UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

CLÁUDIO BATISTA LEME

O USO DO *GEOGEBRA* NO ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL PARA ALUNOS DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

PONTA GROSSA
2017

CLÁUDIO BATISTA LEME

O USO DO *GEOGEBRA* NO ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL PARA ALUNOS DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, no Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Setor de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientadora: Profa. Dra. Fabiane de Oliveira

PONTA GROSSA
2017

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

Leme, Cláudio Batista

L551 O uso do Geogebra no ensino da Geometria Espacial para alunos do 2° ano do Ensino Médio/ Cláudio Batista Leme. Ponta Grossa, 2017.
125f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Orientadora: Profª Drª Fabiane de Oliveira.

1.Geogebra. 2.Geometria espacial. 3.Ensino de Matemática. I.Oliveira, Fabiane de. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. T.

CDD: 516

TERMO DE APROVAÇÃO

Cláudio Batista Leme

"O USO DO GEOGEBRA NO ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL PARA OS ALUNOS DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO"

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Fabiane de Oliveira

Orientadora: Prof. Dra. Fabiane de Oliveira
Departamento de Matemática e Estatística, UEPG/PR

Prof. Dra. Nilcéia Aparecida Maciel Pinheiro
Departamento de Matemática, UTFPR/PR

Grossi

Prof. Dra. Luciane Grossi
Departamento de Matemática e Estatística, UEPG/PR

Ponta Grossa, 29 de Novembro de 2017.

Dedico este trabalho a minha querida esposa Josilene, sempre me incentivando para que eu nunca desistisse e alegrando-se com cada uma de minhas vitórias.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus por ter conseguido chegar até aqui.

Agradeço aos meus Pais João Batista Leme (*in memoriam*) e Anna Maria de Jesus Leme com todo meu amor e gratidão pela formação do meu caráter e por me incentivarem nos meus estudos.

As minhas filhas Anna Clara e Maria Julia que são a razão de tantas batalhas.

A minha esposa Josilene que sempre me apoiou nas horas difíceis, pela paciência da minha ausência se dedicando a este trabalho.

A minha orientadora Profa. Dra. Fabiane de Oliveira pela sua dedicação, paciência e contribuição neste trabalho.

A todos os professores do Profmat da UEPG, pelo ensino e dedicação.

Aos meus colegas mestrandos da UEPG pelo apoio e pela amizade.

As turmas do 2º Ano do Ensino Médio que participaram deste trabalho.

Agradeço a SBM pela realização deste estudo, junto a CAPES pelo apoio financeiro recebido durante o curso.

A todos que de certa formam contribuíram pela minha formação.

“A verdadeira medida de um homem não se vê na forma como se comporta em momentos de conforto e convivência, mas em como se mantém em tempos de controvérsia e desafio”.

Martin Luther King

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar estratégias didáticas por meio do *Geogebra,* para tornar o ensino da Geometria Espacial mais perceptível e eficaz aos alunos. As formas geométricas espaciais como poliedros e corpos redondos estão presentes em todos os lugares, como prédios, pontes, utensílios domésticos e em diversas formas de embalagens de alimentos. Assim, se faz necessário que os alunos entendam conceitos e propriedades matemáticas de algumas dessas formas. Para isso é preciso que se desenvolva em nossos alunos o interesse, o estímulo e a curiosidade, com o propósito de que possam reconhecer a aplicação da Geometria em seu dia a dia. Assim, buscamos com este trabalho contribuir para o ensino e aprendizagem da Geometria Espacial, de forma a utilizar os recursos tecnológicos disponíveis, para despertar o interesse dos alunos pelo conteúdo, de modo que as aulas se tornem mais atraentes a prazerosas. Para a elaboração deste trabalho procuramos realizar uma pesquisa bibliográfica sobre o tema Geometria e o uso da tecnologia na escola. Esta pesquisa optou pela utilização do *software Geogebra* como ferramenta de apoio ao ensino da Matemática, em especial o conteúdo Geometria Espacial. A pesquisa foi realizada com duas turmas de 2º ano do Ensino Médio. Apenas uma das turmas utilizou o *Geogebra* durante as aulas. No intuito de avaliar a contribuição do uso da tecnologia e a implantação deste projeto em sala de aula, no final das atividades foi aplicada uma avaliação e comparados os resultados de ambas as turmas que participaram desta pesquisa. Observamos que: (1) As aulas com o uso do *Geogebra* proporcionaram um ambiente mais agradável e prazeroso. (2) A construção, visualização e manipulação das figuras geométricas espaciais por meio do *Geogebra* foi importante para sanar dúvidas e questões que nas aulas expositivas com quadro e giz não foram possíveis responder.

Palavras-chave: *Geogebra*, Geometria Espacial, Ensino de Matemática.

ABSTRACT

The present work has as the objective of presenting didactic strategies using *Geogebra,* to turn the Space Geometry teaching more perceivable and efficient in relation to the pupils. Space geometric forms as polyhedrons and round bodies are presented in all places, like buildings, bridges, domestic utensils, and in diverse forms of food packaging. Thus, it is necessary that the pupils understand concepts and mathematical properties of some of these forms. For this, it is necessary that our pupils develop the interest, the stimulation, and the curiosity, with the intention of recognizing the Geometry application in its day the day. Thus, we search, with this work, to contribute for the Space Geometry teaching, and learning, with the intention of using the available technological resources, to awake the pupils' interest for the content, in a way that the lessons become more attractive and pleasant. For the elaboration of this work, we looked to carry through a bibliographical research on Geometry and the technological use in the school. This research opted for the use of *the software Geogebra* as a support tool to the Mathematics teaching, in special the Space Geometry content. The research was carried out with two 2º year Middle School groups. But only one of the groups used *Geogebra* during the lessons. In the end of the activities an evaluation was applied and the results of both groups, who had participated of this research, compared, with the intention to evaluate the contribution of the use of the technology to the implantation of this project in the classroom. We observe that: (1) The lessons with the use of *Geogebra* had provided a more pleasant and pleasant environment. (2) The construction, visualization, and manipulation of space geometric figures using *Geogebra* were important to answer doubts and questions that the expositive lessons, with picture and chalk, had not been able to answer.

Keywords: *Geogebra*, Space Geometry, Mathematics Teaching.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

AAP	Avaliação de Aprendizagem e Processo
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
GD	Geometria Dinâmica
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
LDB	Lei de Diretrizes e Bases
LDBEN	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCN+	Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudante
SARESP	Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O uso de computadores nas escolas está cada vez mais frequente como ferramenta complementar ao ensino. Atualmente os professores se vêm na necessidade de se adaptarem a essa nova realidade. É comum o aumento do número de professores em cursos e palestras, buscando novos conhecimentos ou maneiras de realizar algo novo, tornando suas aulas mais atraentes e prazerosas aos alunos.

O uso da tecnologia na educação vem crescendo e desenvolvendo-se constantemente. De fato, na Matemática são diversos *softwares* desenvolvidos com o objetivo de auxiliar os professores em suas aulas.

Embora exista muita resistência por parte de alguns professores com o uso da tecnologia em sala de aula é necessário que os docentes se adaptem as novas tendências tecnológicas, tornando as suas aulas mais interessantes e atrativas. Isso porque os alunos estão cada vez mais autônomos e críticos, estando inserida a era digital na educação faz-se necessário inovar para chamar a atenção dos mesmos.

Nesse sentido podemos encontrar vários autores que têm utilizado a tecnologia para trabalhar com conceitos matemáticos. Em seguida iremos apontar tais trabalhos.

Machado (2010) aplicou uma sequência didática em uma escola pública, para alunos do 2º ano do Ensino Médio, envolvendo os *softwares Geogebra* e *Sketchup.* O objetivo era de investigar quais as contribuições que um projeto de ensino desenvolvido com o uso da tecnologia pode trazer para o ensino e aprendizagem da Geometria Espacial. Neste trabalho os alunos puderam relacionar a Geometria Espacial a situações do cotidiano como, por exemplo, a construção civil, já que o *software Sketchup* possibilita construir modelos em 3D no computador.

Souza (2014) sugere o uso do *Geogebra* como recurso facilitador para o estudo da Geometria Espacial, no propósito de minimizar as dificuldades de visualização geométrica, propondo atividades de construções de figuras através do uso do livro didático e a utilização do computador*.* A autora relata ainda que as construções feitas com o *software* levou um quarto de tempo das aulas para serem realizadas, com relação às construções feitas em sala. Cita também que o uso do *Geogebra* facilita e acelera o processo de ensino e aprendizagem fazendo despertar o interesse nos alunos pela Geometria Espacial.

Pereira (2012) analisou em uma pesquisa qualitativa, quais as relações professor e alunos em um ambiente colaborativo de Geometria para o Ensino Fundamental e Médio. Destacou que as tarefas executadas pelo *Geogebra* foram primordiais para a consolidação de alguns conceitos geométricos. Destacou ainda que o uso do *software* corroborou um ambiente de discussões e interatividade entre os grupos de alunos e professor.

De acordo com Carvalho et al. (2008. p. 8), o ensino com o uso da tecnologia não restringe apenas nas mudanças de atitudes dos alunos. Também constituem no aperfeiçoamento por parte dos professores, pois é necessário um olhar mais crítico na preparação das atividades, para que os novos recursos tecnológicos em sala de aula surtam efeito. O uso da tecnologia traz a possibilidade da interação entre alunos e professores na construção do conhecimento e proporcionam atividades de caráter investigativo, características presentes nos trabalhos em equipe. Ainda segundo o autor, o uso da tecnologia na educação traz a possibilidade de resolver problemas contextualizados de Matemática, introduzindo técnicas de modelagem e habilidades na resolução de problemas.

Segundo Nunes et al. (2005 p. 9-12) os processos de ensino e aprendizagem envolvem simultaneamente professor e aluno. Considerando apenas os processos de aprendizagem dos alunos, os professores também focarão no ensino de seus alunos, esquecendo que eles próprios precisam aprender enquanto ensinam. Segundo a autora, o uso do computador para resolução de problemas é um processo que precisa ser analisado, avaliando as vantagens e desvantagens com o seu uso. Pode ser vantajoso introduzir o uso de computadores no ensino de alguns conceitos matemáticos, enquanto o trabalho com outros conceitos pode ser mais eficaz se o computador for introduzido posteriormente.

Tais questões relacionadas à tecnologia em sala de aula, ainda não foram resolvidas. A quem condene o seu uso temendo que elas prejudiquem o aprendizado e o raciocínio do aluno, outros propõem o seu uso já na escola primária. O professor como mediador do conhecimento precisa estar experimentando e avaliando as novas propostas metodológicas existentes. Ainda segundo Nunes et al. (2005), o professor que não se ocupa de sua própria aprendizagem dificilmente será um professor crítico.

Lima (1999) *apud* Nunes et al. (2005 p. 12) resume da seguinte forma:

> Quem usa a mente como instrumento de trabalho não pode deixar de cultivar, diariamente a inteligência. Os professores, por exemplo, precisam atualizar-

> se, permanentemente acompanhando o desenvolvimento da ciência e da tecnologia (os mestres são os intermediários entre as pesquisas, descobertas e inovações e as novas gerações), (LIMA, 1999, p. 5).

Sabemos que as dificuldades são enormes, pois muitas escolas não possuem número suficiente de computadores ou mesmo nem possuem sala de informática. Ignorar o uso da tecnologia em sala de aula é um retrocesso no ensino e na aprendizagem na educação atual, pois esses recursos estão presentes na vida dos alunos e em diversos setores da sociedade, inclusive na educação.

O uso do computador na educação pode provocar mudanças significativas no processo de ensino e aprendizagem. Conforme Fainguelernt (1999 p. 12-15) o uso do computador em sala de aula torna o ensino excitante e diferente, criando desafios, novas ideias, proporcionando novos caminhos para a construção e o desenvolvimento do pensamento. Para a autora o uso do computador na escola tornou-se uma exigência da atual realidade, a nova escola precisa ser atraente, ter qualidade, ser atualizada, a fim de proporcionar um ambiente de interação e desenvolvimento da criatividade e do pensamento crítico nos alunos e professores.

Para muitos pesquisadores e educadores, como citados anteriormente o uso de *softwares* no ensino da Geometria proporciona para o estudante aprender de maneira mais significativa os conceitos geométricos na medida em que interage com o seu objeto de estudo. Nesse contexto o uso da Geometria Dinâmica (GD) nas construções geométricas permite que o estudante possa manipular construções na tela do computador sem alterar suas características originais.

De acordo com os PCN+ (2002), o ensino da Geometria para o Ensino Médio deve ser tratado em quatro unidades temáticas: Geometria Plana, Geometria Espacial, Métrica e Geometria Analítica. Com base nesse contexto o roteiro de atividades que serão apresentadas neste trabalho foi desenvolvido por meio de uma proposta didática sobre Geometria Espacial, de acordo com as atividades sugeridas no Caderno do Aluno, volume 2, em consonância com o Currículo do Estado de São Paulo para os alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Neste trabalho buscamos abordar o ensino da Geometria com o uso do *software Geogebra* com o objetivo de auxiliar professores e alunos no ensino da Geometria Espacial. Utilizamos o *Geogebra* por ser um *software* livre, dinâmico e pela interface de fácil manipulação.

Analisando a literatura estudada verificamos a importância da elaboração de projetos com o uso de *softwares* para o ensino e aprendizagem da Geometria. Este trabalho é norteado pelo seguinte questionamento:

Quais são as contribuições que o uso do *software Geogebra* proporciona no ensino da Geometria Espacial para alunos do 2º ano do Ensino Médio?

1.1 JUSTIFICATIVA

Como professor de escola pública desde 2010, logo após a minha formação em Licenciatura Plena em Matemática, percebi o quanto era difícil lecionar a disciplina de Matemática. Lecionando essa disciplina sempre no Ensino Médio, constatei que os educandos apresentam dificuldades nas realizações das atividades envolvendo conteúdos de Geometria básica, chegando ao Ensino Médio sem o conhecimento de conteúdos geométricos como perímetro e área de figuras planas.

Diante desta constatação, a questão que procuro responder é: quais são as contribuições que o *software Geogebra* poderá trazer para o ensino da Geometria Espacial para alunos do 2º Ano do Ensino Médio?

Nesse contexto busquei elaborar um trabalho de forma a oferecer subsídios para aprender conteúdos geométricos de forma dinâmica com o uso do *software Geogebra*.

É do conhecimento de todos que vários estudantes, ao longo de sua vida escolar desenvolvem certa aversão ao ensino da Matemática, em especial ao ensino da Geometria. Por se tratar de um conteúdo de difícil compreensão, envolvendo várias figuras e fórmulas, que são utilizadas e necessárias no conteúdo dos anos subsequentes, causando o abandono por parte de muitos estudantes e em alguns casos por professores com dificuldades de ensinar tal conteúdo.

Lorenzato (1995) ressalta que o abandono da Geometria tem causa na formação dos professores por não terem conhecimentos geométricos suficientes para trabalhar os conteúdos em sala de aula e a exagerada importância que se dá ao livro didático como referencial teórico. Muitas vezes a Geometria é apresentada na última parte dos livros didáticos, deixada para ser trabalhada no final do ano letivo, causando assim seu abandono por muitos professores. Ainda segundo o autor, o início do abandono do ensino da Geometria foi no período do Movimento da Matemática

Moderna (MMM), antes de sua chegada ao Brasil o ensino geométrico era lógico-dedutivo, com demonstrações e pouco atrativo aos alunos. Após a chegada do MMM ao Brasil e a implantação de algebrização da Geometria, não se conseguiu obter resultados favoráveis no ensino, mas sim, causou a eliminação do modelo anterior, criando uma lacuna nas práticas pedagógicas, que perduram até hoje.

De fato, a Matemática no Brasil não tem sido muito atrativa para os alunos nos últimos anos, segundo os resultados das avaliações nacionais, tem mostrado a grave situação do ensino da Matemática no Brasil. De acordo com os resultados do PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes) realizado em 2015, o Brasil ocupou a 66º posição em Matemática dos 70 países analisados.

Ainda segundo os resultados do PISA (2015), 70,25% dos estudantes avaliados estão abaixo do nível I (básico) de proficiência em Matemática, em uma escala de I a VI. Nessa avaliação, participaram da amostra 23.141 estudantes de 15 anos, de 841 escolas em todo o território nacional.

Diante desses resultados, é necessário melhorar o ensino da Matemática na educação básica. De acordo com os PCNs (1998, p. 15), a Matemática desempenha papel decisivo, como instrumento para a compreensão do mundo em sua volta, como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade e a capacidade de resolver problemas.

Ainda segundo os PCNs, (1998, p. 43-44) o uso da tecnologia permite novas estratégias na resolução de problemas, possibilitando o desenvolvimento nos alunos, permitindo uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade Matemática. Além disso, o uso do computador nas escolas melhora as relações professor-aluno, marcado por uma maior proximidade.

Nesse contexto, o uso do *software Geogebra* pode ser visto como uma ferramenta auxiliar no processo ensino e aprendizagem da Matemática, em especial a Geometria Espacial.

Para Carvalho et al. (2008 p. 30-31) a Geometria ensinada com o uso de *softwares*, possibilita para o aprendiz descobertas de propriedades geométricas muitas vezes difíceis de perceber com o auxílio de régua e compasso. O uso da Geometria Dinâmica (GD) possibilita a interatividade com o objeto construído, pode-se mover algum ponto inicial e o programa redesenha de modo a preservar suas relações. Ainda para o autor a grande novidade trazida pela GD é agilizar o exame de uma construção em diferentes parâmetros, permitindo que isso seja feito de modo interativo e com uma boa resposta gráfica.

Dessa forma, buscamos que os alunos, por meio do uso do *software Geogebra*, sejam capazes de criar, construir e analisar as principais propriedades das figuras geométricas espaciais, relacionando-as com o mundo real. Para isso foram traçados os seguintes objetivos.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo deste trabalho tem por finalidade apresentar estratégias didáticas, com o uso do *software* de Geometria Dinâmica *Geogebra*, para tornar o ensino da Geometria Espacial mais perceptível e eficaz aos alunos do 2º ano do Ensino Médio. Dessa forma o uso do *software* é mais uma ferramenta no ensino aprendizagem da Matemática em especial a Geometria Espacial.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Analisar o interesse e a motivação dos alunos quanto ao uso do *software* para a realização das atividades.
- Verificar as dificuldades encontradas quanto ao uso do *software* com relação aos conceitos geométricos abordados nas atividades.
- Incentivar o uso do computador como ferramenta auxiliar no processo de ensino e aprendizagem.
- Construir os sólidos geométricos e realizar suas planificações quando possível.
- Despertar o interesse pela Geometria através do uso do *software*, para que os mesmos continuem a utilizar o *Geogebra* nas atividades geométricas posteriores, como ferramenta de auxilio no ensino e aprendizagem.
- Utilizar de forma simples o uso da tecnologia no dia a dia no ensino da Geometria, para que os leitores interessados no uso dessas novas ferramentas possam apropriar-se deste trabalho e as ideias apresentadas.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho foi estruturado em oito capítulos, sendo introdução o primeiro capítulo. O segundo capítulo faz um breve relato do contexto histórico da Geometria, desde a época dos egípcios até a os dias atuais, com relevância para o ensino da Geometria no Brasil. Passando por uma análise das principais dificuldades e do abandono da Geometria nas últimas décadas. Finalizamos o capítulo com as recomendações do PCN+ do ensino da Geometria para alunos do Ensino Médio.

No terceiro capítulo foram tratados os conteúdos abordados referentes às temáticas de áreas de alguns polígonos e círculo e conceitos de alguns poliedros e corpos redondos, seguindo as sugestões do currículo do Estado de São Paulo e dos PCNs.

No quarto capítulo apresentamos a plataforma *Geogebra*, onde apresentamos uma pequena nota histórica de como surgiu e quem foi seu criador. Mostramos as funções de cada ícone e suas principais ferramentas para construção de algumas figuras planas e espaciais.

No quinto capítulo são tratados os métodos e procedimentos, assim como as estratégias de pesquisa, o local, a cidade, os participantes e os instrumentos de coleta de dados.

No sexto capítulo são sugeridas e aplicadas às atividades referentes a alguns sólidos geométricos, juntamente com o uso do *software Geogebra* e questões pertinentes ao conteúdo de cada atividade.

No sétimo capítulo transcrevemos os relatos que ocorreram durante a aplicação das atividades em laboratório, bem como o relato da experiência em cada atividade proposta. Também neste capítulo são abordados alguns resultados quantitativos das atividades, embora, este trabalho seja de caráter qualitativo, pois não buscamos quantificar resultados e sim propor uma abordagem para o ensino da Geometria Espacial.

Finalizamos o trabalho no oitavo capítulo, com a análise da Avaliação Bimestral e fazemos uma comparação entre as turmas participantes, considerando a evolução de cada uma e por fim, concluímos o trabalho e sugerimos propostas para outras pesquisas.

2 CONTEXTO HISTÓRICO E O ENSINO DA GEOMETRIA

Este capítulo apresenta um breve relato da História da Matemática desde a época egípcia até os dias atuais, com foco na Geometria e suas contribuições. Relatamos também um pouco da educação no Brasil desde o seu descobrimento e atual condição do ensino da Geometria. Procuramos apresentar algumas descobertas históricas relacionadas à Geometria.

Esperamos que este capítulo desperte interesse por parte do leitor pela História da Matemática, e que o mesmo aprofunde mais para que a História da Matemática não se perca e seja transmitida em sala de aula. Vimos que os conceitos históricos têm uma fundamental importância para despertar o interesse por parte do aluno no ensino da Matemática e especialmente o estudo da Geometria.

2.1 ORIGEM DA GEOMETRIA

Determinar a origem do conhecimento geométrico é um tanto delicado. Os primeiros registros que podem ser considerados como um tipo de escrita foram datados aproximadamente há 3.000 anos a. C. e eram compostos de tábuas de argila cozida, produzidas pelos babilônios, encontradas na Mesopotâmia onde se situa o Iraque. Os egípcios registravam em pedras e papiros. As principais fontes de informações da Geometria Egípcia são os, papiros de Rhind (1650 a. C.) e Moscou (1850 a. C.). Os hindus e chineses registravam em entrecascas de árvores e bambus, mas devido à fragilidade dos materiais, a maior parte dos conhecimentos geométricos é de grande parte dos egípcios e dos babilônios (EVES, 1994).

A Geometria como área da Matemática surgiu para atender as necessidades da época. Os primeiros conceitos geométricos surgiram de forma experimental dos povos antigos, como a necessidade de demarcação de terras, a construção de moradias e até mesmo as construções das grandes pirâmides (PAVANELLO, 1989).

Segundo Eves (1994), as primeiras conclusões feitas pelo homem em relação à Geometria passaram a ser registradas a partir do desenvolvimento da escrita, tendo origem das observações naturais da capacidade humana de reconhecer aspectos físicos e comparar formas e tamanhos. A noção de distância foi, sem dúvida, um dos primeiros conceitos geométricos a serem desenvolvidos. A necessidade de delimitar terras levou a noção de figuras geométricas simples, como, retângulos, quadrados e triângulos. Outros conceitos geométricos, como as noções de vertical, paralela e perpendicular, surgiram por meio da observação de construções de muros e moradias, as noções de círculos e simetria surgiram por meio das observações do contorno do sol e de flores.

2.2 A GEOMETRIA EGÍPCIA

Os conhecimentos que temos da Matemática egípcia provêm essencialmente de dois textos escritos em papiro, o papiro de Rhind que data aproximadamente 1650 a. C. foi copiado por Ahmes, de um papiro ainda mais antigo, o papiro de Moscou datado de 1850 a. C. A Figura 2.1 mostra o papiro de Rhind escrito em hierático da direita para esquerda, o papiro de Rhind possui 32 cm de largura e 513 cm de comprimento, foi comprado em 1858 pelo antiquário escocês Alexander Henry Rhind numa cidade a beira do Nilo. Também conhecido como Papiro Ahmes em honra ao escriba que o copiou, o papiro de Rhind contém uma série de tabelas e 84 problemas envolvendo Sistemas de Numeração, Álgebra e Geometria e, com destaque para os cálculos do volume do cilindro e do paralelepípedo, muito utilizados na época para o armazenamento de cerais. Atualmente o papiro de Rhind encontra-se no Museu Britânico (BARASUOL, 2006).

Figura 2.1: Papiro de Rhind
Fonte: http://www.matematica.br/historia/prhind.html

Ainda segundo Barasuol (2006), o papiro de Moscou foi comprado no Egito em 1893 pelo egiptólogo Vladimir Golenishchev, por isso, ficou conhecido também como papiro de Golenishchev, quando em 1917, foi comprado pelo Museu de Belas Artes de Moscou. Esse papiro possui quase o comprimento do papiro de Rhind, porém, com apenas um quarto da largura. Dos vinte e cinco problemas, quase todos da vida cotidiana, e não diferentes dos exemplos do papiro de Rhind, destacamos dois exemplos em especial, um exercício de área de uma superfície curva, acredita-se que seja de um hemisfério e o volume do tronco de pirâmide de base quadrada.

A Figura 2.2 mostra a reprodução do problema 14 do papiro de Moscou, o volume de um tronco de pirâmide quadrada, com a transcrição hieroglífica.

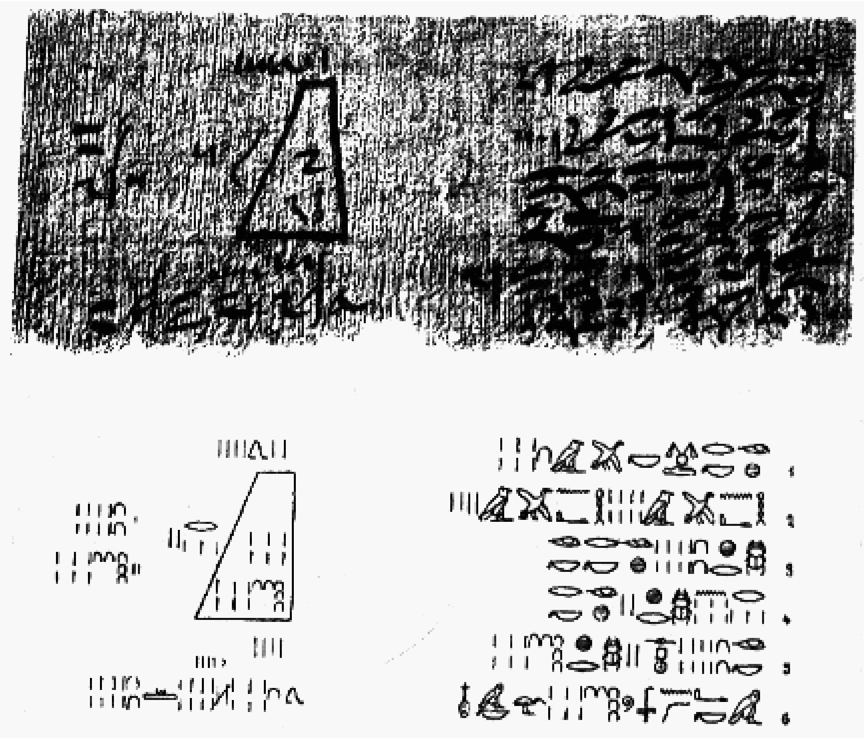


Figura 2.2: Papiro de Moscou
Fonte: http://www.matematica.br/historia/pmoscou.html

Além dos conhecimentos matemáticos, os egípcios passaram a se interessar pela Astronomia, observando que as inundações anuais do Nilo, ocorriam sempre que a estrela Sirius se levantava ao leste, logo antes do Sol. Observando que esses fenômenos ocorriam a cada 365 dias, estabelecendo assim, um bom calendário solar de doze meses de trinta dias cada e mais cinco dias de festa.

Na Geometria, os egípcios calculavam as áreas de figuras geométricas, através da decomposição e composição em triângulos. O problema 51 do papiro de Rhind mostra que a área de um triângulo isósceles era calculada tomando-se a metade de sua base e multiplicando pela sua altura. Ahmes justifica que a área de um triângulo isósceles pode ser pensado como dois triângulos retângulos, dessa forma acreditava-se que os egípcios tinham conhecimento do Teorema de Pitágoras, porém não há registros nos papiros. O método egípcio para o cálculo do círculo foi um dos maiores sucessos da época, o escriba Ahmes assume que, um círculo de nove unidades, tem a mesma área de um quadrado de oito unidades. Ou seja, Ahmes atribuiu 3,16 para o valor de π, um valor bem aceitável para época. Esses conhecimentos matemáticos e geométricos foram determinantes nas obras arquitetônicas dos egípcios, como as construções das grandes pirâmides (BOYER, 1974).

2.3 A GEOMETRIA NA GRÉCIA

Os gregos foram os primeiros a definir que os problemas geométricos deveriam ser dedutivos. Transformaram a Geometria empírica dos antigos egípcios e babilônios, na Geometria que poderíamos chamar de sistemática ou demonstrativa. A Geometria grega parece ter começado com Tales de Mileto, na primeira metade do século VI a. C., considerado um dos sete sábios da antiguidade. Tales residiu certo tempo no Egito e de volta a Grécia trouxe a Geometria e começou a aplicar procedimentos dedutivos da filosofia grega. Pela primeira vez, a Geometria passou a ser baseada em raciocínio lógico e não em intuição e experimentação (EVES, 1994).

Umas das contribuições de Tales para o ensino da Geometria é usada até hoje nas escolas, trata-se da semelhança de triângulos. Segundo Mlodinow (2008) em uma de suas peregrinações para o Egito, Tales calculou a altura de uma das pirâmides, através da razão entre a sombra da altura e um de seus lados e a razão de sua própria altura e sua própria sombra. Tales afirmava que, na natureza tudo poderia ser explicado pela observação e raciocínio.

A Matemática abstrata, iniciada por Tales é continuada posteriormente pelos pitagóricos, assim eram chamados os discípulos de Pitágoras. Pitágoras de Samos como era conhecido, era profeta e místico, nasceu por volta de 572 a. C. na ilha de Samos, não muito distante de Mileto. Existem alguns relatos que afirmam que Pitágoras foi discípulo de Tales, mas isso é pouco provável ter acontecido devido à diferença de idade entre eles de meio século. Também influenciado pela Matemática Egípcia, Pitágoras fez várias peregrinações pelo Egito, absorveu não só informações matemáticas, mas também astronômicas e religiosas. Ao retornar para a Grécia, estabeleceu-se em Crotona, cidade grega na costa sudoeste do que agora é Itália. Lá ele fundou uma sociedade que cultivava a purificação do espirito, com bases matemáticas e filosóficas cujo símbolo era o pentagrama e seu lema "Tudo é Número" (BOYER, 1974).

A sociedade pitagórica produziu durante cerca de duzentos anos, uma grande quantidade de Matemática sólida. Em Geometria desenvolveram várias propriedades, entre elas, retas paralelas, a soma dos ângulos de um triângulo e a incomensurabilidade do lado e da diagonal de um quadrado, de fato, foram muitas as contribuições dos pitagóricos, entre elas, o famoso Teorema de Pitágoras, esse nome é em homenagem ao mestre.

Pouco depois dos pitagóricos, Platão (350 a. C.) e seus seguidores estudaram os poliedros regulares, que se tornaram conhecidos como sólidos de Platão, os gregos acreditavam que os sólidos correspondiam aos elementos do Universo, o tetraedro ao fogo, o cubo a terra, o octaedro ao ar, o icosaedro a água e o dodecaedro ao Universo.

Para Eves (1994), os três geômetras gregos mais importantes foram, Euclides (300 a. C.), Arquimedes (287 – 212 a. C.) e Apolônio (225 a. C.). Durante os três primeiros séculos entre Tales e Euclides, os gregos desenvolveram a noção de discurso lógico, como uma sequência de afirmações obtidas por raciocínio dedutivo, baseada em algumas definições e suposições iniciais.

Euclides em sua obra, *Os Elementos,* reuniu 465 proposições compreendendo, Geometria Plana e Espacial, Teoria dos Números e Álgebra de maneira clara e harmoniosa.

Arquimedes foi considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos, devido aos seus trabalhos altamente originais, em suas obras dedicadas a Geometria Plana e Geometria Espacial, ele encontrou o valor de π igual a 3,14 e as fórmulas corretas para o cálculo da área da superfície esférica, da calota esférica e para os volumes da esfera e do segmento esférico.

Para encerrar a época de ouro da Geometria grega citamos Apolônio, outro grande geômetra da antiguidade, astrônomo e matemático escreveu vários trabalhos em Matemática, mas sua fama se deve principalmente a *Secções Cônicas*, uma obra excepcional e magnífica que supera todos os trabalhos anteriores sobre o assunto. O grande geômetra, nome atribuído por seus contemporâneos devido aos trabalhos a essas curvas, foi o criador dos termos elipse, hipérbole e parábola.

2.4 A GEOMETRIA NO BRASIL

No período colonial com a chegada dos primeiros jesuítas e do primeiro governador-geral no ano de 1549, liderados pelo padre Manoel da Nobrega, os jesuítas fundaram a primeira escola elementar na cidade de Salvador. Posteriormente essas escolas se espalharam pelas principais cidades da Bahia até o ano de 1556, em seguida se espalharam pelo resto do país, no Rio de Janeiro em 1567, em São Paulo no ano de 1631 (GOMES, 2012).

Ainda segundo Gomes (2012) a Matemática era pouco ensinada pelos jesuítas, somente com a vinda da família real em 1808, trouxe mudanças em muitos campos, como ciência, cultura e educação. Muitas instituições foram criadas, entre elas, Academia Real de Marinha (1808) e Academia Real Militar (1810), ambas no Rio de Janeiro, no entanto, somente em 1824 após os trabalhos da Assembleia Constituinte, foi afirmada a gratuidade da instituição primaria para todos.

De acordo com Trivizoli (2011) o ensino sistemático da Matemática superior no Brasil ocorreu na Academia Real Militar a partir de 1811, com o curso Ciências Matemáticas. Quando Pedro II assumiu o império, iniciou-se um período de progresso econômico e intelectual, com a criação da Faculdade de Direito de São Paulo (1827), no Largo São Francisco, em que eram praticados estudos de Matemática. No Rio de Janeiro, a Academia Militar passou por várias reformulações até se tornar a Escola Politécnica, onde se estudava e ensinava Matemática.

Segundo D' Ambrósio (2004) em 1842 foi instituído o grau de Doutor em Ciências Matemáticas pela Escola Militar da Corte, antiga Academia Real Militar, sendo o primeiro a ter o título de doutor, Joaquim Gomes de Souza em 1848 com apenas 19 anos de idade. Em 1854, o Souzinha como ficou conhecido, viaja pela primeira vez a Europa e submete trabalhos matemáticos à *Royal Society de Londres* e na *Académie des Sciences de Paris.*

Embora a educação tivesse seus avanços no período Imperial, a mulher teve pouco espaço nessa época. Em 1837 com a fundação do colégio Pedro II, seu ensino era constituído praticamente pela elite econômica masculina do país, somente em 1880 algumas mulheres passaram a estudar no Colégio Pedro II. Em 1887, a primeira mulher recebeu o diploma de médica no Rio de Janeiro, sendo a única mulher da turma (GOMES, 2012).

No início do século XX o ensino da Matemática na escola primária, era basicamente voltado para a necessidade da vida prática ou para o comércio, com algumas noções de Geometria. No entanto, o ensino secundário era destinado às elites e a preparação para os cursos superiores, com os conteúdos matemáticos ensinados separadamente e por professores diferentes.

Em 1930 foi criado o Ministério da Educação e Saúde, no ano seguinte, Decretos do Ministro da Educação reestruturam o ensino superior, adotando-se o regime universitário, e a reorganização do ensino secundário. Após a criação das Universidades de São Paulo e Rio de Janeiro, em 1934 e 1935 respectivamente, o ensino secundário foi dividido em dois ciclos, o primeiro com cinco anos de duração (Ensino Fundamental) e o segundo com dois anos de duração (Ensino Complementar), buscando transformá-lo em um ensino formativo (PAVANELLO 1993).

Ainda Pavanello (1993), a Lei Orgânica do Ensino Secundário de 1942, conhecida como Reforma Capanema, dá uma nova estrutura ao curso secundário, em que estabelece que os conteúdos, Aritmética, Álgebra e Geometria, sejam ensinados por um único professor. Foi estabelecido que o curso ginasial tivesse um período de quatro anos de duração, e o segundo ciclo por três anos de duração subdividido em clássico e científico. Os conteúdos programáticos de Matemática de 1942 diferem aos de 1931, os três assuntos, Aritmética, Álgebra e Geometria, necessariamente não precisam ser ensinados em cada uma das séries do curso ginasial. A Geometria é abordada em todas as séries além da inclusão de Trigonometria no 2º ano e Geometria Analítica no 3º ano, ambos do segundo ciclo.

Segundo Gomes (2012) a partir de 1950, as disciplinas escolares começam a se modificar devido as transformações das condições econômicas, sociais e culturais no Brasil.

> Modifica-se o público de estudantes, com a inserção, na educação escolar, de alunos provenientes das camadas populares, que vinham reivindicando há muito tempo o direito à escolarização. Trata-se de uma democratização da escola, que passa a receber também os filhos da classe trabalhadora, e cresce enormemente o número de alunos no primário e no secundário. As necessidades de professores para atender a esse público expandido levam à diminuição das exigências na seleção desses profissionais. Assinala-se, nesse momento, portanto, uma mudança significativa das condições escolares e pedagógicas, das necessidades e exigências culturais. (GOMES, 2012, p. 22).

Anos mais tarde, em 1955 é realizado o primeiro congresso nacional de ensino no país, dando início ao envolvimento de muitos professores de Matemática no movimento internacional, que ficou conhecido como o Movimento da Matemática Moderna. Tal movimento teve como marco à produção dos livros didáticos, dando enfoque aos conteúdos, Teoria dos Conjuntos e Álgebra.

Segundo Soares (2001), a Geometria ensinada continuava sendo a euclidiana, mas usava-se a linguagem dos conjuntos defendida pelos que apoiavam o Movimento da Matemática Moderna. O movimento durou pouco mais de uma década, e depois de algum tempo, muitos professores que a defendiam se depararam com a seguinte realidade, o ensino da Matemática não melhorou. Não se sabe ao certo uma data para o fim do Movimento da Matemática Moderna, mas muitas críticas se intensificaram em todo o mundo desde o início da década de 70.

De acordo com Pavanello (1993) a Geometria nos livros didáticos da época era abordada de forma intuitiva, optava-se pelas noções de figuras geométricas e de intersecção de pontos do plano, sob uma linguagem da Teoria dos Conjuntos. A autora afirma que o abandono à Geometria começou com a Lei de Diretrizes e Bases do Ensino de 1º e 2º Grau de 1971 (LDB), que permitia que cada professor montasse seu programa de acordo com as necessidades da clientela. Os professores do 1º grau se limitavam a trabalhar somente com Aritmética e com as noções de conjuntos, assim, o estudo da Geometria passou a ser feito no 2º grau, onde muitos alunos apresentavam grandes dificuldades em lidar com os conteúdos geométricos.

A lei de 1971 permitiu que as escolas tivessem liberdade sobre os programas das diferentes disciplinas, para Pavanello (1993) tal liberdade resultou no início do abandono da Geometria por parte de muitos professores, ou por falta de conhecimento do assunto, ou por reservarem o final do ano letivo para a sua abordagem, talvez numa tentativa inconsciente, de utilizar a falta de tempo como desculpa pela não realização do trabalho com a Geometria.

Para o Ensino Fundamental, em 1980 os Estados Unidos apresentaram recomendações para o ensino da Matemática, no documento “Agenda para Ação”, tendo como foco resolução de problemas no ensino da Matemática, além da compreensão da relevância de aspectos sociais, antropológicos, linguísticos, cognitivos, na aprendizagem da Matemática. Tais ideias ocorreram em todo o mundo no período de 1980 a 1995. No Brasil algumas das propostas curriculares foram incorporadas pelas Secretarias de Estado e Secretarias Municipais de Educação. (BRASIL, 1997).

Em 1996 com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN), o Ensino Médio deixa de ser apenas um curso preparatório para Ensino Superior ou cursos profissionalizantes, e passa a atender como etapa conclusiva da educação básica de toda população estudantil. A Geometria nesse contexto passou a ter a importância da relação entre os objetos geométricos e o mundo em sua volta, desenvolvendo no aluno, compreensão, descrição e representação do mundo em que vive.

De acordo com os PCN+ (2002) a Geometria no Ensino Médio trata das formas planas e tridimensionais, bem como suas representações em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo real. Para esse desenvolvimento, são propostas quatro unidades temáticas: Geometria Plana, Espacial, Métrica e Analítica.

Os PCN+ (2002) sugerem que para desenvolver o estudo da Geometria Espacial no Ensino Médio é necessário o estudo das relações geométricas entre figuras espaciais e planas em sólidos geométricos, bem como as congruências e semelhanças, a análise de diferentes representações das figuras, planificações e construções com instrumentos. Propõe-se também a decomposição e composição de figuras para os cálculos de comprimentos, áreas e volumes.

As recomendações sugeridas para o ensino da Geometria Plana, Geometria Espacial e Métrica no Ensino Médio de acordo com os PCN+ (2002) são:

i. Geometria Plana: semelhança e congruência; representações de figuras.
   - Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações-problema.
   - Analisar e interpretar diferentes representações de figuras planas, como desenhos, mapas, plantas de edifícios etc.
   - Usar formas geométricas planas para representar ou visualizar partes do mundo real.
   - Utilizar as propriedades geométricas relativas aos conceitos de congruência e semelhança de figuras.
   - Fazer uso de escalas em representações planas.

ii. Geometria Espacial: elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição; intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos.
   - Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções.

- Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos.
- Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade.
- Compreender o significado de postulados ou axiomas e teoremas e reconhecer o valor de demonstrações para perceber a Matemática como ciência com forma específica para validar resultados.

iii. Métrica: áreas e volumes; estimativa, valor exato e aproximado.

- Identificar e fazer uso de diferentes formas para realizar medidas e cálculos.
- Utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações reais relativas, por exemplo, de recipientes, refrigeradores, veículos de carga, móveis, cômodos, espaços públicos.
- Efetuar medições, reconhecendo em cada situação, a necessária precisão de dados ou de resultados e estimando margens de erro.

A partir dessas recomendações citadas pelos PCN+, procuramos elaborar questões que estejam de acordo com as orientações da coordenação da escola, que foi aplicada como meio de avalição deste trabalho.

No próximo capítulo apresentamos alguns conceitos de Geometria básica plana e espacial, essenciais para a elaboração desta pesquisa.

3 GEOMETRIA BÁSICA ESPACIAL

Neste capítulo vamos tratar dos conceitos geométricos básicos relacionados à Geometria Plana e Geometria Espacial. Inicialmente trataremos de alguns conceitos básicos, como as áreas do retângulo, triângulo, paralelogramo e do círculo. Esses conteúdos são fundamentais para os cálculos das superfícies e volumes dos sólidos. Entre os poliedros, prismas e pirâmides, apresentamos seus elementos e suas características, em seguida finalizamos o capítulo com os corpos redondos, cilindro, cone e esfera.

3.1 CONCEITOS GEOMÉTRICOS BÁSICOS

De acordo com Muniz Neto (2012), devem ser válidas as seguintes propriedades de áreas para polígonos.

a. Polígonos congruentes têm áreas iguais.
b. Se um polígono convexo é particionado em um número finito de outros polígonos convexos, então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.
c. Se um polígono maior contém outro menor em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor.
d. A área de um quadrado de lado 1 cm é igual a 1 cm^2.

3.2 ÁREA

Segundo Giovanni, Bonjhorno e Giovanni Jr. (1994) área é um número real maior ou igual à zero, que representa a medida de uma superfície. A medida de uma superfície pode ser delimitada por linhas poligonais, linhas curvas, ou ambas. Para medir a área de uma superfície devemos compará-la com uma unidade, tradicionalmente a unidade de medida de área é um quadrado, cujo lado mede uma unidade de comprimento. (Figura 3.1).

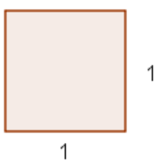


Figura 3.1: Quadrado de lado 1u
Fonte: Elaborado pelo autor

É essencial para o entendimento deste trabalho nas próximas seções que o leitor tenha conhecimentos prévios das fórmulas para o cálculo da área de algumas figuras planas geométricas, assim citaremos algumas de extrema necessidade para a realização dos cálculos.

3.2.1 Área do Retângulo

Consideremos um retângulo de lados *3u* e *4u* como na Figura 3.2. Se compararmos com um quadrado de lado *1u,* vemos que nas linhas (base *b*) são necessários 4 quadrados unitários, como temos 3 linhas (altura *h*), são necessários 12 quadrados unitários para cobrir o retângulo. Assim concluímos que:

$$\textit{Área do retângulo} = 3u \times 4u = 12u^2$$

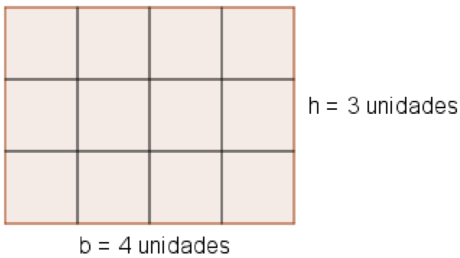


Figura 3.2: Retângulo de 12 unidades
Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto a área (A_R) de um retângulo qualquer é o produto da base *(b)* pela altura *(h)*. Figura 3.3.

$$A_R = b * h$$

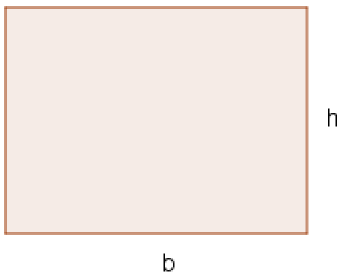


Figura 3.3: Retângulo
Fonte: Elaborado pelo autor

Observação: A partir dessa premissa, podemos generalizar para a fórmula da área do quadrado, como o quadrado tem o mesmo número de linhas horizontais e verticais. Temos que a área de qualquer quadrado é o produto dos lados, ou seja, l^2, com *l* sendo o lado do quadrado.

3.2.2 Área do Paralelogramo

Consideremos um paralelogramo ABCD*,* seja H o pé da perpendicular do segmento DH sobre AB, como mostra a Figura 3.4, seja H' o pé da perpendicular do segmento CH' sobre a reta AB, como AB é igual a CD, temos que, DH é altura do paralelogramo e igual à CH'. Note que o triângulo AHD é congruente ao triângulo BH'C, note também que AB é igual à HH'. Assim concluímos que a área do paralelogramo *(A_P)* é o produto da base *(b)* pela altura *(h)*, ou seja:

$$A_P = b * h$$

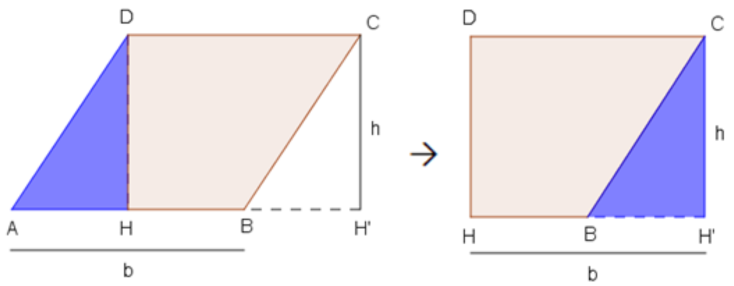


Figura 3.4: Paralelogramo e sua decomposição e composição num retângulo
Fonte: Elaborado pelo autor

3.2.3 Área do Triângulo

Como vimos na seção anterior, área do paralelogramo é o produto da base pela altura, se traçarmos uma das diagonais do paralelogramo temos a metade da área do paralelogramo e consequentemente dois triângulos congruentes, ver a Figura 3.5. Assim a área do triângulo (A_T*)* é a metade do produto da base *(b)* pela altura *(h),* ou seja:

$$A_T = \frac{1}{2} * b * h$$

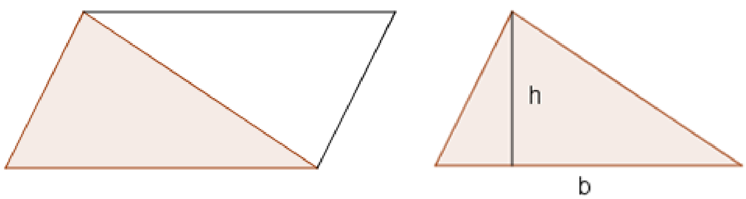


Figura 3.5: Triângulo partindo de um paralelogramo
Fonte: Elaborado pelo autor

3.2.4 Área do Círculo

É sabido que o comprimento de uma circunferência qualquer é *$2\pi r$,* sendo *r* o raio da circunferência. Consideremos um círculo de raio *r* cortado em formato de setor circular como ilustra a Figura 3.6, consideremos ainda que esses pedaços possam ser infinitamente menores a cobrir totalmente um retângulo de base *πr* e altura *r.*

Assim concluímos que a área do círculo *(A_C)* é igual à área do retângulo, ou seja:

$$A_C = \pi r^2$$

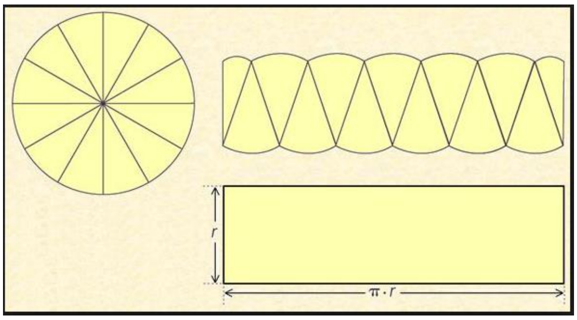


Figura 3.6: Círculo dividido em setores circulares
Fonte: http://matematicamentecontando.blogspot.com.br/

3.3 VOLUME

Segundo Lima et al. (2010) volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado. A partir dessa ideia várias comparações podem ser feitas, tradicionalmente para medir essa grandeza chamada volume, devemos compará-la com um cubo unitário, cuja aresta, mede uma unidade de comprimento. (Figura 3.7).

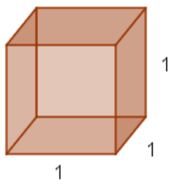


Figura 3.7: Cubo de aresta 1
Fonte: Elaborado pelo autor

3.4 SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

De acordo com Giovanni, Bonjhorno, Giovanni Jr. (1994), os sólidos geométricos são figuras geométricas do espaço, entre elas destacamos os poliedros e os corpos redondos.

3.4.1 Poliedros

Os poliedros são figuras espaciais formadas por polígonos planos que tem dois a dois um lado comum, segundo Paiva (2013) para definir um poliedro, consideremos um conjunto G obtido pela reunião de n polígonos, com $n > 3$, tais que:

I. Quaisquer dois desses polígonos, que tenham um lado em comum, não são coplanares.
II. Cada lado de qualquer um desses polígonos é lado de dois e apenas dois deles.
III. O conjunto G é chamado de superfície poliédrica fechada. Essa superfície separa o espaço em duas regiões, sendo uma delas limitada.

Os poliedros são classificados em convexo e não convexo. De acordo com Paiva (2013), os poliedros convexos contêm qualquer um de seus polígonos contidos em um plano α e os demais polígonos estão contidos em um mesmo semiespaço de origem α, conforme mostra a Figura 3.8. Daremos importância aqui para os poliedros convexos, aos quais existe uma importante relação entre os lados, vértices e arestas. Chamada de Relação de Euler, em homenagem ao matemático que a descobriu, o matemático suíço Leonhard Euler (1707 – 1783). Em todo poliedro vale a seguinte relação $V - A + F = 2$ ou $V + F = A + 2$, em que, V, A e F representam os números de vértices, arestas e faces do poliedro, respectivamente.

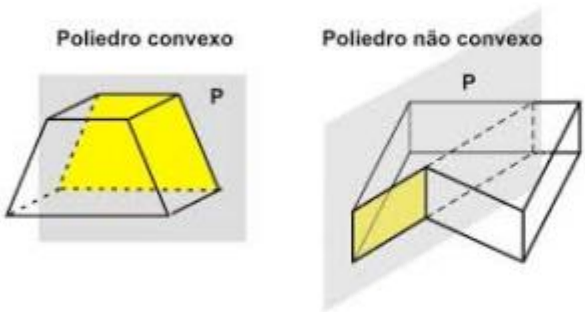


Figura 3.8: Poliedro convexo e poliedro não convexo
Fonte: http://espacomatica.blogspot.com.br/search/label/Poliedros

Dentre os poliedros, existem os famosos poliedros regulares, formados por polígonos regulares e congruentes, conhecidos como Poliedros de Platão, como mostra a Figura 3.9. Além dos poliedros regulares, citaremos neste trabalho algumas propriedades dos prismas e das pirâmides.

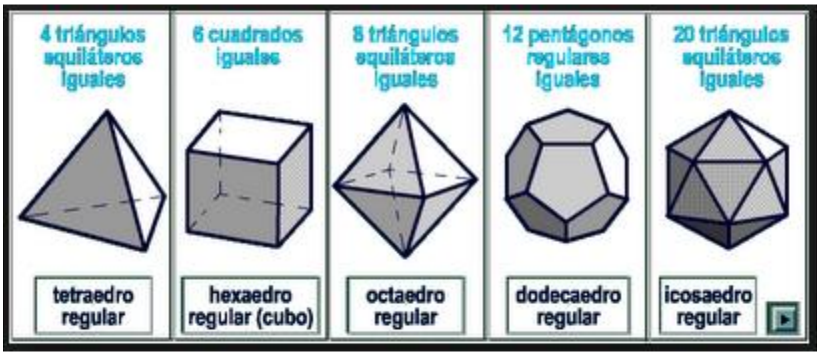


Figura 3.9: Poliedros regulares
Fonte: http://matematicaja-2.blogspot.com.br/2011/09/os-poliedros-de-platao.html

Prisma

De acordo com Paiva (2013) prisma é um poliedro com duas bases paralelas e congruentes de tal modo que as arestas que as unem são paralelas entre si. Os prismas podem ser classificados em retos ou oblíquos. Os prismas retos possuem suas arestas laterais perpendiculares aos planos que contém as bases, dessa forma o ângulo entre as arestas e as bases são retos. Os prismas oblíquos não possuem ângulo reto entre suas bases e arestas, ou seja, são inclinados em relação à base, como mostra a Figura 3.10.

São denominados os elementos do prisma:

- Faces são os polígonos do prisma, com duas bases congruentes e suas faces laterais são paralelogramos.
- Aresta é o encontro de duas faces, as arestas contidas no plano da base são chamadas arestas da base, as demais são chamadas de arestas laterais.
- Vértices é o encontro das arestas, no caso do prisma cada vértice contém três arestas.

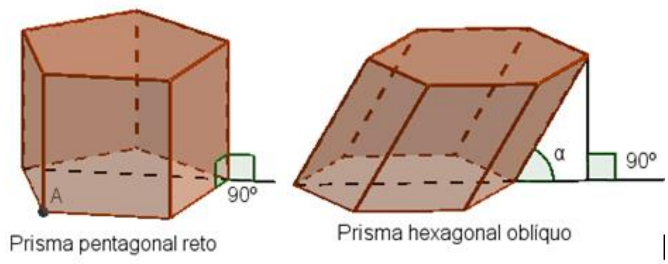


Figura 3.10: Prisma reto e prisma oblíquo
Fonte: Elaborado pelo autor

Um prisma é classificado de acordo com sua base, se a base é um polígono regular e o prisma for reto, então é chamado de prisma regular, cujas faces laterais são compostas por retângulos congruentes. Na Figura 3.11 vejamos alguns exemplos da natureza dos prismas.

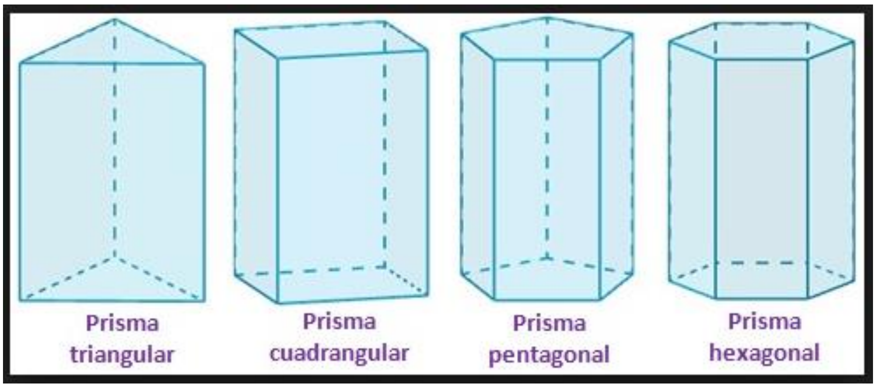


Figura 3.11: Natureza do prisma
Fonte: http://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/prisma/

Área do prisma

A soma das áreas de todas as faces laterais do prisma é denominada área lateral do prisma. Como as faces laterais do prisma são compostas por paralelogramos ou retângulos, então a área de cada face é o produto da base pela altura do paralelogramo.

A soma da área lateral com as áreas das duas bases é chamada de área total do prisma. Vejamos a seguir um caso particular de um prisma reto.

Área de um paralelepípedo retângulo

Considere um paralelepípedo retângulo cujas medidas *a, b* e *c* representam respectivamente comprimento, largura e altura do paralelepípedo, ver a Figura 3.12. Portanto o paralelepípedo, possui 6 faces, sendo as faces, dois retângulos de área *ab*, dois retângulos de área *ac* e dois retângulos de área *bc*. Observe que as faces de área *ab* são as bases, logo a área total *S* do paralelepípedo é dada por:

$$S = 2ab + 2ac + 2bc$$

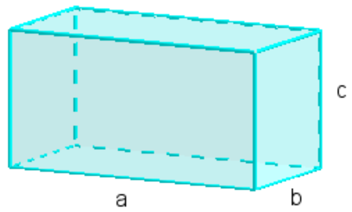


Figura 3.12: Paralelepípedo retângulo
Fonte: Elaborado pelo autor

Volume do paralelepípedo retângulo

Segundo Paiva (2013) inicialmente para introduzir o conceito de volume do paralelepípedo, suponha que as medidas de *a, b,* e *c* na Figura 3.12 sejam *5 cm, 3 cm* e *4 cm,* respectivamente. Para este cálculo, dividimos o paralelepípedo em cubinhos de *1 cm* de aresta, como mostra a Figura 3.13. Como obtivemos 4 camadas horizontais com 15 cubinhos em cada uma, concluímos que o volume do paralelepípedo é igual ao volume de 60 cubinhos de aresta *1 cm*. Portanto o volume *V* de um paralelepípedo pode ser calculado pelo produto das três dimensões:

$$V = 5\,cm * 3\,cm * 4\,cm = 60\,cm^3$$

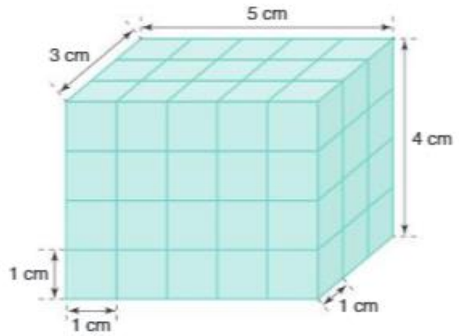


Figura 3.13: Paralelepípedo dividido em cubos
Fonte: Paiva (2013). p. 236

Portanto o volume V de um paralelepípedo retângulo de dimensões *a, b* e *c* é o produto das dimensões:

$$V = a * b * c$$

Se o paralelepípedo tem as três dimensões de mesma medida então todas as arestas são iguais, ou seja, um cubo de aresta *a,* assim o volume *V* de um cubo é a^3.

Volume de um prisma e o princípio de Cavalieri

De acordo com Lima et al. (2010) o princípio de Cavalieri facilitou o cálculo do volume de diversos sólidos. Segundo o princípio de Cavalieri se dois sólidos quaisquer que possuem a mesma altura, se qualquer plano horizontal secciona esses dois sólidos segundo figuras planas de mesma área, então esses sólidos têm volumes iguais.

Utilizando esse resultado e comparando com o volume de paralelepípedo reto podemos mostrar como calcular o volume de outros sólidos.

Consideremos, em um semiespaço de origem β, um paralelepípedo reto (S_1) e um prisma (S_2) de mesma altura h, ilustrado na Figura 3.14, cujas bases estão contidas em β e têm a mesma área.

Note que qualquer plano α, paralelo a β, que intercepta um dos prismas também intercepta o outro, como qualquer secção transversal é congruente às suas bases, qualquer plano α nas condições anteriores, determina nesses prismas secções de mesma área. Portanto o princípio de Cavalieri nos garante que os prismas têm volumes iguais.

Assim concluímos que o volume V de um prisma qualquer é o produto da área de sua base (Ab) por sua altura (h).

$$V = Ab * h$$

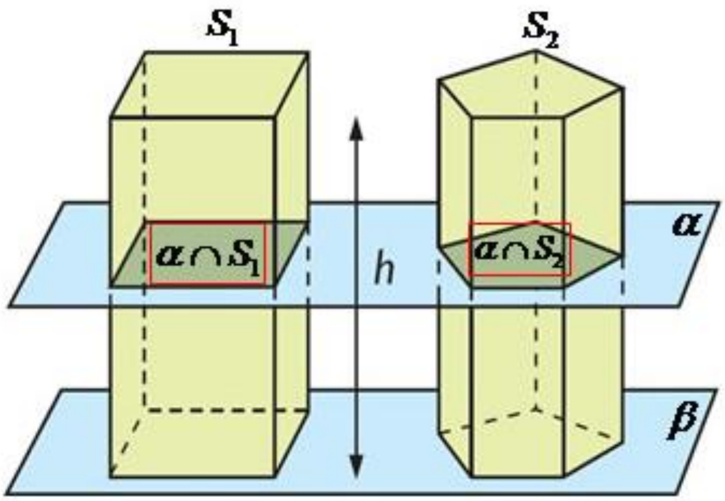


Figura 3.14: Ilustração do Princípio de Cavalieri
Fonte: http://brasilescola.uol.com.br/matematica/principio-cavalieri.htm

Pirâmide

Segundo Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr. (1994) as pirâmides são poliedros cuja base é uma região poligonal e as faces laterais são regiões triangulares. Assim como os prismas, as pirâmides possuem faces, arestas e vértices, entretanto, possui somente uma base, a qual determina a natureza da pirâmide, variando de acordo com o polígono que a contém. Uma pirâmide se diz reta quando o único vértice (*V)* que não pertence à base tem projeção ortogonal no centro da base como mostra a Figura 3.15, uma pirâmide se diz regular quando for reta e sua base for um polígono regular, nos demais casos se diz que a pirâmide é oblíqua.

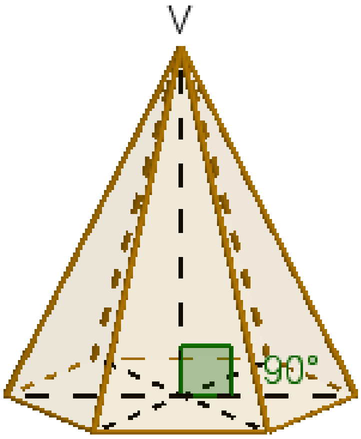


Figura 3.15: Pirâmide hexagonal regular
Fonte: Elaborado pelo autor

Em qualquer pirâmide vale as seguintes propriedades:

- O número de vértices é igual ao número de faces.
- O número de arestas é o dobro do número de lados que contém o polígono da base.

Considere a pirâmide hexagonal da Figura 3.15, como exemplo têm como base um hexágono, assim, a pirâmide possui 7 vértices e 7 faces. O número de arestas é 12, ou seja, é o dobro do número de lados do hexágono da base da pirâmide.

Área de uma pirâmide

A soma das áreas de todas as faces laterais é chamada de área lateral da pirâmide. Em toda pirâmide regular as faces laterais são compostas por triângulos isósceles, cuja altura do triângulo é chamada de apótema da pirâmide se e somente se, a pirâmide for regular.

A soma da área lateral com a área da base é denominada área total (*At*) da pirâmide. No caso da Fig. 3.15 de pirâmide hexagonal, *At* = *Ab* + *6 Af*, *Ab* é a área do hexágono e *Af* é a área do triângulo.

Volume da pirâmide

De acordo com Paiva (2013) o volume de uma pirâmide qualquer é igual a um terço do produto da área da base por sua altura. Para demonstrar, basta provar que um prisma triangular pode ser decomposto em três pirâmides triangulares de mesmo volume, conforme mostra a Figura 3.16.

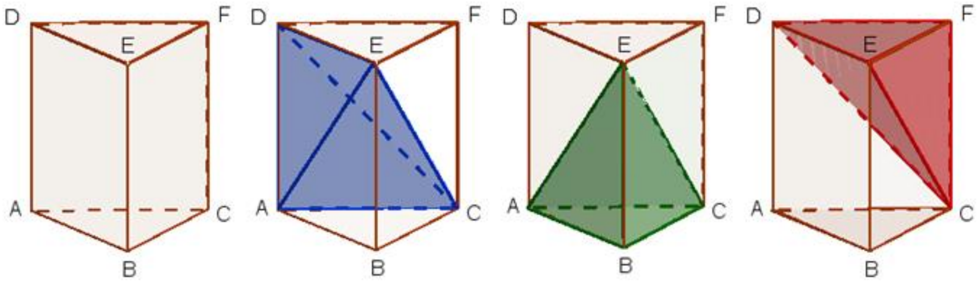


Figura 3.16: Prisma triangular com ilustração de três pirâmides equivalentes
Fonte: Elaborado pelo autor

Nomeando os vértices de um prisma triangular e, consequentemente, os vértices correspondentes das pirâmides obtidas pela decomposição indicados na Figura 3.16, temos:

(1) As pirâmides *ABCE* e *CDEF* têm bases congruentes, pois os triângulos *ABC e DEF* são bases do prisma *ABCDEF,* as alturas *EB e FC* tem o mesmo comprimento, pois são arestas laterais do prisma *ABCDEF.* Logo as pirâmides *ABCD* e *CDEF* têm volumes iguais.

(2) *DC* é diagonal do paralelogramo *ACFD,* portanto os triângulos *ACD* e *CDF* são congruentes e são bases das pirâmides *ADCE* e *CDFE* respectivamente. Suas alturas as bases *ACD* e *CDF* são iguais às distâncias do ponto *E* ao plano do paralelogramo *ACFD.* Logo as pirâmides *ADCE* e *CDFE* têm o mesmo volume.

Por (1) e (2), concluímos que as pirâmides *ABCE, CDEF* e *ADCE* possuem o mesmo volume.

Portanto, um prisma triangular pode ser decomposto em três pirâmides triangulares de mesmo volume. Logo o volume *V* de uma pirâmide de base triangular é um terço do produto da área da base (*Ab)* pela sua altura *(h)*.

$$V = \frac{1}{3}\, Ab * h$$

Volume de uma pirâmide qualquer

Segundo Paiva (2013), decompondo uma pirâmide qualquer em *n* pirâmides triangulares, podemos chegar a uma fórmula geral para o volume da pirâmide. Consideremos uma pirâmide de vértice *L,* base $A_1A_2A_3...A_n$, altura *h* e área da base *B*, e seja *P* um ponto interior a base. Essa pirâmide pode ser decomposta em *n* pirâmides triangulares, LA_1A_2P, LA_2A_3P, LA_3A_4P, ... e LA_nA_1P, cujas áreas da base são B_1, B_2, B_3, ... e B_n, respectivamente, conforme mostra a Figura 3.17.

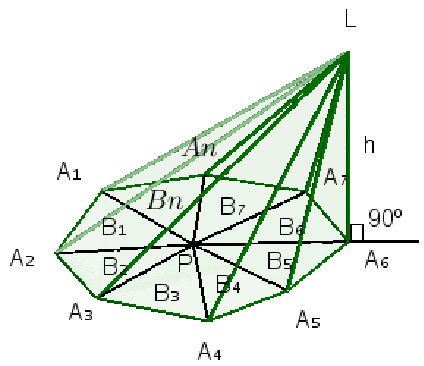


Figura 3.17: Pirâmide qualquer decomposta em pirâmides triangulares
Fonte: Elaborado pelo autor

Note que todas essas pirâmides tem a mesma altura *h* e $B_1 + B_2 + B_3 + ... + B_n = B$. Sendo V_1, V_2, V_3, ... e V_n os volumes dessas pirâmides triangulares, temos:

$$V_1 = \frac{1}{3} * B_1 h;\; V_2 = \frac{1}{3} * B_2 h; V_3 = \frac{1}{3} * B_3 h; \ldots;\; V_n = \frac{1}{3} * B_n h$$

Portanto:

$$V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n = \frac{1}{3} * B_1 h + \frac{1}{3} * B_2 h + \frac{1}{3} * B_3 h + \cdots + \frac{1}{3} * B_n h =$$

$$\frac{1}{3} * h * (B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_n) = \frac{1}{3} * B * h$$

Como a soma $V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n$ é igual ao volume V da pirâmide, concluímos que:

$$V = \frac{1}{3} * B * h$$

Ou seja, o volume de uma pirâmide qualquer é igual a um terço do produto da área da base por sua altura.

3.4.2 Corpos Redondos

Cilindro

Segundo Paiva (2013), cilindro é toda forma geométrica que têm duas bases circulares paralelas e congruentes, e todos os seus pontos formam segmentos de retas paralelos, com cada extremo numa dessas duas bases. Para Dolce e Pompeu (2005), outra forma de definir um cilindro é, considere um círculo de centro *O* e raio *r,* situado num plano *α*, e um segmento de reta PQ, não nulo, não paralelo e não contido em *α*. Chama-se cilindro circular ou cilindro à reunião dos segmentos congruentes e paralelos a PQ, com uma extremidade nos pontos do círculo e situados num mesmo semiespaço dos determinados por *α*. Como pode ser visto na Figura 3.18.

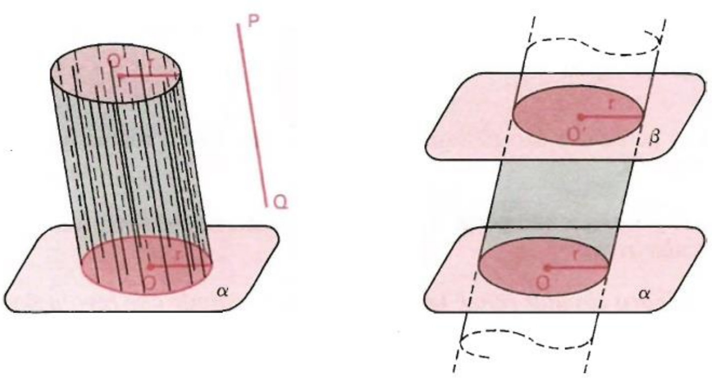


Figura 3.18: Cilindro
Fonte: Osvaldo Dolce e Jose Nicolau Pompeu. p. 217

Os cilindros podem ser classificados em retos ou oblíquos, os cilindros retos também são conhecidos como cilindros de revolução, pois podem ser obtidos por uma rotação de 360º de um retângulo em torno de um eixo que contém um de seus lados. Nesse caso, o eixo do cilindro é chamado de eixo de rotação. Todo segmento de reta, paralelo ao eixo de rotação, com extremidades nas circunferências das bases são chamados de geratriz do cilindro. No caso do cilindro reto a geratriz tem a mesma medida da altura do cilindro e sua distância ao eixo de rotação é a mesma medida do raio das bases.

A Figura 3.19 ilustra dois cilindros e seus principais elementos, o cilindro oblíquo ilustra as bases, a geratriz e a altura, o cilindro da direita é um cilindro de revolução a partir da rotação de um retângulo.

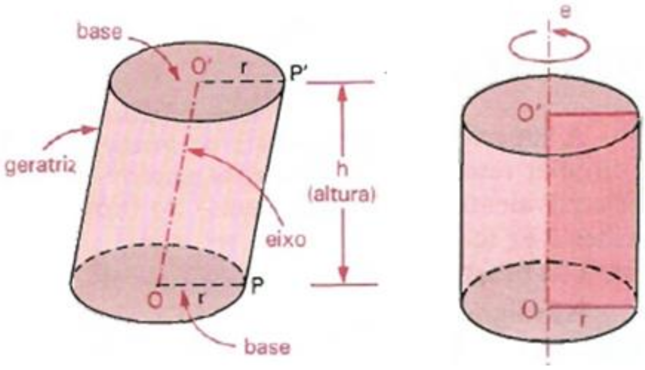


Figura 3.19: Cilindro oblíquo e cilindro de revolução
Fonte: Osvaldo Dolce e Jose Nicolau Pompeu. p. 218 – 219

Área do Cilindro

A área do cilindro reto é composta por duas bases circulares congruentes e uma área lateral. De acordo com Dolce e Pompeu (2005), a superfície lateral de um cilindro reto é equivalente a um retângulo de dimensões $2\pi r$ (comprimento da circunferência da base) e h (altura do cilindro). Portando a área lateral do cilindro (A_l) é equivalente a área de um retângulo, cuja expressão é dada por:

$$A_l = 2\pi rh$$

A Figura 3.20 ilustra um cilindro reto planificado, assim concluímos que a área total do cilindro (A_C) é a soma da área das bases mais a área lateral, ou seja:

$$A_C = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$$

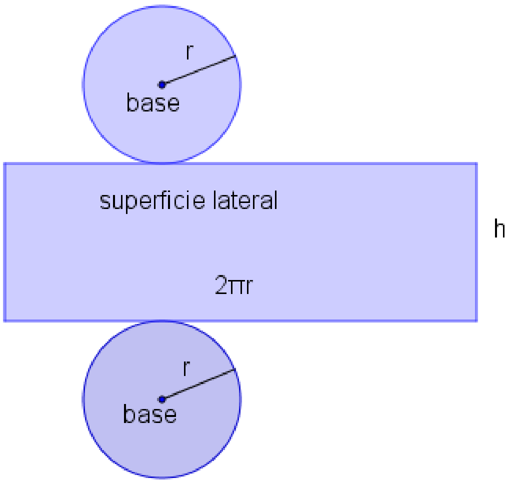


Figura 3.20: Cilindro reto planificado
Fonte: Elaborado pelo autor

Volume do cilindro

Segundo Lima et al. (2006), no cilindro, toda seção paralela à base, é congruente com essa base. Se o cilindro tem altura *h* e base de área *A* contida em um plano horizontal, imaginamos um paralelepípedo retângulo de altura *h* visto na Figura 3.21 de área da base igual a área da base do cilindro, isto é, base *A* contida no mesmo plano. Se outro plano horizontal secciona os dois sólidos segundo figuras de áreas A_1 e A_2, então $A = A_1 = A_2$ e, pelo princípio de Cavalieri os dois sólidos tem o mesmo volume. Portanto, o volume do cilindro (V_C) é também o produto da área da base pela altura. Como a base do cilindro é um círculo, logo:

$$V_C = \pi r^2 * h = A * h$$

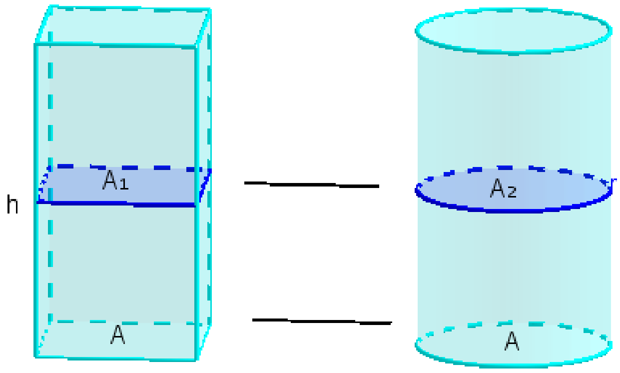


Figura 3.21: Aplicação do Princípio de Cavalieri no Cilindro
Fonte: Elaborado pelo autor

Cone

Segundo Dolce e Pompeu (2005), consideremos um círculo de centro *O* e raio *r* situado num plano *α* e um ponto *V* fora de *α.* Chama-se cone circular ou cone à reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em *V* e a outra nos pontos do círculo.

O cone circular reto também é conhecido como cone de revolução, pois pode ser obtido pela rotação de 360º de um triângulo em torno de um eixo, nesse caso o eixo é chamado de eixo de revolução.

Na Figura 3.22 é possível ver um cone oblíquo com seus principais elementos, a base *(Ab)*, a geratriz *(g)*, o vértice (*V) e* a altura *(h)*.

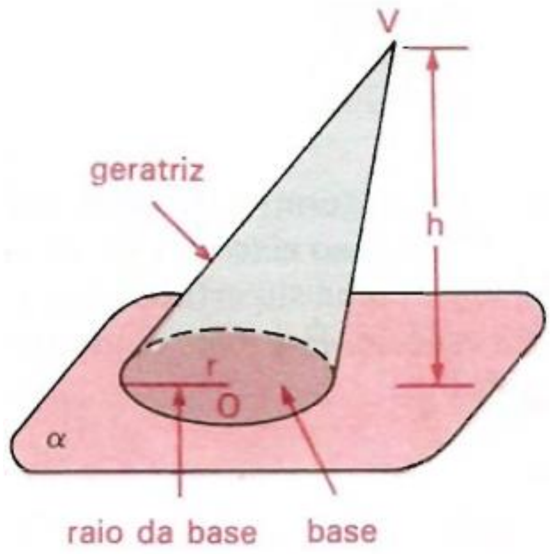


Figura 3.22: Cone e seus elementos
Fonte: Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeu. p. 236

Área total do Cone

A área do cone reto é composta por uma base circular de raio *r* e uma área lateral composta pela reunião de todas as geratrizes do cone. De acordo com Paiva (2013), a superfície lateral do cone reto é equivalente à área de um setor circular de raio *g* e arco de comprimento *2πr.*

A Figura 3.23 ilustra um cone reto planificado.

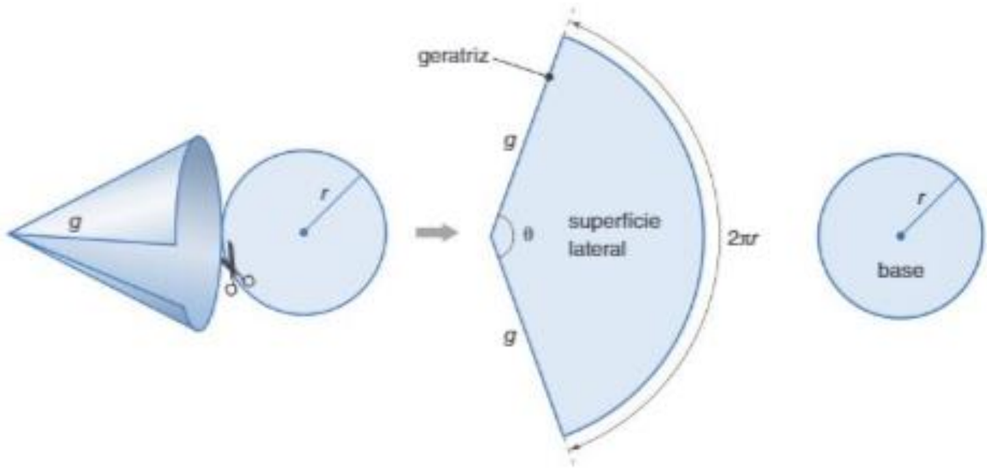


Figura 3.23: Cone planificado
Fonte: Manoel Paiva, p. 266

Observando a planificação feita na Figura 3.23 e, como a área do setor circular é proporcional ao comprimento de seu arco, podemos calcular a área lateral *(A_l)* pela regra de três:

Área do setor		**Comprimento do arco**
A_l	———	$2\pi r$
πg^2	———	$2\pi g$

Ou seja, a área lateral *(A_l)* é dada por:

$$A_l = \frac{2\pi r * \pi g^2}{2\pi g}$$

Então, concluímos que a área lateral do cone é:

$$A_l = \pi r g$$

Assim a área total do cone é soma da área lateral *(A_l)* com a área da base *(Ab).* Portanto a área total *(A_T)* do cone é dada por:

$$A_T = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r)$$

Volume do Cone

Segundo Lima et al. (2006) o volume do cone está relacionado com o volume da pirâmide, onde vimos que o volume da pirâmide é um terço do produto de sua área da base pela sua altura. Para demonstrar, consideremos um cone de altura *h* e base de área *Ab* contida num plano *α*, consideremos uma pirâmide de altura *h* e área da base *Ab* contida nesse mesmo plano *α*.

Se outro plano horizontal a *α* secciona esses dois sólidos segundo figuras A_1 e A_2 de mesma área com $A_1 = A_2$ visto na Figura 3.24. Então, pelo princípio de Cavalieri esses dois sólidos tem o mesmo volume. Portanto o volume *V* do cone é um terço do produto da área da base pela sua altura. Como a base do cone é um círculo, temos:

$$V = \frac{1}{3} * \pi r^2 * h$$

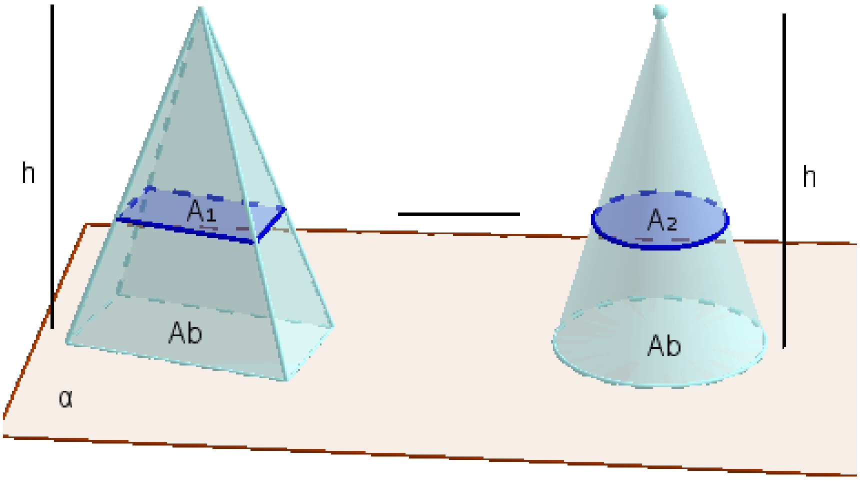


Figura 3.24: Aplicação do Princípio de Cavalieri no Cone
Fonte: Elaborado pelo autor

Esfera

Paiva (2013), considera que se um ponto *O* no espaço está a uma distância não nula de *R*, chama-se esfera de centro *O* e raio *R* o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto *O* sejam menores ou iguais a *R.*

Considerando a definição acima, temos:

- O conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto *O* são menores que *R* é chamado de interior da esfera;
- O conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto *R* são iguais a *R* é chamado de superfície esférica.
- O conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto *O* são maiores que *R* é chamado de exterior da esfera.

A esfera é também o sólido de revolução gerado pela rotação de 360º de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.

Volume da Esfera

De acordo com Lima et al. (2006), o volume da esfera, também é obtido pelo princípio de Cavalieri. Para isso, considere um sólido de volume conhecido e tal que seções produzidas por planos horizontais na esfera e nesse sólido tenham áreas iguais. Repare que em uma esfera de raio *R*, qualquer seção que dista *h* do centro da esfera é um círculo de raio *r*. Aplicando o Teorema de Pitágoras concluímos que a área desse círculo é $\pi(R^2 - h^2)$. Ver a Figura 3.25 com a ilustração da aplicação do Teorema de Pitágoras.

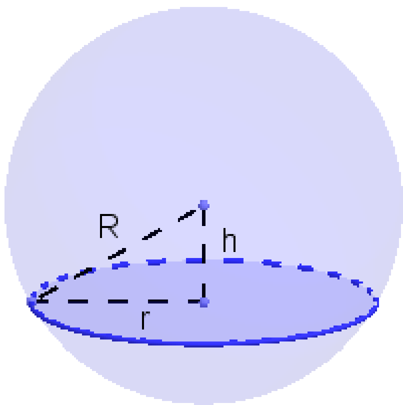


Figura 3.25: Aplicação do teorema de Pitágoras para o cálculo da área do círculo
Fonte: Elaborado pelo autor

Consideramos também um cilindro equilátero de raio *R* e altura *2R,* vamos subtrair dois cones iguais de raio *R*, com base em uma base do cilindro e com vértice no centro do cilindro, o outro, com base na outra base do cilindro e vértice coincidente no centro do cilindro, como mostra a Figura 3.26.

Este sólido é chamado de clepsidra, é tal que qualquer plano horizontal distando *h* do seu centro produz uma seção que é uma coroa circular, cujo raio externo é *R* e o raio interno é *r.*

Porém, o centro desse sólido também é *R,* logo o triângulo formado por uma das geratrizes do cone retirado, com sua base e sua altura é isósceles, portanto os triângulos formados pelo raio *r* interno da coroa e pela distância *h* ao centro da clepsidra, também são isósceles. Assim novamente pelo Teorema de Pitágoras, temos que a área da coroa é $\pi(R^2 - h^2)$.

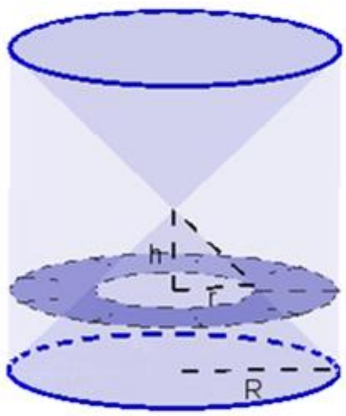


Figura 3.26: Clepsidra e coroa formada por seção paralela a base
Fonte: Elaborado pelo autor

Assim concluímos que uma esfera de raio *R* apoiada em um plano horizontal e ao lado uma clepsidra de diâmetro e altura *2R* com base também sobre esse plano, ilustrado na Figura 3.27. Produz seções paralelas de mesma área, logo pelo princípio de Cavalieri esses sólidos tem o mesmo volume.

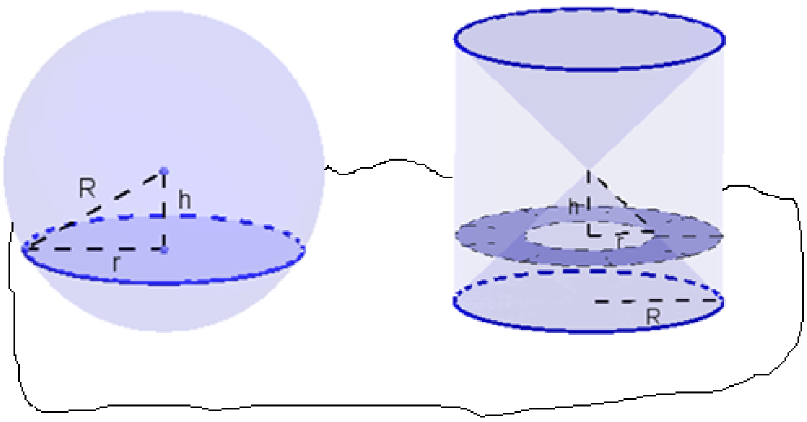


Figura 3.27: Esfera e Clepsidra no plano
Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim o volume da clepsidra é o volume do cilindro de raio *R* e altura *2R* subtraído de dois cones de raio *R* e altura *R.* Isso dá:

$$\pi R^2 2R - 2\frac{1}{3}\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Logo o volume da esfera (V_e) é:

$$V_e = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Área da superfície esférica

De acordo com Lima et al. (2006), qualquer que seja o método para o cálculo da área da esfera, em algum momento é necessária uma passagem ao limite, pois, a superfície esférica não é desenvolvível, ou seja, não é possível fazer cortes nela e depois aplicá-la sobre o plano sem dobrar nem esticar.

Suponha a esfera de raio *R* dividida em um número *n* muito grande de regiões, todas com área e perímetro muito pequenos. Cada uma dessas regiões quase planas, se *n* for muito grande, essas regiões serão bases de cones com vértices no centro da esfera. Assim a esfera ficará dividia em *n* cones, todos com altura aproximadamente igual a *R.*

Se A_s é a área da superfície esférica e $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ são as áreas das diversas regiões que são bases dos *n* cones, temos que comparando o volume da esfera como a soma de volumes dos *n* cones tem-se:

$$\frac{1}{3}A_1R + \frac{1}{3}A_2R + \cdots + \frac{1}{3}A_nR = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\frac{1}{3}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)R = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\frac{1}{3}A_sR = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$A_s = 4\pi R^2$$

Portanto a área da superfície esférica é quatro vezes o produto de π pelo raio da esfera elevado ao quadrado.

No próximo capítulo apresentamos um pouco sobre a história e a descrição de algumas ferramentas básicas do *software Geogebra.*

4 SOBRE O *SOFTWARE GEOGEBRA*

Neste capítulo apresentamos uma pequena nota histórica do *software Geogebra* e seu criador. Em seguida delineamos os primeiros passos e a descrição de algumas ferramentas que o *software* possui.

4.1 O *SOFTWARE*

O *Geogebra* é um *software* matemático dinâmico, que reúne Geometria, Álgebra e Cálculo, foi desenvolvido em 2001 pelo professor e pesquisador Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburg, Áustria, para Educação Matemática nas escolas. Segundo Hohenwater (2007) o *Geogebra* permite realizar construções tanto com pontos, segmentos, vetores, retas, seções cônicas e funções, que permitem se modificar posteriormente de forma dinâmica. De forma prática, as informações na Janela de Álgebra correspondem aos elementos geométricos presentes na Janela de Visualização Gráfica, assim o *software* tem a capacidade de trabalhar com variáveis vinculadas a números, vetores e pontos, ou seja, uma expressão em Álgebra corresponde a um objeto concreto na Geometria e vice-versa.

Atualmente em todos os continentes, existem institutos *Geogebra* dedicados à pesquisa e ao seu desenvolvimento. Segundo os dados fornecidos pelo *Instituto São Paulo Geogebra*, o *Geogebra* é usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, são mais de 300 mil *downloads* mensais, com 62 Institutos em 44 países, para dar suporte ao seu uso. Os institutos Internacionais de *Geogebra* são organizações sem fins lucrativos e foram criados devido à ampla divulgação e uso do *software* livre *Geogebra*.

Em linhas gerais os institutos *Geogebra*, compostos por professores e pesquisadores, que trabalham juntos para promover o ensino e a aprendizagem da Matemática, oferecem suporte para o desenvolvimento de materiais, procuram promover a colaboração entre os profissionais e pesquisadores, buscando estabelecer parcerias e a formação de uma comunidade de usuários do *Geogebra*. O *Instituto São Paulo Geogebra*, tem sede na Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da PUC – SP, localizado na Rua Marques de Paranaguá, 111, destacamos também o Instituto *Geogebra* no Rio de Janeiro com sede na Universidade Federal Fluminense (IFF) na cidade de Niterói, além desses, outros dois institutos atuam em território brasileiro, o Instituto *Geogebra* de Minas Gerais e o Instituto *Geogebra* de Goiás.

O *Geogebra* é um *software* gratuito, podendo ser instalado em computadores com sistemas operacionais *Windows, Linux, Mac OSX*, *smartphones* e *tabletes* com *Androide, IOS* ou *Windows Phone*. Atualmente a versão mais recente 5.0, pode ser instalada acessando o endereço eletrônico https://www.geogebra.org/download, em seguida escolhendo o sistema operacional desejado. A Figura 4.1 apresenta a página para o *download* do *Geogebra*.

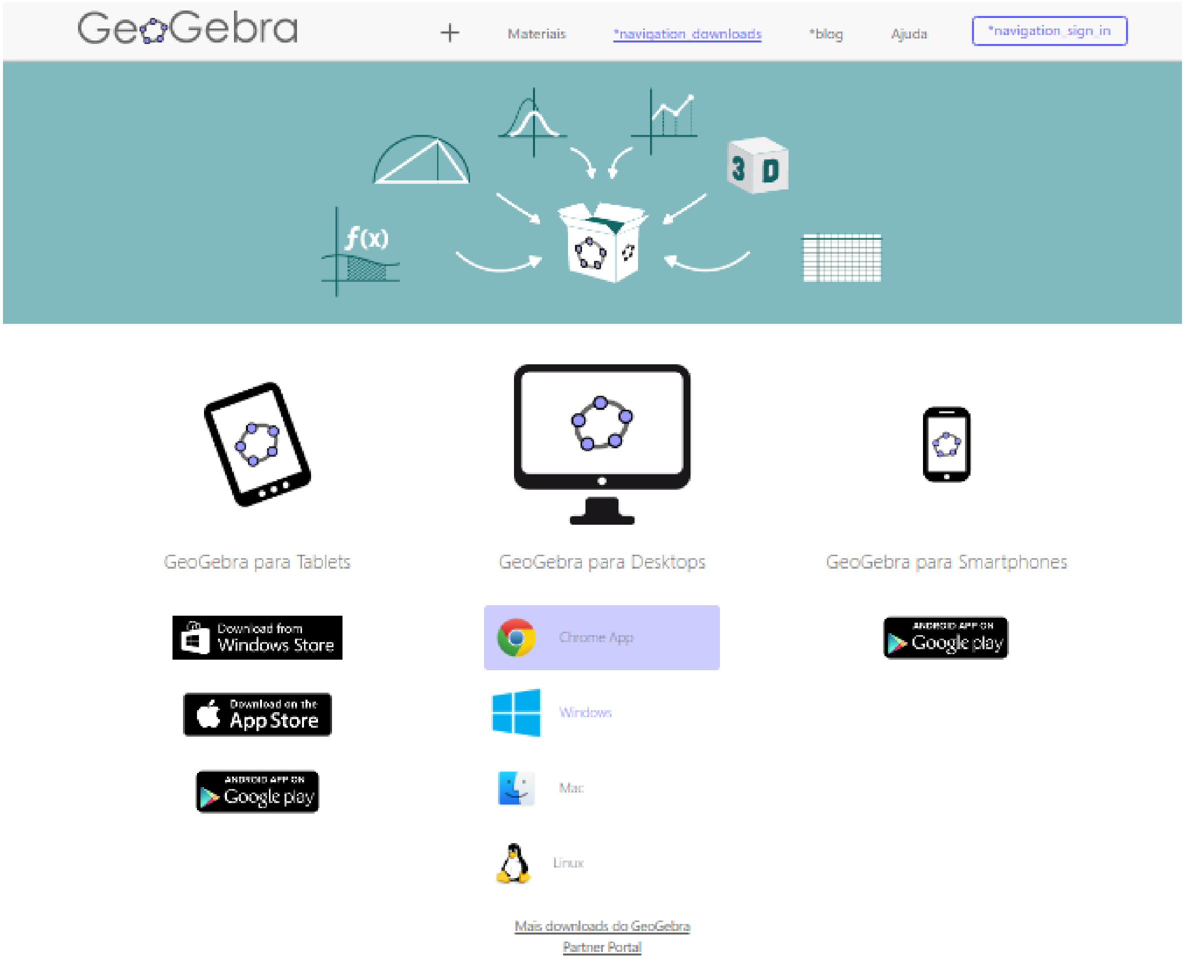


Figura 4.1: Pagina do *download* do *Geogebra*
Fonte: Elaborado pelo autor

Ao término do *download* e concluído a instalação, um ícone do *Geogebra* será criado na área de trabalho do computador. Em alguns casos, quando o sistema operacional for *Windows* 10, para acessar o *Geogebra* é necessário localizá-lo no *menu* iniciar do *Windows* e dar um clique sobre o ícone. Caso queira fixar na barra de tarefas, para ter o acesso rápido, clique com o botão direito do *mouse* e em seguida clique em **Fixar na barra de tarefas.**

4.1.1 Primeiros passos

Faremos aqui uma pequena apresentação do *Geogebra*, elencando as principais ferramentas que podem ser utilizadas por professores e alunos da Educação Básica. Não abordaremos aqui ferramentas ou funções destinadas aos conteúdos de Ensino Superior, visto que estes não fazem parte desta dissertação.

Ao abrir o *Geogebra* nos deparamos com uma tela inicial, como mostra a Figura 4.2, com as seguintes características, Barra de *Menu*, Barra de Ferramentas, Janela de Álgebra, Janela de Visualização e o Campo de Entrada.

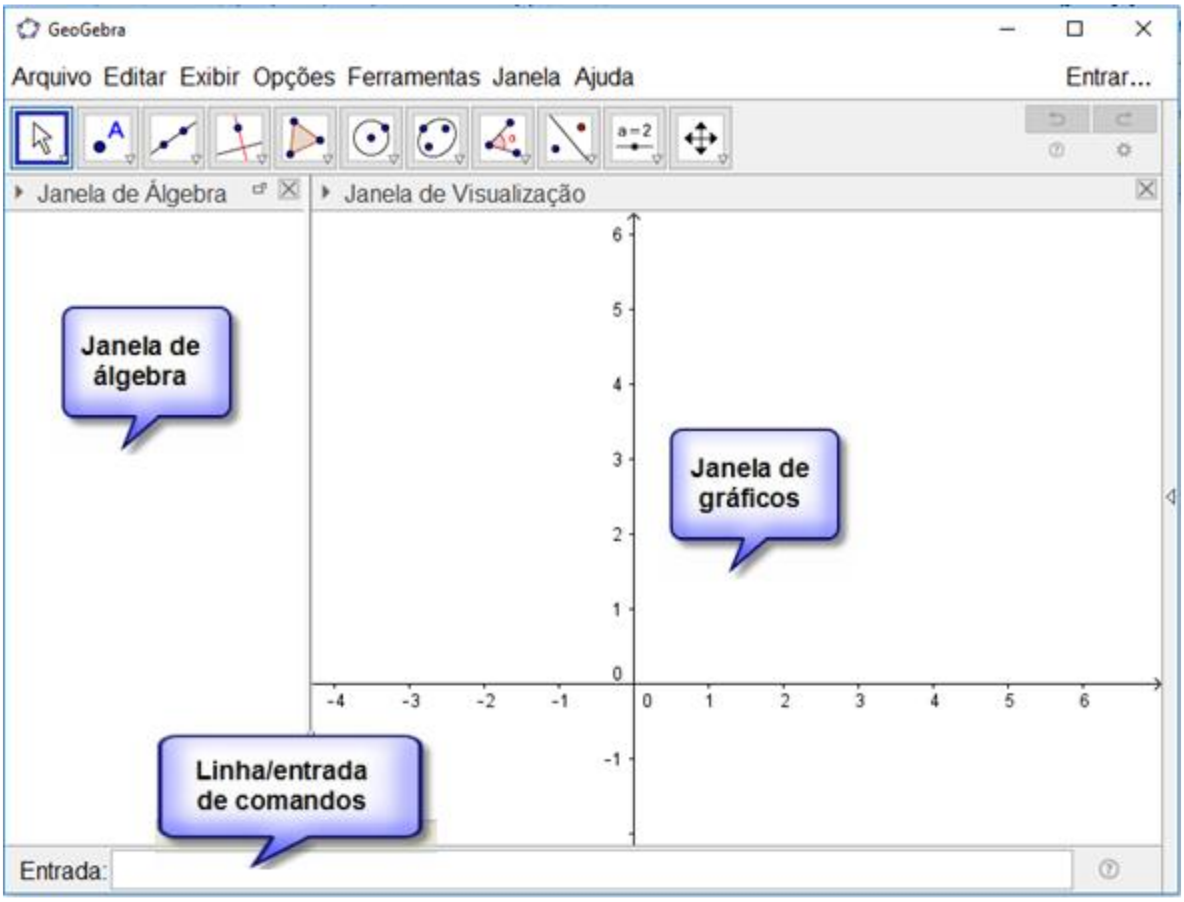


Figura 4.2: Tela inicial do *Geogebra*
Fonte: Elaborado pelo autor

Como podemos observar da Figura 4.2, a tela inicial do *Geogebra* é constituída de três partes.

- **Janela de Álgebra**, onde aparecem indicações dos objetos criados, tais como, coordenadas de pontos, equações, comprimentos, áreas e volumes.
- **Janela de Visualização Gráfica**, onde aparecem os pontos, figuras geometricas e outros objetos. Apresenta um sistema de eixos coordenados.

- **Campo de Entrada,** esta zona é destina a entrada dos comandos, que definem os objetos. Uma vez digitado o comando e teclando ENTER, aparece automaticamente a expressão algébrica na Janela de Álgebra e sua representação gráfica na Janela de Visualização.

4.1.2 Barra de *Menu*

A Barra de *Menu* é composta por sete finalidades, Arquivo, Editar, Exibir, Opções, Janela e Ajuda, cada uma com sua especificidade.

Menu Arquivo

A função **Arquivo** permite abrir uma janela nova ou um arquivo novo (mais precisamente uma interface nova e vazia), permite também abrir um arquivo do *Geogebra* criado anteriormente, salvo no computador. Outra opção é Gravar ou Gravar Como, permitindo escolher uma pasta e o nome do arquivo criado, entre outras funções é permitido Compartilhar, Exportar e Imprimir.

A Figura 4.3 mostra a janela de opções do *Menu* Arquivo.

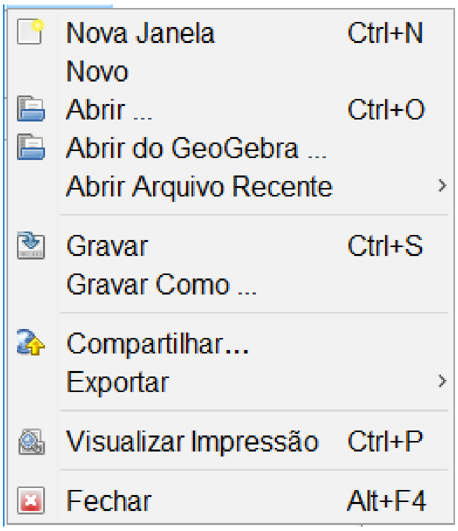


Figura 4.3: *Menu* Arquivo
Fonte: Elaborado pelo autor

Menu Editar

A janela de opções do ***Menu* Editar,** Figura 4.4, permite Desfazer, Refazer, Copiar, Colar, Copiar para Área de Transferência, Inserir Imagem de e contamos com a opção Selecionar Tudo. Destacamos aqui a função Propriedades, que ao selecioná-la, abre outra janela, ver a Figura 4.5, que possibilita a personalização dos objetos criados tais como, ponto, segmento, áreas de figuras planas e figuras espaciais.

A Figura 4.4 apresenta a janela de opções do *Menu* Editar.

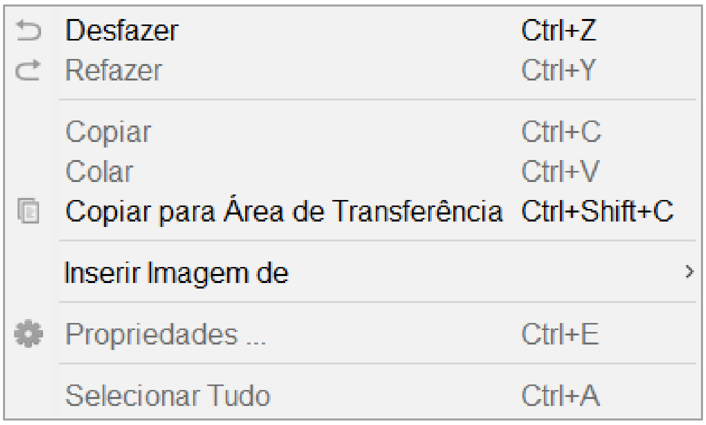


Figura 4.4: *Menu* Editar
Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 4.5 apresenta a janela de personalização da função Propriedades do ***Menu* Editar.**

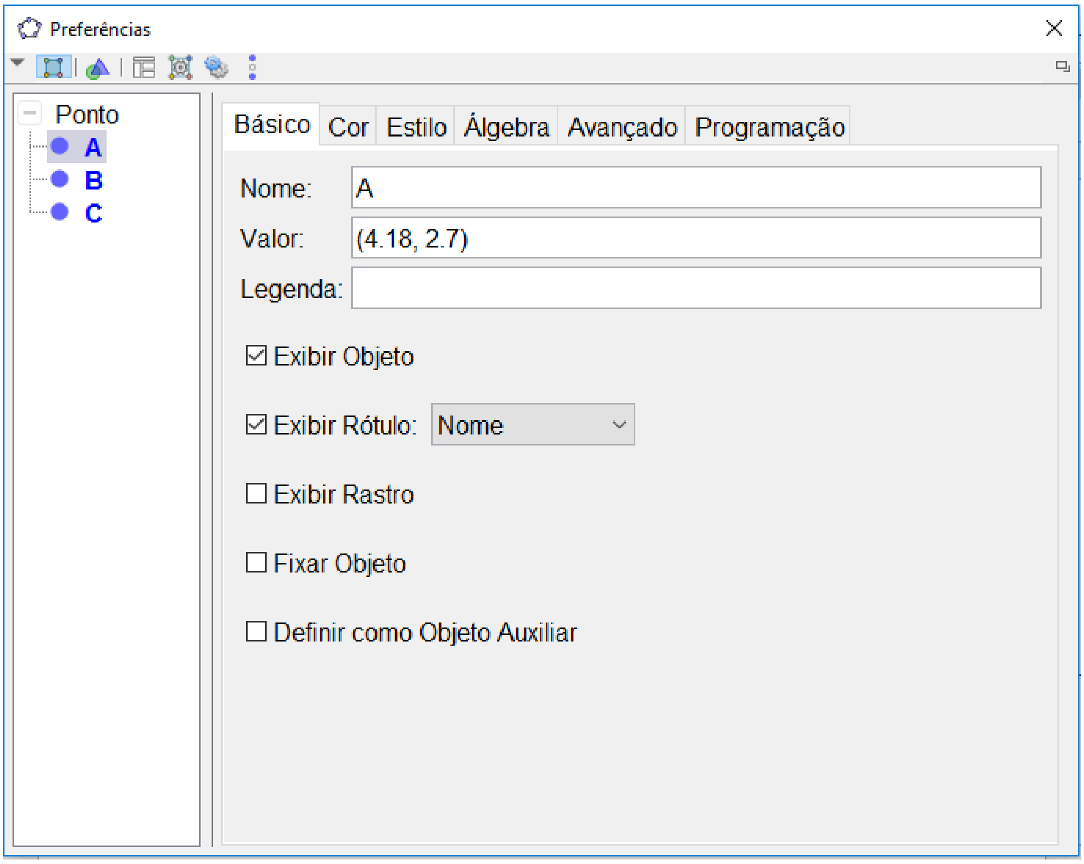


Figura 4.5: Janela de personalização de objetos criados
Fonte: Elaborado pelo autor

Menu Exibir

A função **Exibir** permite exibir ou esconder elementos da tela do *Geogebra*, tais como Janela de Álgebra, Planilha, Janela CAS e outras opções como mostra a Figura 4.6. Destacamos aqui a importância da Janela de Visualização 3D, por fazer parte essencial desta dissertação, onde podemos construir figuras tridimensionais, tais como o cubo, prisma, cilindro entre outras. Outra opção que elencamos é o Protocolo de Construção, pois é um recurso útil na hora de acompanhar o roteiro das construções, ou ainda aprender a construir um objeto a partir de objetos prontos. Como por exemplo, objetos salvos no computador ou no *Geogebra Tube*, onde podemos encontrar diversos materiais para *download* construídos no *Geogebra*, por meio do endereço eletrônico http://geogebratube.org.

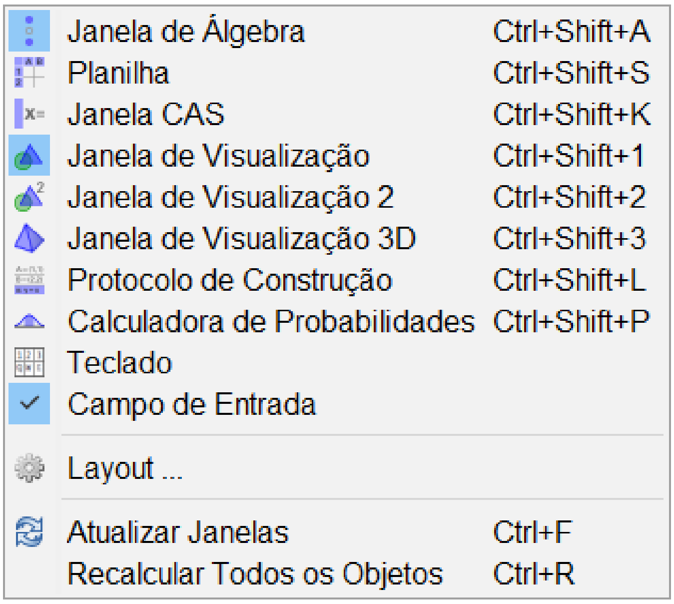


Figura 4.6: *Menu* Exibir
Fonte: Elaborado pelo autor

Menu Opções

A função **Opções** permite especificar o número de casas decimais, usando a função Arredondamento, com a função Rotular é permitido especificar se os rótulos dos objetos criados devem ser mostrados ou não. O item Tamanho da Fonte determina o tamanho da fonte para os rótulos ou para os textos. A função Idioma permite escolher o idioma utilizado, traduzido para 55 idiomas.

A função Avançado permite fazer alterações em unidades de medidas como, ângulos em graus ou ângulos em radianos, alterar o estilo dos ângulos quanto a sua representação na janela gráfica, alterar a formatação dos pontos em coordenadas cartesianas, vistas na Janela de Álgebra e outras. A opção Gravar Configurações permite o Geogebra a recordar-se-á das suas configurações criadas referentes ao *Menu* Opções, Barra de Ferramentas ou a Janela de Visualização. A opção Restaurar Configuração Padrão permite voltar às configurações padrão do *Geogebra*.

A Figura 4.7 apresenta as funções do *Menu* Opções.

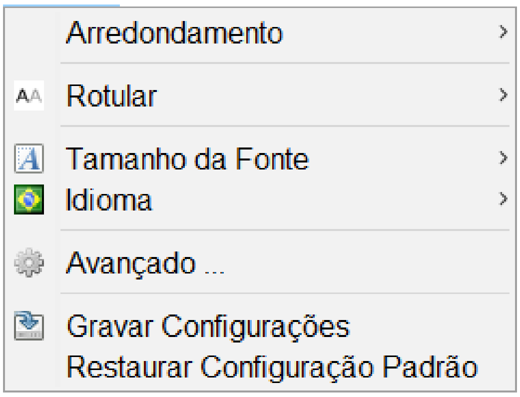


Figura 4.7: *Menu* Opções
Fonte: Elaborado pelo autor

Menu Ferramentas

A opção Configuração Barra de Ferramentas, permite personalizar, inserindo ou removendo ícones da Barra de Ferramentas, isto é muito útil quando se quer criar páginas *web* interativa, quando se quer restringir a ferramenta na Barra de Ferramentas.

Com a opção Criar uma Nova Ferramenta é possível com base numa construção existente criar as suas próprias ferramentas. Pode também escolher o nome da ferramenta e ainda escolher o ícone que aparecerá na Barra de Ferramentas.

Usando o *Menu* Gerenciar Ferramentas é permitido apagar uma ferramenta ou modificar o seu nome ou o seu ícone. Podem-se gravar as ferramentas de sua autoria.

Menu Janela

A função **Janela** ou a tecla de atalho ***Ctrl+N*** abre uma nova janela do *Geogebra,* mantendo a janela anterior aberta.

Menu Ajuda

A função **Ajuda** dá acesso a *links* que nos leva à *sites,* à documentos de ajuda e a manuais do *Geogebra*. Temos também acesso ao Fórum do *Geogebra*, onde se pode perguntar e responder sobre questões relativas ao *Geogebra*. Temos ainda o Reportar Erro e Sobre/Licença.

4.1.3 Barra de Ferramentas 2D

A Barra de Ferramentas é composta por 11 janelas, em cada janela estão distribuídas as principais ferramentas de acordo com suas especificidades, que auxiliam o usuário na construção de objetos. Para visualizar as ferramentas de cada janela, é necessário clicar na parte inferior direita, indicado por uma seta para baixo, como mostra a Figura 4.8. Desse modo é possível visualizar os ícones de ferramentas, observe que, cada ícone tem um desenho e um nome associado, facilitando reconhecer e lembrar o que a ferramenta faz. A seguir, mostraremos os ícones de ferramentas de cada janela.

Janela 1 da Barra de Ferramentas

A Figura 4.8 mostra as Ferramentas da Janela 1.

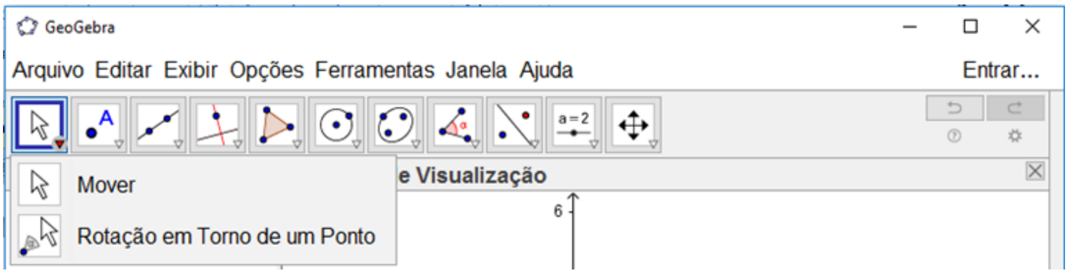


Figura 4.8: Ferramentas da Janela 1
Fonte: Elaborado pelo autor

**Mover:** Permite mover e selecionar objetos.

**Rotação em Torno de um Ponto:** Selecione primeiro o ponto, em seguida pode rodar objetos em torno desse centro, arrastando-os com o *mouse*.

Janela 2 da Barra de Ferramentas

A Figura 4.9 mostra as ferramentas da janela 2, utilizadas na construção de pontos.

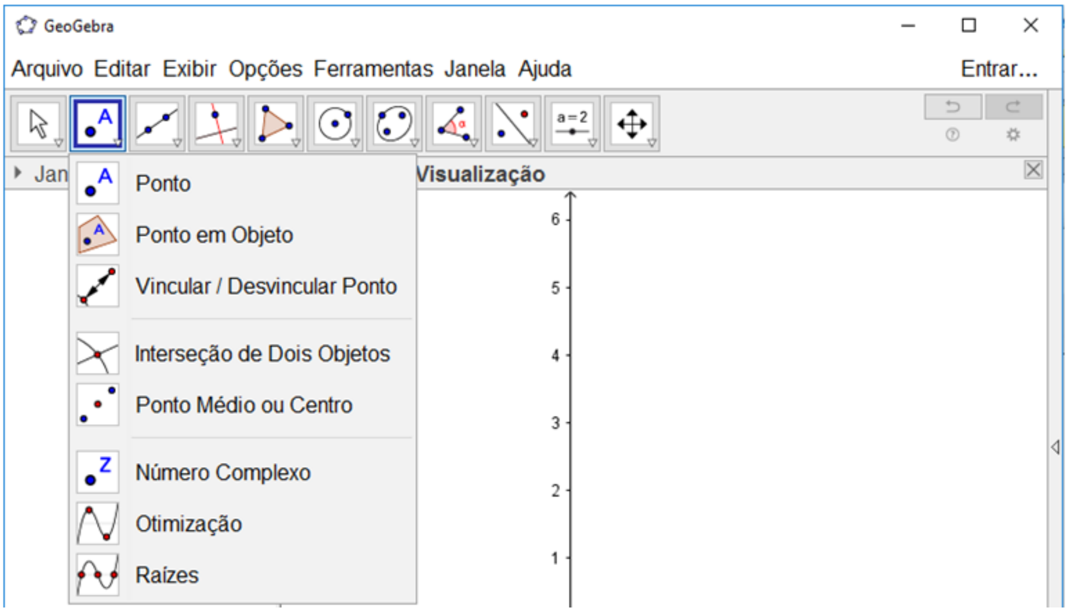
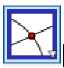


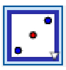
Figura 4.9: Ferramentas da Janela 2
Fonte: Elaborado pelo autor

**Ponto:** Selecionada esta ferramenta e, clicando na Janela de Visualização ou em qualquer objeto (segmento, reta, polígono, cônica ou gráfico de função), pode criar um ponto nesse objeto.

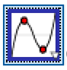
**Ponto em Objeto:** Clique no interior de um objeto ou em sua fronteira para criar um ponto.

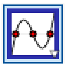
**Vincular / Desvincular Ponto:** Permite vincular ponto a um objeto.

**Interseção de Dois Objetos:** Selecione dois objetos e clique diretamente na interseção, um ponto será criado.

**Ponto Médio ou centro:** Selecione dois pontos, um segmento, um círculo ou uma cônica.

**Número complexo:** Clique na Janela de Visualização para criar um número complexo.

**Otimização:** Selecione uma função para encontrar seus extremos.

**Raízes:** Selecione uma função para encontrar suas raízes.

Janela 3 da Barra de Ferramentas

A Figura 4.10 mostra as ferramentas da janela 3, utilizadas na construção de retas, segmentos e vetores.

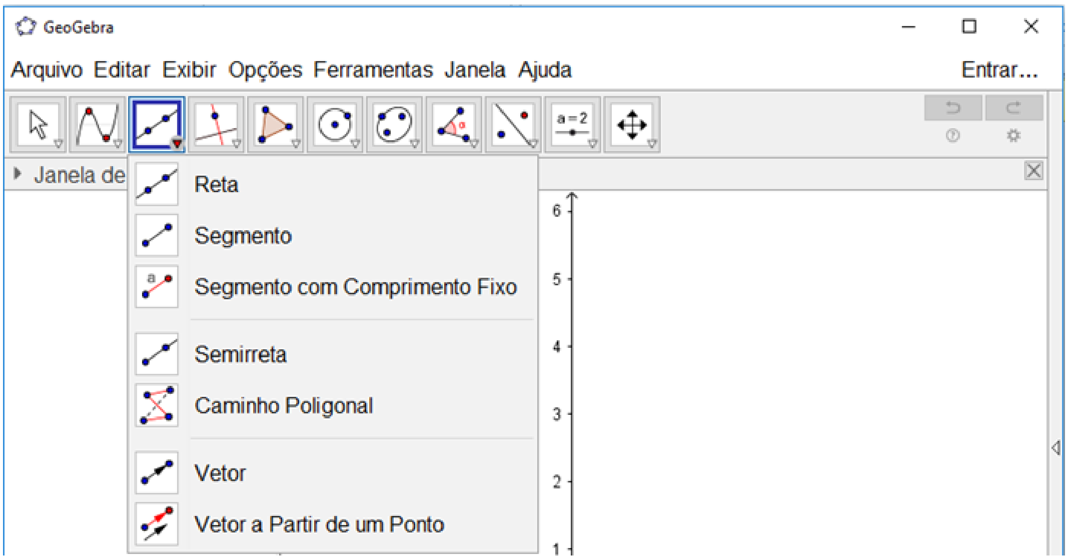
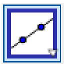
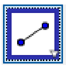
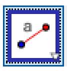
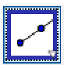


Figura 4.10: Ferramentas da Janela 3
Fonte: Elaborado pelo autor

**Reta:** Cria-se uma reta selecionando dois pontos. A equação da reta correspondente aparecerá na Janela de Álgebra.

**Segmento:** Permitem criar um segmento, selecionando dois pontos, esses pontos serão extremos do segmento criado.

**Segmento com Comprimento Fixo:** Selecione primeiro o ponto e depois digite o comprimento do segmento, no campo de texto da janela de diálogo que aparece.

**Semirreta:** Selecione primeiro um ponto, que será a origem, e depois outro ponto para criar à semirreta. Este comando também gerará uma equação da reta correspondente na Janela de Álgebra.

Caminho Poligonal: Selecione todos os vértices e depois o vértice inicial. Este comando permite criar uma linha poligonal aberta.

Vetor: Selecione o ponto origem e depois o ponto extremidade do vetor.

Vetor a Partir de um Ponto: Selecione primeiro o ponto de origem e depois um vetor.

Janela 4 da Barra de Ferramentas

A Figura 4.11 mostra as ferramentas da janela 4. Tais ferramentas permite a construção de retas auxiliares.

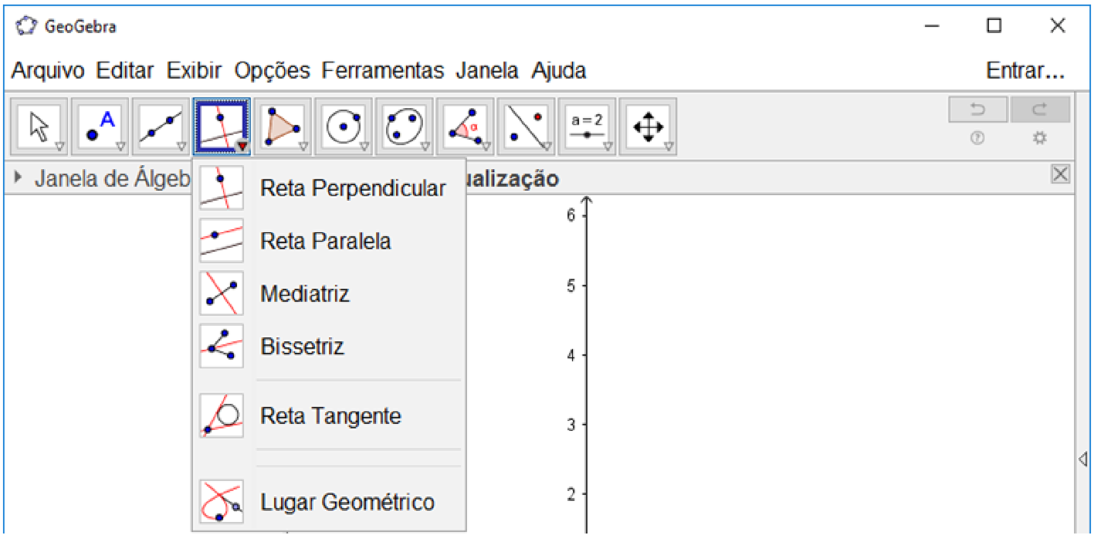


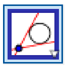
Figura 4.11: Ferramentas da Janela 4
Fonte: Elaborado pelo autor

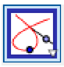
Reta Perpendicular: Selecione primeiro o ponto e, depois, selecione uma reta, ou um segmento, ou um vetor. Uma reta perpendicular a um desses objetos será criada nesse ponto.

Reta Paralela: Selecione primeiro o ponto e, depois, selecione uma reta, ou um segmento, ou um vetor. Uma reta paralela a um desses objetos será criada nesse ponto.

Mediatriz: Selecione dois pontos ou segmento.

**Bissetriz:** Pode-se definir uma bissetriz de três maneiras. Selecionando três pontos distintos, selecionando duas retas ou dois segmentos de retas.

**Reta Tangente:** Selecione primeiro um ponto e, depois, um círculo, uma cônica ou uma função.

**Lugar Geométrico:** Selecione o ponto do lugar geométrico e, depois, o ponto sobre o objeto ou o controle deslizante.

Janela 5 da Barra de Ferramentas

A Figura 4.12 mostra as ferramentas da janela 5. Utilizadas na construção de polígonos.

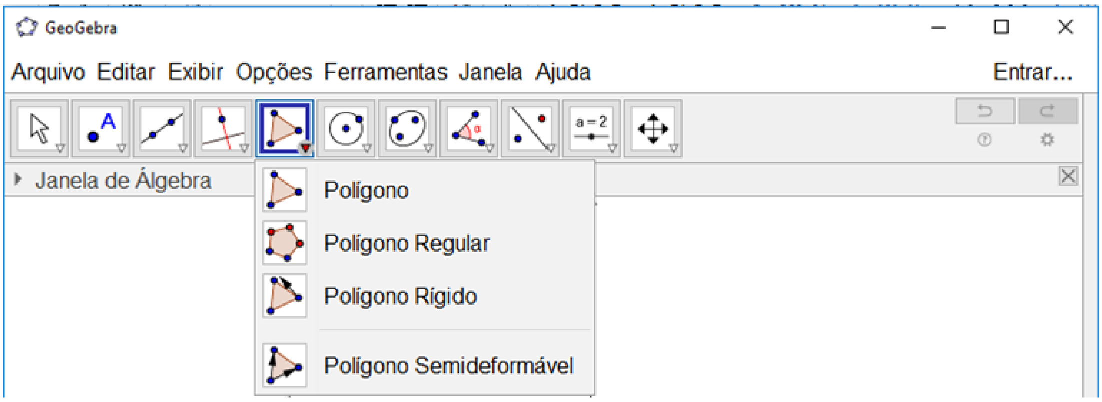
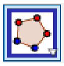
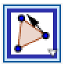


Figura 4.12: Ferramentas da Janela 5
Fonte: Elaborado pelo autor

**Polígono:** Selecione sucessivamente pelo menos três pontos. Depois, clique novamente no primeiro ponto para fechar o polígono. A área do polígono é mostrada na Janela de Álgebra.

**Polígono Regular:** Selecione dois pontos, em seguida digite o número de vértices na janela de diálogo que aparece.

**Polígono Rígido:** Selecione todos os vértices, então clique no primeiro vértice novamente. Para fazer a translação do polígono, use a ferramenta **Mover,** clique e segure com o botão esquerdo do *mouse*, no vértice inicial.

**Polígono Semideformável:** Selecione todos os vértices, então, clique novamente no vértice inicial.

Janela 6 da Barra de Ferramentas

A Figura 4.13 mostra as ferramentas da janela 6, utilizadas na construção de círculos e arcos.

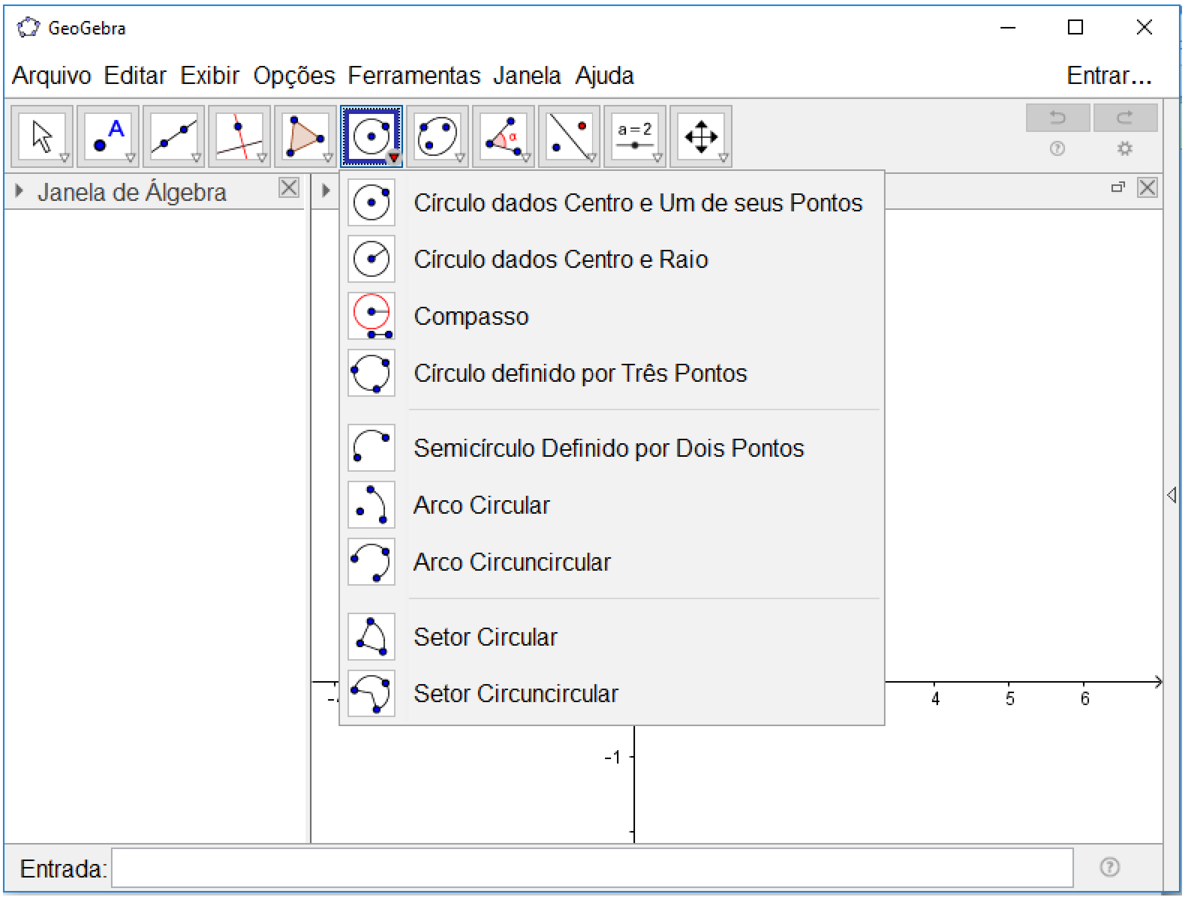
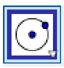
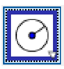
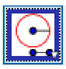


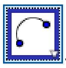
Figura 4.13: Ferramentas da Janela 6
Fonte: Elaborado pelo autor

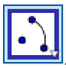
 **Círculo dados Centro e Um de seus Pontos:** Selecione o centro e, depois, um ponto do círculo.

**Círculo dados Centro e Raio:** Selecione o centro, em seguida digite a medida do raio na janela de diálogo que aparece.

**Compasso:** Selecione um segmento ou dois pontos para definir o raio, em seguida o centro.

**Círculo definido por Três Pontos:** Selecione três pontos para definir um círculo. A equação do círculo correspondente aparecerá na Janela de Álgebra.

**Semicírculo Definido por Dois Pontos:** Selecione dois pontos para definir um semicírculo. O comprimento do semicírculo aparecerá na Janela de Álgebra.

**Arco Circular:** Selecione o centro e, depois, dois pontos.

**Arco Circuncircular:** Selecione três pontos.

**Setor Circular:** Selecione o centro e, depois, dois pontos. A área do setor circular aparecerá na Janela de Álgebra.

**Setor Circuncircular:** Selecione três pontos.

Janela 7 da Barra de Ferramentas

A Figura 4.14 mostra as ferramentas da janela 7, utilizadas na construção das cônicas.

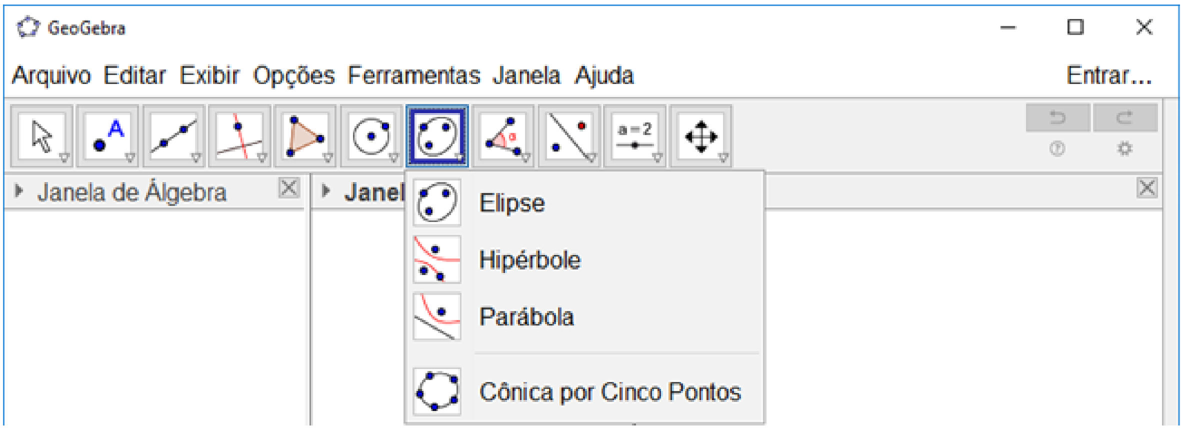
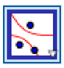
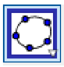


Figura 4.14: Ferramentas da Janela 7
Fonte: Elaborado pelo autor

**Elipse:** Selecione dois focos e, depois, um ponto da elipse. A equação da elipse aparecerá na Janela de Álgebra.

**Hipérbole:** Selecione dois focos e, depois, um ponto da hipérbole. A equação da hipérbole aparecerá na Janela de Álgebra.

**Parábola:** Selecione o foco e, depois, a diretriz. A equação da parábola aparecerá na Janela de Álgebra.

**Cônica por Cinco Pontos:** Selecione cinco pontos. Dependendo de onde se localizam os pontos essa cônica assume características elípticas ou hiperbólicas. A equação correspondente à cônica aparecerá na Janela de Álgebra.

Janela 8 da Barra de Ferramentas

A Figura 4.15 mostra as ferramentas da janela 8.

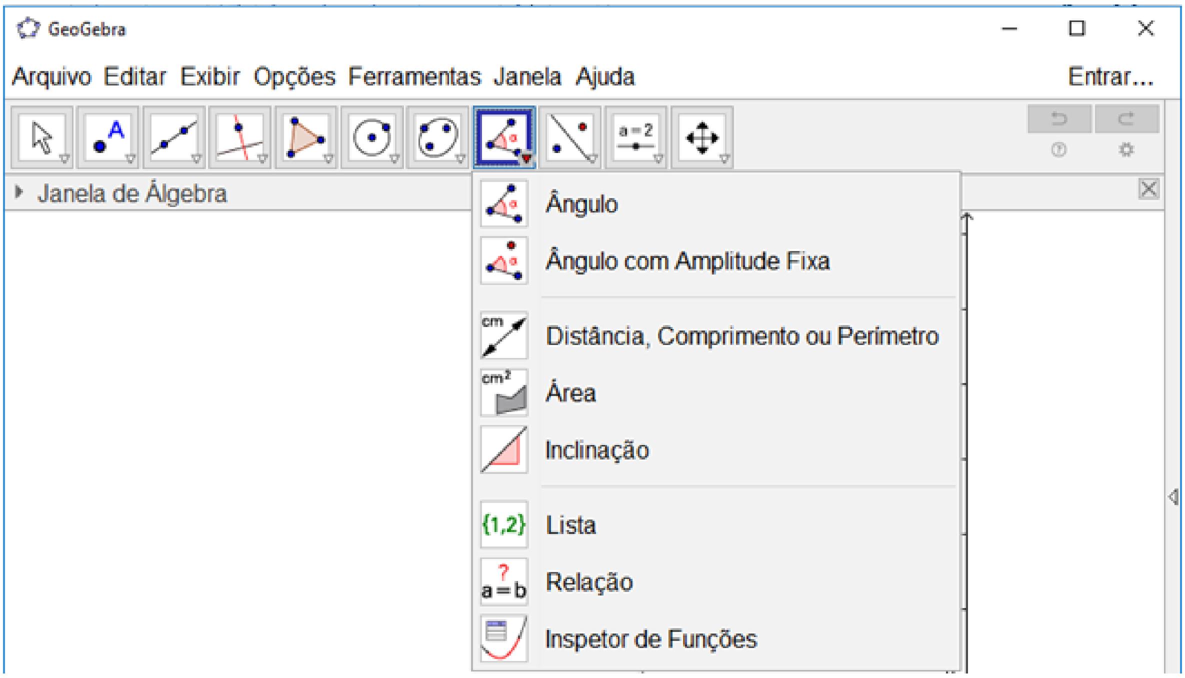


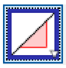
Figura 4.15: Ferramentas da Janela 8
Fonte: Elaborado pelo autor

**Ângulo:** Selecione três pontos ou duas retas.

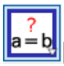
**Ângulo com Amplitude Fixa:** Selecione um ponto, um vértice e uma amplitude para o ângulo na janela de diálogo que aparece.

**Distância, Comprimento ou Perímetro:** Selecione dois pontos, um segmento, um polígono ou um círculo**.**

**Área:** Selecione um polígono ou um círculo ou uma elipse.

**Inclinação:** Selecione uma reta, uma semirreta ou um segmento. Esta ferramenta permite a inclinação ***m*** do objeto, mostra na Janela de Visualização um triângulo retângulo, onde a medida ***m*** é a razão entre a medida do cateto vertical e a medida do cateto horizontal.

**Lista:** Selecione células e, então, clique no botão da ferramenta.

**Relação:** Permite estabelecer a relação entre dois objetos.

**Inspetor de Funções:** Selecione uma função. Esta ferramenta abre uma janela com informações de certo intervalo dinâmico da função, tais como, mínimo, máximo, raízes, integral, média e comprimento.

Janela 9 da Barra de Ferramentas

A Figura 4.16 mostra as ferramentas da janela 9

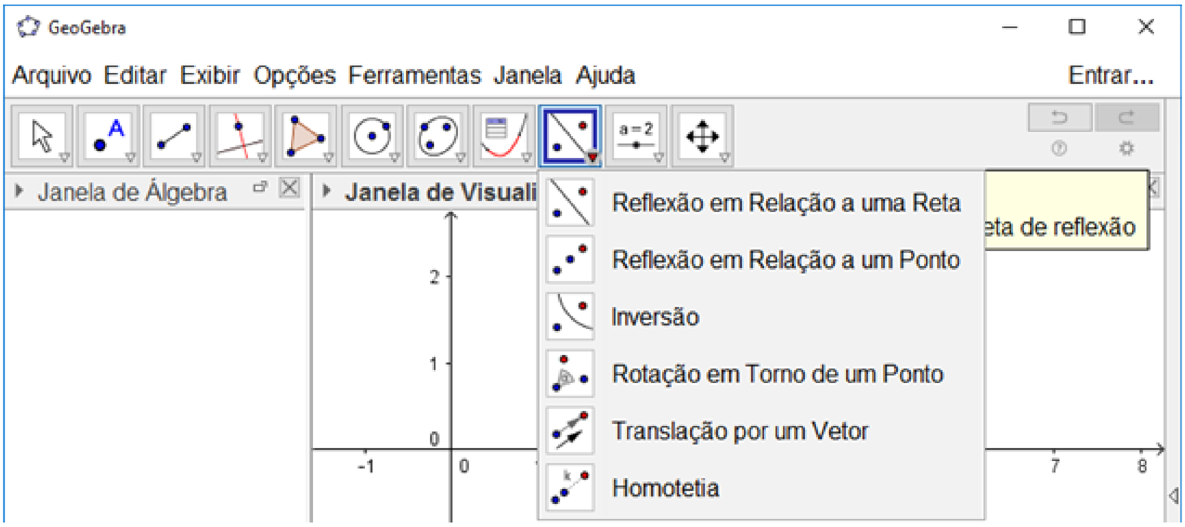
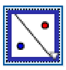
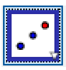
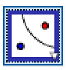
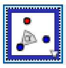


Figura 4.16: Ferramentas da Janela 9
Fonte: Elaborado pelo autor

**Reflexão em Relação a uma Reta:** Selecione primeiro o objeto e, depois, a reta de reflexão.

**Reflexão em Relação a um Ponto:** Selecione primeiro o objeto e, depois, o centro de reflexão.

**Inversão:** Selecione primeiro o objeto e, depois, o círculo.

**Rotação em Torno de um Ponto:** Selecione primeiro o objeto e, depois, o centro, em seguida digite a amplitude para o ângulo na janela de diálogo que aparece.

**Translação por um Vetor:** Selecione primeiro o objeto a ser transladado e depois o vetor.

**Homotetia:** Selecione o objeto e, depois, o centro, em seguida digite a razão da homotetia na janela de diálogo que aparece.

Janela 10 da Barra de Ferramentas

A Figura 4.17 mostra as ferramentas da janela 10.

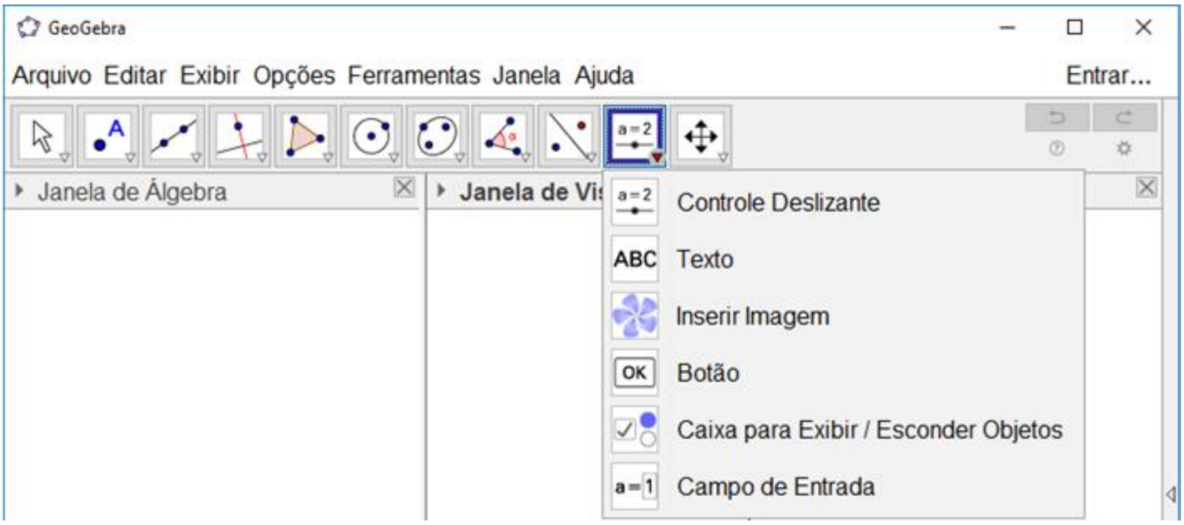
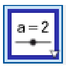


Figura 4.17: Ferramentas da Janela 10
Fonte: Elaborado pelo autor

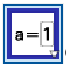
**Controle Deslizante:** Clique na Janela de Visualização para especificar a posição do controle deslizante, então, uma nova janela se abrirá. Nessa janela especifique o nome, número ou ângulo, intervalo e incremento, em seguida digite ENTER.

**Texto:** Clique na Janela de Visualização ou em um ponto, e crie um texto na janela de diálogo que aparece. Esta ferramenta permite criar textos dinâmicos e formas em LaTex.

**Inserir Imagem:** Essa ferramenta permite inserir imagens na Janela Gráfica, ao clicar na Janela de Visualização ou em um ponto, aparece uma janela de ficheiro, que permite selecionar qualquer ficheiro de imagem que exista no computador, em seguida no canto inferior direito da imagem é criado automaticamente um ponto que permite seu ajuste.

**Botão:** Clique na Janela de Visualização para inserir um botão.

**Caixa para Exibir / Esconder Objetos:** Clique na área de trabalho para criar uma caixa, em seguida digite a legenda e os objetos na construção ou escolha em uma lista, na janela de diálogo que aparece.

**Campo de Entrada:** Clique na Janela de Visualização para inserir um campo de texto.

Janela 11 da Barra de Ferramentas

A Figura 4.18 mostra as ferramentas da janela 11.

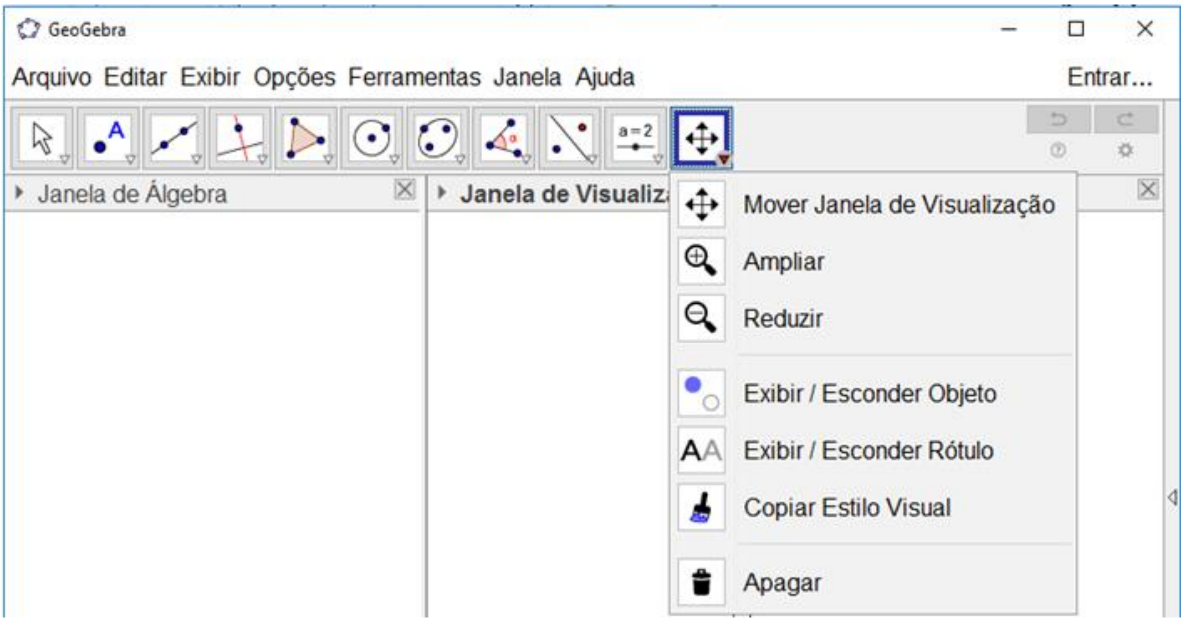
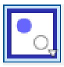


Figura 4.18: Ferramentas da Janela 11
Fonte: Elaborado pelo autor

**Mover Janela de Visualização:** Essa ferramenta permite arrastar a Janela de Visualização ou um eixo.

**Ampliar:** Clique na Janela de Visualização para ampliá-la.

**Reduzir:** Clique na Janela de Visualização para reduzi-la.

**Exibir / Esconder Objeto:** Selecione os objetos e, em seguida, ative outra ferramenta.

**Exibir / Esconder Rótulo:** Selecione o objeto para exibir ou esconder o seu rótulo.

**Copiar Estilo Visual:** Clique no objeto modelo e, em seguida naquele cujo estilo pretende alterar.

**Apagar:** Selecione o objeto para apagá-lo.

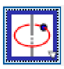
4.1.4 Barra de Ferramentas da Janela de Visualização 3D

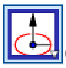
A barra de ferramentas se altera quando a Janela de Visualização 3D está ativada. Passando a ter 14 janelas no total, mas, na sua grande maioria, essas janelas contêm as mesmas ferramentas das ferramentas da Janela de Visualização 2D. Faremos aqui a apresentação de algumas dessas ferramentas úteis para a construção de objetos tridimensionais.

Barra de Ferramenta 3D

A Figura 4.19 apresenta a barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D. Em seguida mostraremos as mudanças na janela 6, com o acréscimo de duas novas ferramentas, úteis na construção de círculos.

Figura 4.19: Barra de Ferramentas da Janela de Visualização 3D
Fonte: Elaborado pelo autor

**Círculo dados Eixos e Um de seus Pontos:** Selecione o eixo e, depois, o ponto do círculo.

**Círculo (Centro – Raio + Direção):** Selecione o centro, a direção e, então forneça o raio na janela de diálogo que aparece.

Janela 7 da Barra de Ferramenta 3D

A Figura 4.20 mostra a janela 7 da barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.

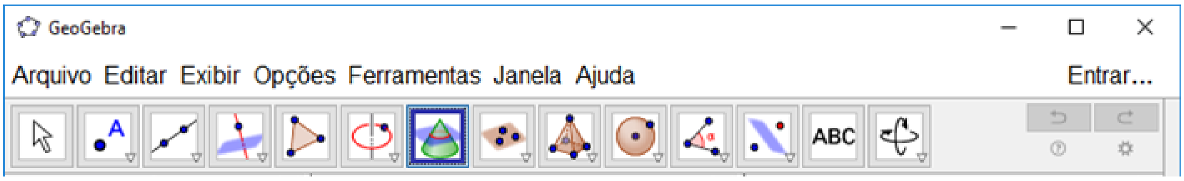


Figura 4.20: Interseção de Duas Superfícies
Fonte: Elaborado pelo autor

**Interseção de Duas Superfícies:** Constrói a curva de interseção de duas superfícies.

Janela 8 da Barra de Ferramentas 3D

A figura 4.21 mostra as ferramentas da janela 8 da barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.

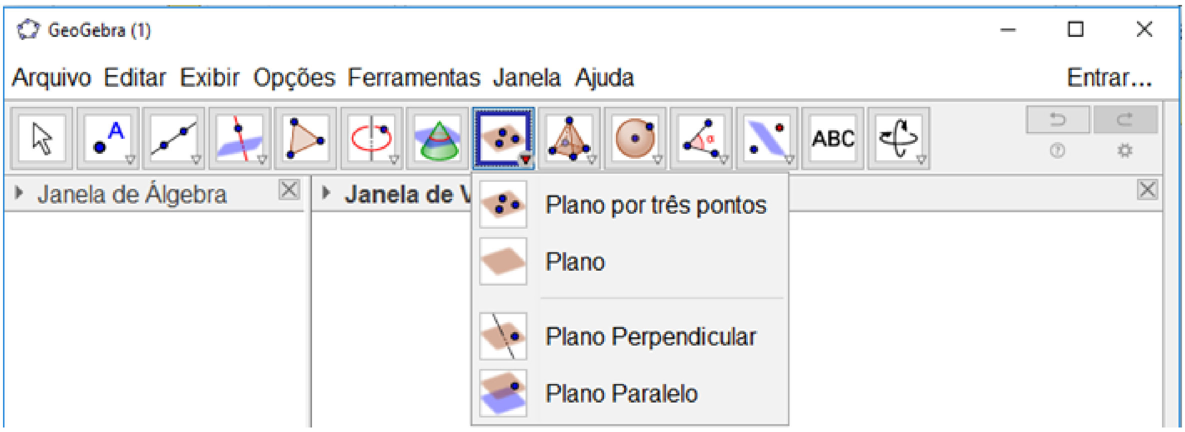
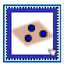
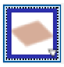
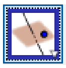
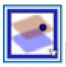


Figura 4.21: Ferramentas da janela 8 da Janela Visualização 3D
Fonte: Elaborado pelo autor

**Plano por três pontos:** Selecione três pontos para definir um plano.

**Plano:** Selecione três pontos, ou um ponto e uma reta, ou duas retas, ou um polígono para definir um plano.

**Plano Perpendicular:** Selecione um ponto e uma reta perpendicular.

**Plano Paralelo:** Selecione um ponto e um plano paralelo.

Janela 9 da Barra de Ferramentas 3D

A Figura 4.22 mostra as ferramentas da janela 9 da barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.

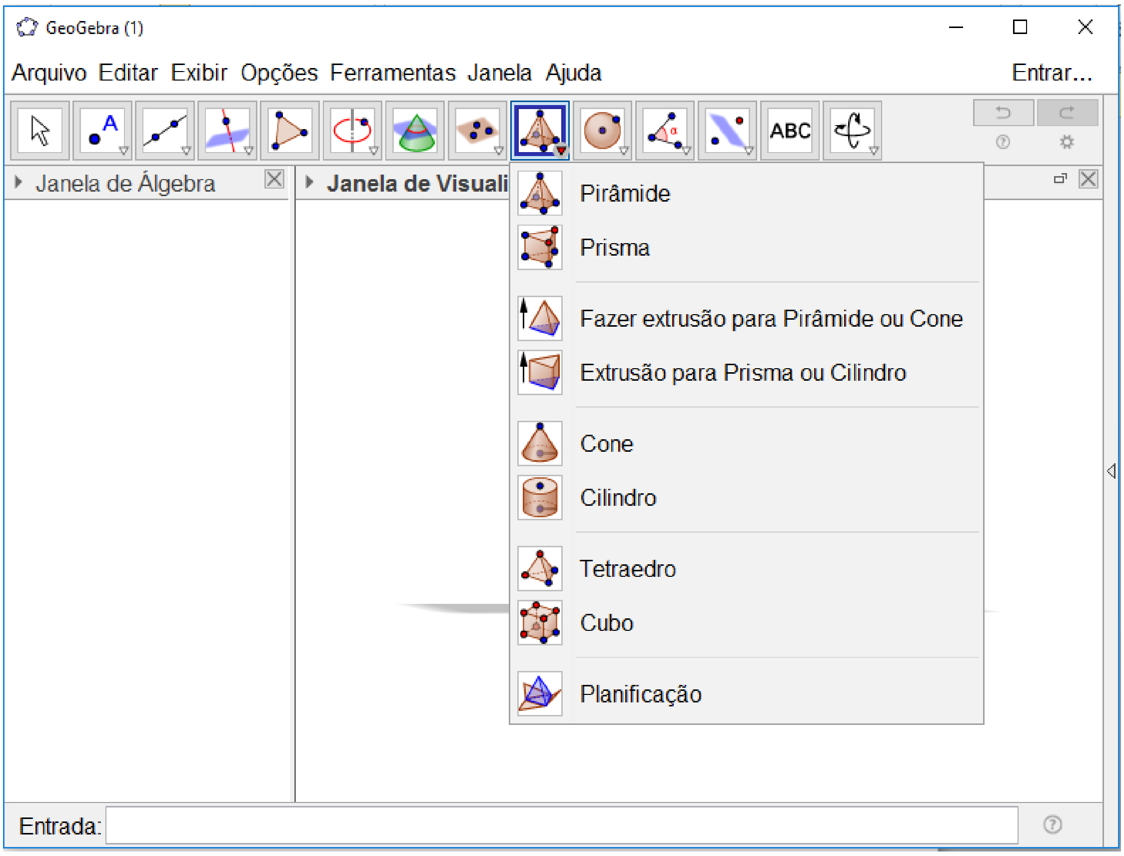
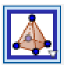
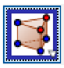


Figura 4.22: Ferramentas da janela 8 da Janela de Visualização 3D
Fonte: Elaborado pelo autor

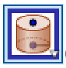
**Pirâmide:** Selecione ou crie um polígono para a base da pirâmide e, então, selecione ou crie um vértice oposto à base.

**Prisma:** Selecione ou crie um polígono para a base do prisma e, então, selecione ou crie um ponto da base oposta.

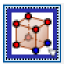
**Fazer extrusão para Pirâmide ou Cone:** Selecione um polígono ou um círculo e, então, em seguida digite a altura na janela de diálogo que aparece para definir uma pirâmide reta ou um cone reto.

**Extrusão para Prisma ou Cilindro:** Selecione um polígono ou um círculo e, então, em seguida digite a altura na janela de diálogo que aparece para definir um prisma reto ou um cilindro reto.

**Cone:** Selecione dois pontos e, então, especifique o raio na janela de diálogo que aparece.

**Cilindro:** Selecione dois pontos, depois especifique o raio na janela de diálogo que aparece.

**Tetraedro:** Clique em um plano, ou em dois pontos para definir um tetraedro.

**Cubo:** Clique em um plano, ou em dois pontos para definir um cubo.

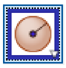
**Planificação:** Selecione um poliedro.

Janela 10 da Barra de Ferramentas 3D

A Figura 4.23 mostra as ferramentas da janela 10 da barra de Visualização 3D.

Figura 4.23: ferramentas da janela 10 da barra de Janela de Visualização 3D
Fonte: Elaborado pelo autor

**Esfera dados Centro e Um de Seus Pontos:** Selecione um centro e, então um ponto da esfera.

**Esfera dados Centro e Raio:** Selecione o centro, em seguida digite o raio na janela de diálogo que aparece.

Janela 11 da Barra de Ferramentas 3D

A Figura 4.24 mostra as ferramentas da janela 11 da barra da Janela de Visualização 3D, mas citaremos aqui apenas a ferramenta para o cálculo do volume de sólidos, já que, as outras ferramentas foram mencionadas na janela 8 da Barra de Ferramentas, como mostra a Figura 4.15 na seção 4.1.3 desta dissertação.

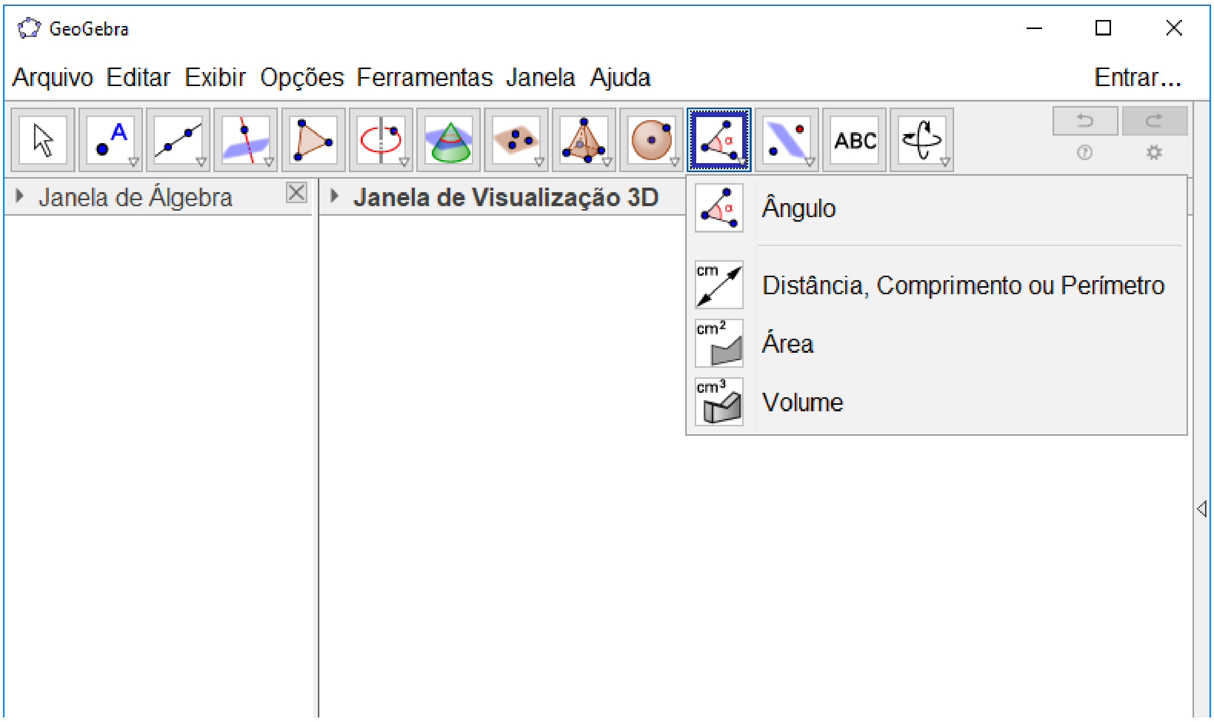


Figura 4.24: Ferramentas da janela 11 da Barra da Janela de Visualização 3D
Fonte: Elaborado pelo autor

**Volume:** Selecionar pirâmide, prisma, esfera, cone, cilindro e outros.

Janela 14 da Barra de Ferramentas 3D

A Figura 4.25 mostra as ferramentas da janela 14, destacamos as ferramentas, **Girar Janela de Visualização 3D** e **Vista para frente de.** As demais ferramentas foram citadas da janela 11 da Barra de Ferramentas, como mostra a Figura 4.18 na seção 4.1.3.

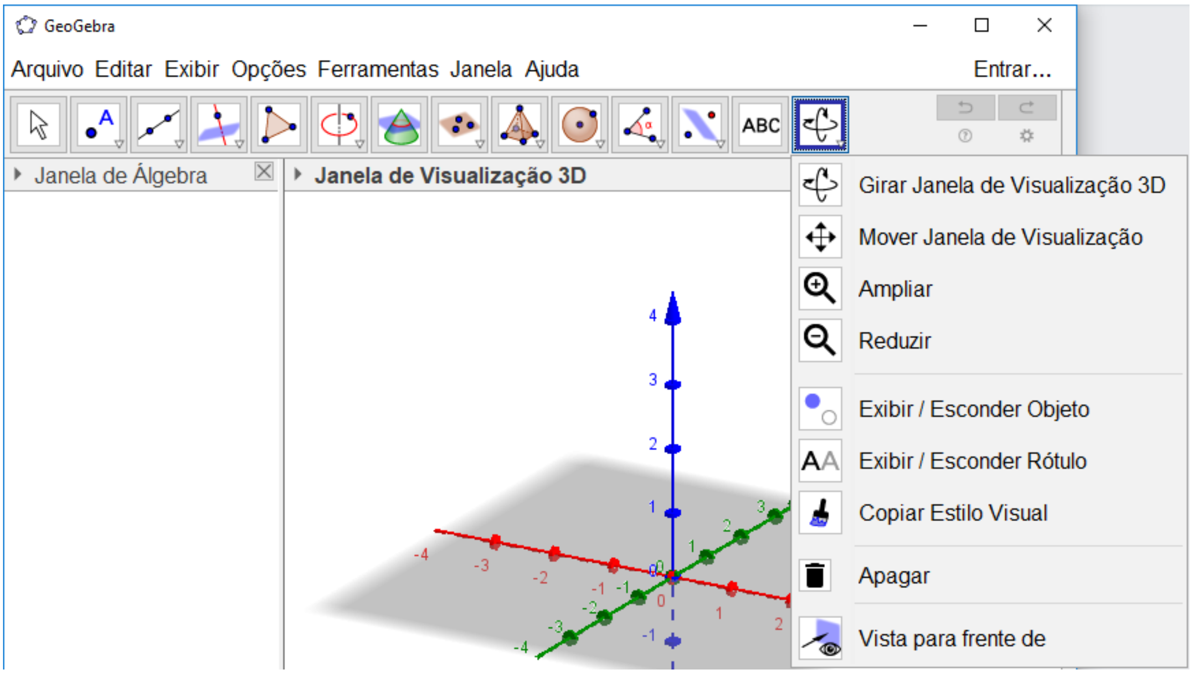
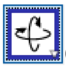


Figura 4.25: Ferramentas da janela 14 da barra da Janela de Visualização 3D
Fonte: Elaborado pelo autor

**Girar Janela de Visualização 3D:** Arraste a Janela de Visualização 3D.

**Vista para frente de:** Muda a vista para frente do objeto selecionado.

Esperamos que este capítulo tenha contribuído para que o leitor possa utilizar as ferramentas do *software Geogebra*. No próximo capítulo apresentamos os métodos e procedimentos desta pesquisa.

5 MÉTODOS E PROCEDIMENTOS

Para a elaboração deste trabalho foi realizado inicialmente uma pesquisa bibliográfica através de livros, artigos, dissertações e teses. Após a revisão bibliográfica foi elaborado uma série de sequências de atividades envolvendo Geometria Plana e Geometria Espacial. Neste trabalho optamos em buscar resultados qualitativos, o que nos permite analisar os sujeitos da pesquisa de modo peculiar, envolvendo contato direto entre sujeitos e pesquisadores.

De acordo com Gerhard e Silveira (2009) na pesquisa qualitativa o pesquisador ao mesmo tempo é sujeito e objeto de sua própria pesquisa, esse tipo de pesquisa preocupa-se com aspectos reais que não podem ser contabilizados, envolvendo uma abordagem interpretativa do cenário analisado, os dados são coletados pela observação e descrição.

De modo que a pesquisa qualitativa nos permite reformular e questionar os tópicos e temas na medida em que a análise se desenvolve, levando o pesquisador a reflexões que permitem entender o cenário natural, com o objetivo de aprender e interpretar os elementos de investigação.

Assim, a pesquisa deve contribuir de modo que o leitor possa aplicar ou desenvolver novos estudos no sentido de colaborar com a comunidade científica.

As atividades foram desenvolvidas de acordo com a Proposta Curricular do Estado de São Paulo para os alunos do 2º ano do Ensino Médio.

A pesquisa foi realizada com duas turmas, denominadas Turma A e Turma B, com o objetivo de fazer uma comparação entre elas, sobre o ensino da Geometria através do *software Geogebra* e o ensino tradicional em sala de aula sem o uso de computadores. Ao final de cada atividade com o *software* foram aplicadas algumas questões pertinentes ao conteúdo, o mesmo ocorria com a turma que realizou os trabalhos em sala de aula sem o uso dos computadores, dessa forma ao final de cada atividade pode-se comparar as respostas entre as turmas envolvidas.

5.1 A CIDADE DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada numa escola pública estatual do Estado de São Paulo e está localizada na zona urbana do município de Itaberá no interior do Estado de São Paulo, aproximadamente a 324 quilômetros da capital paulista. De acordo com

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), a cidade possui área territorial de 1.110,350 km^2 com população estimada para 2016 de 17.946 habitantes. Pelo Censo Demográfico 2010, a população do município é de 17.858 pessoas, sendo 9.016 homens e 8.842 mulheres.

Ainda segundo dados do IBGE, em 2015 a cidade de Itaberá atendia 3.334 alunos da zona rural e da zona urbana, dos quais, 411 matriculados na Pré-escola, 2.147 no Ensino Fundamental e 776 no Ensino Médio, distribuídos nas 23 escolas do município.

5.2 O LOCAL DA PESQUISA

Embora a escola situe-se na região central da cidade, seu público alvo é predominantemente alunos da periferia, conhecida como Vila Dom Sílvio, cuja a maioria dos alunos é de baixa renda e não possuem muita expectativa de estudos, pois na cidade não tem curso superior, dificultando assim o seu acesso à universidade.

A escola no ano de 2016, contava com 11 salas de aulas, 62 funcionários, sala de diretoria, sala de professores, laboratório de informática, quadra de esportes, cozinha, sala de leitura, banheiro dentro do prédio, almoxarifado, pátio e área verde.

A escola oferece atendimento a alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, Ensino Médio e EJA (Educação para Jovens e Adultos). Em 2016 o número de alunos matriculados foi de 549 no total, sendo 261 alunos no Ensino Fundamental e 288 alunos no Ensino Médio. A escola foi escolhida para o local da pesquisa por ser o local de trabalho do autor, e também pelo fato do autor ministrar aulas aos sujeitos da pesquisa, o que facilitou a aceitação por parte da diretoria, coordenação, pais e alunos (Apêndice A, B e C em anexo).

5.3 OS AGENTES E A APLICAÇÃO DA PESQUISA

Os agentes da pesquisa foram os alunos do 2º ano do Ensino Médio da Escola Estadual no município de Itaberá-SP. Foram escolhidas duas turmas distintas, com alunos entre 15 e 17 anos de idade. No total, 46 alunos participaram da pesquisa. A Turma A, tinha 26 alunos matriculados todos frequentes, a Turma B, tinha 24 alunos matriculados, com 20 alunos frequentes. Para organização e de modo a preservar a identidade dos alunos, buscou-se nomeá-los por Aluno 1, Aluno 2 e assim sucessivamente até o Aluno 46.

O convite foi feito 30 dias antes do início dos trabalhos e foi aceito por todos os alunos. Optamos por um sorteio entre as turmas, para saber qual das turmas iria realizar as atividades com o *software Geogebra*. Escolhida a turma, iniciamos os trabalhos em sala de aula, aplicando inicialmente um questionário sobre Geometria básica em ambas as turmas (Apêndice D em anexo). A Turma B sorteada para a realização das aulas no laboratório de informática participou das aulas tradicionais em sala e das aulas no laboratório. Assim, os alunos da Turma B tiveram a oportunidade de realizar as construções dos sólidos com o *software Geogebra.*

Em sala de aula foram utilizados com ambas as turmas os livros didáticos, caderno do aluno e alguns materiais sólidos de madeira, como pirâmide de base quadrada, cilindro, esfera, paralelepípedo, prisma de base triangular e prisma de base hexagonal.

A pesquisa foi aplicada entre os meses de outubro e novembro do ano de 2016, por ser conteúdo do 4º Bimestre da Proposta Curricular do Estado de São Paulo, para alunos do 2º ano do Ensino Médio, de modo a não atrapalhar o conteúdo e a rotina de trabalho da proposta pedagógica da escola. Para a realização do projeto foram necessárias 20 aulas em sala de aula em que o conteúdo de Geometria Espacial foi abordado com o uso do livro didático e 10 aulas na sala de informática utilizando o *software*, totalizando 30 aulas para sua realização.

Na aplicação das atividades era necessário que os alunos tivessem conhecimentos prévios de Geometria Plana e Geometria Espacial, e que já tenham tido contato com o computador. Casos ainda não o tivessem, foi necessário que o professor levasse os alunos algumas aulas anteriormente na sala de informática para que os mesmos se familiarizem com alguns comandos do computador.

No final dos trabalhos da pesquisa, para fim de despertar o interesse nos alunos da Turma A, pelo uso da tecnologia e para não haver parcialidade, o professor autor, como docente titular da sala, trabalhou algumas aulas na sala de informática com o *software Geogebra,* da mesma forma com que foi trabalhado com os alunos da Turma B. A fim de promover igualdade de ensino e aprendizagem entre os alunos de ambas as turmas.

5.4 INSTRUMENTOS UTILIZADOS PARA COLETA DE DADOS

Todas as etapas e o desenvolvimento das atividades foram coletados através do registro no diário de classe, questionário, anotações diárias e atividades executadas pelos alunos, fotografias, cópias das atividades realizadas e avaliação bimestral.

6 ATIVIDADES DE GEOMETRIA ESPACIAL COM O USO DO *GEOGEBRA*

Este capítulo apresenta as atividades desenvolvidas durante a realização do projeto. As atividades foram realizadas no laboratório de informática na escola do local da pesquisa. Para isso foram desenvolvidas cinco atividades com o uso do *software Geogebra,* baseadas nas sugestões da proposta curricular do caderno do aluno do Estado de São Paulo, para alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Inicialmente foram trabalhados com os poliedros, entre eles o cubo, o prisma de base trapezoidal, a pirâmide de base hexagonal e os poliedros regulares, nas atividades envolvendo corpos redondos, como o cilindro, cone e esfera, optou-se pela construção de rotação de figuras planas, retângulo, triângulo e o círculo, respectivamente.

As atividades tiveram como objetivo proporcionar um melhor entendimento dos sólidos geométricos, elencando as principais propriedades de Geometria Plana, tais como, retas, pontos, segmentos, ângulos, paralelismo e congruência. Com isso foi também trabalhado os conceitos de polígonos regulares, áreas, volumes e planificação.

Não podemos deixar de elencar o fato da familiarização com o *software Geogebra*, já que o mesmo possui inúmeros recursos, tanto geométrico como algébrico. O uso das tecnologias nas aulas abre possibilidades de mudança no conhecimento, despertando nos alunos um interesse maior para os conteúdos muitas vezes abstratos da Matemática.

Nas próximas seções apresentamos as atividades desenvolvidas no laboratório de Informática.

6.1 ATIVIDADE 1: CONSTRUÇÃO DO CUBO

Objetivos: Apresentar o *software Geogebra* aos alunos utilizando principalmente o campo de Entrada. Construir o cubo e visualizar através da janela de Álgebra as medidas das arestas, área e volume. Mostrar que a menor distância entre dois vértices opostos pela diagonal do cubo é uma linha reta, independente se o trajeto for pelas faces ou por dentro do cubo.

Duração: Duas aulas.

Metodologia: Uso do *Datashow*, para que os alunos possam acompanhar a construção, giz e quadro negro para fazer algumas observações caso sinta necessidade.

Roteiro.

- Abra o *Geogebra* clicando no ícone localizado na área de trabalho ou digite *Geogebra* no *menu* iniciar. Em seguida clique em Opções, Rotular e selecione **Apenas para os pontos novos**, como mostra a Figura 6.1.

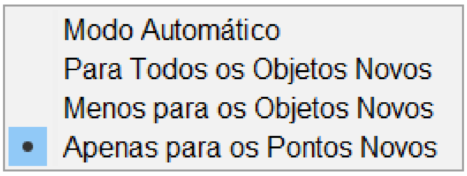


Figura 6.1: Janela do *Menu*, Opções/Rotular
Fonte: Elaborado pelo autor

- Na janela 10 da barra de ferramenta, selecione a ferramenta **Controle Deslizante**, em seguida clique em um ponto qualquer da Janela de Visualização 2D, e uma janela aparecerá. Nessa janela escolha a opção **Número**, no campo **Nome** mantenha e letra ***a*,** vá ao campo **Intervalo**, digite ***1*** no campo **Mínimo**, ***5*** no campo **Máximo** e ***1*** no campo **Incremento**, depois clique em Ok.
- Usando o campo de **Entrada** digite os seguintes comandos:
  A= (0,0,0), em seguida tecle ENTER;
  B= (a,0,0), em seguida tecle ENTER.
- Na barra do *menu* Principal, clique em **Exibir,** e selecione **Janela de Visualização 3D**, em seguida aparecerá uma nova janela na tela do *Geogebra*. Nesta nova janela clique com o botão direito do *mouse* e desmarque a opção **Eixos,** mantendo apenas a opção **Plano,** conforme a Figura 6.2. Esta nova janela permitirá a visualização dos objetos tridimensionais.

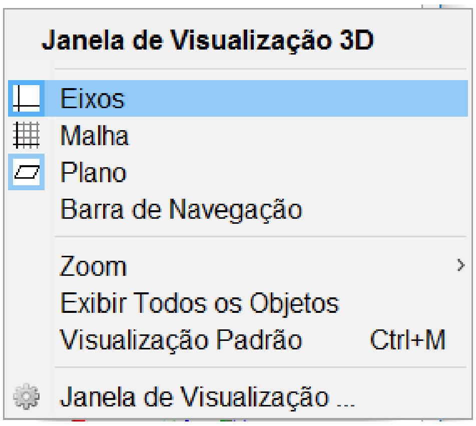


Figura 6.2: Exibir/ Esconder Eixos, Malha ou Plano da Janela de Visualização 3D
Fonte: Elaborado pelo autor

➢ Novamente no campo de **Entrada,** digite **Cubo[A,B],** em seguida a tecla ENTER. Aparecerá o cubo formado na Janela de Visualização 3D, observem que na janela de Álgebra contém todas as informações sobre os objetos do cubo e do quadrado na Janela de Visualização 2D, como volume, medidas das arestas, pontos com suas coordenadas, área das faces e medidas das arestas. A Figura 6.3 mostra o quadrado e o cubo construído no *Geogebra*.

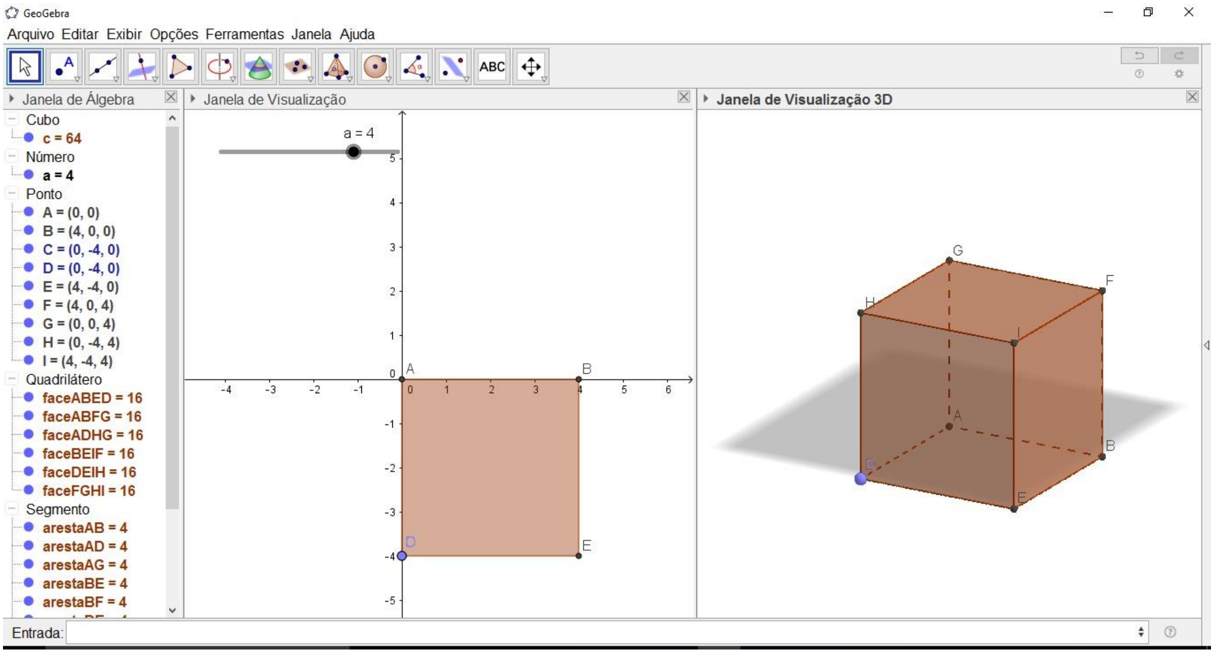


Figura 6.3: Cubo construído no *Geogebra*
Fonte: Elaborado pelo autor

➢ Mova o controle deslizante deixando-o em qualquer posição e analise a Janela de Álgebra, em seguida responda as perguntas abaixo:

a) Quais são as medidas das arestas quando o controle deslizante está na opção 3 e na opção 4?

____

b) Colocando o controle deslizante em qualquer posição, qual é a área de uma das faces do cubo? E a área total?

c) Qual é o volume do cubo?

6.1.1 Planificação do cubo

- Usando novamente a ferramenta  **Controle Deslizante** clique em um ponto qualquer da Janela de Visualização 2D, e uma janela aparecerá. Nessa janela escolha a opção **Número**, no campo **Nome** mantenha a letra ***b*,** vá ao campo **Intervalo**, digite ***0*** no campo **Mínimo**, ***1*** no campo **Máximo** e ***0,01*** no campo **Incremento**, depois clique em **Ok**. No campo de Entrada digite planificação, e escolha a opção "**Planificação[<Poliedro>,<Numero>]",** em poliedro digite a letra que aparece abaixo do nome do cubo na janela de Álgebra, que no nosso exemplo é a letra ***c*,** em número digite a letra que corresponde ao segundo controle deslizante criado, letra ***b*, "Planificação[c,b]"**em seguida tecle ENTER. O cubo aparecerá planificado.
- Obs: Caso ocorra algum erro, verifique espaços ou pontos no lugar de vírgulas ou até mesmo o nome dos objetos, pois o *Geogebra* pode não reconhecer os comandos se não forem digitados corretamente.
- Mova o controle deslizante ***b*,** observe que, para b = 0 o cubo está totalmente fechado e para b = 1 o cubo está planificado, em outros valores é possível observar a abertura do cubo. Caso deseje ter uma melhor visualização da abertura do cubo, na Janela de Álgebra clique sobre as bolinhas azuis de cada ponto e em seguida do cubo, assim todos esses objetos ficaram escondidos.

  A Figura 6.4 mostra o cubo semiaberto construído no *Geogebra*.

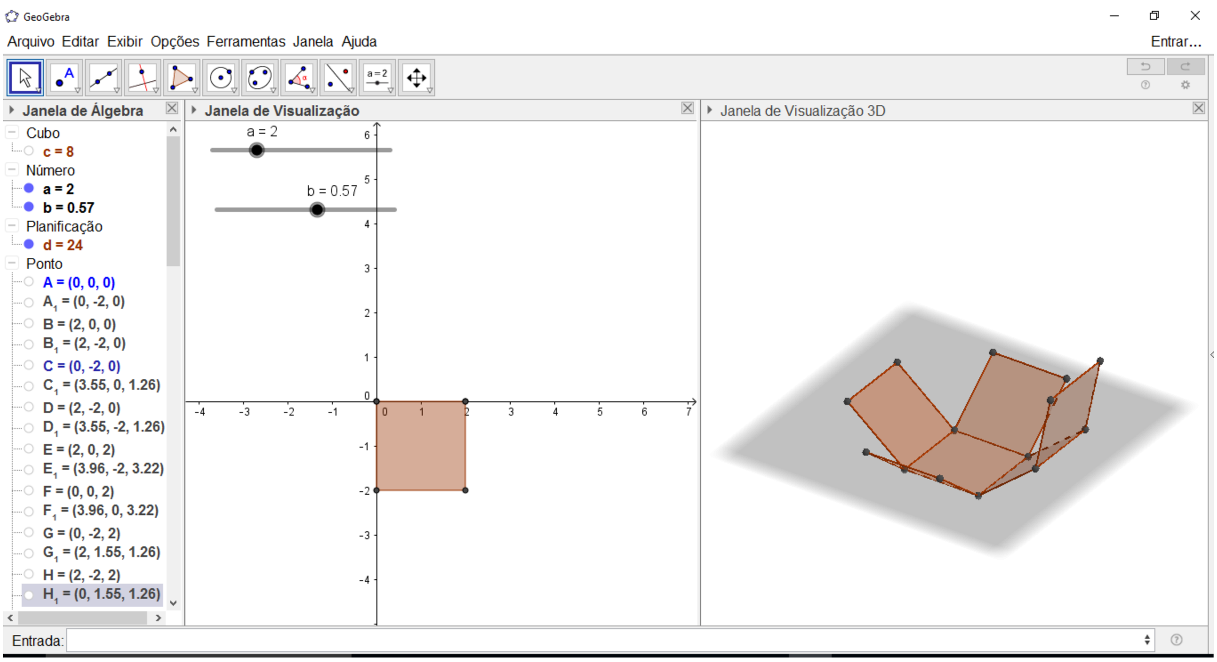
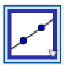


Figura 6.4: Cubo semiaberto
Fonte: Elaborado pelo autor

- Colocando o controle deslizante b = 0, para que o cubo fique fechado. Vá à janela 3 da barra de ferramenta  **Reta** e clique na seta no canto inferior esquerdo e selecione a opção  **Segmento**, em seguida clique em um dos vértices do cubo e clique no vértice oposto de modo a formar uma diagonal que passe pelo centro do cubo. Uma diagonal aparecerá na janela 3D e no final da janela de Álgebra em preto aparecerá o nome da diagonal e o seu comprimento, como exemplo, para a medida de aresta **a = 2** a medida da diagonal é **f = 4,47.** Movimente o controle deslizante **b** e observe que a medida da diagonal se altera chegando à medida máxima quando o cubo está planificado. Também podemos concluir que a menor distância entre dois vértices opostos caminhando pelas faces é uma linha reta, que pode ser facilmente calculada usando o Teorema de Pitágoras com o cubo planificado. A Figura 6.5 apresenta o cubo com uma de suas diagonais internas e o cubo planificado, mostrando a diagonal por duas faces adjacentes. Ambas as figuras extraídas do *Geogebra*.

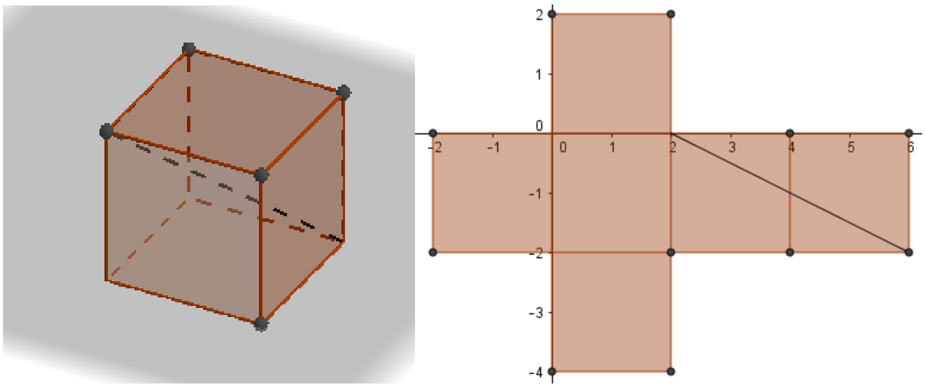


Figura 6.5: Cubo com uma diagonal interna e sua planificação
Fonte: Elaborado pelo autor

6.2 ATIVIDADE 2: CONSTRUÇÃO DO PRISMA DE BASE TRAPEZOIDAL

Objetivos: Construir o sólido usando outras ferramentas do *Geogebra*. Localizar pontos sobre a malha quadriculada, obedecendo às coordenadas cartesianas (x,y). Retomar o conceito de paralelismo nas figuras planas e identificar o trapézio, que é à base do prisma. Saber identificar que em todo prisma reto, pode-se construir um triângulo retângulo internamente. Usar algumas ferramentas do *Geogebra* para calcular a medida do perímetro, da área e do volume, tanto das figuras planas como das figuras espaciais.

Duração: Duas aulas.

Metodologia: Uso do *Datashow*, para que os alunos possam acompanhar a construção, giz e quadro negro para fazer algumas observações caso sinta necessidade.

Roteiro.

- Abra o *Geogebra* clicando no ícone localizado na área de trabalho ou digite *Geogebra* no *menu* iniciar. Em seguida clique em Opções, Rotular e selecione **Apenas para os pontos novos**, conforme Figura 6.1 na seção 6.1.
- Na Janela de Visualização 2D clique em qualquer lugar com o botão direito do *mouse* e selecione **Malha**, aparecerá a malha quadriculada. Em seguida na barra de ferramentas janela 2 selecione **Ponto**. Na malha, crie os pontos com as seguintes coordenadas cartesianas, **(2,1), (1,3), (5,3) e (4,1)** nessa ordem. Novamente na barra de ferramentas janela 5 selecione **Polígono** e clique sobre os pontos criados na janela 2D na seguinte ordem,

A, B, C, D e A. A Figura 6.6 mostra o trapézio construído sob a malha quadriculada, com as suas bases paralelas ao eixo x. Este trapézio será à base do prisma trapezoidal, em seguida responda os seguintes questionamentos.

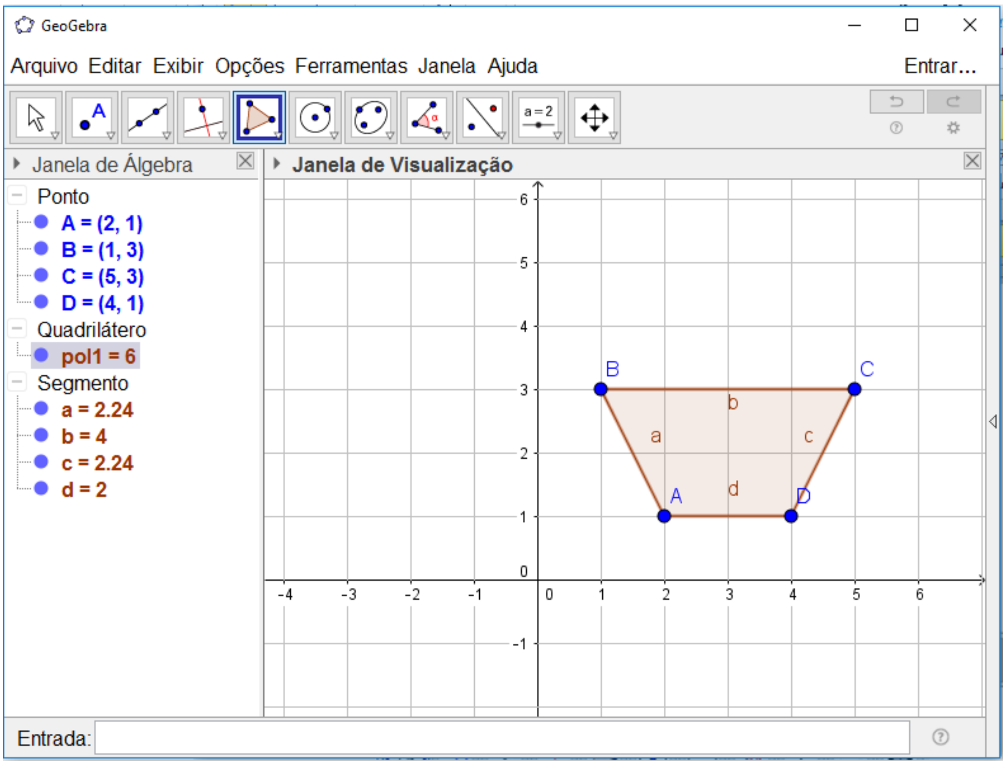


Figura 6.6: Base do Prisma Trapezoidal
Fonte: Elaborado pelo autor

a) Qual é nome deste polígono? Cite suas características.

---

b) Qual é o perímetro deste polígono?

---

c) Qual é a área deste polígono?

➢ Clique em **Exibir** e selecione a opção, **Janela de Visualização 3D**, note que a barra de ferramenta se altera como na Figura 6.7, possibilitando o uso de outras ferramentas, especialmente para o uso de figuras tridimensionais. Para voltar às ferramentas da Janela de Visualização 2D, (Figura 6.8), basta dar um clique na Janela de Visualização 2D.

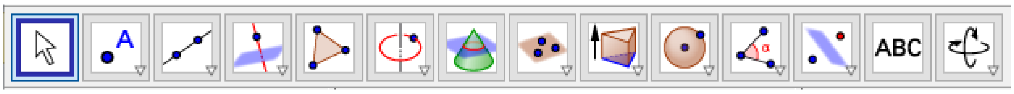


Figura 6.7: Barra de ferramentas da janela de visualização 3D
Fonte: elaborado pelo autor

A Figura 6.8 apresenta as janelas da barra de ferramentas da Janela de Visualização 2D.

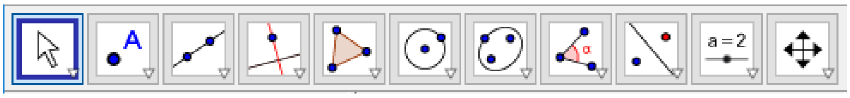


Figura 6.8: Barra de ferramentas da janela de visualização 2D
Fonte: Elaborado pelo autor

➢ Na janela 9 da barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D selecione  **Extrusão para Prisma ou Cilindro**, em seguida clique sobre o polígono na Janela de Visualização 3D, aparecerá uma nova janela, digite **4** e tecle ENTER. O prisma de base trapezoidal de altura 4 aparecerá. Usando a ferramenta  **Mover Janela de Visualização**, mova o prisma para cima-baixo ou direito-esquerda para ter uma melhor visualização. Dando alguns cliques com o botão esquerdo do *mouse*, essa ferramenta possibilita mover apenas para cima-baixo ou movimento total, para fazer esses movimentos é necessário clicar e segurar com o botão esquerdo do *mouse*.

Usando a ferramenta  **Girar Janela de Visualização 3D**, é possível girar o sólido proporcionando uma visão em vários ângulos. Para usar essa ferramenta também é necessário clicar e segurar com o botão esquerdo do *mouse*. A Figura 6.9 mostra o prisma de base trapezoidal construído no *Geogebra*.

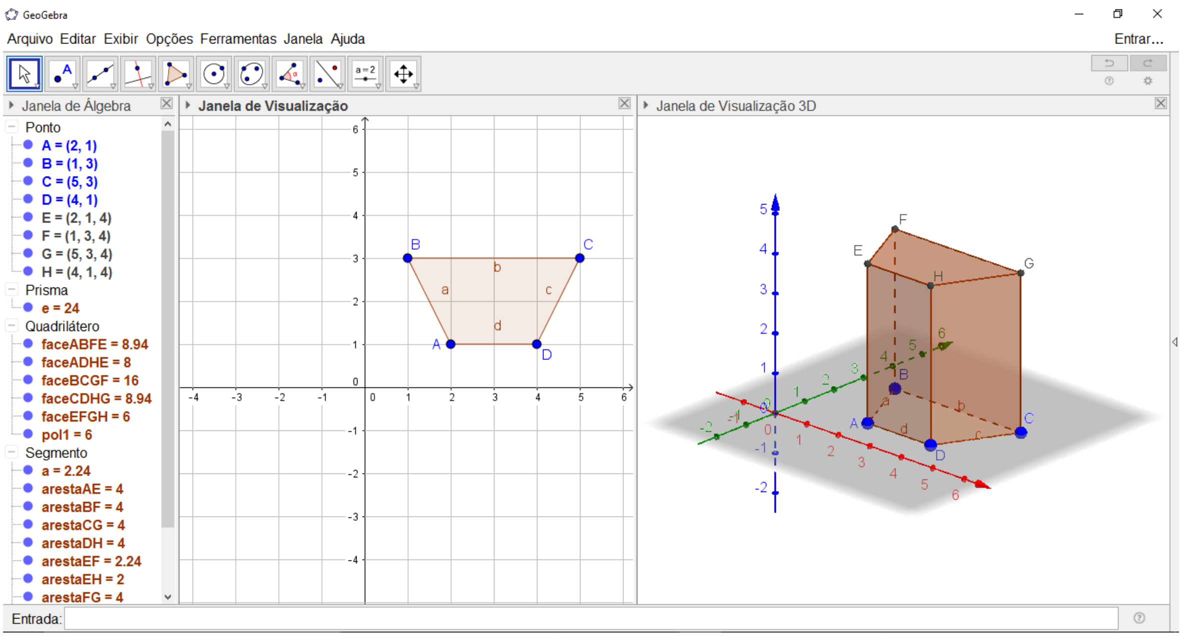


Figura 6.9: Prisma de Base Trapezoidal
Fonte: Elaborado pelo autor

6.2.1 Diagonal do prisma

- No campo de Entrada digite **Segmento[C,E],** ou na janela 3 selecione a ferramenta  **Segmento** e clique no ponto **C** e no ponto **E,** ambos são os vértices opostos do prisma, criando assim uma diagonal interna do mesmo. Agora vamos esconder alguns objetos para criar um triângulo retângulo interno ao prisma contendo essa diagonal. Para isso, clique na bolinha azul da janela de Álgebra nos pontos **B, D, F, G e H** e no prisma **e**. No *menu* iniciar clique em **Editar**, em seguida clique em **Propriedades,** aparecerá uma nova janela, veja a Figura 6.10, a qual permite fazer personalizações em qualquer um dos objetos do *Geogebra*. Nosso objetivo aqui é personalizar a diagonal criada, para destacá-la no triângulo. Note que na janela de álgebra desta nova janela, o segmento **f**, está destacado em azul, caso não esteja, dê um clique para selecioná-lo, em seguida clique em **Cor,** escolha a cor desejada, depois clique em **Estilo**, e no campo **Espessura da Linha,** com o botão esquerdo do *mouse* clique e segura na seta em azul para poder arrastar, mudando assim a espessura que desejar.

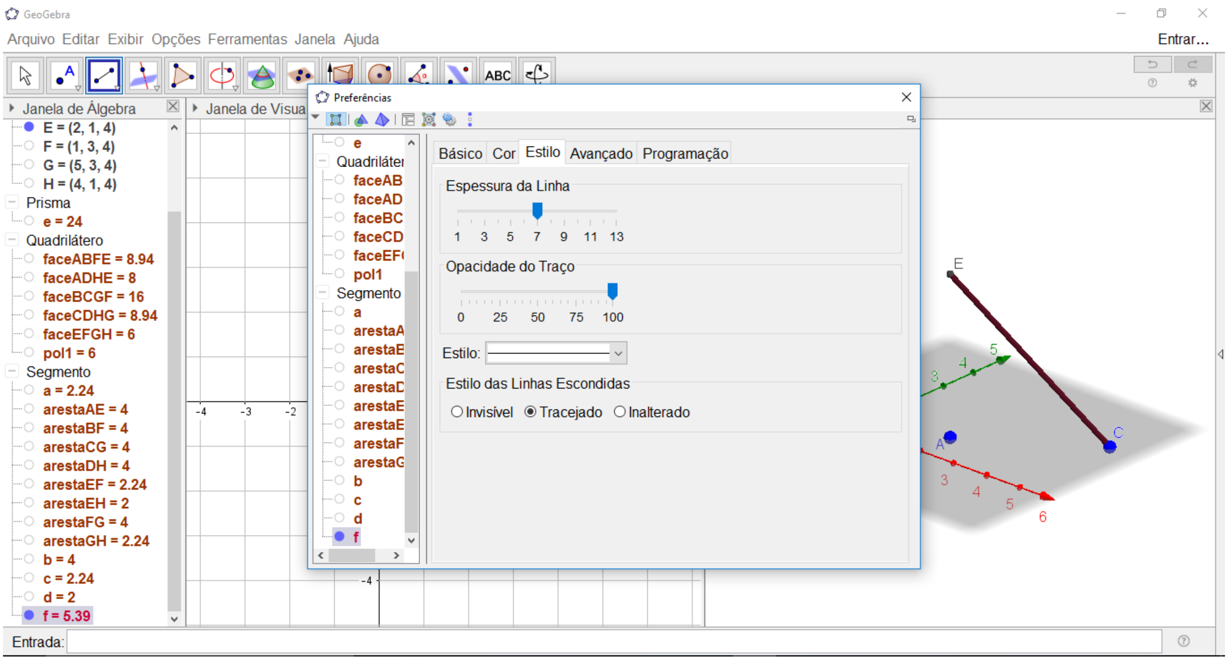


Figura 6.10: Janela de personalização de objetos
Fonte: Elaborado pelo autor

6.2.2 Triângulo retângulo interno no prisma

- Novamente usando a ferramenta **Polígono** clique nos pontos **A, C, E** e **A** formando assim um triângulo. Usaremos outros recursos para verificar se ele é retângulo, determinar suas dimensões, perímetro e área. Na janela 11 da barra de ferramenta selecione **Ângulo,** para medir o ângulo interno ao polígono é necessário selecionar os pontos no sentido horário, caso contrário o ângulo medido será o ângulo exterior, ou seja, para verificar se o ângulo no vértice **A** é de 90 graus basta clicar nos vértices **C, A e E** nessa ordem. Para medir os outros ângulos basta fazer o mesmo em cada vértice. Ou se preferir digite no campo de entrada ângulo e o nome do polígono, localizado na janela de Álgebra. **“Ângulo[pol2]”.**

- Novamente na janela 11 da barra de ferramentas selecione **Distância Comprimento ou Perímetro** e clique no triângulo, aparecerá à medida do perímetro do triângulo, novamente na janela 11 selecione **Área** e clique no triângulo, aparecerá à medida da área do triângulo. Caso queira fazer alguma personalização basta ir a propriedades e selecionar o objeto desejado. A Figura 6.11 apresenta o triângulo retângulo com as medidas de seus ângulos internos, perímetro e área.

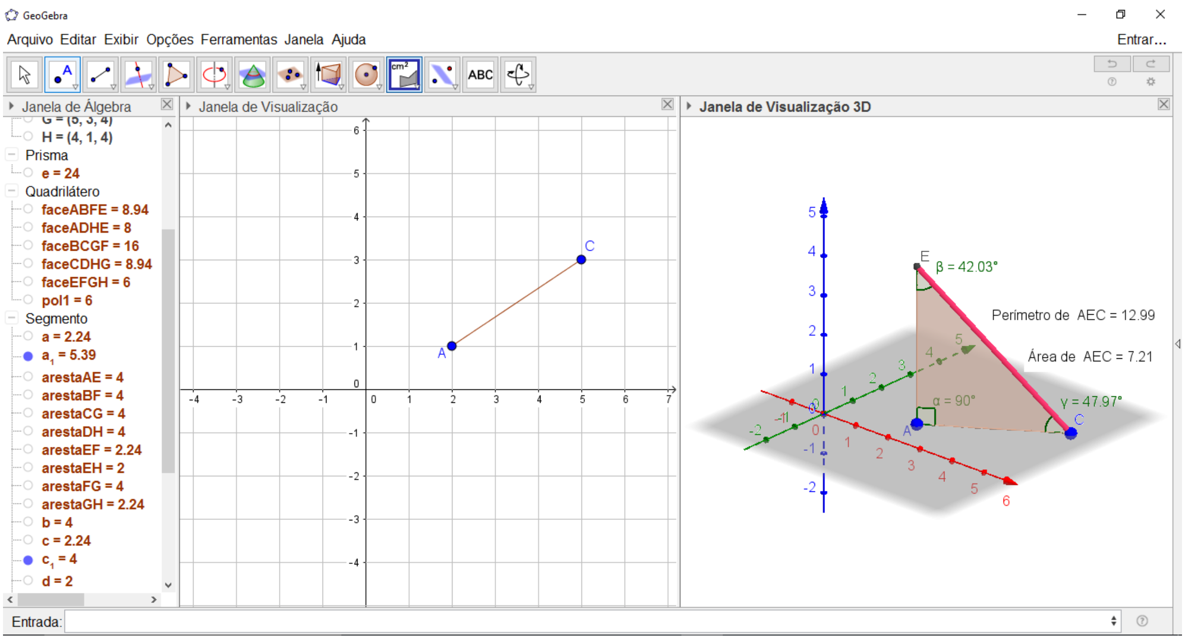


Figura 6.11: Triângulo Retângulo
Fonte: Elaborado pelo autor

Classifique este triângulo:

- ➢ Agora vamos calcular o volume do prisma, com o auxílio da ferramenta  **Volume,** clique na bolinha azul no nome prisma **e,** em seguida clique no sólido na Janela de Visualização 3D.

6.2.3 Planificação do prisma

- ➢ Na janela 9, selecione  **Planificação** e clique no prisma, o controle deslizante aparecerá automaticamente, esconda novamente o prisma para ter uma visão menos poluída e movimente o controle deslizante. Responda as seguintes perguntas. A Figura 6.12 apresenta o prisma semiaberto e o triângulo retângulo construído internamente, com o objetivo de proporcionar uma visão diferente daquelas apresentadas somente com quadro e giz.

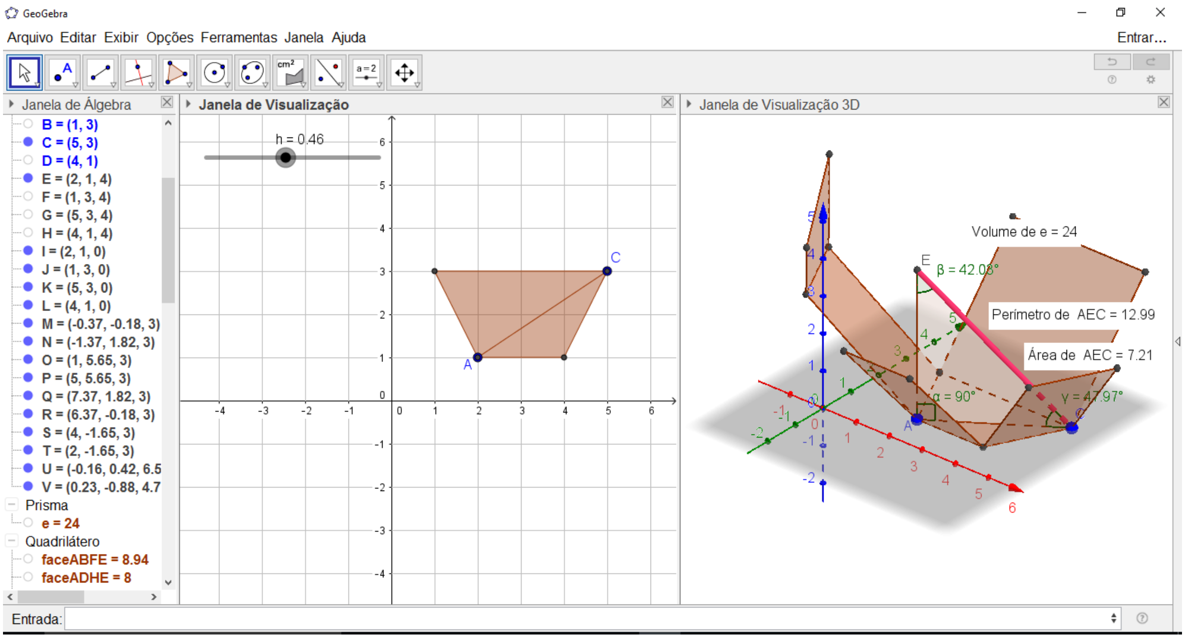


Figura 6.12: Prisma semiaberto
Fonte: Elaborado pelo autor

d) Quantas faces tem o prisma?

____

e) Qual é a área das bases e a área das faces do prisma?

____

f) Qual é a medida da área total do prisma?

____

g) Qual é o volume do prisma?

____

6.3 ATIVIDADE 3: CONSTRUÇÃO DA PIRÂMIDE REGULAR DE BASE HEXAGONAL

Objetivos: Mostrar que o volume da pirâmide depende da área da base e da altura, independente se a pirâmide é reta ou oblíqua. Trabalhar com polígonos regulares. Usar outros recursos do *Geogebra*.

Duração: Duas aulas.

Metodologia: Uso do *Datashow*, para que os alunos possam acompanhar a construção, giz e quadro negro para fazer algumas observações caso sinta necessidade.

Roteiro.

Abra o *Geogebra* clicando no ícone  ou digite *Geogebra* no *menu* iniciar do *Windows*. Queremos nesta atividade criar um hexágono regular com centro na origem do plano cartesiano, para isso é necessário criar dois pontos cujas ordenadas são raiz quadrada de três. Para o *Geogebra* entender esse comando é necessário digitar **sqtr,** no lugar de raiz quadrada.

- No campo de **Entrada** digite os comandos:
  A = (-1,-sqrt(3)), em seguida tecle ENTER.
  B = (1,-sqrt(3)), em seguida tecle ENTER.

- Na janela 4 da barra de ferramentas, selecione  **Polígono Regular**, em seguida clique nos pontos **A e B,** aparecerá uma nova janela, como mostra a Figura 6.13, digite **6** e clique em **OK.**

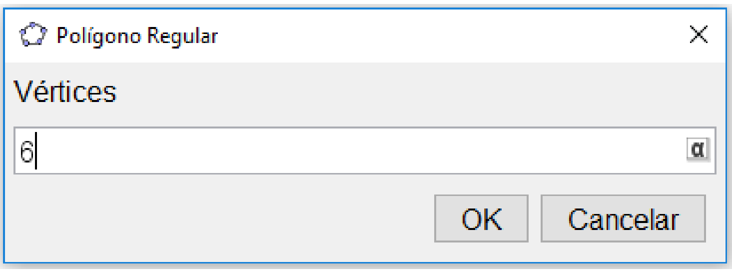


Figura 6.13: Janela do número de vértices do polígono regular
Fonte: Elaborado pelo autor

Observe o polígono e responda usando a janela de Álgebra.

a) Que figura foi criada?

---

b) Qual é o comprimento dos lados deste polígono?

---

c) Qual é o perímetro?

---

d) Qual é a área?

➢ Na janela 10 da barra de ferramenta, selecione a ferramenta  **Controle Deslizante**, clique em qualquer ponto da Janela de Visualização 2D e uma nova janela aparecerá. No campo **Nome** escreva **x1,** vá ao campo **Intervalo**, digite **-5** no campo **Mínimo**, **5** no campo **Máximo** e **1** no campo **Incremento**, depois clique em OK. Note que o controle deslizante x1, foi criado, faça o mesmo para o controle deslizante y1.

A Figura 6.14 mostra a base da pirâmide hexagonal e os controles deslizantes x1 e y1, construídos no *Geogebra*.

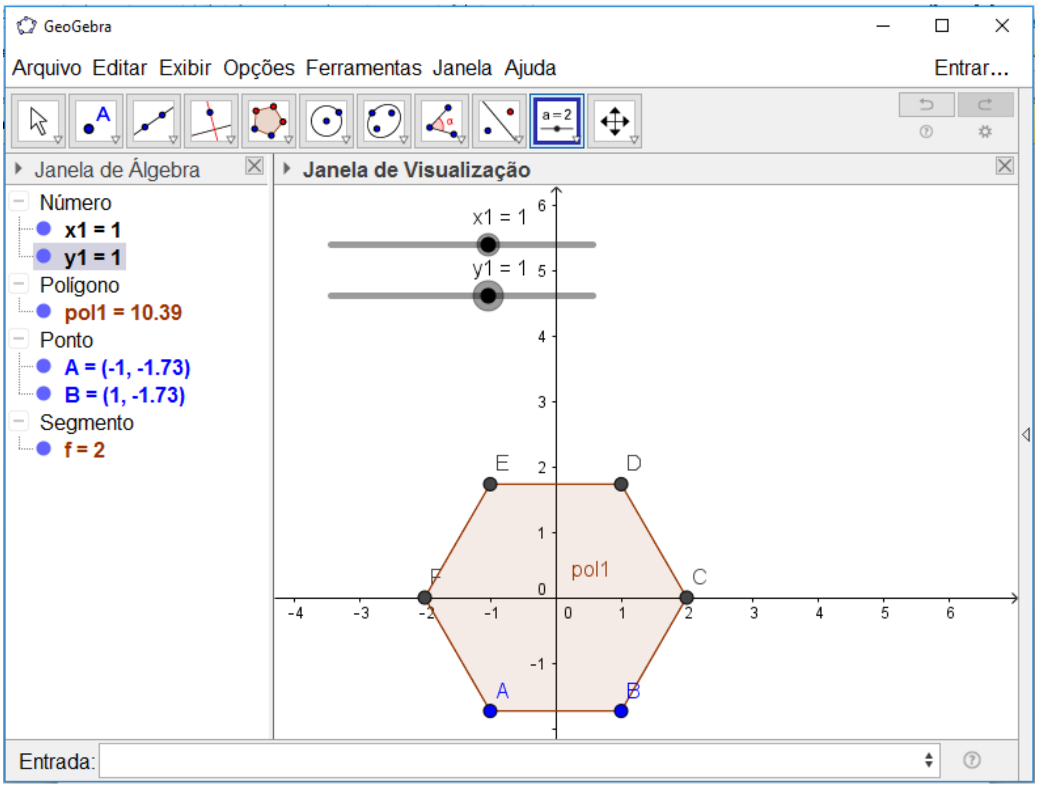
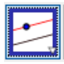


Figura 6.14: Hexágono regular, base da pirâmide
Fonte: Elaborado pelo autor

- Clique em **Exibir**, em seguida clique em **Janela de Visualização 3D**. Com o botão direito do *mouse*, clique em qualquer parte em branco da Janela de Visualização 3D, em seguida clique em **Plano**, para ter uma melhor visualização do objeto.
- No campo de Entrada digite o comando **V=(x1,y1,4),** o ponto **V** aparecerá acima do polígono na Janela de Visualização 3D.
- Na janela 9 da barra de ferramentas selecione a ferramenta  **Pirâmide.** Clique no **polígono** e em seguida clique no ponto **V**. Para uma visualização dos movimentos do vértice **V**, vamos criar duas retas paralelas aos eixos coordenados x e y. Para isso, na janela 4 selecione a ferramenta  **Reta Paralela.** Clique no vértice **V** em seguida clique no eixo de cor vermelho, faça o mesmo com o eixo de cor verde. Note que aparecerão duas retas concorrentes no vértice **V.** Para uma melhor visualização esconda os eixos, clicando com o botão direito do *mouse* na Janela de Visualização 3D e selecionando **Eixos.** A Figura 6.15 mostra a base e a pirâmide com as retas **l** e **m**, ambas paralelas aos eixos x e y respectivamente, concorrentes no vértice **V** e contidas num plano paralelo ao plano da base da pirâmide, com uma distância constante de 4 unidades. Ao movimentar os controles deslizantes x1 e y1, o vértice V, movimenta-se sobre as retas, mostrando assim que a altura da pirâmide é constante não alterando o seu volume.

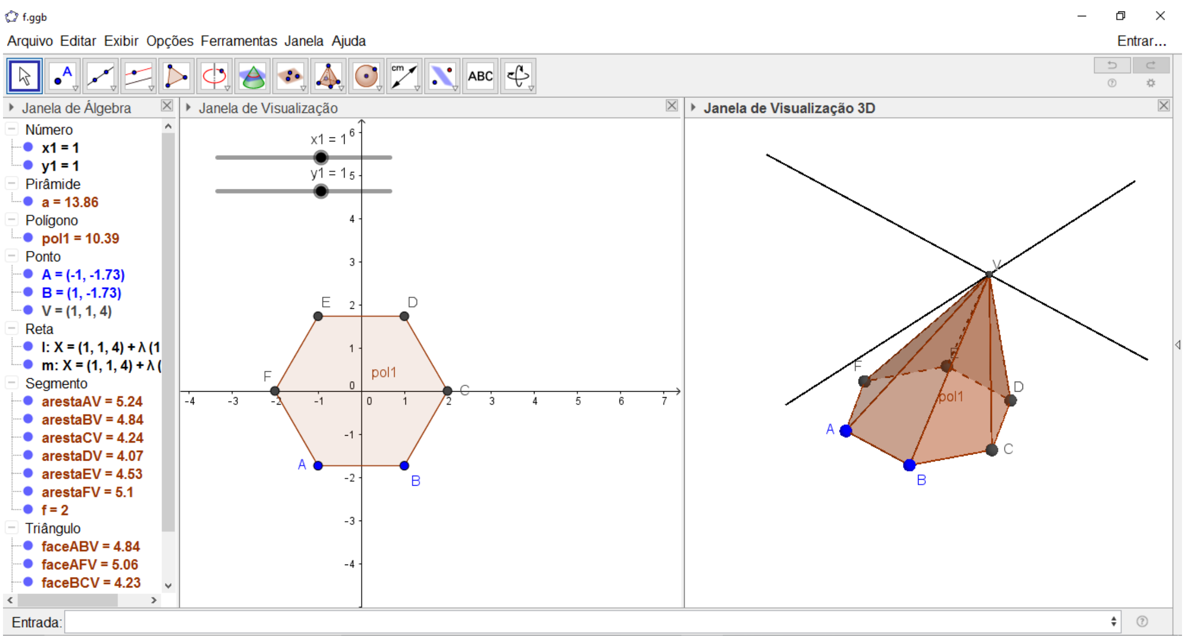


Figura 6.15: Pirâmide de Base Hexagonal
Fonte: elaborado pelo autor

Colocando o controle deslizante **x1 = 0** e **y1 = 0**, responda as perguntas abaixo. Se necessário use as ferramentas **Distância, Comprimento ou Perímetro,**  **Área** e **Volume** ou consulte a Janela de Álgebra.

a) Quantos vértices, arestas e faces tem a pirâmide?

b) Quais são as medidas das arestas das faces laterais? Classifique o polígono das faces laterais:

c) Qual é a área total? E o volume?

Mova os controles deslizantes x1 e y1.

d) O volume da pirâmide altera quando os controles deslizantes são movidos? Explique.

e) A altura da pirâmide se altera quando se movem os controles deslizantes?

f) O que acontece com as medidas das áreas das faces laterais e as medidas das arestas das mesmas, quando os controles deslizantes são movidos?

6.4 ATIVIDADE 4: CONSTRUÇÃO DOS POLIEDROS DE PLATÃO

O hexaedro regular (Cubo) já foi construído na Atividade 1. Nesta atividade vamos dar ênfase ao tetraedro regular, ao octaedro regular, ao dodecaedro regular e ao icosaedro regular.

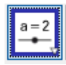
Objetivos: trabalhar os poliedros de Platão e suas planificações, calcular as áreas e os volumes desses sólidos, através do *software Geogebra*.

Duração: Duas aulas.

Metodologia: Uso do *Datashow,* para que os alunos possam acompanhar a construção, giz e quadro negro para fazer algumas observações caso sinta necessidade.

Roteiro.

- Abra o *Geogebra* clicando no ícone  localizado na área de trabalho ou digite *Geogebra* no *menu* iniciar. Em seguida clique em Opções, Rotular e selecione **Apenas para os pontos novos**. Como mostra a Figura 6.1 na seção 6.1.

- Na janela 9 da barra de ferramentas, selecione a ferramenta  **Controle Deslizante** e clique em qualquer lugar na Janela de Visualização 2D. Uma nova janela aparecerá, no campo intervalo dessa janela, digite **1** para **Mínimo**, **5** para Máximo e **1** para **Incremento**. Em seguida clique em **OK**. Pronto, o controle deslizante foi criado, para movê-lo basta clicar e segurar com o botão esquerdo do *mouse*.
- Abra a Janela de Visualização 3D clicando em **Exibir,** em seguida, clique na mesma com o botão direito do *mouse* e selecione **Eixos** e **Plano.**

6.4.1 Tetraedro regular

- Digite no campo Entrada os seguintes comandos.

  A= (0,0), em seguida tecle ENTER.

  B= (a,0), em seguida tecle ENTER.

  Tetraedro[A,B], em seguida tecle ENTER. A figura 6.16 mostra o tetraedro regular.

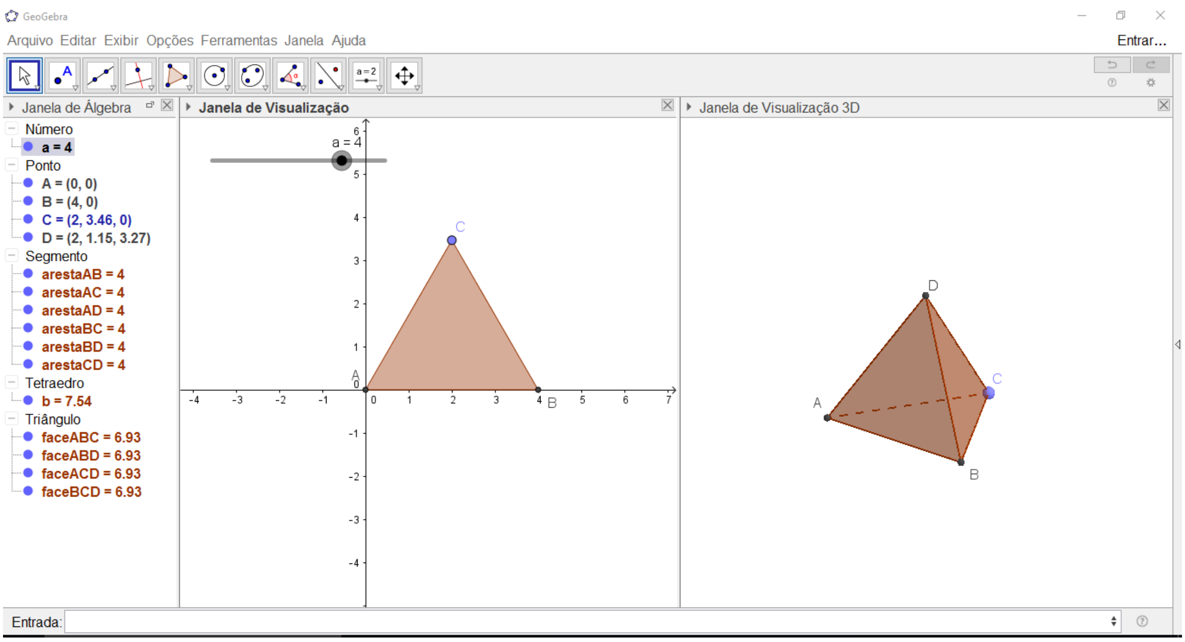


Figura 6.16: Tetraedro Regular
Fonte: Elaborado pelo autor

Responda os seguintes questionamentos:

a) Quantas faces, vértices e arestas tem o poliedro?

____

b) Com o controle deslizante na posição 3, qual é a medida da aresta e a medida da área de uma das faces?

____

c) Mantendo o controle deslizante em 3 qual é a área total? E o volume?

____

6.4.2 Planificação do tetraedro

➢ Na janela 9 da barra de ferramenta selecione a ferramenta  **Planificação,** em seguida clique no poliedro na Janela de Visualização 3D. Um controle deslizante aparecerá na janela de Visualização 2D, mova-o para ter a uma visualização do poliedro planificado ou fechado. A Figura 6.17 mostra o resultado da planificação do tetraedro regular.

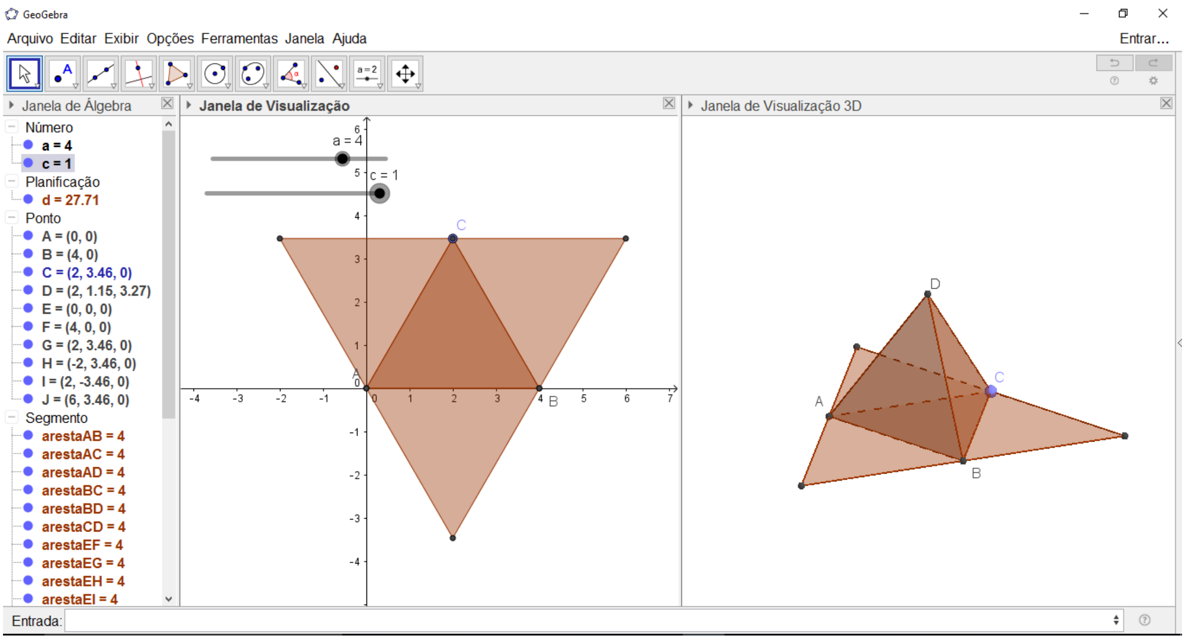


Figura 6.17: Tetraedro regular e sua planificação
Fonte: Elaborado pelo autor

6.4.3 Octaedro regular

➢ Para a construção do octaedro regular, do dodecaedro regular e do icosaedro regular, repita os procedimentos anteriores, com os pontos **A** e **B** já criados, vá ao campo de Entrada e digite o comando **Octaedro[A,B],** para construir o octaedro regular, **Dodecaedro[A,B],** para a construção do dodecaedro regular e **Icosaedro[A,B],** para a construção do icosaedro regular. A Figura 6.18 apresenta o octaedro regular e sua planificação, construído no *Geogebra*.

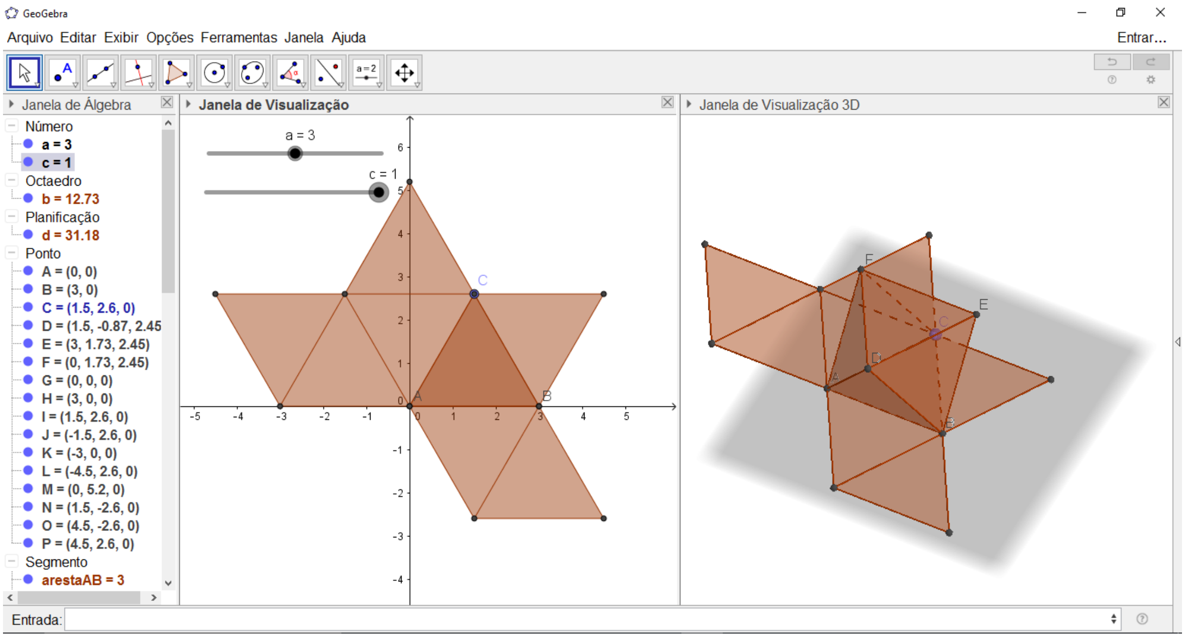


Figura 6.18: Octaedro regular e sua planificação
Fonte: Elaborado pelo autor

6.4.4 Dodecaedro regular

A Figura 6.19 apresenta o dodecaedro regular e sua planificação.

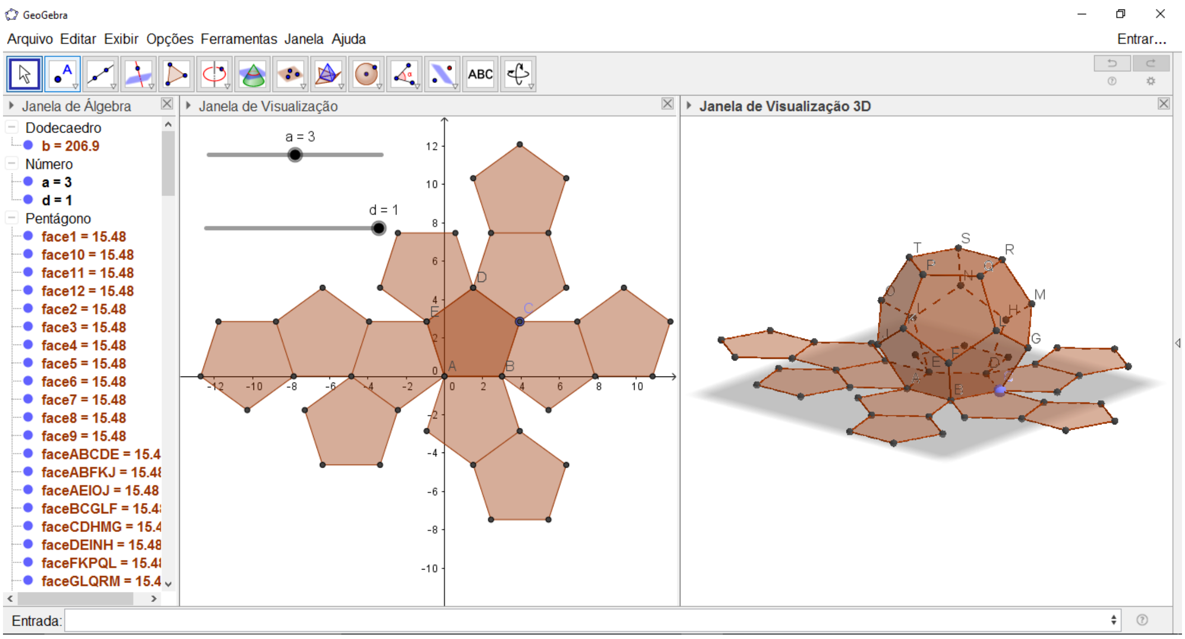


Figura 6.19: Dodecaedro regular e sua planificação
Fonte: Elaborado pelo autor

6.4.5 Icosaedro regular

A Figura 6.20 apresenta o icosaedro regular e sua planificação, construída no *Geogebra.*

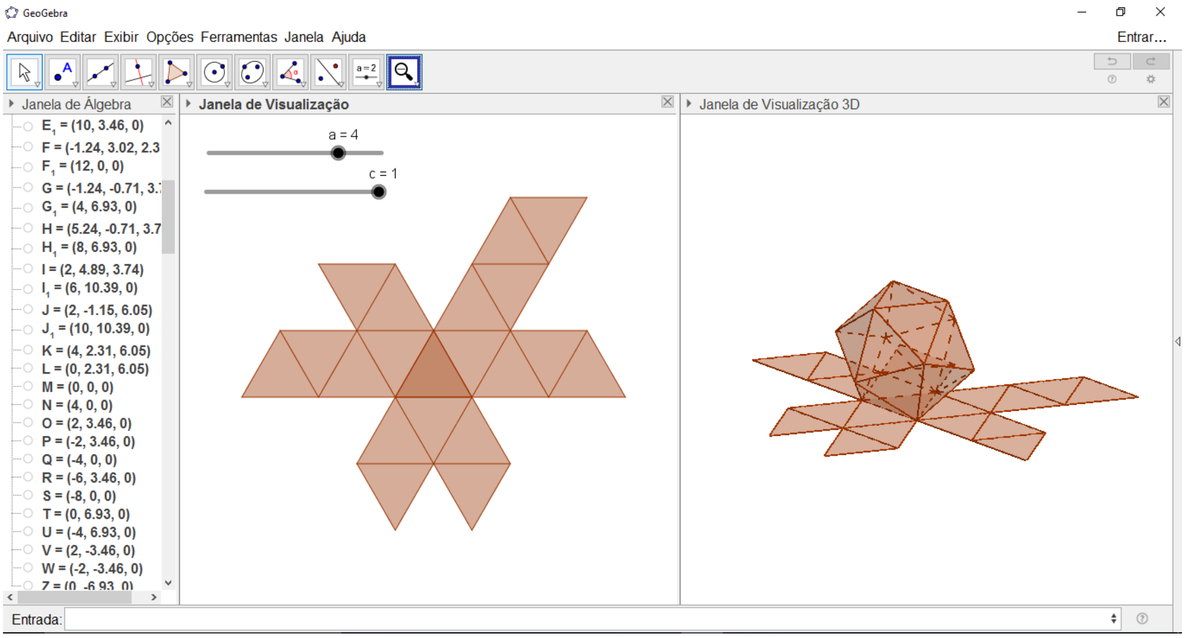


Figura 6.20: Icosaedro regular e sua planificação
Fonte: Elaborado pelo autor

6.5 ATIVIDADE 5: SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Nesta atividade vamos construir o cilindro, o cone e a esfera através da rotação de figuras planas. As figuras planas serão giradas em torno do eixo **x.**

Objetivos: Trabalhar os pontos na malha quadriculada, construir polígonos e circunferências. Calcular áreas e perímetros, rotação de figuras planas entorno de um eixo. Usar outros recursos do *Geogebra*.

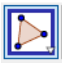
Duração: Três aulas.

Metodologia: Uso do *Datashow*, para que os alunos possam acompanhar a construção, giz e quadro negro para fazer algumas observações caso sinta necessidade.

6.5.1 Cilindro de revolução

- Abra o *Geogebra* clicando no ícone localizado na área de trabalho ou digite *Geogebra* no *menu* iniciar. Em seguida clique em **Exibir** e selecione

Janela de Visualização 3D. Para facilitar a localização dos pontos no plano cartesiano vamos criar a malha quadriculada na Janela de Visualização 2D.

- Na Janela de Visualização 2D clique o com botão direito do *mouse* e selecione **Malha**, em seguida na barra de ferramenta, janela 5, selecione a ferramenta **Polígono** e clique sobre os seguintes pontos na malha, **(0,0), (0,2), (3,2), (3,0) e (0,0).** Um retângulo de dimensões 3x2 aparecerá na Janela de Visualização 2D, na Janela de Álgebra este retângulo tem o nome de **pol1.**

- Na janela 10 da barra de ferramentas selecione a ferramenta 

Controle Deslizante e clique em qualquer lugar da Janela de Visualização 2D. Neste momento aparecerá uma nova janela, visto na Figura 6.21. Selecione a opção **Ângulo,** no campo **Nome** digite a letra **g,** no campo **Intervalo** deixe como está e em seguida clique em OK.

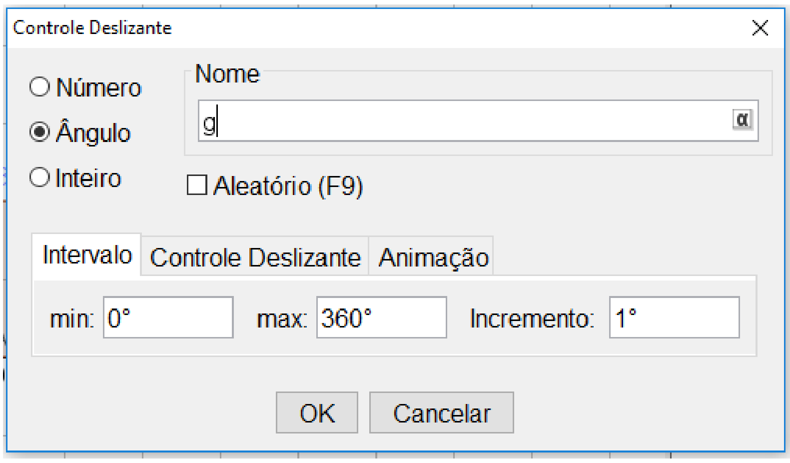


Figura 6.21: Janela do controle deslizante
Fonte: Elaborado pelo autor

- Usaremos agora o polígono e controle deslizante para a construção do sólido de revolução, digite no campo de Entrada o seguinte comando, **Superfície[pol1,g],** pronto, agora mova o controle deslizante e o cilindro será formado com a rotação do retângulo, como mostra a Figura 6.22. Para uma melhor visualização esconda os eixos coordenados e o plano da Janela de Visualização 3D.

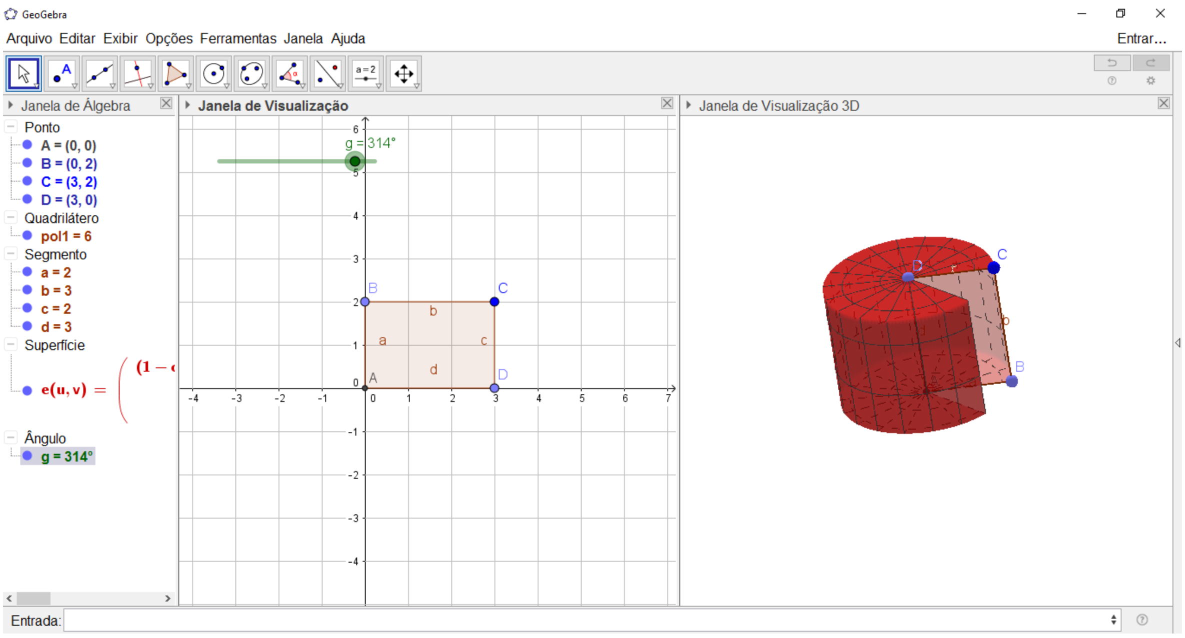


Figura 6.22: Cilindro de revolução
Fonte: Elaborado pelo autor

- ➢ Responda os seguintes questionamentos:

a) Qual é o raio da base do cilindro?

____

b) Qual é a altura do cilindro? Qual é a medida da geratriz?

____

c) Qual é a área da seção meridiana?

____

- ➢ Obs: Neste tipo de construção do cilindro não é possível verificar a área e o volume usando as ferramentas  **Área,** **Volume** respectivamente ou verificar através da janela de Álgebra. Para fazer esses cálculos é necessário usar outro procedimento para a construção do cilindro. O que não abordaremos nesta atividade.

6.5.2 Cone de revolução

- ➢ Para a construção do cone de revolução, clique sobre o retângulo na Janela de Visualização 2D, em seguida a tecla Delete, com esse procedimento apagará o retângulo e tudo que foi criado após ele. Crie o triângulo com as seguintes coordenadas, **(0,0), (0,2), (3,0) e (0,0),** note que o triângulo criado tem o mesmo nome de **pol1** na janela de Álgebra.

- Digite no campo de Entrada o seguinte comando, **Superfície[pol1,g]**, mova o controle deslizante e o cone será formado com a rotação do triângulo. A Figura 6.23 apresenta o cone de revolução, construído no *Geogebra*, através da rotação do triângulo (ABC), em torno do eixo x.

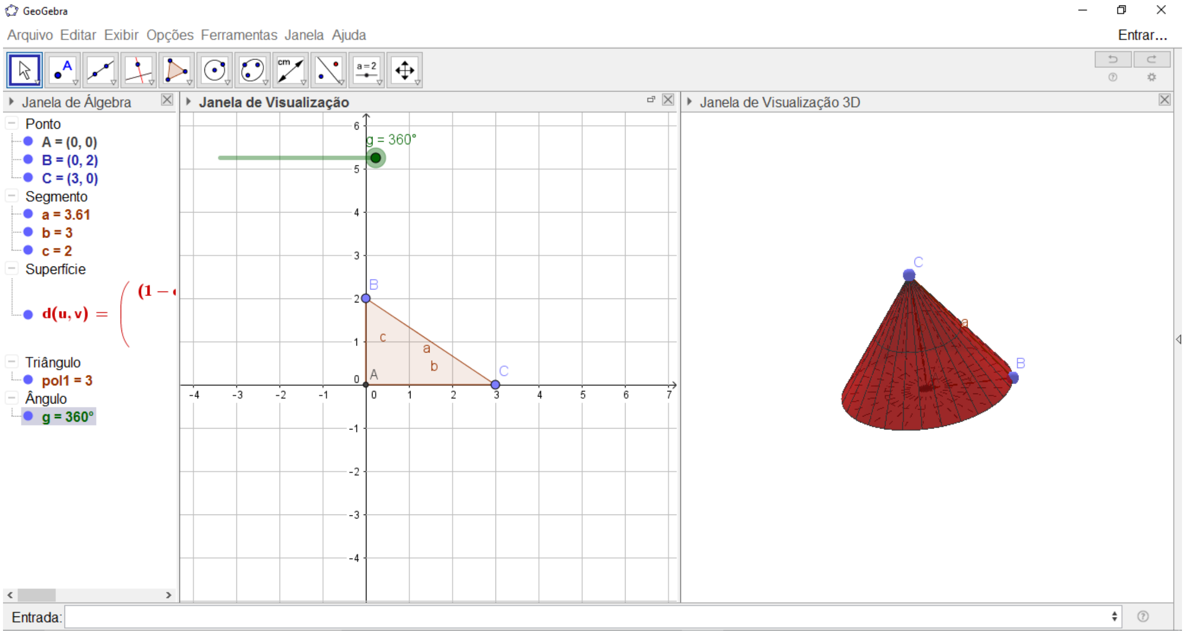


Figura 6.23: Cone de revolução
Fonte: Elaborado pelo autor

Responda os seguintes questionamentos:

a) Qual é o raio da base do cone?

____

b) Qual é a altura do cone?

____

c) Qual é a área da seção meridiana do cone?

____

d) Qual é a medida da geratriz do cone?

____

6.5.3 Esfera de revolução

- Para a construção da esfera, clique no triângulo, em seguida clique em Delete, delete também o ponto **C.** Agora, na janela 6 da barra de ferramentas selecione a ferramenta  **Círculo dado Centro e Um de seus Pontos,** e clique no ponto **A,** e no ponto **B,** note que na janela de Álgebra aparecerá à equação **c: x²+y² = 4,** esta equação se refere à circunferência criada no plano cartesiano.

- No campo de Entrada digite o seguinte comando **Superfície[c,g],** pronto, a esfera será criada a partir da rotação do círculo, basta mover o controle deslizante.

A Figura 6.24 apresenta a esfera de revolução, construída no *Geogebra*, através da rotação do círculo **c** em torno do eixo x.

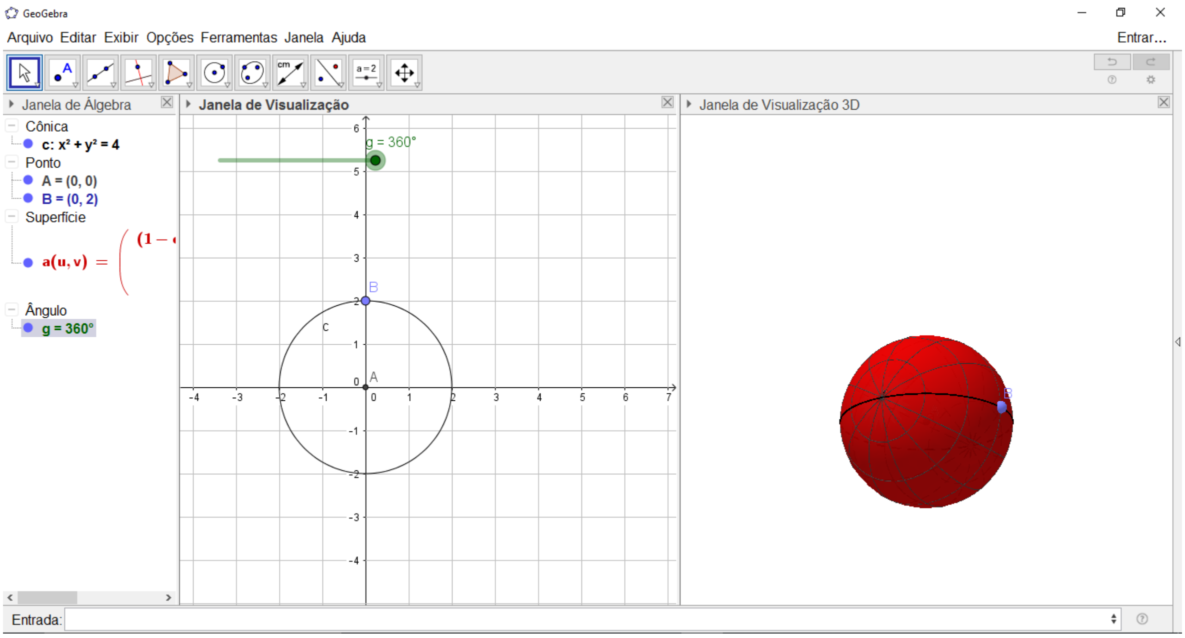


Figura 6.24: Esfera de revolução
Fonte: Elaborado pelo autor

Responda os seguintes questionamentos:

a) Qual é a medida do raio da esfera?

b) Qual é a medida área da esfera?

c) Qual é a medida do volume da esfera?

Esperamos que essas atividades tenham sanado algumas dúvidas referentes as propriedades desses sólidos. No próximo capítulo apresentamos a conclusão das atividades aplicadas.

7 CONCLUSÃO DAS APLICAÇÕES DAS ATIVIDADES

As atividades foram realizadas na sala de informática, com o *software Geogebra* já instalado nos computadores. Em nossa pesquisa tivemos um computador para cada dupla de alunos. Todos os alunos que participaram da pesquisa utilizando o *software Geogebra* estavam familiarizados com o computador, pois é comum o uso da sala de informática por eles.

Antes da realização de cada atividade, foram trabalhados em sala de aula os conteúdos das atividades propostas, assim as construções dos sólidos realizadas com o *software Geogebra* propiciaram maior veracidade e promoveu um maior interesse por parte dos alunos nos conteúdos abordados.

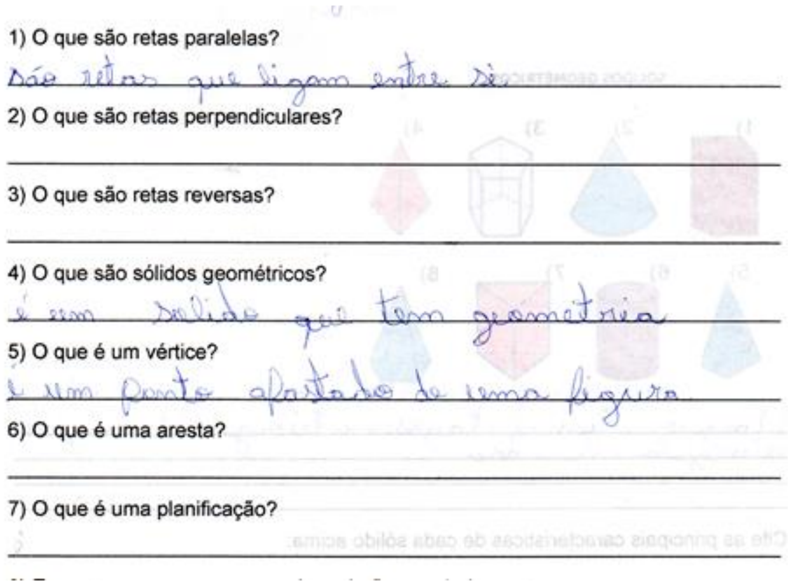
Estas atividades foram aplicadas no final do ano letivo de 2016, entre os meses de outubro e novembro. A escolha do período de aplicação se deu pelo fato do conteúdo escolhido, fazer parte do currículo do 4º Bimestre do 2º ano do Ensino Médio.

7.1 RELATO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

No começo dos trabalhos foi aplicada uma avalição diagnóstica contendo 9 questões sobre alguns conceitos básicos geométricos e uma questão sobre o uso de *software* nas aulas de Matemática, como pode ser visto no Apêndice D. A avalição diagnóstica tinha como objetivo dar parâmetros sobre os conhecimentos dos alunos de ambas as turmas quanto ao conteúdo de Geometria. Procurou-se verificar por meio da avalição, conhecimentos básicos geométricos, como por exemplo, as propriedades de retas e as características de alguns polígonos e de alguns sólidos básicos, como prismas, pirâmides, cilindro e cone.

Nesta avaliação foi diagnosticado que a maioria dos alunos de ambas as turmas não tinham o conhecimento do que são retas paralelas e retas perpendiculares e apenas um dos 46 alunos respondeu corretamente o que são retas reversas. Constatou-se também que muitos alunos chegam ao 2º ano do Ensino Médio sem os conhecimentos do que são sólidos geométricos e seus principais elementos, como vértices e arestas, também pode-se constatar por meio da avalição diagnostica que os alunos não sabem ou não conseguem explicar o que é uma planificação.

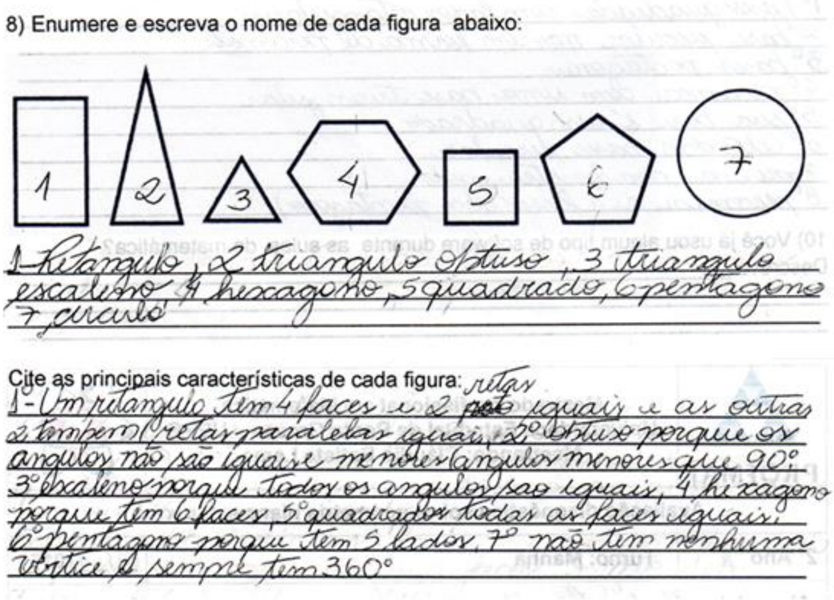
Na Figura 7.1 é possível conferir as respostas das 7 primeiras perguntas da avaliação diagnóstica do Aluno 10 da Turma A.



1) O que são retas paralelas?
São retas que ligam entre si
2) O que são retas perpendiculares?
3) O que são retas reversas?
4) O que são sólidos geométricos?
é um solido que tem geometria
5) O que é um vértice?
é um ponto afastado de uma figura
6) O que é uma aresta?
7) O que é uma planificação?

Figura 7.1: Resposta do Aluno 10
Fonte: Elaborado pelo autor

Quanto a questão relacionada às figuras planas, muitos alunos não souberam citar as características de algumas das figuras e trocaram alguns nomes, como por exemplo, chamando de face os lados do retângulo. Na Figura 7.2, podemos ver as respostas do Aluno 36 da Turma B.



8) Enumere e escreva o nome de cada figura abaixo:
1 2 3 4 5 6 7
1-Retangulo, 2 triangulo obtuso, 3 triangulo escaleno, 4 hexagono, 5 quadrado, 6 pentagono 7 circulo

Cite as principais características de cada figura: retas
1-Um retangulo tem 4 faces e 2 ~~pa~~ iguais e as outras 2 tambem (retas paralelas iguais, 2° obtuso porque os angulos não são iguais e menores (angulos menores que 90°, 3° escaleno porque todos os angulos são iguais, 4 hexagono porque tem 6 faces, 5° quadrado todas as faces iguais, 6° pentagono porque tem 5 lados, 7° não tem nenhuma vertice e sempre tem 360°

Figura 7.2: Resposta do Aluno 36
Elaborado pelo autor

Na questão de reconhecimento de alguns sólidos, nenhum dos alunos respondeu corretamente o nome de todos os sólidos, mas a maioria acertou pelo menos o nome de um deles. Percebemos que alguns alunos deram nomes de figuras planas, como retângulo, pentágono e triângulo para os sólidos, como pode ser visto na Figura 7.3, resoluções apresentadas pelo Aluno 18 da Turma A.

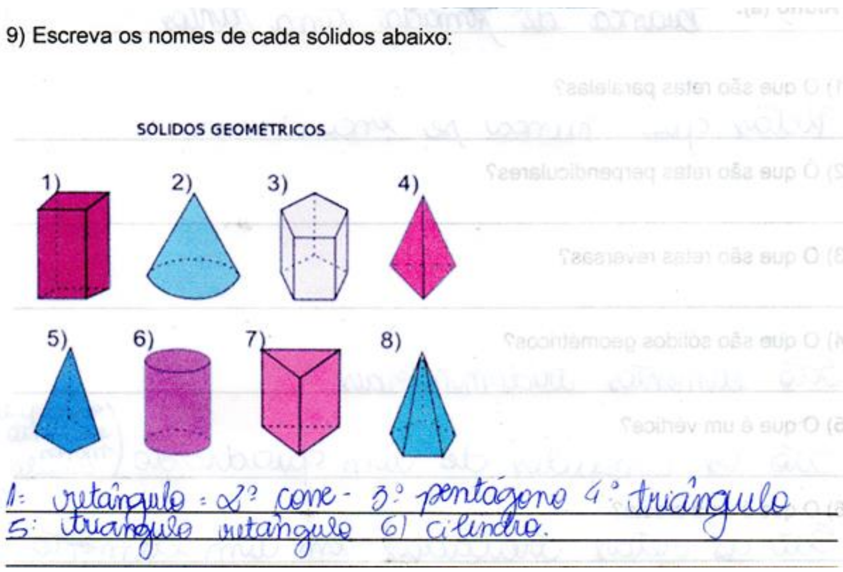


Figura 7.3: Resposta do Aluno 18
Fonte: Elaborado pelo autor

Quanto a questão 10, se os alunos já tinham usado algum tipo de *software* nas aulas de Matemática, todos os alunos responderam que não tinham utilizado, como pode ser visto na resposta do Aluno 42 da Turma B por meio da Figura 7.4.

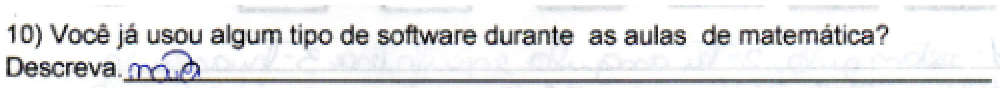


Figura 7.4: Resposta do Aluno 42
Fonte: Elaborado pelo autor

Nesta avalição participaram 46 alunos no total, sendo 26 alunos da Turma A e 20 alunos da Turma B. Podemos perceber por meio do gráfico (Figura 7.5) que o número de alunos de ambas as turmas participantes da pesquisa não detém alguns dos conceitos básicos sobre Geometria Plana e Geometria espacial.

Percebemos também que, os alunos da Turma A foi melhor que os alunos da Turma B em relação as questões de 1 a 9 da avaliação diagnóstica. De fato, como professor titular de ambas as turmas desde o início das aulas, o autor da pesquisa pode diagnosticar que durante os três primeiros bimestres do ano letivo de 2016 precedente a pesquisa, a Turma A teve um rendimento melhor do que a Turma B.

A Figura 7.5 apresenta o gráfico do percentual do número de alunos de ambas as turmas que acertaram as questões de 1 a 9 da avaliação diagnóstica.

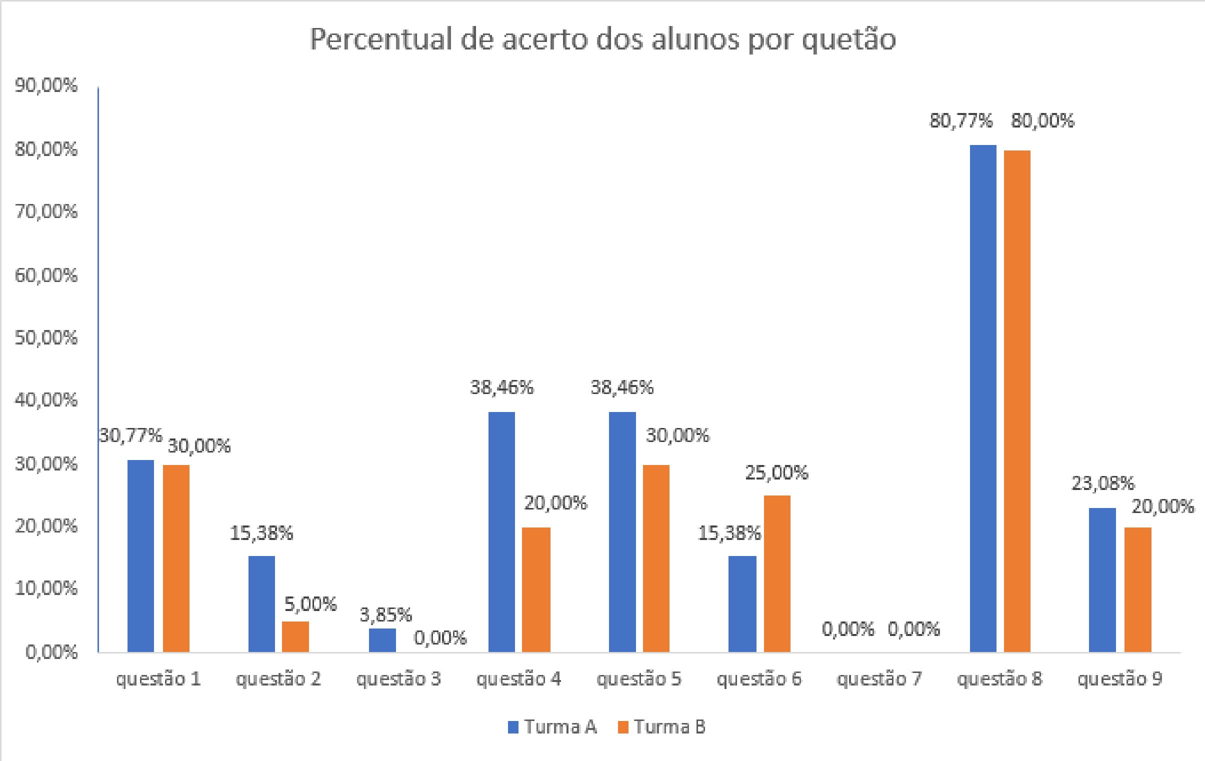


Figura 7.5: Gráfico da avaliação diagnóstica
Fonte: Elaborado pelo autor

Após a aplicação da avaliação diagnóstica, buscou-se trabalhar os conteúdos geométricos de forma a sanar as dúvidas apresentadas pelos alunos. Utilizando em sala de aula livros didáticos, caderno do aluno e os sólidos geométricos de madeira citados como material didático para esta pesquisa. Em seguida se iniciou os trabalhos no laboratório de informática com o uso do *software Geogebra.*

7.2 RELATO DAS AULAS NO LABORATÓRIO

Na aplicação das atividades, tivemos como um dos principais problemas, a quantidade disponível de computadores na Sala de Informática, chamada de “Acessa Escola”, contendo 13 computadores e apenas 11 funcionando normalmente. Outro fator negativo foi à ausência por parte de alguns alunos, mesmo com as atividades realizadas durante o turno regular. Tivemos problemas com o transporte, pois, muitos residem na zona rural, até mesmo o cansaço por já estar no 4º bimestre do ano letivo. Fato este rotineiro para o 4º bimestre dos anos finais da educação básica na escola.

Quanto ao quesito positivo, foi o interesse por parte dos alunos nas construções dos sólidos geométricos, 100% dos alunos realizaram todas as construções corretamente a partir da segunda atividade proposta. Outro fator importante foi à identificação de cada objeto da figura na Janela de Álgebra, tais como, coordenadas dos vértices, comprimento das arestas, áreas das faces e o volume do sólido.

Na realização da Atividade 1, alguns alunos demonstraram certa resistência para efetuar as construções dos sólidos, os alunos alegaram que não entendiam e não conseguiam acompanhar o roteiro exposto no *Datashow*. Neste caso foi feito um acompanhamento mais próximo com todos os alunos, para que não se perdesse o interesse pelas atividades e conseguissem realizar corretamente todas as construções.

Outros tiveram mais facilidade tornando-se monitores e auxiliando os colegas com dificuldades nas construções dos sólidos. Alguns alunos ficaram tão interessados pelo *Geogebra*, que instalaram em seus aparelhos móveis (celulares). Esse fato foi muito positivo, pois os alunos puderam ter um contato extra com o aplicativo (*Geogebra*), manuseando a qualquer hora e em qualquer lugar, sem a necessidade de estar na sala de informática da escola.

7.3 RELATO DAS ATIVIDADES

A primeira atividade colocava os alunos numa situação de investigação. Através da movimentação do controle deslizante, era possível observar de forma dinâmica, que a área de cada face é proporcional ao quadrado da medida da aresta. Outro fator importante foi observar que o volume do cubo é proporcional à medida da aresta elevada ao cubo.

Também de forma dinâmica os alunos puderam observar a planificação do cubo, nesse momento os alunos foram desafiados a calcular a menor distância entre dois vértices opostos caminhando por suas faces (ver Figura 6.5 da seção 6.1.1), atividade que também foi realizada em sala de aula. Os alunos não conseguiram determinar a medida correta da menor distância, alguns fizeram os cálculos caminhando pelas arestas do cubo.

Coube então a intervenção do professor (autor), mostrando aos alunos que com o cubo planificado é possível calcular esta distância usando Teorema de Pitágoras.

Quanto aos questionamentos propostos nas atividades, dos 20 alunos que participaram da pesquisa em laboratório de informática, 13 responderam corretamente, totalizando 65%. Comparados com os alunos que não participaram da pesquisa em laboratório e fizeram as mesmas atividades em sala de aula, sem o uso do *software Geogebra* apenas 8 dos 26 alunos frequentes chegaram aos cálculos corretos, cerca de 30%, isso mostra uma diferença percentual de 35%, entre os alunos que participaram das aulas de laboratório e os que não participaram.

Os alunos que realizaram as atividades em laboratório puderam interagir e compreender de forma satisfatória os conteúdos abordados, o *Geogebra*, proporcionou-lhes uma visão ampla do objeto construído, de diversas maneiras possíveis, possibilitando uma compreensão que a sala de aula tradicional e o livro didático não oferecem.

Concluímos nessa atividade, que o uso da tecnologia facilitou o entendimento de conteúdos muitas vezes de difícil compreensão aos olhos dos alunos.

Na segunda atividade, os alunos construíram o prisma de base trapezoidal. A maioria dos alunos não apresentou dificuldades nas construções, mostrando assim, uma familiarização com *software Geogebra*. Porém, ao localizarem os pontos na malha quadriculada, apenas 9 dos 20 alunos presentes localizaram corretamente, os demais trocaram as abcissas pelas ordenadas. Coube ao professor (autor) intervir orientando-os para a correta construção.

Quanto ao quesito questionamentos, 25% dos alunos da Turma B responderam corretamente o nome do polígono da base (Trapézio), contra 44% dos alunos da Turma A e em ambas as turmas desconheciam as suas características. Com relação ao perímetro 45% dos alunos da Turma B responderam a medida correta, os restantes alegaram que não compreenderam o perímetro como a soma dos segmentos descritos na Janela de Álgebra, os alunos da Turma A fizeram os cálculos manualmente em sala, com 44% de acerto, para cálculo da área 80% dos alunos da Turma B acertaram, contra 38,46% dos alunos da Turma A.

Nessa atividade preferimos explorar o potencial do *software Geogebra*, nesse momento houve uma intervenção do professor (autor), orientando-os sobre as informações disponíveis na Janela de Álgebra. Tais como, coordenadas dos vértices, o tipo do polígono e sua área e cada segmento com o seu respectivo comprimento.

Após as explicações, sobre as informações contidas na Janela de Álgebra, as perguntas relacionadas ao prisma não causaram grandes dificuldades, todos os alunos chegaram ao resultado esperado. Isso não foi possível com a Turma A, pois não tinham essas informações e precisaram efetuar os cálculos manualmente.

Na terceira atividade, os alunos questionaram por qual motivo as ordenadas dos pontos A e B, são escritas como **”sqrt”,** foi explicado que alguns comandos do *Geogebra*, por exemplo, raiz quadrada de 3**,** é necessário digitar **sqrt(3),** sendo escolhido para que as coordenadas do centro do hexágono regular fosse a origem e com que os vértices tivessem coordenadas irracionais. Ao mover o controle deslizante é possível ter uma pirâmide de base hexagonal reta.

Quantos aos questionamentos, ao colocarmos os controles deslizantes de modo que, a pirâmide seja reta, a maioria dos alunos não tiveram dificuldades para responder, as alternativas relacionadas às faces, as arestas e aos vértices, porém, ao calcular a área total, todos os alunos não consideraram a base hexagonal como face, comprometendo o cálculo da área total da pirâmide. Já a Turma A apresentaram grandes dificuldades para a realização dos cálculos da área e do volume, cerca de 20% dos alunos efetuaram os cálculos corretos, os demais precisaram da orientação do professor.

Ao movimentar os controles deslizantes, fazendo com que a pirâmide fosse oblíqua, os alunos não souberam explicar por que o volume permanece o mesmo. Embora esses conteúdos tivessem sido trabalhados em sala de aula. Houve a necessidade de reforçar, que o volume da pirâmide reta e o volume da pirâmide oblíqua, são iguais, se ambas têm a mesma área da base e a mesma altura. Após colocar os controles deslizantes x1 e y1 em medidas diferentes, os alunos puderam compreender essa propriedade de forma dinâmica. Isso mostrou o potencial do *Geogebra* com relação as aulas expositivas com quadro e giz.

Nas construções dos poliedros de Platão, Atividade 4, os alunos puderam explorar novamente o comando de Entrada, pois esse comando é muito importante, já que todas as construções podem ser feitas através dele. Nessa atividade os alunos tiveram a oportunidade de visualizar a planificação do Dodecaedro regular e do Icosaedro regular de forma dinâmica, fato raro de acontecer na sala de aula, visto que, sólidos com 12 e 20 faces são difíceis de serem confeccionados.

Pode-se calcular a área das faces, área total e volume, mostrando assim a potencialidade do *Geogebra* em relação à sala de aula tradicional, já que as construções destes sólidos, bem como os cálculos realizados, são muitos trabalhosos, demandando assim muito tempo para a sua realização.

Quanto aos questionamentos relacionados ao tetraedro, os alunos não tiveram dificuldades, pois todas as informações estavam disponíveis na Janela de

Álgebra, sendo que 85% dos alunos da Turma B responderam corretamente, porém não foi possível fazer a comparação com os alunos da Turma A, já que os cálculos da área e do volume nenhum dos alunos conseguiram chegar no resultado, foi necessário o professor apresentar a resolução no quadro negro. Achamos conveniente não aplicar perguntas relacionadas aos demais poliedros regulares, deixamos apenas como atividades para serem trabalhadas em casa.

Na última atividade, optamos pelos sólidos de revolução. Embora o *software Geogebra* possua muitas limitações para esse tipo de construção, como por exemplo, não é possível calcular a área da base, a área lateral ou o volume, mas de forma dinâmica é possível ao aluno, à visualização da rotação do polígono entorno do eixo de simetria. Conteúdo muitas vezes pouco trabalhado por falta de recursos didáticos, podendo assim explorar o conceito de geratriz do cilindro e do cone, nome confuso para os alunos. Após a realização desta atividade e respondidos os questionamentos foi apresentado e utilizado a ferramenta da janela 9 da barra de ferramentas 3D, que permite a criação do cilindro e de outros sólidos, nessa opção é possível verificar o volume e a área do cilindro.

Quanto aos questionamentos, aproximadamente 55% dos alunos da Turma B acertaram o raio da base do cilindro, da base do cone e da esfera, os alunos que erraram, alegaram que essa informação não estava disponível na Janela de Álgebra, mas isso nos preocupa, pois, o raio é a distância entre os pontos A e B de ambas as figuras (vértices do retângulo e do triângulo).

Outro dado preocupante foi sobre a área da secção meridiana do cilindro e do cone, apenas 44% dos alunos presentes responderam corretamente, os que erraram consideraram apenas metade da secção, associando apenas o polígono de rotação, que estava como pol1 na Janela de Álgebra, esquecendo que a secção meridiana é composta por dois polígonos neste caso. essas atividades também foram aplicadas para Turma A, exposta no quadro negro e o uso do livro didático, aproximadamente 25% dos alunos responderam corretamente.

Percebemos nessas atividades, que muitos dos nossos alunos apresentam dificuldades básicas de Geometria Plana, tais como, raio, área de polígonos perímetro, etc. Cabe ao professor sanar tais dúvidas, durante cada processo de aprendizagem, para que os alunos desenvolvam habilidades que favoreçam a construção do seu pensamento lógico, preparando-o para estudos mais avançados.

7.4 APLICAÇÃO DA AVALIAÇÃO BIMESTRAL

Terminado os trabalhos em sala e no laboratório, foi aplicada uma Avaliação Bimestral a ambas as turmas participantes do projeto, contendo questões dissertativas e objetivas, de acordo com a sugestão na Proposta Pedagógica do Currículo do Estado de São Paulo. Segundo orientações da coordenação pedagógica da escola, a Avaliação Bimestral deve conter questões de vestibulares, do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), da Avaliação de Aprendizagem e Processo (AAP) e do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP). Nesse contexto elaboramos 8 questões sendo 6 objetivas e 2 dissertativas, exposta na Figura 7.6 e na Figura 7.7.

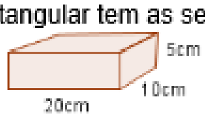
A Figura 7.6 mostra a primeira parte da Avaliação.

1) As dimensões de um tanque no formato de paralelepípedo são 40 cm, 30 cm e 30 cm. Se um balde tem capacidade de 5 litros, a quantidade mínima de baldes de água para encher o tanque é:
A) 7
B) 8
C) 10
D) 5
E) 75

2) Se um cubo tem suas arestas aumentadas em 20% cada uma então o seu volume fica aumentado em:

A) 20%
B) 60%
C) 72,8%
D) 85%
E) 66,4%

3) Um tijolo com forma de um bloco retangular tem as seguintes dimensões:



Foram colocados tijolos iguais, desse formato, formando uma pilha apresentada a seguir.

Dado que $1dm^3 = 1000 cm^3$, então o volume ocupado por essa pilha tem:

A) 10 dm^3
B) 15 dm^3
C) 25 dm^3
D) 50 dm^3
E) 100 dm^3

Figura 7.6: Primeira parte da Avaliação Bimestral
Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 7.6 mostra a segunda parte da Avaliação Bimestral.

4) Um poliedro regular com 30 arestas possui 12 vértices.

A) Quantos são as suas faces? ____

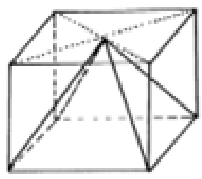
B) Quantas arestas existem em cada face? __________________________________

5) Um caixa de lápis tem o formato de um paralelepípedo reto retângulo, com 3 cm de comprimento, 4 cm de profundidade e 12 cm de altura. Calcule a medida do maior lápis que você pode guardar nessa caixa, sem que a ponta fique para fora da borda.

____

6) Uma pirâmide é mergulhada num aquário cubico cheio d'água como na figura.

O número que expressa a relação entre a quantidade de água final no aquário e a inicial (antes de mergulhar a pirâmide) é de, aproximadamente.



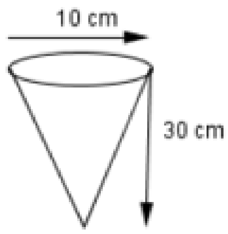
A) 25%
B) 33%
C) 50%
D) 67%
E) 72%

7) Vimos que um cilindro pode ser obtido pela rotação de 360° de uma região retangular em torno de um de seus lados. Consideramos um quadrado de lado 2 cm, então a área lateral desse cilindro é:

A) 4π
B) 6π
C) 8π
D) 9π
E) 2π

8) Quantos copos com 200 ml de água, no mínimo, são necessários para encher completamente o vasilhame cônico representado na figura?

Dados: π = 3, 1ml = 1cm e $Vc = \frac{1}{3}\pi r^2$h



A) 3
B) 4
C) 6
D) 12
E) 13

Figura 7.7: Segunda parte da Avaliação Bimestral
Fonte: Elaborado pelo autor

No próximo capítulo apresentamos a análise de desempenho dos alunos na Avaliação Bimestral, a Conclusão e sugestões para futuros trabalhos.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo apresentamos uma análise da Avaliação Bimestral aplicada após o término dos trabalhos em ambas as turmas, a conclusão e algumas considerações com relação ao uso do *software Geogebra* como ferramenta completar no ensino da Geometria Espacial. Por fim, finalizamos com sugestões de futuros trabalhos.

8.1 ANÁLISE DE DESEMPENHO DA AVALIAÇÃO BIMESTRAL

Na análise de desempenho, preocupou-se com a participação dos alunos de forma qualitativa, onde são analisados a interação e a participação dos alunos durante o projeto. Na análise de desempenho dos alunos, na aplicação da Avaliação Bimestral (Figuras 7.4 e 7.5, seção 7.3) percebemos que, os alunos que participaram do projeto com o uso do *Geogebra* (Turma B) conseguiram obter maiores resultados, acertando um número maior de questões. Como pode ser visto no Tabela 1, a porcentagem de acerto por questão da Turma B foi maior do que a Turma A, em 5 questões.

Questão	Porcentagem de acertos da Turma A	Porcentagem de acertos da Turma B
1	57,6%	80%
2	53,8%	55%
3	69,2%	85%
4	23%	20%
5	38,4%	40%
6	76,9%	75%
7	65%	46,1%
8	50%	57,6%

Tabela 1: Percentual de acertos das Turmas A e B
Fonte: Elaborado pelo autor

Analisando a Tabela 1, percebemos que os alunos de ambas as turmas tiveram maior dificuldade nas questões dissertativas 4 e 5. O que nos leva a concluir que nossos alunos têm grande dificuldade em expressar resultados matemáticos descritivos, pois ambas as turmas tiveram percentual baixo nestas questões. A partir dessa premissa, notamos a necessidade da retomada de questões dissertativas e os conteúdos exposto nestas questões, com o propósito de descobrir quais as habilidades que não foram desenvolvidas pelos alunos na resolução destas questões.

8.2 CONCLUSÃO

Percebemos que a implantação deste projeto na escola, proporcionou algo desafiador aos alunos, promovendo um ambiente agradável e divertido, fazendo com que as aulas deixem de ser chatas e maçantes. O uso da Geometria Dinâmica (GD) com auxílio do *software Geogebra* abriu possibilidades de conhecimentos e aprendizagem muitas vezes difíceis aos olhos dos alunos. O *software* também possibilitou a verificação imediata de alguns conceitos e resultados matemáticos para construções de figuras planas ou espaciais, possibilitando esclarecer qualquer dúvida que possam vir posteriormente em sala de aula.

O projeto também proporcionou interação e parceria entre os educandos. Ao realizarem as construções dos sólidos, muitos alunos agiram como monitores, mostrando que adquiriram conhecimento e descobrindo novas formas de manuseio do *software.* Dessa forma o uso da tecnologia na educação desenvolve o protagonismo juvenil em nossos estudantes, despertando em alguns alunos um potencial que se permanece implícito.

Os alunos ao serem questionados quanto à utilização do *Geogebra* como ferramenta facilitadora no ensino da Geometria Espacial, disseram ter gostado de participar desta pesquisa e realizar este trabalho, visto que, puderam manipular e visualizar as figuras em várias dimensões. Consequentemente o *Geogebra* contribuiu para a construção do conhecimento, fazendo com que os alunos enxergassem propriedades de maneira fácil e prática.

De fato, com base na Avalição Bimestral e como pode ser visto na Tabela 1 da seção 8.1.1, a maior parte dos alunos da Turma B demonstrou ter aprendido os conceitos abordados durante a execução do projeto. Assim, acredita-se que o uso de *softwares* desenvolvidos para o ensino da Matemática não deve passar despercebidos pelos docentes e educadores. Pode-se observar que a utilização desses programas nas aulas de Matemática, proporcionam grande interação entre os alunos e os objetos de conhecimentos.

Logo, concluímos que o presente trabalho com o uso do *Geogebra,* trouxe de maneira prática contribuições para o ensino da Geometria Espacial para os alunos do 2º Ano do Ensino Médio.

8.3 SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

A satisfação de ter realizado este trabalho foi importante para a minha vida profissional. Ao utilizar este recurso tecnológico, despertou-me a descoberta de novas formas de aprender e pensar. Neste contexto propõem-se alguns temas que possam ser pesquisados em futuros trabalhos:

- Trabalhando formas geométricas espaciais com alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental;
- O uso do *Geogebra* no ensino das Funções Trigonométricas;
- Desvendando a Geometria Analítica com o uso do *software Geogebra.*

Portanto cabe a nós professores preocupados com a educação utilizar os recursos que estão disponíveis, de modo a tornar as aulas mais atraentes e interessantes, com o propósito de despertar o interesse dos alunos pela Matemática.

REFERÊNCIAS

BARASUOL, Fabiana F. A Matemática da Pré-História ao Antigo Egito. ***UNI*revista,** Ijuí – RS, v. 1, n° 2, abril 2006. Disponível em: <http://www.somaticaeducar.com.br/arquivo/artigo/1-2008-08-20-17-20-55.pdf> Acesso em: 02 jan. 2017.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher Editora da Universidade de São Paulo. 1974.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Media e Tecnologia. **Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+)** – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC. [2002?]. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf> Acessado em 02 jun. 2017.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em:
< http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf> Acessado em 02 jun. 2017.

CARVALHO, Luiz M. et al. **História e Tecnologia no Ensino da Matemática**. v. 2. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

D' AMBROSIO, Ubiratan. **Joaquim Gomes de Souza**, o "Souzinha" (1829 – 1864). *In:* MARTINS, R. A.; MARTINS, L. A. C. P.; SILVA, C. C.; FERREIRA, J. M. H. (eds.). *Filosofia e história da ciência no Cone Sul*: 3º Encontro. Campinas: AFHIC, 2004.

DOLCE, Osvaldo; POMPEU, Jose Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar**. v. 10. Geometria Espacial, Posição e Métrica. 6. ed. São Paulo: Atual, 2005.

EVES, Howard. **Tópicos de História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. p. 1 – 11.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. **Educação Matemática**: Representação e Construção em Geometria. Porto Alegre: Artes Médias Sul, 1999.

GEOGEBRA**. Manual Geogebra**. Disponível em: <http://www.geogebra.org/cms/> Acessado em: 17 de janeiro de 2017.

GEOGEBRA. **Instituto São Paulo**. Disponível em <http://www.pucsp.br/geogebrasp/sobre_instituto.html> Acessado em 22 de janeiro de 2017.

GERHARDT, Tatiane A.; SILVEIRA, Denise T. **Métodos de Pesquisa**: Coordenado pela Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS – Porto Alegre: UFRGS, 2009.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI Jr., Jose Ruy. **Matemática Fundamental 2º Grau**. Volume Único. São Paulo: FTD, 1994.

GOMES, Maria L. M. **História do Ensino da Matemática**: Uma Introdução. Belo Horizonte: CAED – UFMG, 2012.

HOHENWARTER, M. **Geogebra:** informações. 2007. Disponível em <http//www.geogebra.org/help/docupt_br.pdf>. Busca em 17 de janeiro de 2017.

LIMA, Elon L. et al. **Temas e Problemas**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010. p. 77 – 86.

LIMA, Elon L. et al. **A Matemática do Ensino Médio.** v. 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. p. 255 – 300.

LORENZATO, Sergio. Por que não Ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista**, n. 4. SBEM, 1º Semestre 1995. Campinas: UNICAMP, 1995.

MACHADO, Ronaldo A. **O Ensino da Geometria Espacial em ambientes educacionais informatizados: Um projeto de ensino de prismas e cilindros para o 2º ano do Ensino Médio**. 2010. 132 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

MLODINOW, Leonard. **A janela de Euclides**. A História da Geometria: das Linhas Paralelas ao Hiperespaço. Tradução: Enézio E. de Almeida Filho. São Paulo: Geração, 2008.

MUNIZ, Antônio Caminha Neto. **Tópicos de Matemática Elementar**: Geometria Euclidiana Plana. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. p 233 – 238.

NUNES, Terezinha. et al. **Educação Matemática**. Números e Operações Numéricas. São Paulo: Cortez, 2005.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva 2**. 2 ed. São Paulo: Moderna, 2013. p 220 – 275.

PAVANELLO, Maria R. **O Abandono do Ensino da Geometria**: **Uma Visão Histórica**. 1989. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas – SP, 1989.

PAVANELLO, Maria R. O Abandono do Ensino da Geometria no Brasil: Causas e Consequências. **Revista Zetetiké**, Ano – I, n. 1, 1993.

PEREIRA, Thales de L. M. **O uso do Geogebra em uma Escola Pública: interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio**. 2012. 121 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora, 2012.

SOARES, Flávia. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil: avanço ou retrocesso**. 2001. 202 f. Dissertação (Mestre em Matemática Aplicada). PUC-Rio. Rio de Janeiro, 2001.

SOUZA, Loana A. **Uma Proposta Para o Ensino da Geometria Espacial Usando o Geogebra 3D. 2014** 78 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande – PB, 2014.

TRIVIZOLI, Lucieli M. **Intercâmbios Acadêmicos Matemáticos Entre EUA e BRASIL: Uma Globalização do Saber**. 2011. 158 f. Tese (Doutora em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2011.

APÊNDICE A – TERMO DE AUTORIZAÇÃO DA ESCOLA

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Autorizo o Professor Cláudio Batista Leme lotado nesta unidade de ensino sob a orientação da Professora Doutora Fabiane de Oliveira a realizarem o Projeto de título "O USO DO GEOGEBRA NO ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL PARA ALUNOS DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO" como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, no Curso de Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional, com os alunos do 2º ano A e os alunos do 2º ano B desta instituição pública de ensino. Estando de acordo com as atividades a serem desenvolvidas e dos registros a serem realizados.

Itaberá,_____ de setembro de 2016.

____

Marcelo Lisboa

Diretor da Escola

APÊNDICE B – TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA OS PAIS OU RESPONSAVEIS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA OS PAIS OU RESPONSÁVEIS

Eu,____, RG: _____________________, residente na cidade de Itaberá – SP, concordo que meu(minha) filho(a) ____ participe do projeto de pesquisa que será realizado na escola estadual no município de Itaberá-SP sobe a orientação do professor Claudio Batista Leme. Fui esclarecido que a participação dele(a) é estritamente voluntaria a fim de colaborar com o sucesso da pesquisa, sendo que o anonimato e as informações e respostas dadas por ele(a) não serão associadas ao nome ou número de chamada, para qualquer efeito de publicação que possa surgir da realização desta pesquisa.

Itaberá,_____ de setembro de 2016.

____

Assinatura do responsável do aluno

APÊNDICE C – TERMO DE AUTORIZAÇÃO DOS ALUNOS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO DOS ALUNOS

Eu,____, gostaria de participar do projeto “O USO DO GEOGEBRA NO ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL PARA ALUNOS DO 2º ANO DO ENSINO MEDIO” ministrado pelo professor Claudio Batista Leme, sob a orientação da professora doutora Fabiane de Oliveira, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, no Curso de Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional. A minha participação no projeto é livre e espontânea com o intuito de colaborar com o sucesso desta pesquisa. Fui esclarecido que minhas imagens e resposta das atividades não serão associadas ao meu nome ou número de chamada, para qualquer efeito de publicação que possa surgir da realização desta pesquisa.

Itaberá,____ de setembro 2017.

____

Assinatura do aluno

APENDICE D – AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA SOBRE GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL.

	Mestrado profissional em Matemática **Universidade Estadual de Ponta Grossa – UEPG** **Mestrando: Cláudio Batista Leme**	
Avaliação diagnóstica sobre geometria plana e espacial.		
2º Ano	**Turno: Manhã**	**__/__/2016**
Aluno (a):		

1) O que são retas paralelas?

____

2) O que são retas perpendiculares?

____

3) O que são retas reversas?

____

4) O que são sólidos geométricos?

____

5) O que é um vértice?

____

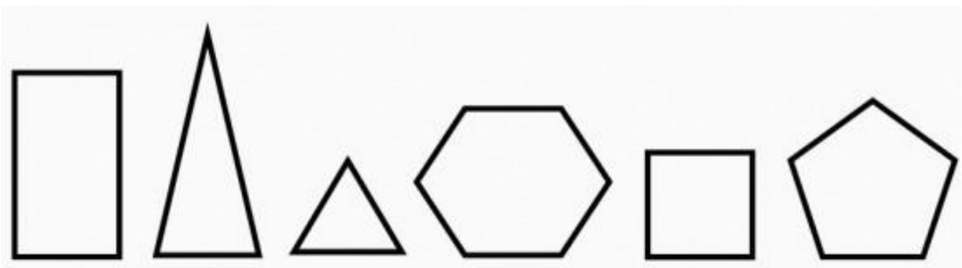
6) O que é uma aresta?

____

7) O que é uma planificação?

____

8) Enumere e escreva o nome de cada polígono abaixo:



____

____

____

Cite as principais características de cada figura:

____

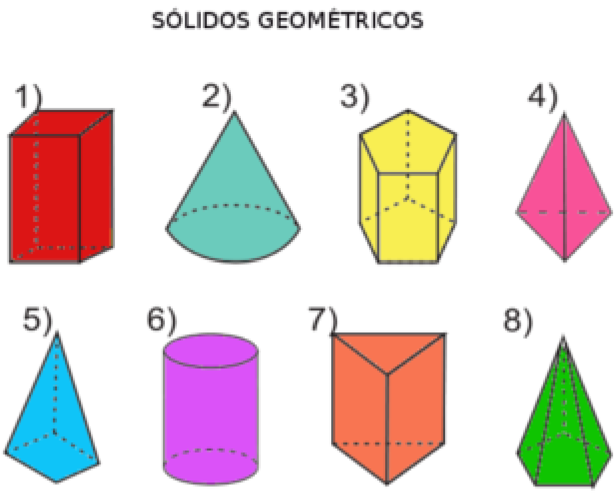
____

____

____

____

9) Escreva os nomes de cada sólido abaixo:



____

____

____

____

____

Cite as principais características de cada sólido acima:

____

____

____

____

____

10) Você já usou algum tipo de *software* durante as aulas de matemática?

Descreva____

____

____

____