UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA – UESB
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

KLÉBER SILVA

MODELAGEM MATEMÁTICA COM PROGRAMAÇÃO LINEAR: Uma Proposta de Trabalho no Ensino Médio

VITÓRIA DA CONQUISTA

2013

KLÉBER SILVA

MODELAGEM MATEMÁTICA COM PROGRAMAÇÃO LINEAR: Uma Proposta de Trabalho no Ensino Médio

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Rede Nacional PROFMAT, pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB.

Orientador: Prof. Márcio Antônio de Andrade Bortoloti, DSc.

VITÓRIA DA CONQUISTA

2013

S58m Silva, Kléber.
Modelagem matemática com programação linear: uma proposta de trabalho no ensino médio / Kléber Silva, 2013.
106f.: il.: color.
Orientador (a): Márcio Antônio de Andrade Bortoloti.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional de Matemática em Rede, Vitória da Conquista, BA, 2013.
Referências: f. 94-96.
1. Matemática – Ensino médio – Programação linear. 2. Modelagem matemática. I. Bortoloti, Márcio Antônio de Andrade. II. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional de Matemática em Rede. III. T.

CDD: 510.7

Elinei Carvalho Santana – CRB-5/1026

Bibliotecária – UESB – Campus de Vitória da Conquista – BA

KLÉBER SILVA

MODELAGEM MATEMÁTICA COM PROGRAMAÇÃO LINEAR: Uma Proposta de Trabalho no Ensino Médio

Aprovada por:

Prof. Márcio Antônio de Andrade Bortoloti, DSc.

Presidente

Prof. Claudinei de Camargo Sant'Ana, DSc.

Examinador

Prof. André Nagamine, DSc.

Examinador

Vitória da Conquista, 15 de abril de 2013.

Dedico este trabalho ao meu filho, Kelvin Kristian, que representou sempre um motivo de coragem e força para seguir em frente, aos meus pais Clarindo e Madalena que sempre me incentivaram a ir à busca dos meus objetivos, aos meus irmãos em especial a George Peter (in memoriam) e a Sérgio Manoel que deu uma grande prova de amor à vida e aos seus familiares.

AGRADECIMENTOS

Ao fim desta caminhada, há muito que agradecer, pois essa conquista não pertence só a mim, mas também a vocês que sempre estiveram ao meu lado e ajudaram no meu crescimento.

Primeiramente, agradecer a Deus por estar sempre comigo, em meu coração e nas bênçãos que Ele colocou na minha vida.

Agradecer aos colegas do PROFMAT, que viveram todas as expectativas e angústias ao longo desses dois anos de trabalho.

Agradecer aos professores do mestrado PROFMAT pelos ensinamentos e, em especial, ao orientador – Prof. Márcio Antônio de Andrade Bortoloti, DSc. – pela paciência, firmeza e pertinência nas sugestões, correções e ensinamentos.

Enfim, agradecer a todos que colaboraram de alguma forma para alcançar mais essa vitória em minha vida.

"*Assim como dirigir do lado correto da estrada nos confere liberdade para ir a qualquer lugar, aceitar a lei das constantes mutações é o caminho de liberdade*."

Buda

RESUMO

Este trabalho apresenta o resultado de uma pesquisa que teve como objetivo introduzir técnicas da Programação Linear no processo de ensino aprendizagem da Matemática no Ensino Médio. Por meio da utilização da Modelagem Matemática, a Programação Linear pode oferecer recursos didáticos aos professores de modo a tornar mais dinâmicas e participativas as atividades que envolvem a Matemática e as demais disciplinas, de uma forma contextualizada e multidisciplinar. Os Problemas de Programação Linear (PPL) buscam a distribuição eficiente de recursos limitados para atender um determinado objetivo, em geral, maximizar lucros ou minimizar custos. Ferramentas gráficas, algébricas, computacionais e concretas (*Otimizador Gráfico*) foram utilizadas ao longo do trabalho, fornecendo uma gama de possibilidades para o trabalho do professor em sala de aula. Por meio dessas ferramentas e da análise dos resultados encontrados, foi possível perceber o potencial das técnicas utilizadas no desenvolvimento de habilidades para resolver problemas do cotidiano.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Ensino Médio. Pesquisa Operacional. Programação Linear.

ABSTRACT

This work presents the results of a survey that aimed to introduce techniques of Linear Programming in the teaching learning of mathematics in high school. Through the use of Mathematical Modeling, Linear Programming can provide educational resources for teachers to become more dynamic and participatory activities involving mathematics and other disciplines in a multidisciplinary and contextualized. The Linear Programming Problems (LPP) seek the efficient allocation of limited resources to meet a certain goal, in general, maximize profits or minimize costs. Graphics tools, algebraic, computational and practical (Graph Optimizer) were used throughout the work, providing a range of possibilities for the work of the teacher in the classroom. Through these tools and analyzing the results, it was possible to realize the potential of the techniques used in developing skills to solve everyday problems.

Key-words: Mathematical Modeling. High School. Operational Research. Linear Programming.

LISTA DE QUADROS

Quadro 3.1 – Relatório de Resultados 79
Quadro 3.2 – Relatório de Sensibilidade 80
Quadro 3.3 – Quadro Simplex 80
Quadro 3.4 – Relatório de Limites 81
Quadro A1 – Proposta de Minicurso *Introdução à Programação Linear e Aplicações* 100

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Valores da função Objetivo 40
Tabela 2.2 – Avaliação da Função Objetivo 48
Tabela 2.3 – Quadro Simplex 0 (Quadro original) 51
Tabela 2.4 – Quadro Simplex 52
Tabela 2.5 – Quadro Simplex 1 52
Tabela 2.6 – Quadro Simplex 53
Tabela 2.7 – Quadro Simplex 2 53
Tabela A1 – Solução para o problema *dual* 103

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Região Viável de um PPL 37
Figura 2.2 – Representação gráfica do Problema do Carpinteiro 40
Figura 2.3 – Curvas de nível da Função Objetivo 41
Figura 2.4 – Solução gráfica para o Problema do Carpinteiro 42
Figura 2.5 – A função objetivo e a restrição do trabalho coincidem 43
Figura 2.6 – Uma função assume seu valor máximo e mínimo em um conjunto convexo não vazio e limitado em um ponto extremo 43
Figura 2.7 – Introdução das variáveis de folga 45
Figura 2.8 – Conjunto de variáveis para o Problema do carpinteiro 46
Figura 2.9 – Curvas de nível $L(x_1, x_2) = 650$, $L(x_1, x_2) = 750$, $L(x_1, x_2) = 850$..... 55

Figura 2.10 – Solução para o Problema do Carpinteiro 55
Figura 2.11 – A solução $(12, 15)$ permanece ótima para $20 \leq c_1 \leq 37{,}5$ 57
Figura 2.12 – Aquisição de recursos adicionais 58
Figura 2.13 – Limite para a aquisição de novos recursos 59
Figura 2.14 – Limite para a aquisição do recurso trabalho 60
Figura 3.1 – Interface do Software Graphmática 64
Figura 3.2 – Ajuste da tela no Graphmática 65
Figura 3.3 – Construção da região viável no Graphmática 66
Figura 3.4 – Rótulo de inequações 66
Figura 3.5 – Rótulo de inequações 67
Figura 3.6 – Intersecção das inequações restrição 67
Figura 3.7– Intersecção das inequações restrição 68
Figura 3.8 – Inequação $20.x + 30.y \leq 690$ 68
Figura 3.9 – Inequação $5.x + 4.y \leq 120$ 69
Figura 3.10 – Intersecção dos semi-planos para determinar a região viável 69
Figura 3.11 – Restrições de não negatividade 70
Figura 3.12 – Região viável para o Problema do carpinteiro 70
Figura 3.13 – Excel, menu *Arquivos* 72
Figura 3.14 – Opções do Excel 72
Figura 3.15 – Opções: Suplementos do Excel 73
Figura 3.16 – Suplementos do Excel 73
Figura 3.17 – Planilha Excel: Dados do Problema do Carpinteiro 75
Figura 3.18 – Aplicação da fórmula "SOMARPRODUTO" 76
Figura 3.19 – Janela de *"Parâmetros do Solver"* 76
Figura 4.20 – Janela de *"Opões* do *Solver"* 77
Figura 3.21 – Adição das restrições no Solver 78
Figura 3.22 – Janela *"Resultados do Solver"* 78
Figura 3.23 – Base do *Otimizador* 82
Figura 3.24 – Gerador de Curvas de nível 83
Figura 3.25 – Gerador de curvas de nível 83
Figura 3.26 – Visualizador do *Otimizador* 84
Figura 3.27 – Visualizador do *Otimizador* 84
Figura 3.28. – Localização das curvas de nível, declividade $d = -5/6$ 86

Figura 3.29 – Localização da restrição madeira 87
Figura 3.30 – Localização da restrição trabalho 88
Figura 3.31 – Região viável do Problema do Carpinteiro 88
Figura 3.32 – Solução para o Problema do Carpinteiro 89
Figura 3.33 – $C(12, 15)$ é solução única desde que $-2/3 < d < -5/4$ 90
Figura 3.34 – Efeito da aquisição de novos recursos (trabalho) 90
Figura A.1 – Peça 1: Base do *Otimizador* 96
Figura A.2 – Peça 2: Gerador de curvas de nível do *Otimizador* 97
Figura A.3 – Peça 3: Gerador de curvas de nível 97
Figura A.4 – Peça 4: rede de malha do visualizador 98
Figura A.5 – Peça 5: Visualizador do *Otimizador* 98
Figura A.6 – *Otimizador Gráfico*: Projeto para impressão em Corel Draw 99
Figura A.7 – *Otimizador Gráfico para Programação Linear* já confeccionado 99
Figura A.8 – Região viável para o problema *dual* 102

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 13

CAPÍTULO I 15
A MODELAGEM MATEMÁTICA 15
1.1. MODELAGEM MATEMÁTICA 16
1.2. PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ENSINO MÉDIO 23
1.2.1. A PESQUISA OPERACIONAL 24
1.2.2. MODELAGEM NA PESQUISA OPERACIONAL 25
1.2.3. MODELO DE OTIMIZAÇÃO 27
1.3. PROGRAMAÇÃO LINEAR E RECURSOS COMPUTACIONAIS SEGUNDO OS PARÂMETROS CURRICULARES 28

CAPÍTULO II 34
PROGRAMAÇÃO LINEAR 34
2.1 SOLUÇÕES GEOMÉTRICAS EM PROGRAMAÇÃO LINEAR 37
2.2 CURVAS DE NÍVEL DE UMA FUNÇÃO OBJETIVO 41
2.3 SOLUÇÕES ALGÉBRICAS NA PROGRAMAÇÃO LINEAR 44
2.3.1 ENUMERAÇÃO DOS PONTOS DE INTERSECÇÃO 48
2.4 O MÉTODO SIMPLEX 49
2.5 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE NA PROGRAMAÇÃO LINEAR 54
2.5.1 MUDANCAS NOS COEFICIENTES DA FUNÇÃO OBJETIVO 54
2.5.1.1 INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS NA FUNÇÃO OBJETIVO 57
2.5.2 MUDANÇA NA QUANTIDADE DE RECURSOS POSSÍVEIS 58
2.5.2.1 INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DA VARIÇÃO DE UM DOS RECURSOS 60

CAPÍTULO III 62
A PROGRAMAÇÃO LINEAR EM SALA DE AULA, UMA PROPOSTA DE TRABALHO 62
3.1 USANDO O SOFTWARE GRAPHMÁTICA PARA RESOLVER PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR 65
3.2 USANDO A FERRAMENTA SOLVER DE PLANILHAS ELETRÔNICAS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR... 71
3.3 OTIMIZADOR GRÁFICO PARA PROGRAMAÇÃO LINEAR 81
3.4 RESOLVENDO UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR COM O *OTIMIZADOR GRÁFICO* 85

CONSIDERAÇÕES FINAIS 91

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 93

ANEXOS 96
ANEXO 1 – PROJETO *OTIMIZADOR GRÁFICO – PROGRAMAÇÃO LINEAR* ... 96
ANEXO 2 – PROPOSTA DE MINICURSO: *INTRODUÇÃO À PROGRAMAÇÃO LINEAR E APLICAÇÕES* 100
ANEXO 3 – RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA *PRIMAL* ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA *DUAL* DE PROGRAMAÇÃO LINEAR 101

INTRODUÇÃO

Este trabalho visa a elaboração de recursos didáticos com potencial para serem reproduzidos na sala de aula do Ensino Médio, dando ênfase à metodologia da Modelagem Matemática, à metodologia da Resolução de Problemas de aplicação, bem como o uso de ferramentas computacionais e outras tecnologias.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta de Ensino e Aprendizagem através da Modelagem Matemática via Programação Linear no Ensino Médio, utilizando problemas que surgem em situações do cotidiano dos alunos, possibilitando uma intervenção crítica e participativa no seu meio de vivência.

Uma justificativa para essa proposta é apresentada no Capítulo 2, **A Modelagem Matemática**, fazendo-se um estudo teórico sobre a importância de se trabalhar com situações do cotidiano do aluno em sala de aula, destacando-se as fases da Modelagem, desde a fase de observação até a validação do modelo, as etapas da Resolução de Problemas e o uso da Programação Linear no Ensino.

No Capítulo 3, **Programação Linear**, é apresentada a fundamentação teórica acerca da Programação Linear, com o intuito de auxiliar e embasar o estudo dos professores no assunto. Este capítulo explora alguns aspectos históricos, dando maior ênfase ao estudo das propriedades, métodos de resolução e análise dos resultados encontrados nos Problemas de Programação Linear (PPL).

O Capítulo 4, **A programação Linear em Sala de Aula – Uma Proposta de Trabalho**, apresenta uma proposta de trabalho com a Programação Linear dentro da sala de aula, com a utilização de recursos computacionais, softwares Graphmática e Excel-Solver, e ainda, a utilização de material concreto, um *Otimizador Gráfico* para problemas com duas variáveis, descrevendo a sua confecção e utilização na resolução de um problema proposto, o Problema do Carpinteiro, descrevendo uma experiência de trabalho desenvolvida durante um Minicurso: *Uma introdução à*

Programação Linear, promovido pelo Programa de Ciências e Ensino da Matemática – PROCIEMA[1].

Finalmente, nas **Considerações Finais**, destaca-se as amplas possibilidades de trabalho em sala de aula, em diversos conteúdos programáticos, com o *Otimizador Gráfico para Programação Linear* e ainda suas limitações quanto à precisão e abrangência na resolução de problemas que envolvam valores maiores.

[1] http://www.uesb.br/prociema/PROCIEMA/APRESENTACAO.html

CAPÍTULO I

A MODELAGEM MATEMÁTICA

A Matemática é de grande importância para o conhecimento humano e a compreensão do seu meio. O seu ensino, através da Modelagem e de ideias e práticas inovadoras, cria um novo e interessante ambiente de aprendizagem para os alunos, eliminando o estigma de que a Matemática é considerada difícil por muitos, desinteressante para outros e inacessível para a maioria.

A Educação Matemática aponta para grandes mudanças no processo de ensino aprendizagem, de forma a estabelecer relações com as demais disciplinas e atividades do curso[2], com a futura atuação profissional do aluno e também com o exercício da cidadania. Algumas novas tendências e propostas surgem da necessidade de o professor se adequar a esta nova prática, com atividades envolvendo circunstâncias do dia-a-dia do aluno ou a Matemática de situações reais, promovendo a resolução de situações problemas, tarefas de investigação e atividades de Modelagem.

Motivação, facilitação da aprendizagem, preparação para utilizar a Matemática em diferentes áreas, desenvolvimento de atividades gerais de exploração e compreensão do papel sociocultural da Matemática são argumentos apresentados por Barbosa (2003) e que devem fazer parte do currículo de Matemática.

A Matemática é vista como uma ferramenta utilizada em diversas atividades, processos e situações do cotidiano[3] que envolvem as mais diferentes disciplinas. Esta ferramenta exige habilidades para a seleção de roteiros de trabalho, para a tomada de decisões e para o raciocínio lógico, tornando-a indispensável em todos os ramos da sociedade.

---

[2] No Ensino Fundamental e Médio é comum o trabalho com temas interdisciplinares envolvendo toda a comunidade escolar.

[3] Projetos interdisciplinares com temas abrangentes como Água, Lixo, Sexualidade e outros.

Segundo Biembengut (2004) existem muitas variáveis importantes que devem ser levadas em conta na discussão e na implementação da Modelagem Matemática como ferramenta de ensino e aprendizagem, tais como, a série em que se encontra o aluno, o conteúdo programático (currículo), a disponibilidade de tempo de alunos e professores e a própria formação do professor.

1.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

A Matemática é uma ciência essencialmente formal, que utiliza entes abstratos e ideais, portanto capaz de construir seus próprios modelos de estudo, ainda que as ideias básicas sejam originadas de abstrações de situações empíricas (naturais ou sociais), (BASSANEZI, 2011, p. 17). Desta forma, os modelos desenvolvidos podem conter detalhes muito complexos e pouco significativos quando vistos fora do campo matemático.

A Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real (BASSANEZI, 2011, p. 17). Várias ciências como a Física, a Química e a Biologia obtiveram grandes avanços com o uso da modelagem, utilizada como ferramenta de pesquisa, buscando criar modelos que se aproximassem das situações reais em estudo.

A Matemática, através da Modelagem, extrai a parte essencial da situação-problema e a formaliza num contexto abstrato, de forma a absorver o pensamento com linguagem precisa e racional, sendo vista, desta forma, como um instrumento intelectual capaz de sintetizar as ideias concebidas nas situações-problema que em muitas vezes estão inseridas em um emaranhado de outras variáveis de menor importância (BASSANEZI, 2011, p. 18).

De acordo com Biembengut (2004, p.16), tem-se a seguinte definição de modelo:

> Um modelo é um conjunto de símbolos os quais interagem entre si representando alguma coisa. Essa representação pode se dar por meio de desenho ou imagem, projeto, esquema, gráfico, lei matemática, dentre outras formas. Na Matemática, por exemplo, um modelo é um conjunto de símbolos

> e relações matemáticas que traduzem, de alguma forma, um fenômeno em questão.

Um modelo surge das mais variadas situações, desde vivências familiares até situações mais complexas da vida em sociedade. A elaboração do modelo dependerá do conhecimento matemático adquirido, o qual possibilita abordar problemas com menor ou maior sofisticação[4]. Tanto maior o conhecimento matemático, maiores serão as possibilidades de resolver questões que exijam uma técnica mais sofisticada, entretanto o valor do modelo não fica restrito à sofisticação matemática (BIEMBENGUT & HEIN, 2003, p 12).

Para Biembengut (2004, p. 17), a modelagem é definida como um conjunto de procedimentos requeridos na elaboração de modelo de qualquer área do conhecimento, em particular, o processo de modelagem requer do modelador[5], além de talento para a pesquisa, conhecimento matemático e capacidade de fazer leitura do fenômeno sob a ótica matemática.

É preciso que o modelador saiba discernir sobre qual conteúdo matemático melhor se adapta ao problema, e também ter um senso lúdico para manipular as variáveis envolvidas (BIEMBENGUT; HEIN, 2003, p.12). Modelagem Matemática é definida para Bassanezi (2011, p.24) como

> Um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual.

A Modelagem segue uma importante sequência de etapas: Experimentação, Abstração, Resolução, Validação e Modificação BASSANEZI (2011).

É na *experimentação* onde se processa a obtenção de dados. Os métodos são ditados quase sempre pela natureza do experimento e objetivos da pesquisa. A contribuição de um matemático é fundamental no direcionamento da pesquisa e o uso dos métodos estatísticos na pesquisa experimental pode oferecer maior confiabilidade aos dados encontrados.

---

[4] Profa. Dra. Maria Sallet Biembergut descreve experiências com a modelagem realizadas com diferentes grupos, como apresentadas na palestra de própria autoria: *Modelagem e Tecnologia*, realizada em 24 de novembro de 2012, UESB - realização: ACCE/GEEM (Projeto Atividades Colaborativas e Cooperativas em Educação e Grupo de Estudos em Educação Matemática).

[5] O modelador, neste caso, pode ser um pesquisador ou mesmo um professor.

Na etapa de *abstração* obtém-se a formulação dos Modelos Matemáticos. Nesta fase, procura-se estabelecer: a *seleção de variáveis* – as variáveis devem estar claramente definidas fazendo-se uma distinção entre as variáveis de estado e as variáveis de controle[6]; a *problematização* – os problemas enunciados devem ser explicitados de forma clara, compreensível e operacional, indicando exatamente o que se pretende resolver com o modelo; a *formulação de hipóteses* – as hipóteses são geradas[7] para a montagem do modelo matemático que dependem diretamente da complexidade das hipóteses e da quantidade das variáveis inter-relacionadas; e a *simplificação* – devido a complexidade excessiva em considerar todos os detalhes da situação-problema.

As variáveis de estado são o menor conjunto de variáveis que determina o estado de um sistema dinâmico[8]. Se pelo menos “n” variáveis $\left(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\right)$ são necessárias para descrever completamente o comportamento de um sistema dinâmico, então estas “n” variáveis são um conjunto de variáveis de estado. Segundo Bassanezi (2011, p. 28), as variáveis de estado definem a evolução do sistema.

A simulação de sistemas geralmente necessita de modelo de variáveis de estado – vários modelos de variáveis de estado podem ser obtidos para um mesmo sistema, dependendo da escolha das variáveis de estado. Técnicas no domínio do tempo podem ser usadas para sistemas não-lineares, variantes no tempo[9] e multivariáveis. O domínio do tempo é o domínio matemático que incorpora a resposta e a descrição de um sistema em termos do tempo, t. A representação de sistemas de controle no domínio do tempo constitui uma das bases da teoria de controle moderno e da otimização de sistemas. Por exemplo, um sistema de

---

[6] As variáveis de controle agem sobre o sistema. (BASSANEZI, 2011, p. 28)

[7] A geração de hipóteses se dá de vários modos: observação dos fatos, comparação com outros estudos, dedução lógica, experiência pessoal do modelador, observação de casos singulares da própria teoria, analogia de sistemas etc (LAKATOS-MARCONI, *apud* BASSANEZI, 2011, p. 28).

[8] Um sistema pode ser definido com um conjunto de componentes interconectados, que apresentam certas relações de causa e efeito e que atuam como um todo, com um determinado objetivo. Num sistema estático as propriedades descritivas não variam com o tempo, podendo variar espacialmente, diferentemente do sistema dinâmico em que tais propriedades variam com o tempo e ainda podem variar espacialmente.

[9] Um sistema variante no tempo é um sistema para o qual um ou mais parâmetros do sistema podem variar em função do tempo.

equações diferenciais descreve o comportamento do sistema em termos da taxa de variação de cada uma das variáveis de estado.

Na *resolução*, o modelo matemático é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente. Nesta fase que acontece o desenvolvimento de novas técnicas e teorias matemáticas, quando os argumentos conhecidos são insuficientes para fornecer as soluções do modelo. A resolução do modelo pode ser completamente desvinculada da realidade modelada, uma atividade exclusivamente da competência de um matemático.

Na *validação* ocorre o processo de aceitação ou não do modelo proposto. Nesta fase, os modelos e as hipóteses são testados em confronto com os dados empíricos, comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real. A aceitação de um modelo depende diretamente do grau de aproximação dos resultados com a situação real. Para interpretar os dados obtidos pode-se usar gráficos e/ou tabelas, facilitando uma avaliação das previsões e sugerindo um aperfeiçoamento dos modelos.

Na fase de *modificação*, fatores ligados ao problema original podem provocar a rejeição ou aceitação dos modelos. As simplificações ou idealizações geram soluções que não conduzem às previsões corretas e definitivas. Muitos fatores podem levar às previsões incorretas, tais como: uso de hipóteses falsas ou insuficientes, obtenção incorreta de dados, simplificação de variáveis, omissão de erros ao longo da resolução do problema entre outros.

A modelagem matemática, quando feita de maneira eficiente, permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender fenômenos e conceitos, participando do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças. Ao *matemático* aplicado cabe a construção e análise do modelo matemático, enquanto que sua aplicabilidade e validação são atividades de pesquisadores de outras áreas.

Para Bassanezi (2011, p. 32), o termo *aplicação* em matemática está relacionado ao fato de se utilizar seus conceitos para o entendimento dos fenômenos do mundo real e, de alguma forma, todo argumento matemático relacionado ou não com a realidade, pode ser visto como pertencente à Matemática Aplicada[10].

Segundo Bassanezi (2011, p. 32), a Modelagem Matemática é de grande relevância quando utilizada como um instrumento de pesquisa, com uma larga esfera de aplicação e variedade de ideias matemáticas utilizadas. A modelagem é capaz de estimular novas ideias e técnicas experimentais, constituindo-se num importante recurso para um melhor entendimento da realidade e servindo de ligação entre as diversas áreas do conhecimento, estabelecendo-se como uma linguagem universal para compreensão e relacionamento entre pesquisadores de diversas áreas do conhecimento.

Várias ciências tem se apoiado na Matemática com o intuito de organizar dados e testar a objetividade de seus pensamentos assim como estudar e resolver problemas das áreas de Biologia, Economia, Engenharia, Física, Química entre outras. Alguns modelos matemáticos já tem seu êxito comprovado quanto à previsibilidade, modelos causais[11], seja determinístico ou estocástico[12], sendo aplicados até mesmo em situações menos favoráveis (BASSANEZI, 2011, p. 35). Assim, a Matemática Aplicada vem ganhando espaço significativo em várias universidades como cursos de graduação e pós-graduação.

Os procedimentos da Matemática Aplicada foram transferidos à matemática escolar, fato recente na Educação, em resposta às preocupações sociais, culturais e também devido ao baixo rendimento dos alunos na Matemática.

Vários autores consideram o uso da modelagem no ensino da matemática como um recurso benéfico à aprendizagem do aluno, entre eles Bassanezi (2011),

---

[10] A **Matemática Aplicada** pode ser considerada como a *arte de aplicar matemática a situações problemáticas*, usando como processo comum a modelagem matemática. É esse elo com as ciências que distingue o matemático aplicado do matemático puro. A diferença consiste, essencialmente, *na atitude de se pensar e fazer matemática.* (BASSANEZI, 2011, p 32).

[11] Um sistema causal depende somente de condições presentes ou passadas, e não dependem de estados futuros. Sistemas físicos são todos sistemas causais.

[12] Em um modelo *determinístico* a saída pode ser calculada de forma exata tão logo se conheça o sinal de entrada e as condições iniciais. Em contraste, um modelo *estocástico* contém termos aleatórios que tornam impossível um cálculo exato da saída. Os termos aleatórios do modelo podem ser encarados como uma descrição das perturbações. Normalmente, o modelo determinístico engloba apenas o processo, enquanto o estocástico considera também as perturbações e ruídos.

Barbosa (2003), Burak (1992) e Biembengut (2003). Estes autores apontam a modelagem como uma ferramenta alternativa metodológica de ensino, a qual contribui de maneira incisiva para o melhor desempenho escolar do aluno, com um aprendizado mais significativo.

A Modelagem passou a ser utilizada como uma estratégia de ensino-aprendizagem, com conteúdos desenvolvidos em disciplinas matemáticas “aplicáveis”[13] como nas disciplinas básicas que auxiliam na modelagem de fenômenos envolvidos em alguma situação real com Programação Linear e não Linear, Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais, Geometria Analítica e Álgebra Linear, Métodos Computacionais entre outras.

Em cursos de pós-graduação, Mestrado e Doutorado, os alunos buscam desenvolver a criatividade matemática com o intuito de tornar-se um *modelador* matemático dedicado ao estudo de vários fenômenos, tais como a força gravitacional, crescimento populacional, despoluição de ambientes e outros.

Bassanezi (2011) atenta para o fato dos cursos de Matemática se apresentarem individualizados, numa separação artificial entre “Matemática Pura” e “Matemática Aplicada”, dedicando-se a primeira às questões mais teóricas enquanto a segunda se dedica às suas aplicações.

Conforme Bassanezi (2011), no processo evolutivo da matemática, houve uma inclusão de aspectos de aplicação e, mais recentemente, *resolução de problemas e modelagem matemática* tem sido defendida por pessoas envolvidas com o ensino da matemática. Dessa forma, faz-se necessário ensinar a matéria de um modo significativo, buscando no cotidiano do aluno situações que podem servir de motivação para o processo de ensino-aprendizagem, agregando valores socioculturais à realidade de um sistema educacional considerado ultrapassado.

Como destaca Bassanesi (2011), os principais argumentos para a inclusão da modelagem matemática no ensino são: *argumento formativo* – a modelagem matemática e a resolução de problemas vistas como um processo que desenvolve a capacidade de explorar e criar dos estudantes; *argumento de competência crítica* –

[13] Disciplinas que auxiliam na modelagem de fenômenos determinados por alguma situação-problema.

preparam os estudantes para a vida em sociedade; *argumento de utilidade* – preparar o estudante para utilizar a Matemática como ferramenta para resolver problemas das mais diversas áreas; *argumento intrínseco* – proporcionar ao estudante a oportunidade de entender e interpretar a própria matemática em todas suas facetas; *argumento de aprendizagem* – facilitar a melhor compreensão dos argumentos matemáticos e guardando conceitos e resultados; *argumento de alternativa epistemológica* – encaixa no *Programa de Etnomatemática*[14].

Principalmente em cursos regulares, como visto em Bassanezi (2011), existe muitos obstáculos para tal inclusão, podendo ser do tipo: *obstáculos instrucionais* – necessidade de cumprir completamente um programa ou a resistência de alguns professores em relação às conexões e aplicações com outras áreas; *obstáculos para os estudantes* – os estudantes tem uma visão do professor como um transmissor de conhecimentos e quando são colocados no centro do processo de ensino-aprendizagem, responsáveis pelo conhecimento, tornam-se apáticos e caminham em ritmo mais lento; *obstáculos para os professores* – a falta de habilidade e de conhecimento em desenvolver a modelagem em seus cursos trazem insegurança quando se busca aplicações de matemática em áreas que desconhecem.

As técnicas para estabelecimento de um modelo são as mais variadas, cada modelo requer análise adequada de suas características para que seja então formulado um modelo matemático adequado e satisfatório para a situação-problema.

A ação pedagógica não se limita à sala de aula, mas envolve todo um contexto social, ou seja, a realidade em toda sua dimensão na qual se encontra qualquer núcleo de ensino. Para o professor, é confortável enxergar a prática docente como uma mera transmissão e/ou transcrição de conteúdos. Contrário a isto, toda a prática pedagógica passa por contextos muito mais amplos para os alunos, como os contextos: social, econômico, político, religioso, entre outros. Esses contextos dificultam o trabalho do professor, entretanto, uma ação pedagógica eficiente deve abordar no currículo escolar toda a pluralidade e diversidade cultural dos alunos, afim de eliminar possíveis deficiências do processo de ensino.

---

[14] Indicado por Ubiratan D'Ambrósio, "propõe um enfoque epistemológico alternativo associado a uma historiografia mais ampla. Parte da realidade e chega, de maneira natural e através de um enfoque cognitivo com forte fundamentação cultural, à ação pedagógica" (D'AMBRÓSIO, 1993, pp. 5-18)

As metodologias aplicadas em sala de aula precisam ser significativas para o ensino, para que os alunos sejam capazes de construir significados e dar sentido ao que aprendem. Para desenvolver um trabalho no Ensino da Matemática através da Modelagem é preciso, primeiramente, passar por uma reformulação do currículo existente, deixando de priorizar o ensino voltado a vencer os conteúdos que o compõe e torná-lo mais dinâmico, com atividades mais reflexivas, enxergando as possibilidades e limitações dos conteúdos explorados em sala de aula.

Ao propor aos alunos que resolvam problemas do seu cotidiano, não simplesmente por resolvê-los, o professor contribui para que eles pensem e, mesmo que aconteçam erros durante o processo, perceberão que tais erros são significativos, visando não apenas o resultado final, mas todo o processo desenvolvido. Pensando, ensinar matemática, com foco nessa metodologia, abre-se possibilidades para tornar as aulas de matemáticas mais interessantes e eficazes.

1.2 PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ENSINO

A elaboração de modelos matemáticos, indispensáveis às mais diversas áreas do conhecimento, sempre foi vista como difícil e de complicado entendimento. Uma necessidade atual do ensino é fazer uma conexão dos conteúdos trabalhados em sala de aula com situações vivenciadas no cotidiano dos alunos.

A Programação Linear, uma técnica utilizada na abordagem de problemas da Pesquisa Operacional, é capaz de descrever alguns sistemas organizados com o auxílio de um modelo e, através da experimentação com o modelo, levar à descoberta de uma melhor maneira de operar esse sistema.

Muitas situações que envolvem esse campo de pesquisa são encontradas no cotidiano dos alunos. Problemas que tenham seus modelos representados por expressões lineares podem ser abordados com a técnica de otimização da Programação Linear apontando uma distribuição eficiente de recursos limitados entre atividades competitivas e com a necessidade de atender a um determinado objetivo (SILVA & SILVA, 2012, p.130).

Diversos problemas encontrados no cotidiano do aluno, envolvendo diversas áreas do conhecimento, necessitam de decisões que irão maximizar ou minimizar certas quantidades, os quais poderão ser abordados com a Programação Linear.

1.2.1 A PESQUISA OPERACIONAL

O termo "Pesquisa Operacional"[15], utilizado pela primeira vez durante a Segunda Guerra Mundial, teve o propósito de resolver determinados problemas de operações militares[16]. O sucesso das aplicações logo despertou o interesse do mundo acadêmico e empresarial.

De acordo com Andrade (2004, p.1), desde o seu surgimento, esse novo campo de análise de decisão caracterizou-se pelo uso de técnicas e métodos científicos qualitativos por equipes interdisciplinares, no esforço de determinar a melhor utilização de recursos limitados e para programação otimizada das operações de uma empresa.

A Pesquisa Operacional surgiu de estudos realizados por equipes interdisciplinares de cientistas contratados para resolver problemas militares de ordem técnica e tática (SILVA & SILVA, 2012, p. 129), facilitando o processo de tomada de decisão e permitindo que os resultados sejam avaliados e testados antes de serem efetivamente implementados.

Na concepção de Andrade (2004, p.2),

> Uma decisão é o resultado de um processo que se desenvolve a partir do instante em que o problema foi detectado, o que geralmente ocorre através de percepções de sintomas. Assim, o processo de decisão empresarial se inicia quando uma pessoa, ou um grupo de pessoas, percebe sintomas de que alguma coisa está saindo do estado normal desejado ou planejado. A partir dessa percepção, inicia-se a fase de identificação do problema, que é o verdadeiro começo do processo de tomada de decisão.

---

[15] A Pesquisa Operacional é uma ciência dividida em tópicos: Programação Linear, Teoria das Filas, Simulação, Teoria dos Jogos, Programação Dinâmica e outros.

[16] Um exemplo é o "Problema da Dieta", que se resumia em descobrir qual a alimentação mais econômica, levando-se em conta que o organismo humano necessita de uma quantidade mínima diária de nutrientes. (PRADO, 2004, p. 22)

Um processo de tomada de decisão levará em consideração a sua sequência, complexidade, subjetividade e o ambiente onde será aplicado, dessa forma, determinando a ação gerencial.

A abordagem da Pesquisa Operacional é a do método cientifico. A Pesquisa Operacional busca resolver conflitos de interesse entre os diversos componentes de uma organização, o que não significa que cada componente deva ser considerado individualmente no processo de decisão e, para isto, busca sempre a melhor solução (solução ótima) e que seja consistente com os objetivos da organização como um todo.

Geralmente, uma decisão leva em conta os interesses envolvidos e uma adaptação dos meios necessários ao alcance dos objetivos traçados, cabendo aos administradores estipular as prioridades e avaliar os custos benefícios de cada uma delas.

No presente trabalho será abordada somente a Programação Linear, uma técnica de planejamento originada no final da década de cinquenta. A Programação Linear é uma das técnicas mais utilizadas na Pesquisa Operacional, sendo comum a sua aplicação em rotinas diárias de planejamento de empresas com as mais variadas atividades.

1.2.2 MODELAGEM NA PESQUISA OPERACIONAL

O processo de tomada de decisão é desenvolvido em ambientes especialmente construídos para propiciar as condições adequadas para uma decisão de qualidade. A ação depende do objetivo desejado, procurando visualizar prováveis consequências de cada alternativa possível.

De acordo com Andrade (2004, p.10), para se chegar a uma decisão,

> A pessoa toma contato com o problema (percepção), procura focalizá-lo bem em termos de escopo, importância, valor, consequências da ação ou inação, cria alternativas de solução, estabelece um critério para seleção de uma alternativa, avalia as alternativas e chega a uma decisão final.

Quando os problemas são simples, os modelos surgem naturalmente, decorrentes da própria vida do *gestor*[17], da sua cultura, educação ou experiência. Quando os problemas são complexos, exigem-se técnicas mais sofisticadas ou aparatos tecnológicos.

Como exemplo de um problema simples, considere a tarefa de uma dona-de-casa de decidir em comprar manteiga ou margarina. Para tanto, ela levará em consideração o custo de cada produto, o sabor, os efeitos para a saúde, a durabilidade, a embalagem e outros fatores. Mesmo diante de tantos fatores, o problema pode ser limitado aos fatores mais importantes como custo, sabor e efeitos para a saúde. A tomada de decisão consiste em determinar a quantidade de cada produto.

A consequência da escolha da dona-de-casa por comprar manteiga seria: gastar mais dinheiro, agradar a família pela preferência e por em risco a mesma pelo teor mais alto de colesterol. A consequência da escolha da dona-de-casa por comprar margarina seria: economizar dinheiro, desagradar a família e não colocar em risco a saúde.

Conforme o peso atribuído a cada consequência, a dona-de-casa chegará a uma decisão. Caso a restrição seja o dinheiro, a decisão será optar por margarina, não necessitando da construção de um modelo formal para tal decisão.

Em muitas situações, o modelo mental não é suficiente, necessitamos de um modelo formal, onde o gestor deseja calcular quantidades que maximizem ou minimizem algum fator, e que esses fatores dependam de critérios de escolha, restritos à condições pré-estabelecidas.

Como exemplo de um modelo formal, seja o problema de maximizar o lucro de dois produtos, cada um necessitando de trabalho e matéria-prima para o processo de produção. Considerando limitada a quantidade de trabalho e matéria-prima total, o gestor necessita encontrar as quantidades dos dois produtos que maximizem o lucro no processo produtivo e que, ao mesmo tempo, satisfaçam às restrições de disponibilidade e ainda às restrições de demanda.

[17] No texto, o termo gestor tem os significado de “decisor”, ou seja, aquele que propõe o problema ou aquele que tenta resolvê-lo.

A programação Linear constitui uma técnica de otimização, sendo uma ferramenta utilizada para encontrar o lucro máximo ou o custo mínimo em situações nas quais existem diversas opções de escolha sujeitas a algum tipo de restrição ou regulamentação (PRADO, 2004, p. 16).

Muitos são os fatores levados em conta na resolução do problema. O modelo adotado deve relacionar os diversos fatores que interferem na quantidade a ser produzida de cada produto e, devido a complexidade do modelo, adota-se técnicas de resolução, facilitando a análise e interpretação dos resultados encontrados.

Neste trabalho, dar-se-á um enfoque aos modelos simbólicos ou matemáticos. Conforme Andrade (2004, p.12), os *modelos simbólicos* ou *matemáticos...*

> ... baseiam-se na pressuposição de que todas as informações e variáveis relevantes do problema de tomada de decisão podem ser quantificadas. Isso nos leva a utilizar símbolos matemáticos pra representá-las e a usar funções matemáticas para descrever as ligações entre elas e a operação do sistema.

Os modelos matemáticos são apropriados para resolver problemas da Pesquisa Operacional. Conforme alguns fatores como objetivos, extensão e nível de incerteza, define-se os modelos como *modelos de simulação* e *modelos de otimização*. Neste trabalho será abordado apenas os modelos de otimização.

Um modelo de otimização é estruturado para selecionar uma alternativa (ou alternativas) que será considerada “ótima”, conforme critério estabelecido pelo gestor ou analista. Para encontrar a solução ótima, utiliza-se um método sistemático de solução, chamado *algoritmo*. A “solução ótima”, encontrada através de algoritmos, será usada como referência na tomada de decisão na situação real que originou o modelo.

1.2.3 MODELO DE OTIMIZAÇÃO

Um gestor precisa, inicialmente, identificar se no problema em estudo é indicada a procura de uma melhor solução, buscando-se valores ótimos da variável de decisão.

A busca pela solução ótima se dá quando as variáveis de decisão puderem assumir vários valores dentro de uma faixa ou região de restrição. Os valores calculados devem respeitar as restrições de uma maneira precisa, evitando grandes variações no resultado final.

O gestor identifica as variáveis relevantes, formulando a função objetivo que reflete o critério de otimização das variáveis de decisão. As restrições que estão sujeitas algumas variáveis e a relação entre elas devem ser escritas matematicamente.

Definido o problema, escolhe-se o método adequado para a solução do modelo, levando em consideração o tipo de modelo matemático e as análises e resultados desejados na solução do problema. Para resolver o problema basta aplicar algoritmos realizados manualmente ou por computadores. De qualquer modo, será necessário certo conhecimento matemático para acompanhar o processo e entender as soluções encontradas.

Depois de encontrada a solução, esta deve ser verificada e avaliada conforme expectativas e experiências do gestor, tomando as decisões mais apropriadas e com o menor risco e incerteza.

1.3 PROGRAMAÇÃO LINEAR E RECURSOS COMPUTACIONAIS SEGUNDO OS PARÂMETROS CURRICULARES

A Modelagem Matemática pode ser entendida como um instrumento de intervenção e avaliação do mundo em seus diversos aspectos. Assim são revelados procedimentos de Modelagem que perpassam por três passos essenciais: a *formulação do problema,* a *resolução aproximada* e a *avaliação*, surgindo, segundo autores, o diálogo, a negociação e o acordo, além de buscar a leitura crítica dos resultados. Procedimentos e implicações do trabalho com modelagem no ambiente escolar podem se apresentar como uma importante proposta de intervenção pedagógica.

A Modelagem Matemática constitui um procedimento dinâmico que consiste de um modelo matemático destinado a solucionar um problema da realidade sobre a qual se deseja atuar. Esse método proporcionaria um meio de aplicar a Matemática em situações do cotidiano, interagindo a Matemática ensinada na escola com a Matemática da vida real. A Modelagem Matemática é considerada como uma estratégia de ensino-aprendizagem, pela qual se transformam problemas da realidade em problemas matemáticos. Quando resolvidos, é possível interpretar suas soluções na linguagem do mundo real.

Vista como estratégia de ensino, a modelagem permitirá que os alunos tenham maior interação, dinamismo, curiosidade e interesse pelos conteúdos matemáticos estudados, apresentando-se como um interventor do processo de ensino-aprendizagem.

A Programação Linear se apresenta como uma proposta pedagógica com a possibilidade de fundamentar conteúdos como funções lineares, equações e inequações lineares, matrizes e sistemas lineares com aplicação nas mais diversas áreas de conhecimento.

Num estudo em Pesquisa Operacional é comum envolver várias fases como: *Formulação do Problema; Construção do Modelo Matemático; Cálculo da Solução através do Modelo; Teste do Modelo e da Solução; Estabelecimento de Controles de Solução; Implantação e Acompanhamento.* A técnica mais utilizada na abordagem dos problemas de Pesquisa Operacional é a Programação Linear, que para o aluno, apresenta como uma possibilidade de interação entre Matemática e a realidade.

Segundo os PCNEM[18] (BRASIL, 1999, P. 40), a Matemática do Ensino Médio

> não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.

É fundamental que os estudantes sejam capazes de compreender conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas e aplicar esses conhecimentos em diversas situações, além de desenvolver capacidades de raciocínio e resolução de

[18] Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 1999)

problemas de forma contextualizada, aplicando os princípios científicos às situações reais ou simuladas.

O ensino da Matemática traz em si o desenvolvimento de habilidades e competências necessárias para interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, generalizar entre outras ações necessárias pra a formação do estudante (BRASIL, 2002).

Para que o professor introduza o trabalho com Programação Linear, ele poderá buscar no cotidiano do aluno situações-problema que tenham comportamentos lineares[19]. Depois de prender a atenção do aluno com questionamentos e suposições, o professor apresenta técnicas geométricas, algébricas e computacionais que facilitam o entendimento e a resolução dos problemas propostos.

As OCEM[20] (BRASIL, 2006) apontam para três aspectos: a escolha de conteúdos; a forma de trabalhar os conteúdos; o projeto pedagógico e a organização curricular. Partindo do princípio "pensar matematicamente", orientam para a necessidade de priorizar atividades que desenvolvam no estudante a habilidade do "fazer matemático" através de processos investigativos, com prioridade na qualidade e não quantidade dos conteúdos e, assim, contribuindo para uma maior apropriação dos conhecimentos.

Quando o professor propõe apenas resolver exemplos e, em seguida, requisita dos seus alunos a reprodução dos passos por ele executado, é possível que os alunos sejam levados a aprender somente conteúdos de uma forma abstrata, longe de seu cotidiano ou das necessidades de aprendizagem naquele momento da escolarização. Os alunos não se envolvem e estudam somente para responder às provas e "passar de ano", limitando o seu raciocínio à imitação, gravando informações apenas temporariamente, avançando pouco no sentido de encontrar novas soluções e desenvolvendo assim, um pensamento crítico que os levem a novas situações.

---

[19] Problemas de consumo, corrida de táxi, pagamento de impostos entre outros – o valor pago é proporcional à quantidade utilizada ou consumida.

[20] Orientações Curriculares do Ensino Médio.

Para que o aluno seja motivado para o aprendizado, cabe ao professor dar ênfase aos processos que facilitam a transferência de conhecimentos, promovendo estratégias aplicadas em situações-problemas, buscando inovações e possibilitando ao aluno o desenvolvimento do pensamento criativo.

Pensando assim, é aconselhável que o professor encontre ferramentas que venham a criar novas oportunidades de direcionar a motivação dos alunos para a aprendizagem e, para isto, devem fazer uma ponte entre o que os alunos já conhecem (experiências do cotidiano), o que estão aprendendo (conteúdo programático) e o que ainda podem aprender dentro ou fora do ambiente escolar, de acordo com suas curiosidades e criatividades voltadas para a construção e sua autonomia pessoal de pensar e agir sobre o mundo em sua volta.

O professor se torna um pesquisador juntamente com seus alunos, com o intuito de produzirem, de forma colaborativa, os conteúdos, ideias e projetos. Os alunos sentem-se motivados para o trabalho, participando de um ambiente de investigação, por intermédio da Matemática, levando em consideração situações que surgem em outras áreas do conhecimento. A **Motivação** é um elemento que surge através da emoção segundo Beraldo e Barbato (2013, p. 10):

> Então para promover a motivação é preciso envolvimento pessoal que pode ser desencadeada por diferentes eventos criados também pelo professor, que envolvem divisão da responsabilidade pela aprendizagem, busca de interações mais simétricas, atividades que envolvam argumentação, negociação, alternância de trabalho em grupo e trabalho individual, estímulo a perguntas e a construção de respostas por parte dos alunos, exposição de exemplos pessoais por parte do professor, a fim de dar dicas sobre estratégias de aprendizagem ou provocar curiosidade e gerar novas problematizações ou com o objetivo de apoiá-los na construção da confiança e autonomia.

Em artigo adaptado[21] do Prof. Elon Lages Lima sobre a inclusão de sistemas lineares nos currículos escolares encontramos a seguinte declaração:

> Os sistemas de equações lineares constituem um tópico de grande interesse prático. Seu estudo é acessível aos estudantes, pois não requer o emprego de conceitos sutis ou complicados. Além disso, pode servir como ponto de partida para diversas teorias matemáticas relevantes e atuais. Por estes três motivos, é mais do que justa sua inclusão nos currículos escolares.

---

[21] Matemática: ensino médio, Coleção Explorando o ensino, volume 3. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004.

Trabalhar com Programação Linear no Ensino Médio contempla algumas necessidades como as de trabalhar diferentes modelos de funções tais como: linear, quadrático e exponencial por meio de situações de aprendizagem que abordem diversas áreas do conhecimento (BRASIL, 2006). E ainda que as atividades trabalhadas permitam ao aluno compreender as estruturas de algoritmos com o intuito de se atentarem para erros em problemas que tenham manipulações algébricas como (BRASIL, 2006, p. 71):

> Por exemplo, os alunos devem entender o que acontece com uma desigualdade quando ambos os lados são multiplicados por um mesmo número negativo, ou por que o quadrado de um número nem sempre é maior que o próprio número, ou como resolver inequações que envolvam quocientes.

Ainda se justifica o uso da Programação Linear como ferramenta pedagógica o incentivo ao uso de *softwares* no ensino da Matemática, indicando que existem programas que apresentam recursos que valorizam o processo do “pensar matematicamente”, nos quais os alunos experimentam, testam hipóteses, conjecturam e criam estratégias para resolver problemas (BRASIL, 2006). Os *softwares* com essas características são classificados como programas de expressão.

A Programação Linear permite a exploração dos recursos tecnológicos na resolução de equações e inequações, e com respeito a essas tecnologias as OCEM (BRASIL, 2006, p. 89) afirmam:

> Para o estudo das funções, das equações e das desigualdades da geometria analítica (retas, círculos, cônicas, superfícies), tem-se uma grande variedade de programa de expressão. Em muitos desses programas, pode-se trabalhar tanto com coordenadas cartesianas como com coordenadas polares. Os recursos neles disponibilizados facilitam a exploração algébrica e gráfica, de forma simultânea, e isso ajuda o aluno a entender o conceito de função, e o significado geométrico do conjunto-solução de uma equação – inequação.

Vários recursos tecnológicos já fazem parte da prática pedagógia e facilitam o processo ensino-aprendizagem. O uso de programas que facilitam a visualização do problema é aconselhável e se justifica nas OCEM (BRASIL, 2006, p. 89-90) como segue

> No uso de tecnologia para o aprendizado da Matemática, a escolha de um programa torna-se um fator que determina a qualidade do aprendizado. É com a utilização de programas que oferecem recursos para a exploração de conceitos e ideias matemáticas que está se fazendo um interessante uso de tecnologia para o ensino da Matemática. Nessa situação, o professor deve

> estar preparado para interessantes surpresas: é a variedade de soluções que podem ser dadas para um mesmo problema, indicando que as formas de pensar dos alunos podem ser bem distintas; a detecção da capacidade criativa de seus alunos, ao ser o professor surpreendido com soluções que nem imaginava, quando pensou no problema proposto; o entusiástico engajamento dos alunos nos trabalhos, produzindo discussões e trocas de ideias que revelam uma intensa atividade intelectual.

Com o objetivo do aluno adquirir experiência necessária para o trabalho independente, o professor poderá auxiliá-lo de modo que ao mesmo caiba uma parcela razoável do trabalho. O professor se coloca no lugar do aluno, percorrendo e indicando os mesmos passos, ajudando-o com a devida naturalidade, para que ele perceba a sua parcela de contribuição no processo de modelação matemática[22].

É aconselhável ao professor conduzir o trabalho, em sala de aula, de forma a não torná-lo um procedimento rígido, mecânico, pedante, portanto prejudicial. Há uma gama de situações-problemas a serem exploradas com a Programação Linear, estimulando o aluno a pensar de maneira crítica sobre um melhor aproveitamento de recursos e de forma ativa e perpicaz, tornando-o um sujeito ativo e que contribua positivamente para o seu meio de convívio.

---

[22] Modelação matemática é o método que se utiliza da essência da modelagem matemática no ensino. (BIEMBENGUT, 2004, p. 28)

CAPÍTULO II

PROGRAMAÇÃO LINEAR

Um grande desafio para muitos estudiosos dos EUA durante a segunda guerra mundial foi a descoberta de uma alimentação mais econômica e com a quantidade mínima de nutrientes para o organismo humano. Em 1945, George Stigler apresenta uma melhor solução, misturando vários alimentos que continham diversos nutrientes, chegando a uma dieta mais barata, porém sem levar em consideração aspectos como diversidade, gosto, e outros. A solução apresentada por Stigler não foi bem aceita, mas a técnica se mostrou útil e sem rejeições em alimentação de animais, ou em carga de altos-fornos de siderúrgicas.

O método ganhou forças, em 1947, quando George Dantzig desenvolveu o Método Simplex[23], capaz de resolver qualquer PPL. No início, exclusivamente com a resolução manual, demandava muito tempo na resolução de problemas com muitas variáveis, ganhando forças com o uso do computador a partir de 1951 e se expandindo de maneira extraordinária.

Utilizado somente a partir de 1960 no Ocidente, o assunto foi analisado inicialmente em 1936 por Wassily Leontieff quando criou um modelo constituído de equações lineares, o primeiro passo para o estabelecimento de técnicas para a Programação Linear. Em 1939, L. V. Kantorovick publicou trabalho sobre planejamento de produção e, em 1940, Frank L. Hitchocock fez uma abordagem sobre problema de transportes.

A Programação Linear é uma técnica de otimização muito utilizada na resolução de problemas, onde seus modelos são representados por expressões lineares, que ocorrem na Pesquisa Operacional. Tais problemas estão relacionados

---

[23] O Método simplex foi desenvolvido por George Dantzig, em 1947, quando trabalhava na Rand Corporation no projeto SCOOP (*Scientific Computation of Optimum Programs*). É um algoritmo capaz de resolver problemas de Programação Linear. (PRADO, 2004, p. 23)

com a melhor distribuição de recursos limitados para atividades que se relacionam competitivamente, e tem a finalidade de atender a um determinado objetivo.

A Programação Linear tem sido utilizada em áreas muito diversas, destacando-se: dosagem (mistura, receita ou *blending*) – alimentação, formulações de rações, fabricação de adubos, ligas metálicas, petróleo e minérios; transporte; investimentos; avaliação de recursos – fábricas, fazendas; localização industrial; designação; compras; fluxo de redes. Onde mais se destaca a aplicação da Programação Linear é no setor industrial. Modelos de *transporte* e de *fluxo em redes* também são utilizados em logística com excelentes resultados.

Como exemplo[24] de Programação Linear, considere uma fábrica de rádios que possui duas linhas de produção: *Rádios Standard* e *Rádios Luxo.* Com relação aos rádios *Standard*, temos as seguintes informações: a linha de produção comporta um máximo de 24 pessoas; cada rádio consome o trabalho de 1 homem/dia para ser produzido; cada rádio fornece um lucro de $R\$\ 30{,}00$. Para os rádios *Luxo*: a linha de produção comporta um máximo de 32 pessoas; cada rádio consome o trabalho de 2 homens/dia para ser produzido; cada rádio fornece um lucro de $R\$\ 40{,}00$. A fábrica possui um total de 40 empregados a serem alocados nas duas linhas de produção. O objetivo do dono da fábrica é *maximizar o lucro diário*.

Com a Programação Linear deseja-se maximizar ou minimizar uma função linear, denominada *função objetivo*, sujeita a um conjunto de restrições, podendo ser equações e/ou inequações, denominadas *restrições do modelo*. Estas representam, normalmente, limitações de recursos disponíveis (material, capital, mão-de-obra, tempo) ou ainda exigências e condições a serem cumpridas no problema.

Geralmente, existem diversas maneiras para distribuir os recursos envolvidos de maneira a satisfazer as restrições. No entanto, deseja-se encontrar aquela distribuição que, além de satisfazer as restrições do problema, venha a maximizar (ou minimizar) o problema. Esta tal solução é chamada *solução ótima*. As restrições do problema determinam uma região de soluções possíveis, denominada *região viável* ou *factível*, onde será determinada uma solução ótima.

---

[24] Exemplo extraído de (PRADO, 2004, p. 17)

Duas etapas são essenciais para a resolução de um Problema de Programação Linear (PPL): a *modelagem do problema* e *o método de solução do modelo*. No caso de um PPL, é possível resolvê-lo por métodos gráficos, algébricos ou computacionais. O método mais utilizado para obter soluções é o Método Simplex, um algoritmo que leva rapidamente à solução quando utilizado computacionalmente, mesmo que o problema contenha várias variáveis. A utilização do método gráfico se restringe a problemas com no máximo três variáveis, não sendo aconselhável quando envolver três variáveis, pela dificuldade de visualização.

Segundo definição em GIORDANO (2008), um problema de otimização é dito **Programação Linear** se ele satisfizer algumas propriedades:

1. Quando tiver uma única função objetivo.
2. Sempre que a variável de decisão aparecer tanto na função objetivo quanto nas funções restrição, deve-se aparecer somente como potências de expoente 1 e, quando muito, multiplicada apenas por uma constante.
3. Nenhum termo da função objetivo ou de qualquer restrição pode conter produto de variáveis de decisão.
4. Os coeficientes das variáveis de decisão da função objetivo e de cada restrição são constantes.
5. As variáveis de decisão podem assumir tanto valores reais como também valores inteiros.

Problemas com mais de uma função objetivo são chamados **multiobjetivos** ou **programas de meta**. Problemas que não satisfazem as propriedades 2 e 3 são chamados de **não-lineares**. Problemas em que os coeficientes dependem também do tempo são chamados de **programação dinâmica**[25]. Se os coeficientes não forem constantes, mas de natureza probabilística, os problemas são classificados com um **programa estocástico**. Se as variáveis de decisão forem restritas a valores inteiros, o problema é chamado de **programação inteira**, ou ainda **programação inteira-mista** quando a restrição inteira se aplicar somente a um subconjunto das variáveis de decisão.

[25] A programação dinâmica é uma programação aplicável à otimização de eventos que sofrem uma sequência de estados, podendo ser aplicada a sistemas lineares ou não lineares.

2.1 SOLUÇÕES GEOMÉTRICAS EM PROGRAMAÇÃO LINEAR

Soluções geométricas são aconselhadas somente para modelos simples com apenas duas variáveis de decisão. Representar o modelo graficamente traz a vantagem de facilitar a visualização das principais características do processo de decisão. Considere o exemplo a seguir, com apenas duas variáveis de decisão, x_1 e x_2, e as seguintes restrições:

$$\begin{cases} x_1 + 2.x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

As restrições $x_1,\ x_2 \geq 0$, chamadas *restrições de não-negatividade*, significam que as soluções possíveis estão no primeiro quadrante. A inequação $x_1 + 2.x_2 \leq 4$ divide o primeiro quadrante em duas regiões. A região viável do semi-plano é a região onde a restrição é satisfeita. A região viável pode ser encontrada pelo gráfico da inequação $x_1 + 2.x_2 \leq 4$, determinando qual dos semi-planos representa a região viável, como pode ser visto na Figura 2.1.

A programação linear tem uma importante propriedade que os pontos que satisfazem as restrições formam um *conjunto convexo*, em que quaisquer dois de seus pontos podem ser ligados por um segmento de reta, inteiramente contida no próprio conjunto (GIORDANO, 2008, p. 251).

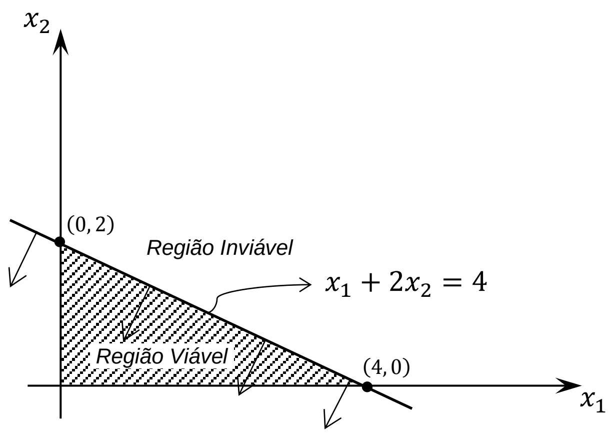


Figura 2.1 – Região Viável de um PPL.

Para ilustrar a resolução de um PPL pelo método geométrico, considere a situação problema, denominada *Problema do Carpinteiro:*

O carpinteiro obtém um lucro de $R\$\ 25{,}00$ *por uma mesa fabricada e* $R\$\ 30{,}00$ *por uma estante fabricada. Ele deseja determinar quantas peças deve produzir de cada mobiliário por semana para obter o maior lucro possível. Ele dispõe de* 690 *pés cúbicos de madeira para trabalhar semanalmente no projeto e* 120 *horas de trabalho. Ele poderá usar a madeira e o trabalho em qualquer outra atividade, caso não seja usado na produção de mesas e estantes. Para isto, ele estima que são necessários* 20 *pés cúbicos de madeira e* 5 *horas de trabalho para produzir uma mesa e* 30 *pés cúbicos de madeira e* 4 *horas de trabalho para uma estante.*

Para obter a formulação matemática ao problema, basta observar que o lucro total depende da quantidade de cada item produzido, isto é, para as mesas, multiplica-se o lucro por cada mesa produzida, $R\$25{,}00$, pela quantidade de mesas produzidas, x_1; para as estantes, multiplica-se o lucro por cada estante produzida, $R\$30{,}00$, pela quantidade de estantes produzidas, x_2. Assim a função objetivo será

$$L(x_1, x_2) = 25.x_1 + 30.x_2.$$

A quantidade total de madeira utilizada é obtida multiplicando-se a quantidade de madeira por peça produzida pela quantidade de peças produzidas, isto é, para as mesas, multiplica-se a quantidade necessária para se construir cada mesa, 20 pés cúbicos, pela quantidade de mesas produzidas, x_1; para as estantes, multiplica-se a quantidade necessária para se construir cada estante, 30 pés cúbicos, pela quantidade de estantes produzidas, x_2. A quantidade total de madeira utilizada deve ser no máximo 690 pés cúbicos (quantidade disponível), logo a inequação que representa a restrição madeira é

$$20.x_1 + 30.x_2 \leq 690.$$

A quantidade total de trabalho utilizado é obtida multiplicando-se a quantidade de horas necessárias por peça produzida pela quantidade de peças produzidas, isto é, para as mesas, multiplica-se a quantidade horas necessárias para se construir cada mesa, 5 horas, pela quantidade de mesas produzidas, x_1; para as estantes, multiplica-se a quantidade de horas necessárias para se construir cada estante, 4 horas, pela quantidade de estantes produzidas, x_2. A quantidade total de horas utilizadas na fabricação deve ser no máximo igual a 120 horas (quantidade disponível), logo a inequação que representa a restrição trabalho é

$$5.x_1 + 4.x_2 \leq 120.$$

Como as quantidades produzidas assumem apenas valores positivos, acrescentam-se as restrições de não negatividade,

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

A formulação matemática do problema do carpinteiro é apresentada da seguinte forma:

Maximize:

$$L(x_1, x_2) = 25.x_1 + 30.x_2$$

Sujeito às restrições:

$$\begin{cases} 20.x_1 + 30.x_2 \leq 690 & \textit{(restrição de material)} \\ 5.x_1 + \quad 4.x_2 \leq 120 & \textit{(restrição de trabalho)} \\ \qquad x_1, x_2 \geq 0 & \textit{(restrições de não negatividade)} \end{cases}$$

Para resolver o problema graficamente, determina-se a região onde se encontram todas as soluções possíveis para o problema. Apesar de existir várias soluções para o problema, deseja-se encontrar aquela que maximiza o lucro total.

O conjunto convexo para as restrições do problema do carpinteiro são representadas graficamente pela região convexa *ABCD*. A região convexa é gerada a partir dos seis pontos de intersecção das restrições, mas somente quatro desses pontos (*A* – *D*) satisfazem todas as restrições e, por isso, pertencem ao conjunto convexo. Os pontos *A, B, C e D* são os pontos extremos do polígono. A representação gráfica do problema do carpinteiro é mostrada na Figura 2.2.

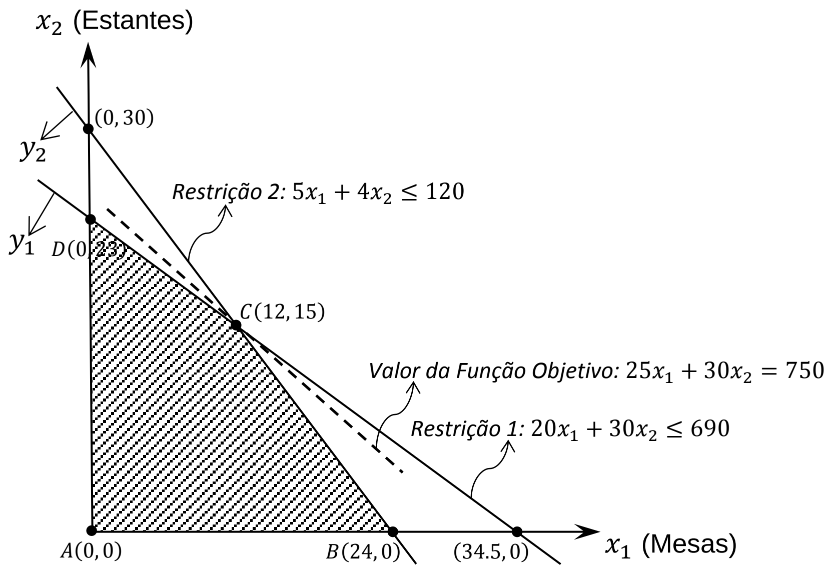


Figura 2.2 – Representação gráfica do Problema do Carpinteiro.

Se existir uma solução para a Programação Linear, ela ocorrerá nos pontos extremos do conjunto convexo formado pelas restrições[26]. Os valores da função objetivo (lucro para o problema do carpinteiro) nos pontos extremos são mostrados na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Valores da função Objetivo.

Ponto Extremo	Valor da Função Objetivo (R$)
$A(0, 0)$	0,00
$B(24, 0)$	600,00
$C(12, 15)$	750,00
$D(0, 23)$	690,00

Assim, o carpinteiro deve produzir um total de 12 mesas e 15 estantes por cada semana para obter um lucro semanal máximo de $R\$\,750{,}00$. Mais adiante serão mostradas novas evidências geométricas de que o ponto extremo C é ótimo.

[26] Este fato será apresentado como o Teorema 3.1.

2.2 CURVAS DE NÍVEL DE UMA FUNÇÃO OBJETIVO

Considerando o problema do carpinteiro, com a função objetivo $L(x_1, x_2) = 25. x_1 + 30. x_2$, as linhas paralelas no primeiro quadrante são representadas na Figura 3.3 apenas variando o valor de $L(x_1,\ x_2)$:

$$L(x_1, x_2) = 650 \ \Rightarrow 25x_1 + 30x_2 = 650$$
$$L(x_1, x_2) = 750 \ \Rightarrow 25x_1 + 30x_2 = 750$$
$$L(x_1, x_2) = 850 \ \Rightarrow 25x_1 + 30x_2 = 850$$

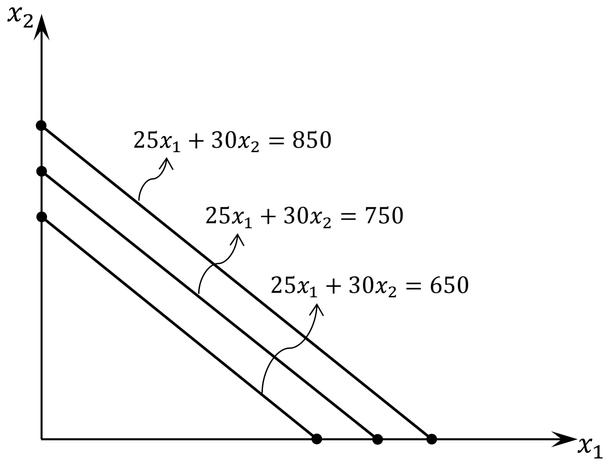


Figura 2.3 – Curvas de nível da Função Objetivo.

É fácil notar que a função objetivo possui valores constantes ao longo desses segmentos de reta. Os segmentos de reta são chamados de *curvas de nível da função objetivo*. À medida que se avança na direção perpendicular a esses segmentos de reta, a função objetivo aumenta ou diminui. Supondo o conjunto de restrições para o Problema do Carpinteiro

$$\begin{cases} 20. x_1 + 30. x_2 \leq 690 & \textit{(restrição de material)} \\ 5. x_1 + \quad 4. x_2 \leq 120 & \textit{(restrição de trabalho)} \\ x_1, x_2 \geq 0 & \textit{(restrições de não negatividade)} \end{cases}$$

sobre essas curvas de nível, observa-se que a curva de nível que vale 750 é a que intersecta a região viável exatamente no ponto extremo $C(12, 15)$. Na Figura 2.4 as curvas de nível são sobrepostas ao gráfico que representa a solução gráfica para o problema do carpinteiro, indicando a intersecção da curva $25x_1 + 30x_2 = 750$ com a região viável no ponto *C*.

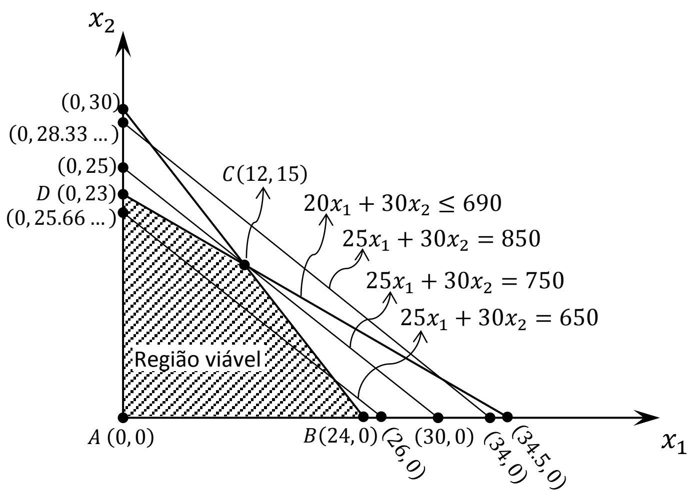


Figura 2.4 – Solução gráfica para o Problema do Carpinteiro.

Em alguns Problemas de Programação Linear é possível que haja mais que uma solução ótima. Considere a seguinte variação do problema do carpinteiro com a restrição do trabalho alterada, isto é, para se produzir uma mesa utiliza-se 5 horas, para se produzir a estante utiliza-se 6 horas e uma quantidade total disponível de 150 horas, assim, obtendo o seguinte Problema de Programação Linear:

Maximize

$$L(x_1, x_2) = 25.x_1 + 30.x_2$$

Sujeito às restrições:

$$\begin{cases} 20.x_1 + 30.x_2 \leq 690 & \textit{(restrição de material)} \\ 5.x_1 + 6.x_2 \leq 150 & \textit{(restrição de trabalho)} \\ x_1, x_2 \geq 0 & \textit{(restrições de não negatividade)} \end{cases}$$

Note, na Figura 2.5, que a curva de nível e a fronteira da restrição trabalho coincidem. Nos dois extremos, *B* e *C,* a função objetivo tem o valor de 750, que é ótimo. No entanto, isso ocorre em todo o segmento de reta *BC* que coincide com a curva de nível $20.x_1 + 30.x_2 = 750$. Assim, ao longo do segmento *BC* existem infinitas soluções ótimas para esta Programação Linear.

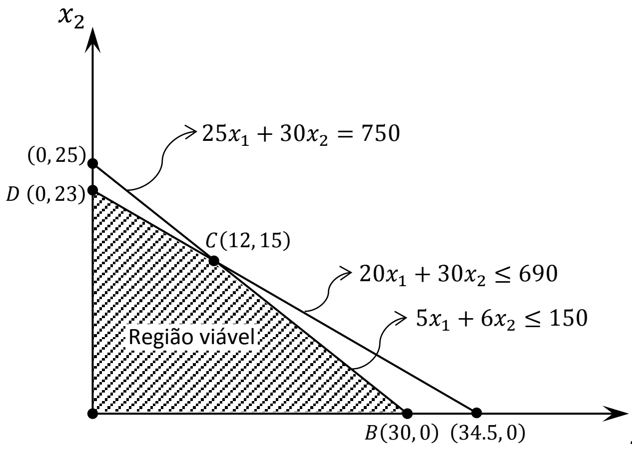


Figura 2.5 – A função objetivo e a restrição do trabalho coincidem.

O caso geral bidimensional para otimizar uma função linear num conjunto convexo é resumido pelo Teorema 2.1. A Figura 2.6 mostra um conjunto convexo no plano juntamente com as curvas de nível de uma função objetivo linear, constituindo uma prova geométrica intuitiva para o Teorema 2.1 da Programação Linear.

TEOREMA 2.1. *Suponha que uma região viável de uma programação linear seja um conjunto convexo não vazio e limitado. Então a função objetivo deve atingir tanto um máximo quanto um mínimo que ocorre nos pontos extremos dessa região. Se a região viável for ilimitada, a função objetivo não precisa assumir seus valores ótimos. Se um máximo ou um mínimo existir, eles devem ocorrer nos pontos extremos.* (GIORDANO *et al*, 2008, p. 257)

O Teorema 2.1 garante a existência de uma solução ótima para a Programação Linear num dos extremos do conjunto convexo não vazio e limitado.

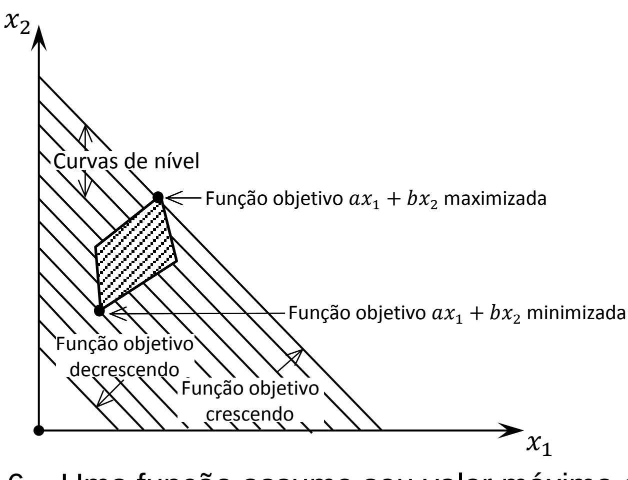


Figura 2.6 – Uma função assume seu valor máximo e mínimo em um conjunto convexo não vazio e limitado em um ponto extremo.

2.3 SOLUÇÕES ALGÉBRICAS NA PROGRAMAÇÃO LINEAR

A seguir, um procedimento rudimentar para encontrar uma solução ótima para a programação linear com uma região viável não vazia e limitada:

1. *Encontrar todos os pontos de intersecção das restrições.*
2. *Determinar quais os pontos de intersecção que são viáveis para obtenção dos pontos extremos.*
3. *Avaliar a função objetivo em cada ponto extremo.*
4. *Escolher o(s) ponto(s) extremo(s) com o menor (ou maior) valor da função objetivo.*

Esse procedimento diz que, para determinar a região convexa que corresponde à região viável (factível), é necessário determinar todos os possíveis pontos de intersecção, igualando duas-a-duas todas as restrições. Nem sempre duas restrições possuem um ponto de intersecção. Depois de encontrados os pontos de intersecção, caracterizar os pontos extremos do conjunto convexo que compõe a região viável, implementando este procedimento algébrico. Determinados todos os pontos extremos da região viável, basta avaliar a função objetivo e comparar todos esses valores, escolhendo como solução do problema aquele que maximiza (ou minimiza) a Programação Linear.

Para ilustrar esse método, suponha que os lados do conjunto convexo sejam formados a partir de três restrições lineares e duas outras restrições de não negatividade como mostra a Figura 2.7. As variáveis não negativas y_1, y_2 e y_3 medem o grau em que um ponto satisfaz cada uma das restrições 1, 2 e 3, respectivamente. A variável y_i é adicionada do lado esquerdo da desigualdade da restrição i para convertê-la numa igualdade[27]. Além disso, $y_2 = 0$ caracteriza aqueles pontos que se encontram precisamente na restrição 2, ou seja, o recurso relativo à essa restrição foi utilizado por completo, e um valor negativo para y_2 indica a violação da regra 2. Também, as variáveis de decisão x_1 e x_2 são restritas a valores não negativos. Assim, os valores das variáveis de decisão x_1 e x_2 medem o grau de satisfação das restrições de não negatividade, $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$. Note que ao longo da reta x_1, a variável de decisão x_2 é 0. Agora, considere todos os valores possíveis para o conjunto de variáveis $\{x_1, x_2, y_1, y_2, y_3\}$. Se duas das variáveis tem

[27] A variável y_i é uma variável de folga, isto é, indica o quanto se deixou de atingir o limite máximo da restrição.

simultaneamente o valor 0 (zero), então caracteriza-se um **ponto de intersecção** no plano $x_1 x_2$.

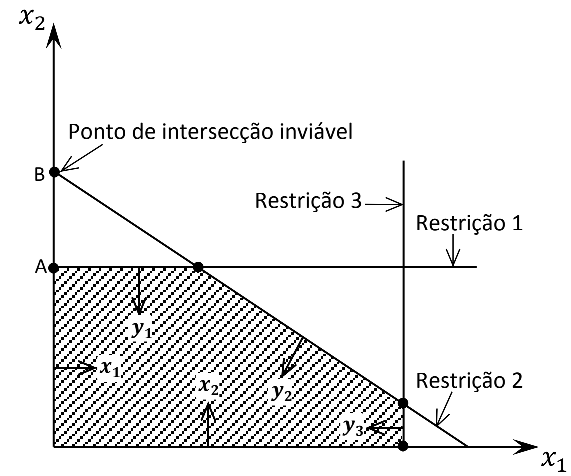


Figura 2.7 – Introdução das variáveis de folga.

Todos os pontos de intersecção podem ser determinados, sistematicamente, definindo todos os pares possíveis e distintos das cinco variáveis como sendo zero e, em seguida, resolvendo o restante do sistema com três variáveis dependentes. Se existir a solução do sistema resultante de equações lineares, então ela será um ponto de intersecção, que pode ser ou não uma *solução viável*. Um valor negativo para qualquer uma das cinco variáveis indica que a restrição não foi satisfeita, neste caso, o ponto de intersecção seria *inviável*. Por exemplo, o ponto de intersecção *B*, onde $y_2 = 0$ e $x_1 = 0$, dá um valor negativo para y_1 e, portanto, não é uma solução viável para o problema. Para ilustrar o procedimento, algebricamente, será resolvido o problema do carpinteiro.

A Resolução Algébrica do Problema do Carpinteiro segue com o seguinte modelo:

Maximize:

$$L(x_1, x_2) = 25.x_1 + 30.x_2$$

Sujeito às seguintes restrições:

$$\begin{cases} 20.x_1 + 30.x_2 \leq 690 & \textit{(restrição de material)} \\ 5.x_1 + \quad 4.x_2 \leq 120 & \textit{(restrição de trabalho)} \\ x_1, x_2 \geq 0 & \textit{(restrições de não negatividade)} \end{cases}$$

Adicionando as novas “variáveis de folga”, não negativas, y_1 e y_2, converte-se cada uma das inequações em equações. Se alguma delas, y_1 ou y_2, for negativa, a restrição não será satisfeita. Assim, a formulação do problema torna-se

Maximize:

$$L(x_1, x_2) = 25.x_1 + 30.x_2$$

Sujeito às seguintes restrições:

$$\begin{cases} 20.x_1 + 30.x_2 + y_1 \qquad = 690 \\ 5.x_1 + \quad 4.x_2 + \qquad y_2 = 120 \\ \qquad x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Considera-se todo o conjunto com quatro variáveis $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$, interpretados geometricamente na Figura 2.8. Para determinar um possível ponto de intersecção no plano $x_1\,x_2$, atribui-se o valor zero a duas das quatro variáveis, existindo $\frac{4!}{2!2!} = 6$ pontos de intersecção possíveis[28].

Pode-se começar assumindo para as variáveis x_1 e x_2 o valor zero, resultando no seguinte conjunto de equações

$$\begin{cases} y_1 = 690 \\ y_2 = 120 \end{cases}$$

com um ponto de intersecção viável $A(0{,}0)$ pois todas as quatros variáveis são não negativas.

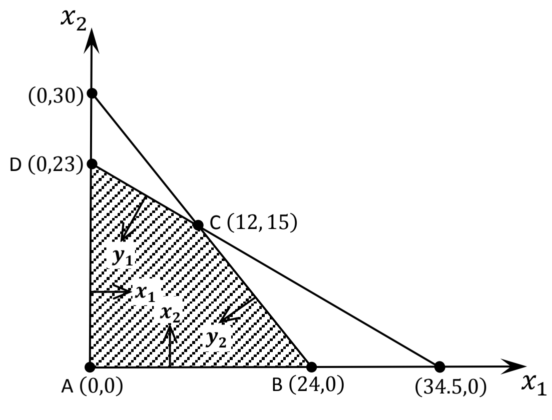


Figura 2.8 – Conjunto de variáveis para o Problema do carpinteiro.

[28] Os possíveis pontos de intersecção é obtido da combinação de 4 variáveis, tomadas duas a duas.

Para o segundo ponto de intersecção, escolhe-se as variáveis x_1 e y_1 como sendo zero, resultando no sistema

$$\begin{cases} 30x_2 \qquad\quad = 690 \\ \;\; 4x_2 + y_2 = 120 \end{cases}$$

que tem soluções $x_2 = 23$ e $y_2 = 28$, que é também um ponto de intersecção viável $D(0, 23)$.

Para o terceiro ponto de intersecção, escolhe-se as variáveis x_1 e y_2 como sendo zero, resultando no sistema

$$\begin{cases} 30x_2 + y_1 = 690 \\ \;\; 4x_2 \qquad\quad = 120 \end{cases}$$

com soluções $x_2 = 30$ e $y_1 = -210$. Note que a primeira constante é violada por 210 unidades, indicando que o ponto de intersecção $(0, 30)$ é inviável.

De maneira semelhante, escolhes-se y_1 e y_2 como sendo zero, o que dá $x_1 = 12$ e $x_2 = 15$, correspondendo ao ponto de intersecção $C(12, 15)$, que é viável. A quinta escolha é das variáveis x_2 e y_1 como sendo zero, obtendo os valores de $x_1 = 34{,}5$ e $y_1 = \; -52{,}5$, de modo que a segunda restrição não é satisfeita. Assim, o ponto de intersecção $(34{,}5,\; 0)$ é inviável.

Finalmente, escolhe-se o sexto ponto de intersecção definindo as variáveis x_2 e y_2 como zero para determinar $x_1 = 24$ e $y_1 = 210$; portanto, o ponto de intersecção $B(24, 0)$ é viável.

Em síntese, dos seis pontos de intersecção possíveis no plano x_1x_2, quatro deles foram considerados viáveis. Para os quatros pontos viáveis, os valores da função objetivo são encontrados com a substituição dos valores de x_1 e x_2 na função objetivo, conforme mostrado na Tabela 2.2.

Tabela 2.2 – Avaliação da Função Objetivo.

Ponto extremo	Valor da função objetivo
$A(0,0)$	$R\$0{,}00$
$D(0,23)$	$R\$690{,}00$
$A(12,15)$	$R\$750{,}00$
$A(24,0)$	$R\$600{,}00$

Este procedimento determina que a solução ótima que maximiza o lucro é $x_1 = 12$ e $x_2 = 15$. Isto é, o carpinteiro deve produzir 12 mesas e 15 estantes para um lucro máximo de $R\$750{,}00$.

2.3.1 ENUMERAÇÃO DOS PONTOS DE INTERSECÇÃO

Para generalizar o procedimento apresentado no problema do carpinteiro, suponha uma programação linear com *m* variáveis de decisão (não negativas) e *n* restrições, onde cada restrição é uma inequação da forma "≤" (menor ou igual, semi-plano localizado abaixo da equação que representa a restrição). Primeiramente, converte-se cada inequação em uma equação adicionando a "variável de folga" não negativa, y_i, para a *i*-ésima restrição. Agora, tem-se um total de $m + n$ variáveis não negativas. Para determinar os pontos de intersecção, escolhe-se *m* das variáveis de decisão (pois se tem *m* variáveis de decisão) como sendo zero. Então são $\frac{(m+n)!}{m!n!}$ escolhas possíveis a considerar. Obviamente, quando o tamanho da programação linear aumenta em termos do número de variáveis de decisão e restrições, esta técnica de enumeração de todos os pontos possíveis de intersecção torna-se difícil, mesmo para computadores poderosos.

2.4 O MÉTODO SIMPLEX

Até o momento, para encontrar um ponto extremo ótimo foi necessário determinar todos os possíveis pontos de intersecção associados com as variáveis de decisão e de folga. É possível reduzir o número de pontos de intersecção que são realmente consideráveis na busca da solução. Uma vez encontrado um ponto de intersecção inviável, não é preciso considerar um ponto de intersecção potencial que não melhora o valor da função objetivo. Em seguida, testa-se a optimalidade da solução contra outro ponto de intersecção possível, mesmo que um ponto de intersecção prometa ser mais otimizado que o atual ponto extremo, e ainda se não é do interesse violar uma ou mais restrições.

Para verificar se o ponto de intersecção proposto é viável, utiliza-se o *Método Simplex* (ANDRADE, 2004, p. 26), desenvolvido por George Dantzig, que incorpora os testes de *optimalidade* e *viabilidade* para encontrar a solução ótima, caso exista.

O *teste de optimalidade* mostra se o ponto de intersecção corresponde ao melhor valor da função objetivo encontrado até o momento.

O *teste de viabilidade* determina se o ponto de intersecção proposto é viável.

Para implementar (programar) o Método Simplex, separa-se primeiramente as variáveis de decisão e as variáveis de folga em dois conjuntos distintos, chamados de conjuntos *independente* e *dependente*. Para a Programação Linear particular, o conjunto original independente consiste das variáveis de decisão, enquanto o conjunto dependente consiste das variáveis de folga.

A seguir são apresentados, resumidamente, os *Passos do Método Simplex:*

i. ***Quadro de coeficientes:*** *Colocar a programação linear no quadro de coeficientes.*

ii. ***Ponto extremo inicial:*** *O Método simplex começa com um ponto extremo conhecido, usualmente a origem* $(0,0)$.

iii. ***Teste de optimalidade:*** *Determina se um ponto de intersecção adjacente melhora o valor da função objetivo. Se não, o ponto extremo atual é ótimo. Se uma melhoria for possível, o teste de optimalidade determina que variável atual no conjunto independente (tendo valor zero) deverá entrar no conjunto dependente e se tornar não nula.*

iv. ***Teste de viabilidade:*** *Para encontrar um novo ponto de intersecção, uma das variáveis no conjunto dependente deve sair para permitir a entrada da variável do Passo 3 para se tornar dependente. O teste de viabilidade determina que variável dependente atual escolher para sair, assegurando viabilidade.*

v. ***Pivô:*** *Para o novo sistema equivalente de equações, eliminar a nova variável dependente da equação que não contém a variável que saiu no Passo 4. Em seguida, definir a nova variável independente como zero no novo sistema para encontrar os valores das novas variáveis dependentes, assim determinando um ponto de intersecção.*

vi. ***Repetir os Passos iii – v*** *até que um ponto extremo ótimo seja encontrado.*

A seguir, a resolução passo-a-passo de uma Programação Linear, o Problema do Carpinteiro, utilizando o Método Simplex:

Passo i. Considere o sistema linear introduzindo as variáveis dependentes no sistema original

$$\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 + y_1 & & = 690 \\ 5x_1 + \quad 4x_2 & + \ y_2 & = 120 \\ -25x_1 - 30x_2 & & + z = 0 \end{cases}$$

Passo ii. A origem $(0, 0)$ é um ponto extremo inicial para o qual as variáveis independentes são $x_1 = x_2 = 0$, e as variáveis dependentes são $y_1 = 690$, $y_2 = 120$ e $z = 0$.

Passo iii. Aplica-se o teste de optimalidade para escolher x_2 como variável de entrada no conjunto dependente, pois ela corresponde ao coeficiente negativo com o maior valor absoluto.

Passo iv. Aplica-se o teste de viabilidade, dividindo o lado direito, de valores 690 e 120, pelos coeficientes da variável de entrada x_2 em cada equação (30 e 4, respectivamente), encontrando os coeficientes $\frac{690}{30} = 23$ e $\frac{120}{4} = 30$. O menor coeficiente positivo é 23, correspondendo à primeira equação que tem a variável de folga y_1. Assim, escolhe-se y_1 como a variável dependente de saída.

Passo v. O pivô serve para encontrar os valores das novas variáveis dependentes x_2, y_2 e z quando as variáveis independentes x_1 e y_1 estão definidas com o valor 0. Depois, elimina-se a nova variável dependente x_2 de cada equação anterior que não contém a variável de saída y_1, ou seja, a $2^{\underline{a}}$ linha será igual à $1^{\underline{a}}$ linha multiplicada por (-4) somada à 2^{a} linha e, a 3^{a} linha será igual à 1^{a} linha multiplicada por (30) somada à 3^{a} linha, obtendo o seguinte sistema equivalente

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{30}y_1 = 23 \\ \frac{7}{3}x_1 - \frac{2}{15}y_1 + y_2 = 28 \\ -5x_1 + y_1 + z = 690 \end{cases}$$

Fixando $x_1 = y_1 = 0$, determina-se $x_2 = 23$, $y_2 = 28$ e $z = 690$. Estes resultados geram o ponto extremo $(0, 23)$ onde o valor da função objetivo é $z = 690$.

Aplicando o teste de optimalidade novamente, vê-se que o ponto extremo atual $(0, 23)$ não é ótimo (pois ainda existe um coeficiente negativo -5 na última equação correspondendo à variável x_1). Antes de continuar, observe que realmente não precisa escrever o simbolismo todo das equações em cada passo, sendo necessário apenas o valor dos coeficientes associados com as variáveis em cada uma das equações juntamente com o lado direito. Uma tabela de coeficientes, ou *quadro*, é normalmente usada para registrar esses números. A seguir, a realização do Problema do Carpinteiro é ilustrado usando esse formato, onde os cabeçalhos de cada coluna designam as variáveis; RHS é a abreviação do termo *“right-hand side”* (valor do lado direito). Começando com o quadro 0, Tabela 2.3, correspondendo ao ponto extremo inicial na origem.

Tabela 2.3 – Quadro Simplex 0 (Quadro original).

x_1	x_2	y_1	y_2	z	RHS
20	30	1	0	0	$690(= y_1)$
5	4	0	1	0	$120(= y_2)$
-25	$[-30]$	0	0	1	$0(= z)$
Variáveis dependentes: $\{y_1, y_2, z\}$ *Variáveis independentes:* $x_1 = x_2 = 0$ *Pontos extremos:* $(x_1, x_2) = (0, 0)$ *Valor da função objetivo:* $z = 0$					

Teste de optimalidade: a variável de entrada é x_2 (correspondente ao coeficiente -30 na última linha).

Teste de viabilidade: Calcule os índices para os RHS dividindo os coeficientes na coluna rotulada por x_2 para determinar o menor índice positivo, Tabela 2.4.

Tabela 2.4 – Quadro Simplex.

x_1	x_2	y_1	y_2	z	RHS	Índices
20	30	1	0	0	$690(= y_1)$	$[23](= 690/30)$
5	4	0	1	0	$120(= y_2)$	$30(= 120/4)$
-25	$[-30]$	0	0	1	$0(= z)$	*

Escolha y_1 correspondente ao menor índice positivo, neste caso 23, como variável de saída.

Pivô: Dividir a linha que contém a variável de saída, a primeira linha, pelo coeficiente da variável de entrada nesta linha, o coeficiente de x_2, gerando o coeficiente de 1 para a variável de entrada desta linha. Então, elimina-se a variável de entrada x_2 para as linhas restantes (linhas que não contém a variável de saída y_1 e que tenha o coeficiente zero para ela). Os resultados são registrados na Tabela 2.5, com aproximação de cinco casas decimais para os valores numéricos.

Tabela 2.5 – Quadro Simplex 1.

x_1	x_2	y_1	y_2	z	RHS
$0{,}66667$	1	$0{,}03333$	0	0	$[23](= x_2)$
$2{,}33333$	0	$-0{,}13333$	1	0	$28(= y_2)$
$[-5{,}00000]$	0	$1{,}00000$	0	1	$690(= z)$
Variáveis dependentes: $\{x_2, y_2, z\}$ *Variáveis independentes:* $x_1 = y_1 = 0$ *Pontos extremos:* $(x_1, x_2) = (0, 23)$ *Valor da função objetivo:* $z = 690$					

O pivô determina que as novas variáveis dependentes tenham os valores $x_2 = 23$, $y_2 = 28$ e $z = 690$.

Teste de Optimalidade: a variável de saída é x_1 (correspondente ao coeficiente -5 na última linha).

Teste de viabilidade: Calcule os índices dos RHS.

Tabela 2.6 – Quadro Simplex.

x_1	x_2	y_1	y_2	z	RHS	Índices
$0,66667$	1	$0,03333$	0	0	23	$34,5(= 23/0,66667)$
$2,33333$	0	$-0,13333$	1	0	28	$[12,0](= 28/2,33333)$
$[-5,00000]$	0	$1,00000$	0	1	690	

Na Tabela 2.6, escolha y_2 como variável de saída, o que corresponde ao menor índice valor positivo, 12.

Pivô: Dividir a linha que contém a variável de saída (a segunda linha) pelo coeficiente da variável de entrada nesta linha (o coeficiente de x_1), gerando o coeficiente 1 para a variável de entrada desta linha. Então, elimina-se a variável de entrada x_1 para as linhas restantes (linhas que não contém a variável de saída y_2 e tenha o coeficiente zero para ela).

Tabela 2.7 – Quadro Simplex 2

x_1	x_2	y_1	y_2	z	RHS
0	1	$0,071429$	$-0,28571$	0	$15(= x_2)$
1	0	$-0,057143$	$0,42857$	0	$12(= x_1)$
0	0	$0,714286$	$2,14286$	1	$750(= z)$
Variáveis dependentes: $\{x_2, x_1, z\}$ *Variáveis independentes:* $y_1 = y_2 = 0$ *Pontos extremos:* $(x_1, x_2) = (12, 15)$ *Valor da função objetivo:* $z = 750$					

Teste de Optimalidade: Como não existem coeficientes negativos na última linha (Tabela 2.7), $x_1 = 12$ e $x_2 = 15$ dão a solução ótima $z = R\$750{,}00$ para a função objetivo. Observe que, começando com um ponto extremo inicial, foram enumerados apenas dois dos seis pontos de intersecção possíveis. A força do Método Simplex está na redução dos cálculos necessários para encontrar um ponto extremo ótimo.

2.5 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE NA PROGRAMAÇÃO LINEAR

O objetivo de um modelo matemático é aproximar o problema em estudo. No caso específico da Programação Linear, os coeficientes da função objetivo podem ser apenas uma estimativa, assim o montante de recursos que limitam a produção varia a depender do lucro retornado por unidade ou recursos investidos. Dessa forma, o gestor pode decidir o quanto é interessante obter mais recursos quando o lucro adicional for alto o suficiente, necessitando saber para isto, se o lucro adicional potencial justifica o custo de outra unidade de recurso.

Além de resolver um Problema de Programação Linear, o gestor precisa saber o quão sensível é a solução ótima para mudanças nas várias constantes usadas na formulação do programa. Para analisar graficamente o efeito na solução ótima de mudanças nos coeficientes da função objetivo e no montante dos recursos possíveis será usado o Problema do Carpinteiro, respondendo às seguintes questões:

1. A solução encontrada (lucro máximo) permanece ótima dentro de que intervalo de valores?
2. Qual o aumento no lucro quando outra unidade de recurso (trabalho, por exemplo) for obtida?
3. A análise será válida em que intervalo de valores do recurso?
4. O que é necessário para aumentar o lucro além desse limite?

2.5.1 MUDANCAS NOS COEFICIENTES DA FUNÇÃO OBJETIVO

A função objetivo do problema do carpinteiro deseja maximizar os seus lucros onde cada mesa lhe rende $R\$\ 25{,}00$ e cada estante $R\$\ 30{,}00$, ou seja, *Maximizar*

$$L(x_1, x_2) = 25x_1 + 30x_2$$

Observe que $L(x_1, x_2)$ é uma função de duas variáveis, sendo possível desenhar as curvas de nível no plano x_1x_2. Na Figura 2.9 estão desenhadas as curvas de nível $L(x_1, x_2) = 650$, $L(x_1, x_2) = 750$ e $L(x_1, x_2) = 850$ para fins ilustrativos.

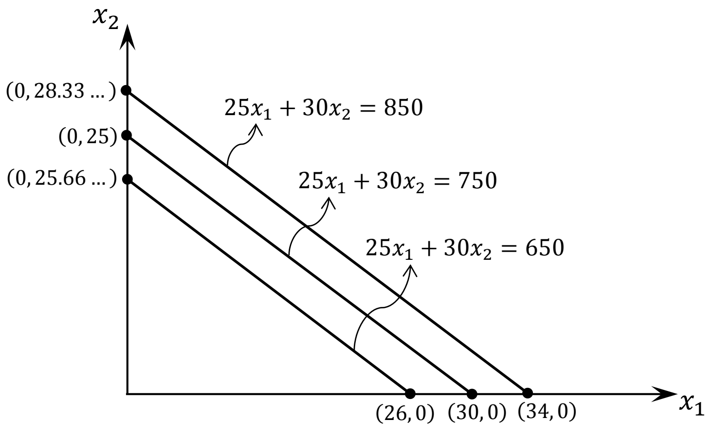


Figura 2.9 – Curvas de nível $L(x_1, x_2) = 650$, $L(x_1, x_2) = 750$, $L(x_1, x_2) = 850$.

Cada curva de nível é uma linha com declive $-\frac{5}{6}$. Na Figura 2.10, o gráfico da Figura 2.9 é sobreposto ao conjunto das restrições do problema do carpinteiro, determinando a solução ótima no ponto $(12, 15)$ gerando um valor ótimo da função objetivo de $L(12, 15) = 750$.

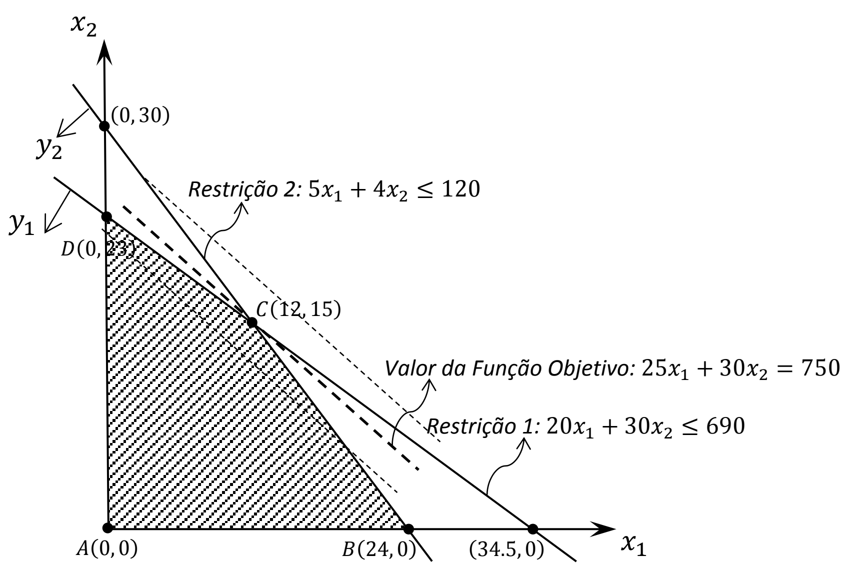


Figura 2.10 – Solução para o Problema do Carpinteiro.

Algumas análises podem ser feitas, a primeira seria analisar o efeito de uma mudança no valor do lucro para cada mesa (ou para cada estante). É fácil perceber que se o lucro por mesa for aumentado suficientemente, o carpinteiro poderá optar por produzir somente mesas, gerando o ponto extremo de 24 mesas e 0 estantes, em vez da atual combinação de 12 mesas e 15 estantes. Da mesma forma, reduzindo suficientemente o lucro por mesa, somente estantes deveriam ser produzidas, gerando o ponto extremo $(0, 23)$. De maneira geral, representando o lucro por mesa por c_1, a função objetivo se tornaria

$$L(x_1, x_2) = c_1 x_1 + 30x_2$$

com o declive $-\frac{c_1}{30}$ no plano $x_1 x_2$. À medida que varia c_1, o declive da curva de nível da função objetivo muda. Na Figura 2.11 o ponto extremo atual $(12, 15)$ permanece ótimo desde que a inclinação da função objetivo se situe entre as duas restrições, ou seja, o ponto extremo $(12, 15)$ permanece ótimo desde que a inclinação da função objetivo seja menor que $-\frac{2}{3}$ e maior que $-\frac{5}{4}$, os declives das restrições madeira e trabalho, respectivamente.

Ao aumentar c_1, a curva de nível da função objetivo é girada no sentido anti-horário, para um declive superior a $-\frac{2}{3}$, o ponto extremo ótimo muda para $(0, 23)$. Girando as curvas de nível no sentido horário, para um declive inferior a $-\frac{5}{4}$, o ponto extremo ótimo mudaria para $(24, 0)$. Assim, o intervalo de valores para que o ponto extremo $(12, 15)$ permaneça ótimo é encontrado pela inequação

$$-\frac{5}{4} \leq -\frac{c_1}{30} \leq -\frac{2}{3}.$$

Assim,

$$20 \leq c_1 \leq 37{,}5.$$

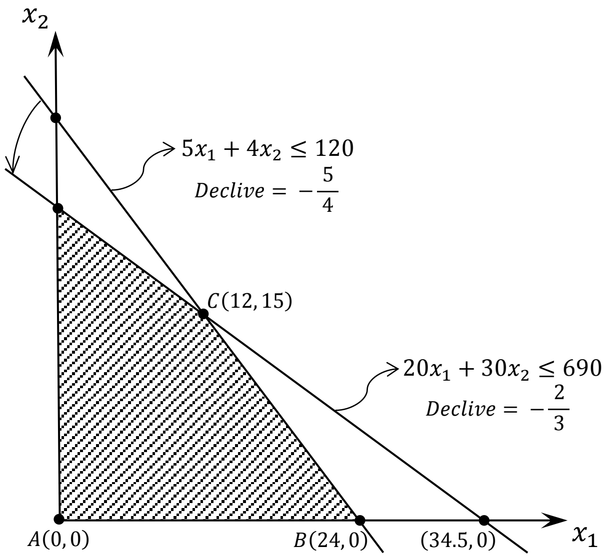


Figura 2.11 – A solução $(12, 15)$ permanece ótima para $20 \leq c_1 \leq 37{,}5$.

2.5.1.1 INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS NA FUNÇÃO OBJETIVO

- Se o lucro por mesa exceder $R\$\,37{,}50$ o carpinteiro deverá produzir somente mesas, ou seja, 24 mesas.
- Se o lucro por mesa for reduzido abaixo de $R\$\,20{,}00$, o carpinteiro deverá produzir somente estantes, ou seja, 23 estantes.
- Se c_1 estiver entre $R\$\,20{,}00$ e $R\$\,37{,}50$, o carpinteiro deverá produzir uma combinação de 12 mesas e 15 mesas.

Como c_1 pode variar no intervalo $[20,\ 37{,}5]$, o valor da função objetivo vai se alterar mesmo que o ponto extremo não se altere, ou seja, ele estará produzindo 12 mesas e a função objetivo sofrerá uma variação de um fator 12 vezes a variação de c_1. Observe que no limite $c_1 = 20$ existem dois pontos extremos *C* e *B*, que produzem o mesmo valor na função objetivo. Do mesmo modo, se $c_1 = 37{,}5$, os pontos extremos *D* e *C* produzem o mesmo valor na função objetivo. Nesses casos, existirão várias *soluções ótimas*, pois qualquer ponto sobre o segmento *BC* produziria o mesmo resultado, desde que $c_1 = 20$ e qualquer ponto sobre o segmento *DC* produziria o mesmo resultado, desde que $c_1 = 37{,}5$.

2.5.2 MUDANÇA NA QUANTIDADE DE RECURSOS POSSÍVEIS

Para o problema original existem 120 unidades de trabalho possíveis, todas as quais são usadas para produzir 12 mesas e 15 estantes, representadas pela solução ótima. Uma questão interessante seria saber qual o efeito de um aumento na quantidade de trabalho. Se b_2 representar o recurso na segunda restrição, a quantidade de trabalho possível, a restrição pode ser reescrita como

$$5x_1 + 4x_2 \leq b_2$$

Na Figura 2.12, o conjunto restrição para o Problema do Carpinteiro teve seu valor original, $b_2 = 120$, modificado para outro valor, $b_2 = 150$.

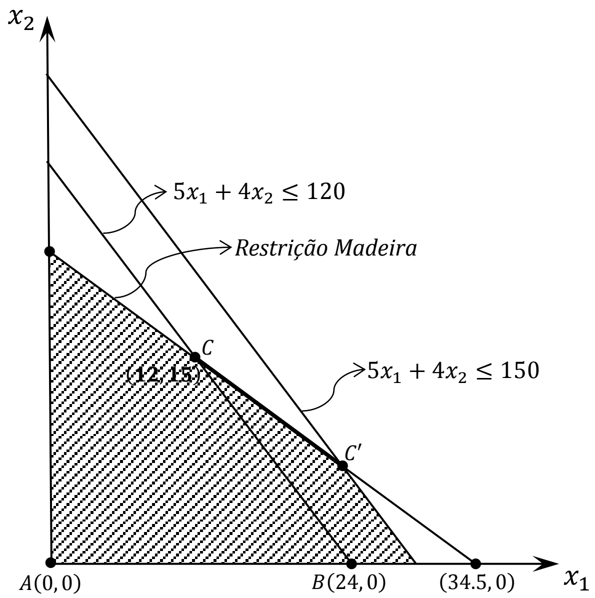


Figura 2.12 – Aquisição de recursos adicionais.

O efeito de aumentar b_2 é transladar a restrição para cima e para a direita. À medida que isso acontece, o valor ótimo da função objetivo move-se ao longo do segmento de reta CC', que fica sobre a restrição madeira. Como a solução ótima se move ao longo do segmento de reta de C para C', o valor para x_1 aumenta à medida que o valor para x_2 diminui. O efeito líquido do aumento b_2 está no aumento do valor da função objetivo. É desejável saber o quanto o valor da função objetivo muda quando b_2 *muda em uma unidade*.

Observe, contudo, que se b_2 cresce além de $5\,.\,34{,}5 = 172{,}5$, a solução ótima mantém-se no ponto extremo $(34{,}5; 0)$. Isto é, em $(34{,}5; 0)$ a restrição madeira também deve ser aumentada se a função objetivo for aumentada ainda mais. Assim, aumentando a restrição trabalho para 200 resulta em algum excesso de trabalho que não será usado a menos que a quantidade de madeira seja aumentada além do valor atual de 690, Figura 2.13. Seguindo uma análise similar, se b_2 for diminuída, o valor da função objetivo se move ao longo da restrição madeira até que o ponto extremo $(0, 23)$ seja atingido. Mais reduções em b_2 faria com que a solução ótima se movesse a partir de $(0, 23)$ para baixo no eixo *y* para a origem.

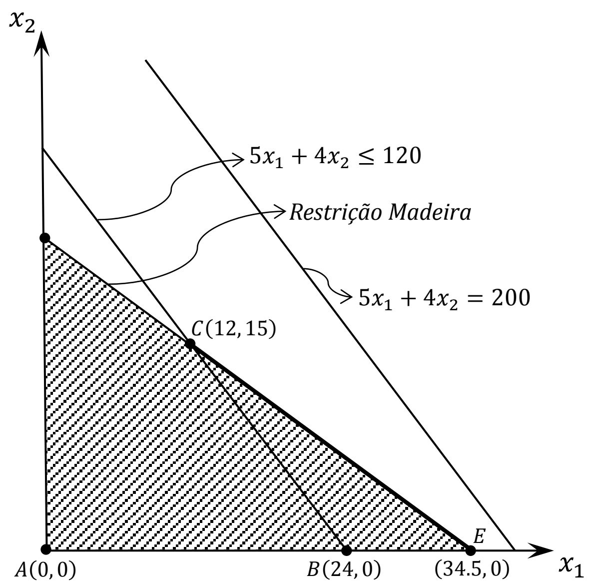


Figura 2.13 – Limite para a aquisição de novos recursos.

Na Figura 2.14, o valor de b_2 para o qual a restrição trabalho se cruza com a restrição madeira no eixo x_1 é o ponto $E\ (34{,}5; 0)$. No ponto $E\ (34{,}5; 0)$, a quantidade de trabalho é $5\,.\,34{,}5 + 4\,.\,0 = 172{,}5$. Similarmente, o valor de b_2 no ponto $D(0, 23)$ é $5.\,0 + 4\,.\,23 = 92$. Resumindo, quando b_2 muda, a solução ótima move-se ao longo da restrição madeira contanto que

$$92 \leq b_2 \leq 172{,}5$$

Agora resta saber quanto a função objetivo aumenta com o aumento de b_2 de 1 unidade no intervalo $92 \leq b_2 \leq 172{,}5$. Primeiramente, suponha $b_2 = 172{,}5$, a solução ótima será o novo ponto extremo $E(34{,}5; 0)$ e o valor da função objetivo é

$34{,}5\,.\,25 = 862{,}5$ em $E(34{,}5; 0)$. Neste caso, a função objetivo aumentou de $862{,}5 - 750 = 52{,}5$ unidades. Portanto, o aumento da função objetivo por 1 unidade de aumento no trabalho é

$$\frac{862{,}5 - 750}{172{,}5 - 120} = 2{,}14.$$

Agora, analisando o aumento de uma unidade de trabalho de outra maneira, suponha o aumento de b_2 em 1 unidade, de 120 para 121, então o novo ponto extremo C' será representado pela intersecção das restrições

$$20x_1 + 30x_2 = 690$$

$$5x_1 + 4x_2 = 121$$

a saber, o ponto $C'(12{,}429; 14{,}714)$, que tem o valor da função objetivo de $752{,}14$. Mas, o efeito líquido à medida que b_2 aumenta 1 unidade é o aumento da função objetivo por $2{,}14$ unidades.

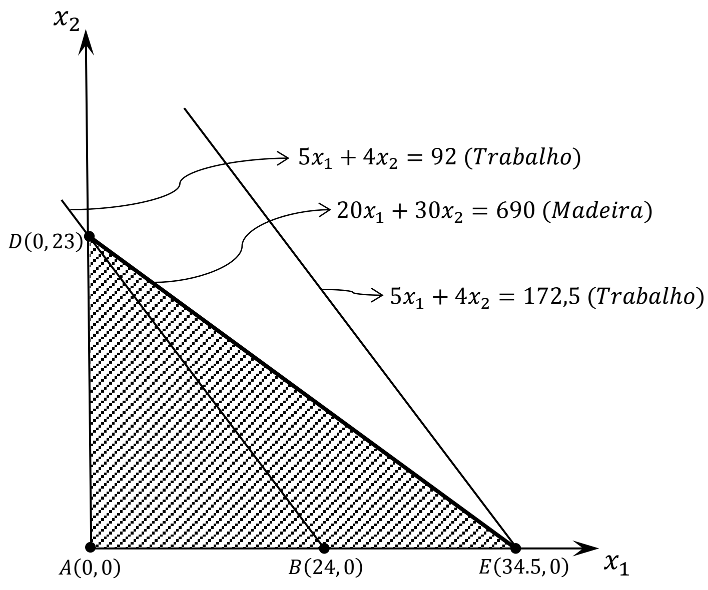


Figura 2.14 – Limite para a aquisição do recurso trabalho.

2.5.2.1 INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DA VARIAÇÃO DE UM DOS RECURSOS

Na analise anterior, sendo adicionada 1 hora de trabalho aos recursos, o lucro é acrescido de $R\$\ 2{,}14$, desde que a quantidade total de trabalho não exceda $172{,}5$ horas. Mas, em termos da função objetivo, uma hora *adicional* de trabalho vale

$R\$\ 2{,}14$. Se o gestor pudesse adquirir 1 hora de trabalho por menos que $R\$\ 2{,}14$, isso seria rentável para a sua atividade. Reciprocamente, se o gestor pudesse vender 1 hora de trabalho por mais de $R\$\ 2{,}14$, sendo válido até que o trabalho seja reduzido a 92 horas, ele também deveria fazer isto. Note que essa análise dá o valor de uma unidade de recurso em termos do valor da função objetivo no ponto extremo ótimo, que é um *valor marginal*.

A Análise de Sensibilidade é uma poderosa metodologia para interpretar a Programação Linear. A informação incorporada numa análise de sensibilidade realizada com cuidado é muitas vezes tão valiosa para o tomador de decisão quanto a solução para a Programação Linear.

CAPÍTULO III

A PROGRAMAÇÃO LINEAR EM SALA DE AULA, UMA PROPOSTA DE TRABALHO

A modelagem matemática constitui uma importante estratégia de ensino aprendizagem. O uso da Programação Linear em sala de aula diversifica e enriquece as experiências dos alunos em lidar com problemas do seu cotidiano, motivando-os para o processo ensino-aprendizagem com a possibilidade de abordar diversos conteúdos programáticos e aspectos da sua formação sociocultural.

Num primeiro contato com os alunos, o professor poderá expor um problema sobre a Pesquisa Operacional – Programação Linear, sem qualquer menção ao assunto. Uma tentativa de motivar os alunos a resolverem um problema, utilizando seus conhecimentos prévios, organizando ideias, levantando hipóteses, fazendo teste e discutindo possíveis soluções. Como exemplo inicial pode-se trabalhar o Problema do Carpinteiro.

Problema do Carpinteiro:

O carpinteiro obtém um lucro de $R\$\ 25{,}00$ *por uma mesa fabricada e* $R\$\ 30{,}00$ *por uma estante fabricada. Ele deseja determinar quantas peças deve produzir de cada mobiliário por semana para obter o maior lucro possível. Ele dispõe de* 690 *pés cúbicos de madeira para trabalhar semanalmente no projeto e* 120 *horas de trabalho. Ele poderá usar a madeira e o trabalho em qualquer outra atividade, caso não seja usado na produção de mesas e estantes. Para isto, ele estima que são necessários* 20 *pés cúbicos de madeira e* 5 *horas de trabalho pra produzir uma mesa e* 30 *pés cúbicos de madeira e* 4 *horas de trabalho para uma estante.*

Nesta fase, os alunos perceberão a necessidade de uma utilização racional de recursos disponíveis na busca por uma solução otimizada para o problema, e mais, que essas ideias poderiam ser estendidas a vários problemas no processo de gestão de recursos ou produção.

Num segundo momento, os alunos poderiam ser agrupados em duplas ou equipes, fazendo uma leitura atenta e detalhada do problema, verificando quais os dados fornecidos, identificando questionamentos e investigando quais das possíveis soluções que teriam sentido e coerência.

Diante das condições expostas, seria natural aos alunos decidirem pela produção de um só item, aquele que apresentasse um maior lucro por unidade produzida, desta forma teriam também o maior lucro. Nesse momento, os alunos seriam levados a pensar sobre as restrições referentes a cada recurso, chegando a pontos de consenso e/ou divergências. Nessas discussões estariam analisando todas as informações, fazendo sugestões, levantando hipóteses e propondo novas soluções.

Em seguida, propõe-se aos discentes a apresentação organizada dos dados (tabelas e/ou gráficos), com o intuito de desenvolver sua capacidade de síntese e organização, facilitando a compreensão e investigação do problema. Nesse momento o professor pode apresentar argumentos matemáticos para a definição de variáveis, organização dos dados e construção de sentenças matemáticas que serviriam para a criação do modelo matemático.

Formulação Matemática para o Problema do Carpinteiro:

Variáveis de decisão: mesas: x*; estantes:* y.

Maximize:

$$L(x,y) = 25.x + 30.y$$

Sujeito às restrições:

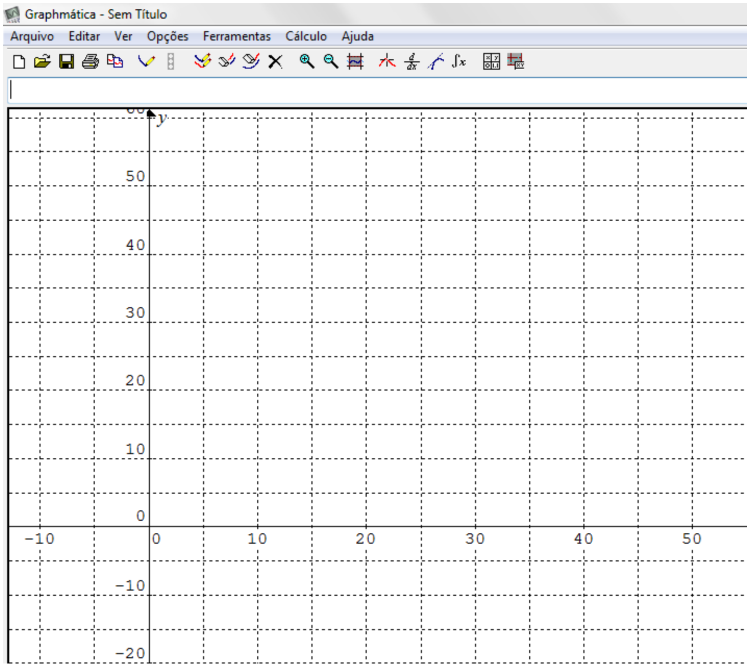
$$\begin{cases} 20.x + 30.y \leq 690 & \textit{(restrição de material)} \\ 5.x + \ \ 4.y \leq 120 & \textit{(restrição de trabalho)} \\ x, y \geq 0 & \textit{(restrições de não negatividade)} \end{cases}$$

Alguns alunos podem apresentar-se angustiados, precisando de uma “solução pronta” para o problema, um reflexo de uma aprendizagem matemática na qual estavam acostumados a vivenciar: o professor propõe o problema, os alunos leem a situação e, sem maiores discussões ou explorações, o professor resolve e apresenta a solução. Outros alunos sentirão entusiasmados pela nova proposta, pela oportunidade de discutir e construir um modelo matemático que os levarão à solução do problema.

Diante desse entusiasmo, o professor se sentirá à vontade para apresentar um resumo histórico da Pesquisa Operacional – Programação Linear, situando os alunos no tempo e no espaço em relação ao assunto e, em seguida, definindo o Problemas de Programação Linear (PPL) e mostrando algumas das suas aplicações em diversas áreas de atuação.

É de grande importância trabalhar a história da matemática em sala de aula, mostrando a construção do conhecimento, com suas necessidades e dificuldades, de forma a humanizar e integrar a disciplina a outros saberes, permitindo a compreensão da origem do pensamento e suas evoluções.

Começar com problemas que apresentam 2 (duas) variáveis é importante, pois é possível encontrar uma solução pelo “método geométrico”, dando ênfase à solução de inequações lineares com 2 (duas) variáveis.



Figua 3.1 – Interface do Software Graphmática.

Para a delimitação da região viável do problema é aconselhável o uso de papel quadriculado e de alguns softwares[29] de interface amigável e familiar. Neste caso, sugere-se o Software Graphmática (Figura 3.1).

3.1 USANDO O SOFTWARE GRAPHMÁTICA PARA RESOLVER PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Depois de instalado o Software *Grafhmática*, a solução gráfica para o Problema do Carpinteiro é acompanhada com seguinte roteiro:

i. Inserir a equação e ajustar o *"zoom"* para visualizar a construção gráfica e na janela *"Ver"* clicar em *"Encontrar todos os gráficos"* (Figuras 3.2 e 3.3);

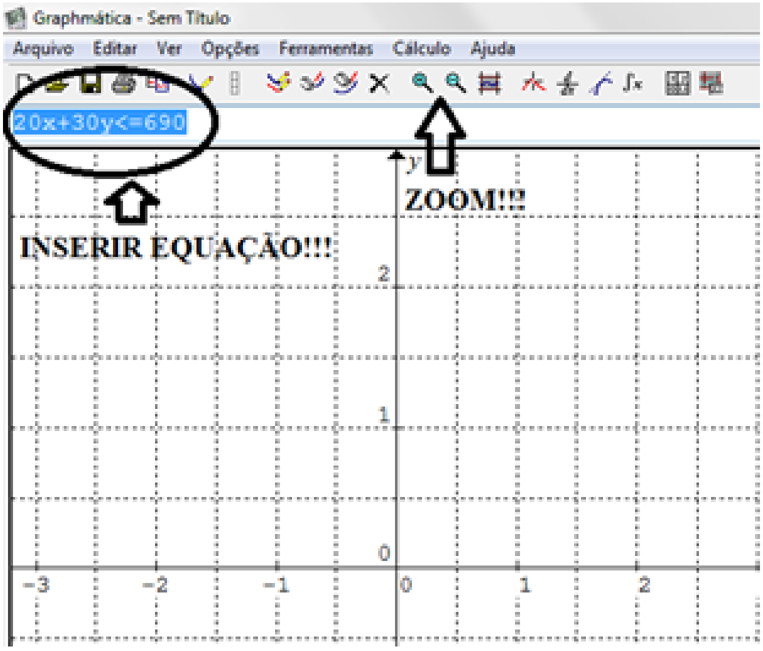


Figura 3.2 – Ajuste da tela no Graphmática.

ii. Copiar a própria equação na janela de entrada (comando *"ctrl c"*);

[29] Graphmática, Geogebra, Grapes ou Winplot.

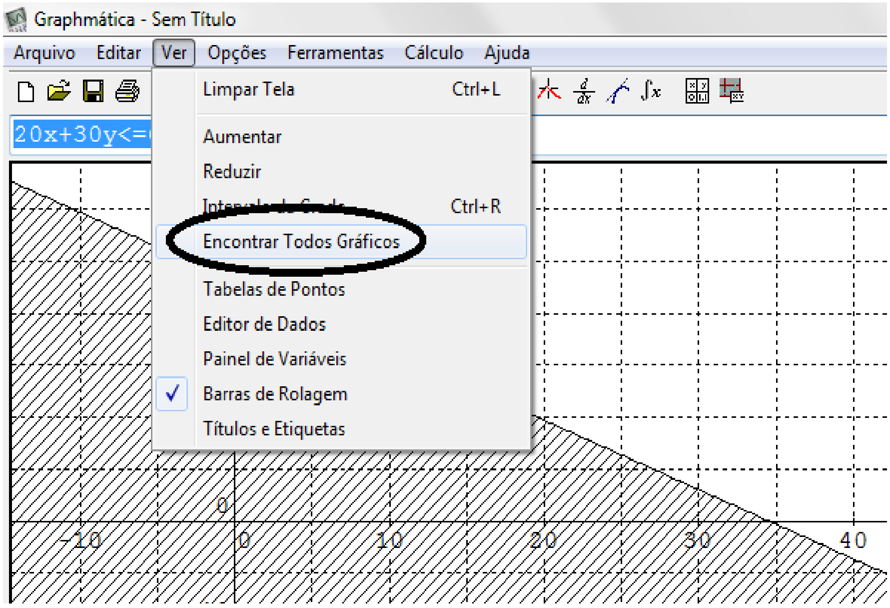


Figura 3.3 – Construção da região viável no Graphmática.

iii. Ir em: *"Editar"* – *"Anotações"* – colar a inequação na janela de entrada (comando *"ctrl v"*) – clicar em *"Colocar"* – ir sobre a reta desenhada correspondente à inequação (Figuras 3.4 e 3.5);

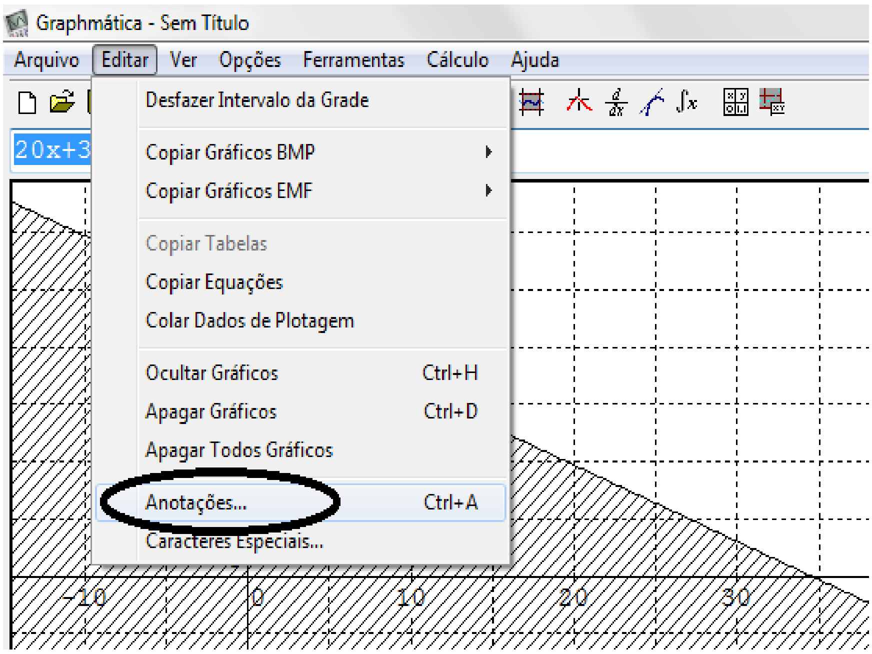


Figura 3.4 – Rótulo de inequações.

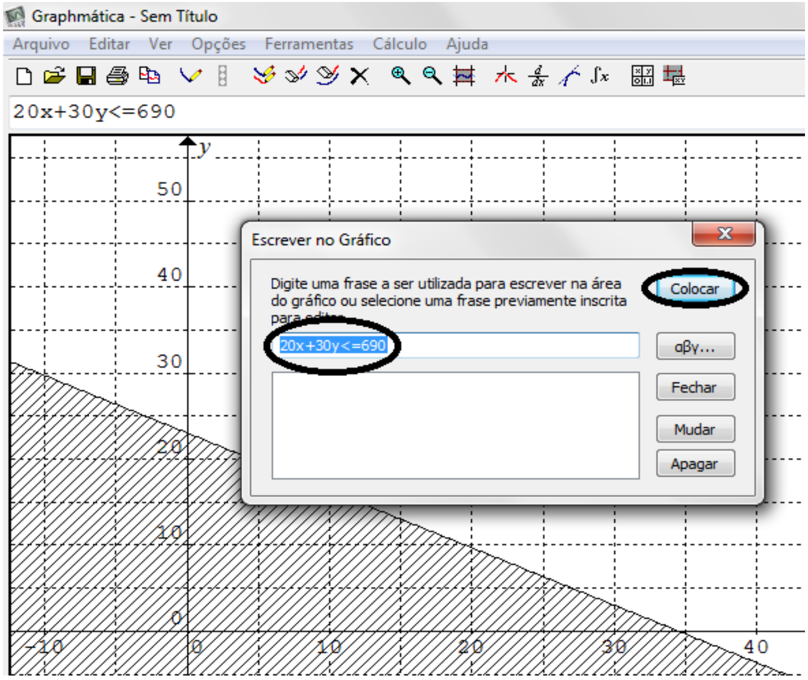


Figura 3.5 – Rótulo de inequações.

iv. Inserir as inequações: usar as próprias equações e acrescentar os sinais > (maior que) ou < (menor que);

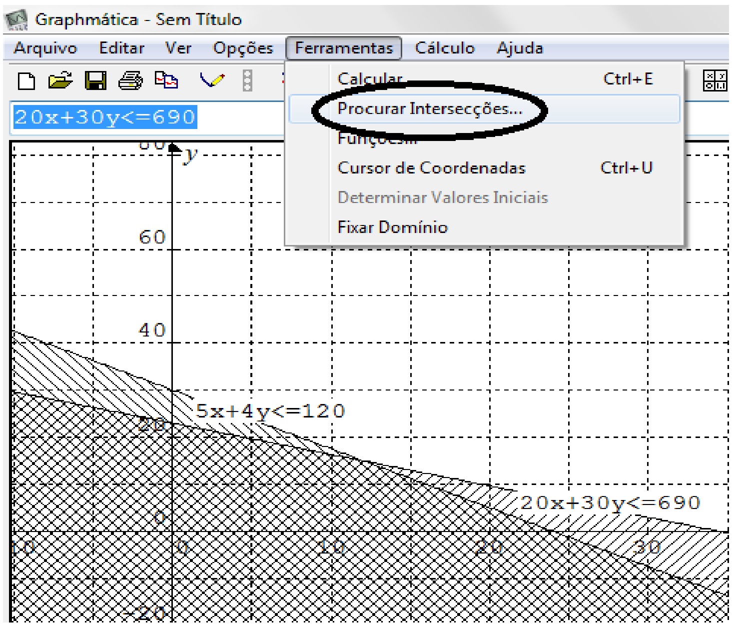


Figura 3.6 – Intersecção das inequações restrição.

v. Identificar a região comum a todas as inequações;

vi. Determinar as intersecções, ir em: *"Ferramentas"* **–** *"Intersecções"* – selecionar as equações e clicar em *"Calcular"* (Figuras 3.6 e 3.7);

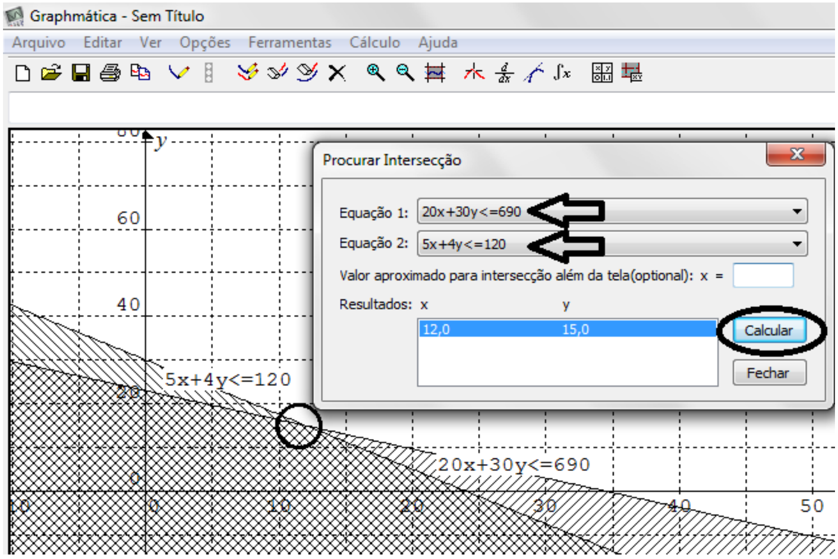


Figura 3.7– Intersecção das inequações restrição.

vii. Anotar todos os pontos de intersecção da região comum (pontos extremos) e substituir na função (mínimo ou máximo). Usar a calculadora;

viii. Verificar o resultado (mínimo ou máximo).

A construção gráfica na sequência dada no roteiro acima é seguida para determinar a solução do Problema do Carpinteiro.

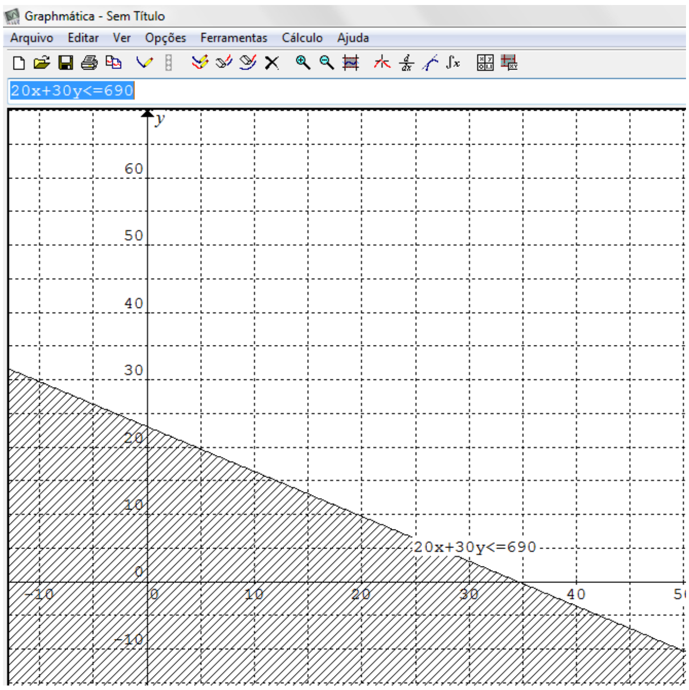


Figura 3.8 – Inequação $20.x + 30.y \leq 690$.

Construir as inequações individualmente observando o semi-plano referente a cada inequação restrição (Figura 3.8 e Figura 3.9).

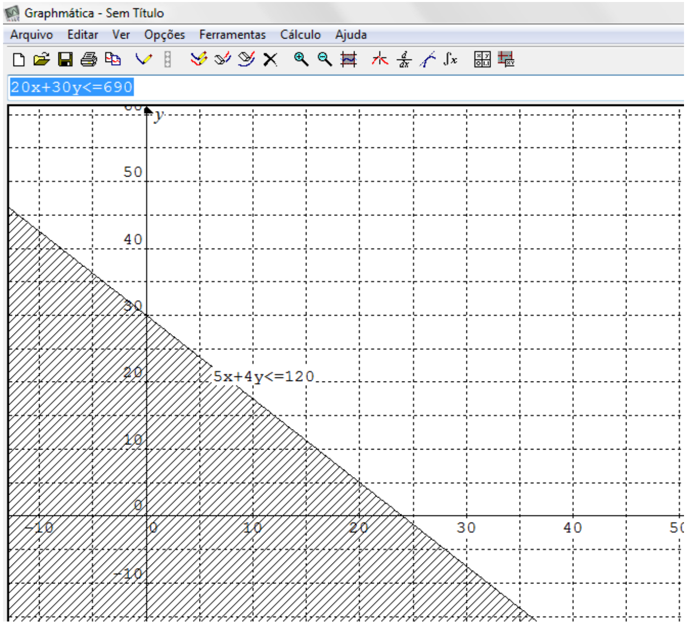


Figura 3.9 – Inequação $5.x + 4.y \leq 120$.

Construir todas as inequações observando o semi-plano referente à intersecção dos semi-planos correspondentes (Figura 3.10).

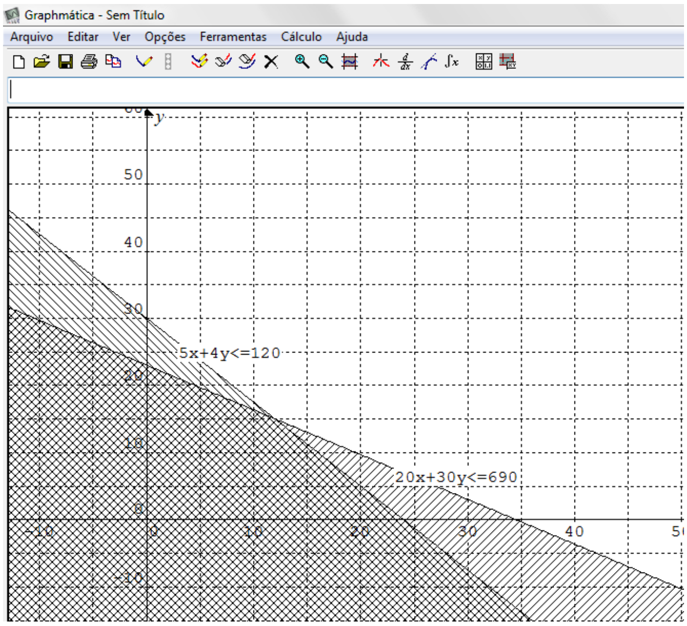


Figura 3.10 – Intersecção dos semi-planos para determinar a região viável.

A Solução do Problema do Carpinteiro se refere a uma quantidade produzida de mesas e estantes, portanto suas soluções estão localizadas no primeiro quadrante do sistema de coordenadas cartesianas, como mostrado na Figura 3.11.

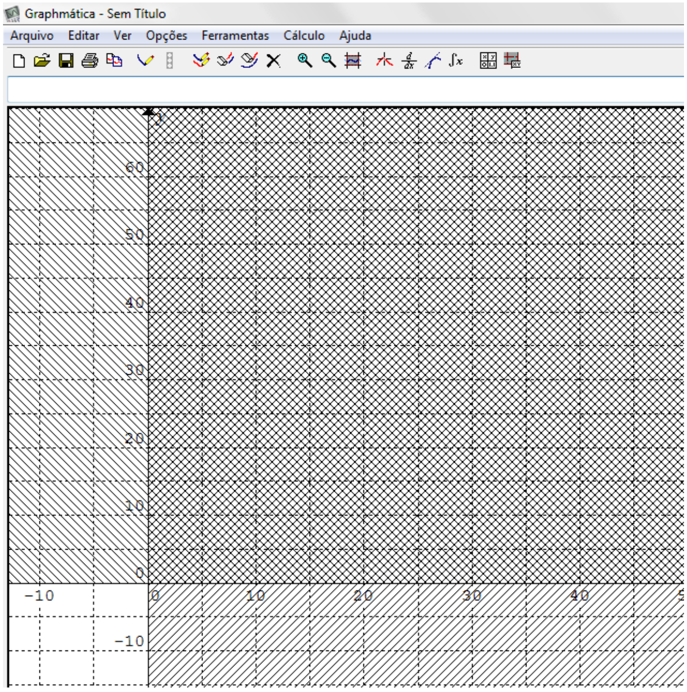


Figura 3.11 – Restrições de não negatividade.

A região viável corresponde à intersecção de todos os semi-planos referentes às inequações de restrição (Figura 3.12).

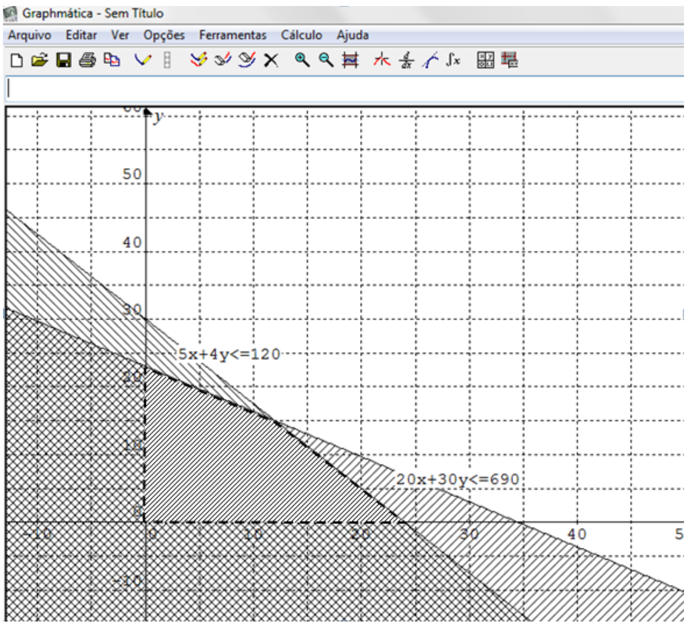


Figura 3.12 – Região viável para o Problema do carpinteiro.

Determinado os pontos extremos da região viável (convexa) para a solução do Problema do Carpinteiro, avaliar a função Lucro e comparar para encontrar o valor máximo. Desta forma, o sistema de inequações do modelo matemático do Problema do Carpinteiro estará resolvido.

3.2 USANDO A FERRAMENTA SOLVER DE PLANILHAS ELETRÔNICAS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

O Solver é uma ferramenta encontrada nas planilhas eletrônicas como o Excel – Microsoft ou Calc – BrOffice[30]. O Solver é uma ferramentas destinada a solução de problemas de otimização, que acompanha o Microsoft Excel ou o Calc – BrOffice, podendo ser usada para problemas de programação linear, e também para problemas de programação não linear (Excel).

O *Solver* faz parte de um pacote de programas, algumas vezes chamado de ferramentas de teste de hipóteses. Com o *Solver* é possível encontrar um valor ideal (máximo ou mínimo) para uma fórmula dada em uma célula – chamada *célula de objetivo* – conforme restrições ou limites, sobre os valores de outras células de fórmula em uma planilha de dados. O *Solver* trabalha com um grupo de células, chamadas *variáveis de decisão* ou simplesmente de *células variáveis*, que participam do cálculo das fórmulas nas células de objetivo e de restrição. O *Solver* ajusta os valores nas células variáveis de decisão para satisfazer aos limites sobre células de restrição e produzir o resultado desejado para a célula objetivo.

No Calc – BrOffice, o Solver é automaticamente instalado e está presente no menu Ferramentas. No Excel – Microsoft, se a opção Solver não estiver presente no menu Ferramentas, é necessário fazer a sua instalação. Será detalhado neste trabalho o uso da planilha Excel – Microsoft, por ser um programa de uso mais comum, entretanto o uso do Calc – BrOffice se faz de maneira semelhante.

Uma vez instalado o programa Excel – Microsoft / 2010, o primeiro passo é instalar os suplementos. Abrir o Excel e ir ao menu *Arquivos* e selecionar *Opções* para disponibilizar a ferramenta de otimização (Figura 3.13).

[30] O Calc – BrOffice é um programa de livre utilização.

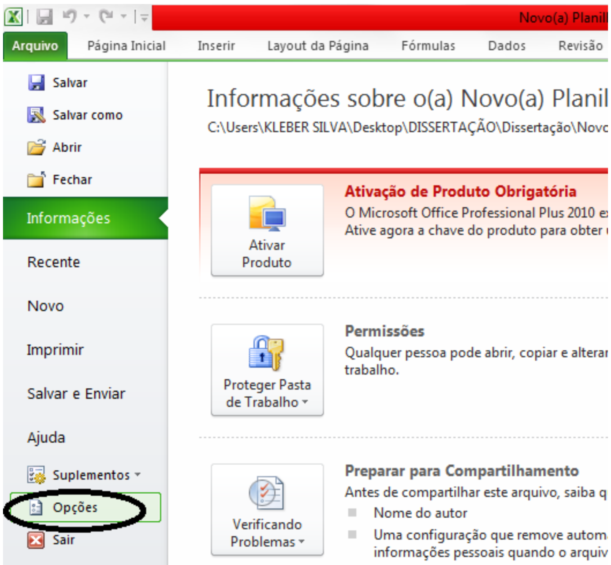


Figura 3.13 – Excel, menu *Arquivos.*

Em *"Opções do Excel"* escolher a opção *"Suplementos"* (Figura 3.14).

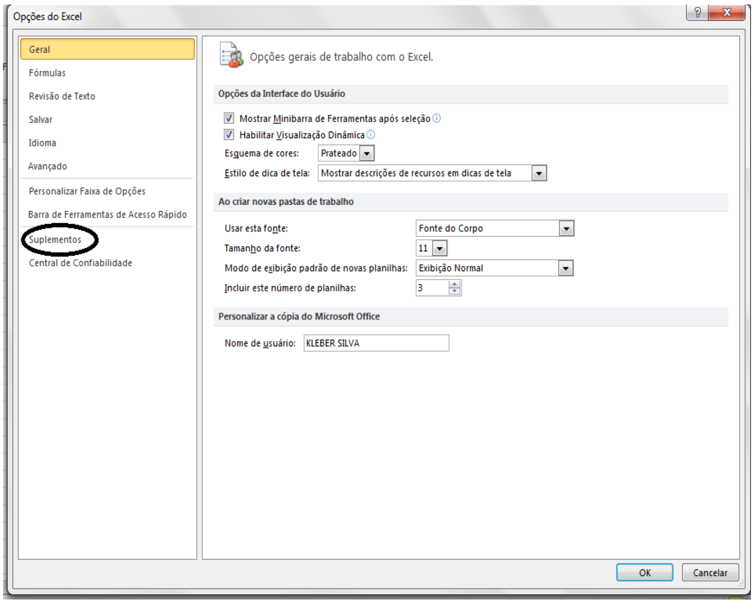


Figura 3.14 – Opções do Excel.

Na opção *"Gerenciar (Suplementos do Excel)"* selecionar *"Ir..."*, aparecendo uma caixa de diálogo com várias opções de suplementos (Figura 3.15).

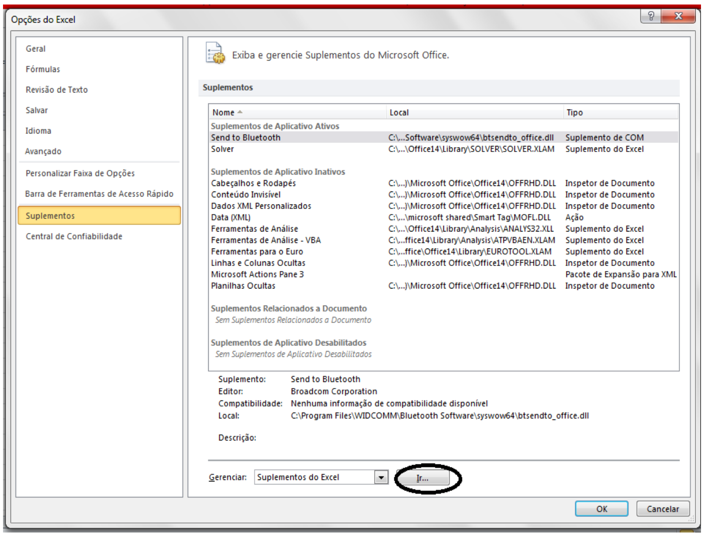


Figura 3.15 – Opções: Suplementos do Excel.

Selecionar todos os suplementos, disponibilizando várias funções adicionais: *“Ferramentas de Análise”*, *“Ferramentas de Análise VBA”* e o *“Solver”*, como mostrado na Figura 3.16, para resolver problemas de programação linear, não linear e outros.

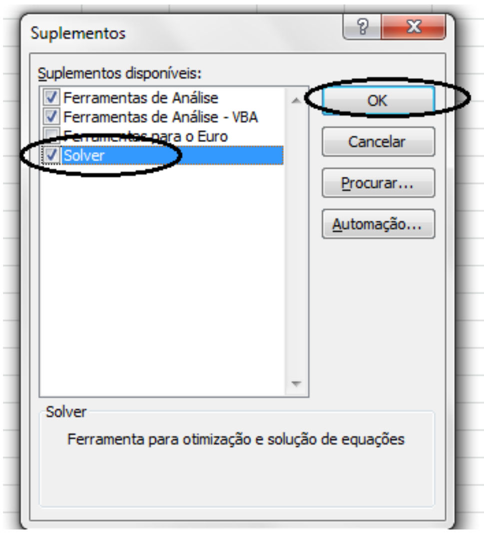


Figura 3.16 – Suplementos do Excel.

A ferramenta de otimização Solver estará disponível. Clicar em *OK*, na caixa de diálogo e verificar se no menu *Dados* aparece o opção *Solver*.

Inicialmente, é necessário fazer a modelagem do problema proposto, depois digitar seus dados na planilha eletrônica e posteriormente utilizar a ferramenta *Solver* para resolver. O resultado final é, então, atualizado na planilha.

Para ilustrar o uso da ferramenta *Solver* (Excel), será utilizado o Problema do Carpinteiro, uma utilização de recursos computacionais na resolução de Problemas de Programação Linear (PPL).

Problema do Carpinteiro:

O carpinteiro obtém um lucro de $R\$\ 25{,}00$ *por uma mesa fabricada e* $R\$\ 30{,}00$ *por uma estante fabricada. Ele deseja determinar quantas peças deve produzir de cada mobiliário por semana para obter o maior lucro possível. Ele dispõe de* 690 *pés cúbicos de madeira para trabalhar semanalmente no projeto e* 120 *horas de trabalho. Ele poderá usar a madeira e o trabalho em qualquer outra atividade, caso não seja usado na produção de mesas e estantes. Para isto, ele estima que são necessários* 20 *pés cúbicos de madeira e* 5 *horas de trabalho pra produzir uma mesa e* 30 *pés cúbicos de madeira e* 4 *horas de trabalho para uma estante.*

Formulação matemática para o problema do carpinteiro:

Maximize:

$$L(x_1, x_2) = 25.x_1 + 30.x_2$$

Sujeito às restrições:

$$\begin{cases} 20.x_1 + 30.x_2 \leq 690 & \textit{(restrição de material)} \\ 5.x_1 + 4.x_2 \leq 120 & \textit{(restrição de trabalho)} \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0 & \textit{(restrições de não negatividade)} \end{cases}$$

Para simplificar a compreensão a respeito do problema, dispor as células de maneira equivalente à apresentação do problema, Figura 3.17, o que facilitará bastante a sua implementação.

Observe que existem duas incógnitas $L(x_1, x_2) = 25.x_1 + 30.x_2$, as quais só terão valores após a resolução do problema, porém, duas células deverão ser escolhidas para representarem essas incógnitas.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	**Problema do Carpinteiro:**							
3								
4			x1	x2				
5		Solução	12	15				
6								
7		Maximizar:	25	30	750			
8		Sujeito a:						
9		Madeira	20	30	690	<=	690	
10		Horas	5	4	120	<=	120	
11								
12	As fórmulas utilizadas nas células E7, E9, E10 foram, respectivamente:							
13								
14		=	SOMARPRODUTO($C$5:$D$5;C7:D7)					
15		=	SOMARPRODUTO($C45:$D$5;C7:D7)					
16		=	SOMARPRODUTO($C$5:$D$5;C7:D7)					
17								
18								

Figura 3.17 – Planilha Excel: Dados do Problema do Carpinteiro.

Observações sobre a fórmula “SOMARPRODUTO”:

- As células C5 e D5 não contêm valores no início da colocação do problema, elas são apenas escolhidas para serem as variáveis de decisão (todas as outras células fazem referência a estas células).
- A fórmula “SOMARPRODUTO” multiplica os componentes correspondentes nas matrizes fornecidas e retorna a soma destes produtos.
- A sintaxe da função é *SOMARPRODUTO(matriz1;matriz2;matriz3;...)*. Matriz1, matriz2, matriz3, ... são matrizes de ordem 2 a 30 cujos componentes se deseja multiplicar e depois somar.
- Os argumentos da matriz devem ter a mesma dimensão, caso contrário, SOMARPRODUTO fornecerá o valor de erro #VALOR!.
- SOMARPRODUTO trata as entradas da matriz não numérica como se fossem “zero”.
- Exemplo: SOMARPRODUTO $(\{3.4.8.6.1.9\};\{2.7.6.7.5.3\})$ é igual a 156.

A fórmula multiplica todos os componentes das duas matrizes da planilha da Figura 3.18 e depois soma os produtos, ou seja, $3*2+4*7+8*6+6*7+1*5+9*3$.

Exemplo:					
3	4	8	6	1	9
2	7	6	7	5	3
					156

Figura 3.18 – Aplicação da fórmula “SOMARPRODUTO”.

Desse modo, as fórmulas são equivalentes ao lado direito das equações do lucro e restrições do problema. Depois de montar um modelo, os passos para resolução utilizando a ferramenta *Solver (Excel)* são:

i. Selecionar *Solver* no menu *“Dados”*, aparecendo a janela *“Parâmetros dos Solver”*, conforme Figura 3.19.

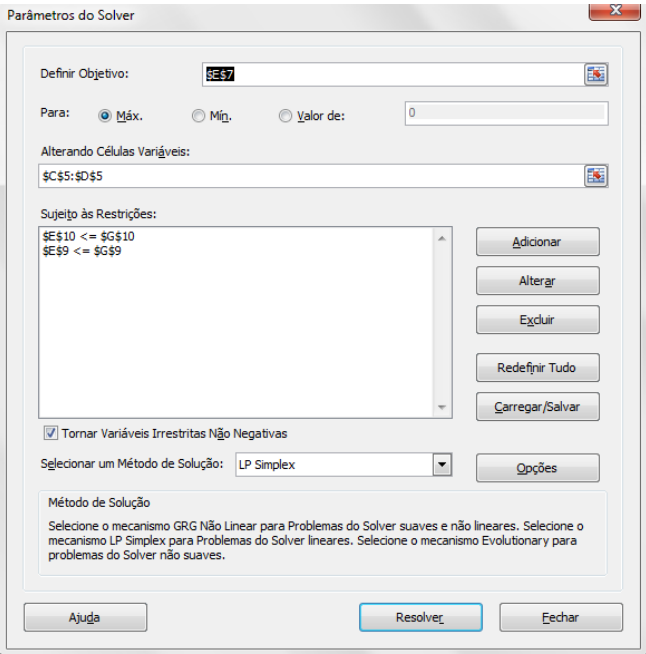


Figura 3.19 – Janela de *“Parâmetros do Solver”.*

- Na opção *"Definir objetivo"* colocar o endereço E7 que contém a função objetivo.
- Selecionar a opção *"Max"* para maximizar a função objetivo.
- Na opção *"Alterando Células Variáveis"* colocar as células correspondentes às variáveis de decisões, neste caso, *$C$5:$D$5*.
- Escolher a opção *"LP Simplex"*.
- Clicar no botão *"OK"*.

Na caixa de diálogo da Figura 3.19, escolhe-se *"Opções"*, encontrando mais funções da ferramenta *Solver*. A caixa de diálogo *"Opções"* é mostrada na Figura 3.20.

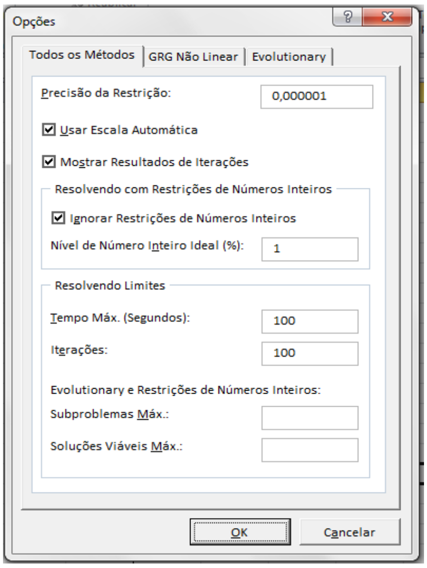


Figura 3.20 – Janela de *"Opões* do *Solver"*.

Mais detalhes sobre o *Solver são* obtidos em *"Ajuda"*, como mostrado na Figura 3.19.

ii. Entrar com as restrições do problema:

- Selecione o botão "*Adicionar*", Figura 3.19, aparecendo a caixa de diálogo como na Figura 3.21.

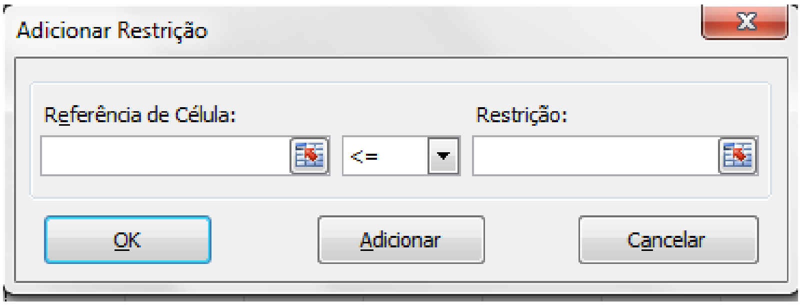


Figura 3.21 – Adição das restrições no Solver.

- Adicionar as restrições do modelo usando as células indicada, como mostradas na Figura 3.19.

iii. Resolver o problema:

Escolher a opção *"Resolver"*, onde aparecerá a caixa de diálogo mostrada na figura 3.22. No lado direito, selecionar os relatórios desejados.

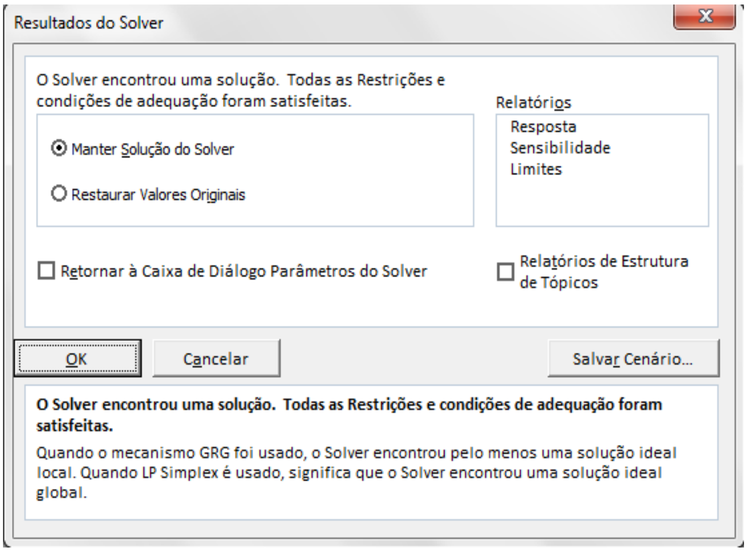


Figura 3.22 – Janela *"Resultados do Solver".*

iv. Interpretar os resultados obtidos.

Depois de selecionar os relatórios, interpretar os resultados exibidos. Como foi visto, existem três relatórios: Relatório de *Respostas*, Relatório de *Sensibilidade*, Relatório de Limites.

Quadro 3.1 – Relatório de Resultados.

Microsoft Excel 14.0 Relatório de Respostas
Planilha: [Novo(a) Planilha do Microsoft Excel.xlsx]Plan1
Relatório Criado: 10/02/2013 18:00:16
Resultado: O Solver encontrou uma solução. Todas as Restrições e condições de adequação foram satisfeitas.
Mecanismo do Solver
Mecanismo: LP Simplex
Tempo da Solução: 2,293 Segundos.
Iterações: 2 Subproblemas: 0
Opções do Solver
Tempo Máx. 100 s, Iterações 100, Precision 0,000001, Usar Escala Automática, Mostrar Resultados de Iteraç
Subproblemas Máx. Ilimitado, Soluç. Máx. Núm. Inteiro Ilimitado, Tolerância de Número Inteiro 1%, Resolver

Célula do Objetivo (Máx.)

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final
$E$7	Maximizar:	750	750

Células Variáveis

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final	Número Inteiro
$C$5	Solução x1	12	12	Conting.
$D$5	Solução x2	15	15	Conting.

Restrições

Célula	Nome	Valor da Célula	Fórmula	Status	Margem de Atraso
$E$10	Horas	120	$E$10<=$G$10	Associação	0
$E$9	Madeira	690	$E$9<=$G$9	Associação	0

O Relatório de Resultados, Quadro 3.1, traz o seguinte resultado:

- Na seção *"Célula de Destino"*, o valor final do lucro (maximizado): $R\$ \ 750,00$;
- Na seção *"Células Variáveis"*, os valores ótimos a serem produzidos: 12 *mesas* e 15 *estantes*;
- Na seção *"Restrições"*, é indicado se todos os recursos foram utilizados completamente ou se ainda houve sobra dos mesmos: neste caso, 690 *pés cúbicos* de madeira e 120 *horas* de trabalho.

Não seria aconselhável utilizar diretamente o Relatório de Sensibilidade, Quadro 3.2, sendo necessário inverter a ordem de algumas notações como "Final Valor" para "Valor Final", "Reduzido Custo" para "Custo Reduzido" e "Sombra Preço", para "Preço Sombra".

Quadro 3.2 – Relatório de Sensibilidade.

Microsoft Excel 14.0 Relatório de Sensibilidade
Planilha: [Novo(a) Planilha do Microsoft Excel.xlsx]Plan1
Relatório Criado: 10/02/2013 18:26:42

Células Variáveis

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permitido Aumentar	Permitido Reduzir
$C$5	Solução x1	12	0	25	12,5	5
$D$5	Solução x2	15	0	30	7,5	10

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lateral R.H.	Permitido Aumentar	Permitido Reduzir
$E$10	Horas	120	2,142857143	120	52,5	28
$E$9	Madeira	690	0,714285714	690	210	210

O Relatório de Sensibilidade, Quadro 3.2, se apresenta como uma ré-arrumação do quadro final do método Simplex que traz a solução dos dois problemas, o *Primal* e o *Dual*[31]. O quadro final do Simplex para o exemplo é apresentado a seguir no Quadro 3.3.

Quadro 3.3 – Quadro Simplex.

	x_1	x_2	y_1	y_2	z	RHS
$R_2 = x_2$	0	1	$0{,}071429$	$-0{,}28571$	0	$\mathbf{15}$
$R_1 = x_1$	1	0	$-0{,}057143$	$0{,}42857$	0	$\mathbf{12}$
$L(x_1, x_2)$	0	0	$0{,}7142857$	$2{,}142857$	1	$\mathbf{750}$

O "Preço Sombra" aparece na última linha e significa que para cada pé cúbico de madeira aumentado nos recursos, o lucro aumenta aproximadamente $R\$\,0{,}72$ e para cada hora de trabalho acrescentada nos recursos, o lucro aumenta aproximadamente $R\$\,2{,}14$. O acréscimo permitido de horas é dado por $[15 \div |-0{,}28571\ldots| = 52{,}5]$; o acréscimo permitido para a madeira é dado por

[31] Ver Anexo 3 – Problema *Primal* e *Dual*.

$[12 \div |-0{,}057143 \ldots| = 210]$. O decréscimo permitido de horas é dado por $[12 \div 0{,}42857 = 28]$; O decréscimo permitido e dado por $[15 \div 0{,}071429 = 210]$.

A parte correspondente às “Células Ajustáveis” é equivalente a resolver o problema *Primal* como se fosse o *Dual*, o que forneceria outro quadro final de onde é possível tirar os valores dos acréscimos. Esta é uma informação adicional ao quadro final do Simplex clássico e que não será abordado nesse trabalho.

Quadro 3.4 – Relatório de Limites.

Microsoft Excel 14.0 Relatório de Limites
Planilha: [Novo(a) Planilha do Microsoft Excel.xlsx]Plan1
Relatório Criado: 10/02/2013 21:00:23

	Objetivo	
Célula	Nome	Valor
$E$7	Maximiza	750

	Variável		Inferior	Objetivo	Superior	Objetivo
Célula	Nome	Valor	Limite	Resultado	Limite	Resultado
$C$5	Solução ›	12	0	450	12	750
$D$5	Solução ›	15	0	300	15	750

O Relatório de Limites deste exemplo, Quadro 3.4, parece desnecessário, porém em casos mais complexos, este relatório se torna bastante útil para visualização dos resultados, que é obviamente o resultado de um relatório.

3.3 OTIMIZADOR GRÁFICO PARA PROGRAMAÇÃO LINEAR

O uso de um *Otimizador Gráfico* para resolver problemas de Programação Linear com 2 (duas) variáveis trará uma motivação extra para os alunos, pois constitui uma ferramenta concreta e de fácil manipulação, alcançando-se facilmente a solução do problema com a utilização do mesmo.

O *Otimizador Gráfico* é um instrumento confeccionado basicamente utilizando placas de madeira (MDF[32]) e acrílico, dividido nas seguintes peças:

- Uma *base* em MDF (espessura de $6\,mm$), constituída de um quadrado de $50cm \times 50cm$ com um orifício (arco maior que $180°$) pelo qual será girado o *círculo gerador de curvas de nível* (Figura 3.23);

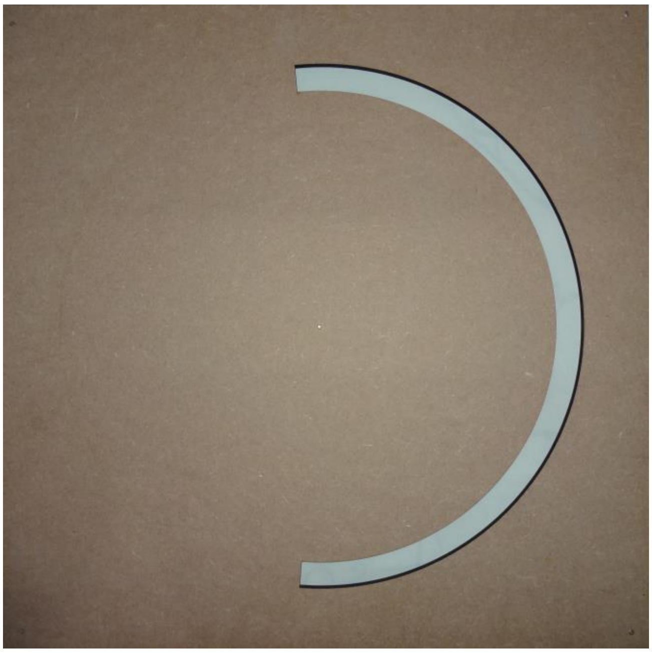


Figura 3.23 – Base do *Otimizador*.

- Um *gerador de curvas de nível* em MDF (espessura de $6\,mm$), constituído de um quadrado de $50cm \times 50cm$, com um círculo de raio $R = 20cm$ devidamente centralizado com o quadrado (Figura 3.24). No círculo são desenhadas retas paralelas com espaçamento de $1{,}0\,cm$ entre elas que determinarão as curvas de nível da *função objetivo* (Figuras 3.24 e 3.25).

[32] MDF – Medium Density Fiberboard.

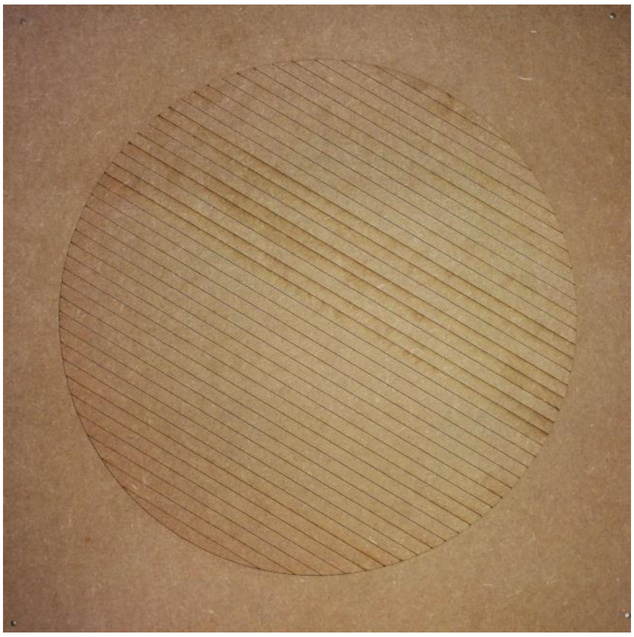


Figura 3.24 – Gerador de Curvas de nível.

Figura 3.25 – Gerador de curvas de nível.

- Um *visualizador* em MDF (espessura de $3\,mm$), constituído de um quadrado de $50cm \times 50cm$ e um segundo quadrado vazado de $27cm \times 27cm$ devidamente centralizado com o primeiro. O visualizador corresponde à uma região localizada no primeiro quadrante do sistema de coordenadas cartesianas (Figura 3.26).

Figura 3.26 – Visualizador do *Otimizador*.

- No interior do quadrado menor, é colocada uma placa em acrílico transparente (espessura de $3\,mm$), com dimensões $27\,cm \times 27\,cm$, com uma rede de malha desenhada com espaçamento entre linhas paralelas de $1{,}0\,cm$ (Figura 3.27).
- Sobre o quadrado superior é colocado trilhos (canaletas) para fixação de tiras elásticas que determinarão, através das inequações restrição, a região viável para resolução do Problema de Programação Linear (Figura 3.26 e Figura 3.27).

Figura 3.27 – Visualizador do *Otimizador*.

Com o Modelador Gráfico, o aluno construirá as funções relativas às inequações restrição do problema e determinar a região viável para a solução. Entretanto, o modelador apresenta algumas limitações quanto à precisão, isto é, funções que tenham suas retas-suporte[33] muito próximas ficam impossibilitadas de serem fixadas; e também quanto à sua abrangência, isto é, valores muito altos ficam impossibilitados de representação. Para valores muito altos, o problema poderia ser trabalhado em escala de redução, porém a precisão seria afetada ainda mais com essa ação.

3.4 RESOLVENDO UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR COM O *OTIMIZADOR GRÁFICO*

Durante o minicurso *Introdução à Programação Linear*[34], várias atividades foram propostas aos alunos. O *Problema do Carpinteiro* foi resolvido geometricamente, algebricamente, utilizando o *Método Simplex* e também o *Otimizador Gráfico*. A experiência com o *Otimizador Gráfico* se deu de forma positiva: a região viável foi facilmente determinada com o posicionamento das inequações que representam as restrições *Madeira* e *Trabalho*.

O uso do *Otimizador* foi rapidamente assimilado, onde o problema proposto foi facilmente resolvido com simples cálculos, identificando apenas os pontos necessários para localizar cada um dos segmentos de reta relativos às restrições, posicionando[35] a família de retas paralelas correspondentes à função objetivo e, em seguida, observando qual o ponto extremo da região viável que pertence a uma das retas dessa família, apontando assim, a solução para o problema.

A facilidade em posicionar as curvas de nível e os segmentos de reta possibilitou uma boa discussão dos resultados, possibilitando a análise de sensibilidade rápida e eficiente, evidenciando o uso eficiente dessa ferramenta concreta.

---

[33] Reta que representa a função algébrica.

[34] Minicurso realizado nos dias 25, 26 e 27 de fevereiro de 2013, duração de 6 horas, realizado pelo PROCIEMA – UESB.

[35] Para posicionar a família de retas paralelas basta observar a inclinação $d = -c_1/c_2$.

Para ilustrar o uso do *Otimizador Gráfico – Programação Linear*, será resolvido, passo a passo, o Problema do Carpinteiro.

Formulação matemática para o Problema do Carpinteiro:

Maximize:

$$L(x_1, x_2) = 25.x_1 + 30.x_2$$

Sujeito às restrições:

$$20.x_1 + 30.x_2 \leq 690 \qquad \textit{(restrição de material)}$$

$$5.x_1 + 4.x_2 \leq 120 \qquad \textit{(restrição de trabalho)}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0 \qquad \textit{(restrições de não negatividade)}$$

Primeiramente, girar o círculo do *Otimizador* para posicionar as curvas de nível referentes à função objetivo. Como a declividade (d) da função objetivo é obtida por $d = -c_1/c_2$, para o problema do carpinteiro $d = -5/6$, as curvas de nível devem ser posicionadas observando que uma delas passará pelos pontos $(0, 5)$ e $(6, 0)$, como mostrado na Figura 3.28.

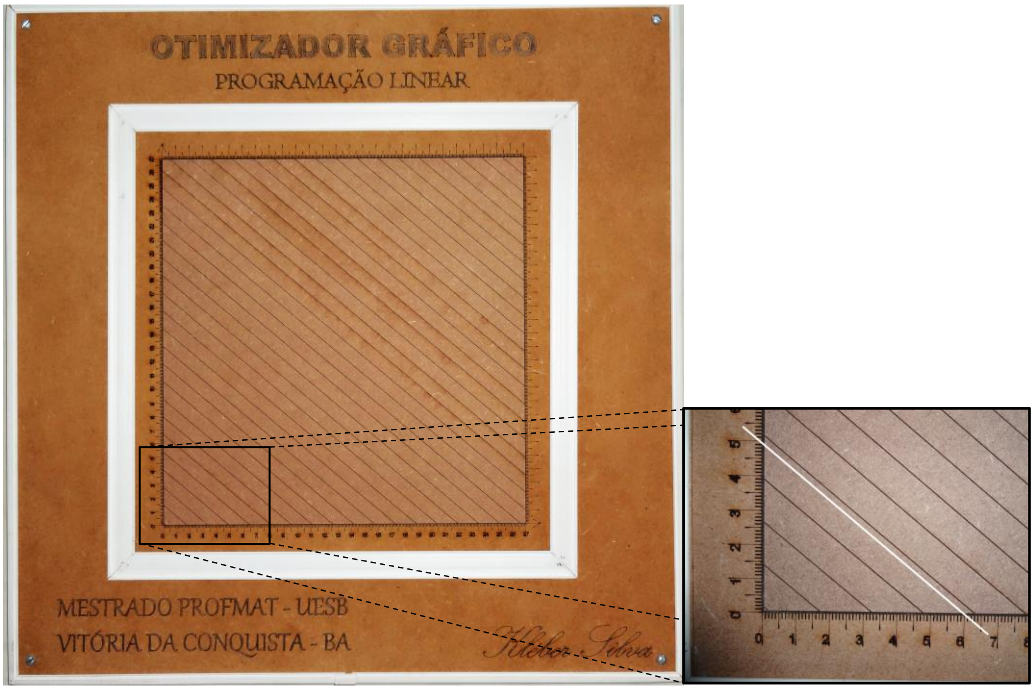


Figura 3.28. – Localização das curvas de nível, declividade $d = -5/6$.

As restrições de não negatividade já estão satisfeitas devido à construção do *Otimizador*, utilizando apenas o primeiro quadrante, onde ambas coordenadas (variáveis) assumem apenas valores positivos.

Para posicionar a restrição madeiral, basta observar que na equação $20.x_1 + 30.x_2 = 690$, o seu gráfico passa pelos pontos $(0, 23)$ e $(34.5, 0)$. Como o último desses pontos não pode ser localizado no *Otimizador*, substitui-se na equação restrição $x_1 = 27$, encontrando o ponto $(27, 5)$, conforme Figura 3.29.

$$20.27 + 30.x_2 = 690 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{690 - 20.27}{30} = 5$$

Nota-se na Figura 3.29 que as declividades da restrição material e das curvas de nível relativas à função objetivo são diferentes.

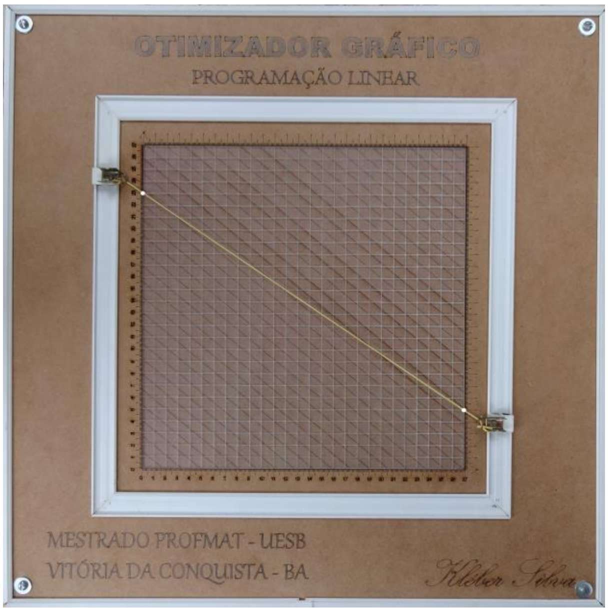


Figura 3.29 – Localização da restrição madeira.

Da mesma forma, para a restrição trabalho, observar que na equação $5.x_1 + 4.x_2 = 120$, o seu gráfico passa pelos pontos $(24, 0)$ e $(0, 30)$. Como o último desses pontos não pode ser localizado no *Otimizador*, substitui-se na equação restrição $x_2 = 27$, obtendo o ponto $(2.4, 27)$, conforme Figura 3.30.

$$5.x_1 + 4.27 = 120 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{120 - 4.27}{5} = 2,54$$

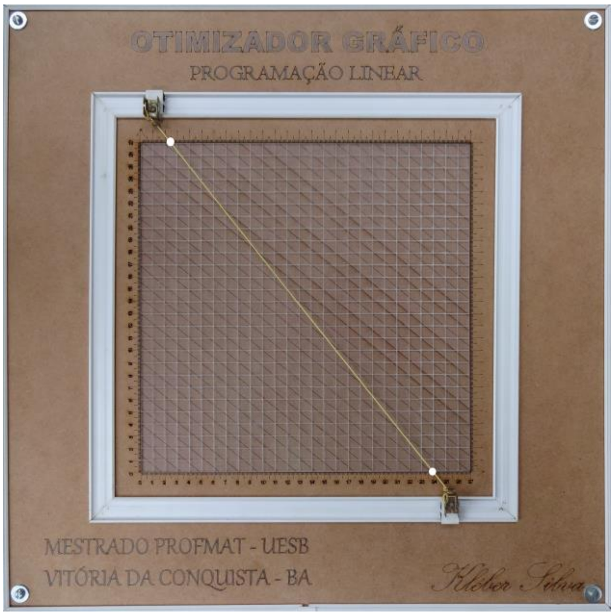


Figura 3.30 – Localização da restrição trabalho.

Nota-se na Figura 3.30 que as declividades da restrição trabalho e das curvas de nível relativas à função objetivo são diferentes.

Em seguida, posicionar simultaneamente todas as restrições e determinar suas intersecções, observando os pontos extremos da figura convexa que compõem a região viável do problema, ou seja, os pontos $A(0,0)$, $B(24,0)$, $C(12,15)$ e $D(0,23)$, conforme Figura 3.31.

Figura 3.31 – Região viável do Problema do Carpinteiro.

Depois de posicionadas as curvas de nível e as restrições do problema, verificar qual o primeiro ponto tangenciado por uma das retas da família de paralelas (curvas de nível). Para facilitar a localização deste ponto, basta olhar as curvas de nível de forma dinâmica, aproximando-as externamente da região viável.

Para o Problema do Carpinteiro, o ponto $C(12, 15)$ é a solução ótima, pois existe uma reta que passa unicamente por este ponto da região viável. Assim, o carpinteiro deve produzir 12 mesas e 15 estantes para obter um lucro máximo $L(12, 15) = 750$ (Figura 3.32).

Figura 3.32 – Solução para o Problema do Carpinteiro.

Se a declividade da função objetivo for igual à declividade de uma das restrições, o problema poderia ter mais que uma solução real. Como a função objetivo do Problema do Carpinteiro tem uma declividade diferente de $-5/4$ e $-2/3$, então a solução é única. Sendo a declividade entre os valores $-5/4$ e $-2/3$, o ponto $C\ (12, 15)$ é sua única solução.

Com o *Otimizador*, também é possível rapidamente fazer o estudo de Análise de Sensibilidade. Girando as curvas de nível referentes à função objetivo, percebe-se que o ponto $C(12, 15)$ ainda continua sendo a solução ótima para o problema, desde que sua inclinação permaneça entre as inclinações das funções restrição, conforme Figura 3.33. Quando a inclinação da função objetivo coincide com a inclinação de uma das restrições, o problema assume várias soluções, pois uma das curvas de nível coincidirá com essa restrição.

Figura 3.33 – $C(12, 15)$ é solução única desde que $-2/3 < d < -5/4$.

Na Figura 3.34, é fácil notar que, quando se adquire novas unidades de trabalho, a restrição madeira passa a ser determinada por uma reta paralela ao à reta da restrição original. Desta forma, o ponto C é deslocado ao longo do segmento de reta da restrição trabalho, determinado uma nova solução para o problema, o ponto C'. Para cada unidade de trabalho adquirida, o lucro sofre um aumento de $R\$\ 2{,}14$, ou seja, se o carpinteiro tiver uma disponibilidade de 121 horas, seu lucro máximo passa a ser $R\$\ 752{,}14$.

Figura 3.34 – Efeito da aquisição de novos recursos (trabalho).

CONSIDEREÇÕES FINAIS

A fundamentação teórica, a elaboração, a aplicação e a análise da proposta de *Modelagem Matemática com Programação Linear* a partir da solução de uma situação problema, utilizando ferramentas gráficas, algébricas, computacionais e concretas, permitiu reconhecer a técnica da Programação Linear como uma importante aliada quando se deseja alcançar êxito no processo ensino aprendizagem.

Para a pesquisa, não houve tempo hábil para uma experimentação das técnicas aqui empregadas e do uso do *Otimizador Gráfico* em sala de aula. Contudo, com o enfoque teórico e prático, percebe-se a aplicabilidade da técnica em diversos conteúdos dentro do Ensino Médio.

Uma importante contribuição foi a construção de uma ferramenta concreta para se trabalhar com a Programação Linear. Primeiramente, o *Otimizador Gráfico* foi pensado com o intuito de resolver somente problemas de Programação Linear. Entretanto, viu-se uma ampla aplicação em conteúdos programáticos dentro do Ensino Médio.

O uso do *Otimizador Gráfico* permite um dinamismo e rapidez na resolução de Problemas de Programação Linear (PPL), facilitando a visualização e representação das condições de restrição e das curvas de nível da função objetivo (função que se deseja maximizar ou minimizar).

A representação de figuras geométricas planas, estudo de operações entre conjuntos como de união e intersecção, interpretação de soluções de sistemas lineares, estudo e representação de funções afins, representação e construção de figuras planas de lados retos, noções de paralelismo e perpendicularismo de retas são conteúdos que podem ser trabalhados com o *Otimizador Gráfico*, explorando suas definições e propriedades.

Com a experiência de trabalho apresentada durante o Minicurso, conforme Anexo 2, desenvolvida com alunos predominantemente de graduação, foi possível a utilização do *Otimizador Gráfico*, resolvendo-se problemas de Programação Linear com extrema facilidade. As atividades puderam ser feitas a partir de conversas, troca de informações e ajuda mútua na construção do modelo, aproximando mais os alunos dos conteúdos estudados.

Como todo método ou ferramenta, o *Otimizador Gráfico* também tem as suas limitações, pois só é possível exibir uma solução ótima para um determinado problema desde que a sua região viável esteja contida no espaço de visualização do *Otimizador* (um quadrado de lado $l = 27{,}0\ cm$) limitado ao primeiro quadrante do sistema de coordenadas cartesianas.

As atividades desenvolvidas durante o minicurso foram suficientes para que os alunos pudessem construir um novo conhecimento. O uso do *Otimizador* foi assimilado por todos com extrema facilidade.

Espera-se que os resultados obtidos nesta pesquisa, sobre a Modelagem Matemática com Programação Linear possam instigar a criatividade dos estudantes do Ensino Médio, servindo de ponto de partida na direção de novas pesquisas. Espera-se, ainda, que possam contribuir com professores que atuam em sala de aula e melhorar a Educação, não apenas por meio do ensino e da aprendizagem, mas, principalmente, por meio da motivação e estímulo ao senso criativo de professores e alunos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABDANUR, Patrícia. *Modelagem matemática: uma metodologia alternativa de ensino*. 2006, 148 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade de Ponta Grossa, 2006.

ANDRADE, E. . *Introdução à Pesquisa Operacional: Metódos e Modelos para Análise de Decisões* (3 ed.). Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2004.

AZERÊDO, M. A. de. A Contribuição da Resolução de Problemas na Formação de Educadores de EJA. In: I Congresso Internacional da Cátedra UNESCO de EJA, 2010, João Pessoa - PB. Congresso Internacional da Cátedra UNESCO de EJA, 2010.

BARBOSA, J. C. *Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? Veritati*, n. 4, p. 73-80, 2004.

BARBOSA, J. *Modelagem Matemática na Sala de Aula*. Perspectiva, publicação da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, 2003.

BELGRADA, P., & et al. *Introdução à Programação Linear.* Rio de Janeiro, RJ: Editora Campos, 1981.

BERALDO, Rossana; BARBATO, Silviane. *Instrumentos Pedagógicos para Preparação e Dinamização de Aulas com uso das TIC e da Internet*. SEC/BA. Brasília, 2013.

BARBOSA, J., CALDEIRA, D., & ARAÚJO, J. *Modelagem Matemática na Educação Brasileira: pesquisa e práticas educacionais.* Recife: SBEM, 2007.

BASSANEZI, R. *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia.* São Paulo, SP: Contexto, 2011.

BIEMBENGUT, M. *Modelagem Matemática e Implicações no Ensino e na Aprendizagem de matemática* (2 ed.). Blumenau: Editora da FURRB, 2004.

BIEMBENGUT, M., & HEIN, N. *Modelagem Matemática no Ensino* (3 ed.). São Paulo, SP: Contexto, 2003.

BRASIL, M. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF, 2002.

BRASIL, M. d. Parâmetros curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília, DF: ME/SEMT, 1999.

BRASIL, S. d. Orientações Curriculares para o Ensino Médio. *2*. Brasília, DF: MEC, 2006.

BURAK, D. *Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem.* Campinas, SP: Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, 1992.

COSTA, Helisângela Ramos da. *A modelagem matemática através de conceitos científicos*. Departamento de Matemática, Universidade do Estado do Amazonas (UEA), Manaus, Amazonas, Brasil, 2009.

D´AMBROSIO, Ubiratan. *Por que se ensina matemática?.* 2008. Acesso em: 06 fev. 2012. Disponível em: <http://matcp2.blogspot.com/>.

D´AMBROSIO, Ubiratan. Etnomatemática um problema: Educação Matemática em Revista, SBEM, 1 pp. 5 – 18, 1993.

GIORDANO, F., WEIR, M., FOX, W., & HORTON, S. *A First Course in Mathematical Modelin.* M. D. Brooks Cole, 2008.

KOLMAN, B. *Introdução à Álgebra Linear com Aplicações* (4 ed.). Rio de Janeiro, RJ: LTC, 1999.

Matemática: Ensino Médio / organização Suely Druck; seleção de textos Ana Catarina P. Hellmeister, Cláudia Monteiro Peixoto. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004. 246 p.: il. (Coleção Explorando o ensino, volume 3).

MELO, Nazareno B. *Uma Proposta de Ensino e Aprendizagem de Programação Linear no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado). UFRGS. Porto Alegre, 2012.

MONTEIRO, A. *O ensino da matematica para adultos através do método da modelagem matemática.* Rio Claro, SP: Instituto de Geociências e Ciência Exatas, Universidade Estadual Paulista, 1992.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático* (2 ed.). (H. L. Araújo, Trad.) Rio de Janeiro, RJ: Interciência Ltda, 1995.

PRADO, D. *Programação Linear. Série Operacional* (5 ed., Vol. 1). Nova Lima, MG: INDG Tecnologia e Serviços Ltda, 2004.

PUCCINI, A. *Introdução à programação Linear.* Rio de Janeiro, RJ: LTC, 1997.

NASCIMENTO, Maurício A. *Resolução de Problemas uma Proposta de ensino Capaz de Gerar Professores Reflexivos*. III Encontro Regional de Educação Matemática – Diálogos de Educação Matemática e Outros Saberes. UEPB, 2011.

SILVA, Jhone C.; SILVA, Rosângela Maria da. *Uma Abordagem de Modelagem Matemática Via Programação Linear*. Anais do IV Simpósio de Matemática e Matemática Industrial – SIMMI’2012, Vol. 1, ISSN 2175-7828.

ANEXOS

ANEXO 1: PROJETO *OTIMIZADOR GRÁFICO – PROGRAMAÇÃO LINEAR*

O *Otimizador Gráfico para Programação Linear* teve seu projeto construído em Corel Draw[36] e, em seguida, suas peças desenhadas e cortadas com máquina de corte à laser. A seguir, conforme projeto, são apresentadas e descritas todas as peças do *Otimizador Gráfico*:

PEÇA 1 – Material: Madeira MDF $6\ mm$

Dimensões: Quadrado de lado $l = 50\ cm$

Observações: Friso aberto com raio maior $(R = 20\ cm)$, raio menor $(r = 18\ cm)$ e angulação maior que $180°$.

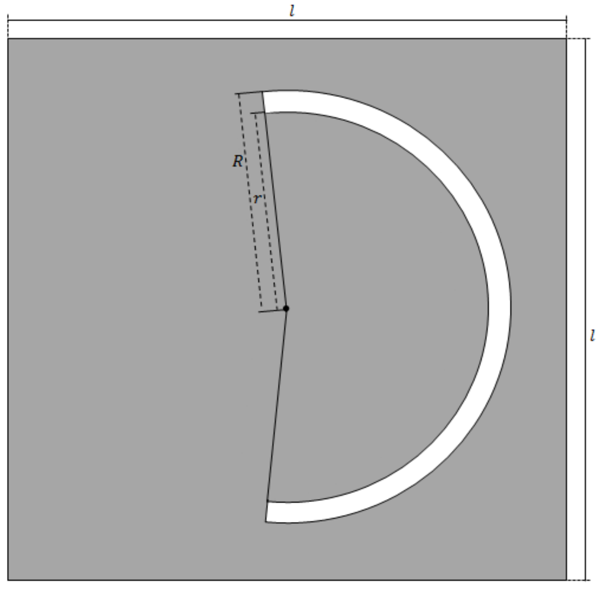


Figura A.1 – Peça 1: Base do *Otimizador*.

PEÇA 2 – Material: Madeira MDF $6\ mm$

Dimensões: Quadrado de lado $l = 50\ cm$

[36] Programa de Desenho Artístico da Windows Microsoft .

Obs.: Círculo vasado com raio $R = 20\,cm$, com aproveitamento do círculo para a Figura A.3.

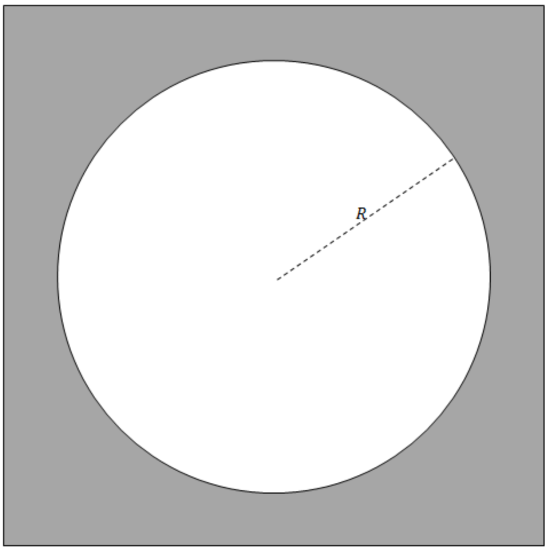


Figura A.2 – Peça 2: Gerador de curvas de nível do *Otimizador*.

PEÇA 3 – Material: Madeira MDF $6\,mm$.

Círculo de raio $R = 20\,cm$ e linhas paralelas desenhadas com espaçamento de $1{,}0\,cm$.

Obs.: Cortado da mesma peça da Figura A.2.

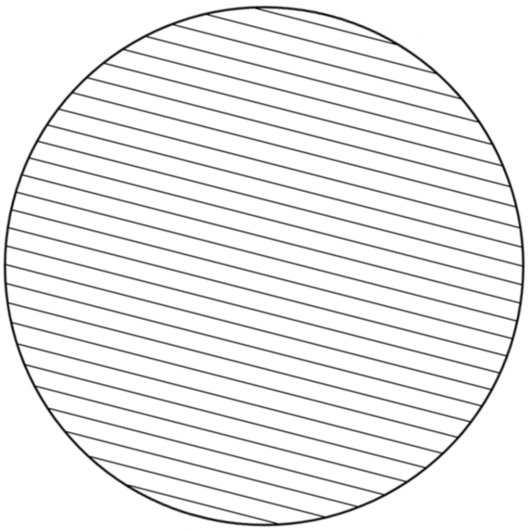


Figura A.3 – Peça 3: Gerador de curvas de nível.

PEÇA 4 – Material: Acrílico, espessura $3{,}0\ mm$.

Dimensões: Quadrado de lado $l = 27\ cm$.

Obs.: Linhas quadriculadas desenhadas com espaçamento de $1{,}0\ cm$.

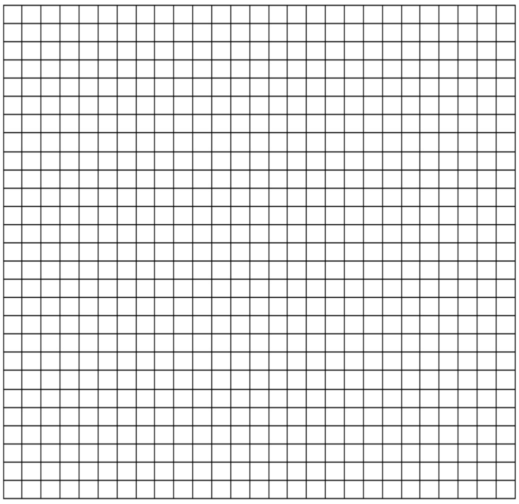


Figura A.4 – Peça 4: rede de malha do visualizador.

PEÇA 5 – Material: Madeira MDF $3{,}0\ mm$.

Dimensões: Quadrado de lado $L = 50\ cm$, Quadrado vasado de $l = 27\ cm$.

Eixos coordenados com marcações de escala: $0 - 27\ cm$.

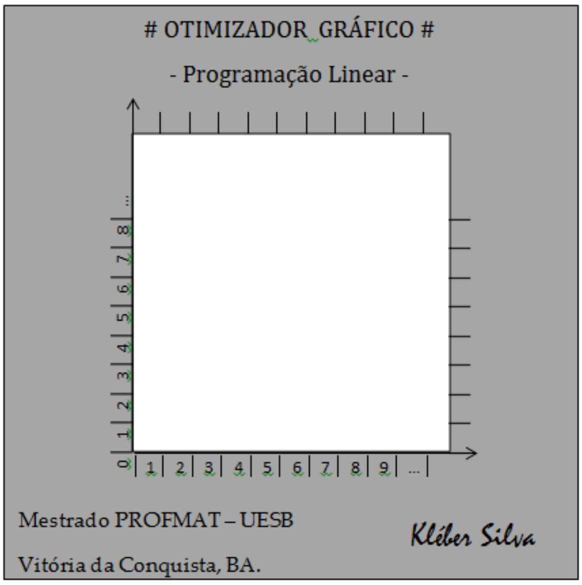


Figura A.5 – Peça 5: Visualizador do *Otimizador*.

Figura A.6 – *Otimizador Gráfico*: Projeto para impressão em Corel Draw.

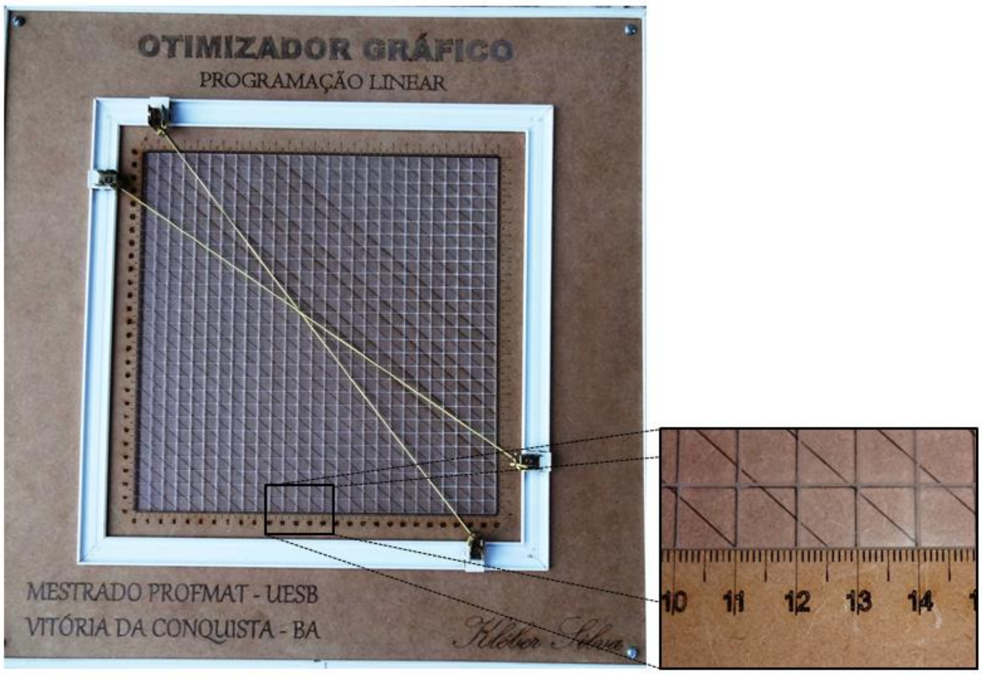


Figura A.7 – *Otimizador Gráfico para Programação Linear* já confeccionado.

ANEXO 2: PROPOSTA DE MINICURSO: *INTRODUÇÃO À PROGRAMAÇÃO LINEAR E APLICAÇÕES*

Quadro A1 – Proposta de Minicurso *Introdução à Programação Linear e Aplicações.*

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA – UESB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS – DCE
PROGRAMA DE CIÊNCIAS E ENSINO DA MATEMÁTICA

PROCIEMA

- **Curso :** Introdução à Programação Linear e Aplicações
- **Resumo:**

O Problema geral de programação linear é utilizado para otimizar (maximizar ou minimizar) uma função linear de várias variáveis, chamada de "função objetivo", sujeita a uma série de equações ou inequações lineares, conhecidas por restições.

Um problema de programação linear pode ser resolvido graficamente, algebricamente ou computacionalmente, dependendo da sua dimesão. Um modelo é incorporado ao estudo do problema e sua validação dependendo da confirmação de que ele realmente representa a situação real dentro de uma precisão desejada.

O método simplex caminha pelos vértices da região viável até encontrar uma solução que não possua soluções vizinhas melhores que ela. Esta é a solução ótima. A solução otima pode não existir em dois casos: quando não houver nenhuma solução viável para o problema, devido a restrições incompatíveis; ou quando não houver máximo (ou mínimo), isto é, uma ou mais variáveis podem tender a infinito e as restrições continuarem sendo satisfeitas, o que fornece um valor sem limites para a função objetivo.

Para problemas de otimização, a programação linear é uma das técnicas mais utilizadas na Pesquisa Operacional e, sem duvidas, uma ferramenta de ensino-aprendizagem a ser muito explorada.

- **Conteúdo:**

Programação Linear:

- Soluções gráficas em Programação Linear;
- Curvas de nível de uma função objetivo;
- Soluções Algébricas na Programação Linear;
- O Método SimpleX para programação Linear;
- Resolução gráfica de problemas de Programação Linear com GRAPHMÁTICA;
- Resolução de problemas de Programação Linear com a ferramenta Solver- Excel;
- Resolução gráfica de problema de Programação Linear utilizando material concreto- "Otimizador Gráfico".

- **Objetivo:**
  - Fornecer ferramentas para resolver problemas que necessitam encontrar o maior ou o menor valor possível em uma função linear cujas variáveis possuem restrições.
  - Analisar e interpretar as soluções encontradas.
- **Carga Horária:** 06 horas
- **Público-alvo:** Ensino Médio e Superior
- **Ministrante:** Kléber Silva (Mestrando em Matemática - UESB)
- **Período de Inscrição / Local:**

De 18/02/13 a 22/02/13 das 14:00 as 17:40 h - PROCIEMA (40 inscrições)

- **Período de Realização:** 25,26 e 27 de Fevereiro de 2013 (11h às 13h)

Prof. Teles Fernandes
Coordenador do PROCIEMA

ANEXO 3 – RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA *PRIMAL* ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA *DUAL* DE PROGRAMAÇÃO LINEAR.

Para um Problema de Programação Linear (PPL) com três variáveis, ainda é possível resolver graficamente utilizando o seu problema d*ual*. Considere o seguinte problema *primal*[37], o de minimizar a função Z.

Minimizar:

$$MIN\ Z = 2x_1 + x_2 + 4x_3$$

Sujeito às restrições:

$$\begin{cases} -2x_1 + \quad x_2 + x_3 \geq 1 \\ \quad x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -1 \\ \quad\quad x_1;\ x_2;\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Este é um problema com três variáveis de decisão, e não seria possível a sua resolução pelo método gráfico como nos problemas com duas variáveis. Uma forma de resolver este problema é construindo o seu problema *dual*, considerando as seguintes condições:

- Se o objetivo no problema primal é maximizar, no problema dual o objetivo é minimizar;
- Se as restrições do problema primal são “≤” (menor ou igual), no problema dual serão “≥ " (maior ou igual);
- Os termos independentes das restrições no problema primal serão os coeficientes da função objetivo no problema dual;
- A matriz dos coeficientes (restrições do problema dual) é a transposta da matriz dos coeficientes das restrições do problema primal;
- Obter a solução do problema primal a partir do dual com base no Teorema das Folgas Complementares[38].

[37] Problema original.
[38] Não provado, mas necessário para o processo de resolução do problema.

Assim, obtém-se o seguinte problema *dual*:

Maximizar:

$$MAX\ D = 1y_1 - 1y_2$$

Sujeito às restrições:

$$\begin{cases} -2y_1 + 1y_2 \leq 2 \\ 1y_1 - 2y_2 \leq 1 \\ 1\,y_1 + 1y_2 \leq 4 \\ y_1;\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Podemos reescrever as condições de restrição

$$\begin{cases} y_2 \leq 2y_1 + 2 \\ y_2 \geq \dfrac{1}{2}y_1 - \dfrac{1}{2} \\ y_2 \leq -\,y_1 + 4 \\ y_1;\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Graficamente,

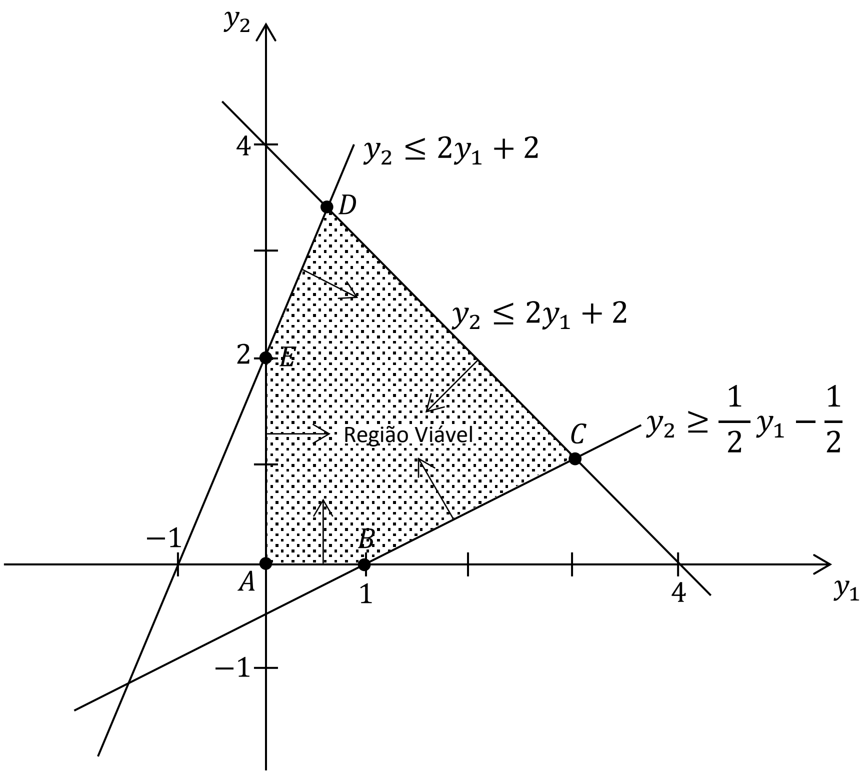


Figura A 8 – Região viável para o problema *dual*.

Os possíveis pontos para solução do problema *dual* são $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(3,1)$, $D(2/3,10/3)$ e $E(0,2)$.

Tabela A1 – Solução para o problema *dual.*

Pontos	y_1	y_2	$D = y_1 - y_2$
$\boldsymbol{A}$	0	0	0
$\boldsymbol{B}$	1	0	1
$\boldsymbol{C}$	3	1	2
$\boldsymbol{D}$	$2/3$	$10/3$	$-8/3$
$\boldsymbol{E}$	0	2	-2

Daí, a solução para o problema dual será $y_1 = 3$ e $y_2 = 1$, obtendo $D = 2$. A solução para o problema *primal* é a mesma para o problema *dual*, $Z = 2$, restando descobrir os valores de x_1, x_2 e x_3.

Para resolver o problema, coloca-se as variáveis complementares em cada um dos problemas.

$$\begin{cases} -2x_1 + \quad x_2 + x_3 = 1 + h_1 \\ \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 + h_2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -2y_1 + 1y_2 = 2 - v_1 \\ 1y_1 - 2y_2 = 1 - v_2 \\ 1\,y_1 + 1y_2 = 4 - v_3 \end{cases}$$

Para resolver o problema dual, é preciso utilizar o seguinte teorema da Programação Linear.

Teorema das Folgas Complementares[39]. Considere o par de problemas *Primal – Dual*:

$$\text{(Primal): } MAX \quad Z = cx \qquad\qquad \text{(Dual): } MIN \quad D = wb$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Sujeito a:} & & \text{Sujeito a:} \\ Ax \leq b & \text{e} & wA \geq c \\ x \geq 0 & & w \geq 0 \end{array}$$

Seja x^* e w^* sejam soluções factíveis para os problemas *Primal* e *Dual*, respectivamente. Então x^* e w^* são soluções ótimas se e somente se:

[39] Para maiores detalhes, ver Andrade (2004) e Prado (2004).

$$\left(b_i - A^i x^*\right) w_i^* = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \qquad \text{e}$$

$$\left(c_j - w^* A_j\right) x_j^* = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Pelo *Teorema das Folgas Complementares*, o produto das variáveis de um dos problemas pelas respectivas variáveis de folga do outro problema é zero.

$$\begin{cases} x_1 . v_1 = 0 \\ x_2 . v_2 = 0 \\ x_3 . v_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} y_1 . h_1 = 0 \\ y_2 . h_2 = 0 \end{cases}$$

Como $y_1 = 3$ e $y_2 = 1$, temos que

$$\begin{cases} -2.3 + 1.1 = 2 - v_1 \\ 1.3 - 2.1 = 1 - v_2 \\ 1.3 + 1.1 = 4 - v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 7 \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{cases} v_1 = 7 \\ x_1 . v_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\begin{cases} y_1 = 3 \\ y_1 . h_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow h_1 = 0$$

$$\begin{cases} y_2 = 1 \\ y_2 . h_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow h_2 = 0$$

E, voltando ao problema primal, tem-se que

$$\begin{cases} -2.0 + x_2 + x_3 = 1 + 0 \\ 0 - 2x_2 + x_3 = -1 + 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1/3 \\ x_3 = 2/3 \end{cases}$$

Portanto,

$$x_1 = 0;\ x_2 = \frac{1}{3};\ x_3 = \frac{2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad Z = -2.0 + \frac{2}{3} + 4.\frac{1}{3} = 2.$$