;

II. João sairia às 9h e pedalaria a 15km/h.

Sejam v_1, v_2, Δt_1 e Δt_2, respectivamente, velocidades e tempos gastos de viagem em cada um dos casos citados e t o horário marcado para o encontro com Maria. Como velocidade e tempo são inversamente proporcionais, então os produtos $v_1.\Delta t_1$ e $v_2.\Delta t_2$ são contantes. Isto é,

$$v_1.\Delta t_1 = v_2.\Delta t_2$$

, e correspondem à distância percorrida em cada um dos casos. Segue que:

$$\begin{aligned}
10.(t-8) &= 15.(t-9)\\
10t-80 &= 15t-135\\
135-80 &= 15t-10t\\
5t &= 55\\
t &= 11h
\end{aligned}$$

Concluímos que a hora marcada para o encontro corresponde ao valor de t da igualdade. Ou seja, às 11h,conforme alternativa (C).

Exame Nacional de Acesso (ENA-Profmat)- 2012 - Questão 26

Em Eletrostática, o módulo E do campo elétrico gerado por uma única carga elétrica pontual de carga q em um ponto a uma distância d da carga é diretamente proporcional a q e inversamente proporcional ao quadrado de d. Considere uma carga elétrica com carga q constante e seja $E = f(d)$, com $d > 0$, a função que descreve o módulo E do campo elétrico em um ponto a uma distância d dessa carga. Dessa forma, é correto afirmar que $f(2d)$ é igual a:

(A) $\dfrac{f(d)}{4}$.

(B) $4.f(d)$.

(C) $f(d)$.

(D) $\dfrac{f(d)}{2}$.

(E) $2.f(d)$.

Solução:

A abordadem deste problema nos remete aos conceitos de Eletricidade contextualizada com proporcionalidade, também presente em provas de acesso do Profmat. Matematicamente, as relações de proporcionalidade citadas nos dão $\dfrac{E.d^2}{q} = k$, pois E e q são diretamente proporcionais, enquanto E e d^2 são inversamente proporcionais.

Sendo k uma contante de proporcionalidade, vamos expressar E como função da distância d. Segue que $E = \dfrac{k.q}{d^2} = f(d)$. Porém, além da constante de proporcionalidade k, consideremos o fato de que q também é uma constante. Daí, $E = \dfrac{k'}{d^2} = f(d)$, com $k' = k.q$.

Vamos determinar $f(2d)$, considerando k' constante, temos:

$$\begin{aligned} k' = f(d).d^2 &= f(2d).(2d)^2 \\ f(d).d^2 &= f(2d).4.d^2 \\ f(2d) &= \frac{f(d)}{4}. \end{aligned}$$

O fato de E ser inversamente proporcional ao quadrado de d, nos mostra que, ao dobrar-se a distância, o módulo do campo elétrico $E = f(d)$ fica reduzido a um quarto, conforme constatamos na alternativa (A).

Exame Nacional de Acesso 2018 (ENA-Profmat) Questão 29/ Prova R

Uma grandeza G, que depende das variáveis x, y e z é diretamente proporcional ao quadrado de x, diretamente proporcional à quarta potência de y e inversamente proporcional ao cubo de z. Se as três grandezas x, y e z dobrarem de valor, pode-se dizer que G

(A) terá seu valor multiplicado por 512.

(B) terá seu valor multiplicado por 8.

(C) terá seu valor multiplicado por 2.

(D) não muda de valor.

(E) terá seu valor reduzido à metade.

Solução:

A grandeza G citada é uma grandeza proporcional a várias outras. Conforme descrito, verificamos que G,

I. é diretamente proporcional a x^2;

II. é diretamente proporcional a y^4;

III. é inversamente proporcional a z^3.

Seja G função das variáveis x, y e z, então

$$G = k\frac{x^2.y^4}{z^3}.$$

Ao dobrarem os valores de x, y e z, a grandeza G será alterada, suponhamos que seja para G'. Então:

$$\begin{aligned}
G' &= k\frac{(2x)^2.(2y)^4}{(2z)^3} \\
G' &= k.\frac{4.x^2.16y^4}{8y^3} \\
G' &= k.\frac{64.x^2.y^4}{8y^3} \\
G' &= 8k.\frac{x^2.y^4}{y^3} \\
G' &= 8.G.
\end{aligned}$$

Neste caso, a grandeza G ficará multiplicada por 8, conforme alternativa (B).

4.2 Provas de Física

A abordagem envolvendo proporcionalidade tem-se feito presente também em provas de Física. Ela ocorre em provas de vestibulares tradicionais, bem como em avaliações externas oficiais, como por exemplo, no Enem, conforme verificamos a seguir com soluções que sugerimos.

Questão da Universidade Estadual do Ceará (UECE-2011.1)

Os três meios de armazenamento ótico mais difundidos atualmente são CD, DVD e Blu-ray. Os aparelhos reprodutores desses discos utilizam luz de três comprimentos de onda diferentes, cujos valores aproximados são: 405 nm, para leitura de Blu-ray; 650 nm, para DVD; e 785 nm, para reprodução de CD. Sobre as frequências f dessas ondas, é correto afirmar que

$(A) f_{Blu-ray} < f_{DVD} < f_{CD}$.

$(B) f_{Blu-ray} > f_{DVD} > f_{CD}$.

$(C) f_{Blu-ray} = f_{DVD} = f_{CD}$.

(D) não é possível determiná-las, pois variam conforme o índice de refração do material utilizado na confecção do disco.

Solução:

Considerando a situação descrita, sabemos que comprimento de onda (λ) e frequência (f) são grandezas inversamente proporcionais. Neste caso, $\lambda.f = c$, com c, a velocidade de uma onda eletromagnética sendo a constante de proporcionalidade. Tal fato nos permite concluir que, multiplicando λ por n, a frequência ficará dividida por n, ou vice-versa. Deste modo, para menores comprimentos de onda, maiores frequências, ou seja:

$$\lambda_{Blu-ray} < \lambda_{DVD} < \lambda_{CD} \Rightarrow f_{Blu-ray} > f_{DVD} > f_{CD}.$$

Portanto, podemos concluir que a resposta correta corresponde à alternativa (C).

Vestibular da Universidade Federal do Piauí - 2003 - Questão 19/Prova 04

O carrinho da figura ao lado tem massa $M = 15\text{kg}$ e está acelerado pela força F_o. O bloco de massa $m = 5,0\text{kg}$ está em repouso em relação ao carrinho. Não há atrito entre o carrinho e o bloco. A força horizontal exercida pelo carrinho sobre o bloco é o vetor:

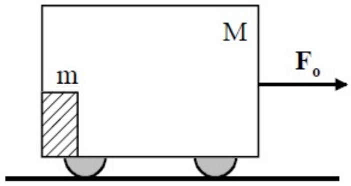

Figura 4.4: Recorte do Vestibular da UFPI 2003

FONTE: http://www.procampus.com.br/vestibular/ufpi/2003/vestibular/prova04ufpi-2003.pdf

(A) $F_o/4$.

(B) $F_o/2$.

(C) F_o.

(D) $F_o/3$.

(E) $2F_o/3$.

Solução:

Pelo princípio fundamental da dinâmica, a resultante das forças que atuam num corpo é igual ao produto de sua massa pela aceleração produzida. Para uma aceleração constante, a força resultante é diretamente proporcional à massa do corpo. Neste caso, vamos considerar:

I. F_o desloca o sistema formado pelo carrinho de massa $M = 15\text{kg}$ e pelo bloco de massa $m = 5\text{kg}$. Daí, o sistema de massa $(15 + 5)\text{kg} = 20\text{kg}$ sofre uma força de intensidade F_0, tal que $\dfrac{F_0}{20} = a$;

II. O bloco de massa $m = 5\text{kg}$ é empurrado pelo carrinho e está submetido à mesma aceleração a. Seja f a força exercida pelo carrinho, então $\dfrac{f}{5} = a$.

Para uma aceleração a constante, de I e II, temos:

$$\text{a}= \frac{F_0}{20} = \frac{f}{5}.$$

Escrevendo f em função de F_0, segue que

$$f = \frac{5.F_0}{20} = \frac{F_0}{4}.$$

Que nos permite concluir que a resposta correta encontra-se na alternativa (A).

Vestibular da Universidade Estadual do Vale do Acaraú - 2009.2 - Questão 43/Prova de Conhecimentos Gerais

A velocidade do som no ar é de $340m/s$. Uma onda sonora de comprimento de onda $1,7m$ é emitida no ar, mas é refratada, passando a se propagar nas águas de um lago onde a velocidade de propagação do som é de $1400m/s$. Qual o comprimento de onda desta onda sonora no lago?

(A) $1,7m$

(B) $4,1m$

(C) $7,0m$

(D) $14m$

Solução:

Consideramos que durante a refração de uma onda sonora, a frequência da onda permanece constante em ambos os meios de propagação. Assim, sendo $f = \frac{\nu}{\lambda}$, ou seja, ν e λ são diretamente proporcionais. Seja ν_1 e λ_1 a velocidade e o comprimento de onda do som no ar e ν_2 e λ_2 a velocidade e o comprimento de onda do som na água, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{v_1}{\lambda_1} &= \frac{v_2}{\lambda_2} \\
\frac{340}{1,7} &= \frac{1400}{\lambda_2} \\
\lambda_2.340 &= 1,7.1400 \\
\lambda_2 &= \frac{2380}{340} \\
\lambda_2 &= 7m.
\end{aligned}$$

Ao estabelecermos a relação de proporcionalidade direta, nossa resolução assemelhou-se a uma regra de três simples. De fato, para uma frequência constante, velocidade e comprimento de onda aumentam na mesma proporção. O que podemos constatar na alternativa (C).

Vestibular da Universidade Estadual do Piauí - 2012 - Questão 38/Prova 03/Tipo 4

Um planeta orbita em um movimento circular uniforme de período T e raio R, com centro em uma estrela. Se o período do movimento do planeta aumentar para $8T$, por qual fator o raio da sua órbita será multiplicado?

(A) 1/4
(B) 1/2
(C) 2
(D) 4
(E) 8

Solução:

O fenômeno descrito refere-se à Lei dos Períodos, denominada 3ª Lei de Kepler. Seja T o tempo gasto para o planeta executar uma volta completa ao redor de uma estrela de raio R. Sua relação de proporcionalidade é direta, entre o quadrado do período de revolução e o cubo do raio médio da órbita, definida por

$$\frac{T^2}{R^3} = k.$$

Sendo k, uma constante de proporcionalidade. Em cada caso, verificamos:

I. O planeta orbita em um movimento circular uniforme de período $T_1 = T$ e raio $R_1 = R$;

II. Se o planeta orbita em um movimento circular uniforme de período $T_2 = 8T$, vamos determinar seu raio R_2.

Segue que,

$$\begin{aligned}
\frac{T_1^2}{R_1^3} &= \frac{T_2^2}{R_2^3}\\
\frac{T^2}{R^3} &= \frac{(8T)^2}{R_2^3}\\
\frac{T^2}{R^3} &= \frac{64.T^2}{R_2^3}\\
R_2^3 &= \frac{64.T^2.R^3}{T^2}\\
R_2 &= \sqrt[3]{64.R^3}\\
R_2 &= 4.R.
\end{aligned}$$

Ou seja, o raio da órbita será multiplicado por quatro. Observamos neste caso, que o fato do período ser 8 vezes maior não resultou do raio também o ser, pois a relação de proporcionalidade se dá entre o quadrado do período e o cubo do raio médio, conforme mostramos resolvendo a equação acima. O que nos permite concluir que a resposta correta está na alternativa (D).

Exame Nacional do Ensino Médio - 2010 - Questão 59/Caderno 1, Azul

A resistência elétrica de um fio é determinada por suas dimensões e pelas propriedades estruturais do material. A condutividade (σ) caracteriza a estrutura do material, de tal forma que a resistência do fio pode ser determinada conhecendo-se **L**, o comprimento do fio e **A**, a área de seção reta. A tabela relaciona o material à sua resistividade em temperatura ambiente.

Tabela de condutividade

Material	Condutividade (S·m/mm²)
Alumínio	34,2
Cobre	61,7
Ferro	10,2
Prata	62,5
Tungstênio	18,8

Figura 4.5: Recorte da Prova de Física Enem 2010

FONTE: http://inep.gov.br/provas-e-gabaritos

Mantendo-se as mesmas dimensões geométricas, o fio que apresenta menor resistência elétrica é aquele feito de

(A) tungstênio.

(B) alumínio.

(C) ferro.

(D) cobre.

(E) prata.

Solução:

Considerando a situação descrita, pela 2^a lei de Ohm, sabemos que a resistência elétrica R de um condutor é diretamente proporcional ao seu comprimento (L), à resistividade (ρ) do material e inversamente proporcional à sua área de seção transversal (A). Matematicamente, temos

$$R = \rho.\frac{L}{A}.$$

A tabela dada faz menção à condutividade (σ) dos materiais listados. Faz-se necessário considerar que resistividade e condutividade são grandezas inversamente proporcionais, isto é $\rho.\sigma = constante$. Segue que,

$$R = \frac{1}{\sigma}.\frac{L}{A}.$$

Daí, concluímos que R e σ são grandezas inversamente proporcionais. Conforme constatamos na tabela, o condutor de menor resistência será aquele de maior condutividade. Portanto, o material da resistência a ser escolhido deverá ser o de prata, conforme alternativa (E).

Exame Nacional do Ensino Médio - 2012 - Questão 59/ Caderno 2, Amarelo

Um dos problemas ambientais vivenciados pela agricultura hoje em dia é a compactação do solo, devida ao intenso tráfego de máquinas cada vez mais pesadas, reduzindo a produtividade das culturas. Uma das formas de prevenir o problema de compactação do solo é substituir os pneus dos tratores por pneus mais

(A) largos, reduzindo a pressão sobre o solo.

(B) estreitos, reduzindo a pressão sobre o solo.

(C) largos, aumentando a pressão sobre o solo.

(D) estreitos, aumentando a pressão sobre o solo.

(E) altos, reduzindo a pressão sobre o solo.

Solução:

Definimos pressão p como a razão entre a força F aplicada (a compressão dos pneus dos tratores sobre o solo, equivalente ao seu peso), e a área A de contato entre os pneus e o solo. Matematicamente, temos

$$p = \frac{F}{A}.$$

Segue que $F = p.A$. Ou seja, para uma força F constante, pressão p e área A são inversamente proporcionais.

Considerando, na situação descrita, o peso do trator comprime a superfície do solo sobre o qual trafega. Daí, para diminuir a pressão exercida pelos pneus é necessário um aumento da área de contato dos mesmos com o solo. Ou seja, os pneus devem ser mais largos. Logo, a resposta correta está na alternativa (A).

Exame Nacional do Ensino Médio - 2012 (Segunda aplicação - Questão 49/ Caderno 3, Branco

O quadro oferece os coeficientes de dilatação linear de alguns metais e ligas metálicas:

Substância	Aço	Alumínio	Bronze	Chumbo	Níquel	Latão	Ouro	Platina	Prata	Cobre
Coeficiente de dilatação linear ($\times 10^{-5}$ °C^{-1})	1,2	2,4	1,8	2,9	1,3	1,8	1,4	0,9	2,4	1,7

GREF. Física 2: calor e ondas. São Paulo: Edusp, 1993.

Figura 4.6: Recorte da Prova de Física Enem 2012

FONTE: http://inep.gov.br/provas-e-gabaritos

Para permitir a ocorrência do fato observado na tirinha, a partir do menor aquecimento do conjunto, o parafuso e a porca devem ser feitos, respectivamente, de:

(A) aço e níquel.

(B) alumínio e chumbo.

(C) platina e chumbo.

(D) ouro e latão.

(E) cobre e bronze.

Solução:

No caso descrito acima, considerando o conceito de dilatação térmica, sabemos que ΔL e α são diretamente proporcionais, para comprimentos e variação de temperatura iguais. Ou seja, ao aquecerem-se, porca e parafuso irão dilatar-se e, consequentemente, as dimensões de seus diâmetros também deverão variar. Pois,

$$\frac{\Delta L}{L_0.\Delta\theta} = \alpha \Rightarrow \frac{\Delta L}{\alpha} = L_0.\Delta\theta.$$

Neste caso, o sistema está sujeito a uma mesma variação de temperatura $\Delta\theta$. Para obtermos o que se deseja, é necessário que entre o parafuso e a porca haja uma “folga”, o que se obtém com a dilatção da porca sendo maior que a do parafuso. Então, devemos ter o material de que é feito o parafuso com menor coeficiente de dilatação α, enquanto a porca deve ter maior coeficiente de dilatação α. Assim, os materiais devem ser, respectivamente, platina e chumbo. **Alternativa (C)**.

Exame Nacional do Ensino Médio - 2012 - Questão 49/ Caderno 2, Amarelo

Em um dia de chuva muito forte, constatou-se uma goteira sobre o centro de uma piscina coberta, formando um padrão de ondas circulares. Nessa situação, observou-se que caíam duas gotas a cada segundo. A distância entre duas cristas consecutivas era de 25 cm e cada uma delas se aproximava da borda da piscina com velocidade de 1,0 m/s. Após algum tempo a chuva diminuiu e a goteira passou a cair uma vez por segundo. Com a diminuição da chuva, a distância entre as cristas e a velocidade de propagação da onda se tornaram, respectivamemente,

(A) maior que 25 cm e maior que 1,0 m/s.

(B) maior que 25 cm e igual a 1,0 m/s.

(C) menor que 25 cm e menor que 1,0 m/s.

(D) menor que 25 cm e igual a 1,0 m/s.

(E) igual a 25 cm e igual a 1,0 m/s.

Solução:

Considerando a situação descrita, sabemos que comprimento de onda (λ) e frequência (f) são grandezas inversamente proporcionais, pois

$$\lambda.f = v$$

sendo v a velocidade da onda que se forma na água da piscina, a constante de proporcionalidade. Ou seja, para menores comprimentos de onda teremos maiores frequências. Quando as gotas que caíam de duas vezes por segundo passaram a cair de 1 vez por segundo, notamos que houve diminuição de frequência (f). O que acarreta no aumento de seu comprimento de onda (λ), mantendo-se constante a sua velocidade, que depende de propriedades físicas do meio em que se propaga, e f e λ são inversamente proporcionais. Logo, a resposta que condiz com o que está descrito está na alternativa (B).

Capítulo 5

Considerações Finais

A despeito de ser professor de Matemática, por vezes tive a missão de ministrar aulas de Física por indisponibilidade de professores da área no mercado. Além disso, quase sempre chamamos atenção de nossos alunos para compreensão de determinados conteúdos matemáticos que envolvem fenômenos físicos. Desta forma, o trabalho interdisciplinar é fundamental, pois permite que definições formais puramente matemáticas sejam abordadas de forma contextualizada.

Conforme verificamos na literatura de ambas as áreas, a interdisciplinaridade é recorrente no ensino de Matemática e de Física. Em diversos itens de avaliações percebemos importantes aplicações que possibilitam a compreensão de diversos fenômenos físicos bem como o de conhecimentos matemáticos sobre proporcionalidade.

Nos chamou atenção o fato de que em diversos itens de avaliaçẽs externas, como ENEM, OBMEP e vestibulares tradicionais, a abordagem de problemas que envolvem proporcionalidade ser feita em provas de Matemática ou Física. Nelas, acreditamos que a memorização de fórmulas poderia ser substituída, quando conveniente, pela devida relação entre grandezas, cuja proporcionalidade seja direta ou inversa. A utilização de práticas que confirmem estas relações ajudam a dar significado na aprendizagem dos alunos que podem identificar proporcionalidade entre grandezas de naturezas diversas. Fato este, útil para o trabalho didático.

Referências Bibliográficas

[1] SALDAÑA, Paulo. *Quase 50% dos professores não têm formação na matéria que ensinam.* Folha de São Paulo. São Paulo. 21 jan.2017. disponível em <http://www1.folha.uol.com.br/educacao/2017/01/1852259-quase-50-dos-professores-nao-tem-formacao-na-materia-que-ensinam.shtml >. Acesso em: 30 ago. 2017.

[2] BRASIL. Ministério da Educação.*Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.* Brasília: MEC/SEMTEC, 2000.

[3] LIMA, E.L.- *Meu Professor de Matemática e outras histórias.* Coleção Professor de Matemática. SBM - 6. ed.,Rio de Janeiro: 2012.

[4] LIMA, E. L.. *et al.*.*Temas e Problemas Elementares.* Coleção PROFMAT. 3ª Ed. SBM, Rio de Janeiro: 2012.

[5] LIMA, E. L.. *et al.*.*Temas e Problemas.* 3ª Ed. SBM, Rio de Janeiro: 2010.

[6] LIMA, E. L.. *et al.*.*A Matemática do Ensino Médio.* 9ª Ed. SBM, Rio de Janeiro: 2006.

[7] ALVARENGA, B., MÁXIMO, A. *Curso de Física.* - HARBRA,2.ed., São Paulo: 1992.

[8] DRUCK, S., seleção de textos: Ana Catarina P. Hellmeister, Cláudia Monteiro Peixoto. *Coleção Explorando o Ensino, v.3.* p.90-95. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004.

[9] INEP. *Matriz de Referência.* Brasília: 2012. Disponível em < http://download.inep.gov.br/educacao-basica/enem/downloads/2012/matriz-referencia-enem.pdf >. Acesso em: 02 set.2017

[10] ÁVILA , Geraldo. *Razões, proporções e regra de três.* Revista do Professor de Matemática. São Paulo: SBM, 1983. v. 8.

[11] ÁVILA , Geraldo. *Ainda sobre a regra de três.* Revista do Professor de Matemática. São Paulo: SBM, 1983. v. 9.

[12] HELOU, GUALTER, NEWTON. - *Tópicos de Física. Vol 2.* 21 ed.- Ed. SARAIVA, 2007.

[13] HELOU, GUALTER, NEWTON. - *Tópicos de Física. Vol 3.* 21 ed.- Ed. SARAIVA, 2007.

[14] RAMALHO, NICOLAU, TOLEDO. - *Os Fundamentos da Física. Vol 2.* 10 ed.- Ed. MODERNA, 2009.

[15] HALLIDAY, RESNICK, WALKER. - *Fundamentos de Física. Vol 1.* 8 ed.- Ed. LTC, 2009.

[16] HALLIDAY, RESNICK, WALKER. - *Fundamentos de Física. Vol 4.* 8 ed.- Ed. LTC, 2009.