

Universidade Federal do Ceará
Centro de Ciências
Departamento de Matemática
Mestrado em Matemática em Rede Nacional – Profmat

Algumas Particularidades do Plano Hiperbólico

JÂNIO KLÉO DE SOUSA CASTRO

Fortaleza, 2017

Agradecimentos

Pelas atividades de ensino desenvolvidas ao longo da minha formação, agradeço aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará.

Pela orientação e apoio neste trabalho, agradeço ao professor Darlan Rabelo Girão.

Pelo companheirismo e pelos incentivos, agradeço a todos os colegas da Universidade Federal do Ceará.

Dedicatória

À minha família e aos meus amigos, dedico este trabalho.

Sumário

1. Os axiomas da Geometria Hiperbólica

1.1. Axiomas de Incidência

1.2. Axiomas de Ordem

1.3. Axiomas de Medição de Segmentos

1.4. Axiomas de Medição de Ângulos

1.5. Axioma de Congruência de Triângulos

1.6. Axioma das Paralelas

2. Algumas particularidades do plano hiperbólico

2.1. Sobre a soma das medidas dos ângulos de um triângulo

2.2. Sobre a inscribibilidade de triângulos

2.3. Sobre semelhança de triângulos

2.4. Sobre retas equidistantes

3. Um modelo para o Plano Hiperbólico

3.1. As retas do modelo

3.2. Verificação dos axiomas de incidência

3.3. Verificação dos axiomas de ordem

3.4. Verificação dos axiomas de medição de segmentos

3.5. Verificação dos axiomas de medição de ângulos

3.6. Verificação do axioma de congruência

3.7. Verificação do axioma das paralelas

4. Outros fatos sobre o plano hiperbólico

4.1. Área de triângulos no plano hiperbólico

4.2. Círculos

4.3. Curvas equidistantes

4.4. Horocírculos

4.5. Triângulos ideais e triângulos magros

“A natureza da verdade, é claro, não pode deixar de ser a mesma, tanto em Maros-Vásárhely como em Kamchatka e na Lua, ou, para ser breve, em qualquer lugar do mundo, e o que um ser finito e sensível descobre não é impossível que seja descoberto por um outro.”

(János Bolyai, matemático húngaro do século 19)

“Valha-me, Deus! É preciso explicar tudo.

(Machado de Assis, escritor brasileiro, em Memórias Póstumas de Brás Cubas)

Introdução

Nos primeiros anos da formação matemática, os alunos conhecem certos fatos e os tomam como verdades inabaláveis. Informações tais como “O quadrado de um número nunca é negativo”, “A ordem dos fatores não altera o produto” ou “A soma dos ângulos de um triângulo é igual a 180 graus” ficam fixadas. Aos poucos, alguns desses paradigmas são quebrados, com o conhecimento de estruturas como a dos números complexos, onde existe um número cujo quadrado vale -1 , ou o conjunto de matrizes e sua multiplicação não comutativa. Com isso, os estudantes têm contato com a flexibilidade da Matemática, no que se relaciona à possibilidade de construção de conjuntos novos, em geral extensões dos conjuntos anteriores. Isso, porém, não chega à Geometria. Os padrões de formas e as fórmulas que são ensinadas continuam rígidos no ensino médio e até no ensino superior, sendo que, mesmo para um estudante regular de Licenciatura em Matemática, a informação de que retas paralelas determinam em uma transversal comum ângulos alternos internos congruentes é tida como imutável, já que não aparece nenhum exemplo, nenhum modelo, nenhuma estrutura paralela para contradizer isso. Assim, os licenciados que não têm contato com outras geometrias reproduzirão apenas as ideias clássicas e ficará difícil incentivar os alunos em um estudo mais rigoroso e formal da matemática, que permite essa flexibilidade de fundamentos.

A proposta deste trabalho é apresentar uma geometria não euclidiana desenvolvida ao longo do século 19 e tem como público-alvo os professores de Matemática, para mostrar-lhes que, assim como a ordem dos fatores pode alterar o produto, nem sempre a soma dos ângulos de um triângulo é igual a 180 graus.

O trabalho está estruturado em quatro capítulos. O Capítulo 1 lista os axiomas da Geometria Hiperbólica de dimensão 2, apontando os fatos comuns ao plano euclidiano e ao plano hiperbólico. No Capítulo 2, apresentamos algumas diferenças entre essas duas estruturas através de resultados provados a partir dos axiomas listados. No Capítulo 3, é construído um modelo para o plano hiperbólico dentro de \mathbb{R}^2 , o que consolida essa nova geometria e sistematiza algumas fórmulas. No Capítulo 4, usamos o modelo desenvolvido para obter novos resultados sobre o plano hiperbólico, apresentando conceitos particulares e algumas figuras que, junto às retas e aos círculos, são as formas básicas do plano hiperbólico.

1. Os axiomas da Geometria Hiperbólica Plana

Há vários conjuntos de axiomas que definem, de forma equivalente, o plano hiperbólico. Dentre eles, merece destaque a formulação dada por David Hilbert no final do século 19 para o plano euclidiano que pode ser facilmente adaptada para o caso hiperbólico, a qual independe da estrutura dos números reais, isto é, de corpo ordenado completo. Um dos objetivos deste trabalho é fornecer um modelo para o plano hiperbólico em \mathbb{R}^2 e, por isso, faremos uso dos números reais para medir distâncias no plano hiperbólico, bem como para medir ângulos. A sistemática apresentada aqui é a do matemático russo Pogorelov, também do século 19, e que pode ser encontrada, no caso euclidiano no livro de João Lucas Marques Barbosa (Geometria Euclidiana Plana). Nesta teoria, os conceitos de ponto e reta são noções primitivas. O plano é o conjunto de todos os pontos, os quais serão denotados por letras maiúsculas do alfabeto latino (A, B, P etc) e as retas, denotadas por letras minúsculas do alfabeto latino (r, s, t etc) são subconjuntos não vazios do plano. Os axiomas serão organizados nos seguintes grupos: axiomas de incidência (que relacionam pontos e retas), axiomas de ordem (que relacionam pontos de uma mesma reta entre si), axiomas de medição de segmentos, axiomas de medição de ângulos, axioma de congruência (para homogeneidade do plano) e axioma das paralelas (para diferenciar do plano euclidiano).

1.1. Axiomas de Incidência

A intuição advinda da observação sugere as linhas retas como entes básicos da geometria. Embora tenhamos uma figura clara de o que é uma linha reta, uma definição precisa de reta não pode ser feita sem que apelemos para figuras. Expressões como 'pontos alinhados' ou 'pontos que seguem uma mesma direção' não têm significado próprio. De fato, nem a palavra 'ponto' tem significado previamente definido. Começemos por observar que esses dois objetos, as retas e os pontos, serão tomados como noções primitivas, isto, é não serão definidos, mas diremos como eles se comportam com algumas regras, aceitas sem demonstração para que a teoria seja construída. Essas regras

precisam ter sentido completo e versar sobre objetos bem definidos previamente ou sobre noções que foram estabelecidas como primitivas.

O que queremos de uma reta é que ela seja um conjunto não vazio de pontos. De modo a que uma reta não se reduza a um único ponto, colocaremos que há pelo menos dois pontos em cada reta. Para que o plano não conste de uma única reta, instituiremos que sempre há um ponto fora de qualquer reta dada. Além disso, as retas devem formar caminhos sem ambiguidades entre dois pontos e deve ser sempre possível traçar uma reta que passa por dois pontos. Desta feita, começamos os nossos axiomas com as seguintes duas proposições, que são os axiomas de incidência do plano

INC1. Se r é uma reta, então existem pontos A , B e C tais que $A \in r$, $B \in r$, e $C \notin r$.

INC2. Dados os pontos A e B , existe uma única reta r tal que $A \in r$ e $B \in r$.

O primeiro axioma de incidência, ao instituir que há pelo menos dois pontos em uma reta, faz a distinção entre ponto e reta. Quando estabelece que há pontos fora de uma reta, ele garante que reta e plano são distintos. Quando duas retas têm pelo menos um ponto em comum, dizemos que elas são *concorrentes*. Observe aqui que podemos entender claramente quando duas retas são concorrentes com os termos anteriores e, portanto, essa noção pode ser bem definida, isto é, explicada sem ambiguidades a partir de termos previamente estabelecidos. É consequência imediata do segundo axioma de incidência que duas retas concorrentes têm exatamente um ponto em comum. Retas que não têm pontos em comum são ditas serem *paralelas*.

Os axiomas de incidência não garantem que cada reta possui infinitos pontos. Mais ainda, sequer garantem que existem três pontos em uma mesma reta. Por exemplo, se houvesse apenas os pontos A , B e C no plano, os conjuntos $r = \{A, B\}$, $s = \{A, C\}$ e $t = \{B, C\}$ satisfazem os axiomas de incidência e, portanto, podem ser retas num planos de incidência. Essas retas são concorrentes duas a duas. Mais geralmente, dado um conjunto V qualquer com pelo menos três pontos, podemos chamar de reta de V qualquer subconjunto de V com exatamente dois pontos e, com isso, construir modelos de planos de incidência com qualquer quantidade pré-fixada de pontos, mesmo infinita.

Para $V = \{P, Q, R, S, T\}$, instituindo como retas $r = \{P, Q, R\}$, $s = \{P, S, T\}$, $t = \{Q, S\}$, $u = \{R, S\}$, $v = \{Q, T\}$ e $w = \{R, T\}$, temos que em qualquer reta há pelo menos dois pontos, nenhuma delas contém todos os pontos e, para qualquer par de pontos, existe uma única reta que os contém. Assim, r , s , t , u , v e w fornecem um modelo para um plano de incidência. Nesse caso, t e w são retas

paralelas.

Assim, somente com os axiomas de incidência, não temos como garantir que retas têm infinitos pontos e nem há como garantir a existência de retas paralelas. De modo a que as retas possuam mais de dois pontos, enunciaremos o próximo grupo de axiomas, chamados de axiomas de ordem.

1.2. Axiomas de Ordem

Como visto na seção anterior, apenas os axiomas de incidência não garantem que haja mais de dois pontos em cada reta. Os axiomas de ordem, a seguir, tratam de relacionar os pontos de uma mesma reta. Dizemos que os pontos A, B e C são colineares quando existir uma reta que os contém. Nesse caso, escreveremos $A - B - C$ (ou equivalentemente $C - B - A$) para denotar que o ponto B está entre os pontos A e C, o que é o mesmo que B está entre C e A. Essa ideia de *estar entre* é uma relação primitiva para três pontos colineares. Três pontos de uma mesma reta estarão organizados de tal forma que exatamente um deles estará entre os outros dois. Isso estabelece que as retas têm dois sentidos de forma a não haver ciclos. Além disso, exigiremos que as retas não possuam apenas dois pontos, colocando que sempre haja pontos dentro e fora do espaço compreendido entre dois pontos numa reta. De maneira mais precisa, a relação de ordem entre pontos colineares é regada pelos seguintes axiomas.

ORD1. Se A, B e C são pontos de uma reta, então $A - B - C$, ou $B - A - C$, ou $A - C - B$, não ocorrendo duas dessas simultaneamente.

ORD2. Dados os pontos A e B, existem pontos C e D (na reta que contém A e B) tais que $A - C - B$ e $A - B - D$.

O axioma de ordem 2 estabelece que uma reta pode ser prolongada em qualquer sentido e que a reta não é um conjunto discreto, no sentido que não há como dizer qual é o primeiro ponto depois de um ponto dado.

Dados os pontos A e B, definimos o *segmento de reta* com extremidades A e B como o conjunto AB, o qual é dado por $AB = \{P; A - P - B\} \cup \{A, B\}$. Quando $A = B$, temos $AB = \{A\}$, caso em que dizemos que o segmento de reta é *degenerado*. O segundo axioma de ordem garante que

segmentos de reta não degenerados (e, portanto, as retas) possuem infinitos pontos, e que segmentos de retas são distintos da reta que os contém. Com a noção de segmento de reta, podemos também definir a ideia de convexidade. Um conjunto Γ do plano é dito ser *convexo* quando $AB \subset \Gamma$, sempre que $\{A, B\} \subset \Gamma$. Assim, um conjunto é convexo quando o caminho em linha reta que une dois quaisquer de seus pontos não sai do conjunto.

Se três pontos A, B e C não são colineares, dizemos que eles determinam um *triângulo* que os tem como *vértices*, e é definido por $ABC = AB \cup AC \cup BC$, cada um dos segmentos considerados é um *lado* do triângulo. Como união de três lados, o nome mais apropriado para essa figura seria *trilátero*, já que não temos ainda a noção de ângulo. Mas, como veremos em seguida, cada triângulo determina três ângulos e, portanto, usaremos logo o nome definitivo e consolidado.

Dados os pontos distintos A e B , definimos a *semirreta* de *origem* em A e que contém B como o conjunto $S_{AB} = \{P; B \in AP\} \cup AB$. Demonstra-se, sem dificuldade, que um ponto é origem de exatamente duas semirretas de uma mesma reta, e que semirretas são conjuntos distintos de segmentos de retas. Ademais, se A e B são pontos da reta r , uma análise imediata das possibilidades do axioma de ordem I permite-nos concluir que $S_{AB} \cup S_{BA} = r$ e que $S_{AB} \cap S_{BA} = AB$.

Dados o ponto A e a reta r , com $A \notin r$, definimos o *semi-plano* com origem r e que contém A como o conjunto $SP(r, A) = \{P; PA \cap r = \emptyset\} \cup r$. Mostra-se, a partir do segundo axioma de ordem que há pelo menos dois semiplanos com origem em uma reta dada, cada um dos quais é convexo. De modo a minimalizar essa quantidade, instituímos o próximo axioma.

ORD3. Dada a reta r , existem exatamente dois semiplanos que têm r como origem.

Um equivalente ao terceiro axioma de ordem é o famoso lema de Pasch, que afirma que se uma reta não passa por nenhum dos vértices de um triângulo e intersecta um de seus lados, essa reta intersectará exatamente um dos outros lados. Para verificar isso, considere o triângulo ABC e a reta r tais que $r \cap AB = \{P\}$, com $A - P - B$. Temos que $SP(r, A) \neq SP(r, B)$. Pelo terceiro axioma de ordem, esses são os únicos semiplanos com origem em r e, portanto, C está em exatamente um deles, digamos $C \in SP(r, A)$, caso em que temos $r \cap BC \neq \emptyset$, como desejado.

1.3. Axiomas de Medição de Segmentos

Quando falamos em geometria, um dos primeiros verbos que nos vêm à mente é 'medir', que, em essência, consiste em comparar. A ideia primitiva de medição consiste em escolher um padrão e ver quantas vezes esse padrão cabe em cada figura que se quer medir. Essa ideia é simples e bastante eficiente no mundo físico, em que podemos fazer boas aproximações e, dentro de um certo conjunto de objetos, tudo pode ser bem medido a partir de uma unidade pré-fixada. A situação teórica não é tão simples. A existência de segmentos incomensuráveis impõe uma forte barreira a essa tentativa de medir por comparação com uma unidade específica. De modo a contornar essa barreira e, de fato, poder medir todos os segmentos de reta, usaremos a ordem já conhecida dos números reais, de acordo com os próximos axiomas, conhecidos como axiomas de medição de segmentos.

SEG1. A cada segmento de reta do plano está associado um único número real não negativo, chamado de comprimento do segmento ou de distância entre as extremidades do segmento. Tal número é zero apenas quando o segmento é degenerado.

O primeiro axioma de medição de segmentos apenas garante que existe a distância entre dois pontos quaisquer, mas não diz como ela se comporta em relação às demais noções. Vale destacar que, uma vez que $AB = BA$, a distância entre A e B é igual à distância entre B e A, isto é, a medida de AB é igual à medida de BA. Uma vez que cada segmento de reta está contido em alguma reta, vamos regrar a medição de segmentos fazendo uma correspondência entre pontos de uma reta e números reais, como segue.

SEG2. O conjunto de pontos de uma reta pode ser relacionado, de forma bijetiva, com o conjunto dos números reais de tal forma que a distância entre dois pontos seja igual ao módulo da diferença entre os números associados a eles.

Uma tal associação a que se refere o segundo axioma de medição de segmentos é chamada de *sistema de coordenadas* para r . Assim, dada a reta r , existe uma função $\psi : r \rightarrow \mathbb{R}$, que é um sistema de coordenadas para r , e vale que o comprimento do segmento $AB \subset r$ é $|\psi(B) - \psi(A)|$. Dados dois números reais α e β , temos pontos de r tais que $\psi(B) = \beta$ e $\psi(A) = \alpha$ e, portanto, a distância entre A e B é $|\alpha - \beta|$. Assim, podemos considerar pontos em uma reta a uma distância qualquer fixada. Mais que isso, dado o ponto A de uma reta r e um número real positivo k , existem exatamente dois pontos de r que distam k de A, a saber aqueles cujas coordenadas são $\psi(A) + k$ e $\psi(A) - k$.

Para que tenhamos uma compatibilidade entre a ordem dos números reais e a ordem dos pontos em uma reta, instituímos o seguinte axioma.

SEG3. Todos os sistemas de coordenadas de uma reta são compatíveis com a noção de estar entre, isto é, se o ponto B está entre os pontos A e C, então o número associado a B por qualquer sistema de coordenadas para a reta que contém A e B está entre os números associados a A e C por esse mesmo sistema de coordenadas.

Se denotarmos por $d(A, B)$ a distância entre os pontos A e B, isto é, a medida do segmento AB, é consequência direta do terceiro axioma de medição de segmentos que se B está entre A e C, então $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$. Com isso, se o segmento AB está contido no segmento CD, é verdade que a medida de AB não pode ser maior que a medida de CD. Assim, no que se refere a segmentos de reta, nenhuma parte excede o tamanho do todo.

Dizemos que M é o *ponto médio* do segmento AB quando $M \in AB$ e $d(A, M) = d(M, B)$. Se ψ for um sistema de coordenadas para a reta que contém AB e M é um ponto médio de AB, temos $\psi(M) = (\psi(A) + \psi(B))/2$. Assim, cada segmento de reta possui um único ponto médio.

Dados os pontos distintos A e B, a *mediatriz* do segmento AB é denotada por m_{AB} e consiste de todos os pontos do plano que equidistam de A e de B, isto é, $m_{AB} = \{P, d(P, A) = d(P, B)\}$. Como pelo menos o ponto médio de um segmento equidista das suas extremidades, temos que a mediatriz de um segmento de reta nunca é um conjunto vazio.

Dados o ponto C e o número real positivo ρ , o *círculo* (ou *circunferência*) de centro C e raio ρ é o conjunto $\lambda(C, \rho) = \{X; d(X, C) = \rho\}$. O *interior* do círculo $\lambda(C, \rho)$ é o conjunto $\text{int}(\lambda(C, \rho)) = \{X; d(X, C) < \rho\}$. Em relação a um círculo, os pontos que não lhe são contidos e não são interiores são ditos serem exteriores. Podemos usar os axiomas apresentados até aqui para garantir que um círculo tem infinitos pontos, mas não é possível verificar que, dados três pontos não colineares, existe um círculo que os contém. De fato, como será visto, isso nem sempre é verdade.

O conjunto Γ é dito ser *limitado* quando está contido no interior de algum círculo. Segmentos de reta e círculos são conjuntos limitados, bem como qualquer conjunto finito de pontos do planos.

1.4. Axiomas de Medição de Ângulos

Dados os três pontos A , B e C , o *ângulo* \widehat{BAC} , de *vértice* A , é o conjunto $\widehat{BAC} = S_{AB} \cup S_{AC}$. Quando A está entre B e C , o ângulo \widehat{BAC} é dito ser *raso*, isto é, um ângulo raso é uma reta; e quando $B \in AC$ ou quando $C \in AB$, dizemos que o ângulo é *nulo*, isto é, um ângulo nulo é uma semirreta. Observemos que os ângulos são uniões de semirretas. Como visto na seção anterior, podemos considerar dois pontos de uma semirreta que estão arbitrariamente distantes e, portanto, os axiomas de medição de segmentos não se prestam ao papel de medir semirretas e, conseqüentemente, para medir ângulos. Para comparar os ângulos, instituiremos axiomas semelhantes aos de medição de segmentos, também três, que chamaremos, sem nenhuma originalidade, de axiomas de medição de ângulos.

ÂNG1. A cada ângulo está associado um número real não negativo, o qual é chamado de medida do ângulo. Tal número é zero apenas quando o ângulo for nulo.

Assim como no caso de medição de segmentos, esse primeiro axioma de medição de ângulos apenas afirma que ângulos podem ser medidos, embora não forneça uma maneira de fazer isso. A próxima etapa é a de instituir um sistema de coordenadas para um ângulo. Há dois pontos importantes aqui. O primeiro é que cada ângulo está contido em algum semiplano e, portanto, os sistemas de coordenadas para ângulos só precisam ser feitos em um semiplano. Como cada ângulo é determinado por duas semirretas, vamos associar números às semirretas de um semiplano. O segundo ponto é que, num sentido a precisar, todo ângulo não raso é menor que um ângulo raso, de modo que, diferentemente do que ocorre com os segmentos de reta, não teremos ângulos arbitrariamente grandes, sendo suas medidas limitadas pela medida do ângulo raso.

ÂNG2. Fixados a reta r , os pontos $P \in r$ e $A \notin r$, e o semiplano $SP(r, A)$, as semirretas com origem em P e contidas em $SP(r, A)$ podem ser associadas, de forma bijetiva, aos números reais do intervalo $[0, \pi]$ de tal forma que a medida do ângulo formado por duas dessas semirretas corresponda ao módulo da diferença entre os números associados a elas.

Uma tal associação a que se refere o segundo axioma de medição de ângulos é chamada de sistema de coordenadas para o conjunto de semirretas de $SP(r, A)$ com origem em P . Dizemos que a semirreta S_{AP} divide o ângulo \widehat{BAC} quando $BC \cap S_{AP} \neq \emptyset$. De maneira imediata, todas as semirretas com origem no vértice de um ângulo raso dividem esse ângulo. Além disso, somente a semirreta que é um ângulo nulo divide esse ângulo. Como feito para segmentos de reta, exigiremos o seguinte

axioma, cuja consequência imediata, é que, quando uma semirreta divide um ângulo, os dois ângulos formados têm medidas que não excedem a medida do ângulo original.

ÂNG3. Todos os sistemas de coordenadas de um semiplano são compatíveis com a noção de dividir um ângulo. Mais precisamente, se a semirreta S_{AP} divide o ângulo $\hat{B}AC$, então o número associado a S_{AP} por um sistema de coordenada está entre os números associados a SAB e SAC por esse mesmo sistema de coordenadas.

Se usarmos o mesmo símbolo para um ângulo e para sua medida, é consequência direta do terceiro axioma de medição de ângulos que se a semirreta S_{AP} divide o ângulo $\hat{B}AC$, então $\hat{B}AC = \hat{B}AP + \hat{P}AC$. Também podemos concluir que todos os ângulos rasos têm medida π .

O número escolhido para ser a medida do ângulo raso poderia ter sido outro. Alternativamente, poderíamos ter adotado o padrão utilizado pelos babilônios há mais de três mil anos, que foi popularizado principalmente pelos tratados de trigonometria de Ptolomeu, no qual o ângulo raso mede 180. Adiantamos aqui que a razão entre o comprimento de um círculo e a medida do seu raio não é constante no plano hiperbólico, de modo que a medida do ângulo raso ter sido escolhida como a mesma da geometria euclidiana foi feita por conveniência nos cálculos a serem apresentados nos capítulos finais deste trabalho. O símbolo usado para essa medida foi popularizado nos trabalhos de Euler, matemático suíço do século 18.

Dizemos que a semirreta S_{AM} é uma bissetriz do ângulo $\hat{B}AC$ se S_{AM} divide o ângulo $\hat{B}AC$ e, além disso, $\hat{B}AM = \hat{M}AC$. Um sistema de coordenadas para os ângulos com origem em A em um semiplano pode ser utilizado para demonstrar que todo ângulo possui uma, e só uma, bissetriz. Um ângulo de medida igual á metade do ângulo raso é dito ser um ângulo reto, e retas que formam um ângulo reto são ditas serem perpendiculares. Os axiomas de medição de ângulos podem ser combinados para garantir que, dados o ponto P e a reta r , com $P \in r$, existe uma única reta que contém P e é perpendicular a r .

Quando dois segmentos têm as mesmas medidas dizemos que esses segmentos são *congruentes*. A mesma palavra se usa para ângulos que têm medidas iguais.

Os dois grupos de axiomas de medição permitem fazer medição de quaisquer segmentos e quaisquer ângulos, mas não faz nenhuma referência a como essas medidas estão interligadas no caso de segmentos não colineares ou ângulos que não possuem mesmo vértice. Essa conexão é feita

através dos triângulos. Exigiremos, como segue, que, num certo sentido, os triângulos sejam figuras rígidas.

Os ângulos e as distâncias são as medidas básicas da geometria. De uma forma mais geral, para “fazer geometria”, devemos definir funções que sirvam para medir distâncias e medir ângulos. Um curso introdutório de Geometria Analítica com tratamento vetorial introduz a noção de produto interno em um espaço vetorial. A noção de produto interno, sozinha, resolve esses dois problemas de medição, isto é, em um espaço vetorial munido de produto interno, podemos definir distância e ângulo e, portanto, fazer geometria. A noção de produto interno, porém, é algo que faz referência a espaços vetoriais. Assim, para fazer geometria, deveríamos partir de um espaço vetorial ou arranjar uma maneira de, a cada ponto, associar um espaço vetorial, definir um produto interno em cada um desses espaços e verificar como é que esse produto interno varia à medida que variamos o ponto. Essa é a essência da Geometria Diferencial, de que não trataremos a fundo nesse trabalho, mas da qual nos apropriaremos de alguns fatos, enunciados em nível de Cálculo, para observar propriedades significativas do plano hiperbólico.

1.5. Axioma de Congruência de Triângulos

Tomando um ponto da superfície da Terra, podemos tomar direções que formam um certo ângulo, percorrer uma distância em cada uma dessas direções e ver a distância entre os pontos finais. Devido à irregularidade da superfície no nosso planeta, embora fixemos o ângulo e as medidas nessa experiência, os resultados não serão sempre os mesmos. Basta observar que se começarmos do topo de uma montanha íngreme, teremos um resultado diferente daquele obtido numa região plana. Nesse caso, dizemos que a superfície da Terra não é homogênea. Os resultados podem divergir até mesmo se fixarmos, além do ângulo e das distâncias, o ponto inicial.

Nesta seção, enunciaremos um axioma que garantirá a homogeneidade do plano. Como temos ângulos e distâncias envolvidos, os triângulos se prestam bem à finalidade de reger essa propriedade. Um triângulo possui três medidas associadas aos seus lados e três medidas associadas aos seus ângulos. O caráter homogêneo que queremos do plano institui que, uma vez determinadas as medidas de dois dos lados de um triângulo e a medida do ângulo entre eles, as outras medidas ficam bem determinadas. Para tanto, definiremos a seguir as condições para que dois triângulos sejam congruentes.

Dizemos que os triângulos ABC e DEF são *congruentes* se existir uma correspondência bijetiva entre os vértices de ABC e os vértices de DEF que preserve medidas. Mais precisamente, os triângulos ABC e DEF são congruentes, quando existe uma função $\varphi : \{A, B, C\} \rightarrow \{D, E, F\}$ tal que

$$d(A, B) = d(\varphi(A), \varphi(B)),$$

$$d(A, C) = d(\varphi(A), \varphi(C)) \text{ e}$$

$$d(B, C) = d(\varphi(B), \varphi(C)),$$

isto é, φ preserva medidas de segmentos,

$$\widehat{BAC} = \widehat{\varphi(B)\varphi(A)\varphi(C)},$$

$$\widehat{ABC} = \widehat{\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)} \text{ e}$$

$$\widehat{BCA} = \widehat{\varphi(B)\varphi(C)\varphi(A)},$$

isto é, φ também preserva medida de ângulos. Uma tal função φ é dita ser uma *isometria* entre os triângulos. A definição de triângulos congruentes depende de seis igualdades. Para relacionar as medidas de ângulos com as medidas de segmentos, diminuiremos essa exigência para três, como segue no axioma de congruência.

CONG. Se os triângulos ABC e DEF são tais que $d(A, B) = d(D, E)$, $d(A, C) = d(D, F)$ e $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$, então ABC é congruente a DEF.

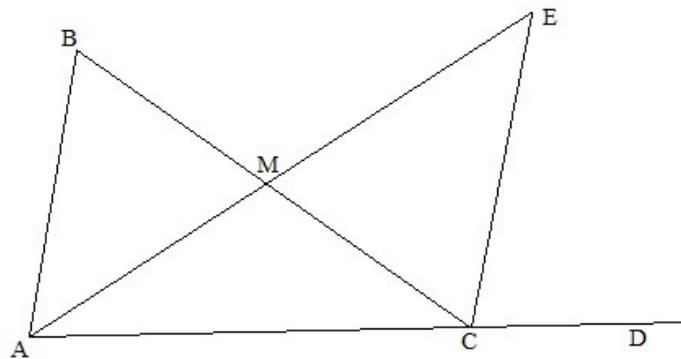
O axioma de congruência é conhecido como o caso lado-ângulo-lado de congruência, do qual podem ser deduzidos os casos ângulo-lado-ângulo e lado-lado-lado.

Seja ABC um triângulo tal que $d(A, B) = d(A, C)$. Um tal triângulo é dito ser *isósceles* de base BC. Se M é o ponto médio de BC, os triângulos ABM e ACM são congruentes, pelo caso lado-lado-lado. Assim, o ângulo \widehat{AMC} é reto, donde obtemos que AM é altura relativa à base, e os ângulos \widehat{BAM} e \widehat{CAM} são congruentes, donde obtemos que S_{AM} é a bissetriz do ângulo \widehat{BAC} . Assim, medianas, alturas, bissetrizes e mediatrizes referentes à base coincidem em triângulos isósceles.

Usando congruência de triângulos e os fatos acima sobre triângulos isósceles, podemos verificar que a mediatriz de um segmento é exatamente a reta que passa pelo seu ponto médio e é perpendicular a esse segmento.

Se ABC é um triângulo e D é tal que C está entre A e D, o ângulo \widehat{BCD} é dito ser um *ângulo externo* do triângulo ABC. Se M é o ponto médio de BC e E é tal que M é o ponto médio de AE,

obtemos os triângulos ABM e ECM congruentes, pelo caso lado-ângulo-lado. Assim $ABC = BCE$. Mas $BCE < BCD$ e concluímos que $ABC < BCD$. Raciocínio análogo permite concluir que $BAC < BDC$ e, assim, fica provado que um ângulo externo de um triângulo tem medida maior que qualquer um dos ângulos do triângulo que não lhe é adjacente, fato conhecido como Teorema do Ângulo Externo. Assim, um triângulo não pode ter dois ângulos retos, ou dois ângulos obtusos ou ainda um ângulo reto e um ângulo obtuso. Dessa forma, em um triângulo sempre há pelo menos dois ângulos agudos. Mais geralmente, a soma das medidas de dois quaisquer ângulos de um triângulo é sempre menor que a medida de um ângulo raso.



Com a mesma construção acima, temos que o triângulo ACE possui soma das medidas dos ângulos igual à soma das medidas dos ângulos de ABC . Como $E\hat{A}C + A\hat{E}C = B\hat{A}C$, vale que os ângulos $E\hat{A}C$ e $A\hat{E}C$ não podem ser simultaneamente maiores que metade de $B\hat{A}C$. Assim, concluímos que, dado um triângulo ABC , é possível construir outro com mesma soma das medidas dos ângulos, mas que possui um ângulo de medida menor ou igual à metade da medida de $B\hat{A}C$.

Se supusermos que a soma das medidas dos ângulos de um triângulo ABC é maior que π , digamos igual a $\pi + w$, com $w > 0$, podemos construir um triângulo com a mesma soma das medidas dos ângulos igual a $\pi + w$, mas com um ângulo de medida menor ou igual à metade de $B\hat{A}C$, por exemplo. Repetindo o processo com esse triângulo, obtemos um terceiro triângulo com mesma soma das medidas dos ângulos, mas com um ângulo de medida menor ou igual à quarta parte de $B\hat{A}C$. Repetindo o raciocínio tantas vezes quantas forem necessárias, chegaremos a um triângulo cuja soma das medidas dos ângulos é ainda $\pi + w$, mas que possui um ângulo menor que w (basta fazer o processo uma quantidade n de vezes tal que $2^n \cdot w > B\hat{A}C$). Nesse ponto, teremos que os outros dois ângulos desse triângulo terão soma superior a π , o que contradiz o que foi discutido logo acima. Assim, nenhum triângulo possui soma das medidas dos ângulos excedendo a medida de um ângulo raso. Esse fato notável é devido a Legendre, matemático francês do século 18.

Dados o ponto P e a reta r , mesmo que $P \notin r$, existe uma única reta que contém P e é perpendicular a r . O ponto de interseção entre essas retas é chamado de projeção ortogonal de P sobre r . Pode ser demonstrado que, num triângulo, quando maior a medida de um ângulo, maior a medida do lado oposto a ele, e vice-versa. Esse fato pode ser usado para se demonstrar que, dados o ponto P e a reta r , com $P \notin r$, o ponto de r que tem menor distância a P é a projeção ortogonal de P sobre r , essa será chamada de distância entre P e r e denotada por $d(P, r)$.

Também verifica-se que em um triângulo, a medida de um lado nunca excede a soma das medidas dos outros dois lados. Esse fato é conhecido como Desigualdade Triangular e, mais geralmente, podemos afirmar que, dados três pontos quaisquer A , B e C , vale $d(A, B) \leq d(A, C) + d(B, C)$, com a igualdade ocorrendo apenas no caso em que $C \in AB$. Essa propriedade é tão importante na Geometria que, num contexto geral, a desigualdade triangular é uma das propriedades exigidas ao se definir distância.

1.6. Axioma das Paralelas

Dados a reta r e o ponto P , com $P \notin r$, podemos traçar a reta s que passa por P e que forma com r um ângulo reto, isto é, um ângulo de medida $\pi/2$. Seja t a reta que passa por P e é perpendicular a s . Se t e r fossem concorrentes, teríamos um triângulo com dois ângulos retos, o que contradiria o resultado provado na seção anterior. Assim, por um ponto fora de uma reta passa pelo menos uma reta que lhe é paralela.

Os axiomas listados até aqui fazem parte de uma teoria geral, e os resultados que decorrem deles valem na geometria euclidiana, dentre os quais destacamos a existência de retas paralelas a uma reta dada e o fato de que a soma dos ângulos de qualquer triângulo nunca excede π . Nesse ponto, há uma decisão a ser tomada. Encerramos a lista de axiomas e vemos as consequências dessa teoria ou incluímos um axioma que define a quantidade de paralelas a uma reta dada que passam por um ponto dado fora dela. O que diferencia o plano hiperbólico do plano euclidiano é a escolha feita quando decidimos acrescentar um axioma. No plano euclidiano, temos unicidade dessa paralela. No plano hiperbólico, porém, temos o seguinte axioma.

PARAL. Dados uma reta r e um ponto P , com $P \notin r$, existem, pelo menos, duas retas que contêm P e são paralelas a r .

Sejam s e t retas que passam pelo ponto P e são paralelas à reta r . Seja A um ponto da reta r . Temos que $r \subset SP(s, A) \cap SP(t, A)$. Se $B \in s \setminus SP(t, A)$ e $C \in t \setminus SP(s, A)$, a reta que contém PQ é paralela a r , para qualquer $Q \in BC$. Uma vez que o segmento BC possui infinitos pontos, obtemos que existem infinitas retas que passam por P e são paralelas a r . Assim, não faria sentido exigirmos exatamente duas paralelas nesse último axioma e, igualmente, chegaríamos a uma teoria inconsistente se fixássemos um número natural como quantidade de paralelas (a menos é claro de escolher que exista apenas uma, o que é o caso do plano euclidiano).

1.7. Um comentário sobre o nome 'hiperbólica'

Fixados a reta r e o ponto F , com $F \notin r$, e o número real positivo ε , a *cônica de foco F , diretriz r e excentricidade ε* é o conjunto $c_\varepsilon(F, r) = \{P; PF = \varepsilon \cdot d(P; r)\}$. Quando $0 < \varepsilon < 1$, a cônica é dita ser uma *elipse*; se $\varepsilon = 1$, ela é uma *parábola* e, no caso $\varepsilon > 1$, temos uma *hipérbole*. As cônicas aparecem em tratados gregos de geometria e são largamente estudadas em Geometria Analítica. Em geral, na Matemática, é comum usar esses nomes para classificar estruturas. Por exemplo, um sistema linear que possui solução única pode ser chamado de parabólico. Podemos adaptar os axiomas iniciais de modo a não haver retas paralelas, e uma tal estrutura pode ser chamada de plano elíptico. A geometria euclidiana, na qual há apenas uma paralela a uma reta dada passando por um ponto fora dela, também pode ser chamada de geometria parabólica. Dessa feita, o nome "plano hiperbólico" para a estrutura desenvolvida neste primeiro capítulo não fica estranho. Não faremos referência às cônicas no resto do trabalho, mas consideramos importante explicar por que usar um termo consagrado na Matemática para definir uma estrutura que, de maneira explícita, não faz referência ao sentido clássico do termo.

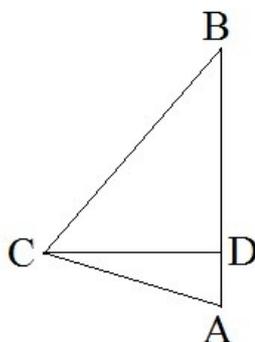
Com isso, encerramos o primeiro capítulo. A seguir, trataremos de alguns resultados específicos da Geometria Hiperbólica que são contraintuitivos para uma mente demasiado acostumada às propriedades da Geometria Euclidiana (Parabólica).

2. Algumas particularidades do plano hiperbólico

A estrutura descrita no Capítulo 1 é muito semelhante ao plano euclidiano. De fato, a única diferença entre o plano hiperbólico e o plano euclidiano, pelo menos do que diz respeito aos seus conjuntos de axiomas, reside em uma proposição, em particular, na substituição da expressão “exatamente uma” por “pelo menos duas” em uma dessas proposições. Neste capítulo, veremos que essa pequena alteração tem consequências significativas em propriedades do plano hiperbólico que o plano euclidiano não compartilha, tais como o fato de a soma das medidas dos ângulos de um triângulo não ser a medida de um ângulo raso ou de nem todo triângulo ser inscritível em um círculo.

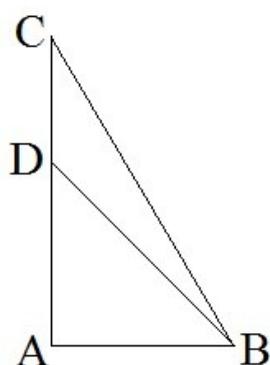
2.1. Sobre a soma das medidas dos ângulos de um triângulo

Suponhamos que no plano hiperbólico haja um triângulo ABC cuja soma dos ângulos é igual a π , isto é, a medida de um ângulo raso. Como consequência do Teorema do Ângulo Externo, há um ângulo agudo em ABC. Seja C o vértice de ABC que possui o maior ângulo. Seja D a projeção ortogonal de C sobre a reta que contém AB. Se D não estivesse entre A e B, concluiríamos que o ângulo em A ou em B no triângulo ABC é obtuso, o que não ocorre. Dessa forma, D está entre A e B. Observe que a soma dos ângulos dos triângulos ADC e BDC é igual à soma das medidas dos ângulos de ABC mais um ângulo raso. Assim, ADC e BDC têm ângulos que, somados, resultam em 2π . Como individualmente cada um deles não pode ter ângulos com soma de medidas maior que π , concluímos que os dois triângulos possuem soma dos ângulos igual a π . Assim, se houver um

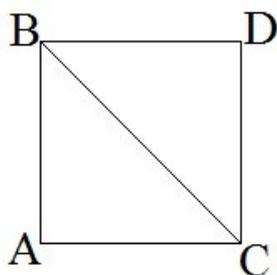


triângulo no plano hiperbólico cuja soma dos ângulos é igual a π , então há um triângulo retângulo cuja soma dos ângulos é igual a π .

Seja ABC um triângulo retângulo em A cuja soma dos ângulos é igual a π . Se ABC for isósceles, então concluímos que existe no plano hiperbólico um triângulo retângulo cujos ângulos agudos medem $\pi/4$. Se não for esse o caso e se AC for maior que AB, considere D na semirreta AC de tal forma que AD e AB sejam congruentes. Raciocínio análogo ao empregado no parágrafo anterior nos levam ao fato de que ABD é um triângulo isósceles cuja soma dos ângulos é a mesma que ABC. Assim, se houver um triângulo retângulo cuja soma dos ângulos é π , então existe um triângulo retângulo isósceles cujos ângulos agudos medem $\pi/4$.

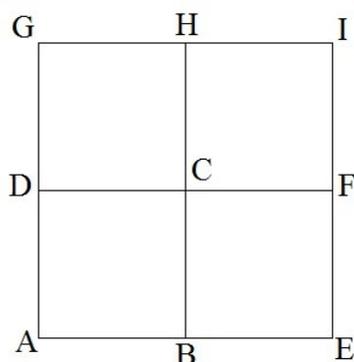


Seja ABC um triângulo retângulo em A cujos ângulos agudos medem $\pi/4$. No semiplano que contém A e de origem na reta que contém BC, considere uma semirreta com origem em B e que forma com BC um ângulo de $\pi/4$. Nessa semirreta, considere o ponto D tal que BD e AB são congruentes. Temos que o ângulo DBA é reto e, além disso, pelo axioma de congruência, temos que ABC e DBC são congruentes. Dessa forma, o ângulo DCB mede $\pi/4$, donde obtemos que ABDC é um quadrilátero com quatro ângulos retos e cujos lados são congruentes entre si, isto é, ABDC é um quadrado. Dessa forma, se no plano hiperbólico existe um triângulo retângulo isósceles cujos ângulos agudos medem $\pi/4$, então existem quadrados.

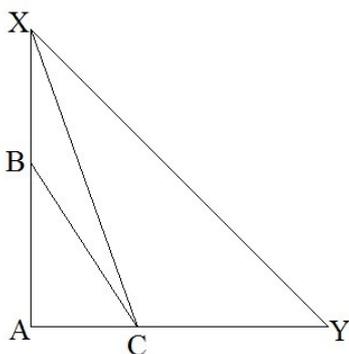


Seja ABCD um quadrado. Os triângulos ABC e ADC são retângulos e isósceles e, para cada um, a

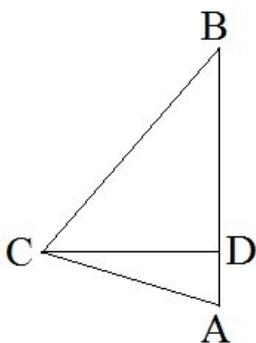
soma das medidas dos ângulos é π . Consideremos o ponto E sobre a reta que contém AB de tal forma que B é o ponto médio de AE. O triângulo BCE é congruente a BCA e, portanto, isósceles e com soma de ângulos igual a π . Repetindo o processo do parágrafo anterior, podemos obter o ponto F tal que BCFE seja um quadrado. Podemos repetir o processo para construir um quadrado CDGH e obter um ponto I tal que FCHI seja um quadrado congruente a ABCD. Assim, AEIG é um quadrado cujos lados medem o dobro dos lados de ABCD. A construção pode ser repetida para obter um quadrado cujos lados medem 2^n vezes a medida de AB, para qualquer n natural. Dessa forma, se existe um quadrado no plano hiperbólico, existem quadrados cujo lado é maior que qualquer número fixado e, portanto, existem triângulos retângulos isósceles cujos ângulos agudos medem $\pi/4$ e cujos catetos são maiores que qualquer número fixado.



Seja ABC um triângulo retângulo em A. Com as considerações do parágrafo anterior, existe um triângulo DEF, retângulo em D, com DE e DF congruentes, cujos ângulos agudos medem $\pi/4$ e cujos catetos são maiores que qualquer cateto de ABC. Nas semirretas AB e AC, considere pontos X e Y, respectivamente, tais que AX e AY tenham medidas iguais às de DE. Dessa forma, o triângulo AXY é retângulo e isósceles e a soma de seus ângulos é igual a π . A soma das medidas dos ângulos dos triângulos BCX, CXY e ABC é igual à soma das medidas dos ângulos AXY adicionada de dois ângulos rasos, isto é, vale 3π . Como nenhuma dessas três somas pode exceder π , é imperativo que cada uma delas seja igual a π . Assim, se houver um quadrado cujo lado é maior que qualquer número pré-fixado, a soma das medidas dos ângulos de qualquer triângulo retângulo é igual a π .

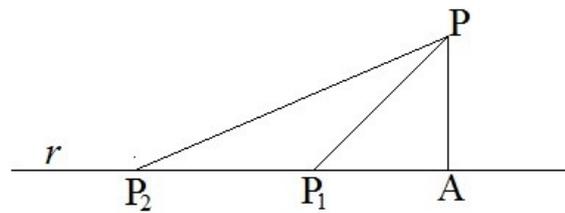


Seja ABC um triângulo qualquer com C sendo o vértice onde reside o maior ângulo do triângulo. Temos que a projeção ortogonal de C, digamos D, sobre a reta que contém AB é um ponto do segmento AB. Se a soma dos ângulos de qualquer triângulo retângulo é igual a π , temos que as somas dos ângulos de ADC e de BDC valem, cada uma π e, portanto, as duas somas juntas valem 2π . Por outro lado, essa mesma soma é igual à soma dos ângulos de ABC acrescida dos ângulos CDB e CDA, os quais são retos. Assim, se a soma das medidas dos ângulos de qualquer triângulo retângulo for igual a π , o mesmo ocorre para qualquer triângulo do plano hiperbólico.

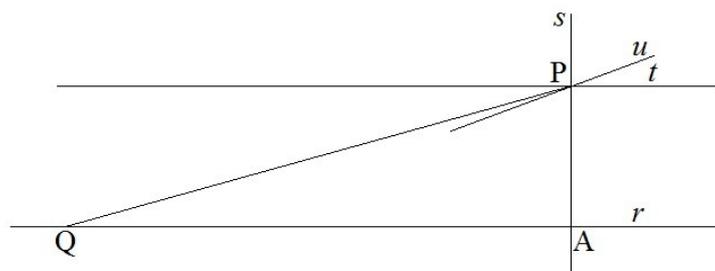


Considere, agora, o ponto P e a reta r , com $P \notin r$. Se A é a projeção ortogonal de P sobre r , considere A_1 em r tal que AP_1 seja congruente a AP. Uma vez que a soma das medidas dos ângulos de qualquer triângulo nunca excede π , então o ângulo AP_1P tem medida menor ou igual a $\pi/4$. Se tomarmos P_2 de forma que P_1 esteja entre A e P_2 e com P_1P_2 congruente a P_1P , temos que os ângulos P_2PP_1 e PP_2P_1 são congruentes e têm soma menor ou igual a $\pi/4$ e, portanto, cada um deles mede $\pi/8$ ou menos. Considerando P_3 de tal forma que P_3P_2 seja congruente a P_2P e, repetindo o argumento, concluímos que AP_3P mede $\pi/16$ ou menos. Podemos executar o procedimento e obter um ponto P_k na reta r tal que AP_kP tenha medida igual a $\pi/2^n$, ou menos, para qualquer n natural maior que 1. Dessa forma, podemos traçar, por um ponto dado, uma reta que forma com uma reta dada um

ângulo de medida menor que qualquer número pré-fixado. Frisamos aqui que esse fato independe de qualquer suposição inicial e é verdadeiro independente do axioma das paralelas.



Sejam P um ponto e r uma reta, com $P \notin r$. Se s é a reta perpendicular a r que passa por P e t é a reta que passa por P e é perpendicular a s , obtivemos, no Capítulo 1 que t é paralela a r . Considere u outra reta que passa por P e seja w a medida do ângulo formado por t e u . Sejam X e Y sobre t e u , respectivamente, tais que XPY tenha medida w e Y está no mesmo semiplano de origem em t que contém A , a projeção ortogonal de P sobre r . Temos que existe Q em r tal que AQP é menor que w . Se a soma dos ângulos de qualquer triângulo é igual a π , temos que QPA é o complemento de AQP e, portanto, QPA é maior que o complemento de w . Dessa forma, S_{PY} divide o ângulo QPA e, portanto, intersecta QA . Logo, u não é paralela a r . Assim, se a soma das medidas de qualquer triângulo do plano hiperbólico for igual a π , existe uma única reta que passa por P e é paralela a r , mas isso contradiz o axioma das paralelas.



Dessa forma, no plano hiperbólico, a suposição inicial, a de que existia pelo menos um triângulo com soma dos ângulos igual a π é falsa e, com isso obtemos que, na estrutura com a qual estamos trabalhando, a soma das medidas dos ângulos de qualquer triângulo é sempre menor que a medida de um ângulo raso.

Como consequência imediata disso, temos que a soma dos ângulos de um polígono convexo de n lados é sempre menor que $(n - 2) \cdot \pi$ e, dessa forma, não existem retângulos (quadriláteros com

quatro ângulos retos) no plano hiperbólico. Também podemos afirmar que a medida de cada ângulo em qualquer triângulo equilátero é menor que $\pi/3$.

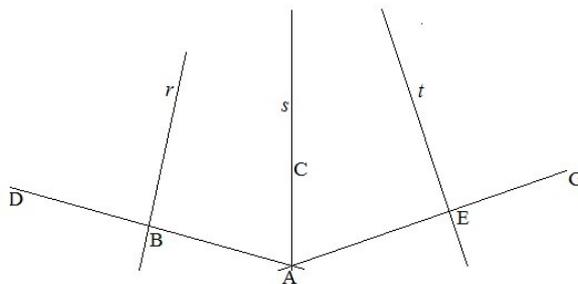
Veremos adiante que, além de a soma das medidas de um triângulo do plano hiperbólico não ser igual a π , essa soma nem é uma constante e pode ficar arbitrariamente pequena.

2.2. Sobre a inscribibilidade de triângulos

Dado o segmento AB , se considerarmos a reta r que passa por B e é perpendicular a AB , temos que a reta que passa por A e é perpendicular a AB é paralela a r . Como há pelo menos duas retas que passam por A e são paralelas a r , temos que existe uma semirreta S_{AC} , contida numa reta s , que forma um ângulo $w < \pi/2$ com AB e não intersecta r . Além disso, como s não intersecta r , temos que r está contida em $SP(s, B)$. Se consideramos na reta que contém AB o ponto D tal que B é o ponto médio de AD , temos que r é perpendicular a AD e passa pelo seu ponto médio, donde concluímos que r é a mediatriz de AD , isto é, r contém todos os pontos do plano hiperbólico que equidistam de A e D e, portanto, contém os centros de todos os círculos que passam simultaneamente por A e por D .

Considere o ponto E que não está em $SP(s, B)$ tal que AE forma um ângulo de medida w com S_{AC} e AE é congruente a AB . Considere t a reta que é perpendicular a AE e que passa por E . Se t intersectasse a reta s em um ponto, digamos F , os triângulos FAE e FAB seriam congruentes, mas isso implicaria que FAB é retângulo em B e, portanto, F seria um ponto de r . Daí, $F \in r \cap s$, uma contradição. Assim, t não intersecta s e, com isso, t está contida em $SP(s, E)$. Se consideramos na reta que contém AE o ponto G tal que E é o ponto médio de AG , temos que t é perpendicular a AG e passa pelo seu ponto médio, donde concluímos que t é a mediatriz que AG

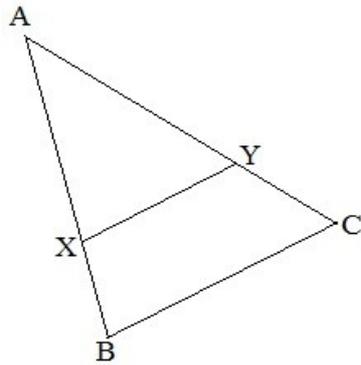
O ângulo DAG tem medida $2w$ e, como w é um ângulo agudo, temos que DAG tem medida menor que π e, com isso, os pontos A , D e G não são colineares. Uma vez que r consiste de todos os pontos que equidistam de A e D , e t é o conjunto de todos os pontos que equidistam de A e G , e sabendo que r e t estão em semiplanos distintos com origem em s e não têm pontos em comum com s , vale que r e t não se intersectam. Dessa forma, não há um ponto que equidista simultaneamente de A , D e G , o que é o mesmo que dizer que não há nenhum círculo que passa por A , D e G . Com isso, os pontos A , D e G são vértices de um triângulo que não é inscrivível em nenhum círculo.



Como no plano hiperbólico há triângulos cujas mediatrizes dos lados não se intersectam, há três pontos que não são colineares e não são pertencem a um círculo. No plano hiperbólico, portanto, podemos estudar que propriedades esses pontos têm e se eles pertencem a alguma figura com a mesma relevância dos círculos e das retas, e que relação essas figuras guardam entre si. Essas figuras do plano hiperbólico são de dois tipos: os *horocírculos* e as *curvas equidistantes*, de modo que três pontos quaisquer do plano hiperbólico pertencem a exatamente uma reta, ou a exatamente um círculo, ou a exatamente um horocírculo, ou a exatamente uma curva equidistante. Voltaremos a falar dessas figuras, com suas definições precisas, no Capítulo 4.

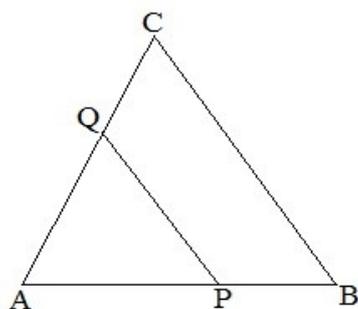
2.3. Sobre semelhança de triângulos

Suponha que no plano hiperbólico existam dois triângulos ABC e DEF cujos ângulos sejam, nessa ordem congruentes. Na semirreta AB, considere X tal que AX e DE sejam congruentes. Considere em S_{AC} o ponto Y tal que AY seja congruente a DF. Temos que os triângulos AXY e DEF são congruentes e, portanto, os ângulos AXY e ABC são congruentes, o mesmo ocorrendo com AYX e ACB. Se fosse o caso de X e Y estarem em semiplanos distintos em relação à reta que contém BC, teríamos XY e BC se cruzando num ponto P, mas aí, pelo Teorema do Ângulo Externo, teríamos $AXY > ABC$ ou $AYX > ACB$, e nenhuma dessas situações ocorre. Assim, X e Y estão no mesmo semiplano em relação a reta que contém BC. Se fosse o caso de X e Y estarem fora dessa reta, teríamos o quadrilátero convexo XYCB cuja soma das medidas dos ângulos é igual a 2π , o que igualmente não pode ocorrer. Dessa forma, X e Y devem estar na reta que contém B e C e, portanto, $X = B$ e $Y = C$. Assim, ABC e DEF são triângulos congruentes.

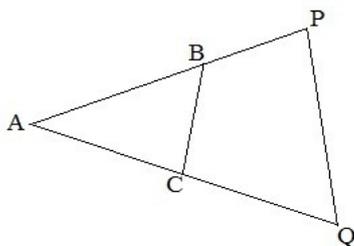


Com isso, obtemos que, no plano hiperbólico, se dois triângulos têm ordenadamente ângulos congruentes, então esses triângulos são congruentes. Naturalmente, há triângulos com lados proporcionais com razão diferente de 1, mas esses triângulos não possuem os mesmos ângulos, pois isso acarretaria em a razão de proporcionalidade ser 1, isto é, não há triângulos semelhantes que não são congruentes. Temos, também, que, uma vez determinadas as medidas dos ângulos de um triângulo, as quais devem somar menos que π , as medidas dos lados do triângulo também estão determinadas. No plano hiperbólico, portanto, basta saber as medidas dos ângulos de um triângulo para que todas as demais medidas fiquem determinadas. Sua área, por exemplo, dependerá apenas dessas medidas. No Capítulo 4, exibiremos uma fórmula para calcular a área de um triângulo a partir apenas das medidas dos seus ângulos.

Considere um triângulo ABC. Se tomarmos um ponto P entre A e B, a semirreta com origem em P e que forma com S_{PA} no mesmo semiplano que contém C um ângulo de medida igual a CBA deve intersectar o lado AC em algum ponto, digamos Q. Nesse caso, os triângulos APQ e ABC têm dois ângulos de mesma medida. Se AQP fosse congruente ao ângulo ACB, os dois triângulos deveriam ser congruentes, o que não ocorre. Dessa forma, AQP é diferente de ACB e, portanto, a soma das medidas dos ângulos de APQ é diferente da soma das medidas dos ângulos de ABC. Como QPA e CBA são congruentes, temos que QPB e CBP são suplementares. Como a soma dos ângulos do quadrilátero CQPB é menor que 2π , concluímos que PQC e BCQ somam menos que π . Daí, como CDP é o suplemento de AQP, temos que ACB é menor que AQP, donde obtemos que a soma dos ângulos de ABC é menor que a soma dos ângulos de APQ. Dessa forma, dado qualquer triângulo no plano hiperbólico, existe outro triângulo cuja soma dos ângulos é maior que a do triângulo dado.



Por outro lado, se considerarmos o triângulo ABC e tomarmos pontos P e Q sobre S_{AB} e S_{AC} , respectivamente, tais que B está entre A e P, e C está entre A e Q, teremos o quadrilátero convexo PQCB cuja soma dos ângulos é menor que 2π e, por outro lado, $PBC + ABC = \pi$ e $PQC + BCA = \pi$. Logo, $BPQ + CQP < ACB + ABC$ e, com isso, obtemos que a soma dos ângulos do triângulo APQ é menor que a soma dos ângulos de ABC. Dessa forma, dado qualquer triângulo no plano hiperbólico, existe outro triângulo cuja soma dos ângulos é menor que a do triângulo dado.

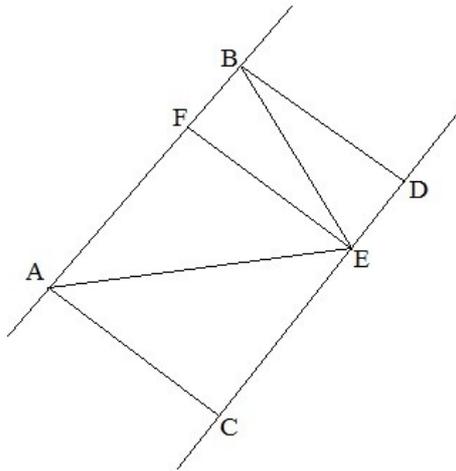


Com isso, temos que não há um mínimo e nem um máximo para a soma dos ângulos de um triângulo no plano hiperbólico, embora esse valor esteja claramente limitado inferiormente pelo número 0 e superiormente pelo número π . Veremos adiante que essas cotas não podem ser melhoradas.

2.4. Sobre retas equidistantes

Suponha que no plano hiperbólico haja retas r e s tais que os pontos de r estão todos à mesma distância de s . Considere os pontos A e B sobre a reta r , e C e D suas projeções ortogonais sobre s , respectivamente. Se E é um ponto entre C e D, e F é a projeção ortogonal de E sobre r , a suposição de que os pontos de r estão todos à mesma distância de s acarreta que AC, EF e BD têm a mesma medida. Por isso, os triângulos ACE e AFE são congruentes, donde podemos afirmar que os ângulos AEC e FAE são congruentes. Raciocínio análogo para os triângulos BFE e EDB nos levam ao fato

de que FBE e BED são congruentes. Dessa forma, a soma das medidas dos ângulos do triângulo ABE vale $BAE + AEB + EBA = FAE + AEB + FBE + EBF = CEA + AEB + BED = \pi$. Dessa forma, se duas retas forem tais que os pontos de uma equidistam da outra, existe um triângulo cuja soma dos ângulos é π , o que é uma contradição. Logo, no plano hiperbólico, duas retas nunca estão a uma mesma distância. Assim, dados um número real w e uma reta r , a coleção de pontos cuja distância até r é igual a w não é um par de retas.



Adiante, provaremos que no plano hiperbólico duas retas podem ficar arbitrariamente distantes, mesmo quando não se intersectam. Além disso, há retas que, embora não sejam concorrentes, podem ficar arbitrariamente próximas, isto é, no plano hiperbólico há retas que são assíntotas de retas.

3. Um modelo para o Plano Hiperbólico

Neste capítulo, forneceremos um modelo para o plano hiperbólico descrito no capítulo 1 e estudado no capítulo 2. Esse modelo será construído a partir de um subconjunto de \mathbb{R}^2 . Definiremos o que são as retas e demais noções, as quais verificarão os axiomas listados no primeiro capítulo. Isso garantirá que esse conjunto de axiomas é tão consistente quanto os axiomas da geometria euclidiana. Há vários modelos para o plano hiperbólico, dentre os quais destacamos o disco de Poincaré, que foi utilizado em várias obras do artista holandês M. C. Escher. Neste trabalho, entretanto, optamos por descrever o modelo do semiplano, também de Poincaré e também usado por Escher em alguns de seus trabalhos.

3.1. As retas do modelo

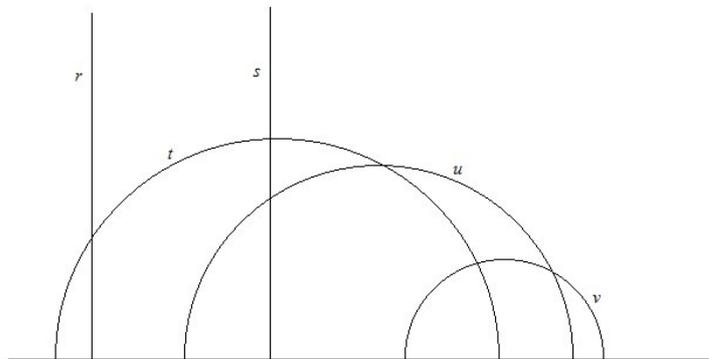
Consideremos $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$, isto é, o conjunto de pares de números reais com ordenada positiva. Tal espaço será chamado de plano hiperbólico e, sempre que fizermos referência ao equivalente euclidiano, frisaremos o fato, como em 'reta euclidiana' ou 'distância euclidiana' para as retas e distâncias ordinárias do modelo da Geometria Analítica para o plano euclidiano.

Os pontos de \mathbb{H}^2 são precisamente os seus elementos. De modo a verificar os axiomas listados no capítulo 1, precisamos definir que subconjuntos de \mathbb{H}^2 são as retas, sob condições um ponto está entre outros dois e como medir distâncias e ângulos em \mathbb{H}^2 . Em seguida, vamos verificar que, com essas definições, todas as condições desejadas são satisfeitas e, com isso, podemos fazer Geometria Analítica Hiperbólica.

Diremos que o conjunto r é uma *reta* de \mathbb{H}^2 se r for de um dos seguintes tipos:

(i) $r = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2; x = x_0\}$, para certo $x_0 \in \mathbb{R}$, ou

(ii) $r = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2; y = \sqrt{\rho^2 - (x - x_0)^2}\}$, para certos $x_0, \rho \in \mathbb{R}$, com $\rho > 0$.



Assim, as retas de \mathbb{H}^2 são apenas as partes contidas no semiplano superior de retas euclidianas verticais e de círculos euclidianos com centro no eixo das abscissas. Por exemplo, em \mathbb{H}^2 , os pontos $A = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $B = (0, 2)$ e $C = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ são colineares, pois pertencem à reta $s = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2; y = \sqrt{4 - x^2}\}$, enquanto os pontos $D = (1, 1)$, $E = (2, 2)$ e $F = (3, 3)$ não o são, pois, embora D, E e F pertençam a uma reta euclidiana, essa reta não é vertical e o fato de eles estarem em uma reta euclidiana impede que eles pertençam a um círculo euclidiano e, assim, não há nenhuma reta de \mathbb{H}^2 que contenha D, E e F. Dessa forma, temos o triângulo DEF, mas ABC não é um triângulo.

3.2. Verificação dos axiomas de incidência

É imediato verificar que, definidas dessa forma, as retas de \mathbb{H}^2 satisfazem o primeiro axioma de incidência, pois em cada um dos casos é trivial encontrar pontos de \mathbb{H}^2 que pertencem e pontos que não pertencem a uma reta dada.

Para verificarmos o segundo axioma de incidência, tomemos dois pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ em \mathbb{H}^2 . Consideremos os dois casos possíveis, comparando as abscissas de A e de B.

caso 1: $x_A = x_B$

Aqui, considere $r = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2; x = x_A\}$. Temos que $\{A, B\} \subset r$, donde há pelo menos uma reta que passa por A e B. Como círculos euclidianos que passam por A e B têm centro com ordenada igual à média aritmética entre y_A e y_B , que é um número positivo, nenhum deles terá centro no eixo horizontal e, assim, nenhuma reta do tipo (ii) passará por A e B. Além disso, como r é a única reta do tipo (i) que contém A e B, fica garantida a unicidade. Portanto, dados dois pontos de \mathbb{H}^2 com abscissas iguais, existe uma única reta que os contém.

caso 2: $x_A \neq x_B$

Nenhuma reta do tipo (i) contém A e B, pois, sendo $x_A \neq x_B$, a reta euclidiana que passa por A e B não é vertical. Se $(x_0, 0)$ é o ponto de interseção da mediatriz euclidiana de AB com eixo das abscissas, e ρ é a distância euclidiana de $(x_0, 0)$ a A (e conseqüentemente também a B), temos que a reta $r = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2; y = \sqrt{\rho^2 - (x - x_0)^2}\}$ contém A e B, e é a única reta do tipo (ii) com essa propriedade. Portanto, dados dois pontos de \mathbb{H}^2 com abscissas diferentes, existe uma única reta que os contém.

3.3. Verificação dos axiomas de ordem

Passemos a noção de estar entre, que diz respeito apenas a pontos de uma mesma reta. Essa noção será estudada, também, em dois casos. Seja, assim, A, B e C pontos colineares de \mathbb{H}^2 e r a reta que os contém.

caso 1: a reta considerada é do tipo (i)

Seja $r = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2; x = x_0\}$ uma reta de \mathbb{H}^2 , e considere $A = (x_0, y_A)$, $B = (x_0, y_B)$ e $C = (x_0, y_C)$ pontos distintos de r . Nesse caso, dizemos que B está entre A e C quando $y_A < y_B < y_C$ ou $y_C < y_B < y_A$. Assim, B está entre A e C quando B pertencer ao segmento euclidiano vertical AC. A ordem dos números reais faz com que o primeiro axioma de ordem se verifique diretamente nesse caso, uma vez que, dados três números reais, exatamente um deles está entre os outros dois.

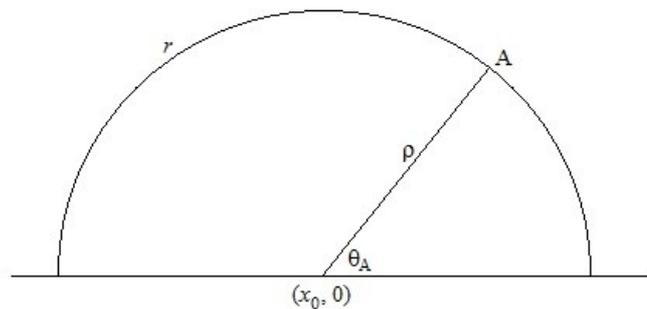
Sejam, agora, $A = (x_0, y_A)$, $B = (x_0, y_B)$ pontos de r , é imediato que, fazendo $y_C = (y_A + y_B)/2$, vale que $C = (x_0, y_C)$ é tal que C está entre A e B . Se $y_A < y_B$, o ponto $D = (x_0, y_B + 1)$ é tal que B está entre A e D . Se $y_B < y_A$, o ponto $D = (x_0, y_B/2)$ é tal que B está entre A e D , o que verifica o segundo axioma de ordem para retas do tipo (i).

Se $A = (x_0, y_A)$ e $B = (x_0, y_B)$ são pontos de r , com $y_A < y_B$, podemos parametrizar o segmento AB por $\gamma : [y_A, y_B] \rightarrow \mathbb{H}^2$, com $\gamma(t) = (x_0, t)$.

Os semiplanos com origem na reta r são precisamente os conjuntos $\{(x, y) \in \mathbb{H}^2; x \leq x_0\}$ e $\{(x, y) \in \mathbb{H}^2; x \geq x_0\}$. Donde obtemos diretamente que o terceiro axioma de ordem é verificado para retas do tipo (i), isto é, existem exatamente dois semiplanos com origem em uma reta do tipo (i) em \mathbb{H}^2 .

caso 2: a reta considerada e do tipo (ii)

Seja $r = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2; y = \sqrt{\rho^2 - (x - x_0)^2}\}$ uma reta de \mathbb{H}^2 , e considere $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ pontos distintos de r . Sejam $\theta_A = \arccos((x_A - x_0)/\rho)$, $\theta_B = \arccos((x_B - x_0)/\rho)$ e $\theta_C = \arccos((x_C - x_0)/\rho)$, isto é, θ_A é a medida do ângulo euclidiano formado pelo eixo das abscissas e pela reta euclidiana que passa por A e $(x_0, 0)$. Nesse caso, dizemos que B está entre A e C quando $\theta_A < \theta_B < \theta_C$ ou $\theta_C < \theta_B < \theta_A$. Mais uma vez, a ordem dos números reais, aliada ao fato de a função cosseno ser decrescente em $(0, \pi)$, garante o primeiro axioma de ordem para esse caso.



Sejam, agora, $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ pontos de r , e θ_A e θ_B como acima. O ponto $C = (x_0 + \rho \cdot \cos((\theta_A + \theta_B)/2), \rho \cdot \sin((\theta_A + \theta_B)/2))$ é tal que C está entre A e B . Além disso, se $\theta_A < \theta_B$, o ponto $D = (x_0 + \rho \cdot \cos((\pi + \theta_B)/2), \rho \cdot \sin((\pi + \theta_B)/2))$ é tal que B está entre A e D . Se $\theta_B < \theta_A$, o ponto $D = (x_0 + \rho \cdot \cos(\theta_B/2), \rho \cdot \sin(\theta_B/2))$ é tal que B está entre A e D . Dessa forma, o segundo axioma de ordem fica

verificado também para o caso de retas do tipo (ii).

Se $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ são pontos de r , e θ_A e θ_B obtidos como descrito acima e tais que $\theta_A < \theta_B$, então o segmento AB pode ser parametrizado por $\gamma : [\theta_A, \theta_B] \rightarrow \mathbb{H}^2$, com $\gamma(t) = (x_0 + \rho \cdot \cos t, \rho \cdot \sin t)$.

Os semiplanos com origem em na reta r são precisamente os conjuntos $\{(x, y) \in \mathbb{H}^2; (x - x_0)^2 + y^2 \leq \rho^2\}$ e $\{(x, y) \in \mathbb{H}^2; (x - x_0)^2 + y^2 \geq \rho^2\}$, donde obtemos diretamente que o terceiro axioma de ordem é verificado para retas do tipo (ii).

3.4. Verificação dos axiomas de medição de segmentos

Para a verificação dos axiomas de medição, começaremos por definir comprimentos de curvas em geral e aplicando essa definição para os segmentos de reta em \mathbb{H}^2 , que são as curvas de menor comprimento que ligam dois pontos dados. Uma vez que as retas do tipo (ii) são limitadas no sentido euclidiano, não podemos usar a distância euclidiana para medi-las. Não usaremos também a distância euclidiana para medir segmentos em retas do tipo (i), pois, relativas a essa distância, as semirretas do tipo $\{(x_0, y) \in \mathbb{H}^2; y \leq y_0\}$ são limitadas. Vejamos uma alternativa adequada.

Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$, com $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, é uma curva suave (no sentido regular do Cálculo), e representando por $x'(t)$ e $y'(t)$ as derivadas de $x(t)$ e $y(t)$, definimos o comprimento hiperbólico de γ por

$$c(\gamma) = \left(\int \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \right).$$

Uma manipulação direta mostra que a definição acima independe da parametrização de γ . Para curvas suaves por partes, definimos o comprimento como a soma dos comprimentos de suas partes. Por exemplo, o segmento de reta que liga os pontos $P = (0, 1)$ e $Q = (0, 2)$ pode ser parametrizado

por $\beta(t) = (0, t)$, com $1 \leq t \leq 2$ e, portanto, seu comprimento vale $c(\beta) = \left(\int \frac{\sqrt{0^2 + 1^2}}{t} dt \right) = \int \frac{1}{t} dt =$

log 2, enquanto o segmento de reta que liga os pontos Q = (0, 2) e R = (0, 3) tem comprimento log(3/2), isto é, Q não é o ponto médio de PR em \mathbb{H}^2 . Tal ponto médio deve ser M = (0, m), com $1 < m < 3$ tal que $\int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \log 3$, isto é, M = (0, $\sqrt{3}$).

Mais geralmente, para A = (x₀, y_A) e B = (x₀, y_B) em \mathbb{H}^2 , com y_A < y_B, uma parametrização para o segmento AB é $\beta(t) = (x_0, t)$, com y_A ≤ t ≤ y_B, donde obtemos que vale d(A, B) = |log(y_B / y_A)|. Assim, podemos afirmar que a medida de um segmento de reta do tipo (i) não depende da abscissa dos pontos envolvidos. O comportamento do logaritmo quando o logaritmando tende a 0 ou a mais infinito garante que, com essa maneira de medir segmentos, retas do tipo (i) são ilimitadas em \mathbb{H}^2 .

Calculemos, agora, a medida de AB quando esse segmento não está contido em uma reta do tipo (i). Se A = (x_A, y_A) e B = (x_B, y_B), com x_A ≠ x_B, vimos que o segmento AB pode ser parametrizado por

$\gamma : [\theta_A, \theta_B] \rightarrow \mathbb{H}^2$, com $\gamma(t) = (x_0 + \rho \cdot \cos t, \rho \cdot \sin t)$, onde $x_0 = \frac{x_A^2 - x_B^2 + y_A^2 - y_B^2}{2(x_A - x_B)}$, esse valor pode ser

encontrado observando-se que o ponto (x₀, 0) deve estar na mediatriz euclidiana do segmento euclidiano de extremidades A e B. O valor de ρ é a distância euclidiana entre (x₀, 0) e A. Temos, assim, que $\gamma'(t) = (-\rho \cdot \sin t, \rho \cdot \cos t)$ e, portanto, o numerador do integrando que define o comprimento de AB vale ρ. Esse comprimento será calculado pelo módulo da integral

$$\int \frac{\rho}{\rho \cdot \sin t} dt = \int \frac{1}{\sin t} dt .$$

Observe aqui que, assim como no caso (i), a medida de segmentos de reta do tipo (ii) também fica invariante se deslocarmos o segmento de reta mantendo as ordenadas de A e B, pois esse movimento não altera os valores de θ_A e θ_B correspondentes. Assim, translações horizontais não alteram medidas de segmentos de reta em \mathbb{H}^2 .

Como $\int \frac{1}{\sin t} dt = \log \left(\frac{1 + \cos t}{\sin t} \right) + C$, obtemos que o comprimento do segmento AB é igual ao

módulo do número $\log \left(\frac{y_B}{y_A} \cdot \frac{\rho + x_A - x_0}{\rho + x_B - x_0} \right)$. Essa fórmula se reduz àquela encontrada para segmentos

de reta do tipo (i) se consideramos x_A = x_B. Com isso, temos como determinar a distância entre dois

pontos quaisquer de \mathbb{H}^2 .

Por exemplo, para os pontos $P = (-1, 1)$ e $Q = (1, 1)$, temos $x_0 = 0$ e $\rho = \sqrt{2}$. Assim, podemos

calcular o comprimento de PQ por $\left(\log \left(\frac{1}{1} \cdot \frac{\sqrt{2} + (-1) - 0}{\sqrt{2} + 1 - 0} \right) \right) = 2 \cdot \log(1 + \sqrt{2})$. Pela observação

sobre translações horizontais, podemos afirmar que, para $A = (3, 1)$ e $B = (5, 1)$, obtidos de P e Q por translação horizontal de duas unidades, vale $d(A, B) = 2 \cdot \log(1 + \sqrt{2})$. A mesma observação sobre o comportamento do logaritmando feito sobre o caráter ilimitado das semirretas do tipo (i) pode ser aplicada no caso (ii).

Com as parametrizações dos dois tipos de segmentos de reta, obtivemos fórmulas para determinar distância entre dois pontos quaisquer de \mathbb{H}^2 , a qual é um número não negativo e uma rápida olhada nas fórmulas confirma que, para pontos distintos, esse número nunca é zero. Portanto, o primeiro axioma de medição de segmentos está verificado. O segundo e terceiro axiomas de medição de segmentos também serão verificados em dois casos.

caso 1: a reta é do tipo (i).

Seja $r = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2; x = x_0\}$. Considere a função $\psi : r \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\psi(x_0, y) = \log y$. Temos que ψ é um sistema de coordenadas para r , pois, para $A = (x_0, y_A)$ e $B = (x_0, y_B)$, vale $|\psi(B) - \psi(A)| = |\log y_B - \log y_A| = d(A, B)$, o que verifica o segundo axioma de medição de segmentos para retas do tipo (i).

Agora, se $A = (x_0, y_A)$, $B = (x_0, y_B)$ e $C = (x_0, y_C)$ são tais que B está entre A e C, e verdade que y_B está entre y_A e y_C e, pelo crescimento da função logarítmica, $\log y_B$ está entre $\log y_A$ e $\log y_C$, o que verifica o terceiro axioma de medição de segmentos para retas do tipo (i).

caso 2: a reta é do tipo (ii).

Seja $r = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2; y = \sqrt{\rho^2 - (x - x_0)^2}\}$ uma reta de \mathbb{H}^2 . Considere a função $\psi : r \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\psi(x, y) = \log((\rho + x - x_0)/y)$. Para $A = (x_A, y_A) \in r$, vale $\psi(A) = \log((\rho + x_A - x_0)/y_A) = \log(\rho/y_A + (x_A - x_0)/y_A) = \log(\csc \theta_A + \cot \theta_A)$, onde $\theta_A = \arccos((x_A - x_0)/\rho)$. Como a função que associa A a θ_A é uma bijeção entre r e $(0, \pi)$ e a função que associa θ ao número $\log(\csc \theta + \cot \theta)$ é uma bijeção entre $(0, \pi)$ e \mathbb{R} , temos que ψ , como composição dessas duas, é uma bijeção entre r e \mathbb{R} . Além

disso, para $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, vale que $|\psi(A) - \psi(B)| = |\log((\rho + x_A - x_0)/y_A) - \log((\rho + x_B - x_0)/y_B)| = \log\left(\frac{y_B}{y_A} \cdot \frac{\rho + x_A - x_0}{\rho + x_B - x_0}\right) = d(A, B)$. Assim, ψ é um sistema de coordenadas para r . Dessa forma, o segundo axioma de medição de segmentos é válido para retas do tipo (ii).

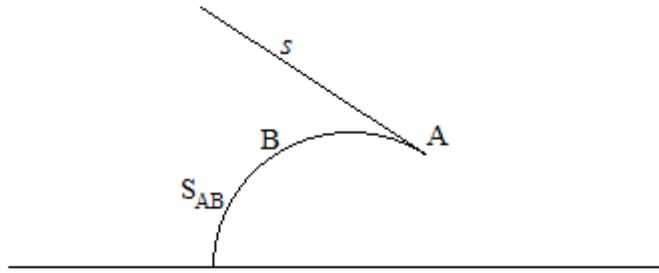
Pela definição de estar entre, se A, B e C são pontos da reta r , é verdade que θ_B está entre θ_A e θ_C . Como a função que associa θ ao número $\log(\csc \theta + \cot \theta)$ é monótona (veja que sua derivada vale $\csc \theta > 0$, para θ entre 0 e π). Portanto, se θ_B está entre θ_A e θ_C , vale que $\psi(B)$ está entre $\psi(A)$ e $\psi(C)$, o que verifica o terceiro axioma de medição de segmentos também para o caso (ii).

Assim, a maneira de calcular distância entre dois pontos dada pelas fórmulas obtidas nessa seção verifica os três axiomas de medição de segmentos em geral. Podemos usar qualquer múltiplo dessa distância e obter resultados análogos, isto é, as fórmulas dadas não são as únicas que colocam em \mathbb{H}^2 uma métrica que tem as propriedades desejadas no capítulo 1.

3.5. Verificação dos axiomas de medição de ângulos

Para a medição de ângulos, observemos inicialmente que duas retas do tipo (i) são sempre paralelas e, portanto, os ângulos em \mathbb{H}^2 são apenas de dois tipos: quando as semirretas envolvidas são do tipo (ii), e quando uma semirreta envolvida é do tipo (i) e outra do tipo (ii).

Seja r uma reta do tipo (ii). Considere $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ pontos distintos de r e θ_A, θ_B como definido anteriormente. A *guia* da semirreta S_{AB} será a semirreta euclidiana com origem em A e com vetor diretor v , onde $v = (-\sin \theta_A, \cos \theta_A)$, se $\theta_A < \theta_B$, e $v = (\sin \theta_A, \cos \theta_A)$, se $\theta_A > \theta_B$. A guia de uma semirreta do tipo (ii) em \mathbb{H}^2 é, dessa maneira, a semirreta euclidiana que é tangente ao círculo euclidiano que contém essa semirreta, cujo ponto de tangência é exatamente a origem da semirreta e cujos pontos são os mais próximos da semirreta dada.

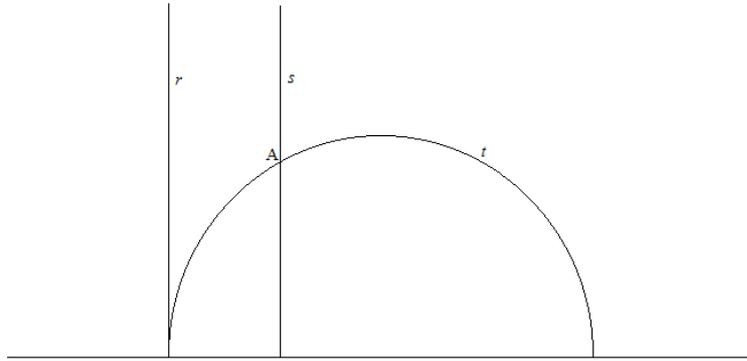


Se r é uma reta do tipo (i), e $AB \subset r$, então a *guia* da semirreta S_{AB} coincide com a semirreta euclidiana de origem em A e que contém AB . A medida de um ângulo em \mathbb{H}^2 é definida como a medida do ângulo euclidiano formado pelas guias das semirretas do ângulo dado. Como cada semirreta possui uma guia, cada ângulo de \mathbb{H}^2 terá uma medida. Essa medida só será zero quando as guias das semirretas coincidirem, isto é, quando as semirretas coincidirem, isto é, quando o ângulo for nulo. Com isso, o primeiro axioma de medição de ângulos fica verificado.

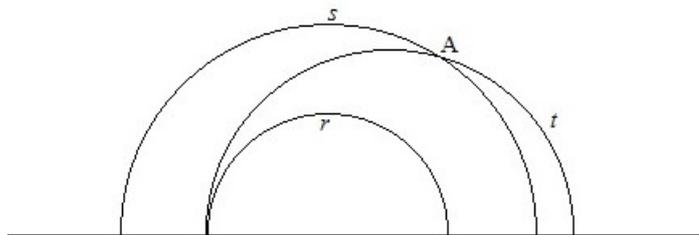
Fixada uma reta r , os pontos P e B em r , e um semiplano com origem em r , podemos associar cada semirreta nesse semiplano e com origem em P ao ângulo euclidiano que sua guia forma com a semirreta S_{PB} . Se consideramos todas essas semirretas e os números de $[0, \pi]$, essa associação é claramente bijetiva e, portanto, é um sistema de coordenadas como o requerido no segundo axioma de medição de ângulos.

3.6. Verificação do axioma das paralelas

Seja $r = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2; x = x_0\}$ uma reta do tipo (i) e $A = (x_A, y_A)$ um ponto tal que $A \notin r$. Nesse caso, vale $x_A \neq x_0$ e, portanto, a reta $s = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2; x = x_A\}$ contém A e não intersecta r . Além disso, a reta $t = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2; y = \sqrt{\rho^2 - (x - x_C)^2}\}$, onde $(x_C, 0)$ é a interseção do eixo das abscissas com a mediatriz euclidiana de A e $(x_0, 0)$ é tal que $A \in t$, e r e t são paralelas. Com isso, temos a verificação do axioma das paralelas do plano hiperbólico para o caso de retas do tipo (i).



Por outro lado, se r é do tipo (ii), temos $r = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2; y = \sqrt{\rho^2 - (x - x_0)^2}\}$ e se $A \notin r$, considere $s = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2; y = \sqrt{w^2 - (x - x_0)^2}\}$, onde w é a distância euclidiana entre $(x_0, 0)$ e A . Nesse caso, s contém A e não intersecta r . Para a reta $t = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2; y = \sqrt{z^2 - (x - x_1)^2}\}$, onde $(x_1, 0)$ é o ponto de encontro do eixo das abscissas com a mediatriz euclidiana entre A e $(x_0 - \rho, 0)$ e z é a distância euclidiana entre A e $(x_1, 0)$, temos que $A \in t$, e r e t são paralelas. Com isso, temos a verificação do axioma das paralelas para retas do tipo (ii), o que encerra a verificação geral e consolida o modelo do plano hiperbólico desenvolvido no capítulo.



No próximo capítulo, retornaremos a alguns resultados desenvolvidos no capítulo 2, consolidando-os à luz do modelo apresentado aqui, e forneceremos outras propriedades do plano hiperbólico.

4. Outros fatos sobre o plano hiperbólico

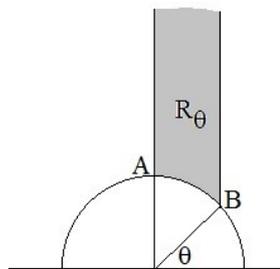
Neste capítulo, usaremos o modelo para o plano hiperbólico descrito no Capítulo 3 para reforçar alguns dos fatos que foram provados no Capítulo 2 e obter novos resultados, dentre os quais destacamos uma fórmula para a área de triângulos e a ideia de triângulos “magros”.

4.1. Área de triângulos no plano hiperbólico

Fixado o número real θ , com $0 < \theta < \pi/2$, considere $R_\theta = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2; 0 \leq x \leq \cos \theta \text{ e } y \geq \sqrt{1-x^2}\}$, a qual consiste da região do plano hiperbólico limitado por uma semirreta S_{AC} , de origem em $A = (0, 1)$, uma semirreta S_{BD} , de origem em $B = (\cos \theta, \text{sen } \theta)$, e pelo segmento AB . Temos que o ângulo CAB é reto, enquanto o ângulo ABD mede θ . A área dessa região, dada a forma de medir segmentos

em \mathbb{H}^2 apresentada no Capítulo 3, pode ser encontrada por $A_\theta = \int \int \frac{1}{y^2} dy dx$. Uma vez que

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ temos } A_\theta = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen(\cos \theta) = \pi/2 - \theta.$$



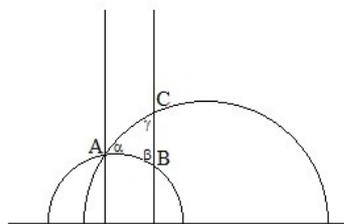
Fixados os números reais α e β , com $0 < \alpha, \beta < \pi/2$, considere, agora, a região $R_{\alpha,\beta} = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2; -\cos \alpha \leq x \leq \cos \beta \text{ e } y \geq \sqrt{1-x^2}\}$. Se considerarmos a semirreta S_{AB} , com $A = (0, 1)$ e $B = (0, 2)$, temos que S_{AB} divide $R_{\alpha,\beta}$ em duas regiões, uma das quais é R_β e a outra tem a mesma área que R_α .

Assim, a área de $R_{\alpha,\beta}$ vale $A_{\alpha,\beta} = R_\alpha + R_\beta = (\pi/2 - \alpha) + (\pi/2 - \beta) = \pi - (\alpha + \beta)$. Podemos ver R_θ como $R_{\pi/2,\theta}$, de modo que, substituindo α por $\pi/2$ nessa última fórmula, obtemos a fórmula a área de R_β .

Se $\beta > \pi/2$ e α tal que $\alpha + \beta < \pi$. Considere A e B os vértices de R_α , com ângulo reto em A , e seja C um ponto entre A e B tal que, sendo D um ponto de mesma abscissa que C e ordenada maior, a semirreta S_{CD} forma com S_{CB} um ângulo de medida β . Temos que a medida de DCA é $\pi - \beta$ e, portanto, é menor que $\pi/2$. Assim, sendo R_α a região do plano hiperbólico limitada por S_{AE} , por AB e por S_{BF} , temos que a região limitada por S_{CD} , por BC e por S_{BF} tem área igual a $A_\alpha - A_{\pi-\beta}$, isto é, vale $\pi/2 - \alpha - (\pi/2 - (\pi - \beta)) = \pi - (\alpha + \beta)$, de modo que a fórmula para $A_{\alpha,\beta}$ vale mesmo que $\beta \geq \pi/2$.

Agora, sejam $A = (1, 0)$, $B = (\cos \beta, \sin \beta)$, com $0 < \beta < \pi/2$ e $C = (\cos \beta, y_C)$, com $y_C > \sin \beta$. Temos que se α , β e γ são as medidas dos ângulos do triângulo ABC nos vértices A , B e C , respectivamente, a área de ABC pode ser calculada por $A_\beta - A_{\pi/2-\alpha,\pi-\gamma}$. Dessa forma, a área do

$$\text{triângulo } ABC \text{ vale } \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \left(\pi - \left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + (\pi - \gamma)\right)\right) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$



Com isso, obtemos que, no plano hiperbólico, os triângulos não podem ter área arbitrariamente grande, tendo essas áreas o número π como cota superior. Além disso, quanto menor for a área do triângulo do plano hiperbólico, mais a soma dos seus ângulos se aproxima de π .

4.2. Círculos

Fixado o ponto $C = (0, 1) \in \mathbb{H}^2$, vimos que a distância de C a qualquer ponto da forma $(0, b)$ é igual a $|\log b|$, donde concluímos que, fixado $R > 0$, os pontos da reta $r_0 = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2; x = 0\}$ cuja distância a C é igual a R são precisamente os pontos $(0, e^R)$ e $(0, e^{-R})$. Se $P = (x, y)$ não é um ponto

de r_0 , temos $x \neq 0$, de onde obtemos que a reta que passa por P e C está contida num círculo euclidiano com centro da forma $(a, 0)$. Sabendo que esse ponto equidista euclidianamente de P e C e, portanto, obtemos $a = (x^2 + y^2 - 1) / 2x$, conforme discutido no Capítulo 3. A distância euclidiana de $(a, 0)$ a $(0, 1)$ é, portanto, $\rho = \sqrt{a^2 + 1}$. Usando a fórmula obtida no Capítulo 3, a distância entre (x, y) e $(1, 0)$ vale $\log\left(\frac{y}{1} \cdot \frac{\rho + 1 - a}{\rho + 0 - a}\right)$, isto é, é igual a $\log\left(y \cdot \frac{\rho + 1 - a}{\rho - a}\right)$. Se consideramos os pontos P cuja distância a $(0, 1)$ é igual a R , teremos um círculo euclidiano de centro $(0, \cosh R)$, que é o ponto médio entre $(0, e^R)$ e $(0, e^{-R})$, e raio igual a $\sinh R$. Dessa forma, círculos no plano hiperbólico são modelados por círculos euclidianos contidos em \mathbb{H}^2 . Essa informação não contradiz o que discutimos no Capítulo 2 sobre inscribibilidade de triângulos no plano hiperbólico, pois, apesar do fato de que por quaisquer três pontos não euclidianamente colineares de \mathbb{H}^2 passa um círculo euclidiano, esse círculo pode não estar totalmente contido no semiplano superior e, portanto, não é um círculo do plano hiperbólico. Além disso, pontos que estão euclidianamente alinhados em \mathbb{H}^2 , mas não possuem a mesma abscissa, não são pontos colineares no plano hiperbólico e, uma vez que não há nenhum círculo euclidiano que os contém, esses pontos também não pertencem a um mesmo círculo. Por exemplo, os pontos $(0, 1)$, $(2, 1)$ e $(3, 1)$ não são colineares e nem pertencem a um mesmo círculo, o mesmo ocorrendo para os pontos $(1, 1)$, $(2, 2)$ e $(3, 3)$.

Assim, no plano hiperbólico, o círculo de centro $(0, 1)$ e raio R pode ser parametrizado por $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{H}^2$, com $\gamma(t) = (a \cdot \cos t, \cosh R + a \cdot \sin t)$, onde $a = \sinh R$. Dessa forma, o comprimento desse círculo pode ser calculado por $\int \frac{a}{\cosh R + a \cdot \sin t} dt = \int \frac{1}{w + \sin t} dt$, onde $w = \coth R$. Essa integral vale $\frac{2\pi}{\sqrt{w^2 - 1}}$. Com isso, obtemos que, no plano hiperbólico, o comprimento de um círculo de raio R vale $2\pi \cdot \sinh R$.

Dessa forma, concluímos que a razão entre o comprimento e o diâmetro de um círculo no plano hiperbólico vale $\pi \frac{\sinh R}{R}$, a qual não é constante. Essa razão fica arbitrariamente grande à medida que o raio do círculo cresce, e se aproxima de π à medida que o raio do círculo tende a 0, de modo que círculos de raio pequeno no plano hiperbólico tem comportamento semelhante aos seus correspondentes do plano euclidiano. Essa fórmula para o comprimento de um círculo, que envolve a função seno hiperbólico, reforça o nome que escolhemos – o plano hiperbólico.

Um cálculo semelhante ao feito na seção anterior nos permite determinar a área de um círculo de raio R no plano hiperbólico, a qual vale $4\pi.\sinh^2(R/2)$. Assim, os círculos do plano hiperbólico podem ter áreas arbitrariamente grandes, mas o mesmo não ocorre com os triângulos. De fato, a área de um triângulo é sempre menor que π e, portanto, para um círculo de raio R , a área de um triângulo que lhe é inscrito ocupa uma fração da área do círculo que fica cada vez menor à medida que R cresce, independente da posição dos vértices do triângulo.

Além disso, como os triângulos do plano hiperbólico não podem ter área muito grande, os círculos que estão inscritos em um triângulo têm raio limitado. Uma vez que a área do círculo que tangencia os lados do triângulo deve ser menor que π , o raio R de um círculo inscrito em um triângulo do plano hiperbólico deve satisfazer $4\pi.\sinh^2(R/2) < \pi$, isto é, $\sinh(R/2) < 1/2$. Dessa forma, círculos que “cabem” dentro de triângulos têm, necessariamente, raio menor que metade de $\operatorname{arcsinh}(1/2)$. Isso sugere que, além de não terem área arbitrariamente grande, os triângulos do plano hiperbólico, embora eventualmente com vértices muito distantes, têm lados que ficam próximos com um certo controle. Isso quer dizer que podemos encontrar um certo número k e, sem nos afastarmos mais que k de dois dos lados de um triângulo, podemos atingir qualquer ponto do outro lado. Essa noção será precisamente estabelecida adiante.

4.3. Curvas equidistantes

Fixada a reta $r = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2; x = 0\}$ e dado um número real $c > 0$, determinaremos quais são os pontos de \mathbb{H}^2 cuja distância a r é igual c . Para tanto, consideremos o ponto $P = (x, y)$ e calculemos a distância entre P e r . Como todos os círculos euclidianos com centro em $(0, 0)$ intersectam r perpendicularmente, temos que o ponto de r mais próximo de P é exatamente aquele obtido da interseção de r com um círculo euclidiano de centro $(0, 0)$ e que passa por P . Assim, a distância entre P e r é a distância entre $P = (x, y)$ e o ponto $Q = (0, \sqrt{x^2 + y^2})$. Usando a fórmula

$\log\left(\frac{y_P \cdot \rho + x_Q - x_0}{y_Q \cdot \rho + x_P - x_0}\right)$, para $x_0 = 0$ e $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, obtemos que $d(P, r)$ é igual ao módulo de

$\log\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}\right) = \log\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}\right)$. Fazendo $d(P, r) = k$, obtemos $\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} = e^k$ ou

$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x} = e^{-k}$, isto é, $e^k(\sqrt{x^2+y^2}+x) = y$ ou $e^k y = \sqrt{x^2+y^2} + x$. Como y e k são números

positivos, essas equações são equivalentes a $y = m_k x$ e $y = -m_k x$, para $m_k = \frac{2e^k}{e^{2k}-1}$. Dessa forma, o conjunto de pontos que equidistam de uma reta dada é um par de semirretas euclidianas com origem em $(0, 0)$ e simétricas em relação a r . Esse conjunto é chamado de *curva equidistante* de r com distância k . Cada uma das semirretas euclidianas que compõem uma curva equidistante é chamada de *ramo* dessa curva. Isso reforça o que discutimos no Capítulo 2, quando demonstramos que esse conjunto não é formado por duas retas no plano hiperbólico. Assim, pontos que pertencem a uma reta euclidiana não horizontal e nem vertical não são colineares e nem pertencem a um mesmo círculo e, nesse caso, pertencem a uma curva equidistante de uma reta.

Se denotarmos por $v_k(r)$ o conjunto de pontos cuja distância a r é k ou menos, isto é, fazendo $v_k(r) = \{P; d(P, r) \leq k\}$, temos que $v_k(r)$ é exatamente a região de \mathbb{H}^2 limitada pelas retas euclidianas de equações $y = m_k x$ e $y = -m_k x$. Dado um círculo euclidiano com centro no eixo das abscissas e que passa por $(0, 0)$, sempre haverá pontos desse círculo, diferentes de $(0, 0)$, que pertencem a $v_k(r)$, independente de k . Além disso, qualquer reta do tipo (i) terá pontos em $v_k(r)$. Assim, no plano hiperbólico, há retas que não intersectam r e cujos pontos podem ser tomados arbitrariamente próximos de r ; isto é, no plano hiperbólico, há retas que são assíntotas de retas. Além disso, para qualquer k , temos que, excetuando-se r , nenhuma reta está contida em $v_k(r)$, isto é, os pontos de qualquer reta $s \neq r$ podem ficar arbitrariamente distantes de r . Se um círculo euclidiano com centro no eixo das abscissas não intersecta r e também não passa por $(0, 0)$, haverá uma semirreta do tipo $y = m_k x$ que lhe é tangente. Assim, duas retas que não se intersectam e não são assíntotas possuem uma menor distância entre elas, a qual é atingida apenas uma vez.

4.4. Horocírculos

No plano hiperbólico, três pontos A, B e C podem pertencer a um mesmo círculo euclidiano ou a uma mesma reta euclidiana. No primeiro caso, se todos os pontos desse círculo tiverem ordenada positiva, vale que A, B e C pertencem a um mesmo círculo. Se o centro desse círculo estiver no eixo das abscissas, os pontos A, B e C são colineares. Se o centro não estiver no eixo das abscissas e esse círculo intersectar esse eixo em dois pontos, temos que A, B e C pertencem a um ramo de curva equidistante da reta que é o círculo euclidiano com diâmetro nos dois pontos de interseção. Resta

observar que tipo de curva é aquela formada se o círculo euclidiano que contém esses pontos é tangente ao eixo das abscissas. No segundo caso, isto é, quando A, B e C são euclidianamente colineares, se a reta euclidiana que os contiver for vertical, temos que A, B e C são colineares. Se essa reta é não vertical e corta o eixo das abscissas, temos que A, B e C pertencem a um ramo da curva equidistante que consiste da reta vertical que passa pelo ponto de interseção. Resta identificar o caso em que a reta euclidiana que contém A, B e C não intersecta o eixo das abscissas.

Seja $P = (x_0, y_0)$ um ponto do plano hiperbólico e considere a reta $r = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2; x = x_0\}$ que contém P. Os círculos que contém P e têm centro $C = (x_0, y_C) \in r$ também passam por $D = (x_0, y_D)$, onde $y_C^2 = y_0 y_D$. Analisemos o que ocorre com esses círculos quando o centro se afasta de P. Há dois casos a serem estudados, dependendo de y_C ser menor ou maior que y_0 .

À medida que y_D tende a 0, os círculos que passam por P e D e têm centro com abscissa x_0 ficam cada vez mais próximos do círculo euclidiano que passa por P e $(x_0, 0)$, isto é, a curva limite de círculos que passam por P, à medida que o centro se distancia de P, nesse caso, não é uma reta e nem é um círculo do plano hiperbólico.

À medida que y_D tende a $+\infty$, os círculos que passam por P e D e têm centro com abscissa x_0 ficam cada vez mais próximos da reta euclidiana que passa por P e é paralela ao eixo das abscissas, isto é, a curva limite de círculos que passam por P à medida que o centro se distancia de P, nesse caso, não é uma reta e nem um círculo do plano hiperbólico.

Nos dois casos, essa curva limite é chamada de *horocírculo* que passa por P. Se observamos o comportamento dos horocírculos quando a reta r for do tipo (ii), veremos que, nos dois casos, ele consiste de um círculo tangente ao eixo das abscissas.

Assim, concluímos que três pontos do plano hiperbólico sempre pertencem a uma mesma reta, ou a um mesmo círculo, ou a um mesmo ramo de curva equidistante, ou a um horocírculo, sem que duas dessas possibilidades ocorra simultaneamente. Além disso, a interseção de duas figuras desses tipos consiste de, no máximo, dois pontos.

No plano hiperbólico, por exemplo, os pontos (0, 1), (0, 2) e (0, 3) são colineares; os pontos (0, 1), (1, 2) e (0, 3) pertencem a um mesmo círculo; os pontos (0, 1), (1, 2) e (2, 3) pertencem a um mesmo ramo de uma curva equidistante; e os pontos (0, 1), (1, 1) e (2, 1) pertencem a um mesmo horocírculo.

4.5. Triângulos ideais e triângulos magros

Os pontos do eixo das abscissas não pertencem ao plano hiperbólico, mas, apesar disso, dados dois pontos $A = (x_A, 0)$ e $B = (x_B, 0)$, existe um único círculo euclidiano com centro no eixo das abscissas e que contém A e B . O mesmo ocorre se $A = (x_A, 0)$ e $B = (x_B, y_B)$, com $y_A \neq y_B$. Se $A = (x_A, 0)$ e $B = (x_A, y_B)$ então há uma única reta euclidiana vertical que passa por A e B . Assim, se incluirmos os pontos com abscissa 0 e mantivermos as retas do modelo, o novo conjunto satisfaz os axiomas de incidência. Nesse caso, retas do tipo (ii) possuem extremidades, os quais são chamados de *pontos ideais* do plano hiperbólico. Para que as retas do tipo (i) possuam também extremidades, acrescentaremos um ponto ideal I_∞ , com a propriedade que todas as retas do tipo (i) passam por I_∞ . Com esse acréscimo, os axiomas de incidência valem, ainda que os pontos envolvidos sejam ideais.

Se ampliarmos a definição de guia de uma semirreta também para o caso em que ela tem origem num ponto ideal, a guia de qualquer semirreta é uma semirreta vertical e, portanto, o ângulo que duas retas que compartilham uma extremidade formam é igual a 0. Assim, os triângulos com três vértices ideais são conjunto de três retas que compartilham, duas a duas, uma extremidade. Portanto, os triângulos com três vértices ideais têm soma dos ângulos igual a 0 e sua área, considerando o que fizemos na primeira seção, é igual a π .

Sejam $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, e considere r e s as retas com extremidades em A e I_∞ , e B e I_∞ , respectivamente. Para cada número real k , vale que as curvas equidistantes de r e s a uma distância k se encontram em um ponto de abscissa $1/2$ e ordenada $m_k/2$. Para que a união de $v_k(r)$ com $v_k(s)$ contenha a reta com extremidades A e B , é necessário e suficiente que $m_k/2 = 1/2$, isto é, $m_k = 1$.

Assim, temos a equação $\frac{2e^k}{e^{2k}-1} = 1$, cuja solução positiva é $k = \log(1 + \sqrt{2})$.

Assim, para um triângulo de vértices ideais no plano hiperbólico, se tomarmos vizinhanças de dois dos lados com distância igual a $\log(1 + \sqrt{2})$, o outro lado estará contido na união dessas vizinhanças. Se considerarmos triângulos propriamente ditos, o mesmo ocorre.

Dado o número real $\delta > 0$, o triângulo ABC é dito ser δ -magro se, tomados os pontos que distam δ

ou menos de dois dos lados de ABC , o outro lado fica automaticamente incluído. No plano hiperbólico, portanto, para qualquer número fixado $\delta \geq \log(1 + \sqrt{2})$, todo triângulo é δ -magro. No plano euclidiano, para qualquer $\delta > 0$, existe um triângulo que não é δ -magro.

Considerações Finais

Os fatos aqui demonstrados sobre o plano hiperbólico naturalmente não encerram toda a sua abrangência. De fato, no plano hiperbólico há equivalentes ao Teorema de Tales, com um feixe de horocírculos paralelos fazendo as vezes de feixe de retas, ao Teorema de Pitágoras, à Trigonometria e podemos fazer equivalentes de praticamente tudo que estudamos no plano euclidiano. Além disso, assim como há a Geometria Euclidiana Espacial, podemos fazer ajustes nos axiomas para trabalhar com o espaço hiperbólico tridimensional, com as noções de horoesferas e tetraedros ideais, por exemplo. Mais ainda, podemos fazer modelos para \mathbb{H}^n dentro de \mathbb{R}^n , para qualquer n natural, gerando uma série de exemplos.

A ideia desse trabalho foi fornecer uma introdução aos espaços hiperbólicos de forma precisa, mas com o mínimo de tecnicidade, apresentando as principais ideias, que podem ser aprofundadas com mais tecnicidade, embora alguns conhecimentos específicos de Geometria Diferencial sejam necessários.

Referências Bibliográficas

BARBOSA, João Lucas Marques *Geometria Euclidiana Plana* Editora SBM

BARBOSA, João Lucas Marques *Geometria Hiperbólica* Editora SBM

BONAHON, Francis *Low Dimensional Geometry* American Mathematical Society

THURSTON, William *Three-Dimensional Geometry and Topology* vol.1 Princeton University Press