UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Ricardo Pessoa dos Santos

A Matemática por trás do Sudoku, um estudo de caso em análise combinatória

São José do Rio Preto
2017

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Campus de São José do Rio Preto

A Matemática por trás do Sudoku, um estudo de caso em análise combinatória

Ricardo Pessoa dos Santos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Orientador
Prof. Dr. Luis Antonio da Silva Vasconcellos

2017

Santos, Ricardo Pessoa dos.
A matemática por trás do Sudoku, um estudo de caso em análise combinatória/ Ricardo Pessoa dos Santos. -- São José do Rio Preto, 2017
99 f. : il.

Orientador: Luis Antonio da Silva Vasconcellos
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Análise combinatória. 3. Raciocínio. 4. Jogos educativos. 5. Matemática – Metodologia. 6. Jogos em educação matemática. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

TERMO DE APROVAÇÃO

Ricardo Pessoa dos Santos

A MATEMÁTICA POR TRÁS DO SUDOKU, UM ESTUDO DE CASO EM ANÁLISE COMBINATÓRIA

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Luis Antonio da Silva Vasconcellos
Orientador

Profa. Dra. Tatiana Miguel Rodrigues de Souza
Departamento de Matemática - Unesp - Bauru

Prof. Dr. Wladimir Seixas
Departamento de Matemática - Ufscar

São José do Rio Preto, 29 de Novembro de 2017

Dedico esse trabalho à meus pais que sempre me incentivaram na busca de um caminho melhor e me ensinaram que sempre é possível.

Agradecimentos

Um agradecimento especial a todos os professores do Departamento de Matemática da Unesp - Campus de Bauru, que não mediram esforços para nos auxiliar e oferecer essa oportunidade e pela dedicação de seu precioso tempo.

Em especial ao meu orientador professor Dr. Luis Antonio (Toninho) que esteve diretamente ligado a conclusão desse trabalho. Obrigado pelas longas horas de conversa, onde sempre esteve me orientando, corrigindo e auxiliando no desenvolvimento desse trabalho.

Aos meus alunos que participaram da aplicação das atividades, sofrendo para entender como se resolve um Sudoku, dedicando-se durante a realização das atividades, dando suas opiniões e colaborando positivamente para a obtenção das informações necessárias.

Aos companheiros de jornada que tornaram as tardes e noites das sextas-feiras mais divertidas.

À colega de trabalho Luciana Chefel Guedes pelo auxílio e orientações nas traduções dos e-mails e correções necessárias do "abstract".

Ao professor John Lorch, da Ball State University, que mesmo sem me conhecer respondeu prontamente aos e-mails enviados, fornecendo o material solicitado para a finalização da pesquisa.

À minha esposa Renata Vendramini, com seu carinho e paciência, por estar ao meu lado nos momentos de dificuldades, me ajudando a superá-las e não me deixando desistir.

Quem me dera ao menos uma vez,
Provar que quem tem mais do que precisa ter,
Quase sempre se convence que não tem o bastante,
E fala demais por não ter nada a dizer.
Renato Russo

Resumo

Iremos apresentar a um grupo de alunos do Ensino Médio da rede pública de Ensino do Estado de São Paulo, o mundialmente conhecido quebra cabeças Sudoku, e realizar com eles várias atividades buscando apresentá-lo como subsídio didático na aprendizagem de conceitos matemáticos importantes, além de proporcionar oportunidades de aprimorar a concentração e o raciocínio lógico. Iremos explorar conceitos matemáticos ocultos por trás de suas linhas, colunas e blocos, partindo de uma das primeiras perguntas que podem ser feitas: "Qual é a quantidade total de jogos válidos existentes?" Para responde-la, será proposto a realização de diversas atividades, primeiramente com um Shidoku (matriz 4×4), em seguida iremos calcular o total desses jogos. O tamanho reduzido dessa grade, facilita os cálculos manuais, permitindo visualizar e compreender o processo utilizado, aproveitando para introduzir o princípio fundamental da contagem. A discussão principal desse trabalho, concentra-se na exploração de um método para se determinar a quantidade de jogos válidos existentes para um Sudoku, e para isso, utilizaremos as demonstrações de Bertrand Felgenhauer e Frazer Jarvis. Também apresentaremos um método capaz de gerar uma grade completa de Sudoku, partindo de uma matriz quadrada de ordem 3, que em seguida, será utilizada para gerar uma solução de Sudoku ortogonal. Finalizando, iremos apresentar e explorar algumas formas diferenciadas para os quebra cabeças Sudoku, mostrando variações no formato dos blocos, no tamanho das grades e uma variação que utiliza formas geométricas em suas pistas (Shapedoku). Como desafio de leitura, pesquisa e aprofundamento, será proposto o problema ainda em aberto do número mínimo de dados iniciais para se ter um jogo válido. Podemos afirmar que um dos objetivos esperados, é que tal atividade venha interferir na concentração e raciocínio, auxiliando nas atividades propostas nesse trabalho e que possam ser utilizadas em outros problemas do cotidiano.

Palavras-chave: Sudoku, Raciocínio Lógico, Análise Combinatória, Quadrados Latinos Ortogonais.

Abstract

We will present to a group of high school students of the public Education of Sao Paulo state, the world-known puzzle Sudoku, and perform with them several activities seeking to present it as a didactic subsidy in the learning important mathematical concepts, besides opportunities to enhance concentration and logical reasoning. We will explore hidden mathematical concepts behind their lines, columns and blocks, starting from one of the first questions that can be asked: "What is the total number of valid games in existence?" To answer this question, it will be proposed to perform several activities, first with a Shidoku (4×4 matrix), then we will calculate the total of these games. The reduced size of this grid facilitates manual calculations, allowing to visualize and understand the process used, taking advantage to introduce the fundamental principle of counting. The main discussion of this paper focuses on the exploration of a method to determine the amount of valid games existing for a Sudoku, and for that, we will use the demonstrations of Bertrand Felgenhauer and Frazer Jarvis. We will also present a method capable of generating a complete Sudoku grid, starting from a square matrix of order 3, which will then be used to generate an orthogonal Sudoku solution. Finally, we will introduce and explore some different shapes for the Sudoku puzzle, showing variations in the shape of the blocks, the size of the grids and a variation that uses geometric forms in their tracks (Shapedoku). As a challenge for reading, searching and deepening, the open problem of the minimum number of initial data to have a valid game will be proposed. We can say that one of the expected objectives is that such activity will interfere in concentration and reasoning, helping in the activities proposed in this paper and that can be used in other daily problems.

Keywords: Sudoku, Logical Reasoning, Combinatorial Analisys, Orthogonal Latin Squares.

Lista de Figuras

2.1 Quadrado Greco-Latino 18
2.2 Quadrados ortogonais 19
2.3 Quadrados ortogonais sobrepostos 19
2.4 Diagrama de árvore 21
2.5 Diagrama de árvore 21
2.6 Sudoku simétrico 24
2.7 Rotação de 90° 24
2.8 Rotação de 90° no sentido horário 24
2.9 Rotação de 180° 25
2.10 Rotação de 270° 25
2.11 Rotação de 360° ou operação fazer nada 25
2.12 Reflexão sobre o eixo vertical 25
2.13 Reflexão sobre o exo vertical e rotação de 90° 26
2.14 Reflexão sobre a diagonal 26
2.15 Rotação de 90° e reflexão sobre o eixo vertical 26
2.16 Reflexão sobre a diagonal 27
2.17 Solução sudoku obtida através da regra de Keedwell 30
2.18 Aplicação das operações α e β 31
2.19 Solução sudoku 32
2.20 Solução ortogonal 32
2.21 Grade 1 - possível configuração do bloco superior 33
2.22 Grade 2 - destaque para os algarismos 8 e 9 33
2.23 Grade 3 - algarismos 8 e 9 invertidos 33
2.24 Grade 3 - outros algarismos invertidos 33
2.25 Formas de preencher as 44 classes 34
2.26 Sudoku com 17 pistas e solução única 36
2.27 Sudoku com 16 pistas e duas soluções 36
2.28 Sudoku com 77 pistas e duas soluções 37
2.29 Sudoku rotacionalmente simétrico e 18 pistas 38

3.1 Grade completamente vazia 40
3.2 Exemplo de grade preenchida pelo aluno 1 41
3.3 Exemplo de grade preenchida pelo aluno 2 41
3.4 Exemplo de grade preenchida pelo aluno 3 41
3.5 Exemplo de grade preenchida pelo aluno 4 41
3.6 Grade preenchida com letras e transformada em algarismos 43
3.7 Comparação entre as grades de algarismos (nota-se algumas diferenças) 43
3.8 Grade 4×4 no formato padrão 44
3.9 Região 1 45

3.10 Região 2 45
3.11 Região 3 45
3.12 Região 4 45
3.13 Região 5 45
3.14 Região 6 45
3.15 Grades simétricas (a segunda é uma reflexão da primeira) 46
3.16 Doze grades com bloco superior no formato padrão 47
3.17 Grades do grupo 1 48
3.18 Grades do grupo 2 48
3.19 Grades do grupo 3 49
3.20 Grade do grupo 1 (possui a propriedade P) 49
3.21 Grade do grupo 2 (não possui a propriedade P) 50

4.1 Grade sudoku 9×9 no formato padrão 52
4.2 Linha superior a ser preenchida inicialmente 53
4.3 Linha superior preenchida 53
4.4 Possibilidades para a linha superior 53
4.5 Linha do tipo 1 (algarismos 1, 2, 3 permanecem na mesma linha) . . . 54
4.6 Linha do tipo 2 (algarismos 1, 2, 3 não podem permanecer juntos) . . . 54
4.7 Letras a, b e c indicando possíveis locais para os algarismos 1, 2 e 3 . . 55
4.8 Uma das possibilidades para os algarismos 1, 2 e 3 55

5.1 Matriz quadrada de ordem 3 57
5.2 Solução obtida a partir da matriz K 58
5.3 Atividade proposta 59
5.4 Solução inicial 60
5.5 Solução ortogonal 60

6.1 Variações de sudoku 61
6.2 Variações de sudoku 62
6.3 Variações no formato do bloco 62
6.4 Bloco no formato pirâmide 63
6.5 Exemplo de shapedoku 64
6.6 Exemplos de jogos shapedoku 64

7.1 IDESP da escola avaliação realizada no ano de 2016 67
7.2 Comparação do IDESP - escola / diretoria de ensino / estado 67
7.3 Participação dos alunos no SARESP 2016 67
7.4 Médias obtidas pela escola 68
7.5 Distribuição percentual em níveis de proficiência 68
7.6 Distribuição percentual em níveis de proficiência 69
7.7 Comparação entre as médias dos alunos 69
7.8 Comparação percentual em níveis de proficiência 70

B.1 Distribuição dos Elementos 92
B.2 Distribuição dos Elementos - Caso 1a 93
B.3 Distribuição dos Elementos - Caso 1b 93
B.4 Distribuição dos Elementos - Caso 1c 93
B.5 Distribuição dos Elementos - Caso 1d 94
B.6 Distribuição dos Elementos - Caso 2 94

B.7 Distribuição dos Elementos - Caso 2a 95
B.8 Distribuição dos Elementos - Caso 2b 95
B.9 Distribuição dos Elementos - Caso 2c 95
B.10 Distribuição dos Elementos - Caso 2d 96
B.11 Distribuição dos Elementos na Diagonal Direita - Esquerda 97

Lista de Tabelas

2.1 Casos de simetria no quadrado 27
2.2 Matriz de Keedwell 29

7.1 Porcentagem de alunos a respeito do conhecimento do sudoku - INTRO 1 71
7.2 Porcentagem de alunos quanto ao jogo - INTRO 2 71
7.3 Porcentagem de alunos por quantidade de jogos - INTRO 3 72
7.4 Número de alunos por habilidade necessária - INTRO 4 72
7.5 Importância da matemática na busca de soluções - INTRO 5 72
7.6 Aspectos da aplicação 76
7.7 Qualificando a aplicação 77

Sumário

1 Introdução **14**
- 1.1 Considerações Iniciais 14
- 1.2 O Jogo 15

2 Fundamentação Teórica **18**
- 2.1 Apresentação 18
- 2.2 Princípios de Análise Combinatória 20
  - 2.2.1 Princípio Fundamental da Contagem 20
  - 2.2.2 Permutação Simples e Fatorial de um Número 22
  - 2.2.3 Permutação com Repetição 22
  - 2.2.4 Arranjos Simples 23
  - 2.2.5 Combinações Simples 23
- 2.3 Simetria no Sudoku 24
- 2.4 Grupo Sudoku 28
- 2.5 Soluções de Keedwell 28
- 2.6 Soluções Ortogonais 31
- 2.7 Reduções 32
- 2.8 O Problema do Número Mínimo de Entradas 35

3 O caso 4 $\times$ 4 **39**
- 3.1 Organização das Atividades Propostas 39
- 3.2 Contando as Possibilidades 43
- 3.3 Método para Contar 44
- 3.4 Soluções Essencialmente Diferentes 46

4 O caso 9 $\times$ 9 **51**
- 4.1 Preparando a Contagem 52
- 4.2 Completando as Linhas Superiores 55

5 Grades Válidas e Ortogonais **57**
- 5.1 Gerando uma Solução Sudoku 57
- 5.2 Soluções Ortogonais 59

6 Outros Casos e Variações **61**
- 6.1 Super Sudoku e Blocos com Formatos Diferentes 61
- 6.2 Shapedoku - Sudoku e Geometria 63

7 Comentários sobre a Aplicação **66**
7.1 Caracterizando a Escola 66
7.2 Caracterizando os Alunos 70
7.3 Conhecendo os alunos e seus conhecimentos sobre o jogo 71
7.4 Apresentação - Conhecendo o Sudoku 73
7.5 Realizando a Contagem - O caso 4×4 74
7.6 Realizando a Contagem - O caso 9×9 74
7.7 Construindo Soluções 76

8 Conclusão **78**

Referências **80**

A Atividades Aplicadas **82**

B Teorema Keedwell **92**

1 Introdução

1.1 Considerações Iniciais

Ao contrário do que muita gente pensa, o Sudoku não se assemelha ao conhecido quadrado mágico, nem tão pouco utiliza suas propriedades, onde para determinarmos os algarismos que preenchem suas casas, precisamos executar operações de adição, obtendo sempre o mesmo valor para as somas dos elementos das linhas, colunas e diagonais.

Trata-se de um jogo de raciocínio lógico e experimentação, onde em sua versão mais comum, o jogador é desafiado a "encaixar" algarismos de 1 a 9 em uma grade 9×9, com 81 células distribuídas em 9 linhas, 9 colunas e 9 blocos 3×3, utilizando para isso, alguns algarismos fornecidos como dados iniciais (pistas do jogo) e com uma única regra restritiva: "Não repetir elementos nas linhas, colunas e blocos"! Regra essa que, iremos chamar a partir de agora de: "Regra Única", que apesar de simples, pode levar jogadores experientes à loucura devido ao grau de dificuldade encontrado nos jogos, que podem variar desde os mais simples, até os praticamente impossíveis; ou simplesmente fazer com que os iniciantes desistam de completar a tarefa.

Nesse jogo, como não precisamos executar operações aritméticas para encontrar o local de cada elemento dentro da grade, poderíamos substituir os 9 dígitos (algarismos de 1 a 9), por 9 letras, ou 9 símbolos bastando apenas verificar se o elemento em questão já não foi colocado naquela linha, coluna ou bloco.

O Sudoku como hoje conhecemos, foi criado em 1979, por Howard Garns [3], um arquiteto americano aposentado de 74 anos de idade e construtor de quebra cabeças, provavelmente utilizando como base o "quadrado latino", assim denominado por Leonhard Euler (1707 - 1783) pelo fato de utilizar letras latinas em seus estudos [5]. É notável a semelhança entre o Sudoku e um quadrado latino de ordem 9, onde fazia-se necessário à distribuição de 9 elementos em 9 linhas e 9 colunas, respeitando também a regra de não repetir elementos nas linhas e colunas.

O Sudoku foi publicado a primeira vez no Japão no ano de 1984, e só ganhou projeção mundial após 2004, quando Wayne Gould, um juiz aposentado que conheceu o jogo em uma visita ao Japão em 1997, criou um programa para gerar diferentes jogos e propôs ao jornal Britânico "The Times" que publicasse o passatempo em suas páginas. O sucesso alcançado pelo jogo foi tanto que outros jornais resolveram fazer o mesmo, publicando também o jogo em suas páginas. A partir de então, o Sudoku passou a ganhar popularidade e se transformou em fonte de estudo e pesquisa de diversos matemáticos.

Com o objetivo de reproduzir a experiência de Felgenhauer e Jarvis descrita em [8], chegando ao total de jogos disponíveis e avaliar um grande número de jogos com diferentes entradas, vamos apresentar a um grupo de alunos do Ensino Médio da rede pública do Estado de São Paulo, os conceitos matemáticos envolvidos e até então ocultos no jogo do Sudoku, que podemos descrevê-lo como sendo um quadrado latino com uma restrição a mais.

Aproveitaremos também, para apresentar algumas questões sobre o jogo que ainda estão em aberto, como o problema do número mínimo de dados iniciais necessários para se determinar um jogo válido.

Em primeiro momento, em uma conversa com o grupo de alunos, vamos levantar dados sobre o grau de conhecimento a respeito do jogo, algumas estratégias de resolução e a importância em desenvolver o raciocínio lógico, fator muito importante para aprendizagem de conceitos matemáticos, e atualmente cobrado em provas de concursos, vestibulares e no Enem.

Passaremos a desenvolver uma série de atividades buscando apresentar conceitos de análise combinatória como ferramenta para solucionar problemas de contagem em diversas situações, desde os mais simples até chegar aos mais complexos como é o caso da quantidade de jogos de um Sudoku 9×9. Essas atividades, serão propostas aos alunos por grau de dificuldade, iniciando com as mais simples e gradativamente aumentando o nível de dificuldade e, consequentemente, o raciocínio necessário.

Iremos também, aproveitar para explorar conceitos de simetria, pois dentro da nossa contagem, existem muitas soluções "equivalentes" ou simétricas, ver [17], ou seja, aquelas que podem ser transformadas uma na outra. Iremos apresentar conceitos de simetria dentro de um quadrado, pois como um Sudoku é um quadrado, casos de simetria válidos para um quadrado, serão válidos para os jogos de Sudoku.

Esperamos que os alunos desenvolvam o seu raciocínio lógico, compreendam os conceitos de análise combinatória e passem a utilizá-lo em outras situações, principalmente em problemas teóricos apresentados na matriz curricular do Estado de São Paulo, e que posteriormente possam aplicar esses conhecimentos na resolução de diversas situações problema que encontrarem.

Visando também o desenvolvimento do raciocínio, iremos propor aos alunos que coloquem em prática um processo para gerar uma grade válida de Sudoku partindo de uma simples matriz quadrada de ordem 3, e em seguida, gerem um par ortogonal para a solução encontrada. Podemos dizer que se trata de um processo bastante simples, mas que requer concentração e disciplina para que o resultado esperado seja alcançado.

Notamos, que atualmente os alunos não estão preparados para atividades que necessitem de concentração e, infelizmente, acabam desistindo ou se distraindo com diversas coisas, deixando assim de completar suas tarefas. Esperamos que o Sudoku possa desafiar, motivar e criar nos alunos um maior interesse por problemas matemáticos que sempre possuem solução, mas que necessitam de algum conhecimento teórico, muita concentração e disposição.

1.2 O Jogo

Utilizando-se apenas da regra única, o jogador é desafiado a distribuir os 9 símbolos (geralmente algarismos de 1 a 9) dentro da grade quadriculada. Vale lembrar que quaisquer 9 símbolos distintos podem ser utilizados para completar o desafio, pois não se faz necessário executar qualquer operação aritmética com os símbolos envolvidos.

Apesar de existir apenas a regra única, e parecer muito simples sua resolução, o Sudoku apresenta muitos aspectos matemáticos interessantes que pretendemos discutir ao longo desse trabalho.

Um desses aspectos trata do fato de como se obter a quantidade de possíveis grades completas para o problema e que respeitem a regra única. Um jogador experiente e apaixonado por Sudoku, pode ficar preocupado ao ver sua revista de jogos chegando ao final, mas com certeza poderá ficar extremamente sossegado ao saber que o número de jogos disponíveis é gigantesco e mesmo com uma habilidade monstruosa de resolver cada problema em 1 segundo, durante toda a sua vida, não teria êxito na tarefa de resolver todos os Sudokus disponíveis.

O número de grades completas de Sudokus 9×9, foi determinada por Bertram Felgenhauer e Frazer Jarvis [8] no ano de 2005, utilizando computadores e algoritmos preparados para essa tarefa, obtendo um número gigantesco (6.670.903.752.021.072.936.960, ou aproximadamente, $6,67 \times 10^{21}$), que foi posteriormente confirmado por outros matemáticos utilizando diferentes métodos. Infelizmente, até o momento não existe uma prova para esse cálculo sem a ajuda computacional.

Não se contentando apenas em obter esse número, os pesquisadores passaram a uma tarefa um pouco mais árdua, que foi determinar o número de grades completas essencialmente diferentes[1] (veremos mais adiante), pois perceberam que existiam muitas grades que poderiam ser consideradas simétricas, diferindo-se apenas entre si por algumas operações simples como rotações, reflexões ou renomeações dos algarismos. Após excluídas todas essas grades simétricas, chegou-se a um número bem menor, mas que ainda assim, representa uma quantidade enorme de grades. O número de grades essencialmente diferentes foi calculado em 5.472.730.538.

Iremos então, propor uma série de atividades ao grupo de alunos, com o objetivo de reproduzir a experiência de Felgenhauer e Jarvis, construindo modelos para grades menores (Shidoku, matriz 4×4), preparando assim, uma base para construir o raciocínio necessário que permita entender o método utilizado por eles na determinação do total de jogos de Sudoku (matriz 9×9), reproduzindo, os passos da experiência.

Aproveitaremos para introduzir e reforçar com esses alunos, conceitos de matrizes, análise combinatória, raciocínio lógico, e também discutir aspectos positivos e negativos da realização dessas atividades no processo de construção e formalização dos conceitos matemáticos por parte dos alunos.

Nessas atividades, faremos o uso do Sudoku, como um instrumento pedagógico, gerador da situação problema, com o objetivo de criar nesses alunos um gosto pelo pensar matemático e pela vontade de solucionar problemas, facilitando assim a apresentação formal dos conteúdos necessários estabelecidos na matriz curricular estadual, visando atingir as competências e habilidades propostas. Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) [2]

> "[...] além de ser um objeto sociocultural em que a Matemática está presente, o jogo é uma atividade natural no desenvolvimento dos processos psicológicos básicos; supõe um "fazer sem obrigação externa e imposta", embora demande exigências, normas e controle. No jogo, mediante a articulação entre o conhecido e o imaginado, desenvolve-se o autoconhecimento - até onde se pode chegar - e o conhecimento dos outros - o que se pode esperar e em que circunstâncias, [...]"

Atualmente, existem diversas questões em aberto sobre o Sudoku, despertando

[1] Grades essencialmente diferentes, são aquelas que não apresentam simetria entre seus elementos.

a curiosidade e dedicação de pessoas prontas em encontrar demonstrações para tais questões e assim escrever o nome na história.

Ainda não existe uma demonstração para o número total de grades que não utilize o computador como principal recurso. E ainda não foi demonstrado qual é o número mínimo de dados iniciais necessários para garantir a validade de um jogo [15], [20]. Entende-se por jogo válido, aquele quebra cabeça que partindo de um conjunto mínimo de dados iniciais, tenha uma única solução.

Podemos notar então, que sempre existe um campo disponível para aqueles que queiram se envolver em pesquisa e busca de soluções para problemas de diversos formatos.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Apresentação

Devido à grande popularidade do Sudoku, os quadrados latinos, ganharam nos últimos anos maior projeção e destaque. Quadrados latinos são estudados a bastante tempo, e passaram a ter mais atenção desde o problema dos 36 oficiais de Euler, quando ele buscava alocar 36 oficiais de 6 regimentos e 6 patentes diferentes em um quadrado 6×6. O problema consistia em saber se existia apenas um oficial de um regimento e uma patente diferente em cada linha e cada coluna. Esses arranjos eram conhecidos como "quadrados greco-latinos" devido ao fato da utilização de letras gregas e latinas em sua solução.

Após muita procura e sem obter êxito, Euler afirmou não haver solução para tal problema e foi além, conjecturou que não havia solução para quadrados greco-latinos da forma: $n \equiv 2 \bmod 4$ (onde n é a ordem do quadrado, ou seja, o número de linhas ou colunas), fato que só foi comprovado em 1901 pelo Matemático Gaston Tarry, que mostrou que Euler estava parcialmente certo, pois realmente não há solução para o quadrado latino 6×6, dessa forma a conjectura de Euler ganhou mais força, sendo apenas mostrada sua falha em 1959, quando Raj Chandra Bose e Sharadchandra Shankar Shrikhande, utilizaram um computador para encontrar um quadrado greco-latino 22×22, e Ernest Parker encontrou um 10 x 10. Esses 3 matemáticos conseguiram então, depois de muitos anos (aproximadamente 200 anos), mostrar que Euler estava errado, provando que sua conjectura era falsa para as ordens: 10, 14, 18, 22, ... e o único quadrado que não apresentava solução era o de ordem 6 [12].

Para a solução do problema dos 36 oficiais, utilizamos os quadrados greco-latino, posteriormente rebatizados de quadrados latinos ortogonais. Na Figura 2.1 temos um exemplo de quadrado greco-latino de ordem 5.

Figura 2.1: Quadrado Greco-Latino

$A\alpha$	$B\delta$	$C\beta$	$D\epsilon$	$E\gamma$
$B\beta$	$C\epsilon$	$D\gamma$	$E\alpha$	$A\delta$
$C\gamma$	$D\alpha$	$E\delta$	$A\beta$	$B\epsilon$
$D\delta$	$E\beta$	$A\epsilon$	$B\gamma$	$C\alpha$
$E\epsilon$	$A\gamma$	$B\alpha$	$C\delta$	$D\beta$

Fonte: Elaborado pelo autor

Um quadrado latino de ordem n, é uma matriz n $\times$ n, com n símbolos distintos, onde cada símbolo aparece apenas uma vez em cada linha e cada coluna [1]. Os quadrados latinos foram assim denominados pelo fato de Euler utilizar letras latinas em seus estudos. Dois quadrados latinos são ditos ortogonais, se após sobreposição, cada par ordenado de entradas acontecer exatamente uma vez [13] (ver Figuras 2.2 e 2.3).

Figura 2.2: Quadrados ortogonais

0	1	3	2
2	3	1	0
3	2	0	1
1	0	2	3

0	3	2	1
2	1	0	3
3	0	1	2
1	2	3	0

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 2.3: Quadrados ortogonais sobrepostos

0	0	1	3	3	2	2	1
2	2	3	1	1	0	0	3
3	3	2	0	0	1	1	2
1	1	0	2	2	3	3	0

Fonte: Elaborado pelo autor

Neste trabalho, temos como um dos objetivos estimular a concentração e dedicação dos alunos na solução de problemas matemáticos, desenvolver o raciocínio lógico e combinatório, estabelecendo formas para determinar a quantidade de grades de um Shidoku (matriz 4 $\times$ 4), e em seguida iniciaremos o processo para obter o total de grades de um Sudoku (matriz 9 $\times$ 9). Para isso, iremos propor diversas atividades previamente preparadas.

Para soluções do Shidoku, vamos aplicar algumas atividades, conduzindo os alunos ao desenvolvimento de um método para contagem desses agrupamentos. E, para soluções do Sudoku (mais complexas), vamos repetir os passos da experiência realizada por Felgenhauer e Jarvis, quando determinaram pela primeira vez a quantidade total de jogos.

Vamos utilizar um método para construir soluções Sudoku a partir de matrizes quadradas 3 $\times$ 3, e em seguida gerar um par de quadrados latinos ortogonais, partindo da solução de Sudoku (matriz 9 $\times$ 9), anteriormente encontrada.

Iniciaremos com o estudo do caso de um Shidoku; ou seja, uma matriz 4 $\times$ 4, que nos permite a realização manual dos cálculos necessários, pelo fato de possuir uma pequena quantidade de soluções, facilitando a compreensão dos alunos durante o processo. O fato de termos uma pequena quantidade de casos possíveis para o Shidoku, nos permite a visualização do processo utilizado.

Utilizaremos como ponto de partida os conhecimentos prévios do grupo de alunos, e durante as atividades iremos apresentar os conceitos matemáticos envolvidos e aplicados na resolução das atividades para que os mesmos possam ampliar seus conhecimentos matemáticos e raciocínio lógico, utilizando-os para solucionar problemas.

Essa discussão e análise, será o alvo de uma série de atividades propostas a um grupo de alunos do Ensino Fundamental e Médio da Rede Pública de Ensino do Estado de São Paulo, onde buscamos avaliar o impacto do uso de jogos e resolução de problemas no desenvolvimento do raciocínio matemático e sua influência no desenvolvimento dos conteúdos matemáticos propostos pelo currículo oficial do Estado.

Após determinada a quantidade de soluções Sudoku, pretendemos explorar e discutir a eficiência de um método capaz de gerar novas soluções e que além de tudo sejam ortogonais a solução inicialmente encontrada. O desafio proposto, será pensar em uma forma de como utilizar um método que gere quadrados latinos ortogonais.

2.2 Princípios de Análise Combinatória

A análise combinatória trata de problemas que envolvem a contagem de casos em situações de agrupamentos de determinado número de elementos, como calcular, por exemplo, quantos grupos diferentes de 3 pessoas podem ser formados a partir de um conjunto com 6 elementos disponíveis, ou de quantas maneiras diferentes podemos responder 10 questões de uma prova com 5 alternativas, e diversas outras situações [19].

Ela visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes, agrupamentos formados sob certas condições.

Os inúmeros problemas envolvendo a contagem de agrupamentos, podem ser resolvidos por meio de uma ou mais operações elementares entre números naturais. Elas exigem a mobilização de estratégias de raciocínio semelhantes, sempre utilizando a ideia de multiplicação. Esse procedimento que exige o uso do raciocínio combinatório recebe o nome de "princípio fundamental da contagem". Inicialmente, pode parecer desnecessária a existência de métodos para efetuar esses cálculos, mas se o número de elementos a serem contados for grande, esse trabalho será praticamente impossível sem o uso de métodos especiais.

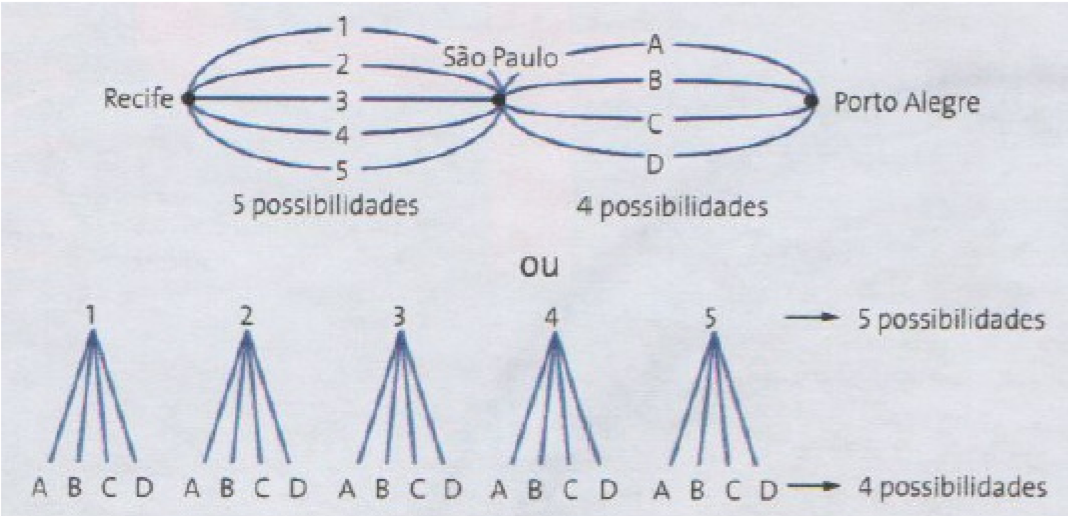
2.2.1 Princípio Fundamental da Contagem

Observe a resolução dos seguintes problemas:

1) Uma pessoa quer viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo. Sabendo-se que existem 5 maneiras diferentes para se chegar à São Paulo partindo de Recife e 4 maneiras diferentes para se chegar a Porto Alegre partindo de São Paulo. De quantas maneiras possíveis, essa pessoa pode viajar de Recife a Porto Alegre?

Para facilitar a compreensão, veja o esquema apresentado na Figura 2.4.

Figura 2.4: Diagrama de árvore

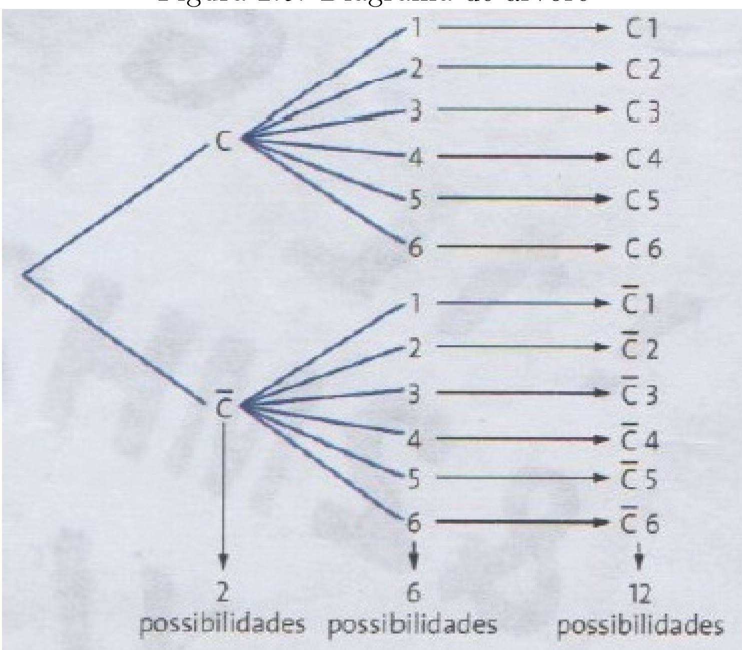


Fonte: DANTE, 2016, v.2, p. 204.

Portanto, existem 5 possibilidades para se fazer a primeira etapa da viagem e 4 possibilidades para se fazer a segunda etapa, totalizando: $5 \cdot 4 = 20$. Temos portanto, 20 maneiras de fazer a viagem.

2) Ao lançarmos uma moeda e um dado comum, temos as seguintes possibilidades para o resultado: (Seja C = cara e $\bar{C}$ = coroa). Observe na Figura 2.5 as possibilidades de resultados.

Figura 2.5: Diagrama de árvore



Fonte: DANTE, 2016, v.2, p. 204.

Observe que o evento tem duas etapas, sendo a primeira etapa com 2 resultados possíveis, e a segunda etapa com 6, totalizando $2 \cdot 6 = 12$ possibilidades.

De modo geral, podemos dizer que:

Se um evento é composto de duas etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na 1^a etapa é m e para cada possibilidade da 1^a etapa o número de possibilidades na 2^a etapa é n, então o total de possibilidades da ocorrência do evento será dado por [4]: $m \cdot n$.

Observação: Essa forma de se calcular o total de possibilidades de um evento, continua válida para qualquer quantidade de etapas independentes.

2.2.2 Permutação Simples e Fatorial de um Número

Permutações simples

O significado de permutar, nos remete a ideia de efetuar trocas. Devemos associar a permutação à noção de embaralhar os elementos, ou seja, troca-los de posição.

Vejamos então, quantos agrupamentos podemos obter quando temos n elementos, e todos serão utilizados em cada agrupamento. De um modo geral, a pergunta é: De quantas maneiras podemos ordenar em uma fila n elementos distintos?

Para o primeiro elemento da fila, temos n possibilidades, para o segundo elemento da fila, temos $(n-1)$ possibilidades, continuando a utilizar o mesmo raciocínio e utilizando o princípio multiplicativo, vamos obter o total dos agrupamentos, que será dado por: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Esse agrupamento será chamado de permutações simples, e será indicado por:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Fatorial de um número

O valor obtido em P_n é também chamado de fatorial do número n e é indicado por: $n!$ (lê-se "fatorial de n" ou "n fatorial"). Assim, $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Assumimos por definição que: $0! = 1$ e $1! = 1$.
Exemplo: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

2.2.3 Permutação com Repetição

Considere o seguinte exemplo: Quantos são os anagramas da palavra "ARARA"?

Se as letras fossem todas diferentes, teríamos um total de: $P_5 = 5! = 120$, entretanto, ao permutar as letras "A" ($P_3 = 3!$), não iremos obter anagramas diferentes, o mesmo fato ocorre com as letra "R" ($P_2 = 2!$). Portanto, o número de anagramas da palavra "ARARA" será dado por:

$$P_5^{3,2} = \frac{P_5}{P_3 \cdot P_2} = 10$$

Generalizando:

$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{P_n}{P_\alpha \cdot P_\beta \cdot P_\gamma}$$

onde: α, β, γ representam o número de vezes que certo elemento se repete.

2.2.4 Arranjos Simples

Agora, tendo n elementos, vamos analisar os agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, $\cdots$, de p elementos, com $p \leq n$.

Fórmula dos arranjos simples

Para calcularmos o total dos agrupamentos no caso geral de n elementos arranjados p a p, com $n \neq p$, ou seja, calcular $A_{n,p}$ (lê-se: arranjo de n elementos tomados p a p).
Para $n > p$, temos:

- na primeira posição: n possibilidades;
- na segunda posição: $(n-1)$ possibilidades;
- na terceira posição: $(n-2)$ possibilidades;
- na p-ésima posição: $n-(p-1)$ possibilidades.

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot [n-(p-1)]$$

Resumindo:
Arranjos simples de n elementos tomados p a p, são agrupamentos ordenados diferentes que podem ser formados com p dos n elementos dados. Podemos calcular o número de arranjos simples, pela seguinte expressão:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

2.2.5 Combinações Simples

Combinações simples de n elementos tomados p a p ($p \leq n$) são os subconjuntos com exatamente p elementos que se pode formar com os n elementos dados. O número de combinações simples será dado por:

Fórmula das combinações simples

A cada combinação de n elementos tomados p a p correspondem $p!$ arranjos, que são obtidos pela permutação dos elementos da combinação, ou seja:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \; C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Observação: Como esses grupos são subconjuntos de um conjunto, a ordem dos elementos não importa, só consideramos os subconjuntos distintos.

2.3 Simetria no Sudoku

Um único Sudoku pode dar origem a diversos jogos, apenas efetuando nele algumas operações simples, como por exemplo uma rotação de 90° no sentido horário.

Podemos a partir de um jogo válido, gerar um novo Sudoku, inicialmente diferente do original, mas com solução simétrica a primeira. Soluções dessa forma são chamadas de "essencialmente as mesmas" e não são contadas quando consideramos "soluções essencialmente diferentes". Em [17], podemos ver a teoria de grupos sendo utilizada, mostrando diversos casos de simetria em quadrados e como aplicá-lo as grades Sudoku. Observe as Figuras 2.6 e 2.7 que apresentam Sudokus simétricos, aplicando uma rotação de 90° no sentido horário.

Figura 2.6: Sudoku simétrico

	2			3			4	
6								3
		4				5		
			8		6			
8				1				6
			7		5			
		7				6		
4								8
	3			4			2	

Fonte: ROYLE, 2006, p. 1.

Figura 2.7: Rotação de 90°

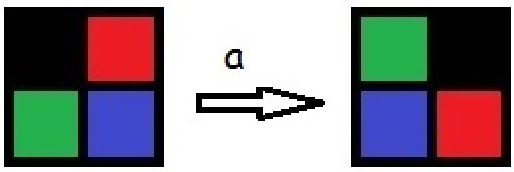
	4			8			6	
3								2
		7				4		
			7		8			
4				1				3
			5		6			
		6				5		
2								4
	8			6			3	

Fonte: ROYLE, 2006, p. 1.

Para determinar se um jogo é simétrico a outro, vamos recorrer a uma área da Matemática denominada "Teoria de Grupo", e listar algumas transformações que tornam um quadrado simétrico a outro.

A primeira transformação que podemos aplicar a um quadrado e torná-lo simétrico a outro, é uma rotação de 90° no sentido horário. Vamos indicar essa transformação pela letra 'a'. Ver Figura 2.8.

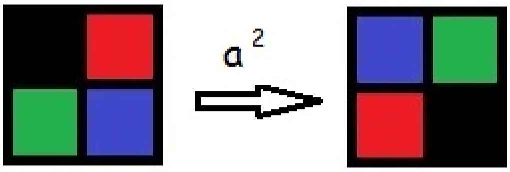
Figura 2.8: Rotação de 90° no sentido horário



Fonte: Elaborada pelo autor

Podemos repetir essa operação, girando mais 90° no sentido horário, ou então, partindo da forma inicial podemos efetuar uma rotação de 180°. Vamos indicar essa transformação por '$a.a$' ou a^2. Ver Figura 2.9.

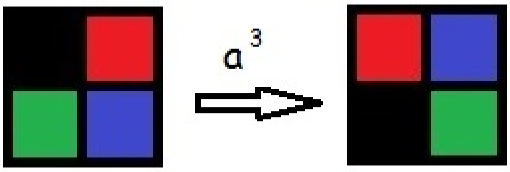
Figura 2.9: Rotação de 180°



Fonte: Elaborada pelo autor

Repetindo essa operação uma terceira vez, obtemos uma rotação de 270°, que indicaremos por a^3. Ver Figura 2.10.

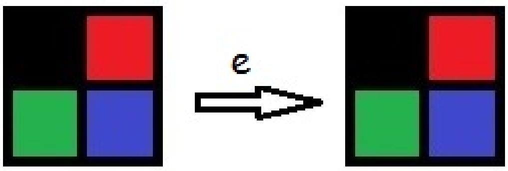
Figura 2.10: Rotação de 270°



Fonte: Elaborada pelo autor

Se repetirmos mais uma vez a rotação de 90°, nossa figura estará de volta ao formato inicial, então podemos afirmar que 4 rotações de 90° no sentido horário tem o mesmo valor de não efetuar operação alguma. Essa transformação será indicada por: $a^4 = e$. Ver Figura 2.11.

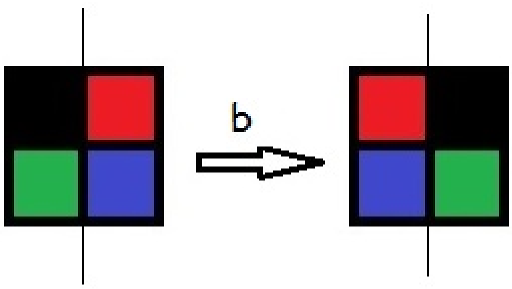
Figura 2.11: Rotação de 360° ou operação fazer nada



Fonte: Elaborada pelo autor

Outras operações efetuadas, também geram quadrados simétricos, como por exemplo uma reflexão através do eixo vertical. Essa transformação será indicada pela letra 'b'. Ver Figura 2.12.

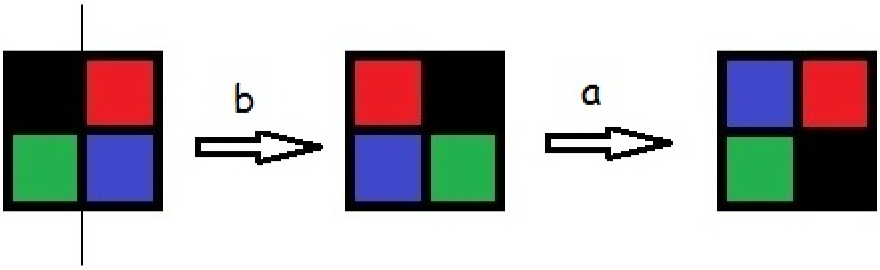
Figura 2.12: Reflexão sobre o eixo vertical



Fonte: Elaborada pelo autor

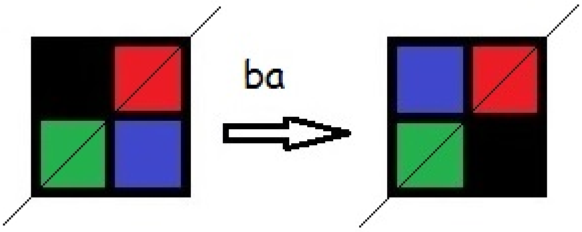
Compor duas simetrias, resulta em simetria, logo podemos combinar duas operações e ainda continuar obtendo uma simetria. Por exemplo, vamos efetuar a reflexão b e em seguida a rotação a. Indicaremos essa transformação por: $b.a$, ver Figura 2.13. Essa operação combinada, tem o mesmo resultado de uma reflexão através da diagonal que liga o canto inferior esquerdo com o canto superior direito (diagonal secundária). Ver Figura 2.14.

Figura 2.13: Reflexão sobre o exo vertical e rotação de 90°



Fonte: Elaborada pelo autor

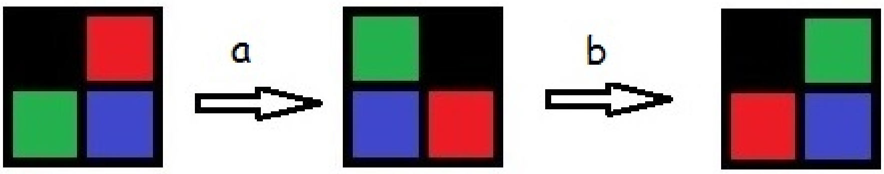
Figura 2.14: Reflexão sobre a diagonal



Fonte: Elaborada pelo autor

Nota-se também, que a ordem com que aplicamos as operações interfere no resultado final. Se ao invés de aplicarmos primeiro a reflexão e depois a rotação, fizermos o contrário, obteremos um resultado diferente do primeiro, ou seja, $a.b \neq b.a$, o que demonstra que a operação de rotação e reflexão em um quadrado não é uma operação comutativa. Ver Figuras 2.15 e 2.16.

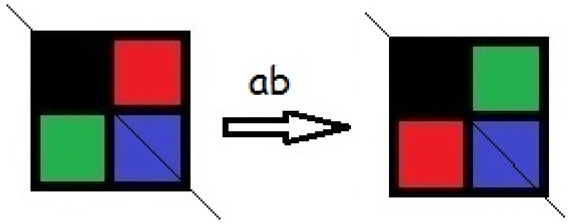
Figura 2.15: Rotação de 90° e reflexão sobre o eixo vertical



Fonte: Elaborada pelo autor

Temos então, 8 simetrias para um quadrado que poderão ser aplicadas as grades Sudoku. A tabela abaixo, mostra esses casos:

Figura 2.16: Reflexão sobre a diagonal



Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 2.1: Casos de simetria no quadrado

Nome	Simetria	Ordem
e	Elemento Neutro	1
a	Rotação de 90°	4
a^2	Rotação de 180°	2
a^3	Rotação de 270°	4
b	Reflexão no Eixo Vertical	2
ba	Reflexão na Diagonal Secundária	2
ba^2	Reflexão no Eixo Horizontal	2
ba^3	Reflexão na Diagonal Principal	2

Fonte: ROYLE, 2006, p. 3.

Esses 8 casos de simetria, representam todos os possíveis casos de simetria de um quadrado, pois qualquer outra forma pensada poderá ser obtida através de uma combinação dessas operações. Portanto, podemos afirmar que essas 8 operações formam um grupo.

Definição 2.1. *Um grupo é um conjunto G com uma operação binária $\bullet$ e um elemento especial $e \in G$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

- *Fechamento: Se x, $y \in G$, então $x \bullet y \in G$;*
- *Associativa: Para todo x, y, $z \in G$ temos $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$;*
- *Elemento Neutro: Para todo $x \in G$ temos $x \bullet e = e \bullet x = x$;*
- *Elemento Inverso: Para cada $x \in G$ existe um elemento $x^{-1} \in G$ tal que $x \bullet x^{-1} = x^{-1} \bullet x = e$.*

Normalmente, usamos xy para representar $x \bullet y$.

Definição 2.2. *Esse grupo contém 8 elementos e é chamado de grupo diedro de ordem 8, denotado por D8. Nesse grupo de simetrias, o inverso de um elemento qualquer, é a transformação que desfaz a transformação inicial, por exemplo: "O inverso de uma rotação de 90° é uma rotação de 270°". Um quebra cabeça Sudoku, pode ter algumas dessas operações de simetria ou então todas essas operações.*

Definição 2.3. *Um subconjunto H de um grupo G é chamado um subgrupo de G se os elementos de H juntos com uma operação binária $\bullet$ e o elemento de identidade 'e' de G formam um grupo.*

Teorema 2.1. *A ordem de um grupo é o número de elementos no grupo, portanto a ordem de um subgrupo deverá ser um divisor da ordem do grupo. Sabendo que D8 tem ordem 8, qualquer quebra cabeça Sudoku deve ter exatamente 1, 2, 4 ou 8 simetrias.*

2.4 Grupo Sudoku

Um grupo de soluções Sudoku, será formado por grades completas de Sudoku, obtidas através de manipulações simples como:

- Renomeação das entradas (trocar, por exemplo, todos os 1s por 2s);
- Trocar duas linhas ou colunas de blocos;
- Trocar duas linhas ou colunas dentro de uma faixa[1] ou pilha[2];
- Reflexão através da diagonal (transposição da matriz).

Essas manipulações, junto com o grupo de simetrias, irão gerar grades de Sudoku simétricas. Veremos que um Sudoku grau 2 (matriz 4×4) possui apenas duas órbitas de grupo; ou seja, um Sudoku grau 2, tem apenas duas soluções essencialmente distintas[3], enquanto um Sudoku grau 3 (matriz 9×9) terá 5.472.730.538 órbitas de grupo[4] [11], fato que torna o cálculo manual praticamente impossível de ser realizado.

Dois jogos são essencialmente os mesmos se eles estão na mesma órbita de grupo sob essas operações, isto é, se um puder ser transformado no outro através das operações listadas acima. E serão essencialmente diferentes se isso não acontecer.

2.5 Soluções de Keedwell

Anthony Donald Keedwell, atualmente é professor honorário senior da Surrey University - Inglaterra, onde atuou por mais de 60 anos. Podemos dizer que entre seus principais interesses de pesquisa estão a combinatória e os quadrados latinos. É autor do livro "Latin squares and their applications", lançado no ano de 1974 e reeditado em 2015, onde o autor propõe problemas relacionados aos quadrados latinos mutuamente ortogonais, sugere sua utilização em quadrados mágicos e em jogos de Sudoku.

Em seus estudos sobre as soluções Sudoku, ver [10], é proposto uma forma de gerar grades completas de soluções. Para isso, devemos utilizar como ponto de partida, uma matriz 3×3 que preenche o primeiro bloco da grade, e então efetuar algumas operações, permutando a posição de suas linhas e colunas.

[1] conjunto de 3 colunas

[2] conjunto de 3 linhas

[3] Soluções essencialmente diferentes não podem ser transformadas em outras através de operações simples (renomeação, trocas de linhas ou colunas, reflexão), não são simétricas.

[4] conjunto formado apenas com as soluções essencialmente diferentes.

Essas operações, nos permitem obter as matrizes que completam os demais blocos da grade Sudoku.

Dada qualquer matriz de ordem n^2, vamos identificar as localizações dos blocos n $\times$ n com o conjunto Z_n^2:

Tabela 2.2: Matriz de Keedwell

(0,0)	(0,1)	...	(0,n-2)	(0,n-1)
(1,0)	(1,1)	...	(1,n-2)	(1,n-1)
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
(n-1,0)	(n-1,1)	...	(n-1,n-2)	(n-1,n-1)

Fonte: LORCH, 2008, p. 151.

Vamos denotar α e β operadores de comutação nos n $\times$ n blocos K de modo que αK e βK sejam n $\times$ n blocos que satisfaçam:

- A i - ésima linha de αK é a (i + 1) - ésima linha de K mod n; e
- A j - ésima coluna de βK é a (j + 1) - ésima coluna de K mod n.

Definição 2.4. *Seja K uma matriz n $\times$ n composta por n^2 símbolos e M uma matriz de ordem n^2 cujas entradas serão obtidas a partir dos símbolos de K.*

- *Dizemos que M é uma matriz de Keedwell para K se para cada (i, j) $\in Z_n^2$ o (i,j)-ésimo bloco de M é $\alpha^{c_{ij}}\beta^{d_{ij}}$ K, para algum $(c_{ij}, d_{ij}) \in Z_n^2$ com $(c_{00}, d_{00}) = (0, 0)$.*
- *Dizemos que M é uma solução de Keedwell para K se M é tanto uma matriz de Keedwell para K e uma solução do Sudoku.*
- *Seja M uma matriz de Keedwell para K. A função $f_M : Z_n^2 \to Z_n^2$ definida por $(i, j) \to (c_{ij}, d_{ij})$ é chamada função exponencial correspondente a M.*
- *Seja M uma matriz de Keedwell (solução) para K, e suponha que f_M é um homomorfismo de Z_n. Então, M é chamada de matriz linear de Keedwell (solução), e f_M é representado pela matriz expoente.*

Obs.: Um exemplo de matriz expoente que podemos utilizar:

$$\begin{pmatrix} (0,0) & (1,1) & (2,2) \\ (0,1) & (1,2) & (2,0) \\ (0,2) & (1,0) & (2,1) \end{pmatrix}$$

Chamamos de matriz expoente, pois esses índices serão aplicados aos operadores α e β, indicando assim a quantidade de vezes que precisamos deslocar as linhas ou colunas da matriz original.

$$\begin{pmatrix} K & \alpha\beta K & \alpha^2\beta^2 K \\ \beta K & \alpha\beta^2 K & \alpha^2 K \\ \beta^2 K & \alpha K & \alpha^2\beta K \end{pmatrix}$$

Exemplo: Seja $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, então a matriz solução M, será dada por: (ver Figura 2.17)

Figura 2.17: Solução sudoku obtida através da regra de Keedwell

$$M = \begin{pmatrix} K & \alpha\beta K & \alpha^2\beta^2 K \\ \beta K & \alpha\beta^2 K & \alpha^2 K \\ \beta^2 K & \alpha K & \alpha^2\beta K \end{pmatrix} =$$

0	1	2	4	5	3	8	6	7
3	4	5	7	8	6	2	0	1
6	7	8	1	2	0	5	3	4
1	2	0	5	3	4	6	7	8
4	5	3	8	6	7	0	1	2
7	8	6	2	0	1	3	4	5
2	0	1	3	4	5	7	8	6
5	3	4	6	7	8	1	2	0
8	6	7	0	1	2	4	5	3

Fonte: LORCH, 2008, p. 152.

Teorema 2.2 (Keedwell 1)**.** *Sejam K e L quaisquer quadrados $r \times r$, onde cada um contenha os inteiros 1, 2, ... , r^2. Vamos denotar por α a operação que permuta as linhas de K (e L) de forma cíclica, de modo que a 2ª linha de K se torne a 1ª linha de αK, a 3ª linha de K se torne a 2ª linha de αK, e assim sucessivamente. Vamos denotar por β a operação semelhante aplicada às colunas. Então, cada um dos quadrados A e B mostrados na Figura 2.18 é um quadrado diagonal de Sudoku e os quadrados A e B são "quadrados latinos ortogonais".*

Demonstração: *Observamos que, no primeiro Sudoku, cada bloco abaixo da diagonal principal direita - esquerda, é obtido de seu antecessor, utilizando a operação β. Como a operação β substitui a diagonal principal direita - esquerda de K (ou $K\alpha^{r-1}$) pela diagonal quebrada abaixo dela, segue-se que a diagonal principal direita - esquerda do quadrado inteiro contém cada uma das diagonais quebradas de $K\alpha^{r-1}$ apenas uma vez. Ou seja, ela contém cada um dos inteiros 1, 2, ..., r^2 apenas uma vez. Assim todo Sudoku é semi diagonal direito. Uma vez que a operação α^{-1} substitui a diagonal direita - esquerda de L pela diagonal quebrada acima dela, isto é fácil de ver no segundo Sudoku, que também é semi diagonal direito.*

No primeiro Sudoku, cada bloco abaixo da diagonal esquerda - direita é obtido de seu antecessor pela operação $\alpha^2\beta$. Esta operação substitui a diagonal principal esquerda - direita de K pela diagonal quebrada abaixo dela, segue-se da forma descrita anteriormente, a diagonal esquerda - direita contém os inteiros 1, 2, ..., r^2 apenas uma vez. Assim todo Sudoku é semi diagonal esquerdo. Um argumento similar mostra que o segundo Sudoku é semi diagonal esquerdo. Isto prova que ambos Sudokus são quadrados latinos diagonais.

Figura 2.18: Aplicação das operações α e β

K	$K\alpha$	$K\alpha^2$	...	...	$K\alpha^{r-2}$	$K\alpha^{r-1}$
$K\alpha\beta$	$K\alpha^2\beta$	$K\alpha^3\beta$	...	...	$K\alpha^{r-1}\beta$	$K\beta$
$K\alpha^2\beta^2$	$K\alpha^3\beta^2$	$K\alpha^4\beta^2$	...	...	$K\beta^2$	$K\alpha\beta^2$
...	...	...	...	...	...	...
$K\alpha^{r-2}\beta^{r-2}$	$K\alpha^{r-1}\beta^{r-2}$	$K\beta^{r-2}$	...	...	$K\alpha^{r-4}\beta^{r-2}$	$K\alpha^{r-3}\beta^{r-2}$
$K\alpha^{r-1}\beta^{r-1}$	$K\beta^{r-2}$	$K\alpha\beta^{r-2}$	...	...	$K\alpha^{r-3}\beta^{r-1}$	$K\alpha^{r-2}\beta^{r-1}$

L	$L\alpha\beta$	$L\alpha^2\beta^2$	...	...	$L\alpha^{r-2}\beta^{r-2}$	$L\alpha^{r-1}\beta^{r-1}$
$L\beta$	$L\alpha\beta^2$	$L\alpha^2\beta^3$	...	...	$L\alpha^{r-2}\beta^{r-1}$	$L\alpha^{r-1}$
$L\beta^2$	$L\alpha\beta^3$	$L\alpha^2\beta^4$	...	...	$L\alpha^{r-2}$	$L\alpha^{r-1}\beta$
...	...	...	...	...	...	...
$L\beta^{r-2}$	$L\alpha\beta^{r-1}$	$L\alpha^2$	...	...	$L\alpha^{r-2}\beta^{r-4}$	$L\alpha^{r-1}\beta^{r-3}$
$L\beta^{r-1}$	$L\alpha$	$L\alpha^2\beta$	...	...	$L\alpha^{r-2}\beta^{r-3}$	$L\alpha^{r-1}\beta^{r-2}$

Fonte: KEEDWELL, 2007, p. 53.

Para mostrar que os dois Sudokus são quadrados latinos ortogonais, precisamos mostrar que cada inteiro do segundo Sudoku define as células de uma transversal do primeiro. Pela regularidade das construções, é suficiente verificar isto para apenas um número inteiro. De fato, o segundo Sudoku foi construído a partir de uma transversal "regular" do primeiro: ou seja, um que continha exatamente uma única célula de cada diagonal do primeiro e também uma célula de cada um dos blocos $r \times r$ do primeiro, garantindo assim que o segundo quadrado seja um quadrado latino diagonal.

2.6 Soluções Ortogonais

Depois de utilizarmos o método descrito acima e gerarmos uma solução Sudoku, vamos determinar um par ortogonal para tal solução, utilizando para isso, o método descrito em [12], onde o autor propõe transformar as diagonais da matriz inicial M (ver Figura 2.19), em linhas de uma nova matriz $\tilde{M}$, que queremos que seja uma solução Sudoku ortogonal a solução M inicial. Para isso vamos manter fixa a coluna mais a esquerda da matriz inicial. Observe a Figura 2.20 onde podemos ver a transformação sendo aplicada a M.

Figura 2.19: Solução sudoku

0	1	2	4	5	3	8	6	7
3	4	5	7	8	6	2	0	1
6	7	8	1	2	0	5	3	4
1	2	0	5	3	4	6	7	8
4	5	3	8	6	7	0	1	2
7	8	6	2	0	1	3	4	5
2	0	1	3	4	5	7	8	6
5	3	4	6	7	8	1	2	0
8	6	7	0	1	2	4	5	3

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 2.20: Solução ortogonal

0	4	8	3	7	2	6	1	5
3	7	2	6	1	5	0	4	8
6	1	5	0	4	8	3	7	2
1	5	6	4	8	0	7	2	3
4	8	0	7	2	3	1	5	6
7	2	3	1	5	6	4	8	0
2	3	7	5	6	1	8	0	4
5	6	1	8	0	4	2	3	7
8	0	4	2	3	7	5	6	1

Fonte: Elaborada pelo autor

2.7 Reduções

Sabendo que o número total de grades Sudoku possíveis foi calculado em aproximadamente $6,67 \times 10^{21}$, e para obter esse número, foi necessário o uso de algoritmos previamente preparados para essa finalidade e muitas horas de cálculos computacionais, em [7] o autor propõe algumas formas de reduzir a quantidade de grades a serem contadas facilitando o processo de contagem, para se economizar tempo computacional.

Tendo como ponto de partida a quantidade possível de formas para se completar as três linhas superiores, e sabendo que esse número já era grande demais, sendo necessário testar caso por caso, os autores em [7] buscaram maneiras de encontrar grades simétricas dentro desse conjunto, reduzindo assim o universo a ser pesquisado.

A partir do valor obtido para o bloco das três linhas superiores, foi proposto um processo de redução, no qual ficou determinado que existem apenas 44 classes de soluções essencialmente diferentes. Foram efetuadas reduções lexicográficas (ordem numérica), reduções por permutação dos blocos e dos elementos e reduções das colunas. Essas 44 classes, foram então manipuladas computacionalmente, obtendo assim as possíveis formas de se preencher as grades.

Por se tratar de um raciocínio complexo, onde o recurso principal é a ajuda computacional, vamos apenas mencionar os métodos utilizados em [8] e [18], mostrando aos alunos como um simples aumento na grade, pode aumentar significativamente o trabalho de contagem. Infelizmente, essas reduções não poderão ser efetuadas simplesmente com o uso do raciocínio combinatório, pois a distribuição dos elementos em linhas e colunas não acontecem de forma independente, inviabilizando a aplicação direta dos princípios de análise combinatória, sendo totalmente dependente do uso de computadores e de testes caso a caso.

Conforme citado anteriormente, as reduções não podem ser efetuadas utilizando apenas conceitos de análise combinatória, podemos até iniciar o processo contando permutações, mas tais operações não conferem com a manipulação computacional.

Como não podemos calcular manualmente as reduções efetuadas em [8], vamos analisar o caso onde existem elementos invertidos em algumas posições da grade. Observe a seguinte configuração para as três linhas superiores: a Figura 2.21 nos mostra uma forma para preenchermos o bloco superior.

Figura 2.21: Grade 1 - possível configuração do bloco superior

1	2	3	4	5	8	6	7	9
4	5	6	1	7	9	2	3	8
7	8	9	2	3	6	1	4	5

Fonte: FELGENHAUER, 2006, p. 19.

Vamos destacar a posição dos algarismos 8 e 9, ver Figura 2.22.

Figura 2.22: Grade 2 - destaque para os algarismos 8 e 9

1	2	3	4	5	8	6	7	9
4	5	6	1	7	9	2	3	8
7	8	9	2	3	6	1	4	5

Fonte: FELGENHAUER, 2006, p. 20.

Qualquer grade que completa o bloco acima, também irá completar o seguinte, ver Figura 2.23.

Figura 2.23: Grade 3 - algarismos 8 e 9 invertidos

1	2	3	4	5	9	6	7	8
4	5	6	1	7	8	2	3	9
7	8	9	2	3	6	1	4	5

Fonte: FELGENHAUER, 2006, p. 20.

Podemos aplicar esse mesmo processo para outros pares de números (ver Figura 2.24), reduzindo assim, a quantidade de grades.

Figura 2.24: Grade 3 - outros algarismos invertidos

1	2	3	4	6	7	5	8	9
4	5	6	8	1	9	3	2	7
7	8	9	2	5	3	1	4	6

Fonte: FELGENHAUER, 2006, p. 20.

Depois de realizada diversas buscas, através de cálculo computacional, o número de classes foi finalmente reduzido ao máximo, chegando ao valor de 44 classes possíveis para as três linhas superiores. Bastava então determinar o número de formas diferentes para se completar o restante da grade. Na Figura 2.25, podemos visualizar a quantidade possível de modos de se preencher cada uma das 44 grades.

Figura 2.25: Formas de preencher as 44 classes

Número	Coluna 4	Coluna 5	Coluna 6	Coluna 7	Coluna 8	Coluna 9	Número de Configurações Equivalentes	Número de grades completas
1	1,2,4	3,5,7	6,8,9	1,2,5	3,6,7	4,8,9	2484	97961464
2	1,2,4	3,5,7	6,8,9	1,2,5	3,6,8	4,7,9	2592	97539392
3	1,2,4	3,5,7	6,8,9	1,2,5	3,6,9	4,7,8	1296	98369440
4	1,2,4	3,5,7	6,8,9	1,2,5	3,7,8	4,6,9	1512	97910032
5	1,2,4	3,5,7	6,8,9	1,2,6	3,4,8	5,7,9	2808	96482296
6	1,2,4	3,5,7	6,8,9	1,2,6	3,4,9	5,7,8	684	97549160
7	1,2,4	3,5,7	6,8,9	1,2,6	3,5,7	4,8,9	1512	97287008
8	1,2,4	3,5,7	6,8,9	1,2,6	3,5,8	4,7,9	1944	97416016
9	1,2,4	3,5,7	6,8,9	1,2,6	3,5,9	4,7,8	2052	97477096
10	1,2,4	3,5,7	6,8,9	1,2,7	3,4,8	5,6,9	288	96807424
11	1,2,4	3,5,7	6,8,9	1,2,7	3,5,8	4,6,9	864	98119872
12	1,2,4	3,5,7	6,8,9	1,2,8	3,4,7	5,6,9	1188	98371664
13	1,2,4	3,5,7	6,8,9	1,2,8	3,5,7	4,6,9	648	98128064
14	1,2,4	3,5,7	6,8,9	1,2,8	3,6,9	4,5,7	2592	98733568
15	1,2,4	3,5,7	6,8,9	1,3,5	2,6,9	4,7,8	648	97455648
16	1,2,4	3,5,7	6,8,9	1,3,5	2,7,8	4,6,9	360	97372400
17	1,2,4	3,5,7	6,8,9	1,3,6	2,5,9	4,7,8	3240	97116296
18	1,2,4	3,5,7	6,8,9	1,3,8	2,6,7	4,5,9	540	95596592
19	1,2,4	3,5,7	6,8,9	1,3,8	2,6,9	4,5,7	756	97346960
20	1,2,4	3,5,7	6,8,9	1,4,5	2,6,9	3,7,8	324	97714592
21	1,2,4	3,5,7	6,8,9	1,4,5	2,7,8	3,6,9	432	97992064
22	1,2,4	3,5,7	6,8,9	1,4,6	2,3,9	5,7,8	756	98153104
23	1,2,4	3,5,7	6,8,9	1,4,7	2,6,9	3,5,8	864	98733184
24	1,2,4	3,5,7	6,8,9	1,4,8	2,6,9	3,5,7	108	98048704
25	1,2,4	3,5,7	6,8,9	1,5,6	2,3,9	4,7,8	756	96702240
26	1,2,4	3,5,8	6,7,9	1,2,5	3,6,8	4,7,9	516	98950072
27	1,2,4	3,5,8	6,7,9	1,2,6	3,4,8	5,7,9	576	97685328
28	1,2,4	3,5,8	6,7,9	1,2,7	3,5,8	4,6,9	432	98784768
29	1,2,4	3,5,8	6,7,9	1,3,7	2,6,9	4,5,8	324	98493856
30	1,2,4	3,5,8	6,7,9	1,4,7	2,5,8	3,6,9	72	100231616
31	1,2,4	3,5,8	6,7,9	1,4,7	2,6,9	3,7,8	216	99525184
32	1,2,4	3,5,8	6,7,9	1,5,6	2,3,7	4,8,9	252	96100688
33	1,2,4	3,5,9	6,7,8	1,2,7	3,5,6	4,8,9	288	96631520
34	1,2,4	3,5,9	6,7,8	1,2,7	3,5,9	4,6,8	864	97756224
35	1,2,4	3,5,9	6,7,8	1,4,7	2,5,8	3,6,9	216	99083712
36	1,2,4	3,5,9	6,7,8	1,4,7	2,6,8	3,5,9	432	98875264
37	1,2,4	3,6,9	5,7,8	1,2,5	3,6,9	4,7,8	216	102047904
38	1,2,4	3,6,9	5,7,8	1,2,7	3,6,9	4,5,8	144	101131392
39	1,2,4	3,6,9	5,7,8	1,3,5	2,6,7	4,8,9	324	96380896
40	1,2,4	3,6,9	5,7,8	1,4,7	2,5,8	3,6,9	108	102543168
41	1,2,4	3,7,9	5,6,8	1,4,6	2,3,9	5,7,8	12	99258880
42	1,2,6	3,4,8	5,7,9	1,3,5	2,4,9	6,7,8	20	94888576
43	1,2,6	3,7,8	4,5,9	1,4,7	2,5,8	3,6,9	24	97282720
44	1,4,7	2,5,8	3,6,9	1,4,7	2,5,8	3,6,9	4	108374976

Fonte: Disponível em: <http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/ed44.html> Acesso em: 5 out. 2017.

Nesse ponto, foi necessário a utilização de um programa de backtracking [5], para completar as grades. O uso de programas de backtracking inviabiliza a contagem manual, pois esses programas permitem fazer o preenchimento de uma grade supondo

[5] Programa de computador que executa uma varredura completa de uma grade de Sudoku, utilizando “tentativa e erro”, que ao encontrar um valor repetido retorna ao ponto inicial, substitui o valor utilizado e inicia o processo novamente.

alguns valores como corretos e retornar ao ponto de partida após encontrar algum erro, tal fato torna esse processo humanamente impossível.

Para realizar as reduções necessárias que facilitaram o processo de contagem das grades, Felgenhauer e Russell, escreveram programas (utilizando as linguagens C, C++ e Python) capazes de realizar as tarefas necessárias. Podemos encontrar no site dos autores os algoritmos utilizados para gerar os programas. Todos os programas utilizados, com as listas dos algoritmos encontram-se disponíveis nos sites abaixo:

- http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/sudoku_equiv.cc, o programa utilizado para reduzir as classes de 36288 para 71.
- http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/sudoku_verify.py, o programa utilizado para verificar essas classes.
- http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/equiv.c, o programa escrito por Ed Russell, que verifica as 44 classes de equivalência.

Para finalizar o processo e determinar o total de grades possíveis, precisamos multiplicar os valores encontrados nas duas últimas colunas da tabela da Figura 2.25. Após essa multiplicação, devemos ainda somar os valores encontrados e multiplicar por $9! \times 1296 \times 4 = 1.881.169.920$.

Foi obtido então, um total de: $6.670.903.752.021.072.936.960 \approx 6,671 \times 10^{21}$.

2.8 O Problema do Número Mínimo de Entradas

Um Sudoku para ser considerado válido, deve partir de algumas entradas ou dados iniciais e ser finalizado de forma única, ou seja, deve permitir uma única solução; caso contrário ele não será válido. Nos jornais e revistas os jogos trazem em torno de 25 números como dados iniciais, e a medida que diminuímos esse número o nível de dificuldade para completá-lo aumenta [14]. Mas devemos tomar cuidado com essa diminuição dos dados iniciais para que o nosso jogo mantenha a solução única.

Entre as várias questões que podem ser feitas sobre o Sudoku, vamos citar o "problema do número mínimo de entradas ou dados iniciais". Atualmente o menor número possível de dados iniciais que levam a uma solução única é 17, ver Figura 2.26, entretanto vários pesquisadores tem analisado possibilidades de se determinar um jogo válido[6] com 16 entradas.

[6] Jogo Válido, é aquele que permite uma solução única.

Figura 2.26: Sudoku com 17 pistas e solução única

			8		1			
							4	3
5								
				7		8		
						1		
	2			3				
6							7	5
		3	4					
			2			6		

2	3	7	8	4	1	5	6	9
1	8	6	7	9	5	2	4	3
5	9	4	3	2	6	7	1	8
3	1	5	6	7	4	8	9	2
4	6	9	5	8	2	1	3	7
7	2	8	1	3	9	4	5	6
6	4	2	9	1	8	3	7	5
8	5	3	4	6	7	9	2	1
9	7	1	2	5	3	6	8	4

Fonte: MARTINS, 2012, p. 58.

É muito fácil concluir que um Sudoku com 7 entradas terá sempre múltiplas soluções, pois os dois números faltantes nos dados iniciais podem ser trocados entre si permitindo diversas soluções. O mesmo raciocínio já não pode ser utilizado para um Sudoku com 8 entradas [14], dificultando a demonstração.

Gary McGuire, Bastian Tugemann, Gilles Civario, realizaram uma pesquisa durante um ano, no Centro Irlandês de Computação de Alto Nível (ICHEC), testando milhões de jogos a procura de um jogo válido contendo 16 entradas [15]. Nesse teste foram utilizados novos algoritmos e supercomputadores, em um trabalho que consumiu mais de 7 milhões de horas de trabalho computacional [14].

Como não encontraram tal jogo, conjecturaram que ele "não existe", pois se existisse eles teriam encontrado [15]. Abaixo, podemos ver um exemplo de Sudoku com 16 entradas e que permite duas soluções, ver Figura 2.27.

Figura 2.27: Sudoku com 16 pistas e duas soluções

5		2				4		
			7	1				3
					4	6		
	7		2					
	1							
6					2			
				3			1	
4								

5	6	2	3	89	98	4	7	1
89	4	98	7	1	6	2	5	3
1	3	7	4	2	5	89	98	6
3	5	89	1	98	4	6	2	7
98	7	4	2	6	3	1	89	5
2	1	6	89	5	7	3	4	98
6	98	1	5	4	2	7	3	89
7	2	5	6	3	89	98	1	4
4	89	3	98	7	1	5	6	2

Fonte: MARTINS, 2012, p. 58.

Sendo a afirmação de que "não existe um jogo válido com 16 entradas", apenas uma conjectura baseada na verificação de diversos casos, pode-se afirmar então que ainda existe um longo caminho a ser percorrido na busca por uma demonstração desse fato. Mesmo sabendo que para se solucionar um Sudoku, o jogador não necessita de conhecimentos matemáticos, o jogo propõe diversos problemas interessantes para serem solucionados.

A solução do problema oposto ao número mínimo de dados iniciais é bem conhecida: 77, e de fato, é fácil ver que com 78, 79 e 80 dados iniciais, existindo solução, está será única, mas não se pode garantir que existe uma única solução quando temos 77 pistas, a Figura 2.28 mostra um exemplo de Sudoku com 77 dados iniciais e duas soluções.

Figura 2.28: Sudoku com 77 pistas e duas soluções

		3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
		4	3	9	8	5	6	7
8	6	5	2	7	1	3	9	4
9	3	7	6	4	5	8	1	2
3	4	1	8	6	2	9	7	5
5	7	2	9	1	4	6	3	8
6	9	8	5	3	7	2	4	1

$^{1}2$	$^{2}1$	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
$^{2}1$	$^{1}2$	4	3	9	8	5	6	7
8	6	5	2	7	1	3	9	4
9	3	7	6	4	5	8	1	2
3	4	1	8	6	2	9	7	5
5	7	2	9	1	4	6	3	8
6	9	8	5	3	7	2	4	1

Fonte: MARTINS, 2012, p. 61.

Como já foi falado anteriormente, muitos Sudokus possuem simetria de rotação. No caso de uma rotação de 180° graus da grade, teremos um novo jogo com um padrão semelhante ao anterior na localização dos dados iniciais, e podemos então propor, a seguinte questão: qual será o número mínimo de dados iniciais para Sudokus simétricos?

Mais uma vez, não existe resposta e nem demonstração para tal questão, e abre-se espaço para mais uma conjectura, afirmando que esse número seja 18, fornecendo aos pesquisadores outra área de estudo. Na Figura 2.29, temos um Sudoku rotacionalmente simétrico.

Figura 2.29: Sudoku rotacionalmente simétrico e 18 pistas

8								
				6			3	
1		2	4					
5					7			
	3						6	
			1					2
					5	2		1
	8			7				
								4

					4			8
				6	9			
							1	3
		8			3			
		4				6		
			5			2		
2	9							
			1	4				
7			2					

Fonte: MARTINS, 2012, p. 62.

3 O caso 4×4

Tendo como objetivo explorar conceitos de análise combinatória, e compreender as ideias utilizadas por Felgenhauer e Jarvis para calcular o número de grades de Sudokus 9×9, e sabendo que trata-se de um processo complicado e um resultado gigantesco, vamos iniciar nosso trabalho com uma grade 4×4, para explorar os conhecimentos prévios dos alunos no cálculo de agrupamentos, introduzir e formalizar conceitos de análise combinatória, além de apresentar o Sudoku como um jogo agradável que proporciona ao solucionador momentos de prazer, além de desenvolver o raciocínio, ajudando a sistematizar estratégias para solucionar problemas

A principal vantagem de utilizar a grade 4×4, é poder trabalhar com um número reduzido de casos, onde podemos verificar os resultados mais rapidamente, tornando o processo mais fácil de ser compreendido e manipulado pelos alunos, além de explorar, em escala reduzida, os princípios utilizados na construção do caso 9×9.

Buscamos, mostrar aos alunos que seus conhecimentos prévios são importantes na resolução de problemas matemáticos, e que a ampliação e organização desses conhecimentos faz-se necessário.

Divididos em grupos e com o auxílio dos colegas, os alunos serão desafiados por algumas atividades para que possam aplicar conceitos do cálculo de contagem em agrupamentos. A participação dos colegas nessa etapa é fator primordial para auxiliar no desenvolvimento do raciocínio.

3.1 Organização das Atividades Propostas

Em primeiro momento os alunos serão organizados em grupos com 4 pessoas (Grupo de Trabalho), grupo esse que será mantido durante todo o desenvolvimento das atividades, e serão orientados a resolverem algumas situações relacionadas ao tema Sudoku.

Atividade 1
Etapa 1

Nessa etapa iremos descobrir, através de algumas questões simples, o grau de conhecimento dos alunos quanto ao Sudoku e sua resolução. Será proposto ao grupo de trabalho que respondam as questões abaixo (por escrito) e em seguida será feita uma apresentação das respostas de cada grupo. Durante essa apresentação, iremos aproveitar para discutir essas ideias com os alunos quanto ao jogo e sua regra.

- Você conhece o Sudoku?
- Já jogou ou tentou jogar alguma vez? Conseguiu completar o jogo?

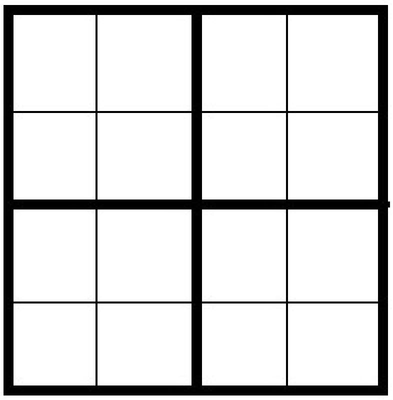
- Você tem ideia de quantos jogos diferentes existem?
- Quais habilidades você considera que sejam importantes na resolução de um Sudoku?
- Você considera que saber Matemática ajuda na busca da solução do jogo? Comente algumas habilidades que você julga importante na solução de um Sudoku.

Etapa 2

Após finalizada a etapa 1, os alunos (organizados em grupos) irão receber uma grade 4×4 (conforme modelo da Figura 3.1), onde será proposto o seu preenchimento completo, utilizando 4 símbolos diferentes, de modo que respeitem a "Regra Única"[1], isto é, não haver repetição de símbolos em nenhuma linha, coluna e bloco 2×2.

Com essa atividade, visamos mostrar aos alunos que será possível preencher a grade de várias maneiras diferentes, ou seja, uma grade totalmente vazia poderá ser preenchida de muitas formas, aceitando diversas soluções.

Figura 3.1: Grade completamente vazia



Fonte: Elaborada pelo autor

Para evitar que os alunos de um mesmo grupo copiem as grades preenchidas uns dos outros, obtendo assim todos a mesma solução (o que não é a proposta da atividade), será solicitado que cada aluno preencha sua grade com elementos diferentes. Assim, o aluno 1 irá preencher a grade utilizando os algarismos 1, 2, 3 e 4; o aluno 2 irá preencher utilizando as letras A, B, C e D; o aluno 3 irá preencher utilizando os símbolos $+$, $\%$, $*$ e $\#$; e o aluno 4 irá preencher utilizando as letras gregas $\propto$, β, μ, π (ver Figuras 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5).

[1] Cada símbolo deve aparecer uma única vez nas linhas, colunas e blocos

Figura 3.2: Exemplo de grade preenchida pelo aluno 1

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 3.3: Exemplo de grade preenchida pelo aluno 2

A	B	C	D
D	C	B	A
B	D	A	C
C	A	D	B

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 3.4: Exemplo de grade preenchida pelo aluno 3

$*$	$+$	%	#
%	#	$*$	$+$
#	$*$	$+$	%
$+$	%	#	$*$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 3.5: Exemplo de grade preenchida pelo aluno 4

β	α	π	μ
π	μ	β	α
α	β	μ	π
μ	π	α	β

Fonte: Elaborada pelo autor

Etapa 3

Após completar as respectivas grades e anotar a solução encontrada, os alunos irão trocar suas folhas de atividades entre os grupos, e solicitar ao colega que verifique se sua resposta está certa ou não (obedece a “Regra Única”).

O aluno do grupo 1 que preencheu a grade com algarismos, troca sua atividade com um aluno de outro grupo que também tenha preenchido sua grade com algarismos, e assim, sucessivamente. Nesse ponto, destaca-se a importância da comparação entre as soluções obtidas, encontrar possíveis erros e aceitar que existem diferentes possibilidades para preencher a grade.

O fato interessante dessa parte é a discussão sobre a existência de diversas soluções possíveis para o problema, já que nenhuma entrada inicial foi fornecida, o que poderia levar o problema a ter uma solução única. Nesta etapa, esperamos que através de questionamentos e discussões entre eles, os alunos possam concluir que exista diferentes formas de solucionar o problema proposto.

De acordo com [2],

> “[...]os alunos chegam até as salas de aula de posse de diversos conhecimentos e informações, práticas utilizadas em seu dia a dia, e cabe ao professor fazer uma ligação entre esses conhecimentos e os “saberes” matemáticos. O que queremos nesse ponto é justamente explorar o uso dessas habilidades de cada aluno e utilizá-las de uma forma mais organizada e respeitando regras básicas”.

Etapa 4

Nesta etapa, vamos analisar o fato de utilizarmos, algarismos, letras, símbolos e letras gregas. Iremos questionar os alunos quanto ao fato de utilizar elementos diferentes para preencher as grades, será que isso interfere nas soluções encontradas?

Para responder essa questão, os alunos irão novamente trocar suas grades com seus colegas, agora dentro de um mesmo grupo e será proposto “traduzir” a grade de seu colega para a linguagem de cada um, ou seja, quem completou a grade com algarismo irá receber de seu colega, uma grade com letras, símbolos ou letras gregas e deverá transcrevê-la utilizando algarismos.

Em um primeiro momento, os alunos devem simplesmente elaborar uma forma de fazer essa correspondência (por exemplo, colocar o algarismo 1 no lugar da letra A, colocar o 2 no lugar do B, colocar o 3 no lugar do C e colocar o 4 no lugar do D). Essa transformação também poderá ser feita de outra forma.

Feito isso, os alunos poderão comparar a sua solução obtida construída de acordo com o seu raciocínio (solução própria), com a solução “transformada” de seu colega. E poderão responder se essas soluções são iguais ou não.

Na tabela à esquerda da Figura 3.6, temos um exemplo de preenchimento inicial para a grade, feito com letras e em seguida, sua “transformação” para o sistema preenchido com algarismos (tabela à direita). Vamos verificar, se a solução “transformada” está igual a solução inicial do aluno que preencheu a tabela com algarismos. Na Figura 3.7, podemos ver essa comparação.

Figura 3.6: Grade preenchida com letras e transformada em algarismos

A	B	C	D
D	C	B	A
B	D	A	C
C	A	D	B

1	2	3	4
4	3	2	1
2	4	1	3
3	1	4	2

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 3.7: Comparação entre as grades de algarismos (nota-se algumas diferenças)

1	2	3	4
4	3	2	1
2	4	1	3
3	1	4	2

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

Fonte: Elaborada pelo autor

Algumas questões irão nortear essa parte da atividade:

- A grade "transformada" ficou igual a minha grade?
- Essa nova grade, respeita a "Regra Única"?
- O sistema adotado para "transformar" as grades é único? Mostre uma nova maneira de "transformar" as grades.
- Seria possível deixar as duas grades iguais? Como você faria isso?

A importância dessa atividade, é mostrar que uma grade poderá ser preenchida de diferentes maneiras, aproveitando para introduzir a próxima atividade que será determinar o número total dessas possibilidades.

3.2 Contando as Possibilidades

Atividade 2

Conforme visto na atividade anterior, uma grade Shidoku, sem nenhum dado inicial, poderá ser preenchida de diversas formas. Passaremos então ao cálculo da quantidade total de possibilidades para completar uma grade 4×4.

Iremos propor aos grupos de trabalho que estabeleçam uma estimativa para a quantidade de grades 4×4 completas. Será necessário que o grupo discuta entre seus componentes e preparem um argumento para justificar o número indicado como resposta, e em seguida, apresente aos demais grupos.

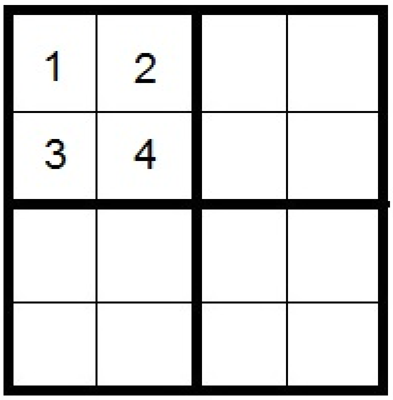
Com base nas respostas dos alunos, será possível determinar o conhecimento deles sobre conceitos de análise combinatória, e o nível de raciocínio lógico dos alunos, também poderemos verificar a utilização de habilidades importantes para a construção do raciocínio combinatório (princípio fundamental da contagem), assim teremos subsídios para fazer intervenções necessárias e atingir o objetivo de desenvolver o raciocínio combinatório.

3.3 Método para Contar

Depois de analisado os argumentos dos alunos, vamos desenvolver algumas atividades simples para introduzir o princípio multiplicativo, apresentar alguns tópicos para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, e desafiar os alunos a utilizar essa nova ferramenta para solucionar o problema. E, então passaremos a contagem das grades 4×4.

Para determinar a quantidade total de grades 4×4 completas, vamos partir de uma grade, onde o bloco superior esquerdo, será preenchido com os algarismos: 1, 2, 3 e 4 no formato padrão apresentado na Figura 3.8, mantendo esse formato fixo e variando os demais elementos.

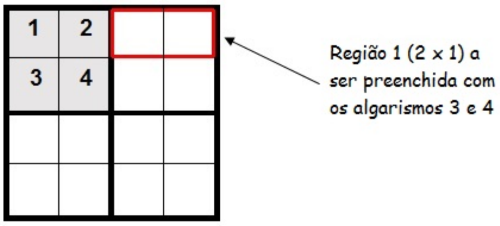
Figura 3.8: Grade 4×4 no formato padrão



Fonte: Elaborada pelo autor

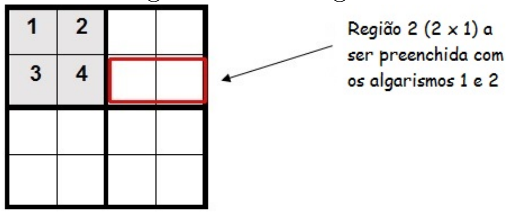
Mantendo fixo o bloco superior esquerdo no formato da figura, determinamos 6 regiões 2×1 para serem preenchidas com dois algarismos disponíveis (por exemplo: a linha 1 poderá ser preenchida com os algarismos 3 e 4 (ver Figura 3.9), a linha 2 poderá ser preenchida com os algarismos 1 e 2 (ver Figura 3.10), a coluna 1 poderá ser preenchida com os algarismos 2 e 4 (ver Figura 3.11), a coluna 2 poderá ser preenchida com os algarismos 1 e 3 (ver Figura 3.12), enquanto o bloco inferior direito dependerá da ordem dos algarismos que forem colocados anteriormente nas linhas e colunas (ver Figuras 3.13 e 3.14).

Figura 3.9: Região 1



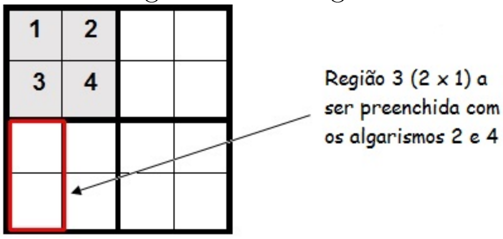
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 3.10: Região 2



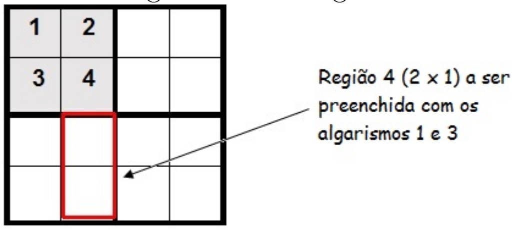
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 3.11: Região 3



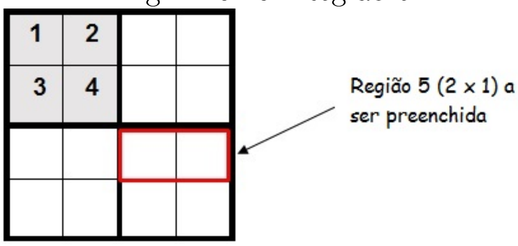
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 3.12: Região 4



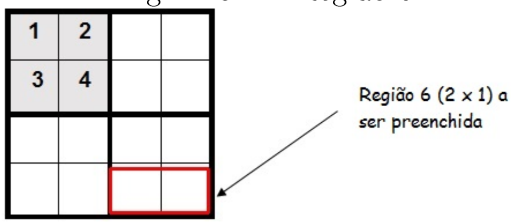
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 3.13: Região 5



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 3.14: Região 6



Fonte: Elaborada pelo autor

Podemos facilmente determinar o número X de maneiras de preencher essa grade. Cada região 2×1, poderá ser preenchida de duas maneiras diferentes, destacando a importância da ordem entre os algarismos na construção de uma solução (por exemplo, 1 e 2 é diferente de 2 e 1, 3 e 4 é diferente de 4 e 3). Como nossa grade é formada por 6 regiões 2×1 indicadas nas figuras anteriores (Figuras de 3.9 a 3.14), podemos concluir que o número de diferentes maneiras para preencher essa grade será dada por:

$$X = 6 \cdot 2!$$

$$X = 12$$

Temos então, 12 formas diferentes de preencher a grade 4×4, mantendo o bloco superior esquerdo no formato padrão mostrado na Figura 3.8.

Conforme citado acima, a ordem dos algarismos dentro de uma grade é um fator importante na determinação da quantidade total, e como mantemos o bloco superior esquerdo no formato padrão da Figura 3.8, vamos agora alterar a ordem desses algarismos e então determinar a quantidade total dessas grades.

Vamos realizar uma operação denominada “renomeação” dos algarismos, ou seja, vamos fazer uma permutação entre eles (por exemplo: o 1 irá permutar com o 2; o 2 irá permutar com o 3; o 3 irá permutar com o 4; e o 4 irá permutar com o 1), como temos 4 algarismos disponíveis e 4 lugares dentro de um bloco da grade, podemos determinar que essas “renomeações” geram em nossa grade inicial uma permutação de 4, assim podemos determinar que o número total (N), de grades Shidoku será dado por:

$$N = 6 \cdot 2! \cdot 4!$$

$$N = 288$$

Podemos então, afirmar que existem 288 grades completas que são soluções de um Shidoku.

3.4 Soluções Essencialmente Diferentes

Determinado em primeiro momento que existem 288 grades 4×4 completas, passamos a pensar quantas dessas grades são essencialmente diferentes.

Definição 3.1. *Uma grade é dita essencialmente diferente, se não puder ser transformada em outra através de operações simples, como: renomeações entre os algarismos, permutações entre linhas, colunas ou blocos, rotações, simetrias e reflexões. Caso contrário elas serão essencialmente as mesmas.*

Na Figura 3.15 abaixo podemos ver exemplos de grades essencialmente iguais (simétricas) .

Figura 3.15: Grades simétricas (a segunda é uma reflexão da primeira)

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

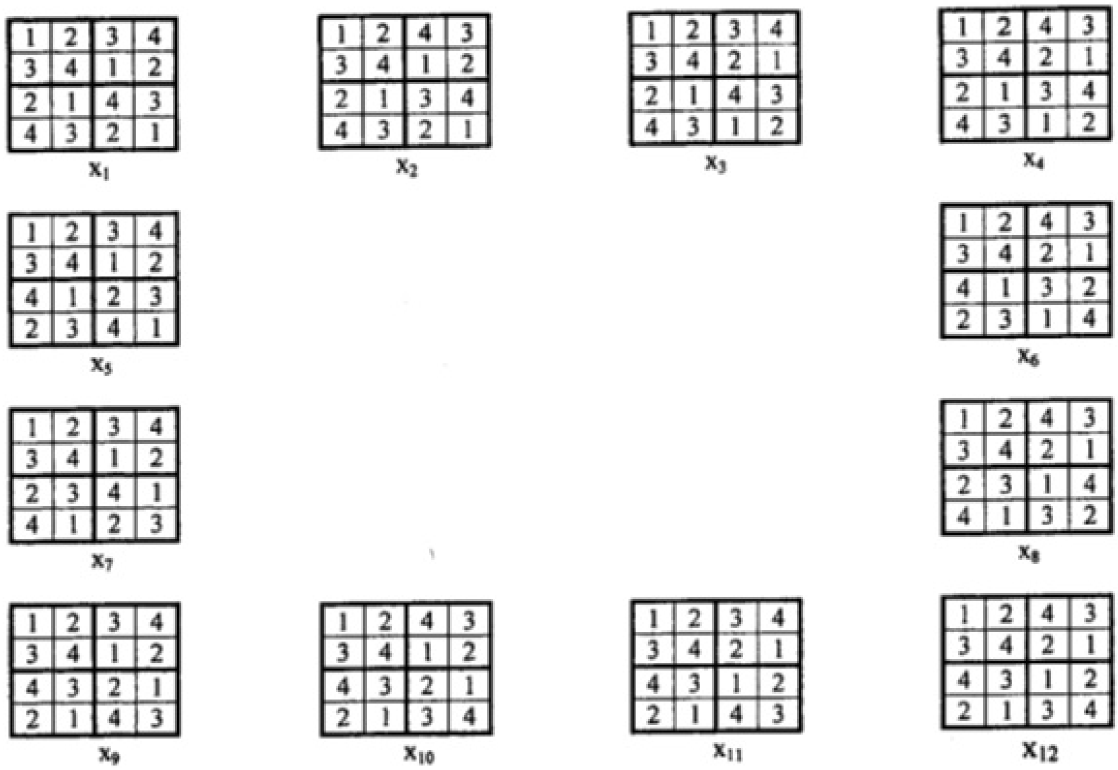
1	3	2	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	2	3	1

Fonte: Elaborada pelo autor

Para determinar o número de grades essencialmente diferentes, tomamos como ponto de partida, os 12 quebra cabeças que podemos formar mantendo o bloco superior esquerdo fixo, em formato padrão. Nomeamos cada solução obtida como sendo: $x_1, x_2, ..., x_{12}$.

Observação: Conforme calculado anteriormente, sabemos que existem apenas 12 maneiras diferentes de preencher essa grade. Na Figura 3.16, podemos ver as 12 soluções obtidas, e como sendo esse um número relativamente pequeno, podemos escrever todas essas possibilidades. Essa atividade será impossível de ser feita manualmente para um Sudoku de grau 3 (matriz 9×9).

Figura 3.16: Doze grades com bloco superior no formato padrão



Fonte: LORCH, 2008, p. 152.

Utilizando as operações básicas:

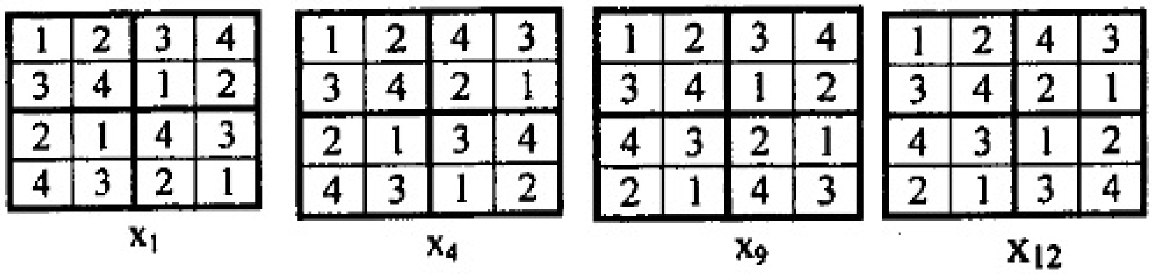
- Renomear os algarismos;
- Trocar as linhas (1 e 2) ou (3 e 4);
- Trocar as colunas (1 e 2) ou (3 e 4);
- Efetuar uma rotação horária de 90°;
- Efetuar uma reflexão através da diagonal;
- Trocar dois blocos superiores com os dois inferiores;
- Trocar dois blocos à direita com os dois à esquerda.

Vamos determinar se os quebra cabeças são essencialmente os mesmos, sempre que pudermos transformar uma grade em outra apenas realizando essas operações. Inicialmente, separamos os 12 quebra cabeças em três grupos, segundo [11].

Grupo 1

Nesse grupo estão os elementos x_1, x_4, x_9 e x_{12}, onde notamos as operações realizadas. Entre x_1 e x_4, podemos observar a troca entre as colunas 3 e 4. Entre x_1 e x_9, podemos observar a troca entre as linhas 3 e 4. E, entre x_1 e x_{12}, podemos perceber a troca simultânea das linhas 3 e 4 com as colunas 3 e 4. Portanto, podemos afirmar que esses quatro elementos são simétricos. A Figura 3.17, ilustra as grades do grupo 1.

Figura 3.17: Grades do grupo 1

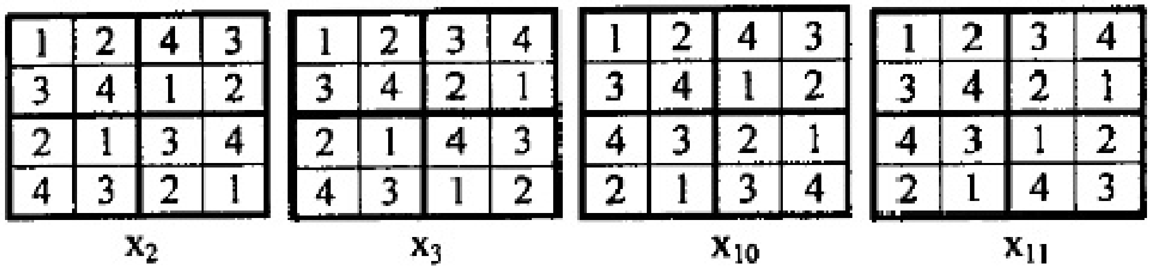


Fonte: LORCH, 2008, p. 152, adaptada pelo autor.

Grupo 2

Nesse grupo estão os elementos x_2, x_3, x_{10} e x_{11}, onde também notamos as operações realizadas. Entre x_2 e x_3, podemos observar a troca entre as colunas 3 e 4. Entre x_2 e x_{10}, podemos observar a troca entre as linhas 3 e 4. E, entre x_2 e x_{11}, podemos observar a troca simultânea das linhas 3 e 4 com as colunas 3 e 4. Portanto, podemos afirmar que esses quatro elementos são simétricos. A Figura 3.18, ilustra as grades do grupo 2.

Figura 3.18: Grades do grupo 2



Fonte: LORCH, 2008, p. 152, adaptada pelo autor.

Grupo 3

Finalmente, nesse grupo, estão os elementos x_5, x_6, x_7 e x_8, e analisando-os podemos observar a ocorrência das mesmas operações realizada nos grupos anteriores. A Figura 3.19, ilustra as grades do grupo 3.

Figura 3.19: Grades do grupo 3

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

x_5

1	2	4	3
3	4	2	1
4	1	3	2
2	3	1	4

x_6

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

x_7

1	2	4	3
3	4	2	1
2	3	1	4
4	1	3	2

x_8

Fonte: LORCH, 2008, p. 152, adaptada pelo autor.

Portanto, podemos afirmar que existem no máximo 3 grades essencialmente diferentes (órbitas de grupo) entre esses doze elementos. Precisamos agora, analisar um elemento de cada grupo para sabermos se podemos transformar uma grade em outra.

Vamos tomar os elementos x_1, x_2 e x_5, como representante dos grupos 1, 2 e 3, respectivamente. Como estamos trabalhando com uma quantidade pequena de elementos, através de tentativa e erro, podemos verificar que x_2 (pertencente ao grupo 2), poderá ser transformada em x_7 (pertencente ao grupo 3) através de uma rotação, seguida de uma renomeação dos algarismos. Podemos então concluir que a grade x_2 é simétrica a grade x_5, e assim reduzimos nossos grupos a apenas 2. Resta agora analisar as grades x_1 e x_2 e verificarmos se elas são ou não simétricas.

Para chegarmos a essa conclusão, vamos utilizar uma propriedade que está presente em alguns quebra cabeças: "Um quebra cabeça possui a propriedade P, se cada linha nos blocos II, III e IV é uma permutação de uma linha do bloco I, e cada coluna nos blocos II, III e IV é uma permutação de uma coluna do bloco I", segundo [11].

Nas Figuras 3.20 e 3.21, ilustramos duas grades, a primeira que possui a propriedade P e a segunda que não possui a propriedade P descrita acima.

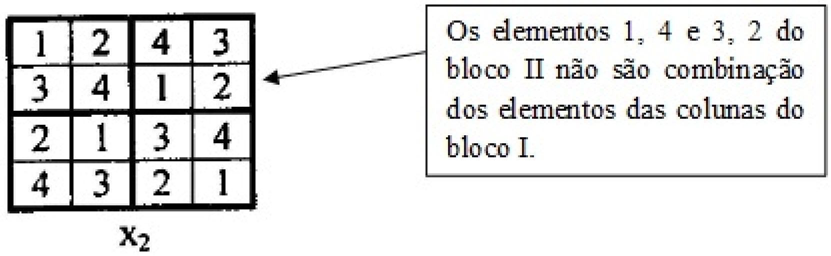
Figura 3.20: Grade do grupo 1 (possui a propriedade P)

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

x_1

Fonte: LORCH, 2008, p. 152.

Figura 3.21: Grade do grupo 2 (não possui a propriedade P)



Fonte: LORCH, 2008, p. 152.

Como x_1 possui a propriedade P e x_2 não possui, podemos afirmar que as grades do grupo 1 não são simétricas às grades do grupo 2, não podendo ser transformadas umas nas outras e, portanto, podemos concluir que existem apenas duas soluções essencialmente diferentes em nossas grades 4×4.

4 O caso 9×9

Encerrada a atividade inicial, onde foi possível conhecer, discutir e utilizar um método para calcular a quantidade de grades 4×4 de um Shidoku, vamos utilizar um raciocínio semelhante, para discutir os procedimentos feitos em [7] em sua experiência, e assim verificar seus cálculos, obtendo a quantidade de grades de um Sudoku grau 3 (matriz 9×9).

Esperamos que os alunos, façam uma estimativa inicial para essa quantidade, e que sejam induzidos, pelo caso anterior, a apresentar uma resposta bem distante do valor real, afinal de contas encontramos apenas 288 casos que acabaram sendo reduzidos a apenas duas soluções essencialmente diferentes.

Conforme citado anteriormente, sabemos que esse número é gigantesco, aproximadamente $6,67 \times 10^{21}$ (número difícil até para se imaginar), para se ter uma ideia da grandeza desse número, vamos supor que cada um dos 7 bilhões de habitantes da terra conseguissem resolver um jogo por segundo, seria então necessário aproximadamente 30.200 anos para completar a tarefa de solucionar todos os jogos disponíveis. Após serem determinadas as soluções simétricas e efetuadas todas as reduções possíveis, esse número foi reduzido para 5.472.730.538 grades essencialmente diferentes, valor que mesmo assim permite a um apaixonado por Sudokus, passar toda sua vida resolvendo os jogos sem dar conta de completar a tarefa.

Lembramos que esses valores foram obtidos através de cálculos computacionais utilizando algoritmos preparados para determinar grades que poderiam ser consideradas simétricas, com o objetivo de diminuir o tamanho do trabalho a ser realizado, fato esse que inviabiliza o cálculo manual.

Sabendo da dificuldade em executar todos os cálculos manualmente, iremos solicitar aos alunos que lembrando da atividade anterior, descrevam um procedimento para iniciar o processo de calcular a quantidade de grades Sudoku 9×9. Espera-se que eles sugiram fixar o bloco superior esquerdo e efetuem as trocas possíveis nos demais blocos, pois foi assim que fizemos no caso anterior. Infelizmente essa grade é maior que a anterior permitindo uma quantidade muito maior de combinações e exigindo dos alunos um raciocínio mais apurado do que o anterior; embora a essência permaneça a mesma.

Por se tratar de um processo bastante complexo, vamos verificar as ideias apresentadas e discutir melhorias na implementação do método, para então passarmos a construção da solução. Vamos iniciar o processo apenas utilizando as três linhas superiores, em conjunto.

Uma resposta inicial que é esperada, porém equivocada, é $9!$, pois temos 9 células a serem preenchidas com 9 algarismos diferentes, o que irá gerar uma permutação de 9. Podemos encontrar também: $(9!)^9$, afinal de contas, temos 9 blocos para serem preenchidos. Tal raciocínio, não leva em conta que para preenchermos um bloco, dependemos dos demais, ou seja, após preenchido o bloco inicial, passamos ao segundo bloco e em seguida ao terceiro bloco. Para não alongar muito esse processo vamos direcionar o trabalho e indicar um caminho a ser seguido.

De modo semelhante, ao efetuado no caso 4×4, vamos propor algumas atividades ao grupo de alunos, para desenvolver o raciocínio esperado para completar a tarefa principal.

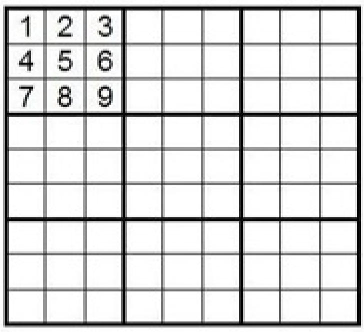
Conforme vimos anteriormente, existem 288 maneiras diferentes para preencher uma grade, gerando uma solução Shidoku. No caso 9×9, essa quantidade será muito maior que o anterior. Passaremos então a busca desse valor.

4.1 Preparando a Contagem

Atividade 3

Cada aluno irá receber uma grade 9×9, sem nenhum algarismo anotado e passarão a preencher o bloco superior esquerdo com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 em ordem crescente, sendo orientados a obter uma grade com o formato apresentado na Figura 4.1 e que iremos chamar de formato padrão.

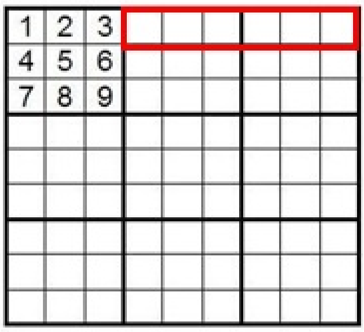
Figura 4.1: Grade sudoku 9×9 no formato padrão



Fonte: Elaborada pelo autor

Em seguida, será solicitado que os alunos preencham a primeira linha do bloco central e do bloco direito (Figura 4.2). Esperamos que os alunos dentro de seus grupos, indiquem que isso poderá ser feito utilizando qualquer combinação dos algarismos 4, 5, 6, 7, 8 e 9, observando assim que existem diferentes maneiras de preencher essa grade.

Figura 4.2: Linha superior a ser preenchida inicialmente



Fonte: Elaborada pelo autor

Passaremos a explorar um processo para realizar a contagem dessas grades. Trabalhando apenas com o bloco das três linhas superiores, vamos listar todas as possibilidades de preenchê-la. Essa tarefa poderá ser feita utilizando os algarismos 4, 5, 6 (em qualquer ordem), ou 7, 8, 9 (em qualquer ordem), ou então uma combinação desses valores. Nas Figuras 4.3 e 4.4 podemos ver as possíveis configurações para a linha superior.

Figura 4.3: Linha superior preenchida

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6						
7	8	9						

Fonte: Elaborada pelo autor

Possíveis Formas para Preencher a Linha Superior

Figura 4.4: Possibilidades para a linha superior

$\{4,5,6\}\|\{7,8,9\}$	$\{7,8,9\}\|\{4,5,6\}$
$\{4,5,7\}\|\{6,8,9\}$	$\{6,8,9\}\|\{4,5,7\}$
$\{4,5,8\}\|\{6,7,9\}$	$\{6,7,9\}\|\{4,5,8\}$
$\{4,5,9\}\|\{6,7,8\}$	$\{6,7,8\}\|\{4,5,9\}$
$\{4,6,7\}\|\{5,8,9\}$	$\{5,8,9\}\|\{4,6,7\}$
$\{4,6,8\}\|\{5,7,9\}$	$\{5,7,9\}\|\{4,6,8\}$
$\{4,6,9\}\|\{5,7,8\}$	$\{5,7,8\}\|\{4,6,9\}$
$\{5,6,7\}\|\{4,8,9\}$	$\{4,8,9\}\|\{5,6,7\}$
$\{5,6,8\}\|\{4,7,9\}$	$\{4,7,9\}\|\{5,6,8\}$
$\{5,6,9\}\|\{4,7,8\}$	$\{4,7,8\}\|\{5,6,9\}$

Fonte: FELGENHAUER, 2006, P. 17.

Podemos então definir uma contagem para as três primeiras linhas da nossa grade. Mantendo o bloco superior esquerdo no formato padrão, temos 6 pequenas regiões

3×1 para serem preenchidos com 3 algarismos. O que resulta um total de $(3!)^6$ possibilidades.

Conforme visto na listagem acima, teremos 20 formas diferentes para completar a linha superior, apenas utilizando 4, 5, 6, 7, 8, 9, das quais iremos considerar dois tipos:

- Primeiro tipo: a linha será preenchida pelos algarismos $\{4,5,6\}\{7,8,9\}$ ou $\{7,8,9\}$ $\{4,5,6\}$ nessa ordem (não há mistura de elementos do segundo e terceiro blocos);

- Segundo tipo: a linha será preenchida por uma mistura desses algarismos, por exemplo: $\{4,5,7\}\{6,8,9\}$ (há mistura dos elementos do segundo e terceiro blocos).

Para efetuar a contagem, precisamos diferenciá-las, pois, as linhas do segundo tipo, apresentam um comportamento diferente quanto a forma de preenchimento do restante da grade. Na Figura 4.5 notamos a linha do tipo 1, que permite a colocação dos algarismos 1, 2 e 3 todos na mesma linha do bloco.

As linhas do primeiro tipo só permitem as permutações entre os algarismos $\{1,2,3\}$; $\{4,5,6\}$; $\{7,8,9\}$ dentro de um mesmo bloco.

Figura 4.5: Linha do tipo 1 (algarismos 1, 2, 3 permanecem na mesma linha)

1	2	3	$\{4,$	$5,$	$6\}$	$\{7,$	$8,$	$9\}$
4	5	6	$\{7,$	$8,$	$9\}$	$\{1,$	$2,$	$3\}$
7	8	9	$\{1,$	$2,$	$3\}$	$\{4,$	$5,$	$6\}$

Fonte: FELGENHAUER, 2006, p. 17.

As linhas do segundo tipo permitem uma maior quantidade de combinações, pois os algarismos 1, 2, 3 não podem ficar dentro de um mesmo bloco. Na Figura 4.6 temos um exemplo de linha do tipo 2.

Figura 4.6: Linha do tipo 2 (algarismos 1, 2, 3 não podem permanecer juntos)

1	2	3	$\{4,$	$5,$	$7\}$	$\{6,$	$8,$	$9\}$
4	5	6	$\{8,$	$9,$	$a\}$	$\{7,$	$b,$	$c\}$
7	8	9	$\{6,$	$b,$	$c\}$	$\{4,$	$5,$	$a\}$

Fonte: FELGENHAUER, 2006, p. 17.

Como atividade, solicitamos aos alunos que escrevessem todas as possibilidades de preencher as linhas do segundo tipo.

4.2 Completando as Linhas Superiores

Atividade 4

Foi solicitado aos alunos que completassem as segunda e terceira linhas, da grade abaixo (Figura 4.7), listando todas as combinações possíveis para preencher a grade, utilizando os algarismos 1, 2, 3 no lugar de a, b, c.

Figura 4.7: Letras a, b e c indicando possíveis locais para os algarismos 1, 2 e 3

1	2	3	$\{4,$	$5,$	$7\}$	$\{6,$	$8,$	$9\}$
4	5	6	$\{8,$	$9,$	$a\}$	$\{7,$	$b,$	$c\}$
7	8	9	$\{6,$	$b,$	$c\}$	$\{4,$	$5,$	$a\}$

Fonte: FELGENHAUER, 2006, P. 17.

Na Figura 4.8, podemos ver uma possível forma de substituir as letras a, b e c pelos algarismos 1, 2 e 3, então os alunos utilizaram esse exemplo e indicaram as demais soluções possíveis.

Figura 4.8: Uma das possibilidades para os algarismos 1, 2 e 3

1	2	3	$\{4,$	$5,$	$7\}$	$\{6,$	$8,$	$9\}$
4	5	6	$\{8,$	$9,$	$1\}$	$\{7,$	$2,$	$3\}$
7	8	9	$\{6,$	$2,$	$3\}$	$\{4,$	$5,$	$1\}$

Fonte: Elaborada pelo autor

Aqui, podemos notar um aspecto importante dos problemas de contagem, mesmo tendo 3 elementos possíveis, para 3 lugares, não podemos calcular o resultado final como sendo 3!, pois a utilização de qualquer algarismo em uma das posições, impõe seu uso em um determinado lugar no outro bloco. No exemplo, temos o algarismo 1 sendo utilizado no segundo bloco e na segunda linha, formando $\{8, 9, 1\}$ e, automaticamente, colocando-o na terceira linha do terceiro bloco, formando $\{4, 5, 1\}$. Podemos notar que esse fato acontecerá com os outros algarismos, ou seja, caso o algarismo 1 seja substituído pelo algarismo 2 no segundo bloco, ele também deverá ser substituído no terceiro bloco.

Temos, então, as seguintes possibilidades para as linhas:

$$\{8,9,1\}\,\{7,2,3\}\,;\{8,9,2\}\,\{7,1,3\}\,;\{8,9,3\}\,\{7,1,2\}\,;$$
$$\{6,2,3\}\,\{4,5,1\}\,;\{6,1,3\}\,\{4,5,2\}\,;\{6,1,2\}\,\{4,5,3\}\,.$$

Os valores de a, b, c são uma distribuição dos algarismos 1, 2, 3 dentro das linhas. Podemos notar que temos 3 possíveis formas de distribuir esses 3 algarismos dentro da linha (as permutações dos algarismos dentro do mesmo bloco serão contadas posteriormente).

Podemos então determinar o número de possibilidades para preencher as 3 linhas do bloco superior, mantendo fixo o primeiro bloco. Como temos duas primeiras linhas do primeiro tipo e dezoito primeiras linhas do segundo tipo, podemos indicar as possibilidades, de acordo com [9]:

$$2 \times (3!)^6 + 18 \times 3 \times (3!)^6 = 56 \times (3!)^6 = 2.612.736.$$

Como ainda podemos renomear os algarismos dentro do primeiro bloco (permutando suas posições, sendo que isso poderá ser feito de 9! maneiras), o número total (N), para preencher as três primeiras linhas será dado por:

$$N_{BLOCO} = 9! \times 2.612.736 = 948.109.639.680.$$

Pensando em uma maneira mais direta para se chegar ao total de jogos de Sudoku completo, foi proposto em [9], [16], a seguinte solução: como temos 9 blocos com 9 células, podemos preenche-los de $(9!)^9$ maneiras. Sabemos que existem 948.109.639.680 formas para preencher os três blocos superiores, o mesmo seria verdadeiro para os três blocos centrais e também para os três blocos inferiores. Assim, o número de formas de preencher os 9 blocos obedecendo a regra única, é dado por: $(948109639680)^3$. Chamemos de K a proporção do preenchimento para as linhas. Essa proporção será dada por:

$$K = \frac{948109639680^3}{(9!)^9}.$$

Temos também a proporção das grades que obedecem a propriedade das colunas, que será dada por:

$$(9!)^9 \times K^2 = (9!)^9 \times \left(\frac{(948109639680)^3}{(9!)^9}\right)^2 \approx 6,6571 \times 10^{21}.$$

Infelizmente esse número encontrado não é a resposta correta, pois as probabilidades entre linhas e colunas não são totalmente independentes e por este não ser um número inteiro. Mas o cálculo por esse processo chegou bem perto do valor real, apresentando uma diferença de apenas 0,2%, além de permitir a sua realização em sala de aula com os alunos, utilizando uma simples calculadora.

5 Grades Válidas e Ortogonais

5.1 Gerando uma Solução Sudoku

Depois dos alunos conhecerem um Sudoku, explorarem conceitos de análise combinatória para fazer a contagem da quantidade de soluções, passaremos, a explorar uma forma de obter grades válidas a partir de uma matriz 3×3, e em seguida obter uma solução que seja ortogonal a solução inicial.

A atividade proposta agora será que os alunos criem uma matriz 3×3, preenchida com 9 elementos (algarismos de 1 a 9) em qualquer ordem, e em seguida, utilizando o método descrito em [10], construam uma grade que seja uma solução Sudoku 9×9.

Vamos iniciar essa atividade, solicitando aos alunos do grupo, que escrevam uma matriz quadrada de ordem 3, aproveitando para explicar que uma matriz é uma tabela de números reais, dispostos em linhas e colunas. E como nosso objetivo é obter uma solução de Sudoku, essa matriz deverá ser preenchida pelos algarismos de 1 a 9. No exemplo da Figura 5.1, temos uma possível matriz obedecendo essas condições.

Figura 5.1: Matriz quadrada de ordem 3

3	4	1
2	7	6
5	9	8

Fonte: Elaborada pelo autor

Depois de escrita a matriz, passaremos a construção da solução Sudoku, conforme o método descrito em [10]. A construção da solução Sudoku, obedece basicamente a regra citada anteriormente.

Seja K uma matriz 3×3 qualquer, preenchida aleatoriamente com os algarismos de 1 a 9, em qualquer posição. Veja o exemplo abaixo.

$$K = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \\ 5 & 9 & 8 \end{bmatrix}.$$

Chamamos de M, a matriz obtida a partir de K, pelas operações propostas por Keedwell e explicadas anteriormente.

$$M = \begin{bmatrix} K & \alpha\beta K & \alpha^2\beta^2 K \\ \beta K & \alpha\beta^2 K & \alpha^2 K \\ \beta^2 K & \alpha K & \alpha^2\beta K \end{bmatrix}, \text{ onde:}$$

- A i - ésima linha de αK é a (i + 1) - ésima linha de K mod n;
- A j - ésima coluna de βK é a (j + 1) - ésima coluna de K mod n.

Na Figura 5.2, temos a solução Sudoku obtida a partir da matriz K anterior, utilizando a regra descrita por Keedwell.

Figura 5.2: Solução obtida a partir da matriz K

3	4	1	7	6	2	8	5	9
2	7	6	9	8	5	1	3	4
5	9	8	4	1	3	6	2	7
4	1	3	6	2	7	5	9	8
7	6	2	8	5	9	3	4	1
9	8	5	1	3	4	2	7	6
1	3	4	2	7	6	9	8	5
6	2	7	5	9	8	4	1	3
8	5	9	3	4	1	7	6	2

Fonte: Elaborada pelo autor

Durante o desenvolvimento dessa atividade é fator importante, a concentração na aplicação do processo para não cometer erros que impossibilitem a finalização da solução Sudoku, e dedicação na realização da tarefa, não desistindo ao encontrar dificuldades.

Os alunos do grupo, também irão receber um jogo e deverão procurar sua solução, utilizando para essa atividade quaisquer recursos que eles julguem necessários. Consideramos primordial, muita concentração e dedicação, além de força de vontade para não desistir ao encontrar as dificuldades. Espera-se que os alunos desenvolvam habilidades de raciocínio lógico e observação para verificar a regra única e assim encontrarem a solução. No exemplo da Figura 5.3, temos um Sudoku proposto como atividade para os alunos do grupo.

Figura 5.3: Atividade proposta

3	4	2	5	9	6		8	
		9						2
5					8	6		
	9	7		4	5			
2	5	6		8		1		4
		4	1	2			7	6
	6	3	9		2			
	2	8		7	1	9		5
9	1						3	

Fonte: Disponível em: <http://www.a77.com.br/sudoku/sudoku_facil_83.php> Acesso em: 3 nov. 2017

5.2 Soluções Ortogonais

Após obtidas as soluções, tanto a construída através da matriz quadrada de ordem 3, utilizando o método de Keedwell, como o preenchimento do quebra cabeça proposto, passaremos a construção de um par ortogonal para as soluções.

Iremos utilizar o método descrito em [13], para gerar as soluções ortogonais. Ele sugere que para obtermos soluções ortogonais, devemos fixar a coluna mais à esquerda, e que as diagonais da matriz original sejam transformadas em linhas da matriz ortogonal.

Obedecendo essas regras, passaremos para a construção do par de soluções ortogonais. Mais uma vez, esperamos que os alunos tenham bastante concentração, respeitando as regras apresentadas e assim, possam construir esse par ortogonal. Ainda verificaremos se a solução encontrada (par ortogonal) obedece a regra única, ou seja, se o par ortogonal é uma solução de Sudoku. As Figuras 5.4 e 5.5, mostram uma solução Sudoku e seu par ortogonal.

Figura 5.4: Solução inicial

0	1	2	4	5	3	8	6	7
3	4	5	7	8	6	2	0	1
6	7	8	1	2	0	5	3	4
1	2	0	5	3	4	6	7	8
4	5	3	8	6	7	0	1	2
7	8	6	2	0	1	3	4	5
2	0	1	3	4	5	7	8	6
5	3	4	6	7	8	1	2	0
8	6	7	0	1	2	4	5	3

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 5.5: Solução ortogonal

0	4	8	3	7	2	6	1	5
3	7	2	6	1	5	0	4	8
6	1	5	0	4	8	3	7	2
1	5	6	4	8	0	7	2	3
4	8	0	7	2	3	1	5	6
7	2	3	1	5	6	4	8	0
2	3	7	5	6	1	8	0	4
5	6	1	8	0	4	2	3	7
8	0	4	2	3	7	5	6	1

Fonte: Elaborada pelo autor

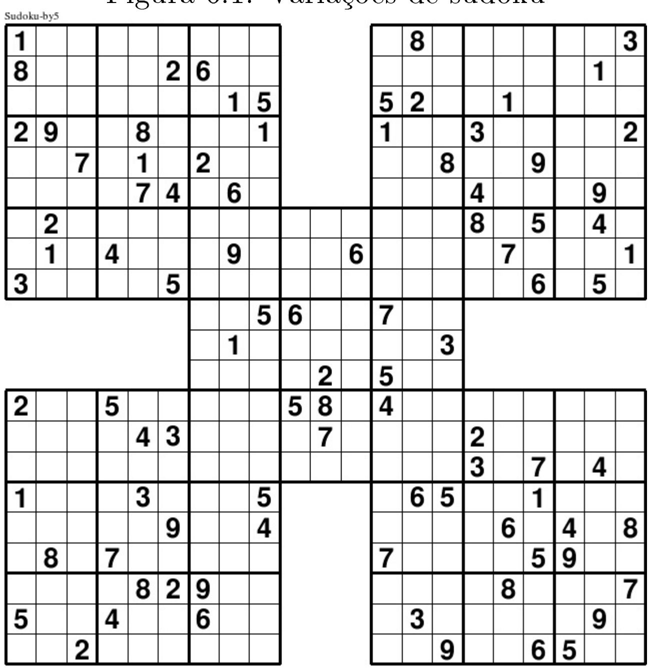
6 Outros Casos e Variações

6.1 Super Sudoku e Blocos com Formatos Diferentes

Após desenvolver essa série de atividades utilizando o Shidoku (matriz 4 × 4) e o Sudoku (matriz 9 × 9), vamos apresentar aos alunos outros formatos para os quebra cabeças, mostrando que existem diversas formas de desenvolver o jogo, esperando que eles entendam que existem novos questionamentos que podem ser feitos e novas atividades que podem ser propostas. O raciocínio matemático nunca para e sempre existem perguntas a serem feitas e respondidas.

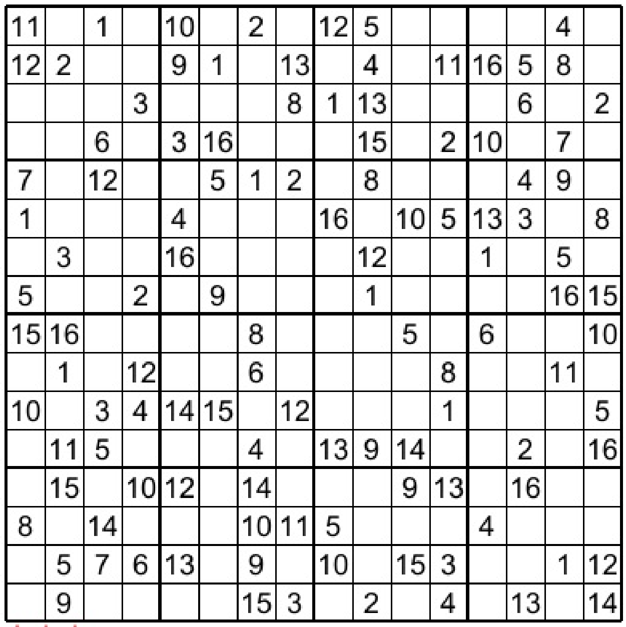
Entre alguns tipos, podemos citar o super Sudoku (resolvido em uma matriz 16 × 16), um Sudoku que compartilha algumas de suas regiões com outros jogos, e também um Sudoku onde os blocos 3 × 3 são substituídos por regiões em outros formatos (regiões triangulares, por exemplo), veja abaixo alguns desses exemplos citados. Nas Figuras 6.1, 6.2, 6.3 e 6.4, apresentamos algumas variações do Sudoku.

Figura 6.1: Variações de sudoku



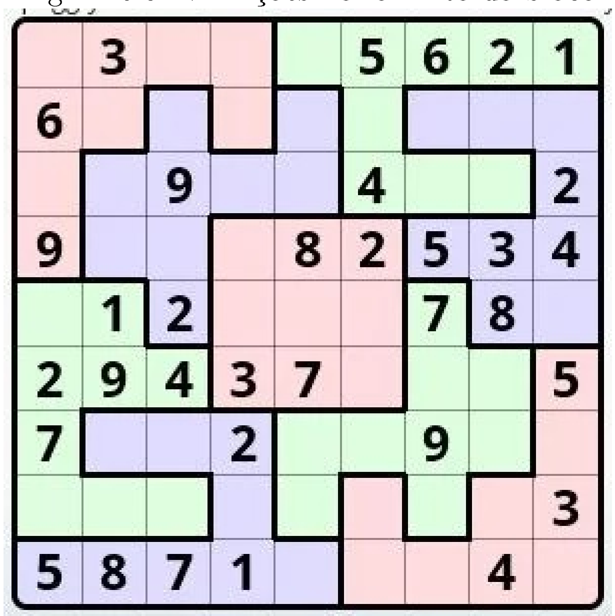
Fonte: Disponível em: <http://www.grouppuzzles.com/help-puzzletypes.html> Acesso em: 5 out. 2017

Figura 6.2: Variações de sudoku



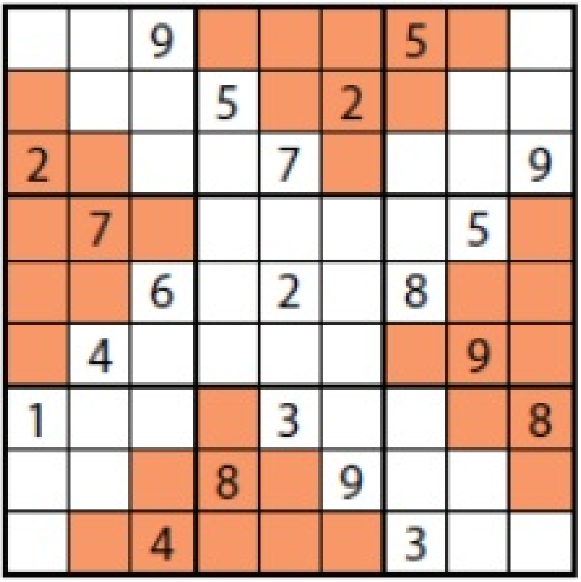
Fonte: Disponível em: <http://www.innoludic.com/puzzle/sudoku/super-sudoku.html?start=5> Acesso em: 5 out. 2017

Figura 6.3: Variações no formato do bloco



Fonte: Disponível em:
<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.kiwifruitmobile.sudoku&hl=pt_BR>
Acesso em: 5 out. 2017.

Figura 6.4: Bloco no formato pirâmide



Fonte: TAALMAN, 2007, p. 8.

6.2 Shapedoku - Sudoku e Geometria

Outra forma de jogo que está sendo explorada, é o chamado “Shapedoku”, proposto em [21], um novo tipo de quebra cabeças que combina raciocínio lógico e espacial ao misturar em suas dicas, a conhecida regra do Sudoku com conceitos básicos de geometria como: paralelismo, perpendicularismo e propriedades das formas geométricas.

Podemos dizer que nessa nova forma de se jogar o Sudoku, um professor poderá explorar e reforçar com seus alunos tais conceitos, aproveitando mais uma oportunidade para retoma-los e desenvolver as competências e habilidades necessárias para serem utilizadas em situações do cotidiano.

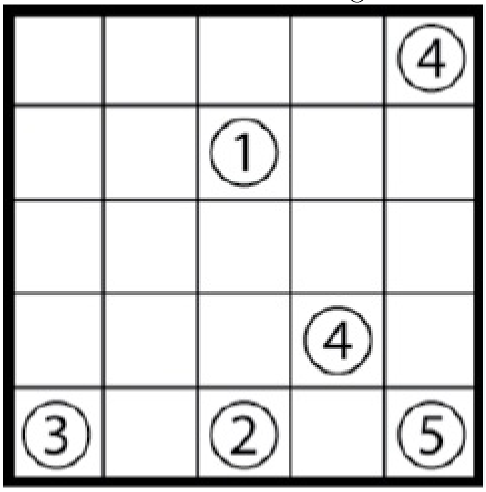
Ao tentar desenvolver um novo tipo de jogo, Wanko e um de seus alunos de graduação, acabaram percebendo que a colocação dos algarismos em uma grade Sudoku permitiam a formação de formas geométricas básicas, e então, resolveram criar uma variação do jogo que utiliza formas geométricas em suas dicas iniciais.

O jogo foi criado para ser utilizado em grades 4×4, 5×5 e 6×6, e não possui em suas grades divisões em sub regiões (como os blocos 3×3 dos Sudokus tradicionais). Sendo assim, Shapedoku são variações de quadrados latinos e não especificamente de um Sudoku.

O jogo traz inicialmente alguns algarismos fornecidos como dados iniciais, além de uma lista de figuras geométricas que deverão ser obtidas durante a solução do jogo. Traz também alguns algarismos circulados, que não são utilizados para formar as figuras indicadas. Assim, em um Shapedoku 5×5, por exemplo, um tipo de quadrilátero é formado quando temos um algarismo circulado, e um tipo de triângulo será formado, quando temos dois algarismos iguais circulados.

Como pistas para se resolver um Shapedoku, temos uma lista de figuras com características bem específicas de suas propriedades, por exemplo: Um triângulo isósceles, que deverá ter apenas dois lados iguais, mas não poderá ter um ângulo reto, pois senão deveria aparecer nas dicas como triângulo retângulo isósceles. Um quadrilátero, deverá ser descrito como sendo: quadrado, losango, retângulo, trapézio. A Figura 6.5 traz um exemplo de jogo.

Figura 6.5: Exemplo de shapedoku



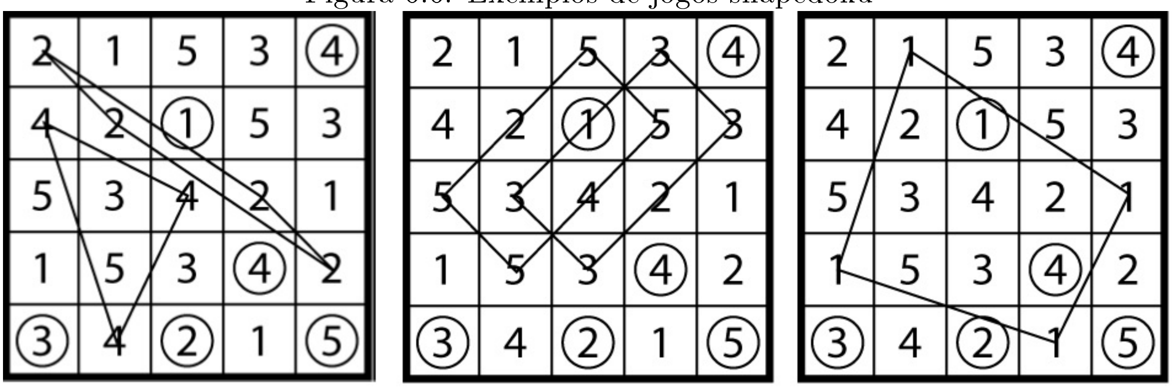
1 – Quadrilátero
2 – Paralelogramo
3 – Retângulo
4 – Triângulo Retângulo Isósceles
5 – Retângulo

Fonte: WANKO, 2013, p. 191.

Respeitando-se a regra dos quadrados latinos, onde cada algarismo aparece uma única vez em cada linha e coluna, os segmentos que irão formar os lados das figuras geométricas não poderão estar na horizontal e nem na vertical, e por essa razão acaba dificultando a visualização das figuras. Os alunos podem criar modelos para conferir se dois segmentos são paralelos ou perpendiculares, ou se são ou não congruentes.

Nessa forma de se jogar, podemos dizer que ao conectarmos o centro das "casas" com os algarismos "1", obtemos uma determinada figura. No exemplo da Figura 6.6, temos 3 exemplos de jogos Shapedoku resolvidos. No primeiro, conectando três algarismos "4" obtemos um triângulo retângulo; conectando os algarismos "2", obtemos um paralelogramo. No segundo, podemos notar a formação de dois retângulos e no terceiro temos um quadrilátero.

Figura 6.6: Exemplos de jogos shapedoku



Fonte: WANKO, 2013, p. 191.

A criatividade do ser humano não tem limites e sempre existem pessoas capazes de propor novos desafios e sempre encontraremos pessoas dispostas a determinar as soluções.

Como sugestão de atividade, podemos solicitar para que cada aluno crie seu próprio Shapedoku, desenhando inicialmente as formas geométricas que serão utilizadas como pistas, e depois distribuindo os algarismos dentro da tabela. Em seguida, eles podem anotar as figuras utilizadas e fornecer como pistas aos colegas. Portanto, a quantidade de jogos que podem ser criados é muito grande, bastando para isso colocar em prática a criatividade presente em cada um.

Atualmente os alunos são criativos, mas como já foi citado, apresentam muita resistência de raciocínio quando o assunto é Matemática, fato que precisamos desmistificar, mostrando que existe solução para os problemas matemáticos e que com dedicação conseguimos superar qualquer obstáculo.

7 Comentários sobre a Aplicação

Neste capítulo, vamos comentar alguns aspectos observados durante a aplicação das atividades desenvolvidas. Em uma conversa com o grupo de alunos, foram dadas algumas informações gerais sobre o Sudoku e foi apresentada uma proposta das atividades a serem realizadas. Durante essa conversa, foi possível notar várias dificuldades apresentadas pelos alunos, que puderam ser confirmadas durante a aplicação do questionário inicial.

Inicialmente, queríamos saber o grau de conhecimento dos alunos quanto ao jogo, se já haviam tentado completar um jogo, se tinham obtido êxito nessa tarefa e quais habilidades eles consideram necessárias para se jogar. Foi então aplicado o questionário "Atividades Introdução - INTRO" (ver anexo) e os dados estão apresentados a seguir.

7.1 Caracterizando a Escola

Esse trabalho foi realizado na Escola Estadual Professora Carolina Lopes de Almeida, localizada na periferia da cidade de Bauru, interior de São Paulo, que atende alunos do ensino fundamental anos iniciais e finais, além de alunos do ensino médio. Atualmente a escola recebe alunos não só de bairros próximos a ela, como também recebe alguns alunos atendidos pelo sistema de transporte escolar. Atualmente a escola tem cerca de 900 alunos, divididos nos 3 períodos (manhã, tarde e noite).

Para avaliar o rendimento do trabalho desenvolvido pela escola, anualmente são realizadas avaliações externas como: SARESP (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo), SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) e PROVA BRASIL. Com os dados obtidos nas provas do SARESP, junto com os indicadores de fluxo (retenção, evasão e promoção de alunos), é gerado para cada escola o Índice de Desenvolvimento da Educação de São Paulo (IDESP), criado em 2007, que é um dos principais indicadores da qualidade do ensino na rede estadual paulista, este índice estabelece metas para as escolas alcançarem todo ano. Tais metas são traçadas a partir dos dados anteriores da própria escola e propõe um aumento gradativo visando atingir até 2030 uma média 7,0 para os anos iniciais, uma média 6,0 para os anos finais e uma média 5,0 para o ensino médio.

Atualmente os índices da escola encontram-se abaixo da média estadual (ver Figuras 7.1 e 7.2) e diversos projetos estão sendo realizados, visando não só desenvolver as competências e habilidades propostas pela matriz curricular do estado de São Paulo, como também ajudar a corrigir os indicadores de fluxo (fator que tem afetado na composição dos índices da escola).

Figura 7.1: IDESP da escola avaliação realizada no ano de 2016

IDESP 2016 - INDICADORES DA ESCOLA

	INDICADORES DE DESEMPENHO		INDICADOR DE DESEMPENHO	INDICADOR DE FLUXO	IDESP 2016
	LÍNGUA PORTUGUESA	MATEMÁTICA			
5° ANO EF	6,1600	4,8900	5,53	0,9442	5,22
9° ANO EF	2,0833	2,4200	2,25	0,7365	1,66
3ª SÉRIE EM	3,7033	2,0267	2,87	0,7079	2,03

Fonte: Secretaria da Educação. Disponível em: <http://idesp.edunet.sp.gov.br/Arquivos2016/025483.pdf> Acesso em: 4 dez. 2017

Figura 7.2: Comparação do IDESP - escola / diretoria de ensino / estado

IDESP 2016 - REDE ESTADUAL

	5° ANO EF	9° ANO EF	3ª SÉRIE EM
ESCOLA	5,22	1,66	2,03
DIRETORIA	5,64	2,93	2,54
ESTADO	5,40	2,93	2,30

Fonte: Secretaria da Educação. Disponível em: <http://idesp.edunet.sp.gov.br/Arquivos2016/025483.pdf> Acesso em: 4 dez. 2017

Além do índice IDESP, a escola recebe também um boletim com o desempenho dos alunos nas avaliações do SARESP, onde todo o corpo docente e os membros da gestão tem a oportunidade de analisarem o resultado do ano anterior e planejarem ações que visam a melhoria na qualidade de ensino.

A Figura 7.3 mostra a distribuição da participação dos alunos no SARESP do ano de 2016.

Figura 7.3: Participação dos alunos no SARESP 2016

PARTICIPAÇÃO DOS ALUNOS NO SARESP 2016

INSTÂNCIAS	3º EF	5º EF	7º EF	9º EF	3ª EM	TOTAL	%
ESTADO	153.443	152.538	43.971	331.631	370.451	**1.052.034**	84,8
REDE ESTADUAL*	118.656	120.355	39.354	327.604	350.851	**956.820**	84,4
INTERIOR	15.722	15.838	11.921	98.268	93.739	**235.488**	84,7
DIRETORIA DE ENSINO	1.905	1.807	558	4.838	3.850	**12.958**	80,1
ESCOLA	**49**	**47**	-	**45**	**71**	**212**	77,7

Referência: alunos presentes no 1º dia de avaliação
* Escolas estaduais que participaram do SARESP 2016: 5.105 escolas.

Fonte: Secretaria de Estado da Educação Disponível em: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2016/ConsultaRedeEstadual.aspx?opc=1> Acesso em: 4 dez. 2017

Quanto as notas nas avaliações do SARESP e prova Brasil/SAEB, os índices da escola para o 3° ano do ensino médio, encontram-se um pouco acima da média estadual e regional, mas com certeza ainda precisam melhorar. A Figura 7.4 nos mostra a nota da escola e faz uma comparação com as demais escolas estaduais (no interior do estado, na diretoria de ensino e no Brasil).

Figura 7.4: Médias obtidas pela escola

MÉDIAS DO SARESP 2016

A partir do SARESP 2014, o desempenho dos alunos do 3º ano do Ensino Fundamental é processado pela metodologia da Teoria da Resposta ao Item e, a exemplo do que ocorre nos demais anos e séries avaliados, ancora-se na mesma escala de desempenho da Prova Brasil/Saeb.

INSTÂNCIAS	LÍNGUA PORTUGUESA					MATEMÁTICA				
	3º EF	5º EF	7º EF	9º EF	3ª EM	3º EF	5º EF	7º EF	9º EF	3ª EM
REDE ESTADUAL	172.3	218.6	222,9	237,4	273,0	201,8	222,4	227,5	251,0	278,1
INTERIOR	180,7	228,6	224,7	242,8	277,8	213,1	235,6	231,9	258,9	285,6
DIRETORIA DE ENSINO	173,4	222,0	219,4	235,8	274,4	207,0	226,6	226,5	252,3	282,9
ESCOLA	**155,8**	**217,7**	-	**204,9**	**278,0**	**205,4**	**222,8**	-	**234,6**	**287,2**

MÉDIAS DO SAEB E PROVA BRASIL 2015

INSTÂNCIAS	LÍNGUA PORTUGUESA			MATEMÁTICA		
	5º EF	9º EF	3ª EM	5º EF	9º EF	3ª EM
ESCOLAS ESTADUAIS DO BRASIL	210,1	247,0	259,9	222,3	250,5	259,3
ESCOLAS ESTADUAIS DE SÃO PAULO	219,0	248,5	267,7	236,6	252,0	264,6

Fonte: Secretaria de Estado da Educação Disponível em: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2016/ConsultaRedeEstadual.aspx?opc=1> Acesso em: 4 dez. 2017

Para finalizar, o boletim ainda apresenta uma distribuição dos alunos em níveis de proficiência, classificados em: insuficiente (abaixo do básico), onde os alunos demonstram domínio insuficiente dos conceitos esperados para o ano/série em que se encontram; suficiente (básico e adequado), onde os alunos demonstram um domínio que varia entre o mínimo, até um domínio pleno dos conceitos esperados para o ano/série; e avançado, onde os alunos demonstram conhecimentos além do esperado para o ano/série. Nas Figuras 7.5 e 7.6 podemos ver a distribuição dos alunos da escola.

Figura 7.5: Distribuição percentual em níveis de proficiência

DISTRIBUIÇÃO PERCENTUAL DOS ALUNOS NOS PONTOS DA ESCALA DE PROFICIÊNCIA

Ano/Série	<125	125	150	175	200	225	250	275	300	325	350	375	≥400
3º EF	8,0	6,0	14,0	22,0	16,0	10,0	8,0	16,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
5º EF	2,2	0,0	11,1	15,6	20,0	28,9	13,3	4,4	4,4	0,0	0,0	0,0	0,0
7º EF	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
9º EF	0,0	0,0	9,1	11,4	13,6	29,5	25,0	6,8	2,3	0,0	2,3	0,0	0,0
3ª EM	0,0	0,0	0,0	1,4	4,3	15,9	21,7	13,0	21,7	17,4	2,9	1,4	0,0

Abaixo do Básico | Básico | Adequado | Avançado

Fonte: Secretaria de Estado da Educação Disponível em: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2016/ConsultaRedeEstadual.aspx?opc=1> Acesso em: 4 dez. 2017

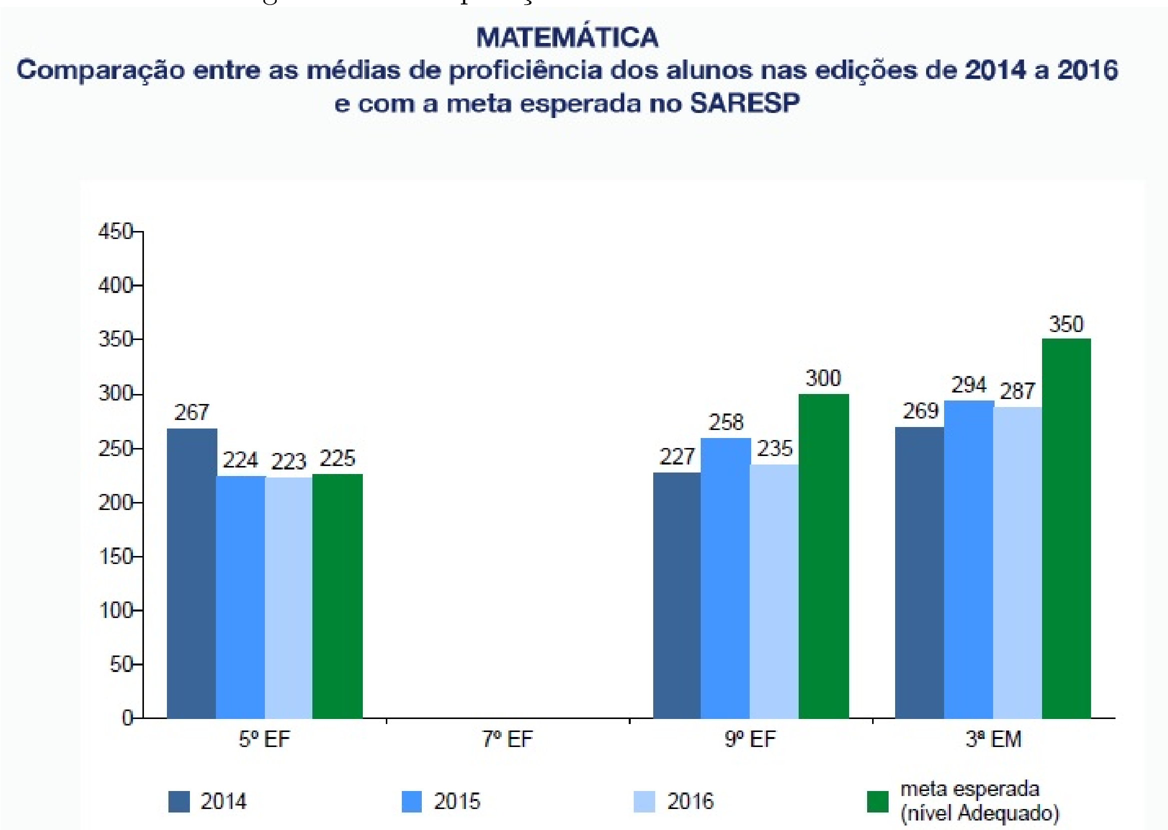
Figura 7.6: Distribuição percentual em níveis de proficiência

3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO							
CLASSIFICAÇÃO	NÍVEL		REDE ESTADUAL	INTERIOR	DIRETORIA DE ENSINO	ESCOLA
Insuficiente	Abaixo do Básico	< 275	47,6	41,0	45,7	**43,5**
Suficiente	Básico	275 a < 350	47,4	51,4	44,5	**52,2**
	Adequado	350 a < 400	4,8	7,1	7,8	**4,3**
	Básico + Adequado		*52,2*	*58,5*	*52,2*	***56,5***
Avançado	Avançado	≥ 400	0,3	0,5	2,1	**0,0**

Fonte: Secretaria de Estado da Educação Disponível em: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2016/ConsultaRedeEstadual.aspx?opc=1> Acesso em: 4 dez. 2017

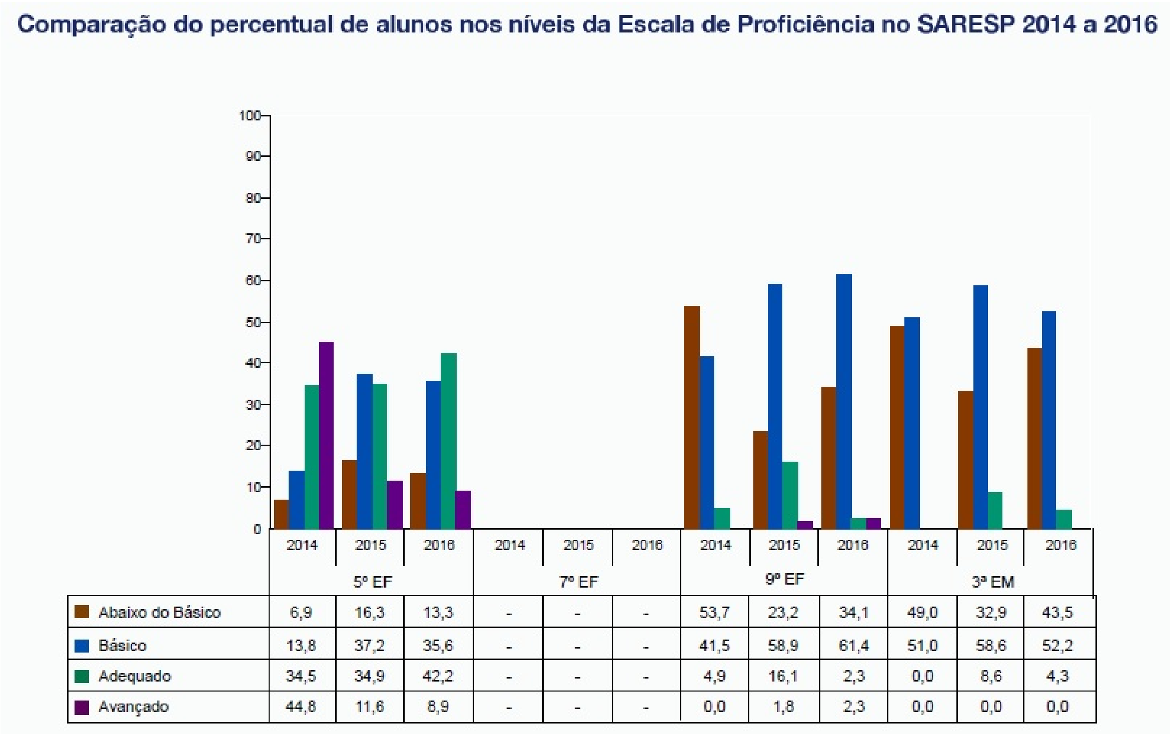
Nos gráficos a seguir, podemos acompanhar a evolução das médias da escola ao longo dos 3 últimos anos e observar o quanto ainda falta para alcançar a meta estabelecida. Na Figura 7.7, temos a evolução das médias em matemática dos alunos da escola; e na Figura 7.8, temos a distribuição dos alunos em níveis de proficiência.

Figura 7.7: Comparação entre as médias dos alunos



Fonte: Secretaria de Estado da Educação Disponível em: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2016/ConsultaRedeEstadual.aspx?opc=1> Acesso em: 4 dez. 2017

Figura 7.8: Comparação percentual em níveis de proficiência



	5º EF 2014	5º EF 2015	5º EF 2016	7º EF 2014	7º EF 2015	7º EF 2016	9º EF 2014	9º EF 2015	9º EF 2016	3ª EM 2014	3ª EM 2015	3ª EM 2016
Abaixo do Básico	6,9	16,3	13,3	-	-	-	53,7	23,2	34,1	49,0	32,9	43,5
Básico	13,8	37,2	35,6	-	-	-	41,5	58,9	61,4	51,0	58,6	52,2
Adequado	34,5	34,9	42,2	-	-	-	4,9	16,1	2,3	0,0	8,6	4,3
Avançado	44,8	11,6	8,9	-	-	-	0,0	1,8	2,3	0,0	0,0	0,0

Fonte: Secretaria de Estado da Educação Disponível em: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2016/ConsultaRedeEstadual.aspx?opc=1> Acesso em: 4 dez. 2017

Os dados acima, nos mostram que existe um longo caminho a ser percorrido na busca de uma melhoria na qualidade de ensino, e que a escola necessita de diversas intervenções de todos os envolvidos em seu cotidiano (pais, alunos, professores, gestores, autoridades). Podemos afirmar que existe uma busca constante na melhoria desses índices.

Temos plena convicção que este trabalho isolado não poderá mudar essa realidade, mas com certeza esta e outras ações, colaboram para uma melhor participação dos alunos nas atividades e consequentemente um maior compromisso com o processo ensino-aprendizagem.

7.2 Caracterizando os Alunos

Esta atividade foi inicialmente pensada para ser aplicada em alunos de todas as turmas do ensino médio que demonstram interesse na área de matemática, e que foram convidados a participar da pesquisa. Infelizmente por ser aplicada fora do período regular de aulas, poucos alunos compareceram, fato que impossibilitou a realização da pesquisa apenas com esses alunos.

Então as atividades passaram a ser aplicadas em uma turma regular do 3° ano do ensino médio período da manhã. De acordo com o currículo do estado de São Paulo, as competências e habilidades relacionadas à análise combinatória são trabalhadas no 2° ano e deveriam ser rapidamente relembradas pelos alunos, por se tratar de conceitos básicos, fato que não aconteceu, sendo necessário uma retomada desses conceitos. Tal fato também se repetiu com os outros assuntos abordados, como: potências, notação científica e características de figuras geométricas.

Ao todo trabalhamos com 30 alunos, e todos não se lembravam do princípio fundamental da contagem, apresentando dificuldades para compreender as atividades propostas, sendo necessárias diversas intervenções para atingir os objetivos propostos.

Com esta atividade foi oferecido aos alunos mais uma oportunidade de retomada de conteúdos e mais uma chance de aprender e utilizar alguns conceitos. Atualmente os alunos são imediatistas, envolvem-se na realização das atividades, mas infelizmente não apropriam-se das ideias trabalhadas, e não conseguem fazer um uso futuro dos conceitos, todas as atividades precisam ser iniciadas e terminadas no mesmo dia sob o risco de completo esquecimento.

A grande maioria dos alunos envolvidos nessas atividades tiveram uma boa participação durante sua realização, demonstrando compromisso com o trabalho proposto. Esperamos que tais atividades tenham gerado frutos nesses alunos, para que os mesmos possam utilizar os conceitos trabalhados em situações futuras.

7.3 Conhecendo os alunos e seus conhecimentos sobre o jogo

A primeira pergunta que foi feita aos alunos é se eles tinham algum conhecimento sobre o jogo (INTRO 1). A Tabela 7.1 apresenta o resultado obtido.

Tabela 7.1: Porcentagem de alunos a respeito do conhecimento do sudoku - INTRO 1

Você conhece o Sudoku?	
Sim	100%
Não	0%

Fonte: Elaborada pelo autor

Conforme visto na tabela acima, todos os alunos envolvidos tinham pelo menos um conhecimento básico sobre o Sudoku. A maioria afirmou ter visto os jogos em jornais.

Então passamos a perguntar sobre a resolução do Sudoku. Como todos responderam que conheciam o jogo, perguntamos então se eles haviam tentado resolver e se haviam conseguido completar a tarefa (INTRO 2). Os resultados apresentados na Tabela 7.2 mostram os dados dessa questão e que mostrou um resultado esperado, afinal de contas completar um Sudoku nas primeiras tentativas não é uma tarefa fácil e que acaba desmotivando os alunos.

Tabela 7.2: Porcentagem de alunos quanto ao jogo - INTRO 2

Você já jogou ou tentou jogar?	
Sim, mas não terminei	70%
Sim, e consegui terminar	20%
Nunca tentei	10%

Fonte: Elaborada pelo autor

Após essas questões básicas a respeito do jogo, passamos a explorar mais diretamente questões relacionadas ao objetivo do trabalho, que era discutir o total de jogos existentes (INTRO 3). A Tabela 7.3 mostra esses resultados e podemos perceber algumas dificuldades dos nossos alunos quando o assunto é trabalhar com números extremamente grandes.

Tabela 7.3: Porcentagem de alunos por quantidade de jogos - INTRO 3

Você tem ideia de quantos jogos diferentes existem?	
Menos de 1000	33,3%
Entre 1000 e 100000	16,7%
Entre 100000 e 1000000	6,7%
Não tenho ideia	43,3%

Fonte: Elaborada pelo autor

Também foi perguntado aos alunos sobre quais habilidades ou conhecimentos eles julgariam necessários para obter a resolução de um Sudoku (INTRO 4). Na Tabela 7.4 podemos ver esse resultado, onde notamos algumas qualidades difíceis de encontrar nos jovens atuais. Cada dia é mais difícil conseguir com que os alunos tenham paciência e concentração na hora de realizar qualquer atividade.

Tabela 7.4: Número de alunos por habilidade necessária - INTRO 4

Quais habilidades você considera importantes na resolução de um sudoku?	
Raciocínio	10
Paciência	15
Concentração	17
Cálculos	4

Fonte: Elaborada pelo autor

Obs: Nessa questão os alunos escolheram mais de uma alternativa.

Para encerrar essa primeira parte sobre o conhecimento dos alunos a respeito do Sudoku, perguntamos se saber Matemática ajuda na busca da solução do jogo. (INTRO 5). Conforme notamos nas respostas, os alunos colocaram que saber Matemática é um fator importante na solução de um Sudoku, principalmente o uso do raciocínio lógico. A Tabela 7.5 nos mostra esses dados.

Tabela 7.5: Importância da matemática na busca de soluções - INTRO 5

Saber matemática, auxilia na busca da solução?	
Sim, raciocínio	65%
Sim, contagem	15%
Não	20%

Fonte: Elaborada pelo autor

7.4 Apresentação - Conhecendo o Sudoku

Após realizar uma breve pesquisa a respeito do conhecimento prévio que os alunos tinham sobre o jogo, onde foi possível notar que todos possuíam conhecimento sobre o jogo, quer seja por ter tentado jogar, ou apenas por ver em um jornal ou revista, a grande maioria, afirmou ter tentado jogar como curiosidade, mas podemos notar que poucos obtiveram êxito na tarefa de finalizar o jogo.

Muitas vezes, o fato de encontrar algumas dificuldades desanima nossos jovens, fazendo-os desistir e afirmar que a tarefa não tem solução, não mostrando sinais de esforços e dedicação para solucionar o problema (fato que pretendemos diminuir durante a realização das atividades).

O trabalho foi aplicado em duas turmas, uma sala de aula normal com todos os alunos da turma e em uma turma menor com alguns alunos convidados a participar fora do período de aulas[1]. Uma observação importante, que merece destaque, é que: foi possível notar algumas diferenças entre as duas aplicações.

A aplicação na turma regular, não mostrou grandes novidades, e o comportamento da turma continuou parecido como se estivessem realizando uma atividade diária de uma aula qualquer, pois nem todos os alunos da turma se envolveram com as atividades propostas, e mesmo se tratando de uma atividade diferenciada, alguns continuaram mostrando o desinteresse habitual sem a devida dedicação esperada. Infelizmente, essa é a realidade de praticamente todas as salas de aula.

Já na turma de alunos convidados que foram informados anteriormente que participariam de algumas atividades na área de Matemática, não notamos esse problema, e todos mostraram interesse e dedicação (infelizmente, um número reduzido), esforçando-se para cumprir as atividades propostas.

De uma forma geral, os alunos mostraram desconhecimento em problemas básicos de contagem, não lembrando de como se resolvem os problemas mais simples de contagem e não souberam estimar a quantidade existente de Sudokus. Ao solicitar um valor aproximado para o total de jogos, esse número ficou bem aquém da quantidade total existente. Afirmaram também não ser necessário saber "regras" matemáticas para solucionar um Sudoku, citando como habilidades necessárias: o raciocínio, a paciência e a concentração. Em um rápido resumo, afirmaram que a única coisa necessária para se fazer, é pensar bastante e contar de 1 a 9 diversas vezes.

Passada essa etapa, foi proposto aos alunos da turma, determinar a solução de um Sudoku, forçando-os ao máximo na busca da solução, tentando eliminar a possibilidade de desistência e, assim, determinar o tempo que cada um gastaria para concluir o problema. Também foi possível observar e analisar as diversas dificuldades encontradas pelo grupo de alunos. Como sendo a primeira vez que a maioria iria resolver um Sudoku até o final, foram necessárias diversas intervenções de ajuda para podermos concluir a tarefa que em média levou 50 minutos, para um jogo de nível fácil. O fato importante que destacamos aqui, foi que através de uma dose extra de estímulos, os alunos empenharam-se na busca da solução, dedicando-se e mostrando interesse e vontade para completar a tarefa. Infelizmente, nem todos tiveram esse mesmo comportamento e desistiram pelo caminho.

Após concluída a atividade inicial, onde o objetivo era de apresentar o Sudoku aos

[1] infelizmente apenas uma pequena quantidade de alunos convidados compareceram às atividades, inviabilizando uma análise separada e, portanto, os dados obtidos nessa turma foram juntados a turma normal

alunos, passamos para as atividades do processo de contagem.

7.5 Realizando a Contagem - O caso 4×4

Com os alunos divididos em grupos com 4 pessoas, distribuímos a cada aluno uma folha de atividades (atividade 1 - A) onde foi solicitado que preenchessem uma grade 4×4, respeitando a regra única esperada para um jogo de Shidoku. Os alunos deveriam preencher essa grade de diferentes maneiras (conforme descrito nas atividades). Notamos que, a grande maioria não apresentou qualquer dificuldade, afinal de contas não havia qualquer restrição, além da regra única, resolvendo a atividade em poucos minutos. Logo na sequência foi pedido para que os alunos trocassem suas folhas de atividades e comparassem com as soluções de seus colegas, percebendo assim que existem diferentes maneiras para se completar uma grade de Shidoku.

Passamos em seguida para a atividade de transformação entre as grades, (de algarismos para letras e de símbolos para letras gregas - atividade 1 - C), que necessitou um pouco mais de orientações devido a permitir interpretações diferentes, fato que foi solucionado, e assim continuamos na aplicação e discussão das atividades.

Nessa altura das atividades, os alunos já tinham conhecimento que existiam diversas maneiras de preencher uma grade 4×4. Foi então que apresentamos o processo de contagem, e de posse de uma grade 4×4 (Atividade 2), pedimos aos alunos para que colocassem os algarismos 1, 2, 3 e 4 no bloco superior esquerdo, gerando um bloco em formato padrão. Notamos que nos outros blocos sempre sobravam regiões com dois quadrados a serem preenchidos com dois algarismos, e então exploramos o princípio fundamental da contagem. Os alunos então, determinaram o total de grades que poderiam ser formadas com o bloco superior esquerdo em formato padrão, e chegamos a um total de 12 grades. Nessa atividade, notamos que os alunos não apresentaram dificuldades em compreender o conceito utilizado.

Para determinarmos o total das grades faltava apenas finalizar a atividade renomeando os algarismos, e mais uma vez foram necessárias diversas intervenções para explicar o conceito de "renomeação" que não estava bem claro para os alunos. Analisamos então alguns exemplos, onde os alunos puderam compreender qual o significado do termo e aproveitamos para falar em permutações, mostrando que a ideia era trocar os algarismos (1, 2, 3 e 4) de lugar. Concluímos que como temos 4 algarismos e 4 lugares dentro de cada bloco, teremos um total de $4!$ formas de renomear os algarismos, obtendo assim o total de grades. Conforme calculado anteriormente, encontramos um total de 288 jogos.

Essas atividades iniciais serviram para apresentar aos alunos o jogo do Sudoku, falar da sua importância no desenvolvimento do raciocínio e para introduzir conceitos de análise combinatória que foram aplicados na contagem das grades de Shidoku. Durante a realização dessas atividades, foi possível perceber que teríamos muitas dificuldades em utilizar esse processo para os Sudokus, afinal de contas a quantidade de dígitos aumentou de 4 para 9 e o total de "casas" saltou de 16 para 81.

7.6 Realizando a Contagem - O caso 9×9

Os alunos receberam uma grade Sudoku completamente em branco (atividade 3), e pedimos para que, em primeiro momento, eles dessem atenção apenas para as três linhas superiores. Conforme foi feito no caso anterior, preencheram o bloco superior esquerdo com os algarismos de 1 a 9 no formato padrão, e em seguida passamos a discutir maneiras de preencher as "casas" restantes. Essa sequência de atividades precisou ser guiada do início ao final por apresentar muitas variáveis dificultando a compreensão daquilo que era esperado.

Inicialmente, podemos notar a semelhança com o caso 4×4, mas agora precisamos analisar 6 regiões com 3 lugares a serem preenchidos com os algarismos restantes. O fato de termos 20 formas diferentes para a linha superior (sem contar as permutações), e essas 20 formas serem dividas em 2 grupos (um grupo com 2 elementos e outro com 18 elementos), gerou bastante dúvidas e dificuldades, que precisaram ser contornadas utilizando o caminho mais longo de explicar e mostrar as soluções caso a caso. Nesse ponto podemos ver a dificuldade em solucionar problemas de contagem quando temos diversos elementos e mostramos aos alunos que era necessário elaborar uma sequência lógica para escrever esses grupos sem se perder durante a escrita (esquecer algum grupo ou escrever o mesmo grupo duas vezes). Foi mostrado para eles que deveriam seguir uma ordem numérica, trocando apenas um elemento de cada vez, assim ficaria mais fácil verificar quais formas ainda estavam faltando.

Também podemos citar como dificuldade de que esse grupo com 18 elementos pode ser preenchidos de 3 formas diferentes (conforme explicado durante as atividades), gerando assim um total de 56 maneiras de preencher as 3 linhas superiores.

Dessa forma foi possível calcular o total de maneiras diferentes de preencher as 3 linhas superiores do Sudoku, mantendo o primeiro bloco no formato padrão, alcançando um total de 2.612.736 formas, faltando ainda efetuar todas as renomeações dos 9 algarismos, da mesma forma que foi feito no caso 4×4. Encontramos assim, 948.109.639.680 formas diferentes, número esse que impressiona e que com certeza dificulta a compreensão, não esquecendo ainda que precisamos completar as demais linhas da grade (isso foi apenas as 3 primeiras linhas).

Como ponto importante nesse momento, gostaria de citar a observação de um aluno que após questionado sobre como terminar o cálculo para os outros blocos, comentou: "Para determinar a quantidade total, devemos multiplicar esse resultado por três, pois o raciocínio utilizado acima será repetido três vezes". Mesmo sendo um comentário incorreto, pois é preciso analisar outras variáveis, valorizamos a importância da observação do aluno e comentamos que em casos como esse o raciocínio correto seria calcular uma potência, afinal temos 3 blocos iguais para serem preenchidos da mesma forma e que ainda poderia ser permutados entre si. Realizamos, então o cálculo apresentado em [16] para se determinar a quantidade total das grades.

Infelizmente, esse mesmo raciocínio não produz a quantidade exata de grades, não podendo ser aplicado nos outros dois blocos de três linhas, pelo fato de um bloco preenchido influenciar nos demais. Para contornar essa dificuldade, apresentamos aos alunos o "método rápido" (atividade 5), e citamos que a utilização desse método gera um erro da ordem de 0,2% entre o valor calculado e o total de grades válidas, uma pequena diferença quando analisada em valor porcentual. A vantagem da utilização desse método, é que podemos efetuar os cálculos com a ajuda de uma calculadora científica, chegando rapidamente ao total de jogos. Aproveitamos também para relembrar e apresentar aos alunos o conceito de notação científica, pois vários deles estranharam a forma de como a calculadora apresentou o resultado (notação científica). O fato preocupante é de que alguns alunos, mesmo estando no 3° ano do ensino médio, sequer conheciam esse formato numérico.

Em seguida, comentamos não haver demonstrações apenas manuais do total de grades de um Sudoku e foi explicado aos alunos como Felgenhauer e Jarvis pensaram em reduzir o total de casos para poder terminar a contagem. Desenvolvemos algumas reduções com o grupo de alunos, até onde foi possível utilizar os conceitos de análise combinatória. Foi então mencionado que para terminar o cálculo eles utilizaram algoritmos e contaram com a ajuda de computadores utilizando o método da tentativa e erro, e só assim foi possível chegar ao número total de grades de 6.670.903.752.021.072.936.960, uma quantidade difícil até para se imaginar.

7.7 Construindo Soluções

Encerrada a atividade de cálculo da quantidade de grades, passamos a construir algumas grades de Sudoku, através do uso de uma matriz quadrada de ordem 3 (atividade 4), onde após a construção da primeira matriz, aplicamos algumas transformações na posição de seus elementos e geramos a grade Sudoku, atividade essa que não apresentou maiores dificuldades após as explicações e que os alunos julgaram como sendo bastante fácil de executar, mas que precisava de bastante atenção.

E finalmente, passamos a utilizar essa grade Sudoku para gerar uma nova grade, formando um par ortogonal com a primeira. Foi necessário mostrar alguns exemplos para que os alunos compreendessem o processo e assim pudessem aplicar em suas grades, os alunos envolvidos com as atividades não apresentaram dificuldades em completar suas grades gerando o par ortogonal solicitado. Infelizmente, não foi possível alcançar 100% dos alunos da turma.

No final foi solicitado aos alunos que comentassem a respeito da aplicação dessas atividade e fizessem uma avaliação do trabalho desenvolvido. E, em todos esses comentários, foi possível notar a importância da realização de atividades diferenciadas, onde a grande maioria acaba se envolvendo em sua realização, influenciando de forma positiva o processo ensino-aprendizagem.

Diversos alunos passaram a ver o Sudoku de uma outra forma, dando ao jogo uma maior importância, envolvendo-se na busca de solução e utilizando o tempo vago jogando em casa.

As tabelas a seguir, nos mostram alguns aspectos positivos citados pelos alunos após a realização das atividades com o Sudoku. Na Tabela 7.6, podemos destacar o estímulo do raciocínio lógico para a solução de problemas, e na Tabela 7.7, podemos ver que os alunos consideraram as atividades e o uso do Sudoku como sendo recursos úteis no processo ensino - aprendizagem.

Tabela 7.6: Aspectos da aplicação

Aspectos importantes destacados na aplicação	
Estimular o raciocínio	50%
Estimular a concentração	36,7%
Aprender a jogar	13,3%

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 7.7: Qualificando a aplicação

O que você achou das atividades desenvolvidas?	
Gostei, achei útil.	60%
Gostei, não achei útil	33,3%
Não gostei	6,7%

Fonte: Elaborada pelo autor

Podemos afirmar, que esses comentários nos deixam felizes em saber que a partir de um projeto de pesquisa, diversos alunos foram desafiados e passaram a ver e utilizar o Sudoku como aliado no desenvolvimento de seu raciocínio, dedicando parte do tempo para praticar o jogo.

Infelizmente, como podemos ver, nem todos os alunos que tiveram contato com as atividades, julgaram como sendo úteis e aplicáveis em suas tarefas cotidianas. Mas com certeza uma pequena semente foi plantada e podemos afirmar que eles começaram a abrir caminho para o desenvolvimento do raciocínio lógico e uma melhor concentração em suas atividades.

8 Conclusão

Ao analisar os dados de rendimento escolar dos estudantes do Ensino Médio, não só da Escola Estadual Professora Carolina Lopes de Almeida, como também de outras escolas, apresentados por índices governamentais, podemos notar o baixo aproveitamento em Matemática, e que a grande maioria dos alunos não possui um nível adequado de conhecimento, e que na maioria das vezes, é fruto da falta de concentração e dedicação para realizar as atividades.

Atualmente, os alunos tem o hábito de abandonar os exercícios ao se depararem com as dificuldades, não se esforçando para superá-las. Buscamos com o uso do Sudoku e dessas atividades, fazer com que os alunos passem a ter um maior grau de concentração e dedicação durante a resolução de uma atividade, mostrando que com uma dose de esforço, é possível resolver os problemas propostos.

Durante o desenvolvimento dessas atividades, foi possível notar o comprometimento e participação de grande parte dos alunos envolvidos, onde eles se empenharam na resolução das atividades propostas, dedicando-se e não desistindo mesmo ao se depararem com dificuldades (a participação não foi conforme o esperado). Como em toda atividade realizada em sala de aula, não foi possível atingir 100% dos alunos, pois temos aqueles que não se envolvem com qualquer atividade que seja. A aplicação realizada em duas turmas diferentes, permitiu uma observação das diferenças entre o grau de interesse daqueles que participaram como convidados e daqueles que foram "convocados" a participar, mostrando que ainda existem alunos interessados em aprender matemática.

Infelizmente, poucos alunos se interessam por matemática, pois para apropriarem-se de conceitos, precisam de muita dedicação e esforço. Muitos alunos acham que o simples fato de estar em uma sala de aula já os capacita para dominar todos os conceitos que o professor apresenta, não dando importância para as atividades e para os estudos. Podemos notar isso durante aplicação de um Sudoku, pois vários alunos não quiseram se empenhar na busca da solução e apenas alguns conseguiram completar a tarefa.

Nas duas turmas, foi possível notar uma falta de requisitos básicos para a aplicação das atividades, uma das turmas (convidados) ainda não tinha estudado alguns conceitos e, consequentemente, não poderiam saber, mas a outra turma que havia estudado, não se lembrava deles. O que podemos fazer para solucionar esse problema seríssimo?

Nesse ponto, podemos verificar diversas falhas do nosso sistema educacional, afinal de contas, alunos do 3° ano do ensino médio deveriam conhecer e saber utilizar conceitos básicos do princípio fundamental da contagem, de notação científica, de matrizes, de funções entre outros. Infelizmente, a grande maioria dos alunos não tem o hábito de estudo, resumindo seu contato com a matemática apenas nas poucas horas que estão em sala de aula, fator esse que prejudica em muito o aprendizado.

Um dos objetivos desse trabalho, foi oferecer mais uma oportunidade para aqueles alunos que se dedicam ao estudo, que querem aprender um pouco mais sobre os temas abordados durante as aulas, e que, muitas vezes acabam sendo prejudicados pelo sistema educacional que não permite ao professor aplicar atividades mais elaboradas, pois a maioria não irá acompanhar a aula. Foi mostrado também, que existem diversos campos de pesquisa dentro da matemática esperando por pessoas dedicadas que utilizem seu tempo para procurar respostas para perguntas ainda sem solução.

A aplicação das atividades descritas nesse trabalho, proporcionou a turma de alunos do 3° ano do ensino médio, uma oportunidade de retomada e fixação de conceitos relacionados à análise combinatória, matrizes, potências e notação científica, dando aos alunos uma chance a mais de se apropriarem de algumas competências necessárias na resolução das provas do ENEM, vestibulares e concursos.

Podemos afirmar que durante a realização das atividades, além de atingir os objetivos propostos, outros objetivos não programados foram aparecendo e também foram atingidos. Como por exemplo, o caso da escrita de números em notação científica, que surgiu de uma necessidade dentro do cálculo que estava sendo realizado. Fato esse, que acontece diariamente durante as aulas, onde o professor determina um objetivo, e ao iniciar sua aula, ela acaba tomando outro rumo devido às falhas no processo educacional dos alunos.

Felizmente, foi possível apresentar o Sudoku aos alunos, explorar conceitos de análise combinatória, realizar o processo de contagem das grades, desafia-los a utilizar o jogo em seu cotidiano, apresentar outras variações do jogo e confronta-los com algumas questões que ainda não apresentam soluções. Com certeza, todas essas atividades são apenas um incentivo na busca de um objetivo maior que é a formação integral dos alunos.

Por sorte, nem tudo está perdido e alguns poucos alunos (poucos!), algumas vezes aqueles que menos esperamos, mostraram uma enorme dedicação, questionando as situações apresentadas e tornando o desenvolvimento das atividades um momento enriquecedor para todos os envolvidos. Fatos como esse que nos motivam e nos ajudam a não desistir do ensino da matemática.

Referências

[1] BAILEY, R. A.; CAMERON, P. J.; CONNELLY, R. Sudoku, gerechte designs, resolutions, affine space, spreads, reguli, and hamming codes. **American Mathematical Monthly,** Washington, v. 115, n. 5, p. 383-404, 2008.

[2] BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. - Brasília, 1997.

[3] CORNELL UNIVERSITY DEPARTAMENT OF MATHEMATICS. **The math behind the sudoku.** Disponível em: <http://www.math.cornell.edu/~mec/Summer2009/Mahmood/Home.html>. Acesso em: 10 abr. 2017.

[4] DANTE, L. R. **Matemática:** contexto & aplicações. 3^a ed. São Paulo, Ática, 2016.

[5] DELAHAYE, J. P. The science behind sudoku. **Scientific American,** New York, v. 294, n. 6, p. 80-87, 2006.

[6] DOMINGUES, H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna.** São Paulo: Atual, 2003.

[7] FELGENHAUER, B.; JARVIS, F. **Enumerating possible sudoku grids.** [S. 1.], 2005. Disponível em: <http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/ sudoku/ sudoku.pdf.>, Acesso em: 10 abr. 2017.

[8] FELGENHAUER, B.; JARVIS, F. Mathematics of Sudoku I. **Mathematical Spectrum,** Sheffield, v. 39, n. 1, p. 15-22, 2006.

[9] JONES, S. K.; ROACH, P. A.; PERKINS, S. Properties of sudoku puzzles. In: RESEARCH STUDENT WORKSHOP, 2., 2007, p. 7-11.

[10] KEEDWELL, A. D. On sudoku squares. **The Institute of Combinatorics & Its Applications:** bulletin, Winnipeg, v. 50, p. 52-60, 2007.

[11] LORCH, C.; LORCH, J. Enumerating small sudoku puzzles in a first abstract algebra course. **PRIMUS:-** Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, New York, v. 18, n. 2, p. 149-157, 2008.

[12] LORCH, J. Mutually orthogonal families of linear sudoku solutions. **Journal of the Australian Mathematical Society**, Melbourne, v. 87, n. 3, p. 409-420, 2009.

[13] LORCH, J. Orthogonal combings of linear sudoku solutions. **Australasian Journal of Combinatorics**, Brisbane, v. 47, p. 247-264, 2010.

[14] MARTINS, P. M. Existe um sudoku com 16 pistas?. **Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática,** Lisboa, n. 66, p. 57-63, maio 2012.

[15] MCGUIRE, G.; TUGEMANN, B.; CIVARIO, G. There is no 16-clue sudoku: solving the sudoku minimum number of clues problem via hitting set enumeration. **Experimental Mathematics**, Boston, v. 23, n. 2, p. 190-217, 2014.

[16] ROSENHOUSE, J.; TAALMAN, L. **Taking sudoku seriously:** the math behind the worlds most popular pencil puzzle. Oxford: Oxford University Press, 2011.

[17] ROYLE, G. **Combinatorial concepts with sudoku I:** symmetry. [S.1.], 2006. Disponível em: <http://ko.c.wong.tripod.com/sudoko/study/sudoku-symmetry.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2017.

[18] RUSSELL, E.; JARVIS, F. Mathematics of sudoku II. **Mathematical Spectrum,** Sheffield, v. 39, n. 2, p. 54-58, 2006.

[19] SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Material de apoio ao currículo do Estado de São Paulo:** caderno do professor; matemática, ensino médio, 2^a série. São Paulo, 2014. v. 2, p.128.

[20] TAALMAN, L.; Taking sudoku seriously. **Math Horizons,** v. 15, n. 1, p. 5-9, 2007.

[21] WANKO, J. J.; NICKELL, J. V. Reinforcing geometric properties with shapedoku puzzles. **Mathematics Teacher,** Syracuse, v. 107, n. 3, p. 188-194, 2013.

A Atividades Aplicadas

A MATEMÁTICA POR TRÁS DO SUDOKU, UM ESTUDO DE CASO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

(Atividade introdução – INTRO)

Grupo de Trabalho: __________

Aluno 1: ____

Aluno 2: ____

Aluno 3: ____

Aluno 4: ____

1. Questões sobre o conhecimento do Sudoku:

(INTRO 1)

- Você conhece o Sudoku?

(INTRO 2)

- Já jogou ou tentou jogar alguma vez? Conseguiu completar o jogo?

(INTRO 3)

- Você tem ideia de quantos jogos diferentes existem?

(INTRO 4)

- Quais habilidades você considera que sejam importantes na resolução de um Sudoku?

(INTRO 5)

- Você considera que saber Matemática ajuda na busca da solução do jogo? Comente alguns aspectos que você julga importante.

A MATEMÁTICA POR TRÁS DO SUDOKU, UM ESTUDO DE CASO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

(Atividade 1 – Aluno 1)

Grupo de Trabalho: ______ Aluno 1: ____

O Caso 4 x 4

Atividade A: Preencher a grade da figura 1 com os algarismos 1, 2, 3 e 4.

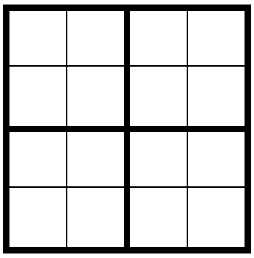


Figura 1

Atividade B: Anotar na grade da figura 2 a solução determinada pelo aluno 1 do outro grupo de trabalho. Comparar as soluções e apontar eventuais diferenças.

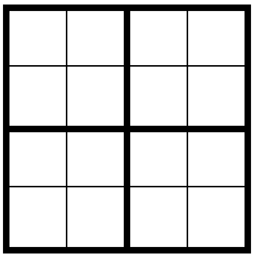
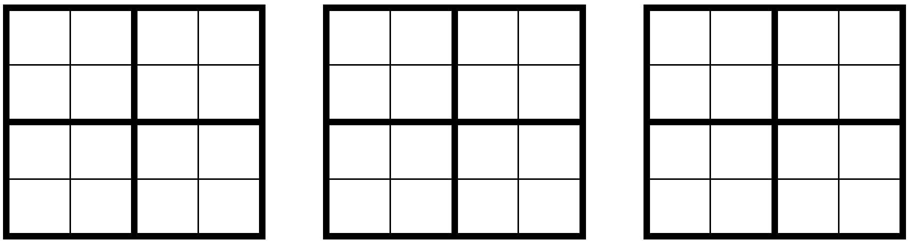


Figura 2

Atividade C: Anotar na primeira grade da figura 3 a solução da atividade 1, na segunda grade da figura 3 a solução determinada por um de seus colegas de grupo e na terceira grade a "transformação" dessa grade para o mesmo sistema que você utilizou. Elaborar uma relação entre os símbolos das duas grades e "transformar" a grade do seu colega escrevendo no seu sistema. Compare as soluções e responda as questões:



Grade 1 Grade 2 Grade 3

Figura 3

- A grade "transformada" ficou igual a minha grade?
- Essa nova grade, respeita a "Regra Única"?
- O sistema adotado para "transformar" as grades é único, elabore uma maneira diferente de "transformar" as grades.

A MATEMÁTICA POR TRÁS DO SUDOKU, UM ESTUDO DE CASO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

(Atividade 1 – Aluno 2)

Grupo de Trabalho: ______ Aluno 2: ____

O Caso 4 x 4

Atividade A: Preencher a grade da figura 1 com os algarismos A, B, C e D.

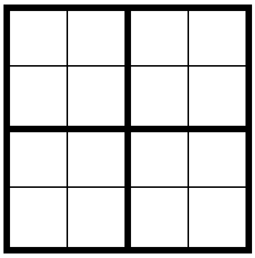


Figura 1

Atividade B: Anotar na grade da figura 2 a solução determinada pelo aluno 2 do outro grupo de trabalho. Comparar as soluções e apontar eventuais diferenças.

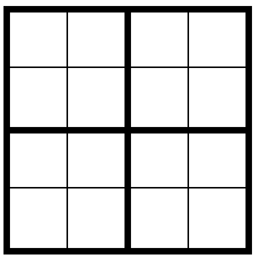
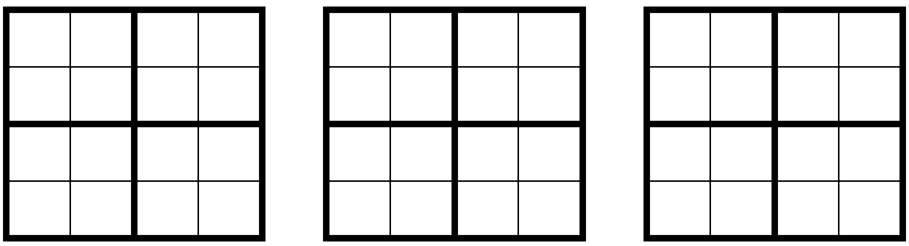


Figura 2

Atividade C: Anotar na primeira grade da figura 3 a solução da atividade 1, na segunda grade da figura 3 a solução determinada por um de seus colegas de grupo e na terceira grade a "transformação" dessa grade para o mesmo sistema que você utilizou. Elaborar uma relação entre os símbolos das duas grades e "transformar" a grade do seu colega escrevendo no seu sistema. Compare as soluções e responda as questões:



Grade 1 Grade 2 Grade 3

Figura 3

- A grade "transformada" ficou igual a minha grade?
- Essa nova grade, respeita a "Regra Única"?
- O sistema adotado para "transformar" as grades é único, elabore uma maneira diferente de "transformar" as grades.

A MATEMÁTICA POR TRÁS DO SUDOKU, UM ESTUDO DE CASO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

(Atividade 1 – Aluno 3)

Grupo de Trabalho: ______ Aluno 3: ____

O Caso 4 x 4

Atividade A: Preencher a grade da figura 1 com os algarismos +, %, * e #.

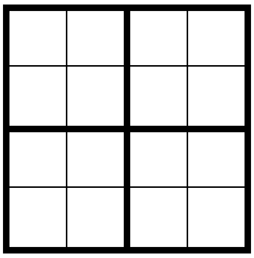


Figura 1

Atividade B: Anotar na grade da figura 2 a solução determinada pelo aluno 3 do outro grupo de trabalho. Comparar as soluções e apontar eventuais diferenças.

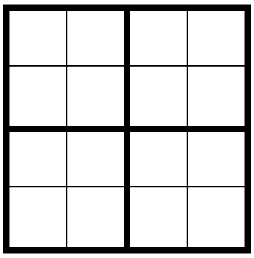
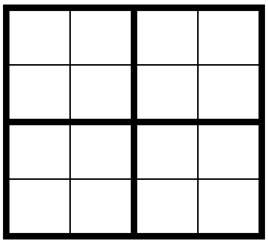
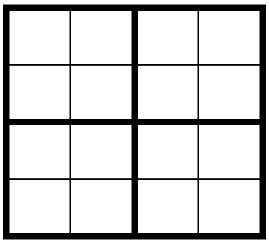


Figura 2

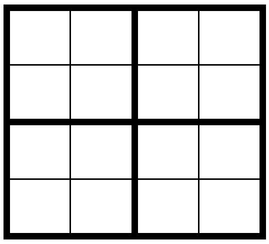
Atividade C: Anotar na primeira grade da figura 3 a solução da atividade 1, na segunda grade da figura 3 a solução determinada por um de seus colegas de grupo e na terceira grade a "transformação" dessa grade para o mesmo sistema que você utilizou. Elaborar uma relação entre os símbolos das duas grades e "transformar" a grade do seu colega escrevendo no seu sistema. Compare as soluções e responda as questões:



Grade 1



Grade 2



Grade 3

Figura 3

- A grade "transformada" ficou igual a minha grade?
- Essa nova grade, respeita a "Regra Única"?
- O sistema adotado para "transformar" as grades é único, elabore uma maneira diferente de "transformar" as grades.

A MATEMÁTICA POR TRÁS DO SUDOKU, UM ESTUDO DE CASO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

(Atividade 1 – Aluno 4)

Grupo de Trabalho: ______ Aluno 4: ____

O Caso 4 x 4

Atividade A: Preencher a grade da figura 1 com os algarismos α, β, μ, π.

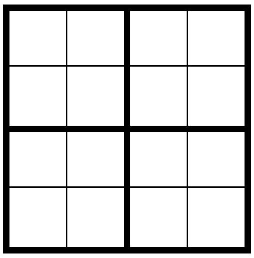


Figura 1

Atividade B: Anotar na grade da figura 2 a solução determinada pelo aluno 4 do outro grupo de trabalho. Comparar as soluções e apontar eventuais diferenças.

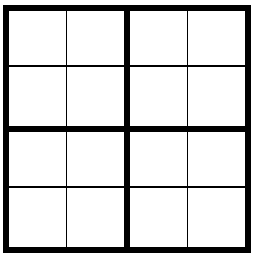
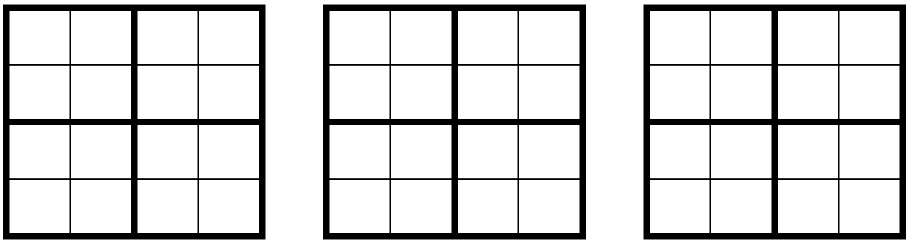


Figura 2

Atividade C: Anotar na primeira grade da figura 3 a solução da atividade 1, na segunda grade da figura 3 a solução determinada por um de seus colegas de grupo e na terceira grade a "transformação" dessa grade para o mesmo sistema que você utilizou. Elaborar uma relação entre os símbolos das duas grades e "transformar" a grade do seu colega escrevendo no seu sistema. Compare as soluções e responda as questões:



Grade 1 Grade 2 Grade 3

Figura 3

- A grade "transformada" ficou igual a minha grade?
- Essa nova grade, respeita a "Regra Única"?
- O sistema adotado para "transformar" as grades é único, elabore uma maneira diferente de "transformar" as grades.

A MATEMÁTICA POR TRÁS DO SUDOKU, UM ESTUDO DE CASO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

(Atividade 2)

Nessa etapa, os alunos serão apresentados ao princípio fundamental da contagem e passaremos a contar esses grupos.

Elaborar a contagem das possibilidades, a partir da grade da figura abaixo e respeitando a regra única.

1	2		
3	4		

1	2		
3	4		

1	2		
3	4		

1	2		
3	4		

1	2		
3	4		

1	2		
3	4		

Verificar que existem 6 regiões 2 x 1 que devem ser preenchidos com dois algarismos diferentes, gerando o total de combinações.

A MATEMÁTICA POR TRÁS DO SUDOKU, UM ESTUDO DE CASO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

(Atividade 3)

Passaremos a contar a grade 9 x 9, utilizando inicialmente as três linhas superiores, começando pelo bloco superior esquerdo conforme a figura. Propor o preenchimento da linha superior utilizando 4, 5, 6 (no primeiro bloco) e 7, 8, 9 (no segundo bloco).

1	2	3						
4	5	6						
7	8	9						

Quantas regiões 3 x 1 podemos destacar nesse bloco de linhas?

Escreva os arranjos possíveis para completar a 1ª linha:

1	2	3	$\{4,$	$5,$	$7\}$	$\{6,$	$8,$	$9\}$
4	5	6	$\{8,$	$9,$	$a\}$	$\{7,$	$b,$	$c\}$
7	8	9	$\{6,$	$b,$	$c\}$	$\{4,$	$5,$	$a\}$

De quantas formas podemos distribuir os algarismos 1, 2 e 3 no lugar de a, b e c?

Com base nessas informações, calcular o total de formas de preencher as três linhas do bloco superior:

A MATEMÁTICA POR TRÁS DO SUDOKU, UM ESTUDO DE CASO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

(Atividade 4)

Nesta atividade vamos aprender a construir uma grade de Sudoku válida a partir de uma matriz quadrada de ordem 3 e a seguir gerar um par ortogonal para a grade construída.

1) Preencha a tabela abaixo com os algarismos de 1 a 9 em qualquer ordem. (Lembre-se que não podemos repetir elementos).

2) Utilizar essa tabela para construir a grade Sudoku, da seguinte forma:

- O primeiro bloco deverá ser preenchido pela matriz quadrada de ordem 3, construída por cada aluno.
- O segundo e terceiro blocos deverão ser preenchido com os elementos do bloco anterior, incrementando a ordem das linhas e das colunas.
- O bloco central e o inferior, deverão ser preenchidos com os elementos do bloco anterior, apenas incrementando a ordem das colunas.
- Para terminar de preencher a grade, vamos seguir a regra utilizada no segundo e terceiro bloco.

3) A seguir vamos obter um par ortogonal para essa grade:

- Manter a primeira coluna da grade inalterada.
- Transformar as diagonais das matrizes dos blocos da atividade anterior (primeira pilha), em linhas da nova grade.
- Para completar as demais pilhas, vamos apenas incrementar a ordem das linhas.

4) Conclusão: Comente pontos positivos ou negativos a respeito dessas atividades. O que vocês acharam? O que aprenderam? Vocês consideram importante atividades desse tipo para o aprendizado?

A MATEMÁTICA POR TRÁS DO SUDOKU, UM ESTUDO DE CASO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

(Atividade 5)

Finalizando o cálculo da quantidade de grades de Sudoku:

1) Calculando a quantidade de formas de preencher a faixa superior.

2) Utilizando um método rápido para obter um resultado aproximado.

3) Aplicando algumas reduções:

a) Mantendo o primeiro bloco no formato padrão, podemos permutar os outros dois blocos além de permutar as três colunas dentro de cada bloco.

b) Uma segunda redução, podemos permutar os três blocos superiores entre si e as três colunas dentro dos três blocos. Gerando uma redução da seguinte forma. (Infelizmente a partir desse ponto precisamos de ajuda computacional para terminar o cálculo).

c) Com a ajuda computacional, chegou-se ao máximo de reduções possíveis, foi calculado que existem apenas 44 classes diferentes e então foram determinados caso a caso o total de soluções possíveis para cada uma dessas classes, obtendo assim o total de jogos existentes.

$$N = 6.670.903.752.021.072.936.960 \cong 6{,}67\times 10^{21}$$

B Teorema Keedwell

Teorema B.1 (Keedwell 2)**.** *Se a reflexão por um eixo de simetria, rotações e renomeações são desconsideradas, existem apenas 8 Sudokus que são quadrados diagonais de ordem 6 e nenhum deles é ortogonal.*

Demonstração: *Podemos supor que os símbolos usados para as células da diagonal principal esquerda - direita são 1, 2, ..., 6 nessa ordem. Então segue-se (a partir da propriedade de quadrados latinos) que as células A = (3,4) e B = (4,3), não podem conter 3 ou 4. Podemos supor primeiro que elas contém 1 e 2 ou 2 e 1 respectivamente (caso 1). Então, uma vez que 5 e 6 devem ocorrer na diagonal principal direita - esquerda e também no bloco superior direito, podemos supor primeiro que 5 ocorre na célula (1,6) como na figura B.1 ou que 6 ocorre na célula (2,5). Mas ambos são impossíveis. Se o primeiro acontecer, 5 não poderá ocorrer no bloco direito central sem violar a propriedade de um quadrado latino e, da mesma maneira, se o segundo acontecer, 6 não poderá ocorrer no bloco direito central. Assim, na diagonal principal direita - esquerda 5 deverá ocorrer na célula (6,1) e 6 na célula (5,2). Existem então vários sub-casos.*

Figura B.1: Distribuição dos Elementos

1	·	·	·	·	5
·	2	·	·	·	·
·	·	3	2/1	·	·
·	·	1/2	4	·	·
·	·	·	·	5	·
·	·	·	·	·	6

Fonte: KEEDWELL, 2007. p. 56

Caso 1a. *Se a célula A contém 1, a célula B contém 2, a célula (2,5) contém 3 e a célula (1,6) contém 4, então as entradas mostradas na figura B.2 serão todas forçadas (a ordem como elas são forçadas é indicada como suficiente) e então a terceira linha do quadrado viola a propriedade de quadrado latino.*

Figura B.2: Distribuição dos Elementos - Caso 1a

1	·	·	·	·	4
·	2	·	·	3	·
·	5_2	3	1	·	5_2
·	1_1	2	4	·	3_1
2_1	6	·	·	5	·
5	·	·	·	·	6

Fonte: KEEDWELL, 2007. p. 56

Caso 1b. *Se a célula A contém 1, e a célula B contém 2, a célula (2,5) contém 4 e a célula (1,6) contém 3, existirá duas possibilidades para completar o quadrado como mostrado na figura B.3. (Todas as entradas são forçadas na ordem mostrada, exceto nas células (1,3),(1,4),(2,3) e (2,4).)*

Figura B.3: Distribuição dos Elementos - Caso 1b

1	4_3	5/6	6/5	2_3	3
3_5	2	6/5	5/6	4	1_5
4_4	5_2	3	1	6_2	2_3
6_3	1_1	2	4	3_1	5_4
2_1	6	1_5	3_6	5	4_6
5	3_3	4_6	2_5	1_3	6

Fonte: KEEDWELL, 2007. p. 56

Caso 1c. *Se a célula A contém 2, a célula B contém 1, a célula (2,5) contém 4 e a célula (1,6) contém 3, então as entradas mostradas na figura B.4 são todas forçadas (a ordem na qual elas são forçadas é indicada como suficiente, como anteriormente) e então a terceira linha do quadrado viola o propriedade dos quadrados latinos.*

Figura B.4: Distribuição dos Elementos - Caso 1c

1	·	·	·	·	3
·	2	·	·	4	·
6_2	·	3	2	6_2	·
2_1	·	1	4	3_1	·
·	6	·	·	5	·
5	1_1	·	·	·	6

Fonte: KEEDWELL, 2007. p. 56

Caso 1d. *Se a célula A contém 2, a célula B contém 1, a célula (2,5) contém 3 e a* *célula (1,6) contém 4, existirá novamente duas possibilidades para completar o quadrado como mostrado na figura B.5.*

Figura B.5: Distribuição dos Elementos - Caso 1d

1	3_5	5/6	6/5	2_6	4
4_4	2	6/5	5/6	3	1_4
6_2	4_4	3	2	1_4	5_2
2_1	5_3	1	4	6_3	3_1
3_3	6	4_6	1_6	5	2_3
5	1_1	2_6	3_6	4_5	6

Fonte: KEEDWELL, 2007. p. 57

Como já observado, as células A = (3,4) e B = (4,3) não podem conter 3 ou 4. Podemos supor em seguida que elas contenham 1 e 5 ou 5 e 1 respectivamente, como mostrado na figura B.6 (caso 2). Na diagonal principal direita - esquerda, 6 não pode ser colocado nas células (1,6) ou (6,1) caso contrário a propriedade do quadrado latino não será mantida. Se 6 for colocado na célula (2,5), então não haverá lugar possível para colocar o 6 no bloco central direito. Consequentemente, 6 deverá ocupar a célula (5,2). Da mesma forma, 2 não poderá ser colocado na célula (2,5) caso contrário a propriedade do quadrado latino não será verificada. Se 2 for colocado na célula (6,1), então não haverá lugar possível para colocar o 2 no bloco central esquerdo. Consequentemente, 2 deverá ocupar a célula (1,6). Existem novamente diversos casos.

Figura B.6: Distribuição dos Elementos - Caso 2

1	·	·	·	·	2
·	2	·	·	·	·
·	·	3	5/1	·	·
·	·	1/5	4	·	·
·	6	·	·	5	·
·	·	·	·	·	6

Fonte: KEEDWELL, 2007. p. 57

Caso 2a. *Se a célula A contém 5, a célula B contém 1, a célula (2,5) contém 3 e a célula (6,1) contém 4, então as entradas mostradas na figura B.7 serão todas forçadas, e não existirá lugar para o 1 no bloco inferior direito.*

Figura B.7: Distribuição dos Elementos - Caso 2a

1	·	·	·	·	2
·	2	·	1_2	3	5_1
·	4_1	3	5	·	·
·	·	1	4	·	·
·	6	·	·	5	4_1
4	1_1	·	·	·	6

Fonte: KEEDWELL, 2007. p. 57

Caso 2b. *Se a célula A contém 5, a célula B contém 1, a célula (2,5) contém 4 e a célula (6,1) contém 3, então as entradas mostradas na figura B.8 serão todas forçadas, e não existirá lugar para o 3 no bloco superior direito.*

Figura B.8: Distribuição dos Elementos - Caso 2b

1	3_1	·	·	·	2
·	2	·	1_2	4	5_1
·	·	3	5	·	·
·	·	1	4	·	·
·	6	·	·	5	4_1
3	1_1	·	·	·	6

Fonte: KEEDWELL, 2007. p. 57

Caso 2c. *Se a célula A contém 1, a célula B contém 5, a célula (2,5) contém 3 e a célula (6,1) contém 4, então existirá duas possibilidades de completar o quadrado, como podemos ver na figura B.9. (Todas as entradas serão forçads, exceto nas células (3,1),(3,5),(4,1) e (4,5).)*

Figura B.9: Distribuição dos Elementos - Caso 2c

1	3_1	6_4	5_3	4_2	2
5_2	2	4_3	6_4	3	1_1
2/6	4_1	3	1	6/2	5_1
6/2	1_1	5	4	2/6	3_1
3_2	6	1_6	2_5	5	4_1
4	5_1	2_5	3_5	1_4	6

Fonte: KEEDWELL, 2007. p. 58

Caso 2d. *Se a célula A contém 1, a célula B contém 5, a célula (2,5) contém 4 e a célula (6,1) contém 3, as entradas mostradas na figura B.10 serão todas forçadas e não haverá lugar para o 3 no bloco inferior direito.*

Figura B.10: Distribuição dos Elementos - Caso 2d

1	3_1	·	·	·	2
·	2	·	3_2	4	1_1
·	·	3	1	·	5_1
·	1_1	5	4	·	·
·	6	·	·	5	4_1
3	5_1	·	·	·	6

Fonte: KEEDWELL, 2007. p. 58

Existem 3 possibilidades adicionais para os conteúdos das células A = (3,4) e B = (4,3): ou seja, elas podem conter 1 e 6, 2 e 5 ou 2 e 6, em cada caso em qualquer ordem. Utilizando argumentos semelhantes aos utilizados no caso 2, encontramos 4 possibilidades de entradas para a diagonal principal direita - esquerda em cada caso. Nossa tentativa de completar os quadrados para aqueles que tem a propriedade Sudoku podem ser resumidas como segue (onde as entradas da diagonal principal direita - esquerda estão listadas em ordem a partir da célula superior direita para a célula inferior esquerda):

- *2, 3, 6, 1, 4, 5 (sem solução);*
- *2, 4, 6, 1, 3, 5 (sem solução);*
- *2, 3, 1, 6, 4, 5 (sem solução);*
- *2, 4, 1, 6, 3, 5 (sem solução);*
- *3, 1, 5, 2, 6, 4 (sem solução);*
- *4, 1, 5, 2, 6, 3 (sem solução);*
- *3, 1, 2, 5, 6, 4 (sem solução);*
- *4, 1, 2, 5, 6, 3 (sem solução);*
- *3, 1, 6, 2, 4, 5 (sem solução);*
- *4, 1, 6, 2, 3, 5 (sem solução);*
- *3, 1, 2, 6, 4, 5 (duas soluções, figura B.11);*
- *4, 1, 2, 6, 3, 5 (sem solução).*

Figura B.11: Distribuição dos Elementos na Diagonal Direita - Esquerda

1	6_2	4_5	5_4	2_1	3
3_1	2	5_5	6_3	1	4_2
4_1	1/5	3	2	6_1	5/1
2_1	5/1	6	4	3_2	1/5
6_1	4	1_3	3_3	5	2_2
5	3_4	2_3	1_4	4_1	6

Fonte: KEEDWELL, 2007. p. 59

Isso completa a demonstração do teorema onde observamos que não existem quadrados latinos ortogonais de ordem 6. Nenhum dos dois quadrados diagonais podem ser ortogonais.