



ANA CLAUDYA BOTELHO DE REZENDE

**UMA GENERALIZAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA DOS NOVE PONTOS
PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA**

Santo André, 2017



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

ANA CLAUDYA BOTELHO DE REZENDE

**UMA GENERALIZAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA DOS NOVE PONTOS
PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA**

Orientadora: Profa. Dra. Ana Carolina Boero

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELA ALUNA ANA CLAUDYA BOTELHO DE REZENDE,
E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. ANA CAROLINA BOERO.

SANTO ANDRÉ, 2017

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Botelho de Rezende, Ana Claudya

Uma generalização da Circunferência dos Nove Pontos para a Educação Básica / Ana Claudya Botelho de Rezende. — 2017.

113 fls. : il.

Orientadora: Ana Carolina Boero

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo André, 2017.

1. Reta de Euler. 2. Circunferência dos Nove Pontos. 3. Teorema de Feuerbach. 4. Cônica dos Nove Pontos. I. Boero, Ana Carolina. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2017. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 23 de outubro de 2017.

Assinatura do autor: Ana Claudya B. de Rezende

Assinatura do orientador: Ja Wilson



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Fundação Universidade Federal do ABC

Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP

CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

profinat@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Ana Claudya Botelho de Rezende, realizada em 21 de agosto de 2017:

Prof.(a) Dr.(a) **Ana Carolina Boero** (Universidade Federal do ABC) – Presidente

Prof.(a) Dr.(a) **Márcio Fabiano da Silva** (Universidade Federal do ABC) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Paola Andrea Gaviria Kassama** (Universidade Federal de São Paulo) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Eduardo Guéron** (Universidade Federal do ABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Gleiciane da Silva Aragão** (Universidade Federal de São Paulo) – Membro Suplente

Dedico este trabalho ao meu pai Manoel, minha mãe Suely, meu futuro esposo César e aos meus irmãos Ana Paula, Anna Crsthina e Alexandre, pois sem eles este trabalho e muitos dos meus sonhos não se realizariam.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades, pelas oportunidades e acontecimentos ao longo de minha vida e não somente nestes anos como universitária.

Aos meus pais, irmãos, avós, família e amigos pelo amor e incentivo e que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

À Universidade Federal do ABC (UFABC), seu corpo docente, pela oportunidade e formação, bem como a todos os envolvidos na criação e organização do PROFMAT.

À minha querida professora e orientadora, Ana Carolina, pelo apoio, confiança, empenho, correções e pelos muitos incentivos.

À Prof.^a Paola Andrea e ao Prof. Márcio Fabiano pela cuidadosa revisão dessa dissertação.

Ao César, Cristhina e Karina, pelo incentivo nas horas difíceis, de desânimo e cansaço.

Aos amigos que fiz no PROFMAT, Andressa Lima, Denis Martins, Diego Cosis, Eloy Nicotera, Hugo Daniel, Tiago Rossi e Willian Bala, pelas horas e horas de estudos, pelos ensinamentos, incentivo e carinho. Com certeza irão continuar presentes em minha vida.

À todos os professores que passaram por toda a minha vida acadêmica, me proporcionando conhecimento, crescimento e inspiração. Em especial Claudia Guarini, Sandra Boccattelli, Elena Takata, Oswaldo Kazuo Watanabe, Izaias Neri, Conrad Pinheiro e Marlene Alves Dias.

Ao Sr. Adoniram Mauro Figueiredo, “In Memoriam”, pelo incentivo e curiosidade, sei que esteve lá.

E à todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação e que compreenderam a minha ausência nos momentos dedicados ao estudo, o meu muito obrigada.

RESUMO

Neste trabalho, mostraremos que dado um triângulo e três cevianas que se intersectam em um ponto P , existe uma cônica que passa pelos pontos médios dos lados, pelos pés das cevianas e pelos pontos médios dos segmentos que unem P aos vértices do triângulo. Antes de apresentá-lo, contudo, exploraremos a Reta de Euler, a Circunferência dos Nove Pontos e algumas de suas principais propriedades. Finalizaremos este trabalho com duas sugestões de atividades que permitirão ao aluno construir conceitos matemáticos de maneira informal, intuitiva e lúdica, despertando seu interesse por Geometria e pela Matemática em geral.

Palavras-chave: Reta de Euler, Circunferência dos Nove Pontos, Teorema de Feuerbach, Cônica dos Nove Pontos

ABSTRACT

In this work, we will show that given a triangle and three cevians that intersect at a point P , there is a conic that passes through the midpoints of the sides, the feet of the cevians and the midpoints of the segments that join P to the vertices of the triangle. Before presenting it, however, we will explore the Euler Line, the Nine-Point Circle and some of its main properties. We will finish this work with two suggestions of activities that will allow the student to construct mathematical concepts in an informal, intuitive and playful way, arousing his interest in Geometry and Mathematics in general.

Keywords: Euler Line, Nine-Point Circle, Feuerbach's Theorem, Nine-Point Conic

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO	1
1 PRELIMINARES	3
1.1 Geometria	3
1.1.1 Pontos notáveis de um triângulo	7
1.1.2 Resultados	13
1.2 Vetores e Geometria Analítica	16
2 A RETA DE EULER E O INCENTRO	19
2.1 Coordenadas baricêntricas	20
2.2 A Reta de Euler	27
2.3 Sobre o incentro	28
3 A CIRCUNFERÊNCIA DOS NOVE PONTOS E O TEOREMA DE FEUERBACH	37
3.1 A Circunferência dos Nove Pontos	37
3.1.1 Breve história da Circunferência dos Nove Pontos	38
3.1.2 O Teorema da Circunferência dos Nove Pontos	39
3.1.3 Um pouco mais sobre a Reta de Euler	51
3.2 O Teorema de Feuerbach	52
4 A CÔNICA DOS NOVE PONTOS	59
5 ATIVIDADES	69
5.1 Dobraduras de papel	69
5.1.1 Pontos notáveis do triângulo	70
5.1.2 A Reta de Euler	80
5.1.3 A Circunferência dos Nove Pontos	80
5.2 Abordagens visuais da Cônica dos Nove Pontos	82
5.2.1 Primeira abordagem	83
5.2.2 Segunda abordagem	91
Bibliografia	95

INTRODUÇÃO

Nesta dissertação, apresentaremos uma generalização da conhecida Circunferência dos Nove Pontos, um assunto atraente e que possibilita diversas abordagens e reflexões.

Ao buscar um tema para este trabalho, li alguns textos procurando um tópico de meu agrado, que possibilitasse aprimorar o que aprendi no curso e que tivesse impacto na prática didática em sala de aula. O primeiro artigo que me chamou a atenção, [13], traz uma abordagem conceitual da Reta de Euler e da Circunferência dos Nove Pontos. Os tópicos tratados despertaram meu interesse, porém a abordagem não me pareceu adequada para os propósitos desta dissertação. Realizando pesquisas para aprofundar o assunto, encontrei em [16] a possibilidade de considerar uma generalização bastante razoável da Circunferência dos Nove Pontos. A partir daí, o tema estava definido e tal escolha se deu pelo fato dos tópicos tratados estarem diretamente ligados a assuntos pertencentes ao currículo da Educação Básica, proporcionarem questionamentos e conjecturas naturais e, também, pelo fato de problemas envolvendo Geometria serem visuais, facilitando abordagens lúdicas.

Nesse sentido, organizamos este trabalho em cinco capítulos.

O Capítulo 1 tem como objetivo apresentar as definições básicas necessárias para a leitura desta dissertação, fixar nomenclaturas e notações e enunciar resultados que serão utilizados mais adiante.

No Capítulo 2, mostraremos que o circuncentro, o baricentro e o ortocentro de um triângulo qualquer são colineares, sendo a reta que os contém (no caso de um triângulo não-equilátero) denominada Reta de Euler. A demonstração deste resultado fará uso de uma linguagem vetorial que inclui a noção de coordenadas baricêntricas (escrita de um ponto do plano como média ponderada dos vértices de um triângulo). Por fim, apresentaremos relações similares às existentes na Reta de Euler envolvendo o incentro, o baricentro e outros dois pontos interessantes — a saber, o incentro do triângulo medial e o Ponto de Nagel.

O Capítulo 3 é dedicado à Circunferência dos Nove Pontos e algumas de suas principais propriedades. Apresentaremos duas demonstrações bastante diferentes do fato de que, em um triângulo qualquer, a circunferência que passa pelos pontos médios dos lados também passa pelos pés das alturas, bem como pelos pontos médios dos segmentos que unem o ortocentro aos vértices desse triângulo. Mostraremos também que o centro dessa circunferência pertence à Reta de Euler e que a medida de seu raio corresponde à metade da medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo em questão. Por fim, apresentaremos uma demonstração do Teorema de Feuerbach, o qual afirma que a Circunferência dos Nove Pontos de um triângulo não equilátero tangencia tanto a circunferência inscrita quanto as suas três circunferências ex-inscritas.

No Capítulo 4, apresentaremos o principal resultado desta dissertação — a saber, a existência de uma cônica que passa pelos pontos médios dos lados, pelos pés de três cevianas quaisquer que se intersectam em um ponto P e pelos pontos médios dos segmentos que unem P aos vértices do triângulo fixado. Para demonstrar tal teorema, será preciso fixar um sistema de eixos não necessariamente ortogonais. Faremos, então, o estudo da representação das cônicas em um sistema de eixos oblíquos via mudança de coordenadas. Apesar deste resultado ser conhecido, não encontramos nenhuma demonstração do mesmo em língua portuguesa.

Finalizaremos este trabalho apresentando, no Capítulo 5, duas sugestões de atividades para serem realizadas em sala de aula com os alunos. A primeira é direcionada ao anos finais do Ensino Fundamental II e envolve dobraduras de papel. Nela, construiremos os pontos notáveis de um triângulo, destacaremos a Reta de Euler e, por fim, a Circunferência dos Nove Pontos. A segunda, por sua vez, é direcionada ao Ensino Médio e faz uso do GeoGebra, um software de matemática dinâmica gratuito e de fácil manipulação. Nela, construiremos os pontos notáveis de um triângulo, a Reta de Euler, a Circunferência dos Nove Pontos e, por fim, a Cônica dos Nove Pontos.

No decorrer do trabalho, procuramos utilizar uma linguagem uniforme e de fácil entendimento, sem deixar de lado uma riqueza de abordagens. O trabalho também conta com muitas figuras, a fim de tornar visuais as problemáticas e facilitar sua compreensão.

PRELIMINARES

O objetivo deste capítulo é introduzir os principais conceitos trabalhados no texto. Nosso intuito será tão somente apresentar as definições básicas necessárias, bem como fixar nomenclaturas e notações empregadas ao longo do mesmo e enunciar resultados que serão utilizados mais adiante. As principais referências adotadas foram [9], [10], [11] e [5].

1.1 GEOMETRIA

No que segue, estaremos sempre trabalhando em um plano fixado.

A reta determinada por dois pontos distintos A e B será denotada por AB e, como é usual, a mesma notação será empregada para indicar a medida do segmento \overline{AB} de extremos A e B .

Recordamos que a *bissetriz* de um ângulo é a semirreta que o divide em dois outros congruentes e que a *mediatriz* de um segmento é a reta perpendicular ao segmento que contém seu ponto médio.

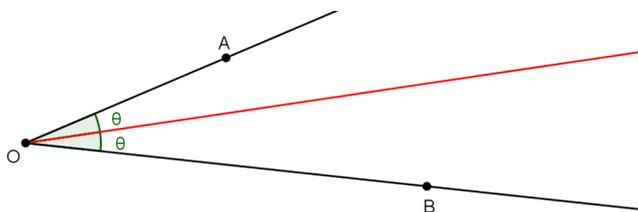


Figura 1: Bissetriz de um ângulo.

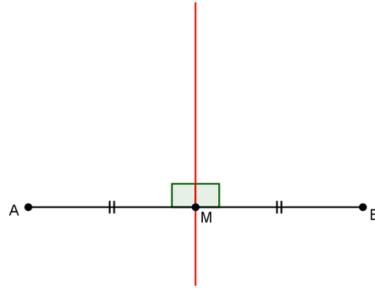


Figura 2: Mediatriz de um segmento.

Chamamos de *lugar geométrico* o conjunto de todos os pontos do plano que satisfazem uma determinada propriedade. Assim, se L é o lugar geométrico dos pontos que satisfazem a propriedade P , temos que: (1) todo ponto de L satisfaz P e (2) os únicos pontos do plano que satisfazem a propriedade P são os pontos de L .

Exemplo 1.1. A bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam dos lados do ângulo.

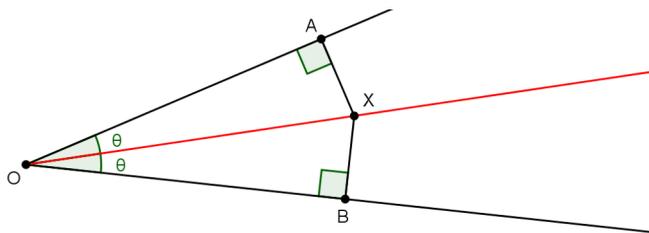


Figura 3: A bissetriz como lugar geométrico.

Exemplo 1.2. A mediatriz de um segmento é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam dos extremos desse segmento.

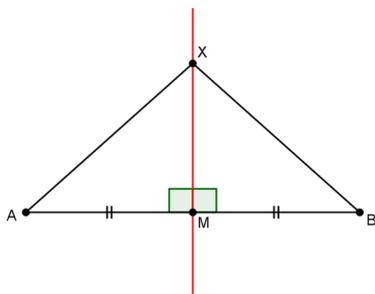


Figura 4: A mediatriz como lugar geométrico.

Chamaremos de *ceviana* a qualquer segmento, semirreta ou reta que passa por um vértice do triângulo e intersesta a reta suporte do lado oposto a esse vértice em um ponto.

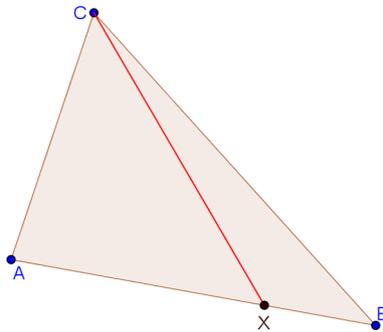


Figura 5: Ceviana.

Exemplo 1.3. Em um triângulo ABC , a *mediana relativa ao lado AB* (ou ao vértice C) é o segmento que une o vértice C ao ponto médio do lado AB . Analogamente definem-se as medianas relativas aos lados AC e BC .

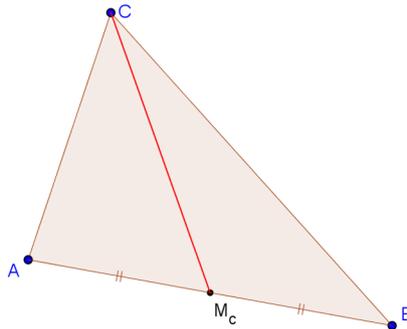


Figura 6: Mediana relativa ao lado AB .

Exemplo 1.4. Em um triângulo ABC , a *altura relativa ao lado AB* (ou ao vértice C) é o segmento que une o vértice C ao pé H_c da perpendicular baixada de C à reta AB . Neste caso, o ponto H_c é denominado o *pé da altura relativa ao vértice C* . Analogamente definem-se as alturas relativas aos lados AC e BC , assim como seus respectivos pés.

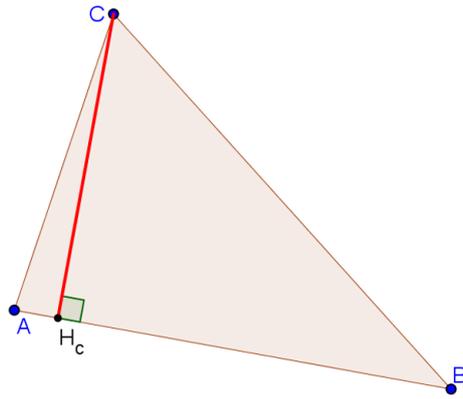


Figura 7: Altura do triângulo acutângulo relativa ao lado AB .

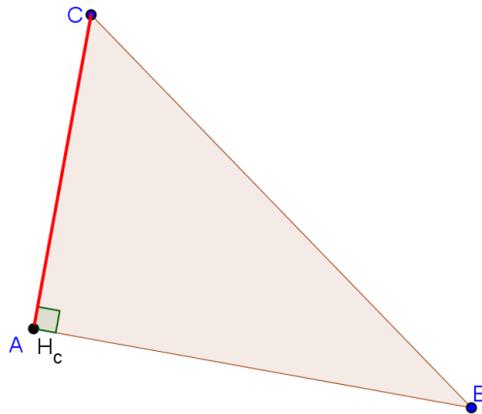


Figura 8: Altura do triângulo retângulo relativa ao lado AB .

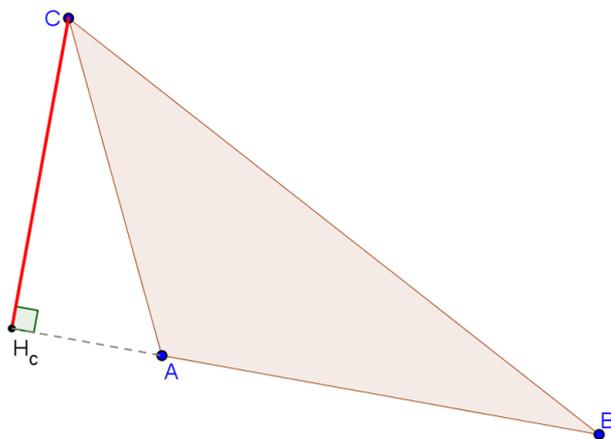


Figura 9: Altura do triângulo obtusângulo relativa ao lado AB .

Exemplo 1.5. Dado um triângulo ABC , as bissetrizes de seus ângulos internos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} são cevianas e serão denominadas *bissetrizes* do triângulo ABC .

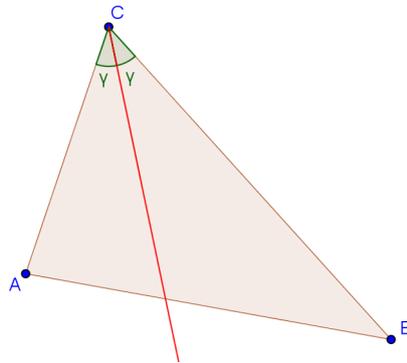


Figura 10: Bissetriz do ângulo \hat{C} do triângulo ABC .

Exemplo 1.6. Dado um triângulo ABC , as bissetrizes de seus ângulos externos também são cevianas e serão denominadas *bissetrizes externas* do triângulo ABC .

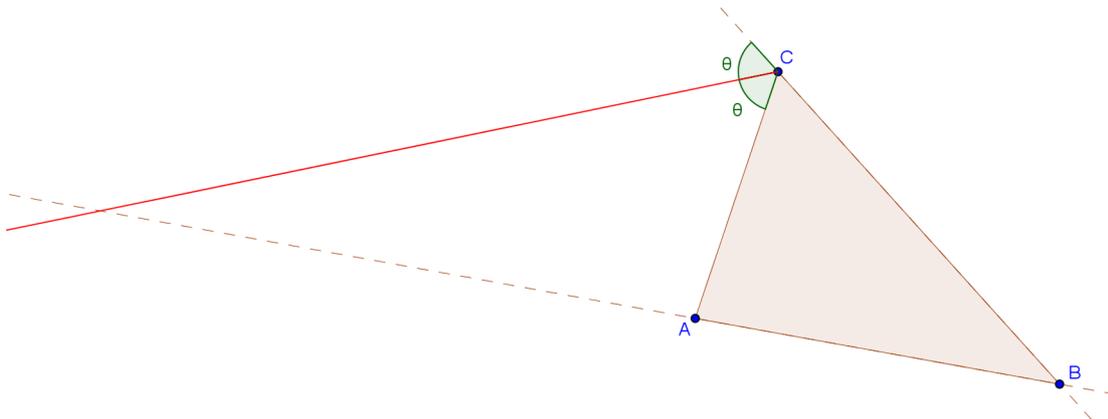


Figura 11: A bissetriz externa do ângulo \hat{C} do triângulo ABC .

1.1.1 Pontos notáveis de um triângulo

Seja ABC um triângulo.

As mediatrizes de \overline{AB} e \overline{AC} concorrem em um ponto O . Como O pertence à mediatriz de \overline{AB} , temos que $OA = OB$. Analogamente, concluímos que $OA = OC$. Portanto, $OB = OC$, o que implica que O pertence à mediatriz de \overline{BC} .

Definição 1.1. O ponto de encontro O das três mediatrizes de um triângulo é denominado o seu *circuncentro*.

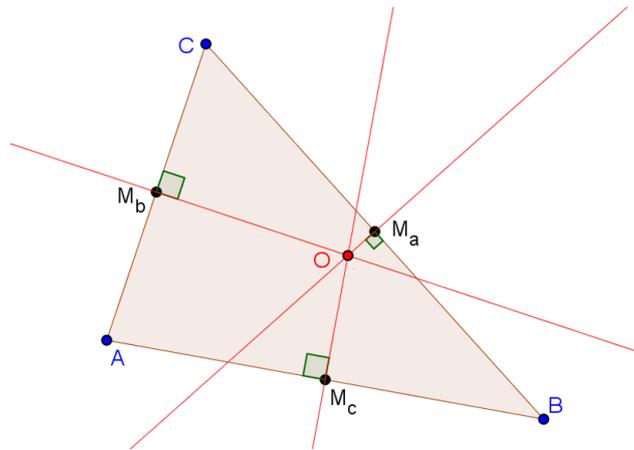


Figura 12: Circuncentro do triângulo ABC .

Observe que o circuncentro O do triângulo ABC é o centro da circunferência circunscrita ao mesmo (isto é, O é o centro da circunferência que passa por A , B e C).

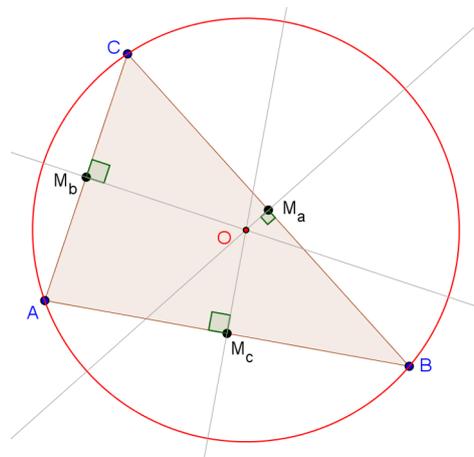


Figura 13: Circunferência circunscrita ao triângulo ABC .

As bissetrizes internas de \hat{B} e \hat{C} concorrem em um ponto I . Como I pertence à bissetriz de \hat{B} , temos que a distância de I ao lado \overline{AB} é igual à distância de I ao lado \overline{BC} . Analogamente, concluímos que a distância de I ao lado \overline{AC} é igual à distância de I ao lado \overline{BC} . Portanto, a distância de I ao lado \overline{AB} é igual à distância de I ao lado \overline{AC} , o que implica que I pertence à bissetriz de \hat{A} .

Definição 1.2. O ponto de encontro I das três bissetrizes de um triângulo é denominado o seu *incentro*.

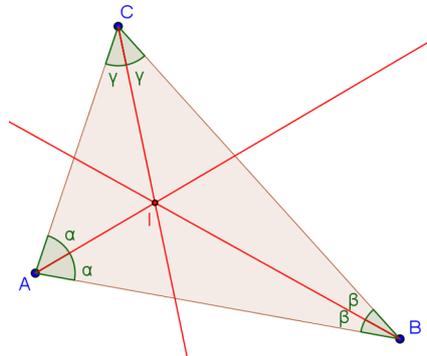


Figura 14: Incentro do triângulo ABC .

Observe que o incentro I do triângulo ABC é o centro da circunferência inscrita ao mesmo (isto é, I é o centro da circunferência que tangencia internamente os três lados do triângulo em questão).

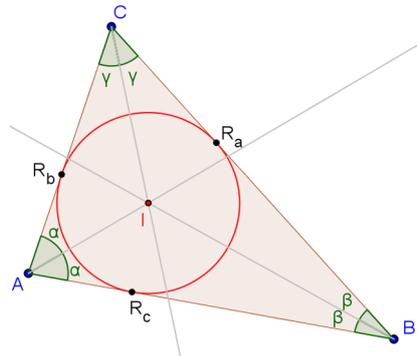


Figura 15: Circunferência inscrita ao triângulo ABC .

Sejam r a reta paralela ao lado \overline{BC} passando pelo vértice A , s a reta paralela ao lado \overline{AC} passando pelo vértice B e t a reta paralela ao lado \overline{AB} passando pelo vértice C . Sejam, ainda, D , E e F as interseções de s e t , de t e r e de r e s , respectivamente.

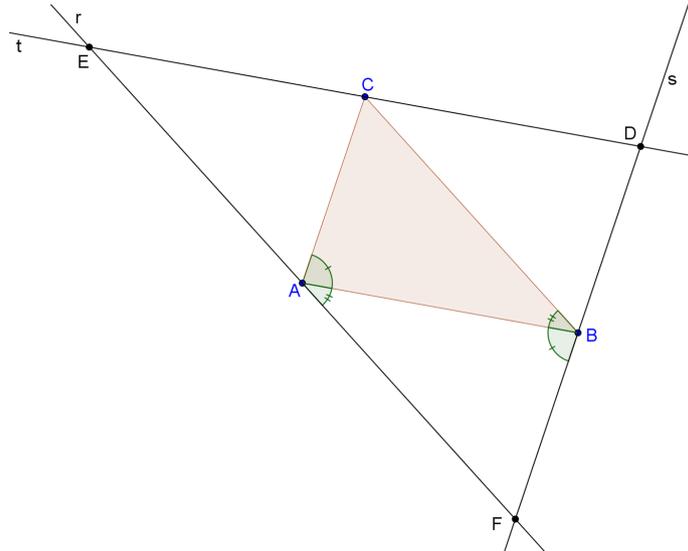


Figura 16: Retas paralelas aos lados do triângulo ABC passando pelos vértices.

Como \overline{AF} é paralelo a \overline{BC} , $\angle ABC = \angle BAF$. Da mesma forma, \overline{BF} é paralelo a \overline{AC} e $\angle BAC = \angle ABF$. Sendo o lado \overline{AB} comum, pelo critério ALA, os triângulos BAF e ABC são congruentes. De forma análoga, temos que os triângulos CEA e DCB também são congruentes ao triângulo ABC . Assim, $FA = AE$, $FB = BD$ e $EC = CD$, ou seja, os pontos A , B e C são os pontos médios dos lados do triângulo DEF . As retas suportes das alturas do triângulo ABC são as mediatrizes do triângulo DEF e, portanto, se intersectam em um único ponto.

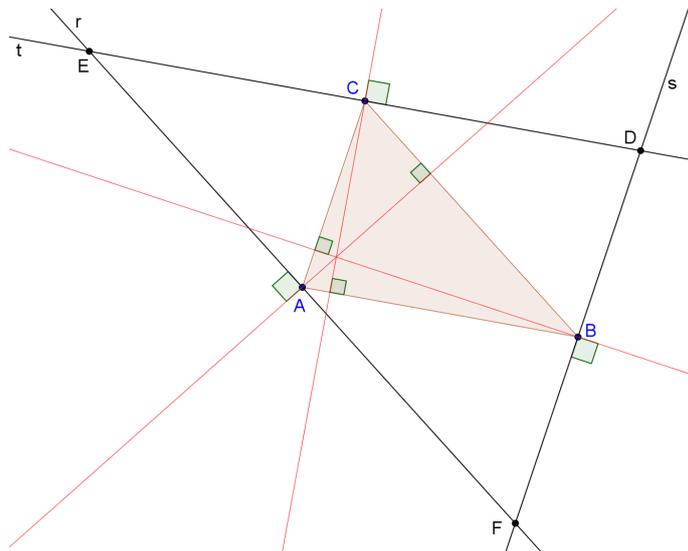


Figura 17: Interseção das retas suportes das alturas do triângulo ABC .

Definição 1.3. O ponto de encontro H das três alturas de um triângulo é denominado o seu *ortocentro*.

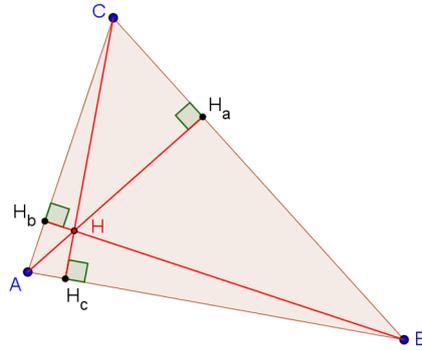


Figura 18: Ortocentro do triângulo ABC .

Sejam M_a , M_b e M_c os pontos médios dos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente. Seja G_1 o ponto de interseção das medianas $\overline{AM_a}$ e $\overline{BM_b}$. Sejam, ainda, X e Y os pontos médios dos segmentos $\overline{AG_1}$ e $\overline{BG_1}$, respectivamente. Aplicando o teorema da base média do triângulo (Teorema 1.9) no triângulo ABC , concluímos que M_aM_b é metade de AB e que $\overline{M_aM_b}$ é paralelo a \overline{AB} . Aplicando o mesmo resultado no triângulo ABG_1 , concluímos que XY também é metade de AB e que \overline{XY} também é paralelo a \overline{AB} . Portanto, $M_aM_b = XY$ e $\overline{M_aM_b}$ é paralelo a \overline{XY} . Logo, M_aM_bXY é um paralelogramo. Temos, portanto, que $XG_1 = G_1M_a$ e $YG_1 = G_1M_b$. Logo, $AG_1 = 2G_1M_a$ e $BG_1 = 2G_1M_b$.

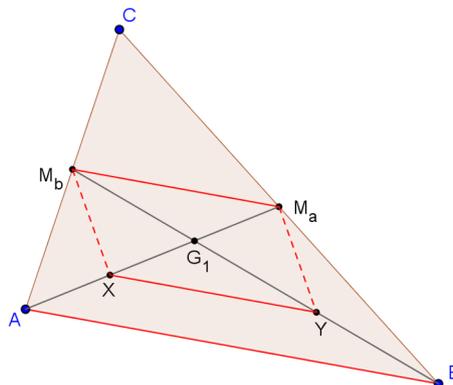


Figura 19: interseção das medianas $\overline{AM_a}$ e $\overline{BM_b}$.

Sendo G_2 o ponto de interseção das medianas $\overline{AM_a}$ e $\overline{CM_c}$, de forma análoga obteremos que $AG_2 = 2G_2M_a$ e $CG_2 = 2G_2M_c$. Consequentemente, temos que $G_1 = G_2$.

Logo, todas as medianas se cruzam em um mesmo ponto G , que divide cada uma delas na razão $2 : 1$ a partir do vértice correspondente.

Definição 1.4. O ponto de encontro G das três medianas de um triângulo é denominado o seu *baricentro*.

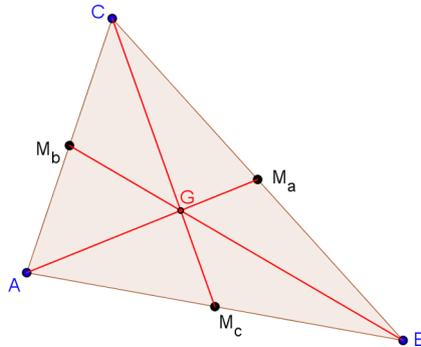


Figura 20: Baricentro do triângulo ABC .

As bissetrizes externas de \hat{A} e \hat{C} concorrem em um ponto I_b . Como I_b pertence à bissetriz externa de \hat{A} , temos que a distância de I_b à reta AB é igual à distância de I_b à reta AC . Analogamente, concluímos que a distância de I_b à reta AC é igual à distância de I_b à reta BC . Portanto, a distância de I_b à reta AB é igual à distância de I_b à reta BC , o que implica que I_b pertence à bissetriz de \hat{B} .

Definição 1.5. O ponto de encontro das bissetrizes externas de dois ângulos de um triângulo com a bissetriz do terceiro ângulo é denominado um *ex-incentro* desse triângulo.

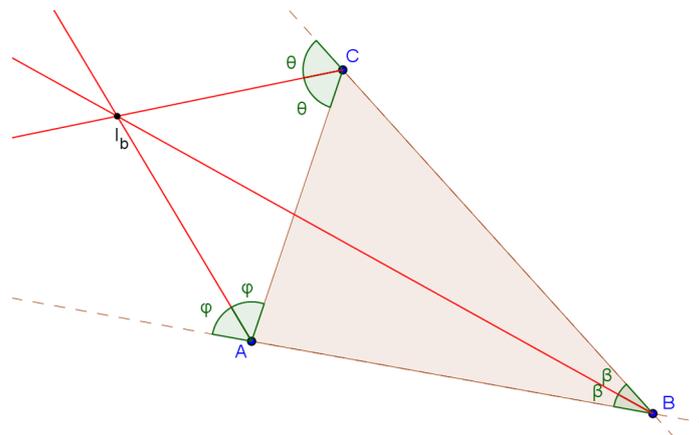


Figura 21: Um ex-incentro do triângulo ABC .

Observe que cada ex-incentro é o centro da única circunferência tangente a um dos lados do triângulo e aos prolongamentos dos outros dois, denominada *circunferência ex-inscrita*.

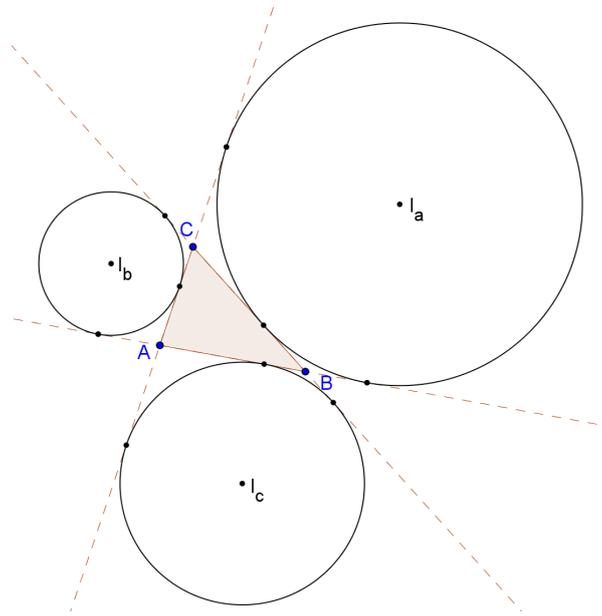


Figura 22: As três circunferências ex-inscritas do triângulo ABC .

1.1.2 Resultados

Nesta seção, enunciaremos os resultados utilizados nos capítulos subsequentes, na ordem em que serão invocados. As demonstrações de todos eles podem ser encontradas em [11].

Teorema 1.6 (Teorema das bissetrizes). *As bissetrizes de um triângulo dividem o lado oposto em partes proporcionais aos lados adjacentes. Em outras palavras, se X é o ponto de interseção da bissetriz interna do ângulo \hat{A} com o lado \overline{BC} , então $\frac{XB}{XC} = \frac{AB}{AC}$.*

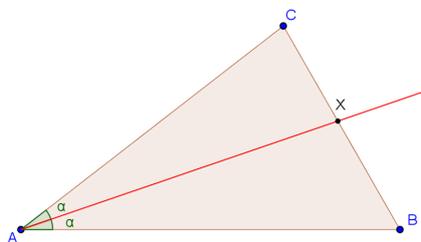


Figura 23: Teorema das bissetrizes.

Teorema 1.7. *Seja ABC um triângulo e sejam $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ e s o seu semiperímetro. Sejam R_a , R_b e R_c , respectivamente, os pontos onde a circunferência inscrita ao triângulo ABC tangencia os lados BC , AC e AB . Seja, ainda, K_a o ponto de interseção da circunferência ex-inscrita com o lado \overline{BC} e sejam X_a e Y_a os pontos de interseção da circunferência ex-inscrita com os prolongamentos dos lados AB e AC . Então:*

- (1) $AR_b = AR_c = s - a$, $BR_a = BR_c = s - b$ e $CR_a = CR_b = s - c$;
- (2) $AX_a = AY_a = s$;
- (3) $BK_a = BX_a = s - c$ e $CK_a = CY_a = s - b$;
- (4) $R_bY_a = R_cX_a = a$.

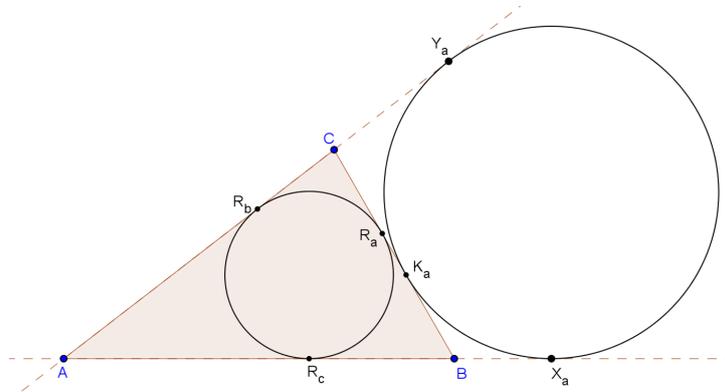


Figura 24: Pontos de tangência da circunferência inscrita e de uma ex-inscrita com os lados do triângulo.

Teorema 1.8 (Teorema de Ceva). *Seja ABC um triângulo e sejam AP_a , BP_b e CP_c cevianas. As três cevianas são concorrentes em um único ponto P se, e somente se,*

$$\frac{AP_b}{CP_b} \cdot \frac{AP_c}{BP_c} \cdot \frac{BP_a}{CP_a} = 1.$$

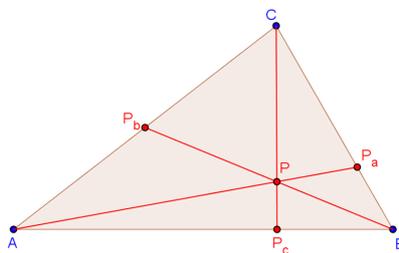


Figura 25: Teorema de Ceva.

Teorema 1.9 (Teorema da base média do triângulo). *O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado, e sua medida é igual à metade da medida do terceiro lado.*

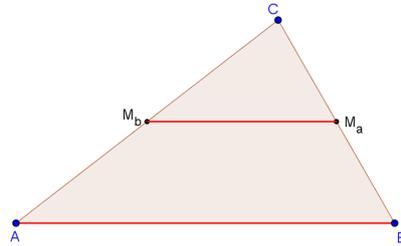


Figura 26: Teorema da base média do triângulo.

Teorema 1.10 (Teorema do quadrilátero inscrito). *Uma condição necessária e suficiente para que um quadrilátero convexo seja inscrito é que seus ângulos opostos sejam suplementares.*

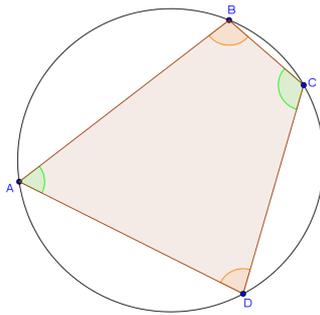


Figura 27: Quadrilátero inscrito.

Teorema 1.11. *A hipotenusa de um triângulo retângulo coincide com o diâmetro da circunferência que o circunscreve.*

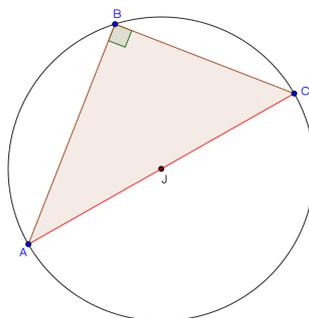


Figura 28: A hipotenusa do triângulo ABC corresponde ao diâmetro da circunferência.

Teorema 1.12. *Se a distância entre os centros de duas circunferências é igual à diferença positiva das medidas de seus raios, então elas são tangentes internamente (ou seja, possuem somente um ponto em comum e uma é interior à outra).*

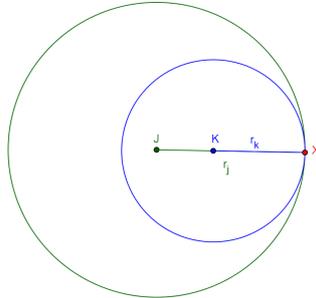


Figura 29: Circunferências tangentes internamente.

Teorema 1.13. *Se a distância entre os centros de duas circunferências é igual à soma das medidas de seus raios, então elas são tangentes externamente (ou seja, possuem somente um ponto em comum e uma é exterior à outra).*

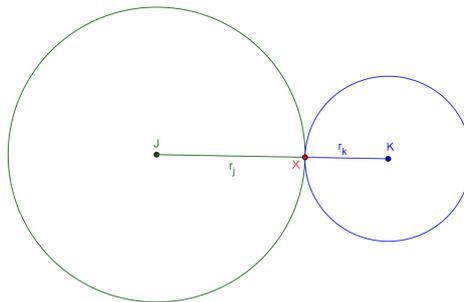


Figura 30: Circunferências tangentes externamente.

1.2 VETORES E GEOMETRIA ANALÍTICA

O começo de todos os livros de Geometria Analítica pesquisados é parecido: após definir o vetor \overrightarrow{AB} como o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes ao segmento orientado \overline{AB} , são introduzidas as noções de adição de vetores, de multiplicação de vetor por escalar e, em alguns casos, de soma de ponto com vetor.

Uma das primeiras consequências da definição de multiplicação de vetor por escalar é dada pela seguinte proposição, que utilizaremos adiante:

Proposição 1.14. *Um ponto X pertence à reta AB se, e somente se, $\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AB}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Fixado um sistema de eixos ortogonais em relação ao qual $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, escrevemos $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Esta notação se comporta bem em relação às operações mencionadas e é bastante útil — por exemplo, podemos escrever o ponto médio M do segmento \overline{AB} , $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$, como $M = A + \frac{1}{2}AB$.

Recordamos que um vetor \vec{v} é múltiplo do vetor \vec{u} se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$. Mais geralmente, dizemos que um vetor \vec{v} é combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ se existem números reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, tais que $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$.

Talvez o principal resultado envolvendo vetores que será utilizado nesta dissertação seja o seguinte:

Proposição 1.15. *Se nenhum dos vetores \vec{u} e \vec{v} é múltiplo do outro, então todo vetor do plano se escreve de uma única maneira como combinação linear de \vec{u} e \vec{v} .*

A noção de produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dos vetores \vec{u} e \vec{v} (e, em particular, a de norma $|\vec{v}|$ de um vetor \vec{v}) também será utilizada neste trabalho — sobretudo suas propriedades de bilinearidade e o seguinte resultado:

Proposição 1.16. *Dois vetores são ortogonais se, e somente se, o produto escalar deles é zero.*

As demonstrações dos resultados enunciados nesta seção, bem como uma apresentação aprofundada dos conceitos mencionados, podem ser encontradas em [2] e [5].

A RETA DE EULER E O INCENTRO

Neste capítulo, apresentaremos o seguinte resultado (estabelecido pelo matemático suíço L. P. Euler no artigo *Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum*, escrito em 1763 e publicado em 1767): em todo triângulo, o circuncentro, o baricentro e o ortocentro são colineares. No caso de um triângulo não equilátero, a reta que contém esses pontos é conhecida como *Reta de Euler*.¹

Buscando reconstruir o triângulo ABC dados seus pontos notáveis O , G , H e I , Euler percebeu que $OH = \frac{3}{2}GH$ e que $OG = \frac{1}{2}GH$ e, dessas igualdades, concluiu que o ponto O está localizado na mesma reta que passa por G e H . Ele verificou também que I pertence à reta em questão se, e somente se, o triângulo é isósceles. Para maiores detalhes, recomendamos a leitura de [15].

Existem diversas demonstrações desse resultado na literatura, inclusive em língua portuguesa — como exemplos, citamos [3] e [8]. A que apresentaremos neste trabalho utiliza fortemente a linguagem de vetores e, assim como as outras duas mencionadas, a conhecida igualdade $G = \frac{A+B+C}{3}$.

A possibilidade de escrever um ponto como média ponderada dos vértices de um triângulo fixado nos permite obter resultados interessantes em Geometria (como o Teorema de Feuerbach, enunciado e demonstrado no próximo capítulo). Nesse sentido, dedicaremos a primeira seção deste capítulo ao estudo dessa propriedade.

Como, em geral, o incentro não pertence à Reta de Euler, encerraremos este capítulo apresentando relações similares às existentes na Reta de Euler envolvendo este ponto notável e outros três pontos interessantes do triângulo.

¹ No caso de um triângulo equilátero, esses três pontos coincidem com o incentro, não determinando uma reta.

2.1 COORDENADAS BARICÊNTRICAS

Fixado um sistema de eixos ortogonais e dados os pontos não colineares $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$, mostraremos que qualquer ponto do plano determinado por A , B e C pode ser escrito como uma média ponderada dos vértices do triângulo ABC , com pesos cuja soma é igual a 1. No caso do baricentro, mencionado na introdução deste capítulo, os pesos são todos iguais a $\frac{1}{3}$.

Proposição 2.1. *Se X é um ponto do plano determinado por A , B e C , então existem únicos números reais α , β e γ tais que $X = \alpha A + \beta B + \gamma C$ e $\alpha + \beta + \gamma = 1$.²*

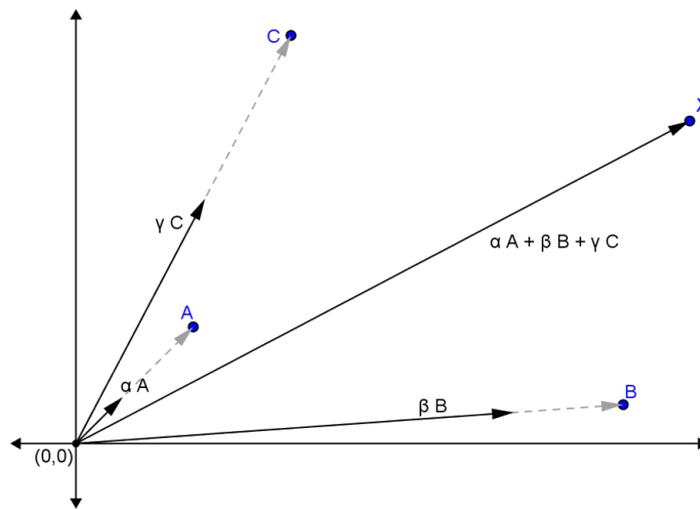


Figura 31: Coordenadas baricêntricas.

Demonstração. Observe que $X = \alpha A + \beta B + \gamma C$ com $\alpha + \beta + \gamma = 1$ se, e somente se, $X = \alpha A + \beta B + (1 - \alpha - \beta)C$ e que

$$\begin{aligned} X = \alpha A + \beta B + (1 - \alpha - \beta)C &\iff X - C = \alpha A + \beta B + (-\alpha - \beta)C \\ &\iff X - C = \alpha(A - C) + \beta(B - C) \\ &\iff \vec{CX} = \alpha\vec{CA} + \beta\vec{CB}. \end{aligned}$$

Como A , B e C são não colineares, temos que \vec{CA} e \vec{CB} não são múltiplos um do outro e, portanto, existem únicos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{CX} = \alpha\vec{CA} + \beta\vec{CB}$. \square

Definição 2.2. Dizemos que (α, β, γ) são as *coordenadas baricêntricas de X em relação ao triângulo ABC* e escrevemos $X = (\alpha, \beta, \gamma)$.

² A notação $X = \alpha A + \beta B + \gamma C$ significa que $X = (x, y)$ com $x = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$ e $y = \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3$.

Exemplo 2.1. Seja M_c o ponto médio do lado \overline{AB} do triângulo ABC . As coordenadas baricênticas de M_c em relação ao triângulo ABC são $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. De fato,

$$M_c = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{2A + B - A}{2} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + 0 \cdot C.$$

Logo,

$$M_c = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right).$$

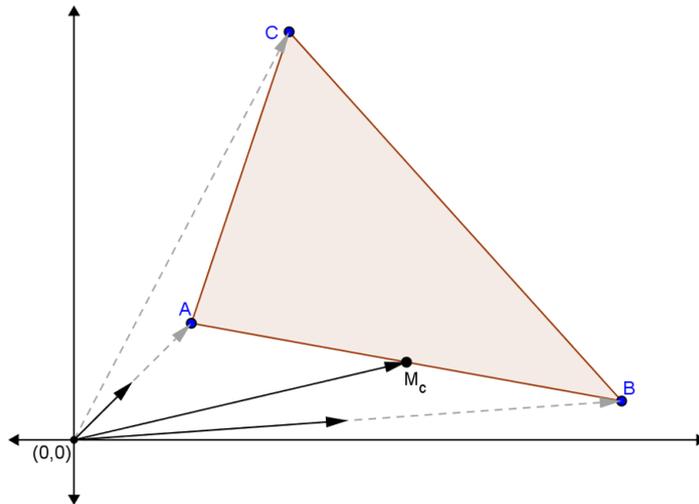


Figura 32: Coordenadas baricênticas de um ponto médio.

Analogamente, sendo M_b e M_a os pontos médios dos lados \overline{AC} e \overline{BC} , respectivamente, temos

$$M_b = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

e

$$M_a = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Vamos generalizar o exemplo acima e determinar as coordenadas baricênticas de um ponto qualquer sobre um dos lados do triângulo ABC .

Proposição 2.3. Sejam a , b e c , respectivamente, as medidas dos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} do triângulo ABC . Se X é um ponto sobre o lado \overline{BC} , então as coordenadas baricênticas de X em relação ao triângulo ABC são $(0, \frac{XC}{a}, \frac{XB}{a})$. Analogamente, se X é um ponto sobre o lado \overline{AB} , então $X = (\frac{XB}{c}, \frac{XA}{c}, 0)$ e se X é um ponto sobre o lado \overline{CA} , então $X = (\frac{XC}{b}, 0, \frac{XA}{b})$.

Demonstração. Seja X um ponto sobre \overline{BC} . Note que $\overrightarrow{BX} = t \cdot \overrightarrow{BC}$ com $t = \frac{XB}{a}$. Assim, $X - B = t(C - B)$ e, portanto,

$$\begin{aligned} X &= (1-t)B + tC \\ &= \left(1 - \frac{XB}{a}\right)B + \left(\frac{XB}{a}\right)C \\ &= \left(\frac{a - XB}{a}\right)B + \frac{XB}{a}C \\ &= 0 \cdot A + \frac{XC}{a}B + \frac{XB}{a}C. \end{aligned}$$

Logo,

$$X = \left(0, \frac{XC}{a}, \frac{XB}{a}\right).$$

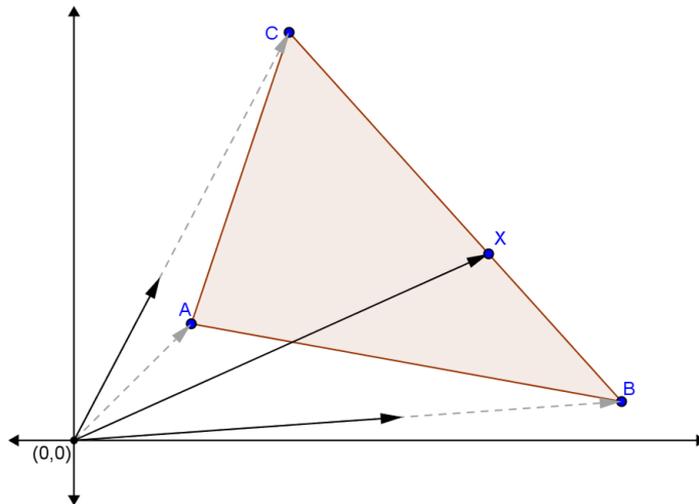


Figura 33: Coordenadas baricêntricas de um ponto sobre um dos lados do triângulo.

Analogamente, se X é um ponto sobre o lado \overline{AB} , então

$$X = \left(\frac{XB}{c}, \frac{XA}{c}, 0\right)$$

e se X é um ponto sobre o lado \overline{CA} , então

$$X = \left(\frac{XC}{b}, 0, \frac{XA}{b}\right).$$

□

A seguir, obteremos as coordenadas baricêntricas do baricentro e do incentro de um triângulo ABC . Ao leitor interessado em obter um resultado similar para o ortocentro e circuncentro, sugerimos consultar [8].

Exemplo 2.2. Se G é o baricentro do triângulo ABC , então

$$G = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

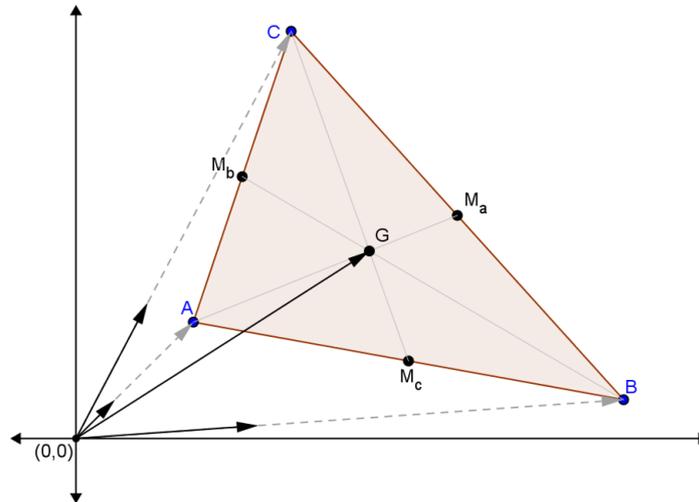


Figura 34: Coordenadas baricêntricas do baricentro.

Demonstração. Seja G' um ponto pertencente ao plano determinado por A , B e C , cujas coordenadas baricêntricas em relação ao triângulo ABC são $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Vamos mostrar que G' pertence às três medianas do triângulo ABC e, portanto, $G' = G$.

Sendo $\overline{CM_c}$ a mediana relativa ao vértice C , temos que

$$\begin{aligned} C + \frac{2}{3}\overrightarrow{CM_c} &= C + \frac{2}{3}(M_c - C) \\ &= C + \frac{2}{3}M_c - \frac{2}{3}C \\ &= C + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) - \frac{2}{3}C \\ &= \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C \\ &= G' \end{aligned}$$

e, portanto, G' pertence a $\overline{CM_c}$.

De forma análoga, verifica-se que G' pertence às outras duas medianas do triângulo ABC e, portanto, $G' = G$. Assim,

$$G = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

□

Exemplo 2.3. Se I é o incentro do triângulo ABC , então

$$I = \left(\frac{a}{2s}, \frac{b}{2s}, \frac{c}{2s} \right)$$

onde a, b e c denotam, respectivamente, as medidas dos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} e s é o semiperímetro do triângulo ABC .

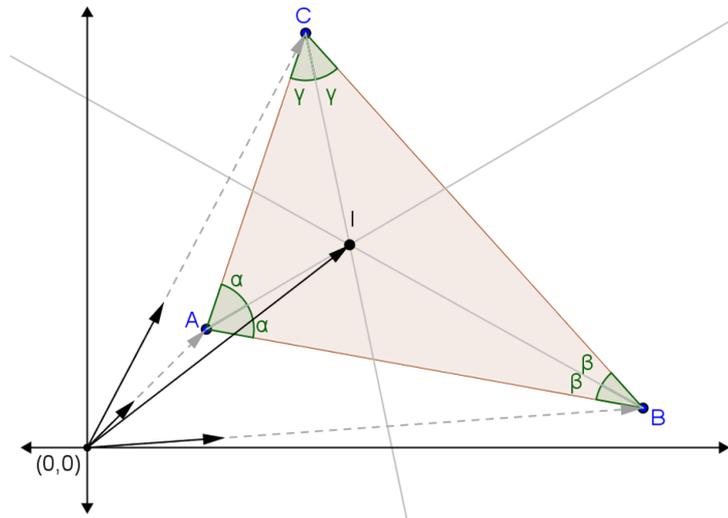


Figura 35: Coordenadas baricêntricas do incentro.

Demonstração. Seja I' um ponto pertencente ao plano determinado por A, B e C , cujas coordenadas baricêntricas em relação ao triângulo ABC são $\left(\frac{a}{2s}, \frac{b}{2s}, \frac{c}{2s} \right)$. Vamos mostrar que I' pertence às três bissetrizes do triângulo ABC e, portanto $I' = I$.

Sejam B_A a bissetriz do ângulo \hat{A} e X o ponto obtido pela interseção de B_A com o lado \overline{BC} . Temos, pela Proposição 2.3, que $X = 0 \cdot A + \frac{XC}{a}B + \frac{XB}{a}C$. Vamos encontrar as medidas de $\frac{XC}{a}$ e $\frac{XB}{a}$ em função de a, b, c e s .

Aplicando o Teorema 1.6 ao triângulo ABC , sobre o ângulo \hat{A} , obtemos a seguinte relação:

$$\frac{XB}{XC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}.$$

Sabendo que $XB + XC = BC = a$ e $2s = a + b + c$, temos que

$$\frac{XB}{XC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{XB}{XC + BX} = \frac{c}{b + c} \Rightarrow \frac{XB}{BC} = \frac{c}{b + c} \Rightarrow \frac{XB}{a} = \frac{c}{2s - a}$$

e

$$\frac{XC}{XB} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{XC}{XB + XC} = \frac{b}{c + b} \Rightarrow \frac{XC}{BC} = \frac{b}{b + c} \Rightarrow \frac{XC}{a} = \frac{b}{2s - a}.$$

Então,

$$X = 0 \cdot A + \frac{b}{2s-a}B + \frac{c}{2s-a}C.$$

Como

$$\begin{aligned} A + \left(\frac{2s-a}{2s}\right)\overrightarrow{AX} &= A + \left(\frac{2s-a}{2s}\right)(X - A) \\ &= A + \left(\frac{2s-a}{2s}\right) \cdot X - \left(\frac{2s-a}{2s}\right) \cdot A \\ &= \left(1 - \frac{2s-a}{2s}\right)A + \left(\frac{2s-a}{2s}\right) \cdot \left(0 \cdot A + \frac{b}{2s-a}B + \frac{c}{2s-a}C\right) \\ &= \left(\frac{2s-2s+a}{2s}\right)A + \left(\frac{2s-a}{2s} \cdot \frac{b}{2s-a}\right)B + \left(\frac{2s-a}{2s} \cdot \frac{c}{2s-a}\right)C \\ &= \frac{a}{2s}A + \frac{b}{2s}B + \frac{c}{2s}C \\ &= I' \end{aligned}$$

concluimos que I' pertence a \mathcal{B}_A .

De forma análoga, podemos verificar que I' também pertence às outras duas bissetrizes do triângulo ABC e, portanto, $I' = I$. Assim,

$$I = \left(\frac{a}{2s}, \frac{b}{2s}, \frac{c}{2s}\right).$$

□

Encerraremos esta seção apresentando as coordenadas baricêntricas dos ex-íncentros de um triângulo ABC .

Exemplo 2.4. Se I_a é o íncentro da circunferência ex-inscrita do triângulo ABC oposta ao vértice A , então

$$I_a = \left(\frac{-a}{2(s-a)}, \frac{b}{2(s-a)}, \frac{c}{2(s-a)}\right)$$

onde a , b e c denotam, respectivamente, as medidas dos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} e s é o semiperímetro do triângulo ABC . Analogamente, se I_b é o íncentro da circunferência ex-inscrita oposta ao vértice B e I_c é o íncentro da circunferência ex-inscrita oposta ao vértice C , então

$$I_b = \left(\frac{a}{2(s-b)}, \frac{-b}{2(s-b)}, \frac{c}{2(s-b)}\right)$$

e

$$I_c = \left(\frac{a}{2(s-c)}, \frac{b}{2(s-c)}, \frac{-c}{2(s-c)}\right).$$

Demonstração. Vamos obter as coordenadas baricêntricas do ponto I_a utilizando as ideias e os cálculos do Exemplo 2.3.

No Exemplo 2.3, as coordenadas baricêntricas de I , incentro do triângulo ABC , foram obtidas através da soma $A + \left(\frac{2s-a}{2s}\right) \overrightarrow{AX}$, sendo X o ponto de interseção da bissetriz do ângulo \hat{A} com o lado \overline{BC} . Sabemos que o ponto I_a também pertence a essa bissetriz, então basta verificar a que distância ele está do vértice A .

Pelo Teorema 1.7, temos que $AX_a = s$ e $AR_c = s - a$. Como ambos os segmentos $\overline{IR_c}$ e $\overline{I_aX_a}$ são perpendiculares à reta AB , temos dois triângulos semelhantes (AIR_c e AI_aX_a) e, portanto, $\frac{AI}{AR_c} = \frac{AI_a}{AX_a}$.

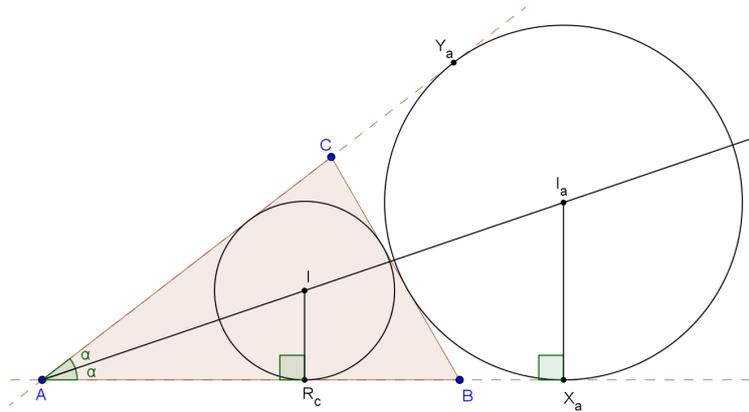


Figura 36: Triângulos semelhantes.

Logo,

$$\frac{AI_a}{AI} = \frac{s}{s-a}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I_a &= A + AI_a \frac{\overrightarrow{AI}}{AI} \\ &= A + \frac{s}{s-a} (I - A) \\ &= A + \frac{2s}{2(s-a)} \cdot \left(\frac{a}{2s} A + \frac{b}{2s} B + \frac{c}{2s} C - A \right) \\ &= \left(1 + \frac{a}{2(s-a)} - \frac{2s}{2(s-a)} \right) A + \frac{b}{2(s-a)} B + \frac{c}{2(s-a)} C \\ &= \frac{2(s-a) + a - 2s}{2(s-a)} A + \frac{b}{2(s-a)} B + \frac{c}{2(s-a)} C \\ &= \frac{-a}{2(s-a)} A + \frac{b}{2(s-a)} B + \frac{c}{2(s-a)} C. \end{aligned}$$

Assim,

$$I_a = \left(\frac{-a}{2(s-a)}, \frac{b}{2(s-a)}, \frac{c}{2(s-a)} \right).$$

Analogamente,

$$I_b = \left(\frac{a}{2(s-b)}, \frac{-b}{2(s-b)}, \frac{c}{2(s-b)} \right)$$

e

$$I_c = \left(\frac{a}{2(s-c)}, \frac{b}{2(s-c)}, \frac{-c}{2(s-c)} \right).$$

□

2.2 A RETA DE EULER

Mostraremos nesta seção que o circuncentro (O), o baricentro (G) e o ortocentro (H) de um triângulo qualquer são colineares. Na realidade, provaremos que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ — o que, além de implicar que esses três pontos estão alinhados, nos permite concluir que G e H estão na mesma semirreta de origem O e que a medida do segmento \overline{OH} é o triplo da medida do segmento \overline{OG} .

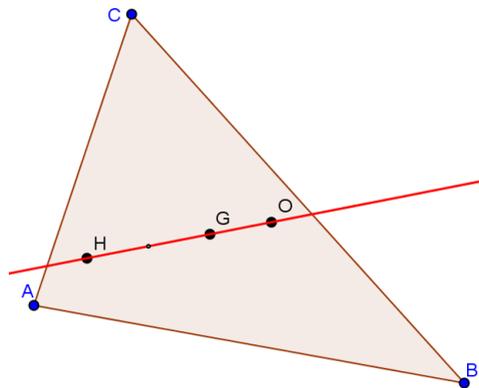


Figura 37: A Reta de Euler

Teorema 2.4. $\vec{OH} = 3\vec{OG}$.

Demonstração. Se $H' = O + 3\vec{OG}$, então

$$\begin{aligned}\vec{OH'} &= 3\vec{OG} \\ &= 3(G - O) \\ &= 3G - 3O \\ &= 3\left(\frac{A+B+C}{3}\right) - 3O \\ &= A + B + C - 3O \\ &= (A - O) + (B - O) + (C - O) \\ &= \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\vec{AH'} \cdot \vec{CB} &= [\vec{AO} + \vec{OH'}] \cdot [\vec{CO} + \vec{OB}] \\ &= [-\vec{OA} + (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})] \cdot [\vec{CO} + \vec{OB}] \\ &= [\vec{OB} + \vec{OC}] \cdot [\vec{CO} + \vec{OB}] \\ &= [(B - O) + (C - O)] \cdot [-(C - O) + (B - O)] \\ &= (B - O) \cdot (B - O) - (B - O) \cdot (C - O) + (C - O) \cdot (B - O) - (C - O) \cdot (C - O) \\ &= (B - O) \cdot (B - O) - (C - O) \cdot (C - O) \\ &= |\vec{OB}|^2 - |\vec{OC}|^2.\end{aligned}$$

Sendo O o circuncentro do triângulo ABC , temos que $|\vec{BO}|^2 = |\vec{CO}|^2$. Logo, $\vec{AH'} \cdot \vec{CB} = 0$, o que implica $AH' \perp CB$. Assim, AH' é a altura do triângulo ABC sobre o lado CB . De forma análoga, $BH' \perp CA$ e $AH' \perp CB$. Como H' pertence às três alturas do triângulo ABC , temos que $H' = H$. Portanto, $\vec{OH} = 3\vec{OG}$. \square

2.3 SOBRE O INCENTRO

Na seção anterior, mostramos que três dos quatro pontos notáveis de um triângulo são colineares e que a distância entre o baricentro e o ortocentro é o dobro da distância entre o circuncentro e o baricentro.

Nesta, mostraremos que a reta determinada pelo incentro e pelo baricentro de um triângulo não equilátero contém outros dois pontos interessantes e faremos uma com-

paração da distribuição desses quatro pontos com os pontos da Reta de Euler destacados neste trabalho. Nossa principal referência será [4].

Inicialmente, vamos obter as coordenadas baricêntricas do incentro (I') do triângulo medial de um triângulo ABC e, na sequência, mostrar que este ponto pertence à reta que contém o incentro (I) e o baricentro (G).

Proposição 2.5. *O ponto I' , incentro do triângulo medial do triângulo ABC , tem coordenadas baricêntricas*

$$\left(\frac{b+c}{4s}, \frac{a+c}{4s}, \frac{a+b}{4s} \right)$$

onde a , b e c denotam, respectivamente, as medidas dos lados \overline{BC} , \overline{CA} e \overline{AB} e s é o semiperímetro do triângulo ABC .

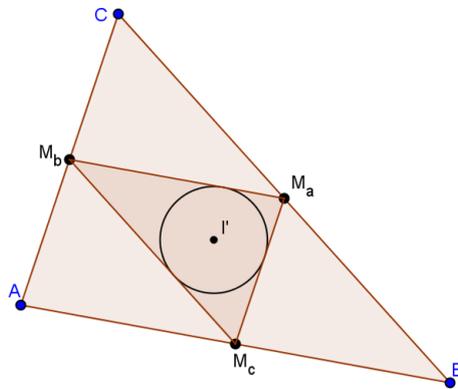


Figura 38: Ponto I' , incentro do triângulo medial.

Demonstração. Vamos determinar as coordenadas baricêntricas do ponto I' , incentro do triângulo medial $M_a M_b M_c$, utilizando o Exemplo 2.3. Sabemos que, se tratando de um triângulo medial, seus lados medem metade dos lados e seus vértices são os pontos médios do triângulo ABC , cuja as coordenadas baricêntricas foram determinadas no Exemplo 2.1.

$$\begin{aligned} I' &= \frac{\frac{a}{2}}{\frac{2s}{2}} M_a + \frac{\frac{b}{2}}{\frac{2s}{2}} M_b + \frac{\frac{c}{2}}{\frac{2s}{2}} M_c \\ &= \frac{a}{2s} \left(\frac{1}{2} B + \frac{1}{2} C \right) + \frac{b}{2s} \left(\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} C \right) + \frac{c}{2s} \left(\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B \right) \\ &= \frac{a}{4s} B + \frac{a}{4s} C + \frac{b}{4s} A + \frac{b}{4s} C + \frac{c}{4s} A + \frac{c}{4s} B \\ &= \frac{b+c}{4s} A + \frac{a+c}{4s} B + \frac{a+b}{4s} C. \end{aligned}$$

Portanto, as coordenadas baricêntricas do incentro do triângulo medial do triângulo ABC são

$$I' = \left(\frac{b+c}{4s}, \frac{a+c}{4s}, \frac{a+b}{4s} \right).$$

□

Utilizando o resultado obtido na proposição anterior, vamos mostrar que incentro do triângulo medial pertence à mesma reta que contém o incentro (I) e o baricentro (G) do triângulo ABC .

Teorema 2.6. *Dado um triângulo ABC qualquer, o incentro I' do seu triângulo medial pertence à reta que contém o seu incentro e o seu baricentro, e mais: $\vec{IG} = 2\vec{GI}'$.*

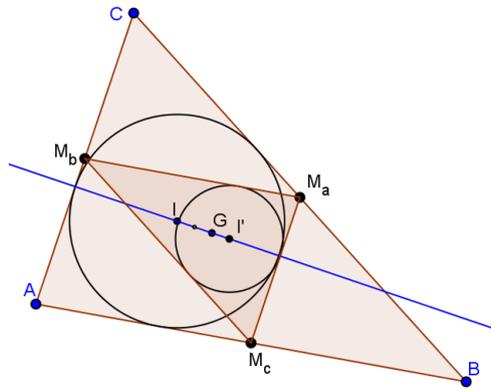


Figura 39: O ponto I' pertence à reta que contém o o incentro e o baricentro do triângulo ABC .

Demonstração. Temos que:

$$\begin{aligned} G + \frac{1}{2}\vec{IG} &= G + \frac{1}{2} \cdot (G - I) \\ &= \frac{2G + G - I}{2} \\ &= \frac{3\left(\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C\right) - \left(\frac{a}{2s}A + \frac{b}{2s}B + \frac{c}{2s}C\right)}{2} \\ &= \frac{A + B + C}{2} - \frac{a}{4s}A - \frac{b}{4s}B - \frac{c}{4s}C \\ &= \frac{2s-a}{4s}A + \frac{2s-b}{4s}B + \frac{2s-c}{4s}C \\ &= \frac{b+c}{4s}A + \frac{a+c}{4s}B + \frac{a+b}{4s}C \\ &= I'. \end{aligned}$$

Logo, o incentro do triângulo medial pertence à reta que contém o incentro e o baricentro do triângulo ABC . Além disso,

$$\frac{1}{2}\vec{IG} = I' - G = \vec{GI'}$$

e, portanto,

$$\vec{IG} = 2\vec{GI'}.$$

□

Agora vamos mostrar que as cevianas determinadas pelos pontos de interseção das circunferências ex-inscritas com os lados do triângulo se intersectam em um único ponto. Em seguida, obteremos as coordenadas baricêntricas deste ponto para depois provar que ele também pertence à reta que contém o incentro (I) e o baricentro (G).

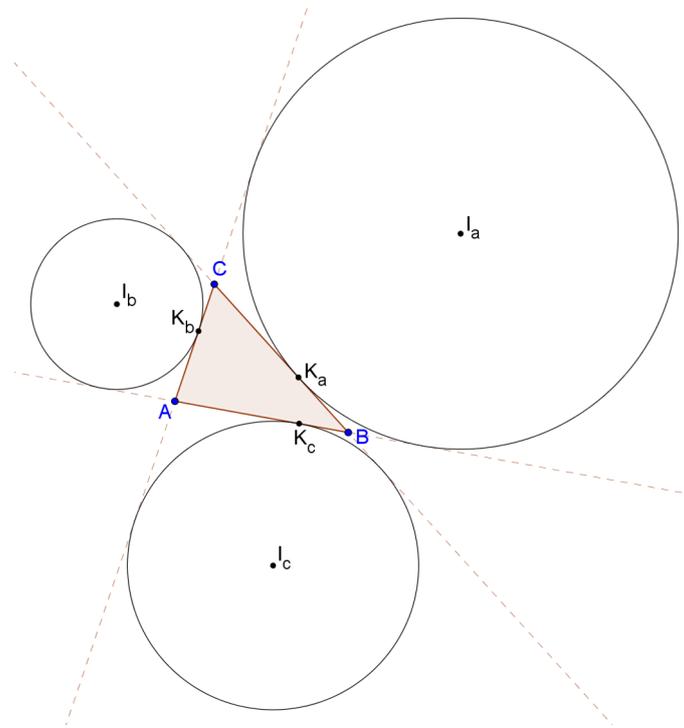


Figura 40: Circunferências ex-inscritas e seus pontos de interseção com os lados do triângulo ABC .

Proposição 2.7. *As cevianas AK_a , BK_b e CK_c se intersectam em um único ponto K , chamado Ponto de Nagel, onde K_a , K_b e K_c são os pontos de interseção das circunferências ex-inscritas com os lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente, do triângulo ABC .*

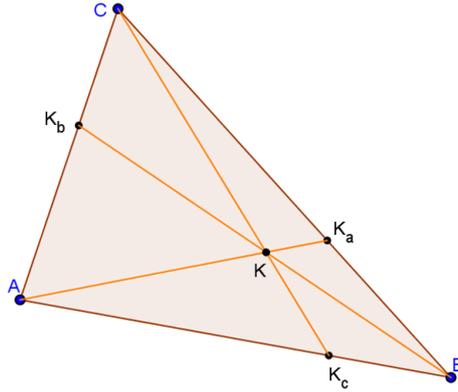


Figura 41: Ponto de Nagel.

Demonstração. Do Teorema 1.7 segue que

$$AC + CK_a = AC + AK_c = AB + BK_a = AB + AK_b = BC + BK_c = BC + CK_b.$$

Logo,

$$CK_a = AK_c, BK_a = AK_b \text{ e } BK_c = CK_b$$

o que implica

$$\frac{AK_c}{BK_c} \cdot \frac{BK_a}{CK_a} \cdot \frac{CK_b}{AK_b} = 1.$$

Pelo Teorema 1.8 concluímos que essas três cevianas se intersectam em um único ponto. \square

Agora vamos obter as coordenadas baricêntricas do Ponto de Nagel. Para isso, utilizaremos o resultado da Proposição 2.3 e do Exemplo 2.1.

Proposição 2.8. *O ponto de Nagel K do triângulo ABC tem coordenadas baricêntricas*

$$K = \left(\frac{s-a}{s}, \frac{s-b}{s}, \frac{s-c}{s} \right)$$

onde a , b e c denotam, respectivamente, as medidas dos lados \overline{BC} , \overline{CA} e \overline{AB} e s é o semiperímetro do triângulo ABC .

Demonstração. Seja K' um ponto pertencente ao plano determinado por A , B e C , com coordenadas baricêntricas $\left(\frac{s-a}{s}, \frac{s-b}{s}, \frac{s-c}{s} \right)$. Sejam K_a , K_b e K_c os pontos de interseção das circunferências ex-inscritas com o triângulo ABC . Vamos mostrar que K' pertence às três cevianas AK_a , AK_b e AK_c do triângulo ABC e, portanto, $K' = K$.

Traçando a ceviana AK_a , o ponto K_a será a interseção de AK_a com o lado \overline{BC} . Temos, pela Proposição 2.3, que $K_a = 0 \cdot A + \frac{CK_a}{a}B + \frac{BK_a}{a}C$. Vamos encontrar as medidas de $\frac{CK_a}{a}$ e $\frac{BK_a}{a}$ em função de a, b, c e s .

Aplicando o Teorema 1.7 ao triângulo ABC , obtemos as seguintes relações:

$$AC + CK_a = s \rightarrow b + CK_a = s \rightarrow CK_a = s - b$$

e

$$AB + BK_a = s \rightarrow c + BK_a = s \rightarrow BK_a = s - c.$$

Então,

$$K_a = 0 \cdot A + \frac{s-b}{a}B + \frac{s-c}{a}C.$$

Como

$$\begin{aligned} A + \left(\frac{a}{s}\right) \overrightarrow{AK_a} &= A + \left(\frac{a}{s}\right) (K_a - A) \\ &= A + \left(\frac{a}{s}\right) \cdot \left(0 \cdot A + \frac{s-b}{a}B + \frac{s-c}{a}C\right) - \left(\frac{a}{s}\right) \cdot A \\ &= \left(1 - \frac{a}{s}\right) \cdot A + \frac{s-b}{s}B + \frac{s-c}{s}C \\ &= \frac{s-a}{s} \cdot A + \frac{s-b}{s}B + \frac{s-c}{s}C \\ &= K' \end{aligned}$$

concluimos que K' pertence a AK_a .

De forma análoga, podemos verificar que K' também pertence às outras duas cevianas BK_b e CK_c do triângulo ABC e, portanto, $K' = K$.

Assim,

$$K = \left(\frac{s-a}{s}, \frac{s-b}{s}, \frac{s-c}{s}\right).$$

□

Utilizando o resultado obtido na proposição anterior, vamos mostrar que o Ponto de Nagel pertence à mesma reta que contém o incentro (I) e o baricentro (G) do triângulo ABC .

Teorema 2.9. *Dado um triângulo ABC , o Ponto de Nagel K pertence à reta que contém o seu incentro e o seu baricentro, e mais: $2\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{GK}$.*

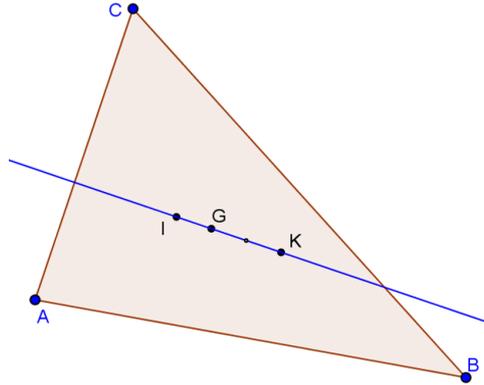


Figura 42: O ponto de Nagel pertence à reta que contém o incentro e o baricentro do triângulo ABC .

Demonstração. Temos que:

$$\begin{aligned}
 G + 2\vec{IG} &= G + 2 \cdot (G - I) \\
 &= G + 2G - 2I \\
 &= 3 \left(\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C \right) - 2 \left(\frac{a}{2s}A + \frac{b}{2s}B + \frac{c}{2s}C \right) \\
 &= A + B + C - \frac{a}{s}A - \frac{b}{s}B - \frac{c}{s}C \\
 &= \frac{s-a}{s}A + \frac{s-b}{s}B + \frac{s-c}{s}C \\
 &= K.
 \end{aligned}$$

Logo, o ponto de Nagel pertence à reta que contém o incentro e o baricentro do triângulo ABC . Além disso,

$$2\vec{IG} = K - G = \vec{GK}.$$

□

Pelos resultados obtidos nos Teoremas 2.6 e 2.9, podemos concluir que os pontos I' e K pertencem à reta que contém os pontos I e G do triângulo ABC . A seguir, vamos mostrar a relação entre esses dois pontos na reta IG .

Teorema 2.10. *Dado um triângulo ABC , o ponto de Nagel K e o incentro do triângulo medial I' pertencem à reta que contém o seu incentro e seu baricentro, e I' é o ponto médio do segmento \overline{IK} .*

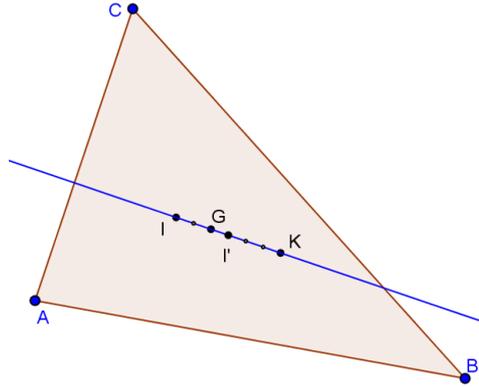


Figura 43: O ponto de Nagel e o incentro do triângulo medial pertencem à reta que contém o incentro e o baricentro do triângulo ABC .

Demonstração. Utilizando os resultados obtidos nos Teoremas 2.6 e 2.9, vamos mostrar que I' é o ponto médio do segmento \overline{IK} .

Pelo Teorema 2.6, temos

$$\begin{aligned}\vec{IG} &= 2\vec{GI'} \\ G - I &= 2(I' - G) \\ G - I &= 2I' - 2G \\ 3G &= 2I' + I.\end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.9, temos

$$\begin{aligned}2\vec{IG} &= \vec{GK} \\ 2(G - I) &= K - G \\ 2G - 2I &= K - G \\ 3G &= K + 2I.\end{aligned}$$

Comparando os dois resultados temos

$$\begin{aligned}
 2I' + I &= K + 2I \\
 2I' &= K + 2I - I \\
 2I' &= 2I + \vec{IK} \\
 I' &= I + \frac{\vec{IK}}{2}.
 \end{aligned}$$

Portanto, I' é o ponto médio do segmento \vec{IK} . □

Vale ressaltar a existência de mais um ponto pertencente à Reta de Euler. Tal fato será demonstrado no próximo capítulo, na Proposição 3.3, e ele é o ponto médio do segmento \overline{OH} . Sendo assim, observe que o segmento \overline{IK} possui as mesmas repartições que o segmento \overline{OH} da Reta de Euler.

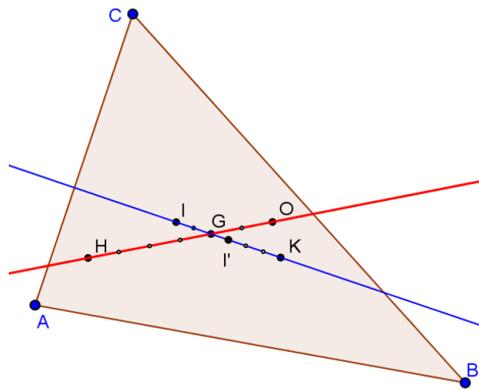


Figura 44: Distribuição dos pontos nas duas retas destacadas.

A CIRCUNFERÊNCIA DOS NOVE PONTOS E O TEOREMA DE FEUERBACH

Neste capítulo, mostraremos que dado um triângulo qualquer, a circunferência que passa pelos pés das alturas também passa pelos pontos médios dos lados, bem como pelos pontos médios dos segmentos que unem os vértices ao ortocentro desse triângulo. A ela, o matemático francês O. Terquem, em 1842, deu o nome de *Circunferência dos Nove Pontos*.

Destacaremos, também, as seguintes propriedades da Circunferência dos Nove Pontos: seu centro pertence à Reta de Euler e a medida de seu raio corresponde à metade da medida do raio da circunferência que circunscreve o triângulo em questão.

Encerraremos este capítulo apresentando uma demonstração do Teorema de Feuerbach, o qual afirma que a Circunferência dos Nove Pontos de um triângulo não equilátero tangencia tanto a circunferência inscrita quanto as três circunferências ex-inscritas do triângulo em questão.¹

3.1 A CIRCUNFERÊNCIA DOS NOVE PONTOS

Iniciaremos esta seção contextualizando historicamente a Circunferência dos Nove Pontos, também conhecida como Circunferência dos Seis Pontos, Circunferência de Euler, Circunferência de Feuerbach, Circunferência de Terquem, etc.

¹ No caso de um triângulo equilátero, a Circunferência dos Nove Pontos coincide com a circunferência inscrita.

Segundo [7], a descoberta dessa circunferência é frequentemente (e erroneamente) atribuída a Euler. Nosso objetivo é esclarecer como se deu a sua descoberta e valorizar o trabalho dos matemáticos que efetivamente contribuíram com o assunto.

3.1.1 Breve história da Circunferência dos Nove Pontos

Em 1804, B. Bevan conjecturou um resultado — demonstrado em 1806, por J. Butterworth — que envolvia, implicitamente, a Circunferência dos Nove Pontos e, como consequência, algumas de suas propriedades (a saber, que seu centro é o ponto médio do segmento que une o circuncentro ao ortocentro e que seu raio é a metade do raio da circunferência circunscrita).

Em 1808, J. Whitney responde a uma questão proposta por Butterworth no ano anterior e o teor de sua solução deixa claro que ele, embora tenha destacado apenas sete dos nove pontos pelos quais a Circunferência dos Nove Pontos passa, sabia que ela passava pelos outros dois. Contudo, para os propósitos que ele tinha em mente na ocasião, ele não precisava dos outros dois e, conseqüentemente, não os mencionou.

Em 1822, K. F. Feuerbach mostrou que a circunferência que passa pelos pés das alturas de um triângulo passa também pelos pontos médios de seus lados, mas não mencionou os outros três pontos. Ele mostrou que o raio da Circunferência dos Nove Pontos é metade do raio da circunferência circunscrita e mostrou que o centro da Circunferência dos Nove Pontos é o ponto médio do segmento que une o ortocentro ao circuncentro. Finalmente, ele demonstrou o que hoje é conhecido como Teorema de Feuerbach: a Circunferência dos Nove Pontos tangencia a circunferência inscrita e as três circunferências ex-inscritas.

Em 1827, T. S. Davies — sem ter acesso aos trabalhos de Feuerbach ou de qualquer outro matemático sobre este assunto — demonstrou a propriedade característica da Circunferência dos Nove Pontos e, além de ter calculado seu raio e a posição de seu centro, observou que o baricentro também pertence à reta que contém o ortocentro, o centro da Circunferência dos Nove Pontos e o circuncentro (isto é, à Reta de Euler, estudada no capítulo anterior).

A Circunferência dos Nove Pontos foi explicitamente mencionada no *Annales de Mathématiques* de Gergonne, em um artigo de Brianchon e Poncelet, publicado em 1861. Detalhes adicionais da história desse resultado (e dez demonstrações diferentes do mesmo) podem ser encontrados em [7].

3.1.2 O Teorema da Circunferência dos Nove Pontos

Vamos, agora, enunciar e demonstrar um teorema que garante a existência da Circunferência dos Nove Pontos. A fim de explorar alguns dos diversos caminhos que a Matemática proporciona, apresentaremos duas provas bem diferentes desse resultado, sendo a primeira via Geometria Sintética (sem uso de coordenadas) e a segunda, via Geometria Analítica (utilizando coordenadas). As principais referências utilizadas são [12] e [6].

Teorema 3.1 (Teorema da Circunferência dos Nove Pontos). *Dado um triângulo ABC , existe uma circunferência que passa pelos seguintes nove pontos:*

- M_a, M_b e M_c , os respectivos pontos médios de \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} ;
- H_a, H_b e H_c , os respectivos pés das alturas que passam por A, B e C ;
- E_a, E_b e E_c , os respectivos pontos médios de \overline{AH} , \overline{BH} e \overline{CH} , sendo H o ortocentro do triângulo ABC .

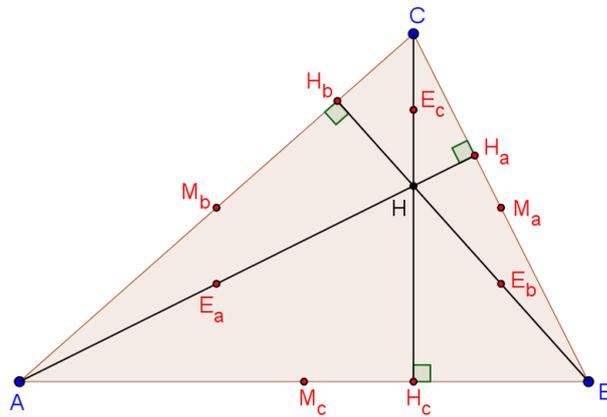


Figura 45: Os elementos da Circunferência dos Nove Pontos.

Prova via Geometria Sintética

Demonstração. Vamos mostrar que $M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c, E_a, E_b$ e E_c pertencem a uma mesma circunferência, λ .

Pelo Teorema 1.9, temos que $M_aM_b \parallel AB$ (pelo triângulo ABC) e que $E_aE_b \parallel AB$ (pelo triângulo ABH). Portanto, $M_aM_b \parallel E_aE_b$ e $M_aM_b = E_aE_b = \frac{AB}{2}$.

Da mesma forma, temos que $E_a M_b \parallel HC$ (pelo triângulo AHC) e que $E_b M_a \parallel HC$ (pelo triângulo HBC). Portanto, $E_a M_b \parallel E_b M_a$ e $E_a M_b = E_b M_a = \frac{HC}{2}$.

Logo, $M_a M_b$ e $E_a E_b$ são perpendiculares a $E_a M_b$ e $E_b M_a$. Disso segue que o quadrilátero $M_a M_b E_a E_b$ é um retângulo (R_1) e, pelo Teorema 1.10, os pontos M_a , M_b , E_a e E_b pertencem a uma mesma circunferência λ_1 .

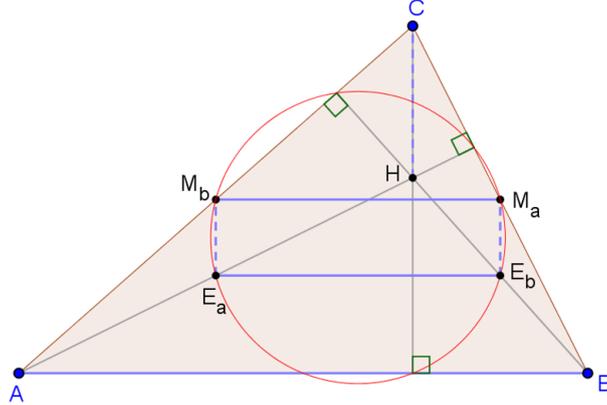


Figura 46: Retângulo R_1 inscrito na circunferência λ_1 .

De forma análoga, podemos verificar a existência de outros dois retângulos, os quais chamaremos de R_2 e R_3 . A seguir, mostraremos de forma resumida como chegamos a eles para depois analisar suas diagonais.

- $M_a M_c \parallel AC$ (pelo triângulo ABC) e $E_a E_c \parallel AC$ (pelo triângulo AHC). Portanto, $M_a M_c \parallel E_a E_c$ e $M_a M_c = E_a E_c = \frac{AC}{2}$.
- $E_a M_c \parallel HB$ (pelo triângulo ABH) e $E_c M_a \parallel HB$ (pelo triângulo HBC). Portanto, $E_a M_c \parallel E_c M_a$ e $E_a M_c = E_c M_a = \frac{HB}{2}$.
- Logo, $M_a M_c$ e $E_a E_c$ são perpendiculares a $E_a M_c$ e $E_c M_a$.

Então o quadrilátero $M_a M_c E_a E_c$ é um retângulo (R_2) e os pontos M_a , M_c , E_a e E_c pertencem a uma mesma circunferência λ_2 .

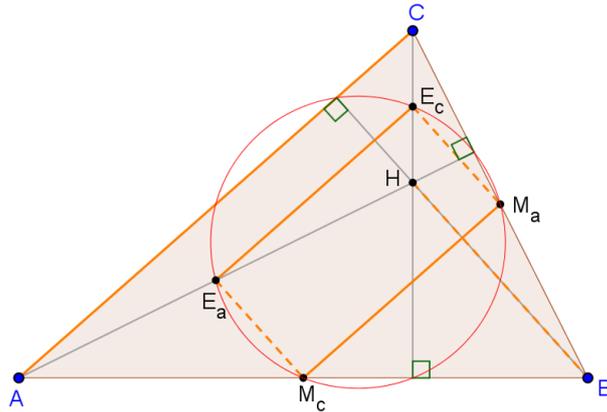


Figura 47: Retângulo R_2 inscrito na circunferência λ_2 .

- $M_c M_b \parallel AB$ (pelo triângulo ABC) e $E_b E_c \parallel BC$ (pelo triângulo HBC). Portanto, $M_c M_b \parallel E_b E_c$ e $M_c M_b = E_b E_c = \frac{BC}{2}$.
- $E_b M_c \parallel HA$ (pelo triângulo ABH) e $E_c M_b \parallel HA$ (pelo triângulo AHC). Portanto, $E_b M_c \parallel E_c M_b$ e $E_b M_c = E_c M_b = \frac{HA}{2}$.
- Logo, $M_c M_b$ e $E_b E_c$ são perpendiculares a $E_b M_c$ e $E_c M_b$.

Então o quadrilátero $M_c M_b E_c E_b$ é um retângulo (R_3) e os pontos M_c, M_b, E_c e E_b pertencem a uma mesma circunferência λ_3 .

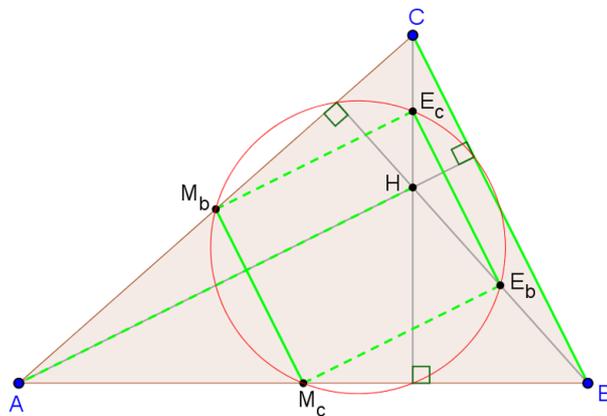


Figura 48: Retângulo R_3 inscrito na circunferência λ_3 .

Pelo Teorema 1.11, podemos afirmar que as diagonais $M_a E_a$ e $M_b E_b$ do retângulo R_1 coincidem com o diâmetro da circunferência λ_1 . Da mesma forma, as diagonais $M_a E_a$ e $M_c E_c$ do retângulo R_2 são também o diâmetro da circunferência λ_2 . Por fim, as

diagonais M_bE_b e M_cE_c do retângulo R_3 coincidem com o diâmetro da circunferência λ_3 .

Observe que M_aE_a é diagonal dos retângulos R_1 e R_2 . Logo, as circunferências formadas por esses retângulos possuem o mesmo diâmetro, o que implica $\lambda_1 = \lambda_2$. A diagonal M_cE_c do retângulo R_2 é também diagonal do retângulo R_3 . Dessa forma, $\lambda_2 = \lambda_3$. Portanto, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$.

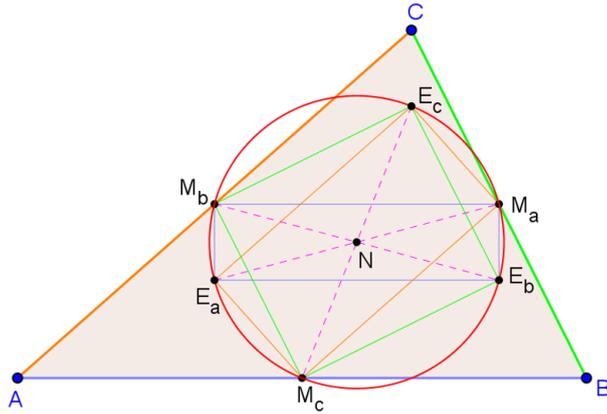


Figura 49: Os pontos M_a, M_b, M_c, E_a, E_b e E_c pertencem a λ .

Temos que a diagonal M_aE_a é a hipotenusa do triângulo retângulo $E_aH_aM_a$, o que implica que H_a pertence a λ . Analogamente, M_bE_b é hipotenusa do triângulo $E_bH_bM_b$, assim como M_cE_c é hipotenusa do triângulo $E_cH_cM_c$, ou seja, H_b e H_c pertencem a λ .

Além disso, M_aE_a, M_bE_b e M_cE_c também são diâmetros da circunferência λ . Logo, o ponto médio desses segmentos é o centro N de λ .

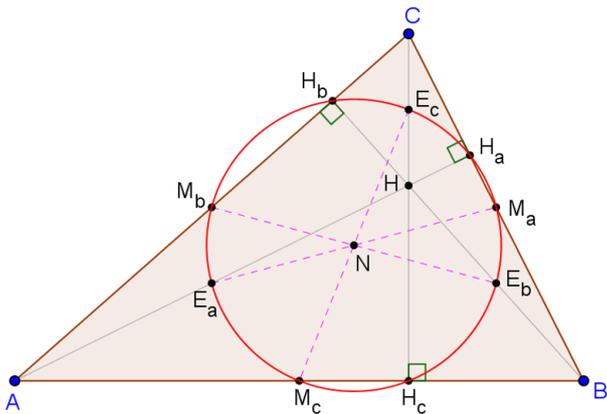


Figura 50: Os pontos H_a, H_b e H_c também pertencem λ .

□

Prova via Geometria Analítica

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer. Por conveniência, vamos colocá-lo no plano cartesiano de modo que seus vértices tenham as seguintes coordenadas: $A = (0, 0)$, $B = (a, 0)$ e $C = (b, c)$, com $a, b, c > 0$.

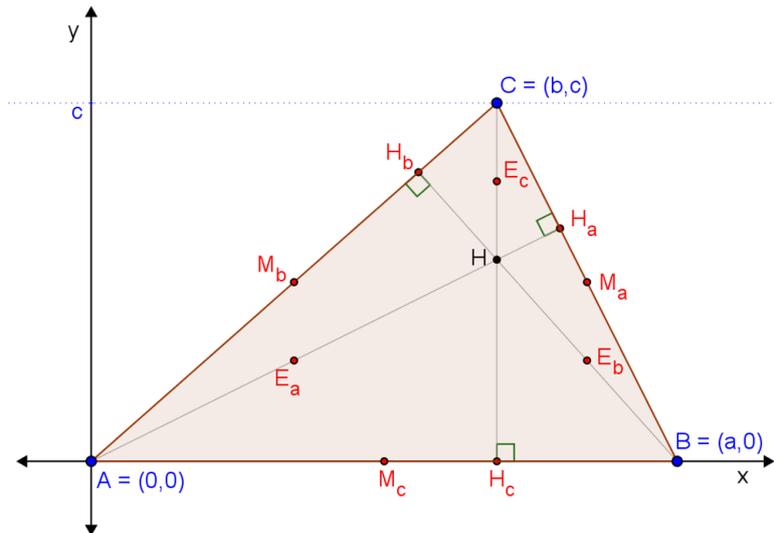


Figura 51: Os elementos da Circunferência dos Nove Pontos.

Vamos mostrar que $M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c, E_a, E_b$ e E_c pertencem a uma mesma circunferência, λ .

Conhecidas as coordenadas dos vértices do triângulo ABC , obtemos:

- $M_a = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$;
- $M_b = \left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$;
- $M_c = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$.

Seja λ a circunferência determinada por M_a, M_b e M_c . Sabendo que a equação de uma circunferência deve ter o formato $x^2 + y^2 + Px + Qy + S = 0$, vamos substituir x e y pelas coordenadas desses pontos e encontrar os valores de P, Q e S .

(i) Usando que $M_c = \left(\frac{a}{2}, 0\right) \in \lambda$, temos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (0)^2 + P\left(\frac{a}{2}\right) + Q(0) + S &= 0 \\ \frac{a^2}{4} + P\left(\frac{a}{2}\right) + S &= 0 \\ S &= -\frac{a^2}{4} - P\left(\frac{a}{2}\right). \end{aligned}$$

(ii) Usando que $M_b = \left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right) \in \lambda$, temos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + P\left(\frac{b}{2}\right) + Q\left(\frac{c}{2}\right) + S &= 0 \\ \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + P\left(\frac{b}{2}\right) + Q\left(\frac{c}{2}\right) + S &= 0. \end{aligned}$$

(iii) Usando que $M_a = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right) \in \lambda$, temos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + P\left(\frac{a+b}{2}\right) + Q\left(\frac{c}{2}\right) + S &= 0 \\ \frac{(a+b)^2}{4} + \frac{c^2}{4} + P\left(\frac{a+b}{2}\right) + Q\left(\frac{c}{2}\right) + S &= 0. \end{aligned}$$

Subtraindo as equações encontradas em (ii) e (iii):

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{4} - \frac{(a+b)^2}{4} + P\left(\frac{b}{2}\right) - P\left(\frac{a+b}{2}\right) &= 0 \\ P\left(\frac{b}{2}\right) - P\left(\frac{a+b}{2}\right) &= -\frac{b^2}{4} + \frac{(a+b)^2}{4} \\ P\left(\frac{b-(a+b)}{2}\right) &= \frac{(a+b)^2 - b^2}{4} \\ P\left(\frac{b-a-b}{1}\right) &= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - b^2}{2} \\ P(-a) &= \frac{a^2 + 2ab}{2} \\ P &= \frac{a(a+2b)}{-2a} \\ P &= -\frac{a+2b}{2}. \end{aligned}$$

Substituindo o valor de P em (i) para encontrar S :

$$\begin{aligned} S &= -\frac{a^2}{4} - \left(-\frac{a+2b}{2}\right) \left(\frac{a}{2}\right) \\ &= -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2+2ab}{4} \\ &= \frac{2ab}{4} \\ &= \frac{ab}{2}. \end{aligned}$$

Substituindo os valores de P e S em (ii) para encontrar Q :

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \left(-\frac{a+2b}{2}\right) \left(\frac{b}{2}\right) + Q \left(\frac{c}{2}\right) + \frac{ab}{2} &= 0 \\ \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - \frac{ab+2b^2}{4} + Q \left(\frac{c}{2}\right) + \frac{2ab}{4} &= 0 \\ Q \left(\frac{c}{2}\right) &= -\frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{4} + \frac{ab+2b^2}{4} - \frac{2ab}{4} \\ Q \left(\frac{c}{2}\right) &= \frac{-c^2+b^2-ab}{4} \\ Q &= \frac{b^2-c^2-ab}{2c}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lambda : x^2 + y^2 - \frac{a+2b}{2}x + \frac{b^2-c^2-ab}{2c}y + \frac{ab}{2} = 0.$$

Como H_c está localizado no eixo x e na reta perpendicular ao eixo x que passa por C , temos que $H_c = (b, 0)$. Vamos agora encontrar as coordenadas dos pontos H_a e H_b utilizando a equação reduzida das retas suportes ($y = mx + n$) dos lados do triângulo (\overline{BC} e \overline{CA}) e das alturas ($\overline{AH_a}$ e $\overline{BH_b}$) e o fato de elas serem perpendiculares, o que implica que o produto do seus coeficientes angulares é -1 .

- Encontrando a equação da reta BC :

$$\begin{cases} 0 = ma + n \rightarrow n = -ma \\ c = mb + n \rightarrow c = mb - ma \rightarrow c = m(b-a) \rightarrow m = \frac{c}{b-a} \rightarrow m = -\frac{c}{a-b} \end{cases}$$

Logo,

$$BC : y = -\frac{c}{a-b}x + \frac{ac}{a-b}.$$

- Encontrando a equação da reta AH_a :

Como a reta AH_a é perpendicular à reta BC , seu coeficiente angular é $\frac{a-b}{c}$. Como o ponto A tem coordenadas $(0, 0)$, temos que

$$AH_a : y = \frac{a-b}{c}x.$$

- Encontrando as coordenadas do ponto H_a :

Como H_a pertence às retas BC e AH_a , suas coordenadas (x, y) satisfazem

$$\begin{cases} y = \frac{a-b}{c}x \\ y = -\frac{c}{a-b}x + \frac{ac}{a-b} \end{cases}$$

Portanto, $H_a = \left(\frac{ac^2}{(a-b)^2+c^2}, \frac{ac(a-b)}{(a-b)^2+c^2} \right)$.

- Encontrando a equação da reta CA :

$$\begin{cases} 0 = m \cdot 0 + n \rightarrow n = 0 \\ c = mb + n \rightarrow c = mb + 0 \rightarrow m = \frac{c}{b} \end{cases}$$

Logo,

$$CA : y = \frac{c}{b}x.$$

- Encontrando a equação da reta BH_b :

Como a reta BH_b é perpendicular à reta CA , seu coeficiente angular é $-\frac{b}{c}$. Como $B = (a, 0)$, temos que

$$BH_b : y = -\frac{b}{c}x + \frac{ab}{c}.$$

- Encontrando as coordenadas do ponto H_b :

Como H_b pertence às retas CA e BH_b , suas coordenadas (x, y) satisfazem

$$\begin{cases} y = \frac{c}{b}x \\ y = -\frac{b}{c}x + \frac{ab}{c} \end{cases}$$

Portanto, $H_b = \left(\frac{ab^2}{b^2+c^2}, \frac{abc}{b^2+c^2} \right)$.

O ortocentro $H = (x, y)$ pertence às três alturas $\overline{AH_a}$, $\overline{BH_b}$ e $\overline{CH_c}$. Sendo $\overline{CH_c}$ perpendicular ao eixo x , temos que $x = b$. Utilizando a equação da reta AH_a , obtemos $y = \frac{(a-b)b}{c}$. Portanto, $H = \left(b, \frac{(a-b)b}{c} \right)$.

Como E_a , E_b e E_c são os respectivos pontos médios dos segmentos \overline{AH} , \overline{BH} e \overline{CH} , temos:

- $E_a = \left(\frac{b}{2}, \frac{(a-b)b}{2c} \right)$;
- $E_b = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{(a-b)b}{2c} \right)$;
- $E_c = \left(b, \frac{c^2+(a-b)b}{2c} \right)$.

Vamos agora mostrar que H_a , H_b , H_c , E_a , E_b e E_c pertencem a λ , substituindo as coordenadas de cada um desses pontos no primeiro membro da equação

$$x^2 + y^2 - \frac{a+2b}{2}x + \frac{b^2 - c^2 - ab}{2c}y + \frac{ab}{2} = 0$$

e verificando que a expressão obtida é igual a 0.

- $H_a = \left(\frac{ac^2}{(a-b)^2+c^2}, \frac{ac(a-b)}{(a-b)^2+c^2} \right) \in \lambda$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{ac^2}{(a-b)^2+c^2} \right)^2 + \left(\frac{ac(a-b)}{(a-b)^2+c^2} \right)^2 - \frac{a+2b}{2} \cdot \left(\frac{ac^2}{(a-b)^2+c^2} \right) + \frac{b^2-c^2-ab}{2c} \cdot \left(\frac{ac(a-b)}{(a-b)^2+c^2} \right) + \frac{ab}{2} = \\ & \frac{a^2c^4+a^2c^2(a-b)^2}{((a-b)^2+c^2)^2} + \frac{-a^2c^2-2abbc^2}{2((a-b)^2+c^2)} + \frac{(a^2-ab)(b^2-c^2-ab)}{2((a-b)^2+c^2)} + \frac{ab((a-b)^2+c^2)}{2((a-b)^2+c^2)} = \\ & \frac{a^2c^2(c^2+(a-b)^2)}{((a-b)^2+c^2)^2} + \frac{-a^2c^2-2abbc^2+a^2b^2-a^2c^2-a^3b-ab^3+abc^2+a^2b^2+ab(a-b)^2+abc^2}{2((a-b)^2+c^2)} = \\ & \frac{2a^2c^2}{2((a-b)^2+c^2)} + \frac{-2a^2c^2+2a^2b^2-a^3b-ab^3+ab(a^2-2ab+b^2)}{2((a-b)^2+c^2)} = \\ & \frac{2a^2b^2-a^3b-ab^3+a^3b-2a^2b^2+ab^3}{2((a-b)^2+c^2)} = 0 \end{aligned}$$

- $H_b = \left(\frac{ab^2}{b^2+c^2}, \frac{abc}{b^2+c^2} \right) \in \lambda$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{ab^2}{b^2+c^2} \right)^2 + \left(\frac{abc}{b^2+c^2} \right)^2 - \frac{a+2b}{2} \cdot \left(\frac{ab^2}{b^2+c^2} \right) + \frac{b^2-c^2-ab}{2c} \cdot \left(\frac{abc}{b^2+c^2} \right) + \frac{ab}{2} = \\ & \frac{a^2b^4}{(b^2+c^2)^2} + \frac{a^2b^2c^2}{(b^2+c^2)^2} - \frac{(a+2b)ab^2}{2(b^2+c^2)} + \frac{(b^2-c^2-ab)ab}{2(b^2+c^2)} + \frac{ab}{2} = \\ & \frac{a^2b^2(b^2+c^2)}{(b^2+c^2)^2} + \frac{-a^2b^2-2ab^3+ab^3-abc^2-a^2b^2}{2(b^2+c^2)} + \frac{ab(b^2+c^2)}{2(b^2+c^2)} = \\ & \frac{2a^2b^2}{2(b^2+c^2)} + \frac{-2a^2b^2-ab^3-abc^2}{2(b^2+c^2)} + \frac{ab^3+abc^2}{2(b^2+c^2)} = 0 \end{aligned}$$

- $H_c = (b, 0) \in \lambda$:

$$\begin{aligned} (b)^2 + (0)^2 - \frac{a+2b}{2} \cdot (b) + \frac{b^2-c^2-ab}{2c} \cdot (0) + \frac{ab}{2} &= \\ \frac{2b^2}{2} + \frac{-ab-2b^2}{2} + \frac{ab}{2} &= 0 \end{aligned}$$

- $E_a = \left(\frac{b}{2}, \frac{(a-b)b}{2c} \right) \in \lambda$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{b}{2} \right)^2 + \left(\frac{(a-b)b}{2c} \right)^2 - \frac{a+2b}{2} \cdot \left(\frac{b}{2} \right) + \frac{b^2-c^2-ab}{2c} \cdot \left(\frac{(a-b)b}{2c} \right) + \frac{ab}{2} = \\ & \frac{b^2}{4} + \frac{(a-b)^2b^2}{4c^2} + \frac{-ab-2b^2}{4} + \frac{(b^2-c^2-ab)(ab-b^2)}{4c^2} + \frac{2ab}{4} = \\ & \frac{(a^2-2ab+b^2)b^2+(b^2-c^2-ab)(ab-b^2)}{4c^2} + \frac{(ab-b^2)c^2}{4c^2} = \\ & \frac{a^2b^2-2ab^3+b^4+ab^3-abc^2-a^2b^2-b^4+b^2c^2+ab^3+abc^2-b^2c^2}{4c^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\bullet E_b = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{(a-b)b}{2c} \right) \in \lambda:$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \left(\frac{(a-b)b}{2c} \right)^2 - \frac{a+2b}{2} \cdot \left(\frac{a+b}{2} \right) + \frac{b^2-c^2-ab}{2c} \cdot \left(\frac{(a-b)b}{2c} \right) + \frac{ab}{2} = \\ & \frac{a^2+2ab+b^2}{4} + \frac{(a^2-2ab+b^2)b^2}{4c^2} - \frac{a^2+ab+2ab+2b^2}{4} + \frac{(b^2-c^2-ab)(ab-b^2)}{4c^2} + \frac{2ab}{4} = \\ & \frac{a^2b^2-2ab^3+b^4+ab^3-abc^2-a^2b^2-b^4+b^2c^2+ab^3}{4c^2} + \frac{(-b^2+ab)c^2}{4c^2} = \\ & \frac{-abc^2+b^2c^2}{4c^2} + \frac{-b^2c^2+abc^2}{4c^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\bullet E_c = \left(b, \frac{c^2+(a-b)b}{2c} \right) \in \lambda:$$

$$\begin{aligned} & (b)^2 + \left(\frac{c^2+(a-b)b}{2c} \right)^2 - \frac{a+2b}{2} \cdot (b) + \frac{b^2-c^2-ab}{2c} \cdot \left(\frac{c^2+(a-b)b}{2c} \right) + \frac{ab}{2} = \\ & \frac{4b^2}{4} + \frac{(c^2+ab-b^2)^2}{4c^2} - \frac{2(a+2b)b}{4} + \frac{-(-b^2+c^2+ab)(c^2+ab-b^2)}{4c^2} + \frac{2ab}{4} = \\ & \frac{(c^2+ab-b^2)^2}{4c^2} + \frac{-(c^2+ab-b^2)(c^2+ab-b^2)}{4c^2} + \frac{-2ab-4b^2}{4} + \frac{4b^2}{4} + \frac{2ab}{4} = 0 \end{aligned}$$

Logo, $M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c, E_a, E_b$ e E_c pertencem a λ . □

O centro da Circunferência dos Nove Pontos

Para obter as coordenadas (h, k) do centro N da Circunferência dos Nove Pontos, basta reescrever sua equação $x^2 + y^2 + Px + Qy + S = 0$ como

$$\left(x + \frac{P}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{Q}{2} \right)^2 = -S + \left(\frac{P}{2} \right)^2 + \left(\frac{Q}{2} \right)^2.$$

Logo,

$$h = -\frac{P}{2} = -\frac{-\frac{a+2b}{2}}{2} = \frac{a+2b}{4}$$

e

$$k = -\frac{Q}{2} = -\frac{\frac{b^2-c^2-ab}{2c}}{2} = \frac{-b^2+c^2+ab}{4c}.$$

Portanto, $N = \left(\frac{a+2b}{4}, \frac{-b^2+c^2+ab}{4c} \right)$.

O raio da Circunferência dos Nove Pontos

A medida r do raio da Circunferência dos Nove Pontos é tal que

$$r^2 = -S + \left(\frac{P}{2} \right)^2 + \left(\frac{Q}{2} \right)^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 r^2 &= \sqrt{-\left(\frac{ab}{2}\right) + \left(\frac{-\frac{a+2b}{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\frac{b^2-c^2-ab}{2c}}{2}\right)^2} \\
 &= \sqrt{-\frac{ab}{2} + \left(-\frac{a+2b}{4}\right)^2 + \left(\frac{b^2-c^2-ab}{4c}\right)^2} \\
 &= \sqrt{-\frac{ab}{2} + \frac{(a+2b)^2}{16} + \frac{(b^2-c^2-ab)^2}{16c^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{-8abc^2 + (a+2b)^2c^2 + (b^2-c^2-ab)^2}{16c^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{-8abc^2 + a^2c^2 + 4abc^2 + 4b^2c^2 + b^4 + c^4 + a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2ab^3 + 2abc^2}{16c^2}} \\
 &= \frac{\sqrt{-2abc^2 + a^2c^2 + 2b^2c^2 + b^4 + c^4 + a^2b^2 - 2ab^3}}{4c}.
 \end{aligned}$$

Vamos, agora, estabelecer uma relação entre r e a medida R do raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC . Para encontrar R , basta calcular a distância do ponto O a qualquer um dos vértices do triângulo ABC .

O circuncentro $O = (x, y)$ pertence às três mediatrizes OM_a , OM_b e OM_c . Sendo OM_c perpendicular ao eixo x , temos que $x = \frac{a}{2}$. Sabendo que $|\overrightarrow{AO}|^2 = |\overrightarrow{BO}|^2 = |\overrightarrow{CO}|^2$, temos

$$\begin{aligned}
 |\overrightarrow{BO}|^2 &= |\overrightarrow{CO}|^2 \\
 \left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + (0 - y)^2 &= \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 + (c - y)^2 \\
 \frac{a^2}{4} + y^2 &= b^2 - ab + \frac{a^2}{4} + c^2 - 2cy + y^2 \\
 2cy &= b^2 - ab + c^2 \\
 y &= \frac{b^2 - ab + c^2}{2c}.
 \end{aligned}$$

Logo, $O = \left(\frac{a}{2}, \frac{b^2-ab+c^2}{2c}\right)$. Como $B = (a, 0)$, segue que

$$\begin{aligned} |\vec{OB}| &= \sqrt{\left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{b^2-ab+c^2}{2c}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{-b^2+ab-c^2}{2c}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^4+c^4+a^2b^2+2b^2c^2-2ab^3-2abc^2}{4c^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2c^2+b^4+c^4+a^2b^2+2b^2c^2-2ab^3-2abc^2}{4c^2}} \\ &= \frac{\sqrt{a^2c^2+b^4+c^4+a^2b^2+2b^2c^2-2ab^3-2abc^2}}{2c}. \end{aligned}$$

Acabamos de obter o seguinte resultado:

Proposição 3.2. *A medida do raio da Circunferência dos Nove Pontos é metade da do raio da circunferência circunscrita do triângulo ABC.*

Resumo

- $A = (0, 0)$, $B = (a, 0)$ e $C = (b, c)$ - vértices do triângulo ABC ;
- $M_a = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$, $M_b = \left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ e $M_c = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$ - pontos médios dos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente;
- $H_a = \left(\frac{ac^2}{(a-b)^2+c^2}, \frac{ac(a-b)}{(a-b)^2+c^2}\right)$, $H_b = \left(\frac{ab^2}{b^2+c^2}, \frac{abc}{b^2+c^2}\right)$ e $H_c = (b, 0)$ - pés das alturas $\overline{AH_a}$, $\overline{BH_b}$ e $\overline{CH_c}$, respectivamente;
- $E_a = \left(\frac{b}{2}, \frac{(a-b)b}{2c}\right)$, $E_b = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{(a-b)b}{2c}\right)$ e $E_c = \left(b, \frac{c^2+(a-b)b}{2c}\right)$ - os respectivos pontos médios de \overline{AH} , \overline{BH} e \overline{CH} ;
- $\lambda : x^2 + y^2 - \frac{a+2b}{2}x + \frac{b^2-c^2-ab}{2c}y + \frac{ab}{2} = 0$ ou $\lambda : \left(x - \frac{a+2b}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{-b^2+c^2+ab}{4c}\right)^2 = -\frac{ab}{2} + \frac{(a+2b)^2}{16} + \frac{(b^2-c^2-ab)^2}{16c^2}$ - Circunferência dos Nove Pontos;
- $r = \frac{\sqrt{-2abc^2+a^2c^2+2b^2c^2+b^4+c^4+a^2b^2-2ab^3}}{4c}$ - raio de λ ;
- $N = \left(\frac{a+2b}{4}, \frac{-b^2+c^2+ab}{4c}\right)$ - centro de λ ;
- $H = \left(b, \frac{(a-b)b}{c}\right)$ - ortocentro;
- $G = \left(\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3}\right)$ - baricentro²;

² Basta usar que $G = O + \frac{\vec{OH}}{3}$.

- $O = \left(\frac{a}{2}, \frac{b^2-ab+c^2}{2c}\right)$ - circuncentro;
- $R = \frac{\sqrt{-2abc^2+a^2c^2+2b^2c^2+b^4+c^4+a^2b^2-2ab^3}}{2c}$ - raio da circunferência circunscrita;
- $AB : y = 0, CA : y = \frac{c}{b}x$ e $BC : y = -\frac{c}{a-b}x + \frac{ac}{a-b}$ - retas suporte dos lados do triângulo ABC ;
- $AH_a : y = \frac{a-b}{c}x, BH_b : y = -\frac{b}{c}x + \frac{ab}{c}$ e $BH_b : x = b$ - retas suporte das alturas do triângulo ABC .

3.1.3 Um pouco mais sobre a Reta de Euler

Nesta subseção, vamos mostrar que o centro N da Circunferência dos Nove Pontos também pertence à Reta de Euler. Na realidade, provaremos que $\vec{OH} = 2\vec{ON}$ — o que, além de implicar que esses três pontos estão alinhados, nos permite concluir que H e N estão na mesma semirreta de origem O e que N é o ponto médio do segmento \overline{OH} .

Proposição 3.3. $\vec{OH} = 2\vec{ON}$.

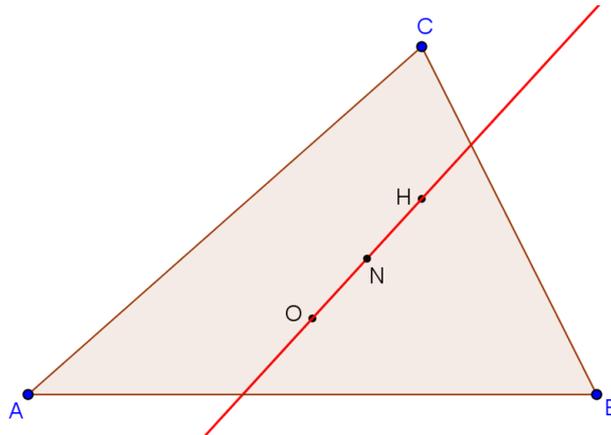


Figura 52: O ponto N é o ponto médio do segmento OH .

Demonstração. Seja N' o ponto médio entre o circuncentro $O = \left(\frac{a}{2}, \frac{b^2-ab+c^2}{2c}\right)$ e o ortocentro $H = \left(b, \frac{(a-b)b}{c}\right)$. Vamos mostrar que as coordenadas de N' são as mesmas de N e, portanto, $N' = N$.

$$\begin{aligned}
N' &= \left(\frac{b + \frac{a}{2}}{2}, \frac{\frac{(a-b)b}{c} + \frac{b^2 - ab + c^2}{2c}}{2} \right) \\
&= \left(\frac{b}{2} + \frac{a}{4}, \frac{ab - b^2}{2c} + \frac{b^2 - ab + c^2}{4c} \right) \\
&= \left(\frac{2b + a}{4}, \frac{2ab - 2b^2 + b^2 - ab + c^2}{4c} \right) \\
&= \left(\frac{a + 2b}{4}, \frac{-b^2 + c^2 + ab}{4c} \right) \\
&= N.
\end{aligned}$$

Como N é o ponto médio do segmento \overline{OH} , temos que

$$\begin{aligned}
N &= O + \frac{\overrightarrow{OH}}{2} \\
N - O &= \frac{\overrightarrow{OH}}{2} \\
\overrightarrow{ON} &= \frac{\overrightarrow{OH}}{2} \\
2\overrightarrow{ON} &= \overrightarrow{OH}.
\end{aligned}$$

□

3.2 O TEOREMA DE FEUERBACH

Nesta seção, vamos mostrar que a Circunferência dos Nove Pontos é tangente internamente à circunferência inscrita e tangente externamente às três circunferências ex-inscritas do triângulo não equilátero ABC . Para isto, utilizaremos os Teoremas 1.12 e 1.13, e, portanto, será necessário determinar a medida do raio de cada uma dessas circunferências e as distâncias entre os centros das mesmas.

Calcularemos primeiro a distância entre dois pontos quaisquer conhecendo a distância de um desses pontos (Y) aos vértices do triângulo ABC e as coordenadas baricêntricas do outro ponto (X).

Proposição 3.4. *Seja X um ponto com coordenadas baricêntricas (α, β, γ) em relação ao triângulo ABC . Então, para qualquer ponto Y ,*

$$|\overrightarrow{XY}|^2 = \alpha |\overrightarrow{AY}|^2 + \beta |\overrightarrow{BY}|^2 + \gamma |\overrightarrow{CY}|^2 - (\beta\gamma a^2 + \alpha\gamma b^2 + \alpha\beta c^2)$$

onde a , b e c denotam, respectivamente, as medidas dos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} .

Demonstração. Para calcular $|\overrightarrow{XY}|^2$, inicialmente vamos estabelecer uma relação entre as medidas dos lados do triângulo ABC e a distância do ponto Y aos vértices desse triângulo. Temos que

$$\begin{aligned} c^2 &= |\overrightarrow{AB}|^2 \\ &= |\overrightarrow{AY} + \overrightarrow{YB}|^2 \\ &= |\overrightarrow{AY} - \overrightarrow{BY}|^2 \\ &= (\overrightarrow{AY} - \overrightarrow{BY}) \cdot (\overrightarrow{AY} - \overrightarrow{BY}) \\ &= |\overrightarrow{AY}|^2 - 2(\overrightarrow{AY} \cdot \overrightarrow{BY}) + |\overrightarrow{BY}|^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$2(\overrightarrow{AY} \cdot \overrightarrow{BY}) = |\overrightarrow{AY}|^2 + |\overrightarrow{BY}|^2 - c^2$$

e, portanto,

$$2\alpha\beta(\overrightarrow{AY} \cdot \overrightarrow{BY}) = \alpha\beta(|\overrightarrow{AY}|^2 + |\overrightarrow{BY}|^2 - c^2).$$

Analogamente,

$$2\beta\gamma(\overrightarrow{BY} \cdot \overrightarrow{CY}) = \beta\gamma(|\overrightarrow{BY}|^2 + |\overrightarrow{CY}|^2 - a^2)$$

e

$$2\alpha\gamma(\overrightarrow{AY} \cdot \overrightarrow{CY}) = \alpha\gamma(|\overrightarrow{AY}|^2 + |\overrightarrow{CY}|^2 - b^2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{XY}|^2 &= |Y - X|^2 \\ &= |Y - (\alpha A + \beta B + \gamma C)|^2 \\ &= |1 \cdot Y - (\alpha A + \beta B + \gamma C)|^2 \\ &= |(\alpha + \beta + \gamma)Y - (\alpha A + \beta B + \gamma C)|^2 \\ &= |\alpha(Y - A) + \beta(Y - B) + \gamma(Y - C)|^2 \\ &= |\alpha\overrightarrow{AY} + \beta\overrightarrow{BY} + \gamma\overrightarrow{CY}|^2 \\ &= \alpha^2|\overrightarrow{AY}|^2 + \beta^2|\overrightarrow{BY}|^2 + \gamma^2|\overrightarrow{CY}|^2 + 2\alpha\beta(\overrightarrow{AY} \cdot \overrightarrow{BY}) + 2\alpha\gamma(\overrightarrow{AY} \cdot \overrightarrow{CY}) + 2\beta\gamma(\overrightarrow{BY} \cdot \overrightarrow{CY}) \\ &= \alpha^2|\overrightarrow{AY}|^2 + \beta^2|\overrightarrow{BY}|^2 + \gamma^2|\overrightarrow{CY}|^2 + \alpha\beta(|\overrightarrow{AY}|^2 + |\overrightarrow{BY}|^2 - c^2) + \alpha\gamma(|\overrightarrow{AY}|^2 + |\overrightarrow{CY}|^2 - b^2) + \beta\gamma(|\overrightarrow{BY}|^2 + |\overrightarrow{CY}|^2 - a^2) \\ &= |\overrightarrow{AY}|^2(\alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma) + |\overrightarrow{BY}|^2(\beta^2 + \alpha\beta + \beta\gamma) + |\overrightarrow{CY}|^2(\gamma^2 + \alpha\gamma + \beta\gamma) - \alpha\beta c^2 - \alpha\gamma b^2 - \beta\gamma a^2 \\ &= \alpha|\overrightarrow{AY}|^2 + \beta|\overrightarrow{BY}|^2 + \gamma|\overrightarrow{CY}|^2 - (\beta\gamma a^2 + \alpha\gamma b^2 + \alpha\beta c^2). \end{aligned}$$

□

Agora vamos obter a distância de N aos vértices do triângulo ABC em função de R e das medidas dos lados do triângulo ABC .

Lema 3.5. $|\overrightarrow{AN}|^2 = \frac{R^2 - a^2 + b^2 + c^2}{4}$, $|\overrightarrow{BN}|^2 = \frac{R^2 + a^2 - b^2 + c^2}{4}$ e $|\overrightarrow{CN}|^2 = \frac{R^2 + a^2 + b^2 - c^2}{4}$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} c^2 &= |\overrightarrow{BA}|^2 \\ &= |\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}|^2 \\ &= |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|^2 \\ &= |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - 2(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}) \\ &= 2R^2 - 2(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}). \end{aligned}$$

Assim,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = R^2 - \frac{1}{2}c^2.$$

Analogamente,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = R^2 - \frac{1}{2}b^2$$

e

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = R^2 - \frac{1}{2}a^2.$$

Combinando o Teorema 2.4 com a Proposição 3.3, ou seja, usando que $2\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$, vamos calcular $4|\overrightarrow{AN}|^2$.

$$\begin{aligned}
4|\overrightarrow{AN}|^2 &= |2\overrightarrow{AN}|^2 \\
&= |2\overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{ON}|^2 \\
&= |2\overrightarrow{AO} + 3\overrightarrow{OG}|^2 \\
&= |2\overrightarrow{AO} + 3(G - O)|^2 \\
&= |2\overrightarrow{AO} + 3\left(\frac{A+B+C}{3}\right) - 3O|^2 \\
&= |2\overrightarrow{AO} + A - O + B - O + C - O|^2 \\
&= | -2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} |^2 \\
&= | -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} |^2 \\
&= |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 - 2(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}) - 2(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}) + 2(\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}) \\
&= R^2 + R^2 + R^2 - 2\left(R^2 - \frac{1}{2}c^2\right) - 2\left(R^2 - \frac{1}{2}b^2\right) + 2\left(R^2 - \frac{1}{2}a^2\right) \\
&= 3R^2 - 2R^2 + c^2 - 2R^2 + b^2 + 2R^2 - a^2 \\
&= R^2 - a^2 + b^2 + c^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|\overrightarrow{AN}|^2 = \frac{R^2 - a^2 + b^2 + c^2}{4}.$$

Analogamente,

$$|\overrightarrow{BN}|^2 = \frac{R^2 + a^2 - b^2 + c^2}{4}$$

e

$$|\overrightarrow{CN}|^2 = \frac{R^2 + a^2 + b^2 - c^2}{4}.$$

□

Teorema 3.6 (Teorema de Feuerbach). *Dado um triângulo não-equilátero, a Circunferência dos Nove Pontos é tangente internamente à circunferência inscrita e externamente às três circunferências ex-inscritas.*

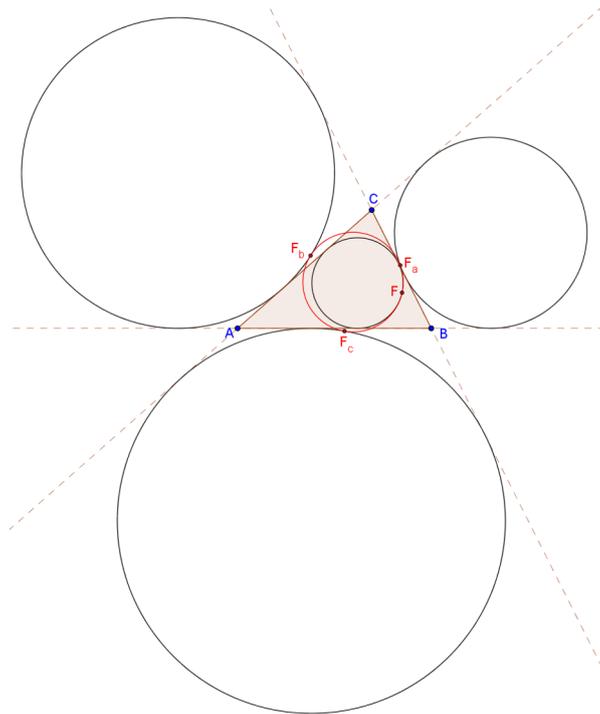


Figura 53: Teorema de Feuerbach.

Demonstração. Pelo Teorema 1.12, duas circunferências são tangentes internamente se a diferença positiva entre seus raios for igual à distância entre seus centros. Dessa forma, a Circunferência dos Nove Pontos será tangente internamente à circunferência inscrita se $IN = |r_i - r|$, onde r_i é o raio da circunferência inscrita de centro I e r é o raio da Circunferência dos Nove Pontos de centro N . Pelo Teorema 3.2, o raio da Circunferência dos Nove Pontos mede metade do raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC , ou seja, $r = \frac{1}{2}R$.

Vamos determinar a distância $IN = |\overrightarrow{IN}|$ através da Proposição 3.4 com $X = I$ e $Y = N$, substituindo as distâncias $AN = |\overrightarrow{AN}|$, $BN = |\overrightarrow{BN}|$ e $CN = |\overrightarrow{CN}|$ pelas relações determinadas no Lema 3.5 e usando as coordenadas baricêntricas de I obtidas na Proposição 2.3. Para tal demonstração, usaremos que $\Delta = \frac{abc}{4R} = r_i s = r_a(s - a) = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$, onde Δ e s denotam, respectivamente, a área e o semiperímetro do triângulo ABC . Uma demonstração destes resultados pode ser encontrada em [10], por exemplo.

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{IN}|^2 &= \frac{a}{2s} \cdot \frac{R^2 - a^2 + b^2 + c^2}{4} + \frac{b}{2s} \cdot \frac{R^2 + a^2 - b^2 + c^2}{4} + \frac{c}{2s} \cdot \frac{R^2 + a^2 + b^2 - c^2}{4} - \left(\frac{b}{2s} \cdot \frac{c}{2s} a^2 + \frac{a}{2s} \cdot \frac{c}{2s} b^2 + \frac{a}{2s} \cdot \frac{b}{2s} c^2 \right) \\
&= \frac{R^2}{4} \left(\frac{a+b+c}{2s} \right) + \frac{-a^3 + ab^2 + ac^2}{8s} + \frac{a^2b - b^3 + bc^2}{8s} + \frac{a^2c + b^2c - c^3}{8s} - \frac{abc}{2s} \left(\frac{a+b+c}{2s} \right) \\
&= \frac{R^2}{4} + \frac{-a^3 - b^3 - c^3 + a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2}{8s} - \frac{4abc}{8s} \\
&= \frac{R^2}{4} + \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{8s} - \frac{2abc}{8s} \\
&= \frac{R^2}{4} + \frac{(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)}{8s} - \frac{4R\Delta}{4s} \\
&= \frac{R^2}{4} + \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} \cdot \frac{s}{s} - \frac{R\Delta}{s} \\
&= \frac{R^2}{4} + \frac{\Delta^2}{s^2} - Rr_i \\
&= \left(\frac{R}{2} \right)^2 + r_i^2 - Rr_i \\
&= \left(r_i - \frac{R}{2} \right)^2 \\
&= (r_i - r)^2.
\end{aligned}$$

Portanto, $IN = |r_i - r|$, o que mostra que a Circunferência dos Nove Pontos é tangente internamente à circunferência inscrita do triângulo ABC .

Pelo Teorema 1.13, duas circunferências são tangentes externamente se a soma de seus raios for igual à distância entre os seus centros. Dessa forma, a Circunferência dos Nove Pontos será tangente externamente à circunferência ex-inscrita oposta ao vértice A se $I_aN = |r_a - r|$, onde r_a é o raio da circunferência ex-inscrita de centro I_a e r é o raio da Circunferência dos Nove Pontos de centro N .

Vamos determinar a distância $I_aN = |\overrightarrow{I_aN}|$ através da Proposição 3.4 com $X = I_a$ e $Y = N$, substituindo as distâncias $AN = |\overrightarrow{AN}|$, $BN = |\overrightarrow{BN}|$ e $CN = |\overrightarrow{CN}|$ pelas relações determinadas no Lema 3.5 e usando as coordenadas baricêntricas de $I_a = \left(\frac{-a}{2(s-a)}, \frac{b}{2(s-a)}, \frac{c}{2(s-a)} \right)$. Para tal demonstração, também usaremos que $\Delta = \frac{abc}{4R} = r_i s = r_a(s-a) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, onde Δ e s denotam, respectivamente, a área e o semiperímetro do triângulo ABC .

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{I_a N}|^2 &= \frac{-a}{2(s-a)} \cdot \frac{R^2 - a^2 + b^2 + c^2}{4} + \frac{b}{2(s-a)} \cdot \frac{R^2 + a^2 - b^2 + c^2}{4} + \frac{c}{2(s-a)} \cdot \frac{R^2 + a^2 + b^2 - c^2}{4} - \left(\frac{b}{2(s-a)} \cdot \frac{c}{2(s-a)} a^2 + \frac{-a}{2(s-a)} \cdot \frac{c}{2(s-a)} b^2 + \frac{-a}{2(s-a)} \cdot \frac{b}{2(s-a)} c^2 \right) \\
&= \frac{R^2}{4} \left(\frac{-a+b+c}{2s-2a} \right) + \frac{a^3 - ab^2 - ac^2}{4(2s-2a)} + \frac{a^2 b - b^3 + bc^2}{4(2s-2a)} + \frac{a^2 c + b^2 c - c^3}{4(2s-2a)} - \frac{abc}{2s-2a} \left(\frac{a-b-c}{2s-2a} \right) \\
&= \frac{R^2}{4} + \frac{a^3 - b^3 - c^3 + a^2 b + a^2 c - ab^2 + b^2 c - ac^2 + bc^2}{4(2s-2a)} + \frac{4abc}{4(2s-2a)} \\
&= \frac{R^2}{4} + \frac{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4(2s-2a)} + \frac{2abc}{4(2s-2a)} \\
&= \frac{R^2}{4} + \frac{s(s-b)(s-c)}{s-a} \cdot \frac{s-a}{s-a} + \frac{R\Delta}{s-a} \\
&= \frac{R^2}{4} + \frac{\Delta^2}{(s-a)^2} + Rr_a \\
&= \left(\frac{R}{2} \right)^2 + r_a^2 + Rr_a \\
&= \left(\frac{R}{2} + r_a \right)^2 \\
&= (r + r_a)^2.
\end{aligned}$$

Portanto, $IN = |r + r_a|$, o que mostra que a Circunferência dos Nove Pontos é tangente externamente à circunferência ex-inscrita oposta ao vértice A do triângulo ABC . Analogamente, as circunferências ex-inscritas opostas aos vértices B e C do triângulo ABC também são tangentes externamente à Circunferência dos Nove Pontos.

□

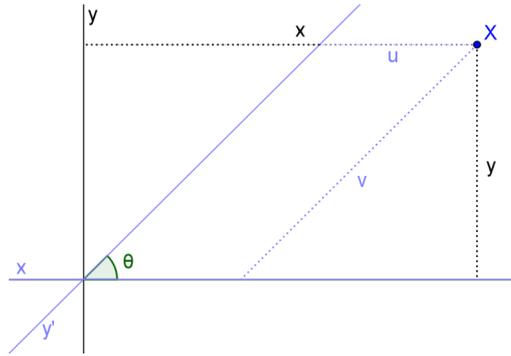
A CÔNICA DOS NOVE PONTOS

No capítulo anterior, mostramos que existe uma circunferência que passa pelos pontos médios dos lados, pelos pés das alturas e pelos pontos médios dos segmentos que unem o ortocentro aos vértices de um triângulo fixado.

Analisando essa circunferência, surge o seguinte questionamento: o que aconteceria se, ao invés das alturas e do ortocentro, considerássemos três cevianas quaisquer que se intersejam em um ponto P ? O objetivo deste capítulo é mostrar que, neste caso, teremos uma cônica passando pelos pontos médios dos lados, pelos pés de tais cevianas e pelos pontos médios dos segmentos que unem P aos vértices do triângulo fixado, denominada *Cônica dos Nove Pontos*.

Esta generalização da Circunferência dos Nove Pontos foi apontada por M. Bôcher em [1]. Bôcher afirmou, inclusive, que a Cônica dos Nove Pontos é o lugar geométrico do centro das cônicas que passam por A , B , C e P . Tal afirmação norteará a demonstração do Teorema 4.5. Para demonstrá-lo, contudo, será preciso fixar um sistema de eixos não necessariamente ortogonais. Nesse sentido, iniciaremos este capítulo estudando a representação das cônicas em um sistema de eixos oblíquos via mudança de coordenadas.

Lema 4.1. *Seja Oxy' um sistema de eixos oblíquos que formam entre si um ângulo θ e seja X um ponto com coordenadas (u, v) nesse sistema. Sejam (x, y) as coordenadas de X em relação ao sistema Oxy de eixos ortogonais dado pela figura abaixo.*

Figura 54: Sistemas de eixos e o ponto X .

Vale:

$$\begin{cases} u = x - y \cot \theta \\ v = y \csc \theta \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x = u + v \cos \theta \\ y = v \sin \theta \end{cases}$$

Demonstração. Temos que $\sin \theta = \frac{y}{v}$, $\cos \theta = \frac{h}{v}$ e $\tan \theta = \frac{y}{h}$, onde $h = x - u$. Assim, $v = y \cdot \frac{1}{\sin \theta} = y \csc \theta$ e $u = x - h = x - y \cdot \frac{1}{\tan \theta} = x - y \cot \theta$. Consequentemente, $y = v \sin \theta$ e $x = u + h = u + v \cos \theta$. Portanto,

$$\begin{cases} u = x - y \cot \theta \\ v = y \csc \theta \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x = u + v \cos \theta \\ y = v \sin \theta \end{cases}$$

□

Fixado um sistema de eixos ortogonais, temos que \mathcal{C} é uma cônica se, e somente se, \mathcal{C} é o lugar geométrico dos pontos do plano cujas coordenadas satisfazem uma mesma equação do segundo grau em duas variáveis. Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [2], por exemplo. A seguir, mostraremos que o mesmo vale em relação a um sistema de eixos oblíquos.

Lema 4.2. *Considere fixado um sistema de eixos oblíquos. Vale: \mathcal{C} é uma cônica se, e somente se, \mathcal{C} é o lugar geométrico dos pontos do plano cujas coordenadas satisfazem uma mesma equação do segundo grau em duas variáveis.*

Demonstração. Denote por Oxy' o sistema de eixos oblíquos fixado e considere Oxy o sistema de eixos ortogonais dado pelo Lema 4.1.

Suponha que \mathcal{C} seja uma cônica. Tome a, b, c, d, e e f números reais tais que $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ e de modo que $X \in \mathcal{C}$ se, e somente se, $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$,

onde (x, y) são as coordenadas de X em Oxy . Note que, em relação a Oxy' , $X = (u, v)$ com $x = u + v \cos \theta$ e $y = v \sin \theta$. Portanto, $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ se, e somente se, $a(u + v \cos \theta)^2 + b(u + v \cos \theta)(v \sin \theta) + c(v \sin \theta)^2 + d(u + v \cos \theta) + e(v \sin \theta) + f = 0$. Logo, $X \in \mathcal{C}$ se, e somente se, $au^2 + (2a \cos \theta + b \sin \theta)uv + (a \cos^2 \theta + b \cos \theta \sin \theta + c \sin^2 \theta)v^2 + du + (d \cos \theta + e \sin \theta)v + f = 0$. Em outras palavras, \mathcal{C} é o lugar geométrico dos pontos do plano cujas coordenadas (u, v) em relação a Oxy' satisfazem uma mesma equação do segundo grau em duas variáveis.

Reciprocamente, suponha que \mathcal{C} seja o lugar geométrico dos pontos do plano cujas coordenadas em relação a Oxy' satisfazem uma mesma equação do segundo grau em duas variáveis. Fazendo a mudança de coordenadas dada pelo Lema 4.1, chegaremos à conclusão de que \mathcal{C} é o lugar geométrico dos pontos do plano cujas coordenadas (x, y) em relação a Oxy satisfazem uma mesma equação do segundo grau em duas variáveis e, portanto, \mathcal{C} é uma cônica. \square

Também sabemos que, em relação a um sistema de eixos ortogonais, uma equação da forma $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ com $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ representa uma parábola (incluindo suas possíveis formas degeneradas — a saber, um par de retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio) se $b^2 - 4ac = 0$, uma elipse (incluindo suas possíveis formas degeneradas — a saber, uma circunferência, um ponto ou o conjunto vazio) se $b^2 - 4ac > 0$ ou uma hipérbole (incluindo sua possível forma degenerada — a saber, um par de retas concorrentes) se $b^2 - 4ac < 0$. Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [2]. A seguir, mostraremos que o mesmo vale em relação a um sistema de eixos oblíquos.

Lema 4.3. *Considere fixado um sistema de eixos oblíquos em relação ao qual uma cônica é representada pela equação $au^2 + buv + cv^2 + du + ev + f = 0$. Se $b^2 - 4ac = 0$, então a cônica em questão é uma parábola (degenerada ou não); se $b^2 - 4ac > 0$, então a cônica em questão é uma elipse (degenerada ou não); se $b^2 - 4ac < 0$, então a cônica em questão é uma hipérbole (degenerada ou não).*

Demonstração. Denote por Oxy' o sistema de eixos oblíquos fixado e considere Oxy o sistema de eixos ortogonais dado pelo Lema 4.1.

Seja X um ponto cujas coordenadas em relação a Oxy sejam (x, y) e cujas coordenadas em relação a Oxy' sejam (u, v) .

Temos que $au^2 + buv + cv^2 + du + ev + f = 0$ se, e somente se, $a'x^2 + b'xy + c'y^2 + d'x + e'y + f' = 0$, onde $a' = a$, $b' = -2a \cot \theta + b \csc \theta$, $c' = a \cot^2 \theta - b \cot \theta \csc \theta + c \csc^2 \theta$, $d' = d$, $e' = -d \cot \theta + e \csc \theta$ e $f' = f$. Assim,

$$\begin{aligned} \Delta' &= b'^2 - 4a'c' \\ &= (-2a \cot \theta + b \csc \theta)^2 - 4a(a \cot^2 \theta - b \cot \theta \csc \theta + c \csc^2 \theta) \\ &= 4a^2 \cot^2 \theta - 4ab \cot \theta \csc \theta + b^2 \csc^2 \theta - 4a^2 \cot^2 \theta + 4ab \cot \theta \csc \theta - 4ac \csc^2 \theta \\ &= (b^2 - 4ac) \csc^2 \theta \\ &= \Delta \cdot \csc^2 \theta \end{aligned}$$

Portanto, $\Delta' > 0 \iff \Delta > 0$, $\Delta' < 0 \iff \Delta < 0$ e $\Delta' = 0 \iff \Delta = 0$, o que encerra a demonstração. \square

Um ponto C é *centro* de uma cônica (não-vazia) se, para todo ponto P que pertence à cônica, o simétrico de P em relação a C também pertence a ela.

Fixado um sistema de eixos ortogonais, tem-se que $C = (x_0, y_0)$ é o centro da cônica (não-vazia) de equação $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ se, e somente se, (x_0, y_0) é solução de

$$\begin{cases} ax_0 + hy_0 + g = 0 \\ hx_0 + by_0 + f = 0 \end{cases}$$

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [2].

Lema 4.4. *Considere fixado um sistema de eixos oblíquos. O ponto $C = (u_0, v_0)$ é centro da cônica C de equação $au^2 + 2huv + bv^2 + 2gu + 2fv + c = 0$ se, e somente se,*

$$\begin{cases} au_0 + hv_0 + g = 0 \\ hu_0 + bv_0 + f = 0 \end{cases}$$

Demonstração. Denote por Oxy' o sistema de eixos oblíquos fixado e considere Oxy o sistema de eixos ortogonais dado pelo Lema 4.1.

Em relação a Oxy , a cônica C tem equação $a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$, onde $a' = a$, $2h' = -2a \cot \theta + 2h \csc \theta$, $b' = a \cot^2 \theta - 2h \cot \theta \csc \theta + b \csc^2 \theta$, $2g' = 2g$, $2f' = -2g \cot \theta + 2f \csc \theta$ e $c' = c$.

Se o ponto C de coordenadas (x_0, y_0) em Oxy é centro da cônica C , então

$$\begin{cases} a'x_0 + h'y_0 + g' = 0 \\ h'x_0 + b'y_0 + f' = 0 \end{cases}$$

Se (u_0, v_0) são as coordenadas de C em relação a Oxy' , então $x_0 = u_0 + v_0 \cos \theta$ e $y_0 = v_0 \sin \theta$. Logo,

$$\begin{cases} a'u_0 + (a' \cos \theta + h' \sin \theta)v_0 + g' = 0 \\ h'u_0 + (h' \cos \theta + b' \sin \theta)v_0 + f' = 0 \end{cases}$$

Como

$$au_0 + hv_0 + g = a'u_0 + (a' \cos \theta + h' \sin \theta)v_0 + g'$$

e

$$hu_0 + bv_0 + f = [a'u_0 + (a' \cos \theta + h' \sin \theta)v_0 + g'] \cos \theta + [h'u_0 + (h' \cos \theta + b' \sin \theta)v_0 + f'] \sin \theta$$

chegamos à conclusão que

$$\begin{cases} au_0 + hv_0 + g = 0 \\ hu_0 + bv_0 + f = 0 \end{cases}$$

Analogamente, temos que se

$$\begin{cases} au_0 + hv_0 + g = 0 \\ hu_0 + bv_0 + f = 0 \end{cases}$$

então

$$\begin{cases} a'x_0 + h'y_0 + g' = 0 \\ h'x_0 + b'y_0 + f' = 0 \end{cases}$$

o que implica que C é centro de \mathcal{C} . □

Temos, agora, todos os resultados necessários para demonstrar o principal teorema desta dissertação. A ideia central pode ser encontrada em [14], especificamente nos Exercícios 1 e 4 das páginas 137 e 138, e também em [12].

Teorema 4.5. *Dados um triângulo ABC e três cevianas que se intersectam em um ponto P , existe uma cônica que passa pelos seguintes nove pontos:*

- M_a, M_b e M_c , os respectivos pontos médios de \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} ;
- P_a, P_b e P_c , os respectivos pés das cevianas que contêm \overline{AP} , \overline{BP} e \overline{CP} ;
- E_a, E_b e E_c , os respectivos pontos médios de \overline{AP} , \overline{BP} e \overline{CP} .

Demonstração. Fixemos o sistema que tem como primeiro eixo a reta orientada por \overrightarrow{AB} e, como segundo, a reta orientada por \overrightarrow{PC} . Em relação a esse sistema, $A = (\lambda, 0)$, $B = (\lambda', 0)$, $C = (0, \mu')$ e $P = (0, \mu)$.

Vamos mostrar que $M_a, M_b, M_c, P_a, P_b, P_c, E_a, E_b$ e E_c pertencem a uma mesma cônica, \mathcal{C} .

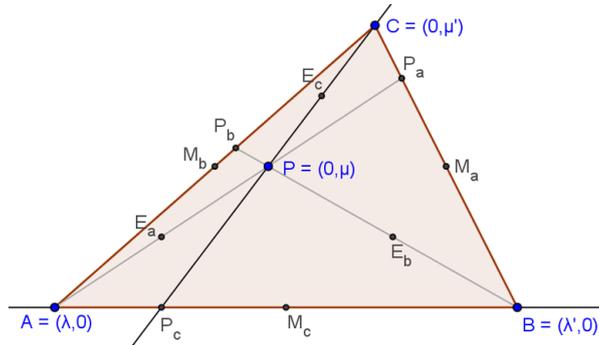


Figura 55: Sistema de eixos fixado.

Seja \mathcal{C}' uma cônica que passa por A, B, C e P .¹ Uma equação de \mathcal{C}' tem a forma

$$au^2 + 2huv + bv^2 + 2gu + 2fv + c = 0.$$

Os pontos de interseção de \mathcal{C}' com o primeiro eixo são da forma $(u, 0)$ e tais que $au^2 + 2gu + c = 0$. Como $A = (\lambda, 0)$ e $B = (\lambda', 0)$ pertencem a essa interseção, temos que λ e λ' são raízes da equação

$$u^2 + \frac{2gu}{a} + \frac{c}{a} = 0.$$

Assim,

$$\frac{-2g}{a} = \lambda + \lambda' \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \lambda\lambda'$$

e, portanto,

$$2g = -a(\lambda + \lambda') \tag{4.1}$$

e

$$c = a\lambda\lambda'. \tag{4.2}$$

Os pontos de interseção de \mathcal{C}' com o segundo eixo são da forma $(0, v)$ e tais que $bv^2 + 2fv + c = 0$. Como $P = (0, \mu)$ e $C = (0, \mu')$ pertencem a essa interseção, temos que μ e μ' são raízes da equação

$$v^2 + \frac{2fv}{b} + \frac{c}{b} = 0.$$

Assim,

$$\frac{-2f}{b} = \mu + \mu' \quad \text{e} \quad \frac{c}{b} = \mu\mu'$$

¹ Existem infinitas cônicas passando por 4 pontos.

e, portanto,

$$2f = -b(\mu + \mu') \quad (4.3)$$

e

$$c = b\mu\mu'. \quad (4.4)$$

De (4.2) e (4.4) decorre que $a\lambda\lambda' = b\mu\mu'$.

Tomando $a = \mu\mu'$, teremos que $b = \lambda\lambda'$. Logo, uma equação de C' será

$$\mu\mu'u^2 + 2huv + \lambda\lambda'v^2 - \mu\mu'(\lambda + \lambda')u - \lambda\lambda'(\mu + \mu')v + \lambda\lambda'\mu\mu' = 0. \quad (4.5)$$

As coordenadas (u, v) do centro da cônica C' devem satisfazer as seguintes relações, de acordo com o Lema 4.4:

$$\begin{cases} 2\mu\mu'u + 2hv - \mu\mu'(\lambda + \lambda') = 0 \\ 2hu + 2\lambda\lambda'v - \lambda\lambda'(\mu + \mu') = 0 \end{cases}$$

Isolando $2h$ em cada uma das equações e igualando, obtemos

$$2\mu\mu'u^2 - \mu\mu'(\lambda + \lambda')u = 2\lambda\lambda'v^2 - \lambda\lambda'(\mu + \mu')v. \quad (4.6)$$

Reescrevendo (4.6), chegamos a

$$\mu\mu'u \left(u - \frac{\lambda + \lambda'}{2} \right) = \lambda\lambda'v \left(v - \frac{\mu + \mu'}{2} \right) \quad (4.7)$$

que é a equação de uma cônica \mathcal{C} , onde \mathcal{C} é uma elipse ou hipérbole passando pela origem do sistema de eixos fixado (a saber, P_c). Note que \mathcal{C} também passa pelos pontos médios de \overline{AB} e \overline{PC} (M_c e E_c , respectivamente).

Encerramos a demonstração observando que, de forma análoga:

- Ao fixar o sistema que tem como primeiro eixo a reta orientada por \overrightarrow{AC} e, como segundo, a reta orientada por \overrightarrow{PB} , concluímos que a origem desse sistema (a saber, P_b) e os pontos médios desses segmentos (M_b e E_b , respectivamente) também pertencem à cônica \mathcal{C} .
- Ao fixar o sistema que tem como primeiro eixo a reta orientada por \overrightarrow{BC} e, como segundo, a reta orientada por \overrightarrow{PA} , concluímos que a origem desse sistema (a saber, P_a) e os pontos médios desses segmentos (M_a e E_a , respectivamente) também pertencem à cônica \mathcal{C} .

Logo, os nove pontos $M_a, M_b, M_c, P_a, P_b, P_c, E_a, E_b$ e E_c pertencem à \mathcal{C} .

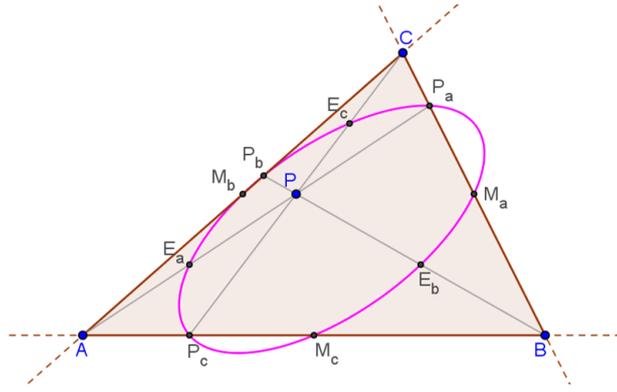


Figura 56: Elipse.

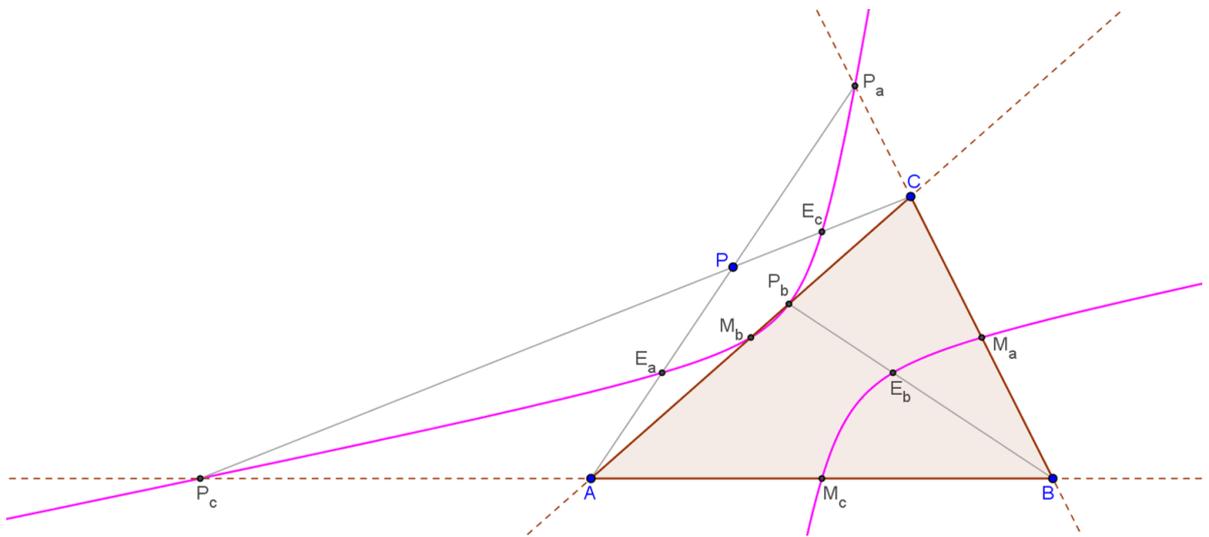


Figura 57: Hipérbole.

□

Bôcher também afirmou, em [1], que a Cônica dos Nove Pontos será:

- uma elipse, quando P estiver no interior do triângulo ABC ou em uma das três porções infinitas do plano que podem ser alcançadas a partir do interior deste triângulo atravessando duas de suas linhas delimitadoras;
- uma hipérbole, quando P estiver em qualquer das três porções restantes do plano;

- um par de retas paralelas (parábola degenerada), quando P se encontra em um dos lados (ou na reta suporte deles) do triângulo ABC ;
- uma parábola, quando P estiver no infinito.

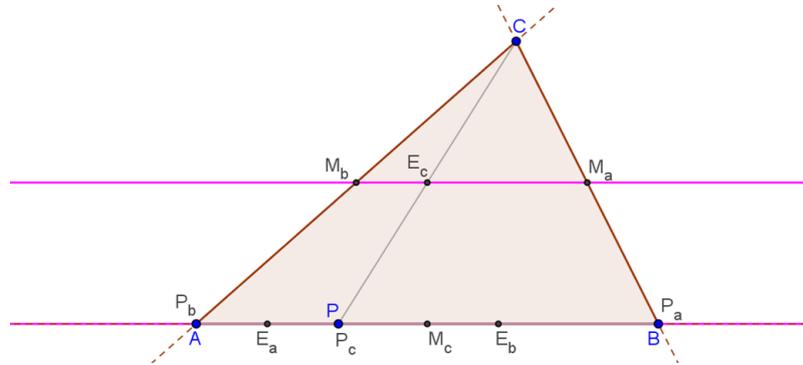


Figura 58: Parábola degenerada - um par de retas paralelas.

ATIVIDADES

Neste capítulo, vamos apresentar sugestões de atividades para serem realizadas em sala de aula com os alunos, abordando os principais resultados desta dissertação. Para desenvolvê-las, inicialmente buscamos em qual série/ano os temas são abordados na íntegra ou parcialmente; depois, elaboramos a atividade de forma a deixá-la atrativa de acordo com a idade do aluno e o seu potencial.

Propomos duas atividades diferentes: a primeira, envolvendo dobraduras de papel, é direcionada aos anos finais do Ensino Fundamental II, isto é, aos 8º e 9º anos (cabe ao professor verificar em qual série/ano a atividade se relaciona com a grade curricular); a segunda utiliza o *GeoGebra*, um *software* de matemática dinâmica, e é voltada ao Ensino Médio.

5.1 DOBRADURAS DE PAPEL

O principal objetivo desta atividade é que o aluno construa conceitos matemáticos de maneira informal, intuitiva e lúdica, despertando seu interesse por Geometria e pela Matemática em geral. Não realizaremos nenhum cálculo, apenas dobraduras de papel, porém sempre que necessário faremos uso de lápis, régua e compasso para destacar e construir pontos, retas e circunferências.

As dobraduras de papel são um excelente recurso didático, de fácil manipulação e custo baixo. Além de proporcionar ao aluno uma visualização do objeto a ser estudado, o mesmo será construído por ele através de comandos dados pelo seu professor. Dessa forma, estaremos utilizando parte do seu sistema sensorial (audição, visão e tato) e desenvolvendo o espírito de investigação.

Esta atividade está dividida em três etapas e, antes de sua aplicação, é desejável que os alunos tenham tido contato com as noções de mediatriz, bissetriz, mediana e altura, além da noção de circunferência.

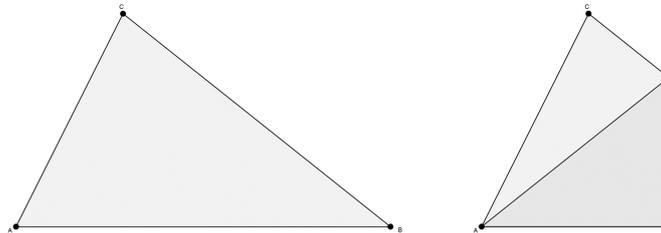
Inicialmente construiremos os pontos notáveis de um triângulo e, para isso, utilizaremos três tipos de triângulos (acutângulo, retângulo e obtusângulo), evitando conclusões precipitadas e generalizações errôneas. Em seguida, será construída a Reta de Euler e, por fim, a Circunferência dos Nove Pontos. Nas duas últimas etapas utilizaremos apenas triângulos acutângulos, a fim de facilitar a visualização.

5.1.1 Pontos notáveis do triângulo

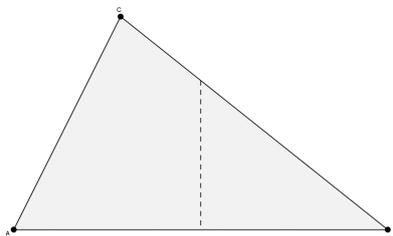
Para realizar esta atividade utilizaremos lápis, régua, compasso, cola, tesoura e folhas de papel sulfite com triângulos impressos.

Circuncentro

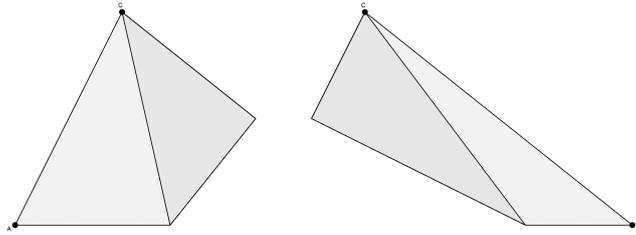
Partindo de um recorte de triângulo acutângulo, faça a seguinte dobra, sobrepondo o vértice B ao vértice A :



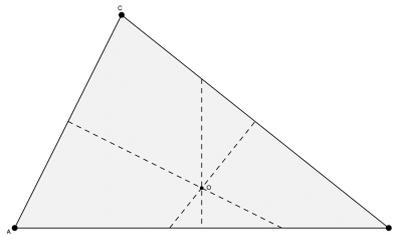
Desdobre. A reta determinada pela dobradura é a mediatriz do lado AB .



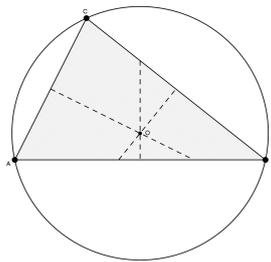
Repita o procedimento para os lados BC e AC , de acordo com as figuras abaixo.



Observe que as três mediatrizes se encontram em um único ponto O , denominado o *circuncentro* do triângulo ABC .



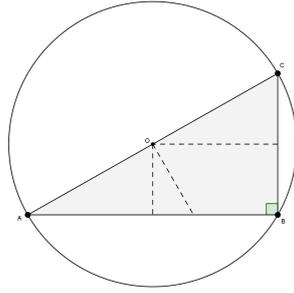
Cole o triângulo em uma folha e, centrando a ponta seca do compasso no circuncentro e a outra em um dos vértices do triângulo, tracem uma circunferência.¹



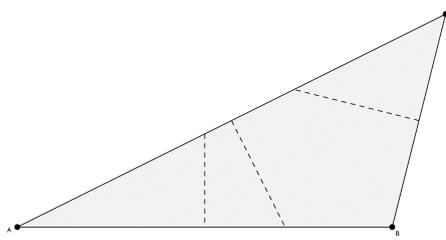
A circunferência obtida circunscreve o triângulo ABC , o que justifica o nome dado ao ponto O .

Repita o procedimento utilizando um recorte de triângulo retângulo, observando que o circuncentro, neste caso, coincide com o ponto médio da hipotenusa do triângulo.

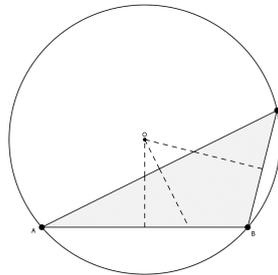
¹ Cuidado com o tamanho do triângulo em relação à folha, para que a circunferência possa ser traçada inteiramente na folha.



Por fim, repita o procedimento em um recorte de triângulo obtusângulo.



Note que, feitas as três dobras, não obtivemos o circuncentro como nos casos anteriores. Cole o triângulo numa folha e faça novas dobras por cima das mediatrizes obtidas (ou, simplesmente, amplie os segmentos utilizando uma régua). Agora, sim, o circuncentro ficou determinado — e ele é um ponto exterior ao triângulo dado.

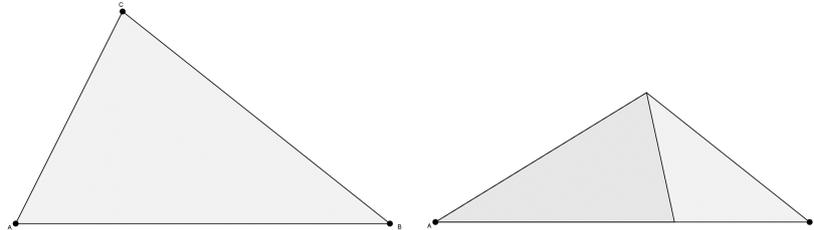


Encerre esta atividade recapitulando a definição de mediatriz, sua caracterização como lugar geométrico e, por fim, apresentando uma justificativa de que as mediatrizes dos lados de um triângulo sempre se intersectarão em um único ponto.

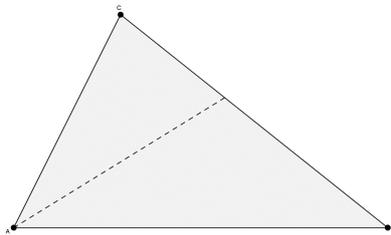
Destaque também a importância de termos utilizados triângulos diferentes: se tivéssemos parado no primeiro ou no segundo, poderíamos ter sido levados à conclusão errônea de que o circuncentro de um triângulo nunca seria exterior ao triângulo dado.

Incentro

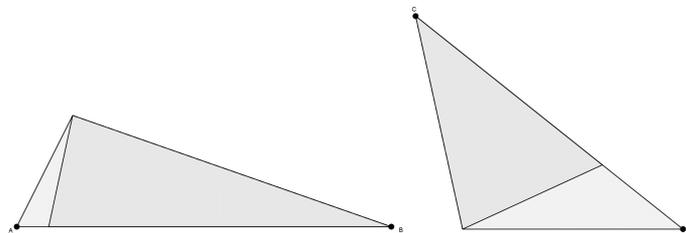
Partindo de um recorte de triângulo acutângulo, faça a seguinte dobra, sobrepondo o lado AC ao lado AB :



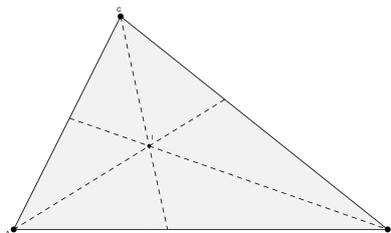
Desdobre. A semirreta determinada pela dobradura é a bissetriz do ângulo \hat{A} .



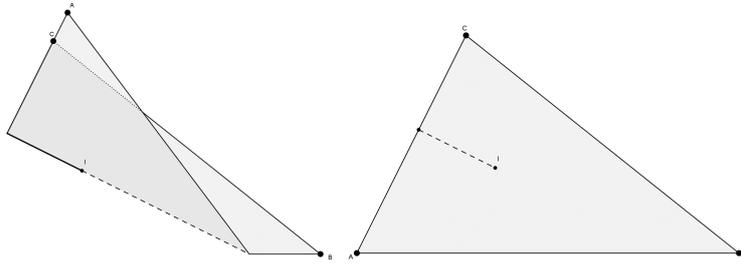
Repita o procedimento para os lados BC e AB e também para os lados AC e BC , de acordo com as figuras abaixo.



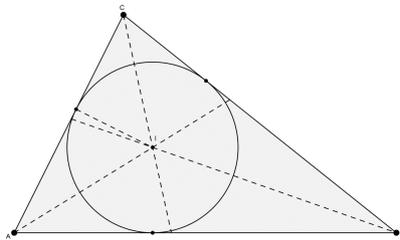
Observe que as três bissetrizes se encontram em um único ponto I , denominado o *incentro* do triângulo ABC .



Faça a seguinte dobra passando pelo ponto I , de modo que o lado AC se sobreponha (faça vinco somente do ponto I até o lado AC):

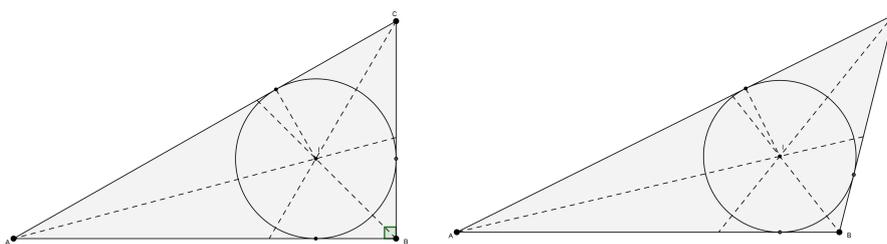


Com essa dobra, determinou-se o raio da circunferência inscrita no triângulo ABC . Desdobre. Centrando a ponta seca do compasso no incentro e com abertura igual à medida do raio, trace uma circunferência.



Antes de iniciar o trabalho com outros triângulos, lembre os resultados obtido na atividade anterior e questione se existe a possibilidade do incentro não pertencer ao interior do triângulo em algum caso e por quê.

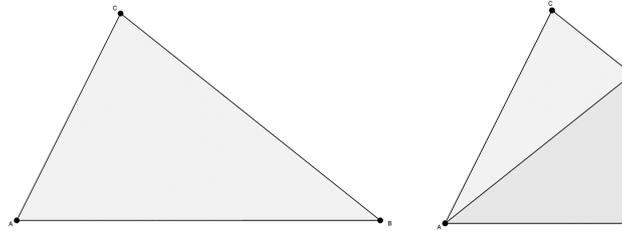
Repita o procedimento utilizando um recorte de triângulo retângulo e outro de triângulo obtusângulo. Observe que o incentro sempre será interior ao triângulo ABC .



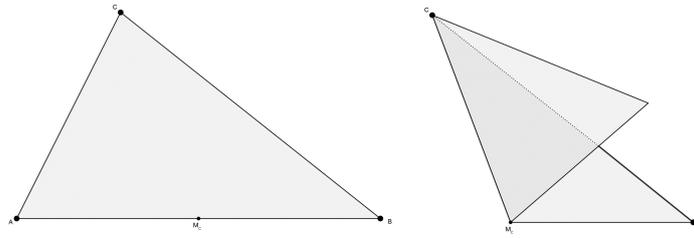
Encerre esta atividade recapitulando a definição de bissetriz, sua caracterização como lugar geométrico e, por fim, apresente uma justificativa de que as bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo sempre se intersectarão em um único ponto.

Baricentro

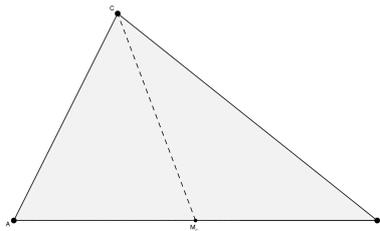
Partindo de um recorte de triângulo acutângulo, faça a seguinte pequena dobra na parte inferior do triângulo ao sobrepor o vértice B ao vértice A (não faça vinco, apenas “marque o ponto”):



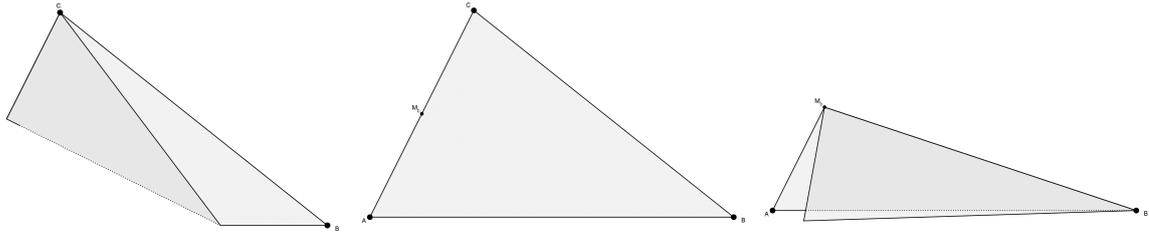
Com esta dobra, determinou-se o ponto médio M_C do lado AB . Desdobre e faça uma dobra passando pelos pontos C e M_C .



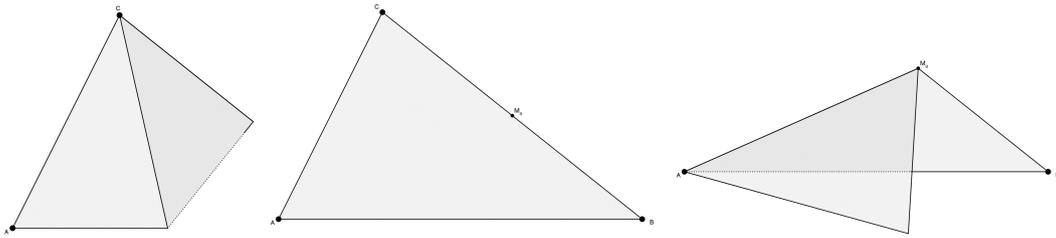
Desdobre novamente. O segmento determinado pela dobradura é a mediana do triângulo ABC relativa ao lado AB .



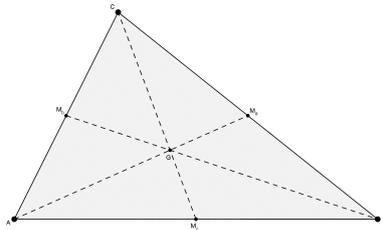
Repita o procedimento para o lado AC e o vértice B .



Agora, repita para o lado BC e o vértice A .

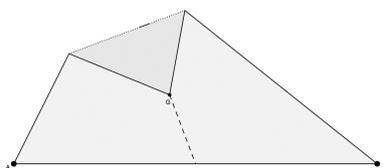


Observe que as três medianas se encontram em um único ponto G , denominado o *baricentro* do triângulo ABC .

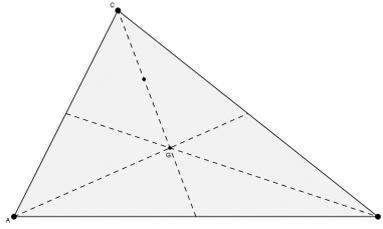


Prosseguiremos às dobraduras, a fim de mostrar que o baricentro divide cada mediana na razão $2 : 1$.

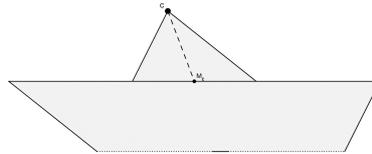
Faça a seguinte pequena dobra, sobrepondo o vértice C ao ponto G (não faça vinco, apenas “marque o ponto”):



Com esta dobra, determinou-se o ponto médio do segmento \overline{CG} . Desdobre.

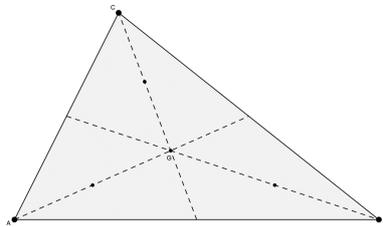


Agora faça a seguinte pequena dobra, sobrepondo o ponto médio M_C ao ponto médio do segmento \overline{CG} (não faça vinco, apenas “marque o ponto”):

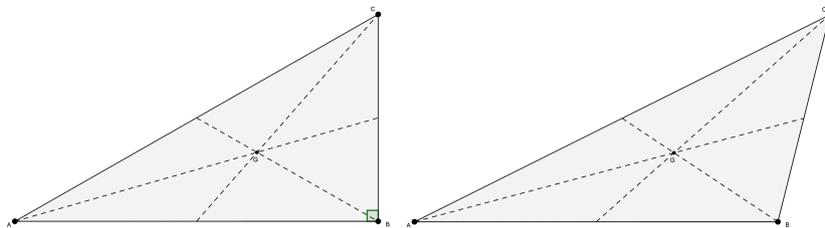


Observe que ponto marcado foi o próprio ponto G e que a mediana $\overline{CM_C}$ ficou dividida em três partes congruentes.

Repita o procedimento para os vértices A e B e observe que o baricentro divide cada mediana na razão $2 : 1$.



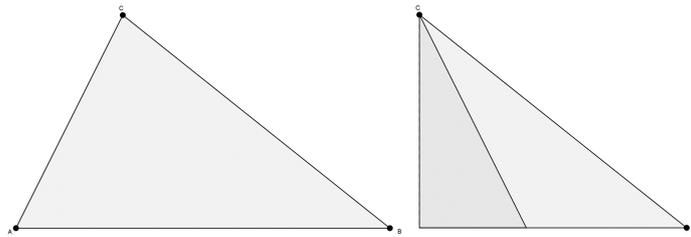
Repita o procedimento utilizando um recorte de triângulo retângulo e outro de triângulo obtusângulo. Observe que o baricentro sempre será interior ao triângulo ABC .



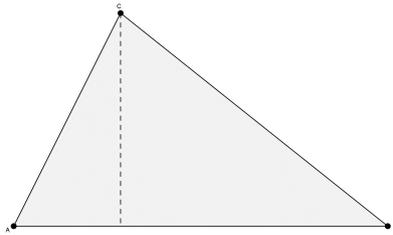
Encerre esta atividade recapitulando a definição de mediana e apresentando uma justificativa de que as medianas dos lados de um triângulo sempre se intersearão em um único ponto.

Ortocentro

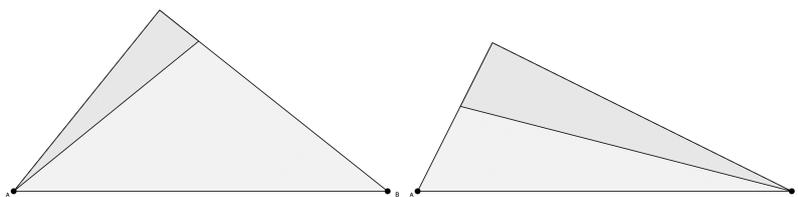
Partindo de um recorte de triângulo acutângulo, faça a seguinte dobra passando pelo vértice C , de modo que o lado AB se sobreponha:



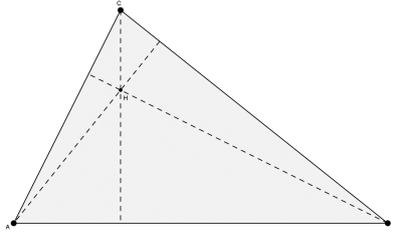
Desdobre. O segmento determinado pela dobradura é a altura relativa ao lado AB .



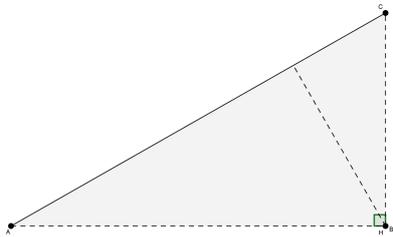
Repita o procedimento para os lados BC e AC , de acordo com as figuras abaixo.



Observe que as três alturas se encontram em um único ponto H , denominado o *ortocentro* do triângulo ABC .

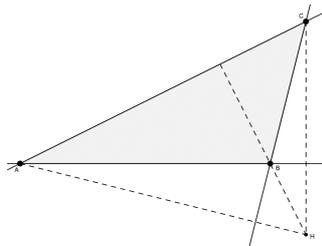


Repita o procedimento utilizando um recorte de triângulo retângulo. Observe que apenas é possível fazer a dobra no lado oposto ao ângulo reto, pois as outras alturas coincidem com os outros lados. Logo, o ortocentro coincide com o vértice do ângulo reto.



Por fim, repita o procedimento em um triângulo obtusângulo.

Note que apenas é possível fazer a dobra no lado oposto ao ângulo obtuso e, assim, não obtivemos o ortocentro como nos casos anteriores. Então, cole o triângulo numa folha, prolonguem seus lados e faça novas dobras. Agora, sim, o ortocentro ficou determinado — e ele é um ponto exterior ao triângulo dado.

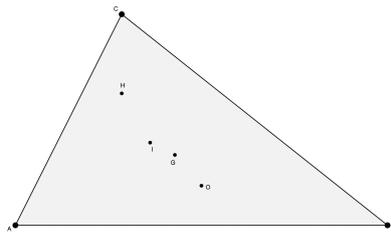


Encerre esta atividade recapitulando a definição de ortocentro e apresentando uma justificativa de que as alturas de um triângulo sempre se intersectarão em um único ponto.

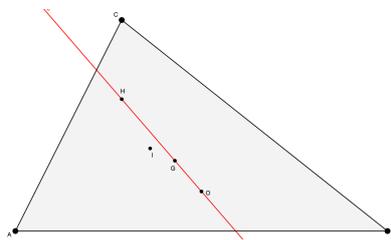
5.1.2 A Reta de Euler

Para realizar esta atividade utilizaremos lápis, régua, tesoura e folhas de papel sulfite com um triângulo acutângulo impresso.

Partindo de um recorte de triângulo acutângulo (para facilitar a visualização dos pontos notáveis), por meio dos procedimentos (dobraduras) apresentados nas atividades anteriores, encontre o circuncentro (O), o incentro (I), o baricentro (G) e o ortocentro (H) do triângulo ABC .



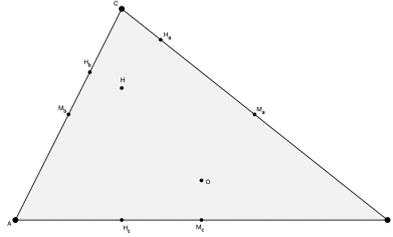
Observe a posição desses pontos, um em relação aos outros, até que seja levantada a hipótese do circuncentro, baricentro e ortocentro serem colineares. Por fim, trace uma reta unindo os pontos O e H e confirme a hipótese.



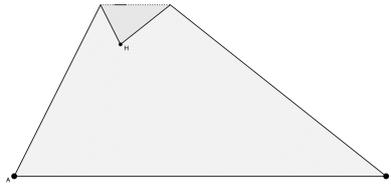
5.1.3 A Circunferência dos Nove Pontos

Para realizar esta atividade utilizaremos lápis, régua, compasso, cola, tesoura e folhas de papel sulfite com um triângulo acutângulo impresso.

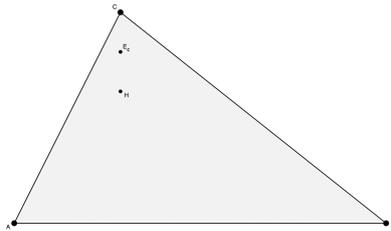
Partindo de um recorte de triângulo acutângulo (para facilitar a visualização dos pontos notáveis), por meio dos procedimentos (dobraduras) apresentados nas atividades anteriores, encontre o ortocentro (H), o circuncentro (O), os pontos médios dos lados (M_a , M_b e M_c) e os pés das alturas (H_a , H_b e H_c) do triângulo ABC .



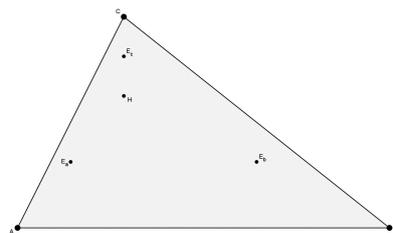
Faça a seguinte pequena dobra, sobrepondo o vértice A ao ponto H (não faça vinco, apenas “marque o ponto”):



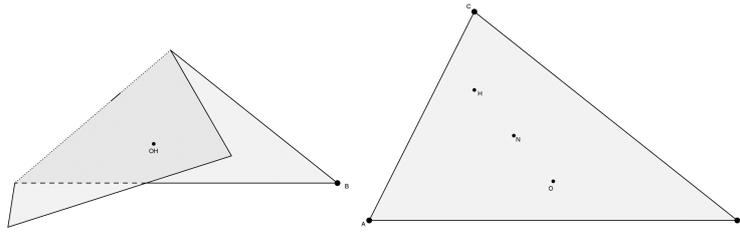
Com esta dobra, determinou-se o ponto médio E_c do segmento \overline{CH} .



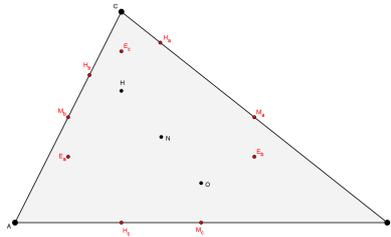
Desdobre. Repita o procedimento para os segmentos \overline{BH} e \overline{CH} .



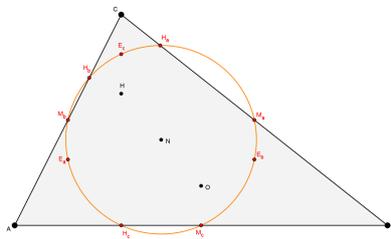
Faça novamente uma pequena dobra, agora sobrepondo o ortocentro ao circuncentro, determinando o ponto médio N do segmento \overline{OH} (não faça vinco, apenas “marque o ponto”):



Cole o triângulo em uma folha e destaque os pontos médios dos lados e dos segmentos que ligam os vértices ao ortocentro, bem como os pés das alturas do triângulo ABC .²



Observe a posição desses nove pontos, até que seja levantada a hipótese de todos estarem sobre uma mesma circunferência. Por fim, centrando a ponta seca do compasso no ponto N e a outra em qualquer um dos nove pontos destacados, trace uma circunferência e confirme a hipótese.



5.2 ABORDAGENS VISUAIS DA CÔNICA DOS NOVE PONTOS

O principal objetivo desta atividade é que o aluno construa conceitos matemáticos de maneira informal, intuitiva e lúdica utilizando o *software* GeoGebra, cujo download pode ser feito em <https://www.geogebra.org/download>.³

² Cuidado com o tamanho do triângulo em relação à folha, para que a Circunferência dos Nove Pontos possa ser traçada inteiramente na folha.

³ “O GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um

O GeoGebra é um excelente recurso didático, pois proporciona uma visualização do objeto a ser estudado, é de fácil manipulação e é gratuito, porém se faz necessário um computador disponível por aluno ou dupla de alunos (o *software* também funciona em *tablets*, mas o ideal é realizar a atividade em um computador). O objeto a ser estudado será construído pelo aluno através de comandos dados pelo seu professor, que deve conduzir a atividade de forma a desenvolver o espírito de investigação.

A atividade está dividida em duas etapas e, antes de sua aplicação, é desejável que os alunos tenham tido contato com as noções de mediatriz, bissetriz, mediana e altura, além da noção de circunferência (o ideal seria o aluno já ter realizado em algum momento a atividade anterior).

Inicialmente construiremos os pontos notáveis de um triângulo, para depois obter a reta de Euler e a Circunferência dos Nove Pontos. Em seguida, será levantado um questionamento que nos levará à construção da Cônica dos Nove Pontos.

A segunda etapa desta atividade consistirá de uma abordagem visual da demonstração do Teorema 4.5 apresentado no capítulo anterior.

5.2.1 Primeira abordagem

Ao abrir o programa, verifique se no canto esquerdo da tela está sendo exibida a *Janela de Álgebra*. Caso não esteja, vá ao menu superior, clique em *Exibir* e, em seguida, selecione *Janela de Álgebra*. Clique também na seta em frente a *Janela de Visualização* para que seja exibida a *Barra de Estilos*, onde poderá esconder ou exibir os eixos ou a malha, bem como, quando selecionar algum objeto poderá modificar sua cor, tamanho e rótulo.

único pacote fácil de se usar. O GeoGebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países. O GeoGebra se tornou um líder na área de *softwares* de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática” Fonte: <https://www.geogebra.org/about>. O GeoGebra também está disponível online.

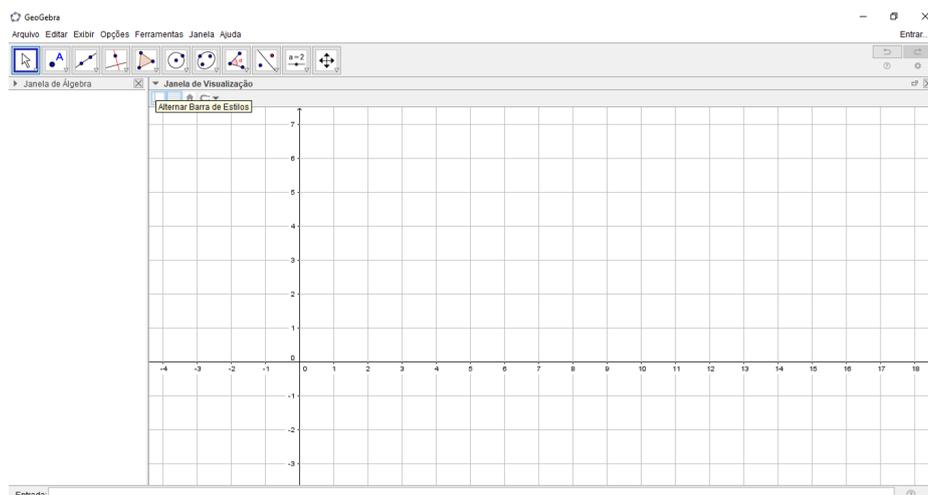


Figura 59: Tela inicial

Para criar os objetos faremos uso dos botões da *Barra de Ferramentas*, selecionando a ação desejada e realizando-a na *Janela de Visualização*.



Figura 60: Botões da barra de ferramentas.

Pontos notáveis do triângulo

- No segundo botão, selecione *Ponto*. Depois, na *Janela de Visualização*, determine a posição de cada ponto (A , B e C).

Observação. Sempre que desejar mover esses pontos (ou qualquer outro objeto), vá ao primeiro botão e selecione *Mover*. Em seguida, arraste-os para a posição desejada.

- No quinto botão, selecione *Polígono*. Depois, na *Janela de Visualização*, clique nos pontos A , B , C e, novamente, no ponto A .

Vamos criar as retas suporte do lados do triângulo ABC .

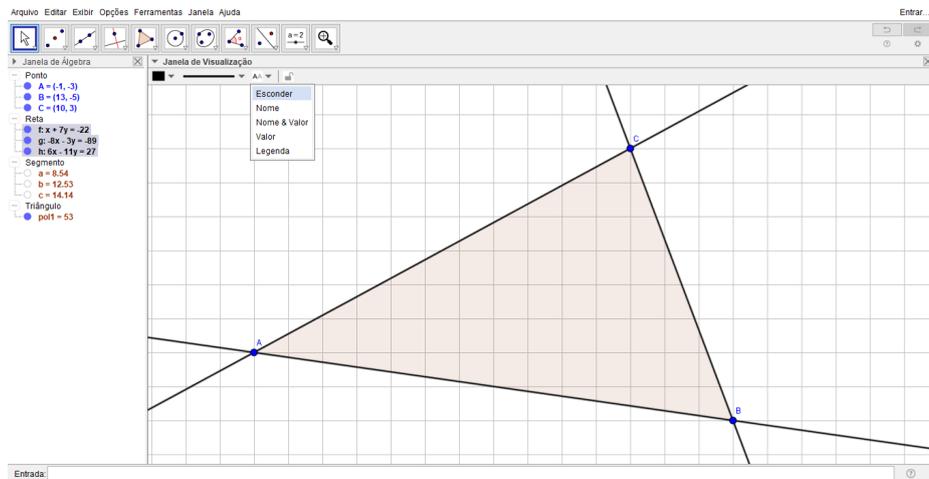
- No terceiro botão, selecione *Reta*. Depois, clique no ponto A e, em seguida, no ponto B .

- Repita o procedimento nos outros dois lados do triângulo.

Para tornar o ambiente visualmente menos poluído, ocultaremos os segmentos do polígono e o nome das retas:

- Na *Janela de Álgebra*, desabilite os três segmentos do polígono (a , b e c), ou seja, clique sobre a “bolinha” azul em frente à descrição do objeto de modo que essa “bolinha” fique branca. Repita este procedimento sempre que desejar ocultar um objeto (e faça o inverso para exibir um objeto oculto).

- Na *Janela de Álgebra*, selecione as retas (mantendo pressionado o botão "Ctrl" do teclado), depois clique em *Esconder* na opção *Estilo de Rótulo* da *Barra de Estilos*. Repita este procedimento sempre que julgar necessário.



Observação. Antes de selecionar qualquer objeto, verifique se alguma outra ferramenta (botão) está selecionada. Caso esteja, vá ao primeiro botão e selecione *Mover*.

- No quarto botão, selecione *Mediatriz*. Depois, clique no ponto A e, em seguida, no ponto B . A mediatriz do segmento \overline{AB} terá sido criada.

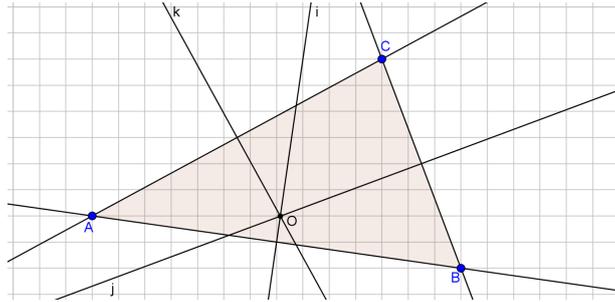
- Repita o procedimento nos outros dois lados do triângulo.

Observe que as três mediatrizes se cruzam em um mesmo ponto.

- No segundo botão, selecione *Interseção de Dois Objetos*. Em seguida, clique sobre duas mediatrizes, obtendo o circuncentro do triângulo ABC .

Para tornar o ambiente organizado e de fácil visualização, vamos renomear este ponto para O :

- Selecione o objeto correspondente na *Janela de Álgebra*, clique sobre ele com o botão direito e, em seguida, selecione *Renomear*. Digite “ O ” e clique em *OK*. Repita este procedimento sempre que for alterar o nome de qualquer objeto.



- Oculte as três mediatrizes.

Vamos determinar os pontos médios dos lados do triângulo ABC para, na sequência, traçar as medianas.

- No segundo botão, selecione *Ponto Médio ou Centro*. Clique no ponto A e, depois, em B . O ponto médio do segmento \overline{AB} terá sido criado. Renomeie-o para M_c (digite “ M_c ”).

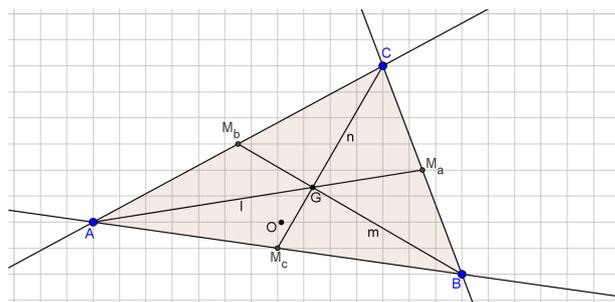
- Crie o ponto médio dos segmentos \overline{BC} e \overline{AC} . Renomeie-os para M_a e M_b , respectivamente.

- No terceiro botão, selecione *Segmento*. Depois, clique no ponto M_a e, em seguida, no vértice A . A mediana $\overline{AM_a}$ terá sido criada.

- Repita o procedimento nos outros dois lados do triângulo.

Observe que as três medianas se cruzam em um mesmo ponto.

- No segundo botão, selecione *Interseção de Dois Objetos*. Em seguida, clique sobre duas medianas, obtendo o baricentro do triângulo ABC . Renomeie-o para G .



- Oculte as três medianas.

Vamos, agora, traçar a reta perpendicular ao lado \overline{AB} que passa pelo vértice C .

- No quarto botão, selecione *Reta Perpendicular*. Depois, clique na reta AB e, em seguida, no vértice C . A reta suporte da altura relativa ao lado \overline{AB} terá sido criada.

- Repita o procedimento nos outros dois lados do triângulo.

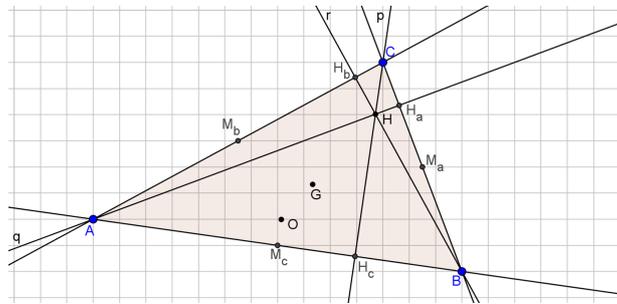
Observe que as três alturas se cruzam em um mesmo ponto.

- No segundo botão, selecione *Interseção de Dois Objetos*. Em seguida, clique sobre duas alturas, obtendo o ortocentro do triângulo ABC . Renomeie-o para H .

Antes de ocultar as alturas, vamos criar os pontos de interseção delas com os lados do triângulo.

- No segundo botão, selecione *Interseção de Dois Objetos*. Em seguida, clique na reta AH e, depois, na reta BC . Renomeie o ponto foi criado para H_a .

- Repita o procedimento nos outros dois lados do triângulo.



- Oculte as três alturas.

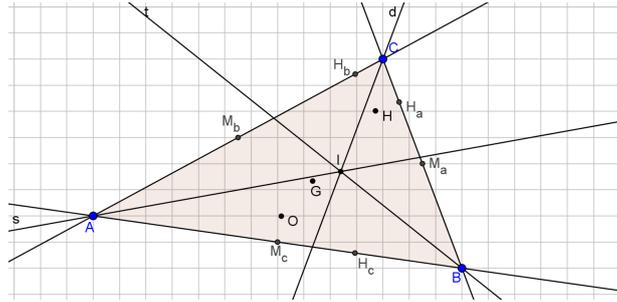
Vamos, agora, traçar a reta que divide ao meio o ângulo \hat{A} , ou seja, a sua bissetriz.

- No quarto botão, selecione *Bissetriz*. Depois, clique nos pontos C , A e B , nesta ordem. A bissetriz do ângulo \hat{A} terá sido criada.

- Repita o procedimento nos outros dois ângulos do triângulo.

Observe que as três bissetrizes se cruzam em um mesmo ponto.

- No segundo botão, selecione *Interseção de Dois Objetos*. Em seguida, clique sobre duas bissetrizes, obtendo o incentro do triângulo ABC . Renomeie-o para I .

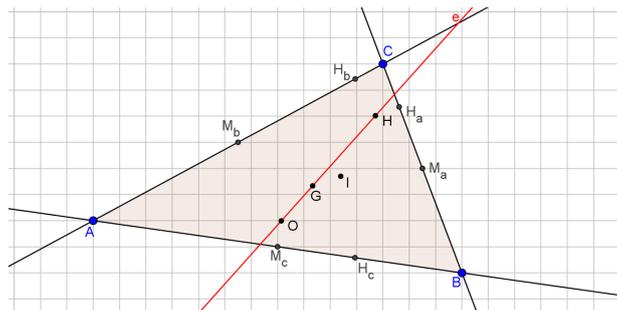


- Oculte as três bissetrizes.

Reta de Euler

Vamos aproveitar as construções realizadas e comprovar a existência da Reta de Euler.

- No terceiro botão, selecione *Reta*. Depois, clique no ponto O e, em seguida, no ponto H . Observe que o ponto G pertence a esta reta, denominada *Reta de Euler*.



- Oculte a Reta de Euler.

Circunferência dos Nove Pontos

Já temos seis dos nove pontos distinguidos que compõem a Circunferência dos Nove Pontos. Vamos determinar os outros três.

- No segundo botão, selecione *Ponto Médio ou Centro*. Clique no ponto A e, depois, em H . O ponto médio do segmento \overline{AH} foi criado. Renomeie-o para E_a .

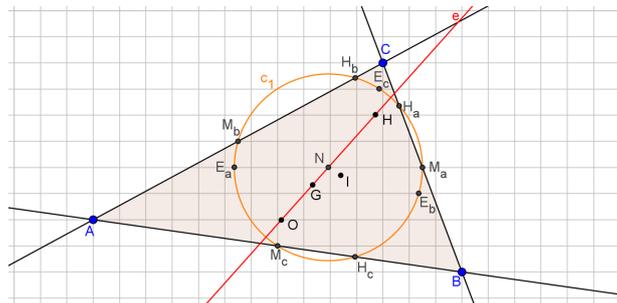
- Repita o procedimento nos outros dois vértices.

Vamos confirmar a existência de uma circunferência que passa pelos seguintes nove pontos: $M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c, E_a, E_b$ e E_c . Veremos, ainda, que o centro de tal circunferência é o ponto médio do segmento \overline{OH} .

- No segundo botão, selecione *Ponto Médio ou Centro*. Clique no ponto H e, depois, em O . O ponto médio do segmento \overline{OH} foi criado. Renomeie-o para N .

- Habilite a Reta de Euler.

- No sexto botão, selecione *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos*. Depois, clique em um ponto qualquer dentre os nove. A circunferência foi criada.



Podemos mover os vértices do triângulo ABC e verificar a existência tanto da Reta de Euler como da Circunferência dos Nove Pontos, independentemente do triângulo considerado.

Cônica dos Nove Pontos

Agora, vamos verificar o que acontece se, ao invés de considerarmos as alturas e o ortocentro, considerarmos três cevianas quaisquer que se intersectam em um ponto P .

- Oculte a reta, a circunferência e todos pontos, com exceção dos vértices e dos pontos médios dos lados.

- No segundo botão, selecione *Ponto*. Depois, na *Janela de Visualização*, selecione qualquer posição, desde que interna ao triângulo ABC . Renomeie o ponto criado para P .

Vamos traçar a reta passa pelo vértice A e pelo ponto P , ou seja, a reta suporte da ceviana referente ao lado BC .

- No terceiro botão, selecione *Reta*. Depois, clique no ponto A e, em seguida, no ponto P .

- Repita o procedimento nos outros dois vértices.

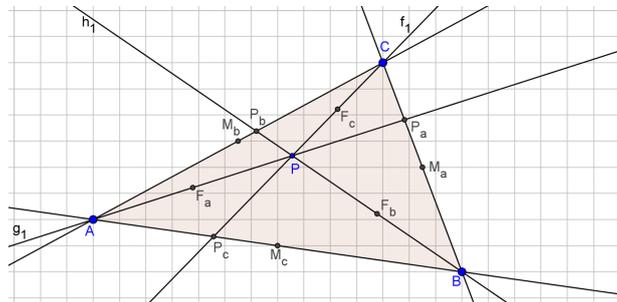
Antes de ocultar as retas, vamos criar os pontos de interseção delas com os lados do triângulo, além dos pontos médios entre o ponto P e os vértices do triângulo ABC .

- No segundo botão, selecione *Interseção de Dois Objetos*. Em seguida, clique na reta AP e, depois, na reta BC . Renomeie o ponto criado para P_a .

- Repita o procedimento nos outros dois lados do triângulo.

- No segundo botão, selecione *Ponto Médio ou Centro*. Clique no ponto A e, depois, em P . Renomeie o ponto criado para F_a .

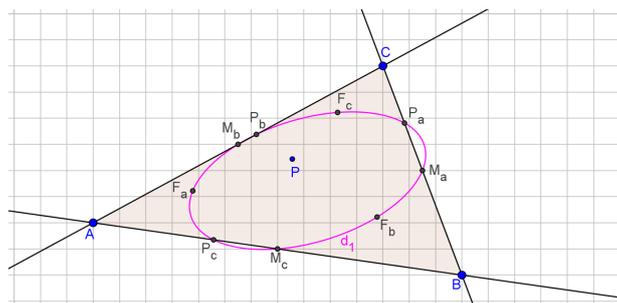
- Repita o procedimento nos outros dois vértices.



- Oculte as retas.

Observe esses nove pontos. Vamos verificar a existência de uma cônica passando por eles.

- No sexto botão, selecione *Cônica por Cinco Pontos*. Depois, clique em cinco pontos quaisquer dentre os nove.



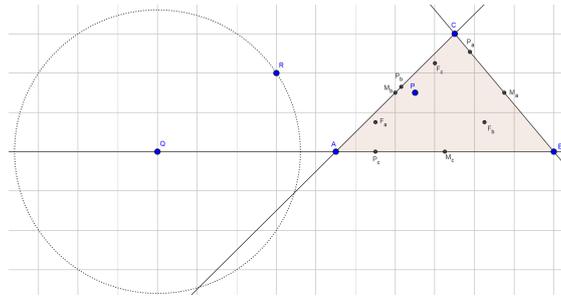
Podemos mover os vértices do triângulo ABC e o ponto P para verificar a existência de uma tal cônica, independentemente do triângulo considerado e da posição do ponto P .

Temos o triângulo ABC , o ponto P e os nove pontos distinguidos que, conforme observamos, pertencem a uma mesma cônica. Vamos, agora, relacionar essa cônica ao lugar geométrico do centro das cônicas determinadas pelos pontos A , B , C e P .

Temos apenas quatro pontos (A , B , C e P) e sabemos que por cinco pontos (três a três não colineares) passa uma, e uma só, cônica. Logo, precisamos de um quinto ponto X . É necessário que esse quinto ponto percorra o plano cartesiano de forma que, combinado aos pontos A , B , C e P , tenhamos todas as possíveis cônicas existentes no plano. Vamos fazer X percorrer uma circunferência e observar o resultado.

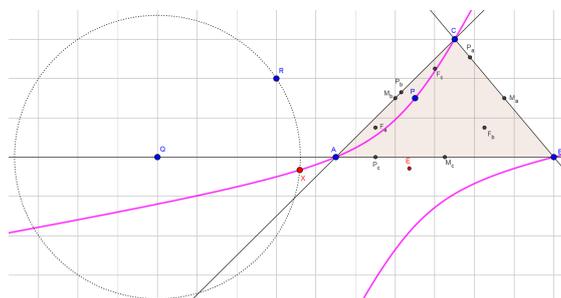
- No sexto botão, selecione *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos*. Na *Janela de Visualização*, selecione uma posição fora do triângulo ABC . Depois, selecione uma outra posição, de modo que a circunferência fique relativamente grande.

- Renomeie o centro da circunferência para Q e o ponto que determinou o seu raio de R .



- No segundo botão, selecione *Ponto*. Clique em qualquer lugar da circunferência, criando um ponto pertencente a ela. Renomeie-o para X .

- No sétimo botão, selecione *Cônica por Cinco Pontos*. Depois, clique sobre os pontos A , B , C , P e X . Renomeie a cônica para e .

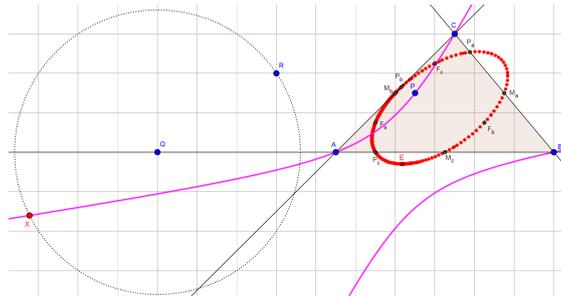


- Na barra de comando *Entrada* digite “E=Centro[e]”.

O ponto E que surgiu na janela de visualização é o centro da cônica e . Altere sua cor para que fique em destaque.

- Clique sobre o ponto E com o botão direito do mouse e selecione *Habilitar Rastro*.
- Clique sobre o ponto X com o botão direito do mouse e selecione *Animar*.

Observe a figura formada pelo rastro do ponto E .



Fazendo X percorrer uma circunferência de raio suficientemente grande, vemos que o traço das cônicas determinadas por A , B , C , P e X cobre todo o plano. Portanto, não há necessidade de tomar X fora dessa circunferência: se ele estivesse em outro lugar, a cônica que seria determinada já teria sido listada antes, para algum X' na circunferência.

Se a sua família de cônicas não cobriu todo o plano, aumente o raio da circunferência movendo o ponto R até que isso aconteça.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Bocher, M.: *On a Nine-Point Conic*. *Annals of Mathematics*, 6(5):132, 1892.
- [2] Camargo, I. e P. Boulos: *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*. Pearson, 2007.
- [3] Carneiro, J. P.: *Reta de Euler e números complexos*. *Eureka!*, 20:31–36, 2004.
- [4] Dalcín, M. e A. C. P. Hellmeister: *A vingança do incentro*. *Revista do Professor de Matemática*, 46:6–12, 2001.
- [5] Gómez, J. J. D., K. R. Frensel e L. S. Crissaff: *Geometria Analítica*. SBM, 2013.
- [6] J. F. Lamb, J.: *An analytic approach to properties of the Nine-Point Circle*. *School Science and Mathematics*, 87(3):187–195, 1987.
- [7] Mackay, J. S.: *History of the Nine-Point Circle*. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 11:19–57, 1892.
- [8] Morgado, A. C.: *Coordenadas para os centros do triângulo*. *Revista do Professor de Matemática*, 43:26–30, 2000.
- [9] Morgado, A. C., E. Wagner e M. Jorge: *Geometria I*. Francisco Alves, 5ª ed., 1990.
- [10] Morgado, A. C., E. Wagner e M. Jorge: *Geometria II*. FC & Z Livros, 2002.
- [11] Neto, A. C. M.: *Geometria*. SBM, 2013.
- [12] Pierce, D.: *Thales and the Nine-point Conic*. *The De Morgan Gazette*, 8(4):27–78, 2016.
- [13] Rojas, J. e R. Mendoza: *A reta de Euler e a circunferência de nove pontos*. *Matemática Universitária*, 48/49:76–85, 2010.
- [14] Salmon, G.: *A treatise on conic sections*. Hodges and Smith, 3ª ed., 1855.
- [15] Sandifer, C. E.: *The Euler line*, 2009. <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2009-01.pdf>.
- [16] Villiers, M. de: *A Generalization of the Nine-point circle and Euler line*. *Pythagoras*, 62(31-35), 2005.