



VICTOR VAZ PAVANI

**A GEOMETRIA DO TAXISTA COMO FERRAMENTA DE  
CONSOLIDAÇÃO DE CONTEÚDOS**

**Santo André, 2017**





**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC**

**CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO**

**VICTOR VAZ PAVANI**

**A GEOMETRIA DO TAXISTA COMO FERRAMENTA DE  
CONSOLIDAÇÃO DE CONTEÚDOS**

**Orientador: Prof. Dr. SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI**

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de  
Matemática, Computação e Cognição para  
obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO  
DEFENDIDA PELO ALUNO VICTOR VAZ PAVANI,  
E ORIENTADA PELO PROF. DR. SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI.

**SANTO ANDRÉ, 2017**

**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC**  
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Pavani, Victor Vaz  
A GEOMETRIA DO TAXISTA COMO FERRAMENTA DE  
CONSOLIDAÇÃO DE CONTEÚDOS / Victor Vaz Pavani. — 2017.

106 fls. : il.

Orientador: Sinuê Dayan Barbero Lodovici

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado  
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo  
André, 2017.

1. Geometria do Taxista. 2. Geometria não Euclidiana. 3. Táxi  
Parábola. 4. Revisão de Conteúdo. 5. Consolidação de Conteúdo. I.  
Lodovici, Sinuê Dayan Barbero. II. Mestrado Profissional em Matemática  
em Rede Nacional - PROFMAT, 2017. III. Título.

**Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.**

Santo André, 9 de Dezembro de 2017.

Assinatura do autor: Victor Vay Parani

Assinatura do orientador: S. Rodovici



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**Fundação Universidade Federal do ABC**  
**Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática**  
**em Rede Nacional**

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP  
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017  
profmat@ufabc.edu.br

**FOLHA DE ASSINATURAS**

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Victor Vaz Pavani, realizada em 30 de novembro de 2017:

Prof.(a) Dr.(a) **Sinuê Dayan Barbero Lodovici** (Universidade Federal do ABC) – Presidente

Prof.(a) Dr.(a) **Márcio Fabiano da Silva** (Universidade Federal do ABC) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Alexandre Lymberopoulos** (Universidade de São Paulo) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Ana Carolina Boero** (Universidade Federal do ABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Renato Alessandro Martins** (Universidade Federal de São Paulo) – Membro Suplente

---

Dedico este trabalho à minha esposa Érica e a  
minha filha Lorena.





---

## AGRADECIMENTOS

---

À Deus pela minha missão como educador, amo o que faço.

Aos meus pais, Walter Aparecido Pavani (*in memoriam*) e Valdecy Vaz Pavani, pelo esforço que fizeram para que eu pudesse chegar onde cheguei. Muito obrigado por tudo.

À minha esposa, Érica, que deu todo o suporte necessário para que eu completasse mais essa etapa. Você esteve presente em todas as fases dessa conquista, sempre me ajudando e apoiando para que eu alcançasse meu objetivo. Muito obrigado pela compreensão e por me encorajar sempre.

Ao meu irmão Vinícius pelo incentivo e parceria nos estudos e na vida.

À minha avó Adelaide que sempre acreditou no meu potencial e se alegra com as minhas conquistas.

À minha sogra, Leonilda, pela atenção e pelas palavras de apoio dadas durante este período.

Aos amigos Matheus, Ariane, Vinicius e Adriana pelas conversas e acolhida nessa nova fase. A colaboração de vocês foi fundamental para a elaboração deste trabalho.

Aos amigos Marcelo, Tatiana, Mariana, Melissa (minha afilhada) e Rodrigo por compreenderem minha ausência neste período de estudos e fazer dos nossos encontros, momentos especiais.

Ao professor Marcelo que dedicou seu tempo corrigindo este trabalho e ao período em que trabalhamos juntos, proporcionando a troca de experiências.

Ao professor Sinuê pela orientação e atenção dada nos momentos de elaboração deste trabalho.

Por fim, e não menos importante, à minha filha Lorena que me proporcionou diversas pausas durante os estudos e elaboração deste trabalho, sempre com carinho e alegria contagiante. Amo muito você!



---

## RESUMO

---

É comum realizarmos revisões de conteúdos com os alunos com o objetivo de sanar dúvidas e consolidar conceitos. Neste trabalho, apresentamos a Geometria do Taxista, uma geometria que difere da Geometria Euclidiana na maneira de medir as distâncias. Pela proximidade com a Geometria Euclidiana, propusemos cinco atividades que possibilitarão a apresentação desse conteúdo, a revisão e a consolidação de muitos temas abordados nos diversos anos que antecedem o ensino superior. Esperamos que este trabalho contribua para o aprendizado de alunos e professores.

**Palavras-chave:** Geometria do Taxista, Geometria não Euclidiana, Táxi Parábola, Revisão de Conteúdo, Consolidação de Conteúdo.



---

## ABSTRACT

---

It's a quite usual practice to review some mathematics topics on the middle and, mainly, high school, several times in order to consolidate math's fundamental concepts among the students. In the present work, we present the Taxicab Geometry, a geometry which differs from the usual Euclidean Geometry on the way one can measure distances. Due to the close relationship with the Euclidean Geometry, we propose some activities that provide us a nice revision and consolidation exercise on several geometric and algebraic topics relevant to undergraduate students aspirants. We deeply hope that this work can contribute somehow to the teachers' and students' learning process.

**Keywords:** taxicab geometry, non-euclidean geometry, taxicab parabola, content review, content consolidation.



---

## LISTA DE FIGURAS

---

Figura 1	Elementos. Fonte: <a href="https://goo.gl/s7MGW1">https://goo.gl/s7MGW1</a> . . . . .	5
Figura 2	Quadrilátero de Saccheri. . . . .	8
Figura 3	Retas no modelo de Poincaré. . . . .	10
Figura 4	Limite Circular III. Fonte: <a href="https://goo.gl/osrosj">https://goo.gl/osrosj</a> . . . . .	10
Figura 5	Modelo do plano da Geometria do Taxista. . . . .	11
Figura 6	Triângulos congruentes. . . . .	17
Figura 7	Demonstração do caso ALA. . . . .	18
Figura 8	Demonstração do triângulo isósceles. . . . .	18
Figura 9	Demonstração do caso LLL. . . . .	19
Figura 10	Ângulos externos. . . . .	20
Figura 11	Demonstração da relação do ângulo externo - parte I. . . . .	21
Figura 12	Demonstração da relação do ângulo externo - parte II. . . . .	22
Figura 13	Demonstração do caso $LAA_0$ - parte I. . . . .	23
Figura 14	Demonstração do caso $LAA_0$ - parte II. . . . .	23
Figura 15	Demonstração do caso RHC. . . . .	24
Figura 16	Possibilidades de caminhos. . . . .	26
Figura 17	Comparando distâncias. . . . .	28
Figura 18	Triângulos: lado - ângulo - lado. . . . .	35
Figura 19	Análise dos módulos. . . . .	36
Figura 20	Táxi circunferência. . . . .	37
Figura 21	Táxi circunferências secantes. . . . .	38
Figura 22	Circunferência. . . . .	39
Figura 23	Distância de ponto a reta com coeficiente $m <  1 $ . . . . .	40
Figura 24	Distância de ponto a reta com coeficiente $m =  1 $ . . . . .	41
Figura 25	Distância de ponto a reta com coeficiente $m >  1 $ . . . . .	41
Figura 26	Triângulos escalenos. . . . .	44
Figura 27	Triângulos isósceles. . . . .	45
Figura 28	Triângulos equiláteros. . . . .	45
Figura 29	Triângulos acutângulos. . . . .	46
Figura 30	Triângulos retângulos. . . . .	46

Figura 31	Triângulos obtusângulos. . . . .	47
Figura 32	Triângulos: lado - ângulo - lado. . . . .	48
Figura 33	Triângulos: lado - lado - lado. . . . .	49
Figura 34	Triângulos: lado - ângulo - ângulo oposto. . . . .	50
Figura 35	Triângulos: ângulo reto - hipotenusa - cateto. . . . .	50
Figura 36	Construção de triângulos. . . . .	52
Figura 37	Teorema de Tales. . . . .	53
Figura 38	Parábola na Geometria Euclidiana. . . . .	56
Figura 39	Principais elementos da parábola. . . . .	56
Figura 40	Parábola com diretriz paralela ao eixo das ordenadas e foco do lado direito da diretriz. . . . .	58
Figura 41	Parábola com diretriz paralela ao eixo das ordenadas e foco do lado esquerdo da diretriz. . . . .	59
Figura 42	Parábola com diretriz paralela ao eixo das ordenadas, $V(0,0)$ e foco à esquerda. . . . .	60
Figura 43	Parábola com diretriz paralela ao eixo das ordenadas, $V(0,0)$ e foco à direita. . . . .	60
Figura 44	Parábola com diretriz paralela ao eixo das abscissas e foco na parte superior. . . . .	61
Figura 45	Parábola com diretriz paralela ao eixo das abscissas e foco na parte inferior. . . . .	62
Figura 46	Parábola com diretriz paralela ao eixo das abscissas, $V(0,0)$ e foco na parte superior. . . . .	63
Figura 47	Parábola com diretriz paralela ao eixo das abscissas, $V(0,0)$ e foco na parte inferior. . . . .	63
Figura 48	Regiões com reta diretriz: $y = x + 3$ . . . . .	65
Figura 49	Parábola com reta diretriz: $y = x + 3$ . . . . .	66
Figura 50	Regiões com reta diretriz: $y = -2x$ . . . . .	67
Figura 51	Parábola com reta diretriz: $y = -2x$ . . . . .	68
Figura 52	Regiões com reta diretriz: $y = -4$ . . . . .	69
Figura 53	Parábola com reta diretriz: $y = -4$ . . . . .	70
Figura 54	Distância entre dois pontos . . . . .	73
Figura 55	Representação por setas . . . . .	74
Figura 56	Casos de congruências - I . . . . .	76
Figura 57	Casos de congruências - II . . . . .	76
Figura 58	Casos de congruências - III . . . . .	77



Figura 59	Casos de congruências - IV	77
Figura 60	Casos de congruências - V	78
Figura 61	Casos de congruências - VI	78
Figura 62	Triângulos.	79
Figura 63	Atividade 1 - Questões 1 e 2.	87
Figura 64	Atividade 1 - Questão 3.	88
Figura 65	Atividade 1 - Questão 4.	89
Figura 66	Atividade 1 - Questão 7.	90
Figura 67	Atividade 2 - Questão 2.	91
Figura 68	Atividade 3 - Questão 2 (a).	92
Figura 69	Atividade 3 - Questão 2 (b).	93
Figura 70	Atividade 3 - Questão 2 (c).	93
Figura 71	Atividade 3 - Questão 2 (c).	94
Figura 72	Atividade 4 - Questão 1.	95
Figura 73	Atividade 4 - Questão 1.	96
Figura 74	Atividade 4 - Questão 1.	96
Figura 75	Atividade 4 - Questão 2.	97
Figura 76	Atividade 4 - Questão 2.	97
Figura 77	Atividade 4 - Questão 2.	98
Figura 78	Atividade 4 - Questão 4.	99
Figura 79	Atividade 4 - Questão 5.	99
Figura 80	Atividade 5 - Questão 2.	100
Figura 81	Atividade 5 - Questão 4.	101
Figura 82	Atividade 5 - Questão 5.	102
Figura 83	Atividade 5 - Questão 7.	103
Figura 84	Atividade 5 - Questão 7.	103



---

# CONTEÚDO

---

INTRODUÇÃO	1
1 UM POUCO DE HISTÓRIA DA GEOMETRIA	3
2 A GEOMETRIA EUCLIDIANA NA FORMA AXIOMÁTICA E ALGUNS RESULTADOS	13
2.1 Axiomas de Birkhoff	14
2.2 Congruência de triângulos e algumas propriedades	17
2.2.1 Caso de congruência ALA (ângulo - lado - ângulo)	17
2.2.2 Caso de congruência LLL (lado - lado - lado)	19
2.2.3 Teorema do Ângulo Externo	20
2.2.4 Caso de congruência LAAo (lado - ângulo - ângulo oposto)	22
2.2.5 Caso de congruência RHC (ângulo reto - hipotenusa - cateto)	23
3 GEOMETRIA DO TAXISTA	25
3.1 A distância na Geometria do Taxista	25
3.1.1 Comparando a distância do taxista com a euclidiana	26
3.1.2 Tomando decisões com a táxi distância	28
3.2 Os Axiomas de Birkhoff na Geometria do Taxista	29
3.2.1 Verificação do Axioma B. 2. para Geometria do Taxista	29
3.2.2 Verificação do Axioma B. 3. para Geometria do Taxista	32
3.2.3 Verificação do Axioma B. 6. para Geometria do Taxista	34
3.3 Táxi Circunferência	35
3.3.1 O valor de $\Pi$ na Geometria do Taxista	38
3.4 Distância de ponto a reta	39
3.5 Triângulo	43
3.5.1 Classificação através dos lados	44
3.5.2 Classificação através dos ângulos	45
3.5.3 Congruência de triângulos	48
3.5.4 Condição de existência de um triângulo	51
3.6 Teorema de Tales	52

<b>4</b>	<b>PARÁBOLA</b>	55
4.1	Parábola na Geometria Euclidiana . . . . .	55
4.1.1	Equações canônicas da parábola . . . . .	57
4.2	Parábola na Geometria do Taxista . . . . .	63
<b>5</b>	<b>SUGESTÃO DE SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES</b>	71
5.1	Primeira Atividade - Iniciando a Geometria do Taxista . . . . .	72
5.2	Segunda Atividade - Congruência de triângulos . . . . .	75
5.3	Terceira Atividade - Distância entre ponto e reta . . . . .	79
5.4	Quarta Atividade - Circunferências e suas posições relativas . . . . .	81
5.5	Quinta Atividade - Construção de parábolas . . . . .	83
	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	85
<b>A</b>	<b>APÊNDICE</b>	87
A.1	Atividade 1 . . . . .	87
A.2	Atividade 2 . . . . .	90
A.3	Atividade 3 . . . . .	92
A.4	Atividade 4 . . . . .	94
A.5	Atividade 5 . . . . .	100

---

## INTRODUÇÃO

---

Nesta dissertação, apresentamos a Geometria do Taxista. Ela não é euclidiana por possuir uma maneira diferente de medir distância e, conseqüentemente, alguns resultados da Geometria Euclidiana não valerão nela, porém, de forma surpreendente, outros valerão. É uma geometria possível de ser trabalhada com os alunos do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio, pois muitos dos seus resultados são obtidos através de conteúdos abordados nessas etapas de ensino. Para tanto, sugerimos uma sequência de atividades que permitirá ao aluno conhecer essa geometria e, durante a este processo, fará uma série de revisões dos conteúdos abordados na educação básica.

No Capítulo 1, elencamos alguns fatos históricos referentes à geometria, desde hipóteses de seu surgimento até o conhecimento das Geometrias não Euclidianas. Situações importantes são citadas, como os avanços que aconteceram no decorrer dos anos, a apresentação da obra Elementos, algumas tentativas de demonstração do V postulado e a chegada das Geometrias não Euclidianas.

Já no Capítulo 2, apresentamos os Axiomas de Birkhoff e alguns resultados na Geometria Euclidiana, dando ênfase na demonstração dos casos de congruências entre triângulos.

Definimos a Geometria do Taxista no Capítulo 3, verificando quais Axiomas de Birkhoff valem para ela, assim como, os conceitos de triângulos e algumas de suas propriedades nesta geometria. A táxi circunferência também é estudada, desde sua definição até sua construção. Ainda neste capítulo, dois novos resultados são apresentados ao estabelecer a condição de existência para um triângulo na Geometria do Taxista e a surpreendente validade do Teorema de Tales.

Trabalhamos com parábolas a partir do Capítulo 4, suas propriedades e construções em ambas as geometrias.

Para finalizar, no Capítulo 5, apresentamos uma sequência de atividades que aborda parte do conteúdo apresentado nos capítulos anteriores, com o objetivo de trabalhar com os alunos uma nova geometria e consolidar o conhecimento de diversos conteúdos abordados no decorrer dos anos do ensino regular.

É fundamental que o professor inove sua prática pedagógica para revisar conteúdos e consolidá-los com seus alunos. O estudo da Geometria do Taxista exposto neste trabalho pode atender a essa necessidade de inovação, pois ela permite a percepção e o desvendar de um “mundo novo” no campo da Geometria. Além disso, permite um trabalho contrastivo em que o aluno perceba a existência de semelhanças e diferenças entre a já conhecida Geometria Euclidiana e a Geometria do Taxista.

---

## UM POUCO DE HISTÓRIA DA GEOMETRIA

---

A palavra grega Geometria é composta por “geo” que significa terra e “metria” que significa medida, denominação utilizada desde os egípcios e babilônicos para a medição de terra. As medições são essenciais a partir do momento em que uma sociedade começa a assumir propriedades de terra, a comercializar ou construir qualquer coisa que necessite diferenciar seus respectivos donos e ter noção de grandeza para estimar o quanto será necessário para fazer determinada obra.

(...) a cobrança de imposto foi, talvez, o primeiro imperativo para o desenvolvimento da geometria, pois embora teoricamente o faraó possuísse todas as terras e bens, na realidade os templos e até os indivíduos em particular possuíam imóveis. O governo determinava os impostos da terra baseado na altura da enchente do ano e na área de superfície das propriedades (MLODINOW, 2010, p. 18-19, [15]).

Os egípcios desenvolveram maneiras de calcular áreas e, com a marcação das terras, era possível cobrar os impostos e saber a quem pertencia cada pedaço após um período de enchente. Documentos de aproximadamente 3100 a.E.C. (antes da Era Comum) revelam que os egípcios e babilônicos já tinham algumas regras matemáticas para medir recipientes de armazenamento, medir extensões de terrenos e planejar construções. A grande pirâmide de Gizé foi contruída por volta de 2650 a.E.C., demonstrando que os egípcios já tinham bom domínio da geometria.

Segundo Eves [7], dos 110 problemas dos papiros de Moscou (aproximadamente 1850 a.E.C.) e Rhind (por volta de 1650 a.E.C.), temos 26 que abrangem a geometria. Muitos estão relacionados ao cálculo de áreas de terras e volumes de grãos, fortalecendo a importância dos conceitos geométricos para a época. No papiro de Moscou, destacou-se um feito notável que foi a “fórmula” (receita verbal) correta para o volume do tronco de uma pirâmide quadrada.

Por volta de 600 a.E.C., Tales de Mileto (624 - 547 a.E.C.) foi um dos pioneiros a tentar, de forma dedutiva, desenvolver a geometria. Em sua visita ao Egito, Tales, através de semelhança de triângulos, calculou a altura das pirâmides. A partir de Tales, foi usado um sistema em que cada proposição é demonstrada a partir de proposições anteriores e assim sucessivamente. Os gregos repararam que esse processo não podia seguir infinitamente, sendo assim foi necessário assumir algumas proposições como verdadeiras para usá-las nas demonstrações das demais.

Antecessor a Euclides, Pitágoras de Samos (569 - 475 a.E.C.) contribuiu com o uso de formalidade nas provas e demonstrações do seu conhecimento, sendo ele o responsável pela demonstração do famoso “Teorema de Pitágoras”, considerando que já havia registro da utilização do teorema pelos babilônios. Outro antecessor a Euclides foi o matemático Platão (427 - 347 a.E.C.) que, próximo ao que conhecemos hoje, organizou com rigor suas demonstrações matemáticas.

Segundo Eves [7], uma das principais fontes de informações a respeito dos primeiros passos da matemática grega é o chamado Sumário Eudemiano de Proclo. Proclo viveu no século V d.E.C. (depois da Era Comum), mas mesmo assim teve acesso a muitos trabalhos históricos e críticos que posterior a ele se perderam. Nesse trabalho, importantes matemáticos foram mencionados, como Tales de Mileto e Pitágoras, além disso, o Sumário Eudemiano foi importante para dar luz ao período que antecede Euclides, uma vez que a grandiosa obra apresentada por ele ofuscou as conquistas que antecederam o livro Elementos.

Nas escolas, é comum abordar apenas a Geometria Euclidiana, a qual foi apresentada de forma axiomática pelo matemático grego Euclides de Alexandria por volta de 300 a.E.C. através do livro Elementos. Essa obra contém treze volumes, sendo cinco sobre geometria plana, três sobre números, um sobre a teoria das proporções, um sobre incomensuráveis e os três últimos sobre geometria no espaço, e, nela, as construções propostas são efetuadas por meio de régua e do compasso. Lançada pela editora Unesp, a primeira tradução direta do grego para o português foi responsabilidade de Irineu Bicudo [3], em 2009. O autor introduz a tradução, dizendo:

“Se com Homero a língua grega alcançou perfeição, atinge com Euclides a precisão.”

Segundo Flood [8], Elementos era uma compilação de resultados conhecidos e organizados em ordem lógica. Começava com axiomas e postulados iniciais e usava regras de dedução para derivar cada nova proposição de maneira sistemática. Não foi a primeira dessas obras, no entanto a mais importante.



Da mesma forma, para Barbosa [2]:

“Certamente Euclides não criou toda a geometria contida nos seus “Elementos”. Seu trabalho foi muito mais aquele de um compilador, desejoso de colocar em um único texto, três das grandes descobertas gregas:

- a) a teoria de Eudoxo das proporções (livro V);
- b) a teoria de Teteto dos irracionais (livro X);
- c) a teoria dos cinco corpos regulares que ocupava lugar de destaque na cosmologia de Platão (BARBOSA, 2012, p.72, [2])”.

Segundo Bicudo [4], a geometria ao chegar à Grécia precisou ser explicada por meio da razão, sendo assim foi necessário criar regras, como segue:

“Os postulados são as primeiras noções geométricas que são aceitas sem contestações. A partir desses postulados, são apresentadas outras regras. Sendo assim, a geometria se transformou em uma ciência dedutiva, baseada em princípios. Nesse contexto, Euclides fez o primeiro grande resumo de tudo que se conhecia antes dele em matemática. Ele foi um chefe de escola em Alexandria, 300 anos antes de Cristo, e a sua obra “Elementos” resume muito bem tudo que se conhecia em matemática elementar. (BICUDO, 2011, p. 1, [4])”



Figura 1: Elementos. Fonte: <https://goo.gl/s7MGW1>.

O primeiro livro, em suas páginas iniciais, apresenta **definições** que servirão como vocabulário para o leitor. Seguem algumas traduzidas por Bicudo [3]:

1. Ponto é aquilo que de nada é parte.

2. E linha é comprimento sem largura.
3. E extremidades de uma linha são pontos.
4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.
5. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.
6. E extremidades de uma superfície são retas.
7. Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma.
8. E ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta.
9. E quando as linhas que contêm o ângulo sejam retas, o ângulo é chamado retilíneo.
10. E quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada uma perpendicular àquela sobre a qual se alteou.
11. Ângulo obtuso é o maior do que um reto.
12. E agudo, o menor do que um reto.
13. E fronteira é aquilo que é extremidade de alguma coisa.
14. Figura é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras.
15. a 22. Há definições de círculo, figuras retilíneas (em especial triângulo e quadriláteros).
23. Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram.

Dando sequência às páginas iniciais, postulados e noções comuns são apresentados ao leitor que também servirão para a apreciação do conteúdo que está por vir. As **noções comuns** mencionadas são:

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais as coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, caso de iguais serem subtraídas iguais, as restantes são iguais.
4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.

6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.
7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
8. E o todo é maior do que a parte.
9. E duas retas não contém uma área.

Os **postulados** de Euclides, dizem:

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

Os quatro primeiros postulados, segundo Andrade, deve-se a Eudoxo de Cnido (408 a.E.C. - 355 a.E.C.). Na demonstração das primeiras 28 proposições do Livro I (da coleção Elementos), Euclides não fez uso do quinto postulado, porém, “na 29ª proposição, iniciaram-se os preparativos para demonstrar a 32ª proposição: a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$  (ANDRADE [1])”.

O quinto postulado gerou dúvidas por ser o mais extenso e mais complexo, e diversos estudiosos trabalharam com o objetivo de prová-lo, utilizando os quatro anteriores, pois, para os gregos antigos, parecia mais uma proposição do que um postulado. Segundo Manfio [14] Nasiradin (1201 - 1274), John Wallis (1616 - 1703), Gerolamo Sacheri (1667 - 1733), John H. Lambert (1728 - 1777), Adrien M. Legendre (1752 - 1833), Louis Bertrand (1731 - 1812) e Carl F. Gauss (1777 - 1855) foram alguns deles durante aproximadamente 2000 anos. Uma das reescritas do quinto postulado (com o objetivo de tentar simplificar), e a mais utilizada até hoje, é responsabilidade do matemático e físico escocês John Playfair (1748 - 1819).

Postulado V (axioma de Playfair): por um ponto fora de uma reta, pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada. (BARBOSA [2]).

Durante as tentativas de prova do quinto postulado, várias falsas provas foram criadas e aceitas por anos, em geral elas utilizavam argumentos que substituíam o quinto postulado, utilizando o mesmo conceito.

O jesuíta italiano Girolamo Saccheri elaborou uma obra intitulada *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides Livre de Toda Imperfeição), que veio à luz alguns meses depois de sua morte. Nela, foi apresentada uma tentativa de provar por absurdo o V postulado, utilizando as 28 proposições que constavam no livro Elementos de Euclides. Usando um quadrilátero ABCD [2], sendo  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  ângulos retos (90 graus),  $\hat{C} \cong \hat{D}$  e  $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ , Saccheri usou três possibilidades de hipóteses, sendo elas: esses ângulos podem ser agudos, retos ou obtusos. A ideia era mostrar que supondo os ângulos C e D agudos ou obtusos chegaria em um absurdo, porém apenas o fato de ser obtuso chegou ao resultado desejado. Muitos resultados foram utilizados posteriormente nas Geometrias não Euclidianas, contudo o desejo de mostrar o absurdo aparentemente não deixou Saccheri perceber os avanços que conseguiu e de forma forçada sinalizou uma contradição para os ângulos agudos obtendo o resultado desejado.

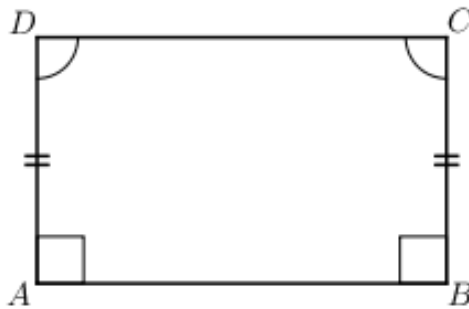


Figura 2: Quadrilátero de Saccheri.

O alemão Gauss percebeu que o quinto postulado era independente dos demais e guardou para si vários teoremas da Geometria Hiperbólica. Considerando que as Geometrias não Euclidianas não correspondiam ao mundo em que vivemos, optou por não publicar suas descobertas.

O húngaro Janos Bolyai (1802-1860) e o russo Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856) também perceberam que o quinto postulado era independente dos demais e passaram a trabalhar com esse fato, iniciando, assim, as Geometrias não Euclidianas. Simultaneamente o russo e o húngaro conseguiram ótimos resultados em seus trabalhos.

Segundo Boyer e Merzbach [5], o pai de Janos Bolyai, Fonkar Bolyai, tinha gasto muito de sua vida tentando demonstrar o postulado das paralelas, e, quando soube

que seu próprio filho estava envolvido no problema das paralelas, o pai escreveu ao filho:

“Pelo amor de Deus, imploro a você, desista. Receie isto tanto quanto as paixões sensuais porque isso, também, pode tomar todo o seu tempo e privá-lo de sua saúde, paz de espírito e felicidade na vida.”

O filho, não convencido, continuou seus esforços até que, por volta de 1829, ele chegou à conclusão a que Lobachevsky chegara poucos anos antes.

A geometria de Bolyai-Lobatchevsky tinha algumas propriedades diferentes da Euclidiana, como:

- Dado um ponto fora de uma reta, por ele passarão infinitas retas paralelas à reta dada.
- Se dois triângulos forem semelhantes (tiverem os mesmos ângulos), então também serão congruentes (terão o mesmo tamanho).

Utilizando o enunciado das paralelas na forma de Playfair, eles consideraram três possibilidades: Por um ponto dado pode-se traçar *mais do que uma, exatamente uma ou nenhuma* paralela a uma reta dada, fato que equivale a discutir se os ângulos do quadrilátero de Saccheri [2] são agudos, retos ou obtusos. Para Eves [7],

“A real independência do postulado das paralelas dos outros postulados da Geometria Euclidiana só foi estabelecida inquestionavelmente quando se forneceram demonstrações da consistência da hipótese do ângulo agudo...então, qualquer inconsistência na Geometria não Euclidiana implicaria uma inconsistência correspondente na Geometria Euclidiana. (EVES, 2004, p. 543, [7])”

Em 1854, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866), ao descartar a infinitude da reta, desenvolveu uma Geometria não Euclidiana usando a hipótese dos ângulos obtusos, a conhecida *Geometria Elíptica*.

O trabalho com as Geometrias não Euclidianas deram continuidade, um exemplo foi Henri Poincaré que criou um modelo chamado de Disco de Poincaré para representar o plano da Geometria Hiperbólica. O disco resolveu um dos problemas da geometria de Bolyai e Lobatchevski, a dificuldade de visualização. Nesse modelo, o plano hiperbólico é representado por um círculo, desconsiderando-se a sua fronteira, sendo que as “retas” são representadas por diâmetros,  $\overline{AB}$ , ou por arcos de círculos perpendiculares ao disco, como o arco  $\widehat{CD}$  da figura [3].

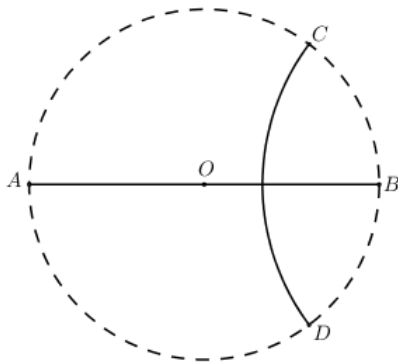


Figura 3: Retas no modelo de Poincaré.

Ainda na figura 3, o plano hiperbólico é o círculo de centro  $O$  e raio  $\overline{OA}$ , excluindo a circunferência com o mesmo centro e raio, por isso os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  não pertencem ao plano.

O artista holandês Maurits Cornelis Escher (1898 - 1972) utilizou o plano hiperbólico para produzir algumas de suas obras, como o Limite Circular III, conforme figura 4, que através das figuras entrelaçadas, formas e imagens espelhadas causa o efeito de suas dimensões improváveis. Escher concluiu que a multiplicação infinita de figuras dentro de um círculo representa a eternidade do universo, pois sua borda nunca é alcançada.



Figura 4: Limite Circular III. Fonte: <https://goo.gl/osrosj>.

De acordo com Krause (1986) [12], um outro modelo de Geometria não Euclidiana foi elaborada pelo matemático russo Hermann Minkowski (1864 - 1909). Ele desenvolveu a Geometria do Táxi, que também é conhecida como a Métrica de Manhattan,

Geometria Urbana, Métrica do Quarteirão. Uma geometria aplicada em uma malha quadriculada [5](#), na qual linhas horizontais e verticais correspondem às ruas de uma “cidade ideal”. Nela a maneira de medir distância difere da Geometria Euclidiana, uma vez que é necessário contar o deslocamento através de suas ruas (horizontais e verticais).

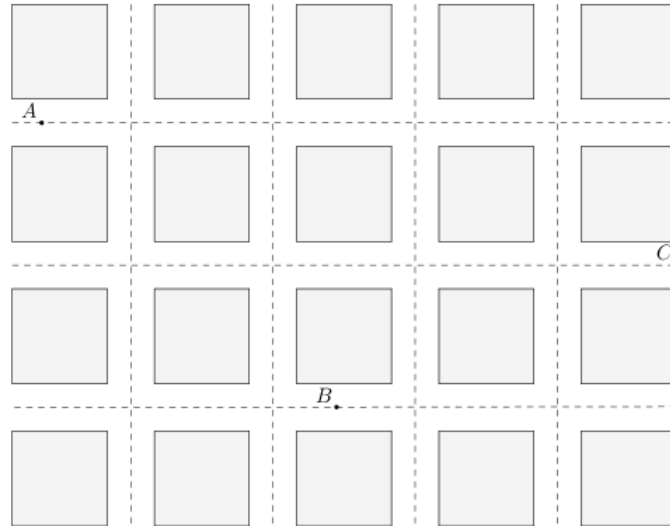


Figura 5: Modelo do plano da Geometria do Taxista.

Conforme a imagem [5](#), é possível perceber que, para chegar do ponto A até o ponto B, é necessário seguir as ruas, da mesma forma se o deslocamento acontecer de B até C ou de A até C. A distância euclidiana não representa a distância necessária para percorrer de um ponto até o outro (dependendo da posição dos pontos).

Essa será a geometria que abordaremos neste trabalho, fazendo comparações com a Geometria Euclidiana e apresentando resultados surpreendentes.





---

## A GEOMETRIA EUCLIDIANA NA FORMA AXIOMÁTICA E ALGUNS RESULTADOS

---

Como citado no capítulo anterior, Euclides apresentou a geometria de forma axiomática pela primeira vez, com isso a presença de imprecisão torna-se mais comum. Alguns pontos são destacadas por Barbosa [2]:

“Embora Euclides não tenha dito especificamente, fica claro, através da forma como ele o utilizou, que o primeiro postulado refere-se a uma única reta ligando os dois pontos. Também, do contexto, fica claro que, para Euclides, “reta” significa o que hoje chamamos de “segmento”. Daí ele falar em “continuar infinitamente uma reta”. Ele assumiu tacitamente que tal prolongamento pode ser feito de uma única maneira em cada extremidade de uma “reta”, de modo que duas retas distintas não podem ter um segmento comum. De fato Euclides utilizou-se de muitas hipóteses que não constavam, sob nenhuma forma, nem das “noções comuns”, nem dos “postulados”. Esta omissão é considerada pelos geômetras como um dos mais graves defeitos dos “Elementos”.(BARBOSA, 2012, p.122, [2])”

Alguns matemáticos tentaram aperfeiçoar a teoria de Euclides, como David Hilbert (1862-1943) que elaborou um novo conjunto de axiomas separados em grupos, cada grupo com um conceito central de onde derivam todas as proposições.

O matemático George David Birkhoff (1884-1944) apresentou os axiomas de uma forma menos extensa (comparando com a forma apresentada por Hilbert), fato que foi possível, considerando o modo que Birkhoff introduziu os números reais.

Apresentar a geometria de forma axiomática faz com que seja possível abordar com clareza a Geometria Neutra, aquela que não depende do V postulado. Os axiomas de Birkhoff serão apresentados e alguns resultados demonstrados. Porém, para um estudo mais aprofundado, sugerimos a leitura de duas de nossas referências, Geometria euclidiana plana e construções geométricas [20] e Geometria euclidiana plana [2]

onde a apresentação axiomática é realizada de forma mais completa e detalhada, uma vez que não é objetivo deste trabalho esse tipo de apresentação.

## 2.1 AXIOMAS DE BIRKHOFF

**Axioma B. 1.** Se  $A$  e  $B$  são dois pontos distintos, então existe uma e apenas uma reta passando por ambos esses pontos. Denotaremos tal reta por  $\overleftrightarrow{AB}$ .

**Axioma B. 2.** (*Espaço métrico*) Existe uma função  $|PQ|$  definida para todo par de pontos  $P$  e  $Q$  do plano, tal que:

1.  $|PQ| = 0$  se  $P = Q$ ;
2.  $|PQ| > 0$  se  $P \neq Q$ ;
3.  $|PQ| = |QP|$ ;
4. (*Desigualdade Triangular*)  $|AC| \leq |AB| + |BC|$ ,  $\forall A, B, C$ .

**Observação 2.1.** Da desigualdade triangular, obtemos para quaisquer  $A, B, C$ :

$$||AB| - |BC|| \leq |AC| \leq |AB| + |BC|.$$

*Demonstração.* Para mostrar que  $||AB| - |BC|| \leq |AC|$ , verificaremos primeiramente o comportamento de  $||AB| - |BC||$ .

Caso I - Se  $|AB| \geq |BC|$ , temos  $||AB| - |BC|| = |AB| - |BC|$ .

Caso II - Se  $|AB| < |BC|$ , temos  $||AB| - |BC|| = |BC| - |AB|$ .

Pela definição de desigualdade triangular, temos  $|AB| \leq |AC| + |BC|$  e  $|BC| \leq |AC| + |AB|$  que podem ser escritas como  $|AB| - |BC| \leq |AC|$  e  $|BC| - |AB| \leq |AC|$ .

Como  $|AC| \geq |AB| - |BC|$  e  $|AC| \geq |BC| - |AB|$ , usando os casos I e II, podemos afirmar que  $|AC| \geq ||AB| - |BC||$ .

Pela desigualdade triangular, temos que  $|AC| \leq |AB| + |BC|$ , portanto concluímos que  $||AB| - |BC|| \leq |AC| \leq |AB| + |BC|$ .  $\square$

**Axioma B. 3.** (Postulado da régua) Para toda reta  $r$ , existe uma bijeção  $x : r \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\mathbb{R}$  representa o conjunto dos números reais, denominada **sistema de coordenada** (ou **parametrização**) de  $r$ , tal que, para todo par de pontos  $A, B$  em  $r$ , vale:

$$|AB| = |x(A) - x(B)|.$$

Dizemos que  $x(A)$  é a **coordenada** de  $A$  (no sistema de coordenada  $x$ ).

**Proposição 2.1.** Se  $x$  e  $y$  são dois sistemas de coordenada para uma reta  $r$ , então para todo  $P$  em  $r$ :

- $y(P) = x(P) + k$ , ou;
- $y(P) = -x(P) + k$ ,

no qual  $k$  é um número real fixado.

Se  $y(P) = x(P) + k$ , dizemos que  $y$  mantém a ordem de  $x$ ; caso contrário, dizemos que  $y$  inverte a ordem de  $x$ .

**Definição 2.1.** Dizemos que  $A * B * C$ , se  $A, B$  e  $C$  forem colineares e valerem  $x(A) < x(B) < x(C)$  ou  $x(A) > x(B) > x(C)$ , no qual  $x$  é um sistema de coordenada para reta que contém  $A, B$  e  $C$  (ver [3](#)).

**Axioma B. 4.** Se  $r$  é uma reta qualquer do plano  $\mathbb{P}$ , existem dois subconjuntos não vazios de  $\mathbb{P}$ ,  $HP_1$  e  $HP_2$ , denominados **semiplanos**, tais que:

1. (*União disjunta*) O plano  $\mathbb{P}$  é a união disjunta de  $\mathbb{P}$ ,  $HP_1$  e  $HP_2$ .
2. (*Convexidade*) Se  $P$  e  $Q$  estão no mesmo semiplano, então o segmento  $PQ$  está contido nesse mesmo semiplano;
3. Se  $P$  e  $Q$  estão em semiplanos opostos, então o segmento  $PQ$  contém um (único) ponto de  $r$ .

**Definição 2.2.** Um ângulo  $\angle \vec{h}, \vec{k}$  é um par de semirretas  $\vec{h}$  e  $\vec{k}$  que têm uma mesma origem  $Z$ . Dizemos que  $Z$  é o vértice do ângulo  $\angle \vec{h}, \vec{k}$ . É usual denotarmos por  $\angle BAC$  o ângulo  $\angle \vec{AB}, \vec{AC}$ . Num triângulo de vértices  $A, B$  e  $C$ , indicaremos usualmente por  $\angle A$ ,  $\hat{A}$  ou  $\widehat{BAC}$  o ângulo interno com vértice  $A$ .

Dado o ângulo  $\angle BAC$ , dizemos que  $D$  está no interior de  $\angle BAC$  se  $D$  está do mesmo lado que  $B$  de  $\overleftrightarrow{AC}$  e se  $D$  está do mesmo lado que  $C$  da reta  $\overleftrightarrow{AB}$ .

**Axioma B. 5.** (*Medida de Ângulos*) Para cada ângulo  $\angle \vec{h}, \vec{k}$ , existe um número  $(\vec{h}, \vec{k})^{rad}$  no intervalo  $[0, \pi]$  chamado **medida** (em radianos) do ângulo, tal que:

1. se  $\vec{h}$  e  $\vec{k}$  são a mesma semirreta, a sua medida é 0; se elas são semirretas opostas, sua medida é  $\pi$ ;
2. a soma da medida de um ângulo com a de seu suplementar é  $\pi$ , desde que um dos lados de cada um desses ângulos estejam sobre uma mesma reta (e possuam apenas um ponto em comum) e uma semirreta (único lado comum dos dois ângulos) tenha sua origem na reta (no ponto em comum entre as semirretas);
3. se  $\vec{j}$  está no interior do ângulo  $\angle \vec{h}, \vec{k}$ , então  $(\vec{h}, \vec{j})^{rad} + (\vec{j}, \vec{k})^{rad} = (\vec{h}, \vec{k})^{rad}$ ;
4. se uma semirreta  $\vec{k}$  com origem em  $Z$  está na reta  $r$ , então, em cada semiplano limitado por  $r$ , existe uma bijeção entre o conjunto de semirretas  $\vec{j}$  com origem  $Z$  e os números reais  $\alpha$  em  $(0, \pi)$  de tal maneira que  $\alpha$  é igual à medida  $(\vec{j}, \vec{k})^{rad}$  do ângulo  $\angle \vec{h}, \vec{k}$ ; e
5. nas condições do item (4), se a semirreta  $\vec{j}$  é determinada por  $\vec{ZP}$ , em que  $P$  é um ponto de  $\vec{j}$ , então o ângulo  $\alpha$  depende continuamente de  $P$ , isto é, se  $P'$  é uma variável e  $\alpha'$  seu ângulo correspondente, então  $(\alpha - \alpha') \rightarrow 0$  à medida que  $|PP'| \rightarrow 0$ .

**Axioma B. 6.** [LAL (lado - ângulo - lado)] Se os dois lados e o ângulo interno entre eles de um dado triângulo são congruentes, respectivamente, a dois lados e o ângulo interno entre eles de um segundo triângulo, então os triângulos são congruentes, isto é, os demais ângulos e lados são também congruentes.

Por Rezende [20], temos:

**Definição 2.3.** Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que sejam congruentes os pares de lados correspondentes e também sejam congruentes os pares de ângulos correspondentes. Assim, definidas as correspondências  $A \leftrightarrow D$ ,  $B \leftrightarrow E$  e  $C \leftrightarrow F$  entre os triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , se  $\hat{A} \cong \hat{D}$ ,  $\hat{B} \cong \hat{E}$ ,  $\hat{C} \cong \hat{F}$ ,  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ,  $\overline{BC} \cong \overline{EF}$  e  $\overline{CA} \cong \overline{FD}$ , dizemos que os dois triângulos são congruentes, o que denotamos por  $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ .

**Axioma B. 7.** (Euclidiano) Dada uma reta qualquer e um ponto fora dela, existe uma única reta por tal ponto que nunca intersecta a reta dada.

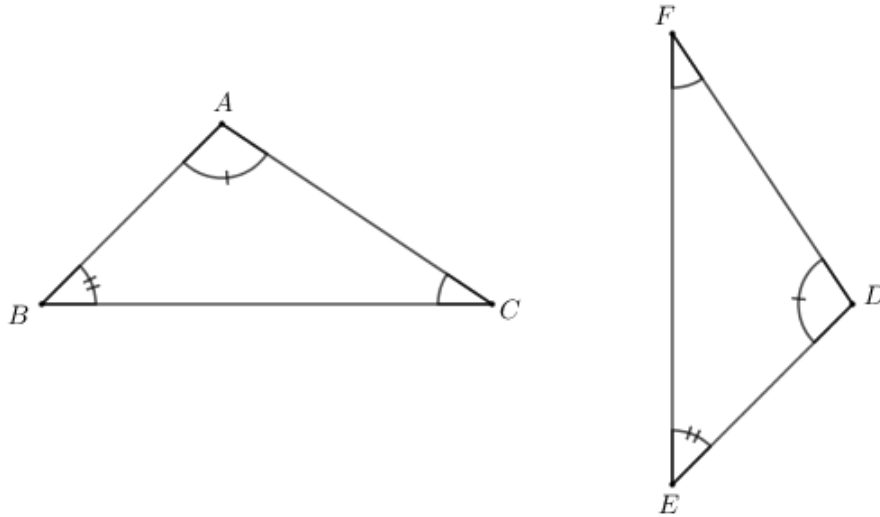


Figura 6: Triângulos congruentes.

## 2.2 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS E ALGUMAS PROPRIEDADES

Utilizando os axiomas de Birkhoff, verificaremos os casos de congruências na Geometria Euclidiana.

### 2.2.1 Caso de congruência ALA (ângulo - lado - ângulo)

**Proposição 2.2.** Se os dois ângulos e o lado entre eles de um dado triângulo são congruentes, respectivamente, a dois ângulos e o lado entre eles de um segundo triângulo, então os triângulos são congruentes, isto é, os demais lados e ângulos são também congruentes.

*Demonstração.* Vamos considerar que os triângulos ABC e DEF satisfazem a hipótese do caso de congruência ALA, ou seja, temos  $\hat{A} \cong \hat{D}$ ,  $\hat{B} \cong \hat{E}$  e  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ . Seja P um ponto que pertença a  $\overrightarrow{DF}$ , tal que  $\overline{DP} \cong \overline{AC}$ , ver figura 7.

Dessa forma, teremos  $\triangle ABC \cong \triangle DEP$  pelo caso LAL 6, pois  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ,  $\hat{A} \cong \hat{D}$  e  $\overline{AC} \cong \overline{DP}$ .

Da congruência, ainda podemos afirmar que:  $\overline{BC} \cong \overline{EP}$ ,  $\hat{B} \cong \hat{E}$  e  $\hat{C} \cong \hat{P}$ .

Como  $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEP}$ , segue que  $\widehat{DEP} \cong \widehat{DEF}$ . Pelo axioma da Medida de Ângulos 5, temos que  $\overrightarrow{EP}$  e  $\overrightarrow{EF}$  coincidem.

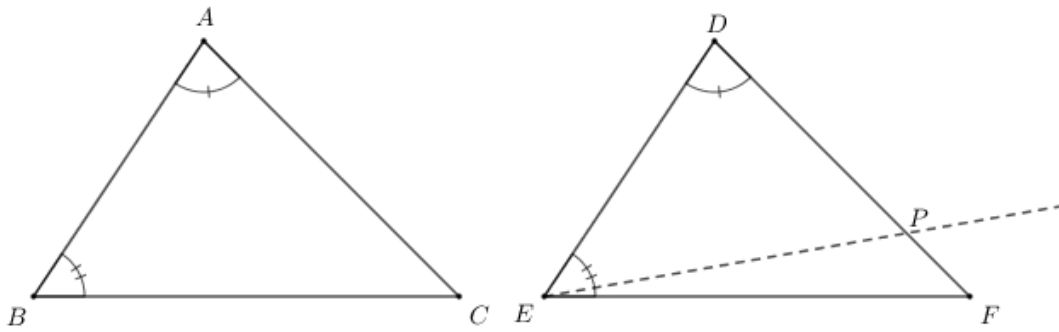


Figura 7: Demonstração do caso ALA.

Portanto F e P são os mesmos pontos e podemos afirmar que  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .  $\square$

**Lema 2.1.** *Um triângulo que possui dois lados com mesma medida (isósceles), necessariamente terá os ângulos opostos a eles congruentes.*

*Demonstração.* Considere o triângulo isósceles ABC com  $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ . Quero provar que  $\widehat{ABC} \cong \widehat{ACB}$ . Vamos comparar o triângulo ABC com ele mesmo, porém faremos uma inversão entre B e C, conforme a figura 8. Dessa forma temos  $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ,  $\overline{AC} \cong \overline{AB}$  e  $\widehat{BAC}$  é comum aos dois triângulos. Segue, pelo caso LAL, que os triângulos são congruentes e concluímos que  $\widehat{ABC} \cong \widehat{ACB}$ .

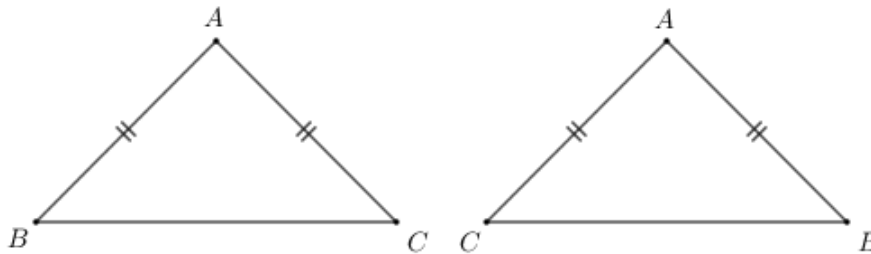


Figura 8: Demonstração do triângulo isósceles.

$\square$

## 2.2.2 Caso de congruência LLL (lado - lado - lado)

**Proposição 2.3.** Se os três lados de um dado triângulo são congruentes aos três lados de um segundo triângulo, então os triângulos são congruentes, isto é, os ângulos também são congruentes.

*Demonstração.* Dados os triângulos ABC e DEF, em que  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ,  $\overline{BC} \cong \overline{EF}$  e  $\overline{CA} \cong \overline{EF}$ .

No semiplano determinado por  $\overleftrightarrow{BC}$  e que não contém o ponto A, consideremos uma semirreta de origem C, formando com  $\overrightarrow{CB}$  um ângulo congruente ao  $\widehat{DFE}$ . Seja P um ponto da semirreta, tal que  $\overline{CP} \cong \overline{FD}$ . Ligando o ponto P ao ponto B, teremos o triângulo PBC, conforme a figura 9.

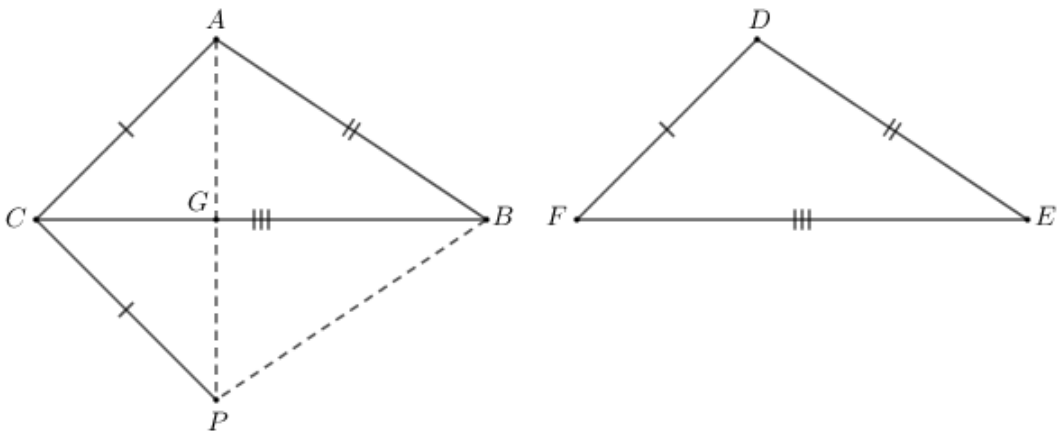


Figura 9: Demonstração do caso LLL.

Analisando os triângulos PBC e DEF, temos:  $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ ,  $\widehat{PCB} \cong \widehat{DFE}$  e  $\overline{FD} \cong \overline{CP}$ .

Pelo caso LAL [6], podemos concluir que  $\triangle PBC \cong \triangle DEF$  e, por isso, podemos afirmar que  $\overline{DE} \cong \overline{PB}$ ,  $\widehat{BPC} \cong \widehat{EDF}$  e  $\widehat{PBC} \cong \widehat{DEF}$ .

Traçando o segmento  $\overline{AP}$ , temos o ponto  $G \in \overline{CB}$ .

Podemos afirmar que:

- i)  $\overline{CA} \cong \overline{FD}$  e  $\overline{FD} \cong \overline{CP}$ , ou seja,  $\overline{CA} \cong \overline{FD} \cong \overline{CP}$ .
- ii)  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$  e  $\overline{DE} \cong \overline{PB}$ , ou seja,  $\overline{AB} \cong \overline{DE} \cong \overline{PB}$ .

Analisando os triângulos isósceles  $PAC$ , com  $\widehat{CPA} \cong \widehat{CAP}$ , e  $PAB$ ,  $\widehat{BAP} \cong \widehat{BPA}$ , podemos afirmar que  $\widehat{BAC} \cong \widehat{BPC}$ , pois temos  $\widehat{BAC} = \widehat{CAP} + \widehat{BAP}$  e  $\widehat{BPC} = \widehat{CPA} + \widehat{BAP}$ .

Em relação aos triângulos  $ABC$  e  $PBC$ , podemos afirmar que  $\overline{CA} \cong \overline{CP}$ ,  $\widehat{CAB} \cong \widehat{CPB}$  e  $\overline{AB} \cong \overline{PB}$ , e, por isso, pelo caso LAL [6], temos  $\Delta ABC \cong \Delta PBC$ .

Havíamos provado que  $\Delta PBC \cong \Delta DEF$  e agora sabemos que  $\Delta ABC \cong \Delta PBC$ , portanto fica provado que  $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ .

Outras duas possibilidades devem ser demonstradas, para os triângulos retângulos e para os obtusângulos. Nesse caso, sugerimos que verifiquem o livro Geometria euclidiana plana e construções geométricas [20].  $\square$

### 2.2.3 Teorema do Ângulo Externo

**Definição 2.4.** Dado o triângulo  $ABC$ , chamamos seus ângulos  $\widehat{ABC}$ ,  $\widehat{BCA}$  e  $\widehat{CAB}$  de ângulos internos. Os ângulos suplementares desses ângulos são chamados de ângulos externos, na imagem [10] temos  $\widehat{CAE}$ ,  $\widehat{ABD}$  e  $\widehat{BCF}$  como os ângulos externos.

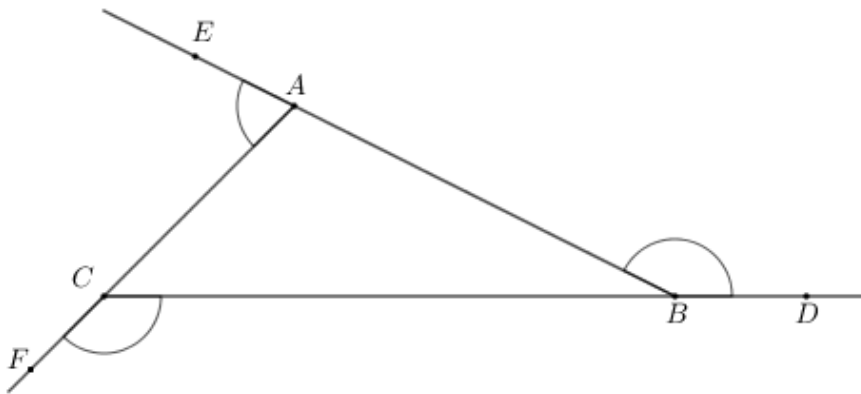


Figura 10: Ângulos externos.

Chamamos  $\widehat{ACB}$  e  $\widehat{ABC}$  de ângulos não adjacentes internos a  $\widehat{CAE}$ .

**Teorema 2.2.** (Teorema do Ângulo Externo) *Todo ângulo externo de um triângulo é maior (mede mais) que qualquer um dos ângulos internos que não seja adjacente a ele.*



*Demonstração.* Dividiremos a demonstração em dois casos, como segue:

i) Para  $\widehat{ABD} > \widehat{CAB}$  temos:

Dado o triângulo ABC, em que  $D \in \vec{CB}$  e B está entre C e D, o ponto E está localizado na metade (ponto médio) do segmento  $\overline{AB}$  e  $F \in \vec{CE}$  tal que  $\overline{CE} \cong \overline{EF}$ , conforme a figura 11.

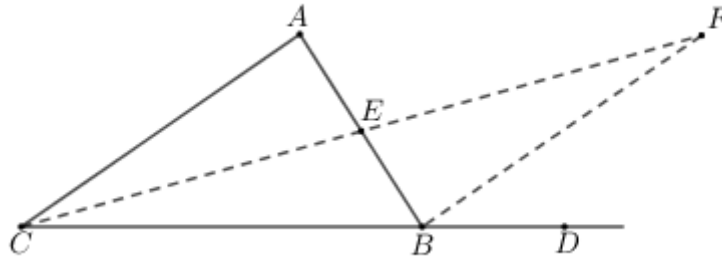


Figura 11: Demonstração da relação do ângulo externo - parte I.

Analisando os triângulos AEC e BEF, temos  $\overline{CE} \cong \overline{FE}$ ,  $\widehat{AEC} \cong \widehat{BEF}$  (são ângulos opostos pelo vértice) e  $\overline{AE} \cong \overline{BE}$ , portanto  $\triangle AEC \cong \triangle BEF$  pelo caso LAL 6. Segue que  $\widehat{CAE} \cong \widehat{FBE}$ .

Como F está no interior de  $\widehat{ABD}$ , temos que  $\widehat{ABD} = \widehat{ABF} + \widehat{FBD}$ . Sabemos que  $\widehat{CAE} \cong \widehat{FBE}$ , portanto podemos afirmar que  $\widehat{ABD} = \widehat{CAB} + \widehat{FBD}$  e, conseqüentemente,  $\widehat{ABD} > \widehat{CAB}$ .

ii) Para  $\widehat{ABD} > \widehat{ACB}$  temos:

Utilizando o mesmo triângulo ABC, com  $D \in \vec{CB}$  e B está entre C e D, agora teremos o ponto H que está localizado na metade (ponto médio) do segmento  $\overline{CB}$ ,  $I \in \vec{AH}$  tal que  $\overline{AH} \cong \overline{HI}$  e  $G \in \vec{AB}$  e B está entre A e G, conforme a figura 12.

Para mostrar que  $\widehat{ABD} > \widehat{ACB}$ , usaremos o fato de  $\widehat{ABD}$  ter a mesma medida de  $\widehat{CBG}$ , pois são ângulos opostos pelo vértice. Logo, teremos que mostrar que  $\widehat{CBG} > \widehat{ACB}$ .

A demonstração seguirá os mesmos passos da anterior.

Analisando os triângulos AHC e IHB, temos  $\overline{CH} \cong \overline{BH}$ ,  $\widehat{AHC} \cong \widehat{IHB}$  (ângulos opostos pelo vértice) e  $\overline{AH} \cong \overline{IH}$ , portanto  $\triangle AHC \cong \triangle IHB$  pelo caso LAL 6. Segue que  $\widehat{ACH} \cong \widehat{IBH}$ .

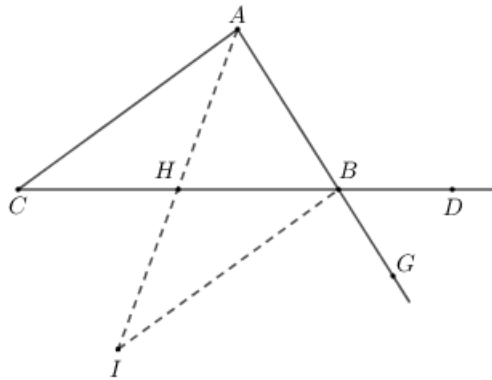


Figura 12: Demonstração da relação do ângulo externo - parte II.

Como  $I$  está no interior de  $\widehat{CBG}$ , temos que  $\widehat{CBG} = \widehat{CBI} + \widehat{IBG}$ . Sabemos que  $\widehat{ACH} \cong \widehat{IBH}$ , portanto podemos afirmar que  $\widehat{CBG} = \widehat{ACB} + \widehat{IBG}$  e, conseqüentemente,  $\widehat{CBG} > \widehat{ACB}$ .  $\square$

#### 2.2.4 Caso de congruência LAAo (lado - ângulo - ângulo oposto)

**Proposição 2.4.** Se um lado, um dos ângulos que é formado por esse lado e o ângulo oposto a esse lado de um dado triângulo são congruentes, respectivamente a, um lado, um dos ângulos que é formado por esse lado e o ângulo oposto a esse lado de um segundo triângulo, então os triângulos são congruentes, isto é, os demais lados e ângulos são também congruentes.

*Demonstração.* Dados os triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , em que  $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ ,  $\widehat{ACB} \cong \widehat{DFE}$  e  $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ . Seja  $G$  um ponto da semirreta  $\overrightarrow{CB}$ , tal que  $\overline{CG} \cong \overline{EF}$ . Queremos mostrar que  $G = B$ , para isso mostraremos por absurdo considerando que exista  $G$  entre  $C$  e  $B$  (primeiro caso) ou que exista  $G$  tal que tenhamos  $B$  entre  $C$  e  $G$  (segundo caso).

Na primeira situação, teremos a figura [13](#).

Como  $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ ,  $\widehat{ACG} \cong \widehat{DFE}$  e  $\overline{CG} \cong \overline{FE}$ , podemos concluir que  $\triangle AGC \cong \triangle DEF$  pelo caso LAL [6](#). A congruência entre os triângulos permite afirmar que esse fato, ou seja,  $\widehat{AGC} \cong \widehat{DEF}$  e, conseqüentemente,  $\widehat{AGC} \cong \widehat{ABC}$ , esse fato contraria o Teorema do Ângulo Externo [2.2](#), pois  $\widehat{AGC} > \widehat{ABC}$ .

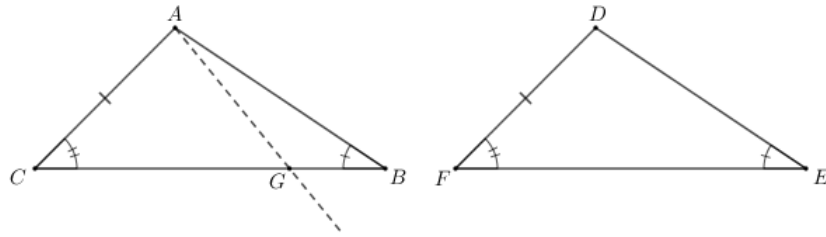


Figura 13: Demonstração do caso  $LAA_0$  - parte I.

Na segunda situação, consideraremos que exista B entre C e G que satisfaça as condições iniciais em que  $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ ,  $\widehat{AGC} \cong \widehat{DFE}$ ,  $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$  e  $G \in \overrightarrow{CB}$ , tal que  $\overline{CG} \cong \overline{EF}$ , como mostra a figura 14.

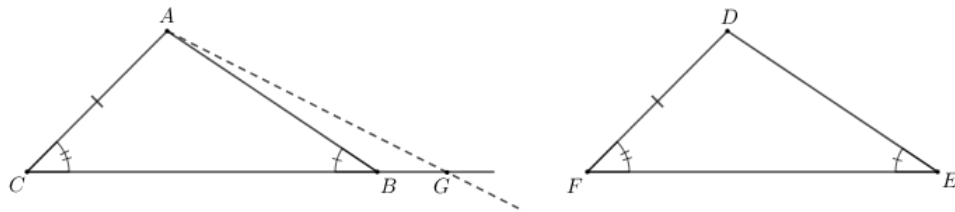


Figura 14: Demonstração do caso  $LAA_0$  - parte II.

Da mesma maneira que verificamos na primeira situação, temos  $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ ,  $\widehat{ACG} \cong \widehat{DFE}$  e  $\overline{CG} \cong \overline{FE}$ , logo  $\triangle ACG \cong \triangle DEF$  pelo caso LAL 6. A congruência entre os triângulos permite afirmar que esse fato, ou seja,  $\widehat{AGC} \cong \widehat{DEF}$  e, conseqüentemente,  $\widehat{AGC} \cong \widehat{ABC}$ , contraria o Teorema do ângulo externo 2.2, pois  $\widehat{AGC} < \widehat{ABC}$ .  $\square$

### 2.2.5 Caso de congruência RHC (ângulo reto - hipotenusa - cateto)

Esse caso de congruência está relacionado a triângulos com um ângulo de  $90^\circ$ , os triângulos retângulos.

**Proposição 2.5.** Se o lado oposto ao ângulo reto (hipotenusa) e um dos outros dois lados (catetos) de um dado triângulo retângulo são congruentes, respectivamente, ao lado oposto ao ângulo reto (hipotenusa) e um dos outros dois lados (catetos) de um segundo triângulo retângulo, então os triângulos retângulos são congruentes, isto é, os demais ângulos e lados são também congruentes.

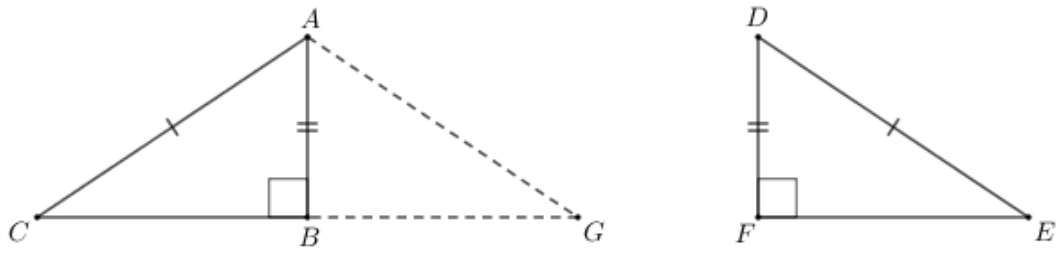


Figura 15: Demonstração do caso RHC.

*Demonstração.* Dados os triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , em que as hipotenusas são congruentes ( $\overline{CA} \cong \overline{DE}$ ),  $\widehat{ABC}$  e  $\widehat{EFD}$  são ângulos retos e  $\overline{AB} \cong \overline{FD}$ , seja  $G$  um ponto da semirreta oposta a  $\overline{BC}$ , tal que  $\overline{CB} \cong \overline{BG}$ , como mostra a figura 15.

Podemos concluir que  $\triangle ABG \cong \triangle DFE$  pelo caso LAL 6, pois  $\overline{AB} \cong \overline{DF}$ ,  $\widehat{ABG} \cong \widehat{DFE}$  e  $\overline{BG} \cong \overline{FE}$ , conseqüentemente  $\overline{AG} \cong \overline{DE}$  e  $\widehat{AGB} \cong \widehat{DEF}$ .

Como  $\overline{CA} \cong \overline{DE}$  e  $\overline{AG} \cong \overline{DE}$ , temos  $\overline{CA} \cong \overline{AG}$  e, por isso, podemos afirmar que  $\triangle AGC$  possui dois lados com a mesma medida e conseqüentemente temos  $\widehat{GCA} \cong \widehat{AGC}$ .

Sabemos que  $\widehat{AGB} \cong \widehat{DEF}$  e  $\widehat{GCA} \cong \widehat{AGC}$ , portanto  $\widehat{BCA} \cong \widehat{DEF}$ .

Pelo caso  $LAA_0$  temos  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ , pois  $\overline{AB} \cong \overline{FD}$ ,  $\widehat{ABC} \cong \widehat{EFD}$  e  $\widehat{BCA} \cong \widehat{DEF}$ .  $\square$

---

## GEOMETRIA DO TAXISTA

---

De acordo com Krause (1986) [12], a Geometria do Táxi é quase a mesma que a Geometria Euclidiana. Os pontos são os mesmos, as linhas são as mesmas, e os ângulos são medidos da mesma maneira. Somente a função de distância é diferente, ou seja, para calcular a distância entre dois pontos, usaremos uma maneira diferente que será apresentada a seguir.

Trabalharemos com o plano cartesiano para facilitar a visualização, ele terá malhas quadriculadas nas quais as linhas horizontais e verticais nos darão a ideia de ruas de uma cidade ideal, onde todas as quadras são quadrados que possuem as mesmas medidas.

Cabe ressaltar que, no segundo capítulo, utilizamos a notação  $|AB|$  para representar a distância entre os pontos A e B; a partir de agora, para que haja facilidade, usaremos  $d(A, B)$  para representar a mesma distância, uma vez que a distinção entre a distância euclidiana ( $d_E$ ) e a distância do taxista ( $d_T$ ) terá de ser feita.

### 3.1 A DISTÂNCIA NA GEOMETRIA DO TAXISTA

Considere os pontos  $A(1,1)$  e  $B(3,3)$ . Vamos determinar a menor distância que devemos percorrer para ir de A até B, para isso será necessário seguir sempre em direção ao destino, andando na horizontal ou na vertical.

É possível perceber na figura 16 que nos seis possíveis caminhos a distância percorrida foi a mesma, sendo ela quatro unidades. Em todas elas, foi necessário andar duas vezes para a frente (horizontal) e duas vezes para cima (vertical). Esse seria o

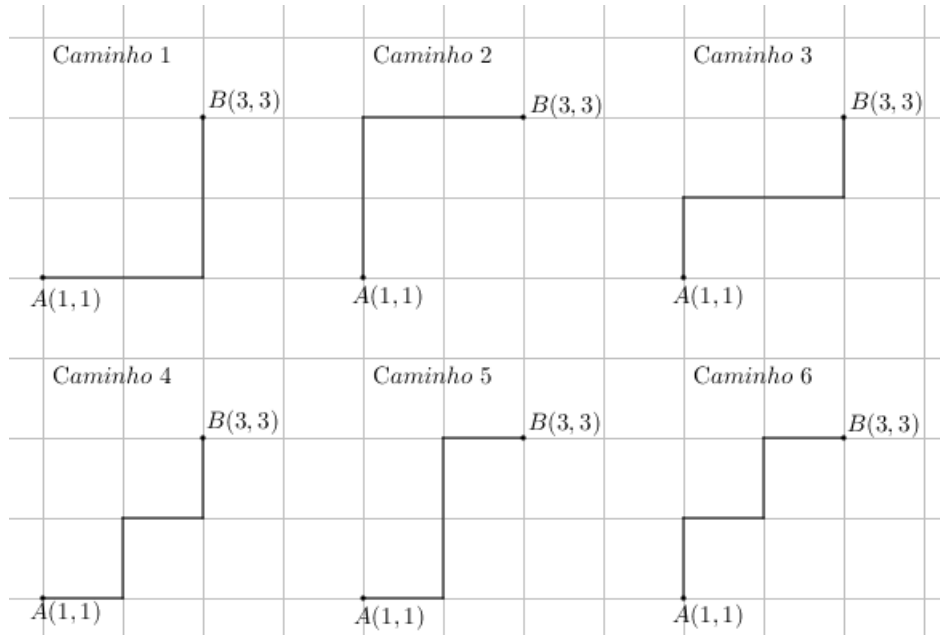


Figura 16: Possibilidades de caminhos.

menor caminho que um carro percorreria entre dois locais, por isso essa geometria é conhecida como a Geometria do Taxista.

A táxi distância entre dois pontos,  $A(x_a, y_a)$  e  $B(x_b, y_b)$ , é calculada através da equação:

$$d_T(A, B) = |x_b - x_a| + |y_b - y_a|. \tag{3.1}$$

**Definição 3.1.** Seja  $x \in \mathbb{R}$ . O valor absoluto (ou módulo) de  $x$ , denotado por  $|x|$ , é tal que

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

### 3.1.1 Comparando a distância do taxista com a euclidiana

Para comparar a distância do taxista com a euclidiana será necessário utilizarmos a desigualdade triangular, como segue.

**Proposição 3.1.** Sejam  $x$  e  $y$  números reais, temos:

$$|x| + |y| \geq |x + y|. \tag{3.2}$$

*Demonstração.* Temos que  $-|x| \leq x \leq |x|$  e  $-|y| \leq y \leq |y|$ .

Adicionando os dois termos, passamos a ter:

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq (|x| + |y|).$$

Segue que  $-(|x| + |y|) \leq x + y \Leftrightarrow |x| + |y| \geq -(x + y)$  e

$$x + y \leq |x| + |y|.$$

Portanto,  $|x| + |y| \geq x + y$ . □

Agora vamos comparar a distância do taxista com a euclidiana.

**Proposição 3.2.** Para quaisquer  $A(x_a, y_a)$  e  $B(x_b, y_b)$ , temos  $d_T(A, B) \geq d_E(A, B)$ .

*Demonstração.* Quando dois pontos possuem a mesma abscissa e/ou a mesma ordenada, temos a igualdade entre a distância euclidiana e a distância do taxista,  $d_T = d_E$ . Essa relação é facilmente verificada, considerando que estaremos medindo a distância apenas na horizontal ou na vertical, bastando subtrair as ordenadas (no caso das abscissas serem iguais) ou as abscissas (quando as ordenadas são iguais).

Como conhecemos a fórmula que calcula a distância na Geometria do Taxista [4.1](#) e também conhecemos a fórmula que calcula a distância na Geometria Euclidiana:

$$d_E(A, B) = \sqrt{|x_b - x_a|^2 + |y_b - y_a|^2}. \quad (3.3)$$

Posso afirmar que  $2 \cdot |x_b - x_a| \cdot |y_b - y_a| \geq 0$ , pois temos apenas fatores maiores ou iguais a zero nessa multiplicação.

Adicionando nos dois lados da desigualdade  $|x_b - x_a|^2 + |y_b - y_a|^2$ , temos:

$$|x_b - x_a|^2 + |y_b - y_a|^2 + 2 \cdot |x_b - x_a| \cdot |y_b - y_a| \geq |x_b - x_a|^2 + |y_b - y_a|^2$$

e podemos escrever da seguinte forma:

$$(|x_b - x_a| + |y_b - y_a|)^2 \geq |x_b - x_a|^2 + |y_b - y_a|^2.$$

Ambos os lados são maiores ou iguais a zero, por isso podemos extrair a raiz quadrada dos dois lados e passamos a ter:

$$\sqrt{(|x_b - x_a| + |y_b - y_a|)^2} \geq \sqrt{|x_b - x_a|^2 + |y_b - y_a|^2}$$

$$(|x_b - x_a| + |y_b - y_a|) \geq \sqrt{|x_b - x_a|^2 + |y_b - y_a|^2}$$

$$d_T(A, B) \geq d_E(A, B).$$

□

Portanto, podemos concluir que, para  $\forall A, B$ , temos  $d_T(A, B) \geq d_E(A, B)$ .

### 3.1.2 Tomando decisões com a táxi distância

É comum analisarmos a distância euclidiana entre pontos para tomarmos decisões, porém quando pensamos em caminhos que percorreremos nas ruas é necessário comparar a distância do taxista. Vejamos um exemplo que envolve três pontos, nesse caso a tomada de decisão usando apenas a distância euclidiana levaria a um percurso maior. Utilizando a figura 17, vamos comparar a  $d_E(A, B)$  com a  $d_E(A, C)$  e, da mesma forma, faremos a comparação entre  $d_T(A, B)$  e  $d_T(A, C)$ .

Dados os pontos  $A(0, 0)$ ,  $B(15, 15)$  e  $C(22, 1)$ , conforme a figura 17, vamos comparar as distâncias.

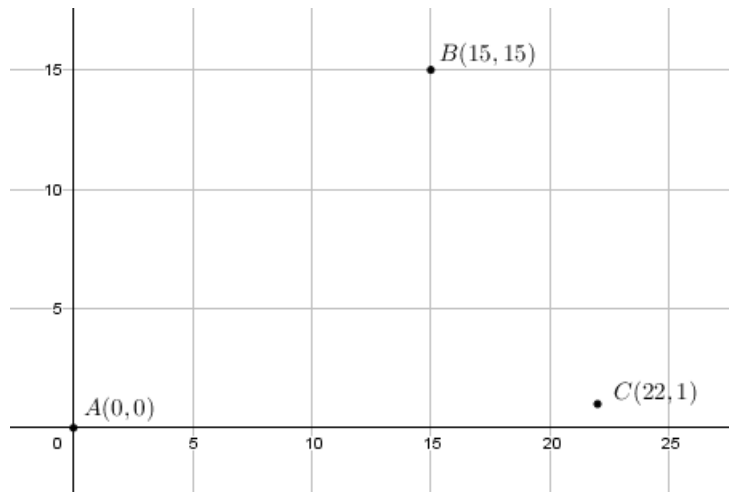


Figura 17: Comparando distâncias.

Utilizando a fórmula (3.3) de distância entre dois pontos na Geometria Euclidiana, temos:

$$d_E(A, B) = \sqrt{|15 - 0|^2 + |15 - 0|^2} = \sqrt{450}$$



e

$$d_E(A, C) = \sqrt{|22 - 0|^2 + |1 - 0|^2} = \sqrt{485}.$$

Portanto,  $d_E(A, C) > d_E(A, B)$ .

Comparando essas mesmas distâncias na Geometria do Taxista, usando [4.1](#), temos:

$$d_T(A, B) = |15 - 0| + |15 - 0| = 30$$

e

$$d_T(A, C) = |22 - 0| + |1 - 0| = 23.$$

Nesse caso, temos  $d_T(A, C) < d_T(A, B)$ .

Essa situação ilustra um fato que podemos viver no nosso cotidiano. Olhando em linha reta e medindo de forma euclidiana, podemos nos enganar em relação à distância entre dois locais, considerando que precisaremos seguir pelas ruas para chegar de um ponto até o outro. Em linha reta a distância de A até C é maior, porém se pensarmos no trajeto que utilizaremos essa distância é menor do que de A até B, conforme apresentado no exemplo anterior, tivemos  $d_E(A, C) > d_E(A, B)$  e  $d_T(A, C) < d_T(A, B)$ .

### 3.2 OS AXIOMAS DE BIRKHOFF NA GEOMETRIA DO TAXISTA

Nessa seção, verificaremos os Axiomas de Birkhoff na Geometria do Taxista. Como essa geometria difere da Geometria Euclidiana apenas na maneira de medir distância, será necessário verificar apenas os axiomas que tenham relação com distância. Dessa forma, verificaremos apenas o Axioma B. 2. [2](#), que se refere ao espaço métrico, o Axioma B. 3. [3](#), referente à função que mede a distância entre dois pontos e o Axioma B. 6. [6](#), que aborda o caso de congruência LAL.

#### 3.2.1 Verificação do Axioma B. 2. para Geometria do Taxista

Iniciaremos, demonstrando que vale o Axioma B. 2., ou seja, podemos chamar de Métrica do Táxi.

**Definição 3.2.** (*Espaço métrico*) Um conjunto X para o qual existe uma função  $|AB|$  com imagem em  $\mathbb{R}$  definido no conjunto de pontos do plano, tal que:

1.  $|AB| = 0$  se e somente se  $A = B$ ;

2.  $|AB| > 0$  se e somente se  $A \neq B$ ;
3.  $|AB| = |BA|$ ;
4. (*Desigualdade Triangular*)  $|AC| \leq |AB| + |BC|, \forall A, B, C$ ;

é denominado Espaço Métrico.

**Proposição 3.3.** O plano com  $|AB| = d_T(A, B)$  é Espaço Métrico.

Dados os pontos  $A(x_a, y_a)$ ,  $B(x_b, y_b)$  e  $C(x_c, y_c)$  e usando que  $d_T(A, B) = |x_b - x_a| + |y_b - y_a|$ , vamos mostrar que as quatro condições acima valem na Geometria do Taxista.

*Demonstração. 1.*

Dividiremos o primeiro item em duas partes, no primeiro mostraremos que sabendo que  $d_T(A, B) = 0$ , podemos mostrar que  $A = B$ .

i) Como  $d_T(A, B) = 0$ , temos  $|x_b - x_a| + |y_b - y_a| = 0$ .

Usando (3.1), a soma de dois módulos ser zero significa que ambos são zero, logo  $|x_b - x_a| = 0 \Leftrightarrow x_b - x_a = 0 \Leftrightarrow x_a = x_b$  e  $|y_b - y_a| = 0 \Leftrightarrow y_b - y_a = 0 \Leftrightarrow y_a = y_b$ .

Portanto,  $A = B$ .

ii) Agora sabendo que  $A = B$ , vamos mostrar que  $d_T(A, B) = 0$ .

Temos  $d_T(A, B) = |x_b - x_a| + |y_b - y_a|$ , como  $A = B$ , temos  $x_a = x_b$  e  $y_a = y_b$ , logo  $d_T(A, B) = |x_a - x_a| + |y_a - y_a| = 0$ .

**2.**

Da mesma forma que fizemos no primeiro item, vamos dividir em duas partes. No primeiro mostraremos que sabendo que  $d_T(A, B) > 0$ , podemos mostrar que  $A \neq B$ .

i) Se  $d_T(A, B) > 0$ , temos  $|x_b - x_a| + |y_b - y_a| > 0$ , portanto pelo menos um dos módulos devem ser maior do que zero.

Logo  $|x_b - x_a| > 0$ ,  $|y_b - y_a| > 0$  ou  $|x_b - x_a| > 0$  e  $|y_b - y_a| > 0$ .

Para  $|x_b - x_a| > 0$ , temos  $x_b - x_a \neq 0$  e, conseqüentemente,  $x_b \neq x_a$ . Tendo as abscissas diferentes, garantimos que  $A \neq B$ . Segue da mesma forma para  $|y_b - y_a| > 0$  e quando temos  $|x_b - x_a| > 0$  e  $|y_b - y_a| > 0$ .

ii) Agora usaremos o fato de  $A \neq B$  para mostrar que  $d_T(A, B) > 0$ .

Temos que  $A \neq B$ , portanto podemos afirmar que  $x_a \neq x_b$ ,  $y_a \neq y_b$  ou  $x_a \neq x_b$  e  $y_a \neq y_b$ .

Como  $d_T(A, B) = |x_b - x_a| + |y_b - y_a|$  e  $x_a \neq x_b$ , podemos afirmar que  $|x_b - x_a| > 0$  e, por [3.1](#), sabemos que  $|y_b - y_a| \geq 0$  para  $\forall y_a, y_b$ .

Logo  $d_T(A, B) > 0$ .

Segue da mesma forma para  $y_a \neq y_b$  ou  $x_a \neq x_b$  e  $y_a \neq y_b$ .

3. Mostremos que  $d_T(A, B) = d_T(B, A)$ .

$$\begin{aligned} d_T(A, B) &= |x_b - x_a| + |y_b - y_a| \\ &= |(-1)(-x_b + x_a)| + |(-1)(-y_b + y_a)| \\ &\stackrel{*}{=} |-1| |-x_b + x_a| + |-1| |-y_b + y_a| \\ &= |-x_b + x_a| + |-y_b + y_a| \\ &= |x_a - x_b| + |y_a - y_b| \\ &= d_T(B, A) \end{aligned}$$

onde, em (\*), utilizamos o fato de que  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ .

4. Vamos provar que  $d_T(A, B) + d_T(B, C) \geq d_T(A, C)$ .

Utilizando a definição de distância, temos que:

$$\begin{aligned} d_T(A, B) + d_T(B, C) &= |x_b - x_a| + |y_b - y_a| + |x_c - x_b| + |y_c - y_b| \\ &= (|x_b - x_a| + |x_c - x_b|) + (|y_b - y_a| + |y_c - y_b|). \end{aligned}$$

Como sabemos da desigualdade triangular [\(3.2\)](#) que

$$|x_b - x_a| + |x_c - x_b| \geq |(x_b - x_a) + (x_c - x_b)|$$

e

$$|y_b - y_a| + |y_c - y_b| \geq |(y_b - y_a) + (y_c - y_b)|$$

de modo que

$$\begin{aligned} d_T(A, B) + d_T(B, C) &\geq |(x_b - x_a) + (x_c - x_b)| + |(y_b - y_a) + (y_c - y_b)| \\ &\geq |(x_c - x_a)| + |(y_c - y_a)| \\ &\geq d_T(A, C). \end{aligned}$$

□

### 3.2.2 Verificação do Axioma B. 3. para Geometria do Taxista

Vamos verificar agora o Axioma B. 3. 3. Para isso, será necessário provar que:

- I) Para toda reta  $r$ , existe uma função bijetiva  $f, r \rightarrow \mathbb{R}$ , onde para  $\forall A, B \in r$ , temos  $|f(B) - f(A)| = d_T(A, B)$ .
- II) Para  $\forall A, B \in r$ , temos  $|f(B) - f(A)| = d_T(A, B)$ .

Dividiremos a demonstração em duas situações, na primeira trabalharemos com as retas verticais e na segunda com as retas não verticais.

#### Primeira situação: retas verticais

*Demonstração.* Iniciaremos mostrando que para toda reta  $r$ , existe uma função bijetiva  $f, r \rightarrow \mathbb{R}$ , onde para  $\forall A, B \in r$ , temos  $|f(B) - f(A)| = d_T(A, B)$ .

Sejam  $r : \{(a, y); y \in \mathbb{R}\}$ ,  $f : r \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(a, y) = y$ . Como precisamos mostrar que existe uma função bijetiva, mostraremos primeiro que a função  $f$  injetora e depois mostraremos que essa função também é sobrejetora. Vamos mostrar que  $f$  é injetora.

Sejam  $P, Q \in \mathbb{R}$ , tal que  $P \neq Q$ . Temos que  $P(a, y_p), Q(a, y_q)$  com  $y_p \neq y_q$ . Como  $f(P) = y_p$  e  $f(Q) = y_q$ , podemos concluir que  $f(P) \neq f(Q)$ .

Resta mostrar que  $f$  é sobrejetora.

Seja  $y \in \mathbb{R}$ . Tome  $P(a, y) \in r$ . Podemos concluir que:  $f(P) = y$ .

Portanto, temos  $f$  bijetora.

Agora vamos mostrar que para  $\forall A, B \in r$ , temos  $|f(B) - f(A)| = d_T(A, B)$ .

Seja  $f(x, y) = y$ . Sendo  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_2)$ , com  $x_1 = x_2$  para satisfazer a condição da situação que é ser vertical. Quero mostrar que  $|f(B) - f(A)| = d_T(A, B)$ .

Temos que  $|f(B) - f(A)| = |y_2 - y_1|$ . Como  $|x_2 - x_1| = 0$ , podemos adicionar do lado direito da equação sem alterá-la, logo:

$$|f(B) - f(A)| = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = d_T(A, B).$$

□

#### Segunda situação: retas não verticais

*Demonstração.* Da mesma forma que fizemos para as retas verticais, iniciaremos mostrando que para toda reta  $r$ , existe uma função bijetiva  $f, r \rightarrow \mathbb{R}$ , onde para  $\forall A, B \in r$ , temos  $|f(B) - f(A)| = d_T(A, B)$ .

Seja  $r : \{(x, y); y = m \cdot x + c\}$ ,  $f : r \rightarrow \mathbb{R}$  e  $(x, y) \rightarrow (1 + |m|) \cdot x$ .

Vamos mostrar que  $f$  é injetora.

Sejam  $P, Q \in \mathbb{R}$  e  $P \neq Q$ . Temos que  $P(x_p, m \cdot x_p + c)$  e  $Q(x_q, m \cdot x_q + c)$ . Como  $P \neq Q$ , temos  $x_p \neq x_q$ .

Logo  $(1 + |m|) \cdot x_p \neq (1 + |m|) \cdot x_q$

Como  $f(P) = (1 + |m|) \cdot x_p$  e  $f(Q) = (1 + |m|) \cdot x_q$ , podemos concluir que  $f(P) \neq f(Q)$ .

Resta mostrar que  $f$  é sobrejetora.

Dado  $y \in \mathbb{R}$ , tome  $P(x, y)$  com  $x = \frac{y}{1 + |m|}$ . Segue que  $f(P) = y$ .

Portanto, temos  $f$  bijetora.

Agora vamos mostrar que para  $\forall A, B \in r$ , temos  $|f(B) - f(A)| = d_T(A, B)$ .

Seja  $f(x, y) = (1 + |m|) \cdot x$ . Quero mostrar que  $|f(B) - f(A)| = d_T(A, B)$ .

Sendo  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_2)$ , temos  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .

$$\begin{aligned} |f(B) - f(A)| &= |(1 + |m|) \cdot x_2 - (1 + |m|) \cdot x_1| \\ &= |x_2 + |m| \cdot x_2 - x_1 - |m| \cdot x_1| \\ &= |x_2 - x_1 + |m| \cdot (x_2 - x_1)| \\ &= \left| x_2 - x_1 + \left| \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right| \cdot (x_2 - x_1) \right| \end{aligned}$$

Dividiremos em dois casos para eliminarmos o módulo.

Caso 1 - Para  $x_2 \geq x_1$ , teremos  $|x_2 - x_1| = x_2 - x_1$

$$\begin{aligned}
 |f(B) - f(A)| &= \left| x_2 - x_1 + \frac{|y_2 - y_1|}{x_2 - x_1} \cdot (x_2 - x_1) \right| \\
 &= \left| x_2 - x_1 + \frac{|y_2 - y_1|}{x_2 - x_1} \cdot (x_2 - x_1) \right| \\
 &= \left| x_2 - x_1 + \frac{|y_2 - y_1|}{(x_2 - x_1)} \cdot (x_2 - x_1) \right| \\
 &= |x_2 - x_1 + |y_2 - y_1|| \\
 &= ||x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|| \\
 &= |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \\
 &= d_T(A, B)
 \end{aligned}$$

Caso 2 - Para  $x_2 < x_1$ , teremos  $|x_2 - x_1| = -(x_2 - x_1)$

$$\begin{aligned}
 |f(B) - f(A)| &= \left| x_2 - x_1 + \frac{|y_2 - y_1|}{x_2 - x_1} \cdot (x_2 - x_1) \right| \\
 &= \left| x_2 - x_1 + \frac{|y_2 - y_1|}{x_2 - x_1} \cdot (x_2 - x_1) \right| \\
 &= \left| x_2 - x_1 + \frac{|y_2 - y_1|}{-(x_2 - x_1)} \cdot (x_2 - x_1) \right| \\
 &= |x_2 - x_1 - |y_2 - y_1|| \\
 &= |(-1)[(-1)(x_2 - x_1) + |y_2 - y_1|| \\
 &= |(-1) \cdot |-(x_2 - x_1) + |y_2 - y_1|| \\
 &= ||x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|| \\
 &= |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \\
 &= d_T(A, B)
 \end{aligned}$$

□

### 3.2.3 Verificação do Axioma B. 6. para Geometria do Taxista

Para finalizar, verificaremos o Axioma B. 6. [6](#), ou seja, se o caso LAL é suficiente para que exista congruência entre triângulos na Geometria do Taxista.

Na figura [18](#), temos:  $\overline{AC} \cong \overline{ED}$ ,  $\hat{C} \cong \hat{D}$  e  $\overline{CB} \cong \overline{DF}$ , ou seja, de acordo com a definição, seria um caso LAL, porém os triângulos não são congruentes, basta observar  $\overline{AB} \neq \overline{EF}$ .

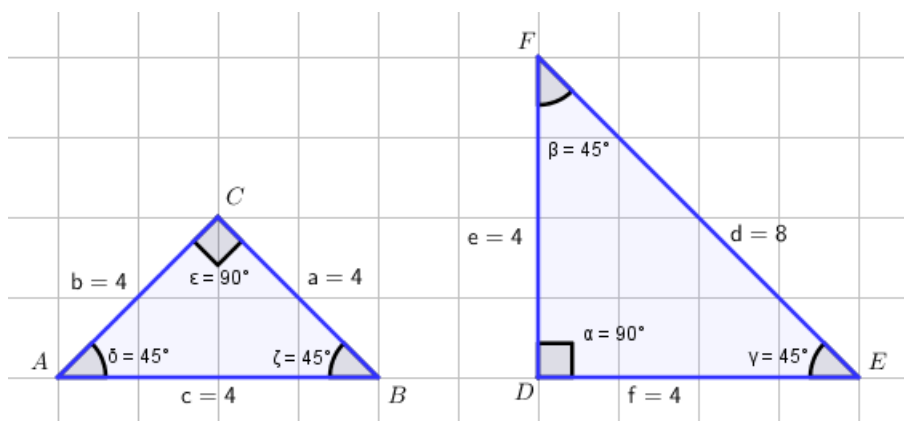


Figura 18: Triângulos: lado - ângulo - lado.

Portanto, quando dois lados e o ângulo interno entre eles de um dado triângulo são congruentes respectivamente a dois lados e o ângulo interno entre eles de um segundo triângulo, na Geometria do Taxista, não é garantida a congruência entre os triângulos.

### 3.3 TÁXI CIRCUNFERÊNCIA

A táxi circunferência ( $C_T$ ), assim como na Geometria Euclidiana, é o lugar geométrico do plano equidistante de um ponto fixo (centro). Sendo  $A(x_a, y_a) \in C_T$ ,  $O(x_o, y_o)$  o centro da circunferência e  $d_T(O, A) = r$  (raio), temos

$$C_T = \{A(x_a, y_a) \in \mathbb{R}^2 / d_T(O, A) = r\}.$$

Usando a definição, concluímos que a equação da táxi circunferência:

$$|x_a - x_o| + |y_a - y_o| = r. \quad (3.4)$$

**Exemplo 3.3.1.** Desenhe uma táxi circunferência com centro em  $O(-2, 1)$  e raio 4.

**Resolução:** Se  $A(x_a, y_a) \in C_T$ , usando [3.4](#), temos:

$$|x_a + 2| + |y_a - 1| = 4.$$

Utilizando o plano cartesiano para separar a equação modular em casos, na figura [19](#), teremos quatro situações para analisar.



Figura 19: Análise dos módulos.

Analisando  $|x_a + 2|$ , temos  $x_a + 2 \geq 0$  nas regiões 1 e 4; nas demais, será menor que zero.

Para  $|y_a - 1|$ , temos  $y_a - 1 \geq 0$  nas regiões 1 e 2; nas demais, será menor que zero.

Podemos montar as equações sem os módulos e usar o plano cartesiano para verificar as regiões, como segue:

#### Região 1

$$x_a + 2 + y_a - 1 = 4$$

$$x_a + y_a - 3 = 0 \longrightarrow \text{equação geral da reta r.}$$

#### Região 2

$$-x_a - 2 + y_a - 1 = 4$$

$$-x_a + y_a - 7 = 0 \longrightarrow \text{equação geral da reta s.}$$

#### Região 3

$$-x_a - 2 - y_a + 1 = 4$$

$$-x_a - y_a - 5 = 0 \longrightarrow \text{equação geral da reta t.}$$

#### Região 4

$$x_a + 2 - y_a + 1 = 4$$

$$x_a - y_a - 1 = 0 \longrightarrow \text{equação geral da reta u.}$$

Colocando as quatro retas no mesmo plano cartesiano e utilizando apenas os “pedaços” de acordo com suas restrições, segue a imagem [20](#) da táxi circunferência com centro em  $O(-2, 1)$  e raio 4. Na imagem [20](#), é importante observar que todos os pon-



tos que pertencem à táxi circunferência estão à mesma distância do centro, sempre a 4 unidades de medida que é o raio.

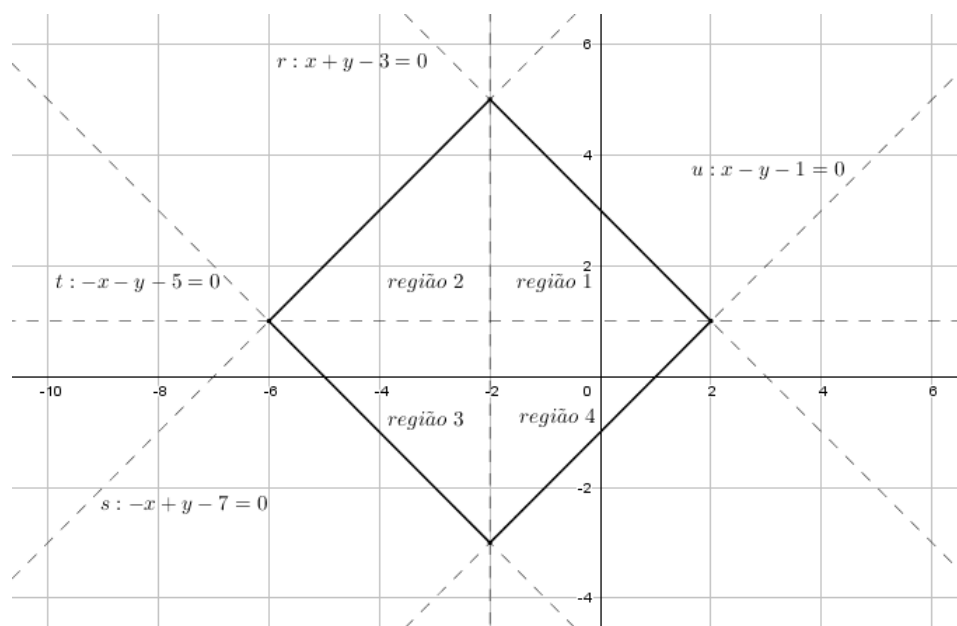


Figura 20: Táxi circunferência.

**Exemplo 3.3.2.** Desenhe uma táxi circunferência com centro em  $O(2, 1)$  e raio 5 e uma com centro em  $P(0, 0)$  e raio 3. Determine os pontos que elas possuem em comum.

**Resolução:** Se  $A(x_a, y_a) \in C_{T1}$ , temos:

$$|x_a - 2| + |y_a - 1| = 5.$$

Para  $B(x_b, y_b) \in C_{T2}$ , temos:

$$|x_b - 0| + |y_b - 0| = 3.$$

Utilizando o plano cartesiano para separar as equações modulares em casos e construindo as retas respeitando as restrições, seguem as circunferências 21 solicitadas e os pontos em comum.

Os pontos I e J são comuns às duas circunferências, sendo  $I(-2, 5; 0, 5)$  e  $J(0, 5; -2, 5)$ . Eles são encontrados quando igualamos as duas equações das circunferências e as resolvemos.

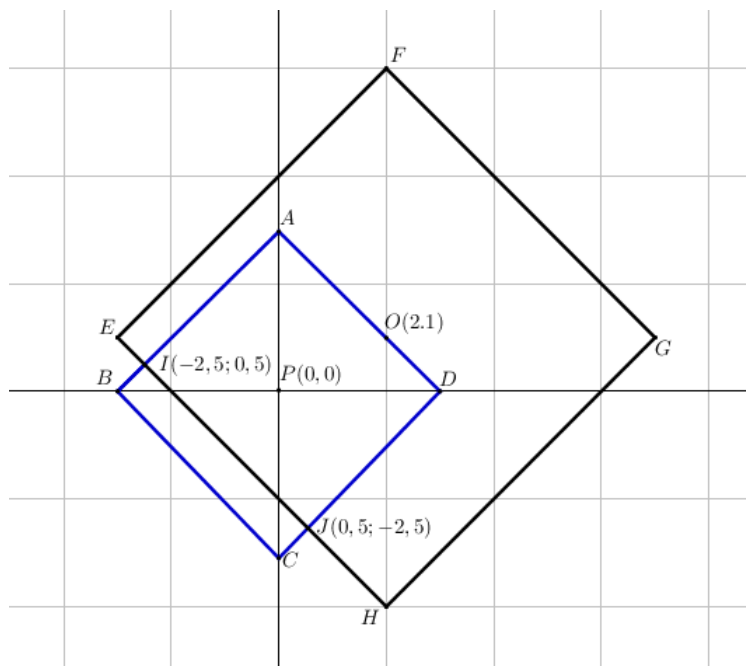


Figura 21: Táxi circunferências secantes.

**Observação 3.1.** Note que é possível ter mais de dois pontos em comum entre duas circunferências distintas, na quarta atividade do capítulo 5 será abordado um caso onde duas circunferências possuem dois segmentos de reta em comum.

### 3.3.1 O valor de $\Pi$ na Geometria do Taxista

Na Geometria Euclidiana temos uma constante que chamamos de  $\Pi$ , ela é o quociente entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro. Sabemos que  $\Pi$  é um número irracional e representamos seu valor por 3,141592.... Na Geometria do Taxista também temos uma constante (que chamaremos de  $\Pi_T$ ) que representa o quociente entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, e agora vamos verificar o seu valor.

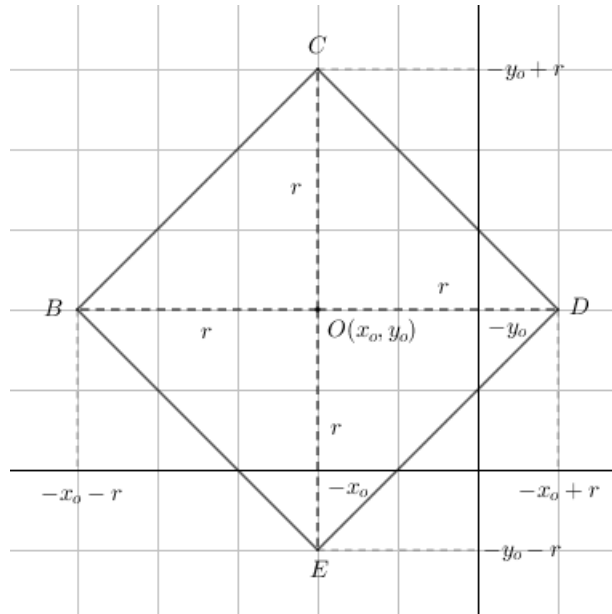


Figura 22: Circunferência.

Para verificar o valor de  $\Pi_T$ , seja  $A(x_a, y_a) \in C_T$ ,  $O(x_o, y_o)$  o centro da táxi circunferência e  $d_T(O, A) = r$  (raio).

É possível perceber, na circunferência da figura 22 que  $d_T(O, B) = d_T(O, C) = d_T(O, D) = d_T(O, E) = r$  e usando a definição de distância da Geometria do Taxista, podemos afirmar que  $d_T(B, C) = d_T(C, D) = d_T(D, E) = d_T(E, B) = 2r$ .

Dessa forma, temos que o comprimento da táxi circunferência será dado por  $d_T(B, C) + d_T(C, D) + d_T(D, E) + d_T(E, B) = 8r$ .

Como  $C = 2\Pi_T r$ , temos:

$$8r = 2\Pi_T r$$

$$\Pi_T = \frac{8r}{2r} = 4.$$

Portanto, temos  $\Pi_T = 4$ .

### 3.4 DISTÂNCIA DE PONTO A RETA

Na Geometria Euclidiana, uma das formas que temos para encontrar a distância entre um ponto e uma reta é construir uma circunferência de centro A e aumentar a circunferência até ela ser tangente à reta dada. A distância do ponto de tangência até o ponto A será o raio dessa circunferência e também será a distância de A até a reta dada.

Usando esse mesmo modelo, conseguimos calcular a distância de um ponto até uma reta. Inicialmente, dividiremos em três casos para facilitar a compreensão.

**1º caso** -  $|m| < 1$

Encontrar a distância entre o ponto  $A(4, 1)$  e a reta  $r : 2y - x - 2 = 0$ .

**2º caso** -  $|m| = 1$

Encontrar a distância entre o ponto  $B(4, -4)$  e a reta  $s : y - x + 2 = 0$ .

**3º caso** -  $|m| > 1$

Encontrar a distância entre o ponto  $C(4, -4)$  e a reta  $t : y - 3x - 2 = 0$ .

No **primeiro caso**, devemos traçar uma linha vertical, passando por A. Essa linha encontrará a reta em  $B \in r$ , e a  $d_T(A, B)$  será o raio da circunferência - ver figura [23](#). Através da circunferência, é possível verificar que  $d_T(A, B)$  é a menor distância de A até a reta r.

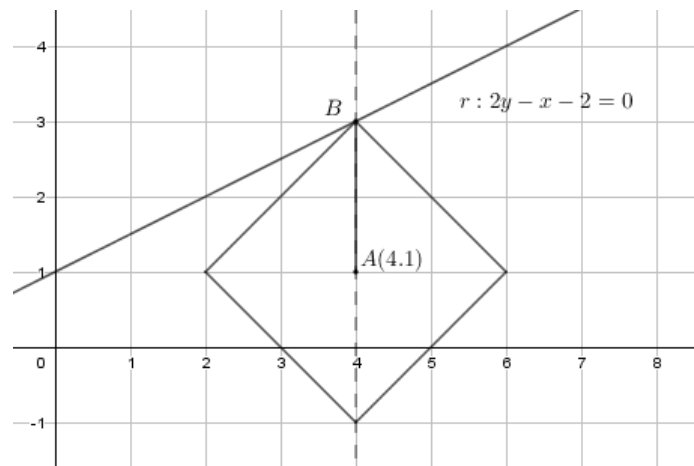


Figura 23: Distância de ponto a reta com coeficiente  $m < |1|$ .

Temos que  $d_T(A, r) = 2$ .

No **segundo caso**, encontraremos um segmento de reta contido em  $s$ , que possui a distância mínima. Para encontrar um dos extremos desse segmento, é necessário traçar uma linha vertical passando por B, e encontraremos o ponto  $G \in s$ . Para encontrar o outro extremo, é necessário traçar uma linha horizontal, passando por B, e o ponto de encontro com a reta será o ponto  $F \in s$ , conforme a figura [24](#). Encontramos, assim,

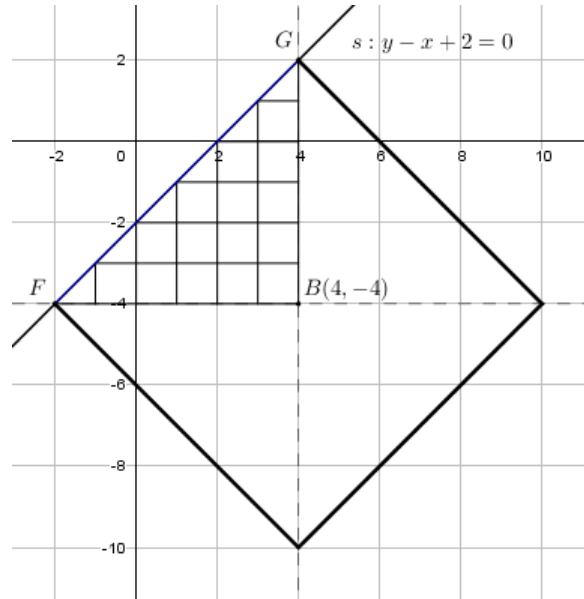


Figura 24: Distância de ponto a reta com coeficiente  $m = |1|$ .

$\overline{FG}$ , o qual possui todos os pontos pertencentes a  $s$  equidistantes ao ponto  $B$ , sendo essa distância aquela que procuramos, a distância do ponto à reta.

Temos que  $d_T(B, s) = 6$ .

No **terceiro caso**, ver figura [25](#), será necessário traçar a linha horizontal, passando por  $C$ , e o encontro dela com a reta será o ponto  $B \in t$ , onde  $\overline{CB}$  é raio da circunferência e a distância entre o ponto e a reta.

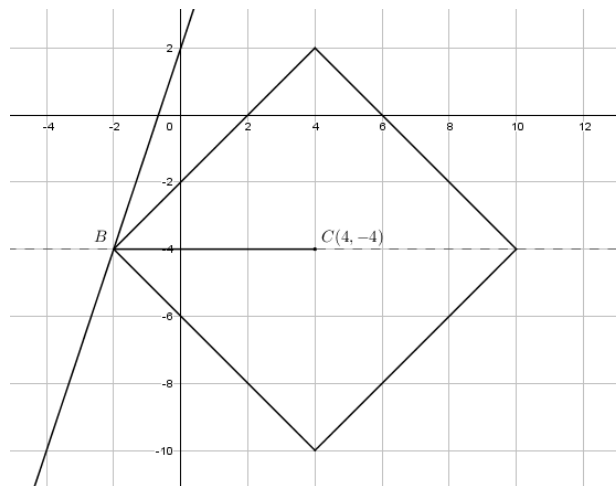


Figura 25: Distância de ponto a reta com coeficiente  $m > |1|$ .

Temos que  $d_T(C, t) = 6$ .

É possível determinar uma fórmula para calcular a distância entre uma reta e um ponto, para isso definiremos:  $\max\{|a|; |b|\} =$  é o maior valor entre  $|a|$  e  $|b|$ .

**Proposição 3.4.** Dado o ponto  $P(x_0, y_0)$  e a reta  $h : ax + by + c = 0$ , na Geometria do Taxista temos que a distância de P à reta h é dada por:

$$d_T(P, h) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\max\{|a|; |b|\}}. \quad (3.5)$$

*Demonstração.* De acordo com Loiola e Costa [9], segue que:

Na Geometria do Táxi, a distância de um ponto (P) a uma reta (h) é definida como:

$$d_T(P, h) = \min_{X \in h} \{d_T(P, X)\}.$$

Como verificamos nos três casos acima, podemos generalizar a maneira de medir a distância entre um ponto (P) e uma reta (h) fazendo uma reta vertical e uma horizontal passando pelo ponto (P), em seguida verificamos qual das intersecções possui a menor distância até P. Dessa forma, sendo  $X_1$  e  $X_2$  os pontos de intersecção da reta h com as retas  $x = x_0$  (vertical) e  $y = y_0$  (horizontal), respectivamente tem-se:

$$d_T(P, h) = \min \{d_T(P, X_1); d_T(P, X_2)\}.$$

Uma vez que  $X_1$  e  $X_2$  são dados por

$$X_1 \left( x_0, \frac{-ax_0 - c}{b} \right) \text{ e } X_2 \left( \frac{-by_0 - c}{a}, y_0 \right)$$

tem-se que

$$d_T(P, X_1) = |x_0 - x_0| + \left| y_0 + \frac{ax_0 + c}{b} \right| = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{b} \right|$$

$$d_T(P, X_2) = \left| x_0 + \frac{by_0 + c}{a} \right| + |y_0 - y_0| = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{a} \right|.$$

Para  $h : ax + by + c = 0$  ser uma reta, não podemos ter  $a = 0$  e  $b = 0$ , portanto:

$$d_T(P, h) = \min \left( \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|b|}, \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a|} \right).$$

Assim, mostra-se que:

$$d_T(P, h) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\max\{|a|; |b|\}}.$$

□

Voltando ao primeiro caso, utilizando (3.5), a distância procurada entre o ponto  $A(4, 1)$  e a reta  $r : 2y - x - 2 = 0$  pode ser obtida através da fórmula que foi demonstrada acima.

$$\begin{aligned} d_T(A, r) &= \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 4 - 2|}{\max\{|-1|; |2|\}} \\ &= \frac{|-4|}{2} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Usaremos a fórmula (3.5) para resolver os outros dois casos, dessa forma encontraremos a distância entre o ponto  $B(4, -4)$  e a reta  $s : y - x + 2 = 0$ , como segue:

$$\begin{aligned} d_T(B, s) &= \frac{|1 \cdot (-4) - 1 \cdot 4 + 2|}{\max\{|-1|; |1|\}} \\ &= \frac{|-6|}{1} \\ &= 6. \end{aligned}$$

No terceiro caso, encontraremos a distância entre o ponto  $C(4, -4)$  e a reta  $t : y - 3x - 2 = 0$ .

$$\begin{aligned} d_T(C, t) &= \frac{|1 \cdot (-4) - 3 \cdot 4 - 2|}{\max\{|-3|; |1|\}} \\ &= \frac{|-18|}{3} \\ &= 6. \end{aligned}$$

### 3.5 TRIÂNGULO

Vamos analisar o comportamento dos triângulos na Geometria do Taxista, ou seja, verificar se os casos de congruência da Geometria Euclidiana também valem para a Geometria do Taxista.

Os triângulos podem ser classificados através de seus lados ou dos seus ângulos. Iniciaremos tal classificação através dos lados, com uma breve comparação com as propriedades que valem na Geometria Euclidiana.

### 3.5.1 Classificação através dos lados

Considerando a medida dos lados, podemos encontrar triângulos com todos os lados diferentes, apenas dois lados iguais ou todos os lados iguais.

#### Triângulo escaleno

Os triângulos escalenos possuem todos os lados com medidas diferentes.

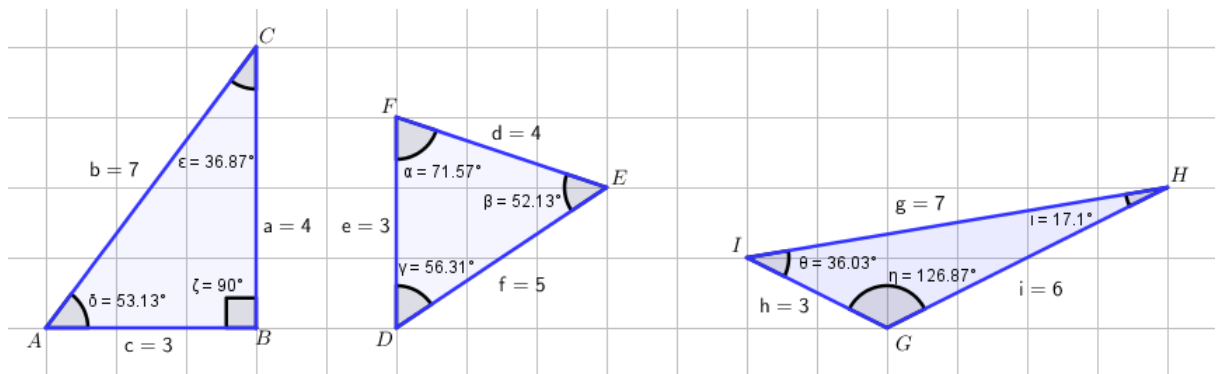


Figura 26: Triângulos escalenos.

#### Triângulo isósceles

Os triângulos isósceles possuem apenas dois lados com a mesma medida. O terceiro lado (com medida diferente) é chamado de base do triângulo isósceles.

Na Geometria Euclidiana, os ângulos opostos aos lados com mesma medida possuem o mesmo grau, fato que não ocorre necessariamente na Geometria do Taxista. Podemos perceber na figura [27](#) o triângulo DEF, com  $\overline{DF} \cong \overline{EF}$  e  $\alpha \neq \gamma$ .

#### Triângulo equilátero

Os triângulos equiláteros possuem os três lados com a mesma medida.

Na Geometria Euclidiana, todos os ângulos são iguais (medem  $60^\circ$ ), fato que não ocorre necessariamente na Geometria do Taxista.



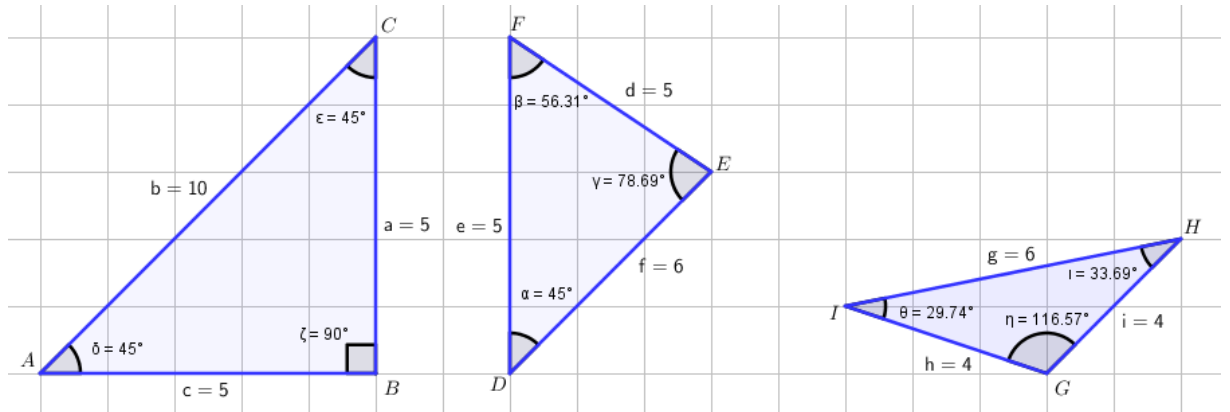


Figura 27: Triângulos isósceles.

É possível perceber na figura [28](#), que nos três casos, apesar dos três lados terem a mesma medida, nenhum deles possui os ângulos com a mesma medida.

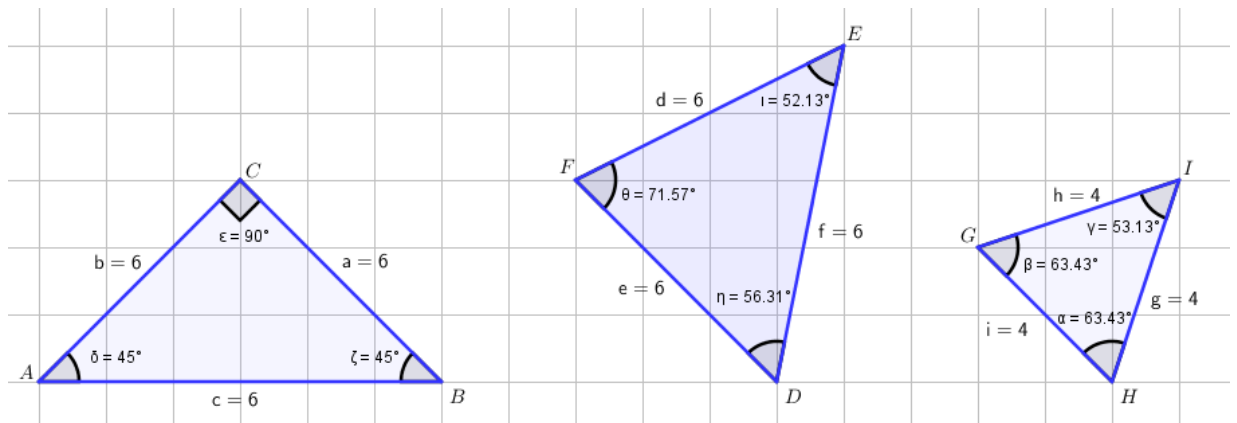


Figura 28: Triângulos equiláteros.

### 3.5.2 Classificação através dos ângulos

Considerando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a  $180^\circ$ , podemos encontrar triângulos com todos os ângulos menores que  $90^\circ$ , assim como é possível encontrar triângulos com um ângulo igual a  $90^\circ$  e dois ângulos menores do que  $90^\circ$  ou com um ângulo maior que  $90^\circ$  e dois ângulos menores.

*Triângulo acutângulo*

Os triângulos acutângulos, ver figura 29, possuem todos os ângulos com medidas menores que  $90^\circ$  (agudos).

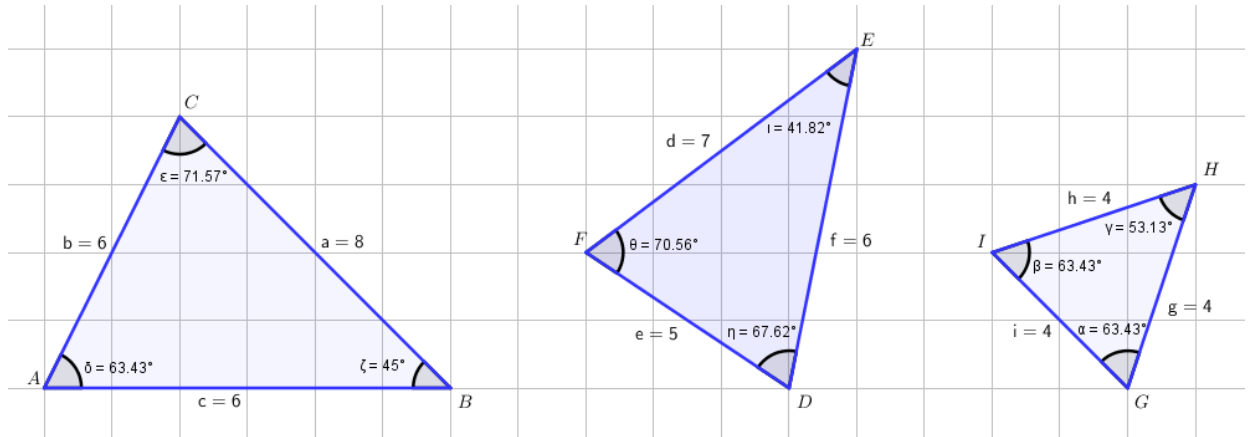


Figura 29: Triângulos acutângulos.

*Triângulo retângulo*

Os triângulos retângulos, ver figura 30, possuem um ângulo com medida igual a  $90^\circ$  (reto). O lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa e os demais de catetos.

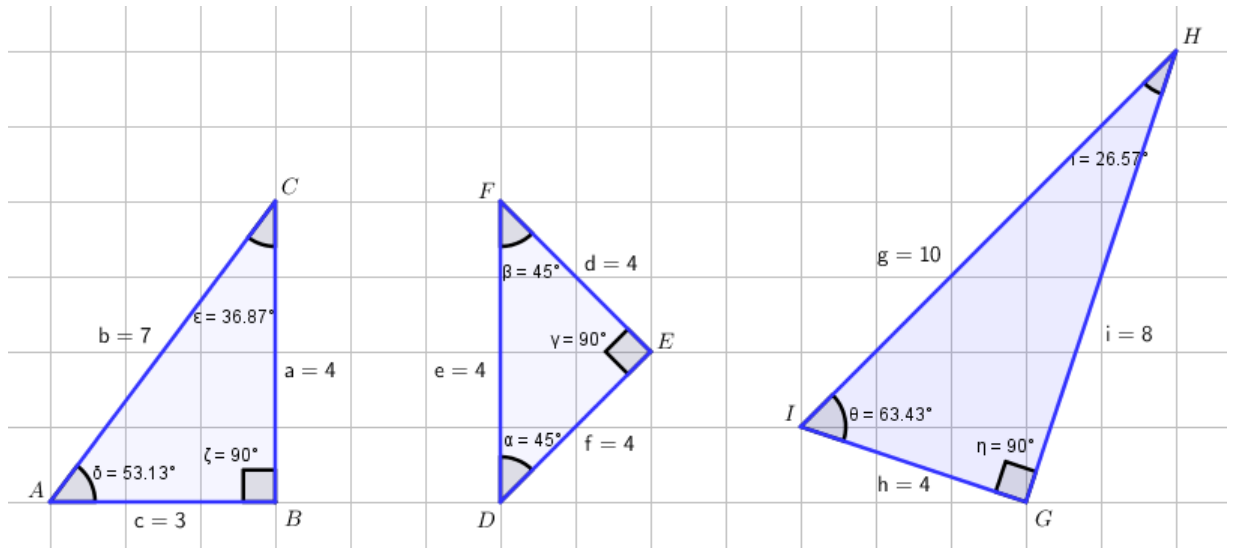


Figura 30: Triângulos retângulos.

Na Geometria Euclidiana, sendo  $a$  a hipotenusa e  $b$  e  $c$  os catetos, temos o conhecido Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2. \quad (3.6)$$

Verificando no triângulo ABC, temos:

$$4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \neq 49 = 7^2.$$

Portanto, é possível perceber que, na Geometria do Taxista, esse teorema não vale.

### Triângulo obtusângulo

Os triângulos obtusângulos possuem um ângulo com medida superior a  $90^\circ$  (obtusos).

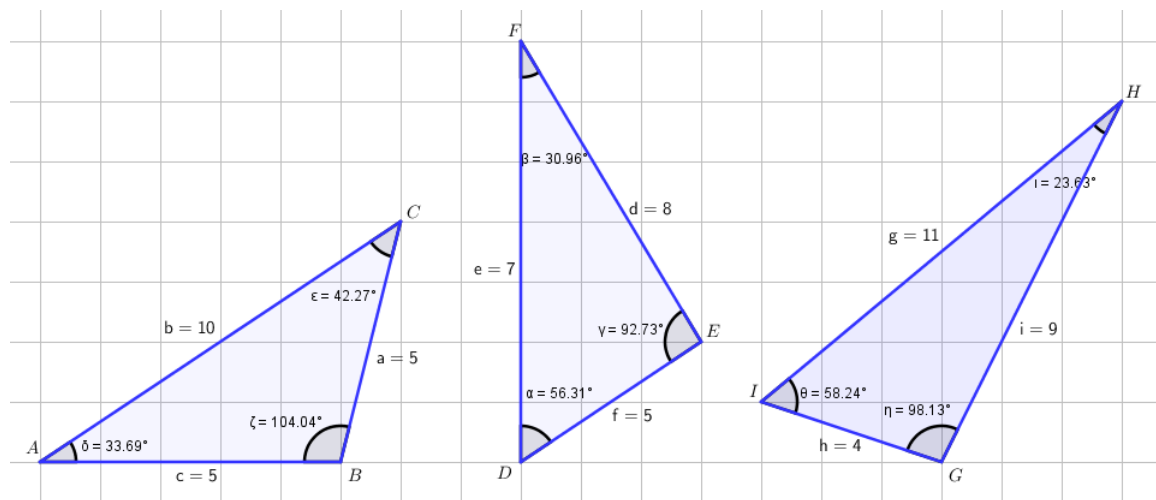


Figura 31: Triângulos obtusângulos.

Na figura [31](#), o triângulo DEF nos mostra que mais um teorema da Geometria Euclidiana não serve para a Geometria do Taxista. Na Geometria Euclidiana, vale o fato de ângulos maiores serem opostos aos lados maiores, ou seja, se o ângulo E é maior do que o ângulo D na Geometria Euclidiana, necessariamente  $\overline{DF} > \overline{EF}$ . É possível observar que não é uma regra na Geometria do Taxista.

### 3.5.3 Congruência de triângulos

No capítulo 2, foram apresentados os casos de congruências de triângulos da Geometria Euclidiana. No capítulo 3, foi demonstrado que o caso LAL não é suficiente para encontrarmos triângulos congruentes na Geometria do Taxista. Verificaremos agora se os demais casos valem na Geometria do Taxista.

#### ALA (ângulo - lado - ângulo)

Se os dois ângulos e o lado entre eles de um dado triângulo são congruentes respectivamente a dois ângulos e o lado entre eles de um segundo triângulo, então os triângulos são congruentes, isto é, os demais lados e ângulos são também congruentes.

Na figura 32, temos  $\hat{A} \cong \hat{E}$ ,  $\overline{AC} \cong \overline{ED}$  e  $\hat{C} \cong \hat{D}$ . Na Geometria Euclidiana, seria suficiente para afirmarmos que os triângulos são semelhantes pelo caso ALA, porém, na Geometria do Taxista, isso não acontece; para isso, basta verificar que  $\overline{AB} \neq \overline{EF}$ .

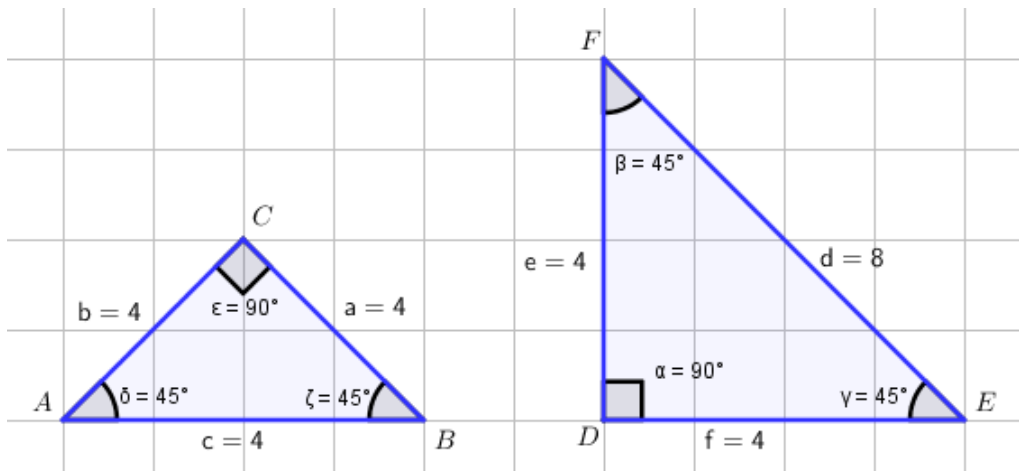


Figura 32: Triângulos: lado - ângulo - lado.

#### LLL (lado - lado - lado)

Se os três lados de um dado triângulo são congruentes aos três lados de um segundo triângulo, então os triângulos são congruentes, isto é, os ângulos também são congruentes.

Na Geometria do Taxista, ter três lados congruentes não é suficiente. Na figura 33, temos  $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ ,  $\overline{BC} \cong \overline{FD}$  e  $\overline{CA} \cong \overline{DE}$ , e, mesmo assim, os dois triângulos possuem os três ângulos diferentes.

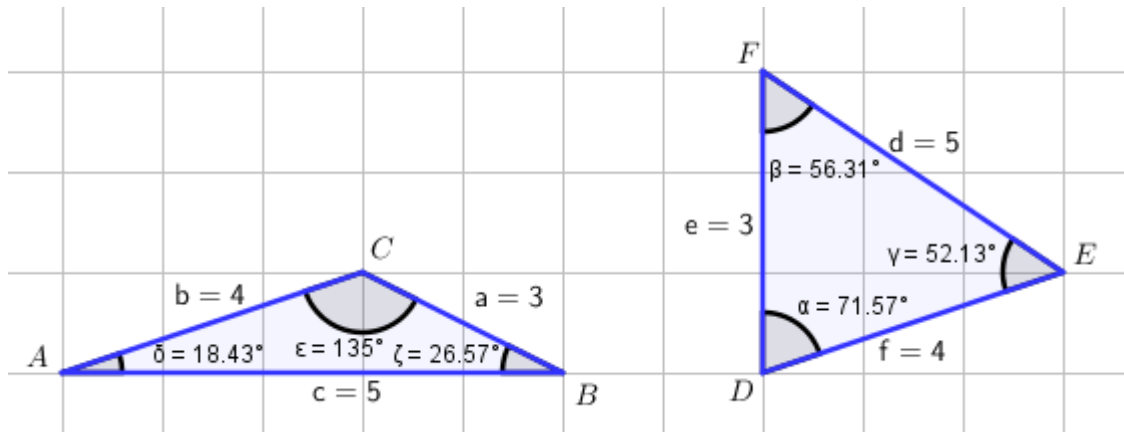


Figura 33: Triângulos: lado - lado - lado.

*LAAo (lado - ângulo - ângulo oposto)*

Se um lado, um dos ângulos que é formado por esse lado e o ângulo oposto a esse lado de um dado triângulo são congruentes, respectivamente, um lado, um dos ângulos que é formado por esse lado e o ângulo oposto a esse lado de um segundo triângulo, então os triângulos são congruentes, isto é, os demais lados e ângulos são também congruentes.

Observando a figura 34, temos  $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ ,  $\hat{A} \cong \hat{D}$  e  $\hat{B} \cong \hat{E}$ , porém  $\overline{AB} \neq \overline{DE}$  e  $\overline{BC} \neq \overline{EF}$ , logo o caso LAAo de congruência não vale na Geometria do Taxista.

*RHC (ângulo reto - hipotenusa - cateto)*

Se o lado oposto ao ângulo reto (hipotenusa) e um dos outros dois lados de um dado triângulo retângulo são congruentes respectivamente ao lado oposto ao ângulo reto (hipotenusa) e um dos outros dois lados de um segundo triângulo retângulo, então os triângulos retângulos são congruentes, isto é, os demais ângulos e lados são também congruentes.

No exemplo 35, temos as hipotenusas  $\overline{AC} \cong \overline{DE}$  e os catetos  $\overline{AB} \cong \overline{EF}$  e, por fim, os ângulos retos  $\hat{B} \cong \hat{F}$ , caracterizando o caso RHC, mesmo assim os dois triângulos

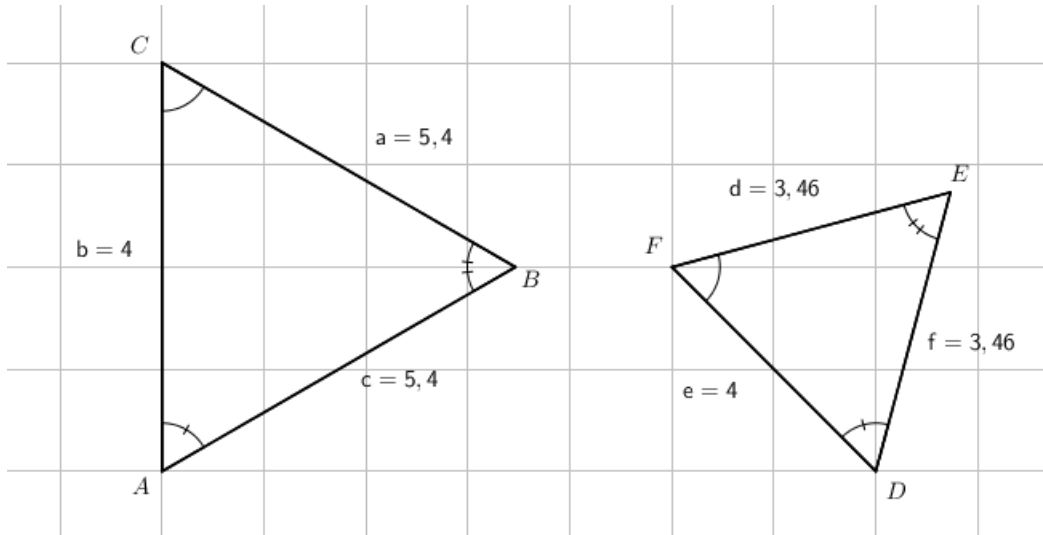


Figura 34: Triângulos: lado - ângulo - ângulo oposto.

não são congruentes, como podemos ver os demais ângulos diferentes, assim como  $d_T(B, C) \neq d_T(D, F)$ .

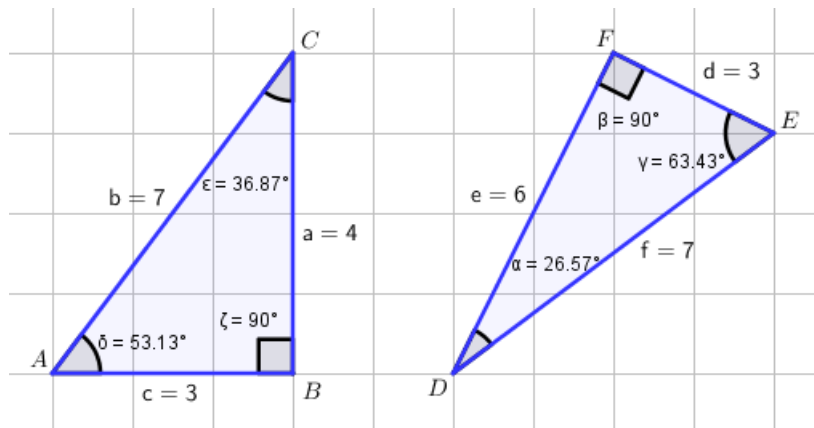


Figura 35: Triângulos: ângulo reto - hipotenusa - cateto.

Dessa forma, podemos concluir que nenhum dos casos de congruência da Geometria Euclidiana vale na Geometria do Taxista.

### 3.5.4 Condição de existência de um triângulo

Na Geometria Euclidiana, a soma dos comprimentos de dois lados quaisquer de um triângulo é sempre maior que o comprimento do terceiro lado. Na Geometria do Taxista, não podemos fazer a mesma afirmação.

**Proposição 3.5.** A soma dos comprimentos de dois lados quaisquer de um triângulo, na Geometria do Taxista, é maior ou igual ao comprimento do terceiro lado.

*Demonstração.* Se  $A = (x_a, y_a)$ ,  $B = (x_b, y_b)$  e  $C = (x_c, y_c)$ , temos:

$$d(A, B) = |x_b - x_a| + |y_b - y_a|,$$

$$d(A, C) = |x_c - x_a| + |y_c - y_a|,$$

$$d(B, C) = |x_c - x_b| + |y_c - y_b|.$$

Observe agora que:

$$|x_c - x_b| = |x_c - x_a + x_a - x_b| \leq |x_c - x_a| + |x_a - x_b| \quad (3.7)$$

$$|y_c - y_b| = |y_c - y_a + y_a - y_b| \leq |y_c - y_a| + |y_a - y_b| \quad (3.8)$$

Somando as desigualdades (3.7) e (3.8) obtemos:

$$(|x_c - x_b| + |y_c - y_b|) \leq (|x_c - x_a| + |y_c - y_a|) + (|x_a - x_b| + |y_a - y_b|),$$

ou seja:

$$d(B, C) \leq d(A, B) + d(A, C).$$

As desigualdades  $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$  e  $d(A, B) \leq d(A, C) + d(B, C)$  seguem de modo análogo.

□

**Proposição 3.6.** Sejam  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Se  $a + b \geq c$  então existe um triângulo  $ABC$  com  $d(B, C) = a$ ,  $d(A, C) = b$  e  $d(A, B) = c$ .

*Demonstração.* A construção do triângulo  $ABC$  é análoga ao caso Euclidiano, o qual, por sua vez é inspirado na construção por régua e compasso de um triângulo com lados conhecidos. A diferença surge na Geometria do Taxista pela presença de um compasso que “traça quadrados”.

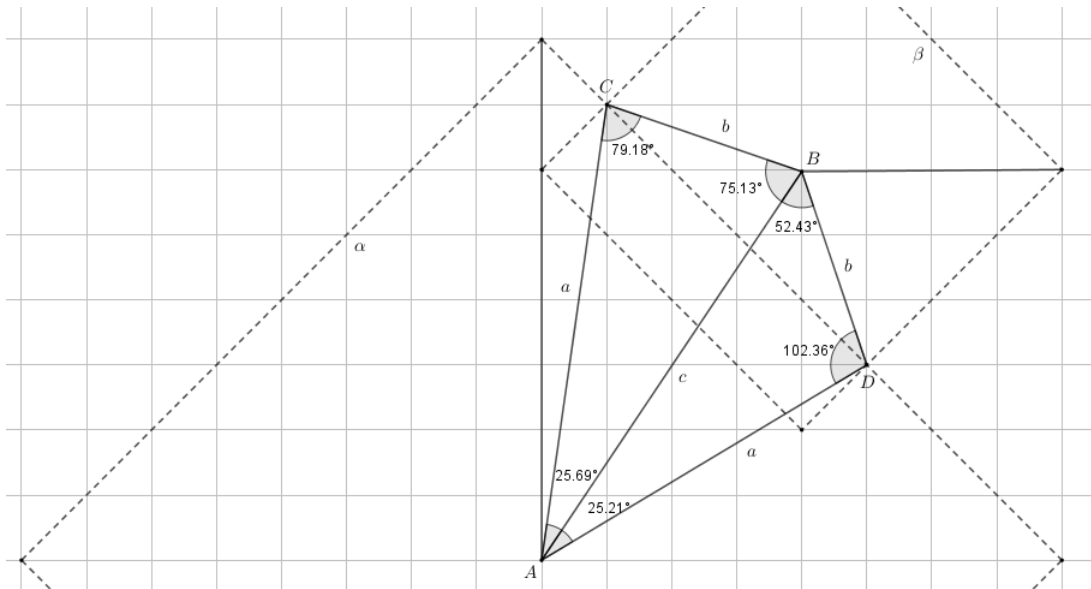


Figura 36: Construção de triângulos.

Suponha  $a + b \geq c$ .

Tome  $A$  e  $B$  dois pontos distando  $c$ . Trace os “círculos”  $\alpha$  e  $\beta$  (do Taxista) centrados em  $A$  e  $B$  com raios  $a$  e  $b$  respectivamente. Seja  $C$  um dos pontos de intersecção.

O triângulo  $ABC$  assim construído tem  $d(B, C) = a$ ,  $d(A, C) = b$  e  $d(A, B) = c$  como desejado.

Vale observar que nesse exemplo não vale a unicidade, pois temos o ponto  $D$  que satisfaz  $a + b \geq c$  e os triângulos  $ABC$  e  $ABD$  são diferentes, pois possuem ângulos diferentes.

Para o caso  $a + b = c$  é necessário que os pontos  $A$  e  $B$  (com distância  $c$ ) formem um segmento inclinado, ou seja, ele não pode ser horizontal e nem vertical.

### 3.6 TEOREMA DE TALES

**Teorema 3.1** (Tales). *Sejam  $r, s, t$  três retas paralelas,  $A, A' \in r$ ,  $B, B' \in s$  e  $C, C' \in t$  seis pontos tais que  $A, B, C$  são colineares e  $A', B', C'$  são colineares. Temos então que:*

$$\frac{d_T(A, B)}{d_T(B, C)} = \frac{d_T(A', B')}{d_T(B', C')}.$$



*Demonstração.* Se  $P$  é a intersecção da vertical por  $A$  com a horizontal por  $B$  e  $Q$  é a intersecção da vertical por  $B$  com a horizontal por  $C$ , é fácil ver que os triângulos  $ABP$  e  $BCQ$  são semelhantes. De modo análogo podemos concluir que os triângulos  $A'B'R$  e  $B'C'S$  também são semelhantes.

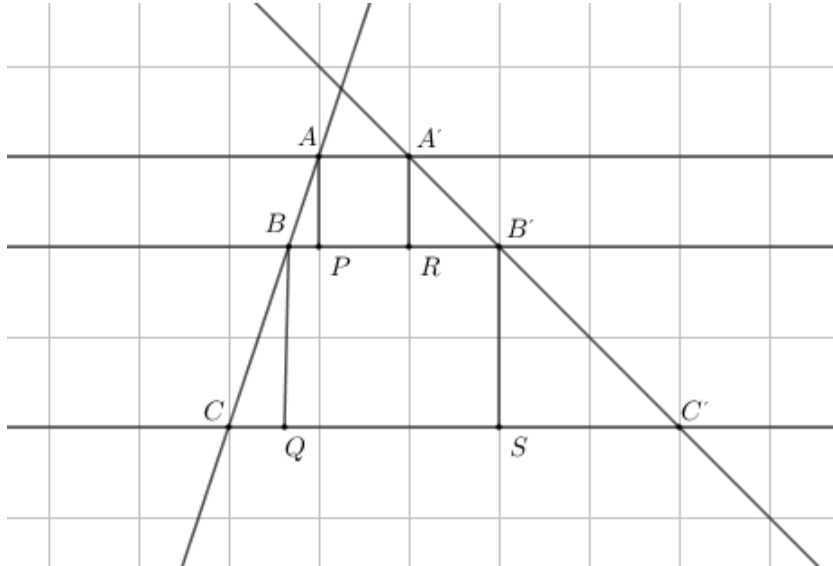


Figura 37: Teorema de Tales.

Logo, dos triângulos  $ABP$  e  $BCQ$  temos:

$$\frac{d_E(A, B)}{d_E(B, C)} = \frac{d_E(A, P)}{d_E(B, Q)} = \frac{d_E(B, P)}{d_E(C, Q)}.$$

**Observação 3.2.** Note que ao somarmos os numeradores de duas frações equivalentes e realizarmos da mesma forma a soma de seus denominadores, a nova fração também será equivalente.

Se  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , é verdade que  $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$ . Usando a primeira igualdade encontramos  $a = \frac{bc}{d}$ .

Substituindo o valor de  $a$  na fração  $\frac{a+c}{b+d}$ , passamos a ter  $\frac{\frac{bc}{d} + c}{b+d} = \frac{\frac{bc+cd}{d}}{b+d} = \frac{c}{d}$ .

Utilizando esse conceito de soma de frações equivalentes e as equivalências que a semelhança de triângulos gerou, temos:

$$\frac{d_E(A, B)}{d_E(B, C)} = \frac{d_E(A, P) + d_E(B, P)}{d_E(B, Q) + d_E(C, Q)}.$$

Mas:

$$\frac{d_T(A, B)}{d_T(B, C)} = \frac{d_E(B, P) + d_E(A, P)}{d_E(C, Q) + d_E(B, Q)}.$$

Donde temos finalmente:

$$\frac{d_T(A, B)}{d_T(B, C)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(B, C)}.$$

Analogamente, utilizando os triângulos  $A'B'R$  e  $B'C'S$ , podemos provar que:

$$\frac{d_T(A', B')}{d_T(B', C')} = \frac{d_E(A', B')}{d_E(B', C')}.$$

Sabemos devido ao Teorema de Tales clássico que:

$$\frac{d_E(A, B)}{d_E(B, C)} = \frac{d_E(A', B')}{d_E(B', C')}.$$

Logo vale:

$$\frac{d_T(A, B)}{d_T(B, C)} = \frac{d_T(A', B')}{d_T(B', C')}.$$

□

---

## PARÁBOLA

---

Nesse capítulo, verificaremos a construção de parábolas na Geometria Euclidiana e na Geometria do Taxista.

**Definição 4.1.** Sejam uma reta  $d$  e um ponto  $F \notin d$ , parábola é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de  $d$  e  $F$ . Sendo  $d$  a diretriz e  $F$  o foco da parábola  $Q$ , temos que

$$Q = \{P \in \mathbb{R}^2 / d(P, F) = d(P, d)\}.$$

Iniciaremos com a Geometria Euclidiana.

### 4.1 PARÁBOLA NA GEOMETRIA EUCLIDIANA

Utilizando a definição [4.1](#) de parábola, é necessário colocar que a distância a ser trabalhada será a euclidiana ( $d_E$ ), como segue:

$$Q = \{P \in \mathbb{R}^2 / d_E(P, F) = d_E(P, d)\}.$$

A figura [38](#) ilustra a definição de parábola, quando temos um conjunto de pontos  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ , que satisfazem a relação  $d_E(P, F) = d_E(P, d)$ .

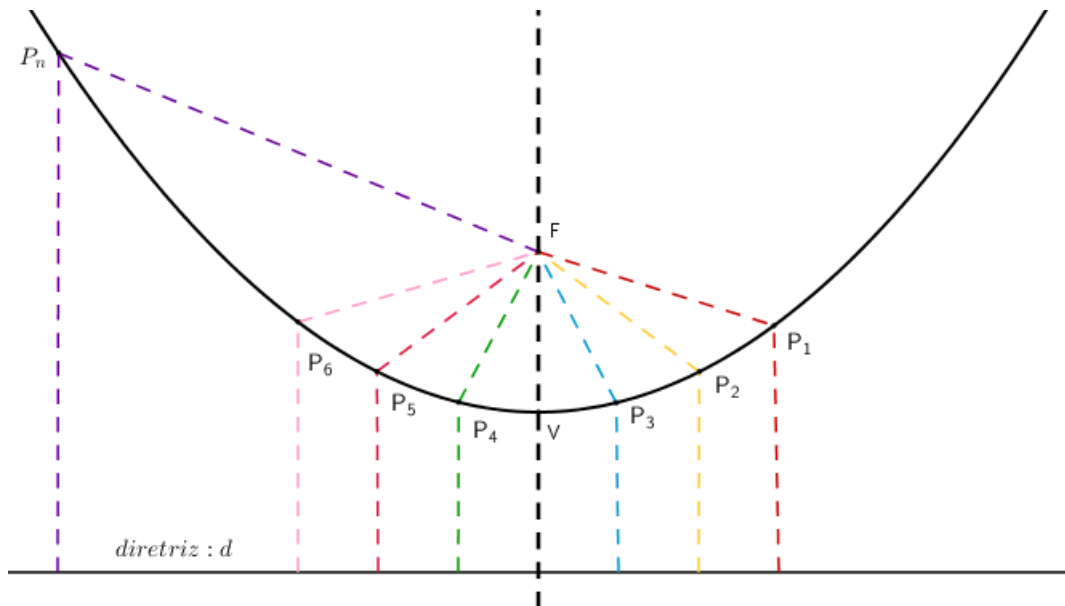


Figura 38: Parábola na Geometria Euclidiana.

A próxima parábola, figura [39](#), é composta pelos seus principais elementos.

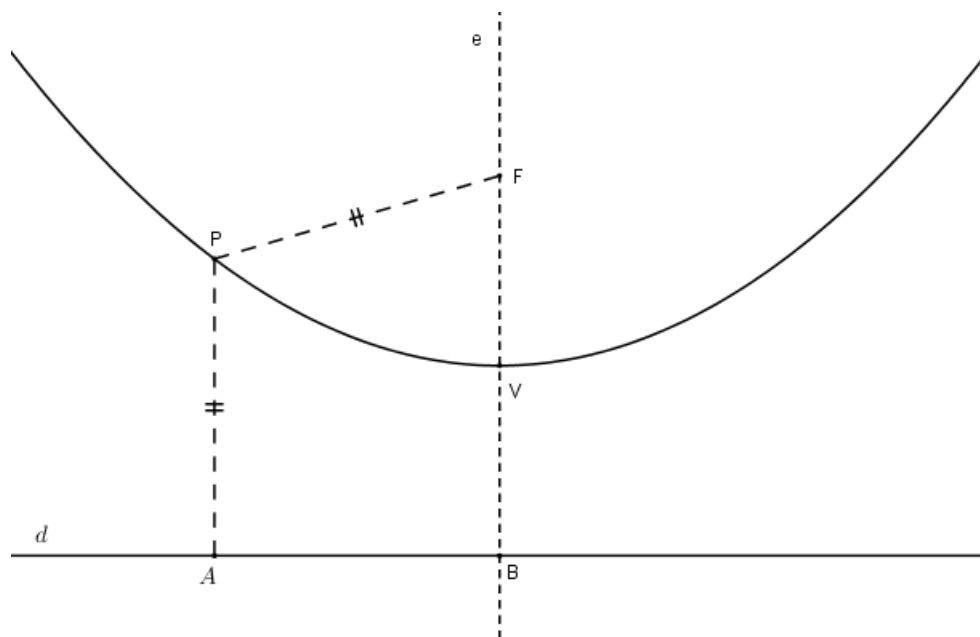


Figura 39: Principais elementos da parábola.

1. O foco da parábola é o ponto F.
2. O vértice da parábola é o ponto V.

3. A diretriz da parábola é a reta **d**.
4. O eixo de simetria ou reta focal é a reta **e**, ela é perpendicular a **d**, passando por **F** e **V**.
5. O parâmetro (**p**) da parábola é a distância entre o foco e a diretriz, ou seja, o valor de  $\overline{FB}$ . Temos:

$$d_E(F, V) = d_E(V, d) = \frac{p}{2}.$$

#### 4.1.1 Equações canônicas da parábola

Utilizando a definição de parábola, podemos deduzir equações cartesianas canônicas.

Seja o foco  $F(a, b)$ , a reta  $d : mx + ny + o = 0$  e o ponto  $P(x_p, y_p)$  que pertence à parábola, temos:

$$d_E(F, P) = d_E(d, P)$$

$$\sqrt{|x_p - a|^2 + |y_p - b|^2} = \frac{|mx_p + ny_p + o|}{\sqrt{m^2 + n^2}}. \quad (4.1)$$

Essa equação geral pode ser utilizada para qualquer inclinação da diretriz, vamos analisar os casos da diretriz ser paralela ao eixo das abscissas ou das ordenadas.

**Situação 1.** Diretriz paralela ao eixo das ordenadas e foco do lado direito da diretriz.

Da imagem 40, temos o foco  $F(x_0 + \frac{p}{2}, y_0)$ , a diretriz  $d : x - x_0 + \frac{p}{2} = 0$  e  $P(x_p, y_p)$ , o ponto que pertence à parábola, utilizando a definição de parábola, segue que:

$$\sqrt{\left|x_p - x_0 - \frac{p}{2}\right|^2 + |y_p - y_0|^2} = \frac{\left|x_p - x_0 + \frac{p}{2}\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2}}$$

elevando os dois lados ao quadrado, temos:

$$\left|x_p - x_0 - \frac{p}{2}\right|^2 + |y_p - y_0|^2 = \left(\left|x_p - x_0 + \frac{p}{2}\right|\right)^2.$$

Desenvolvendo  $\left|x_p - x_0 - \frac{p}{2}\right|^2$ , obtemos:

$$(x_p)^2 - 2x_p \cdot x_0 - p \cdot x_p + p \cdot x_0 + (x_0)^2 + \frac{p^2}{4}$$

e fazendo o mesmo com  $\left|x_p - x_0 + \frac{p}{2}\right|^2$ , obtemos:

$$(x_p)^2 - 2x_p \cdot x_0 + p \cdot x_p - p \cdot x_0 + (x_0)^2 + \frac{p^2}{4}.$$

Substituindo na igualdade e reduzindo as parcelas, passamos a ter:

$$|y_p - y_0|^2 = 2p \cdot x_p - 2p \cdot x_0$$

ou seja,

$$|y_p - y_0|^2 = 2p(x_p - x_0).$$

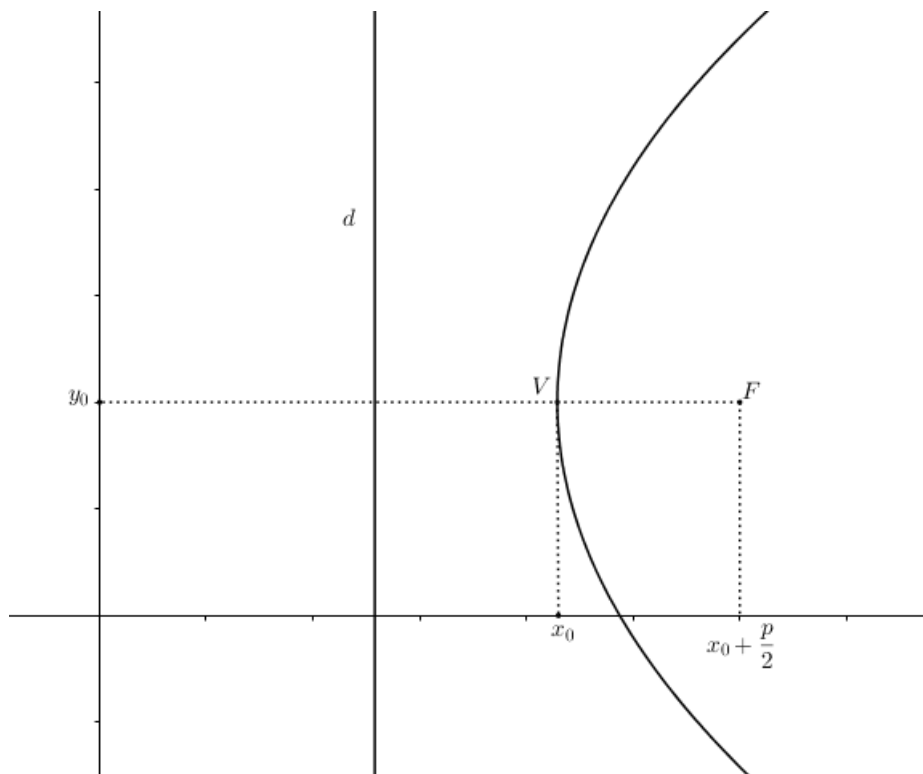


Figura 40: Parábola com diretriz paralela ao eixo das ordenadas e foco do lado direito da diretriz.

Vale observar que escrever a parábola como  $|y_p - y_0|^2 = 2p(x_p - x_0)$  facilita a visualização de seu gráfico. O vértice da parábola é encontrado ao resolver as equações  $y_p - y_0 = 0$  e  $x_p - x_0 = 0$ . Sabendo as coordenadas do vértice, podemos encontrar o foco que possui o mesmo valor da ordenada e está a  $\frac{p}{2}$  do valor da abscissa, sendo assim passamos a ter  $F = \left(x_0 + \frac{p}{2}, y_0\right)$ . A reta diretriz está antes do vértice e a uma distância de  $-\frac{p}{2}$ , ou seja  $d : x = x_0 - \frac{p}{2}$ .

**Situação 2.** Diretriz paralela ao eixo das ordenadas e foco do lado esquerdo da diretriz.

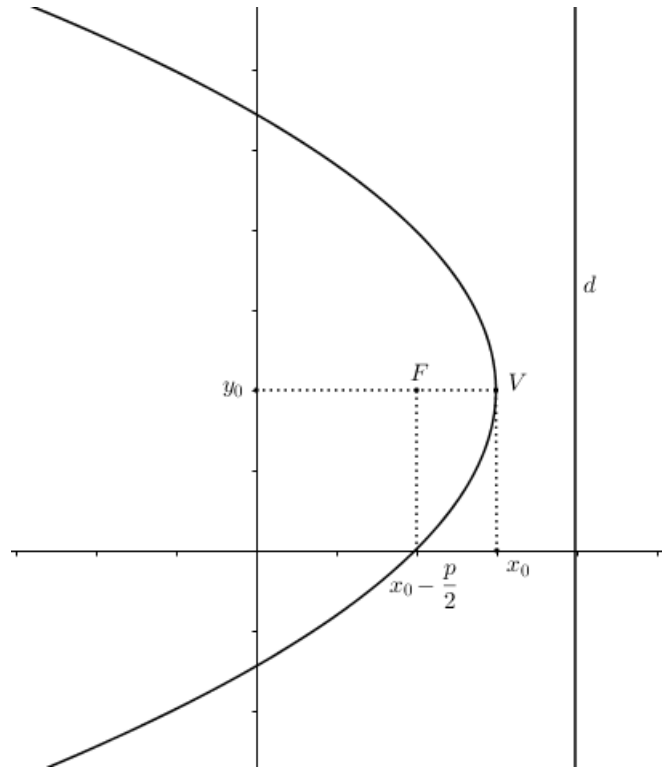


Figura 41: Parábola com diretriz paralela ao eixo das ordenadas e foco do lado esquerdo da diretriz.

Utilizando o mesmo raciocínio da primeira situação, é possível verificar que a equação passará a ser:

$$|y_p - y_0|^2 = -2p \cdot (x_p - x_0).$$

Observação: em especial, podemos ter a diretriz paralela ao eixo das ordenadas e o vértice da parábola ser o ponto  $V(0,0)$ ; dessa forma, passaremos a ter as equações abaixo e seus gráficos.

a) Na parábola com foco do lado esquerdo, figura 42, vale a equação:

$$y_p^2 = -2p \cdot x_p.$$

b) Na parábola com foco do lado direito, figura 43, vale a equação:

$$y_p^2 = 2p \cdot x_p.$$

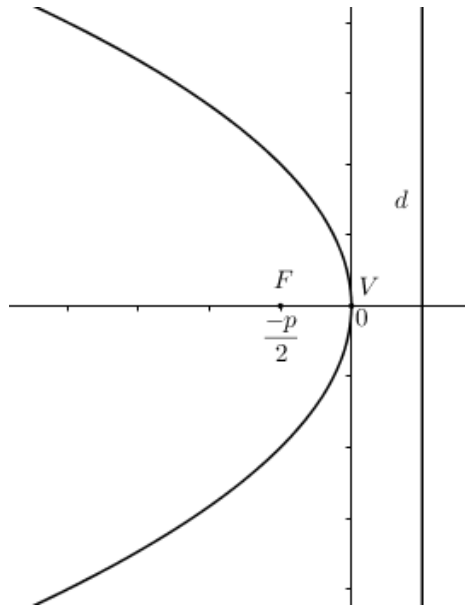


Figura 42: Parábola com diretriz paralela ao eixo das ordenadas,  $V(0, 0)$  e foco à esquerda.

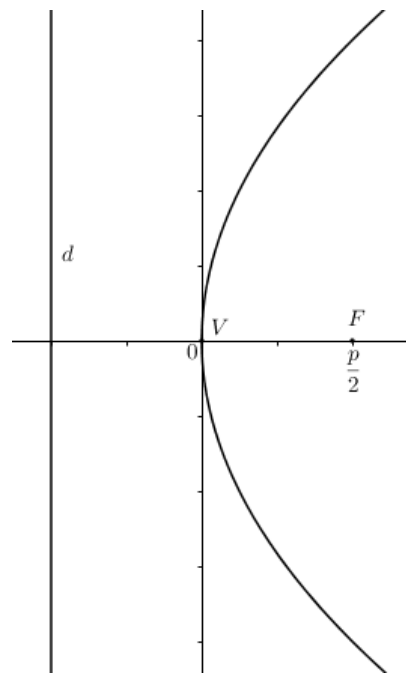


Figura 43: Parábola com diretriz paralela ao eixo das ordenadas,  $V(0, 0)$  e foco à direita.



**Situação 3.** Diretriz paralela ao eixo das abscissas e foco na parte superior da diretriz.

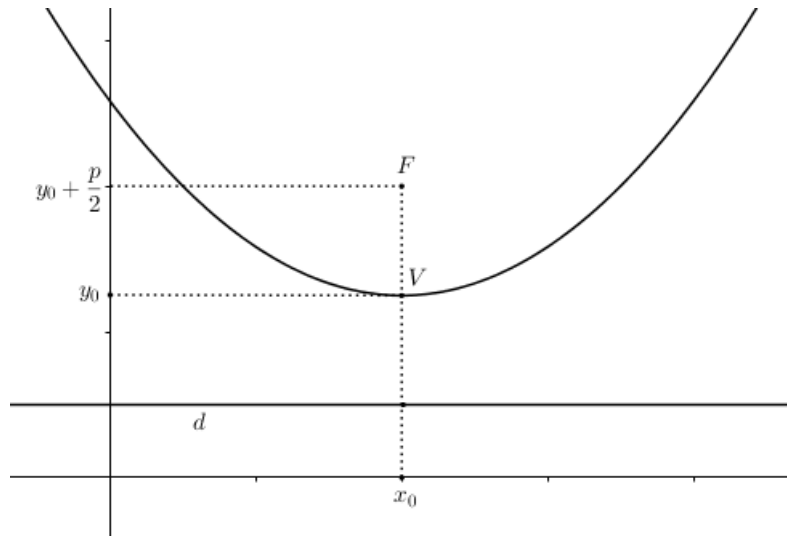


Figura 44: Parábola com diretriz paralela ao eixo das abscissas e foco na parte superior.

Da imagem 44, temos o foco  $F(x_0, y_0 + \frac{p}{2})$ , a diretriz  $d : y - y_0 + \frac{p}{2} = 0$  e  $P(x_p, y_p)$ , o ponto que pertence à parábola, temos:

$$\sqrt{|x_p - x_0|^2 + |y_p - y_0 - \frac{p}{2}|^2} = \frac{|y_p - y_0 + \frac{p}{2}|}{\sqrt{1^2 + 0^2}}$$

elevando os dois lados ao quadrado, segue que:

$$|x_p - x_0|^2 + |y_p - y_0 - \frac{p}{2}|^2 = \left(|y_p - y_0 + \frac{p}{2}|\right)^2.$$

Desenvolvendo  $|y_p - y_0 - \frac{p}{2}|^2$ , encontramos:

$$(y_p)^2 - 2y_p \cdot y_0 - p \cdot y_p + p \cdot y_0 + (y_0)^2 + \frac{p^2}{4}$$

e fazendo o mesmo com  $|y_p - y_0 + \frac{p}{2}|^2$ , encontramos:

$$(y_p)^2 - 2y_p \cdot y_0 + p \cdot y_p - p \cdot y_0 + (y_0)^2 + \frac{p^2}{4}.$$

Substituindo na igualdade e reduzindo as parcelas, segue que:

$$|x_p - x_0|^2 = 2p \cdot y_p - 2p \cdot y_0$$

ou seja,

$$|x_p - x_0|^2 = 2p \cdot (y_p - y_0).$$

**Situação 4.** Diretriz paralela ao eixo das abscissas e foco na parte inferior da diretriz.

Utilizando o mesmo raciocínio da terceira situação, é possível verificar que a equação passará a ser:

$$|x_p - x_0|^2 = -2p \cdot (y_p - y_0).$$

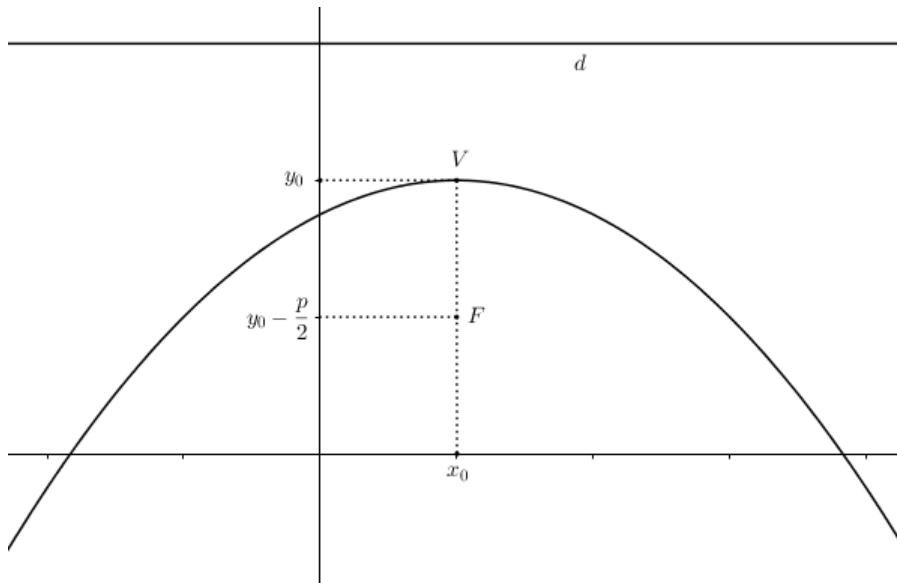


Figura 45: Parábola com diretriz paralela ao eixo das abscissas e foco na parte inferior.

Observação: em especial, podemos ter a diretriz paralela ao eixo das abscissas e o vértice da parábola ser o ponto  $V(0,0)$ , dessa forma passaremos a ter as equações abaixo.

a) Na parábola da figura 46 com foco na parte superior, vale a equação:

$$x_p^2 = -2p \cdot y_p.$$

b) Na parábola da figura 47 com foco na parte inferior, vale a equação:

$$x_p^2 = 2p \cdot y_p.$$

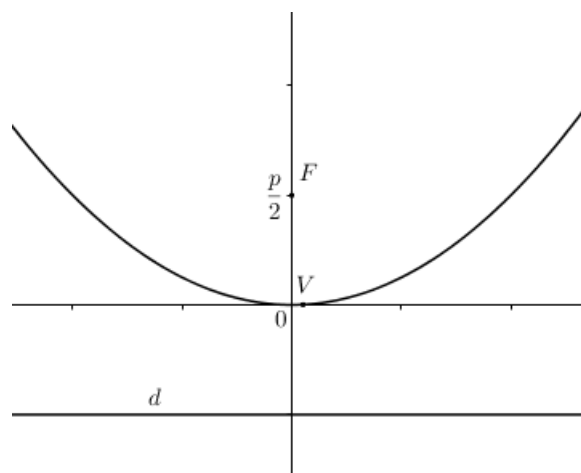


Figura 46: Parábola com diretriz paralela ao eixo das abscissas,  $V(0,0)$  e foco na parte superior.

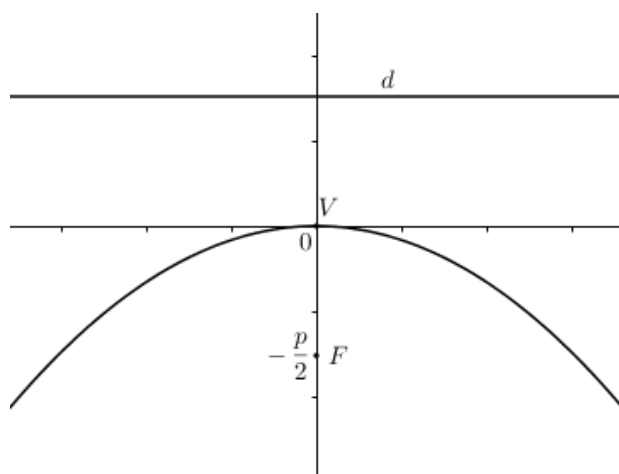


Figura 47: Parábola com diretriz paralela ao eixo das abscissas,  $V(0,0)$  e foco na parte inferior.

#### 4.2 PARÁBOLA NA GEOMETRIA DO TAXISTA

Utilizando a definição [4.1](#) de parábola, é necessário colocar que a distância a ser trabalhada será a do taxista ( $d_T$ ), como segue:

$$Q = \{P \in \mathbb{R}^2 / d_T(P, F) = d_T(P, d)\}.$$

Para encontrar a equação geral da táxi parábola, sendo o foco  $F(a, b)$ , a reta diretriz  $d : mx + ny + o = 0$  e o ponto  $P(x_p, y_p)$  que pertence à parábola, temos:

$$d_T(F, P) = |x_p - a| + |y_p - b|$$

e

$$d_T(P, d) = \frac{|mx_p + ny_p + o|}{\max\{|m|; |n|\}}.$$

Segue que:

$$|x_p - a| + |y_p - b| = \frac{|mx_p + ny_p + o|}{\max\{|m|; |n|\}}. \quad (4.2)$$

Dividiremos em três casos os exemplos de parábolas, de acordo com a divisão realizada na apresentação de distância entre ponto e reta.

**Exemplo 4.2.1.** Escolheremos uma reta com  $|m| = 1$ .

Seja a diretriz  $d : x - y + 3 = 0$ , o foco  $F(2, 3)$  e o ponto  $A(x, y)$  que pertença à parábola. Substituindo em (4.2), temos:

$$|x - 2| + |y - 3| = \frac{|x - y + 3|}{\max\{|1|; |-1|\}}.$$

Para resolver a equação modular, será necessário separar em casos, levando em consideração se o valor que está dentro do módulo será positivo ou negativo. Para facilitar, colocaremos no plano cartesiano as informações que estão dentro de cada módulo e separaremos por regiões.

Segue na figura 48 as sete regiões possíveis.

Considerando que a diretriz é a reta  $y = x + 3$  e o foco  $F(2, 3)$  está à sua direita, concluímos que as regiões 1, 2 e 3 não possuem pontos que pertencem à parábola. Logo, resta analisar as regiões 4, 5, 6 e 7.

Analisando  $|x - 2|$ , temos  $x - 2 \geq 0$  na regiões 4 e 7, e, nas demais, ele será menor do que zero.

Para  $|y - 3|$ , temos  $y - 3 \geq 0$  na regiões 4 e 5, e, nas demais, ele será menor do que zero.

Por fim, para  $|x - y + 3|$ , temos  $x - y + 3 \geq 0$  nas quatro regiões que estamos analisando.

Podemos montar as equações sem os módulos da seguinte maneira:

**Região 4.**

$$x - 2 + y - 3 = x - y + 3$$

$$y = 4.$$

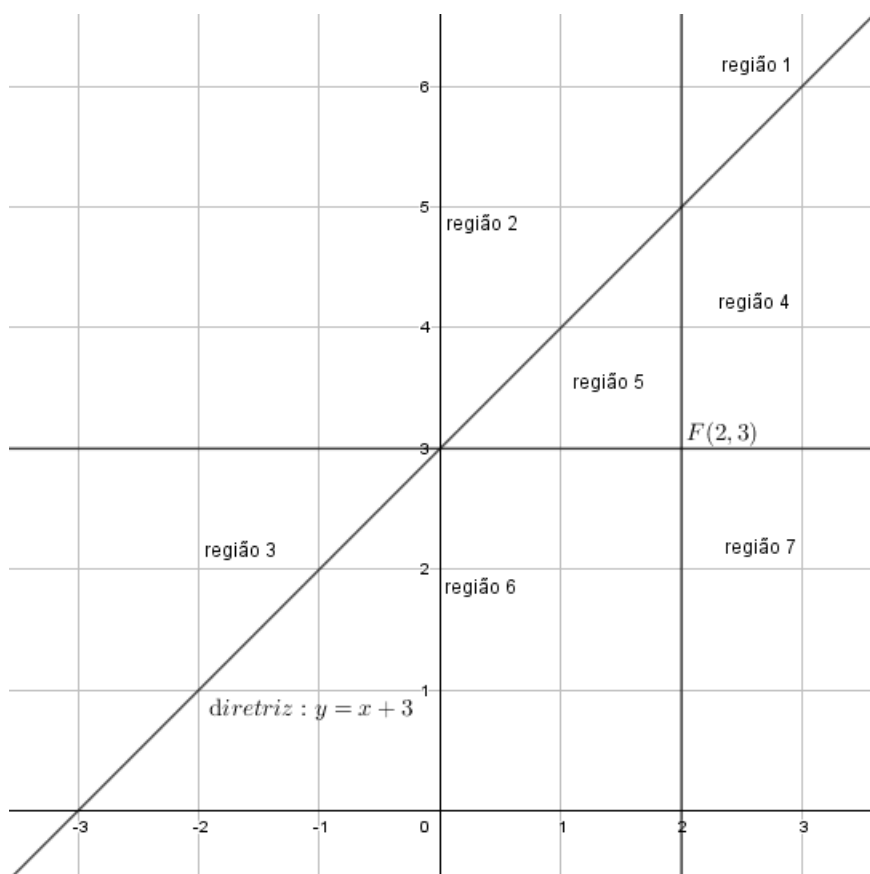


Figura 48: Regiões com reta diretriz:  $y = x + 3$ .

**Região 5.**

$$-x + 2 + y - 3 = x - y + 3$$

$$y = x + 2.$$

**Região 6.**

$$-x + 2 - y + 3 = x - y + 3$$

$$x = 1.$$

**Região 7.**

$$x - 2 - y + 3 = x - y + 3$$

$$-2 = 0 \rightarrow \text{absurdo!}$$

Colocando os resultados obtidos no plano cartesiano, considerando as restrições de cada região, construímos a parábola da figura [49](#) com diretriz  $y = x + 3$  e o foco  $F(2, 3)$  na Geometria do Taxista.

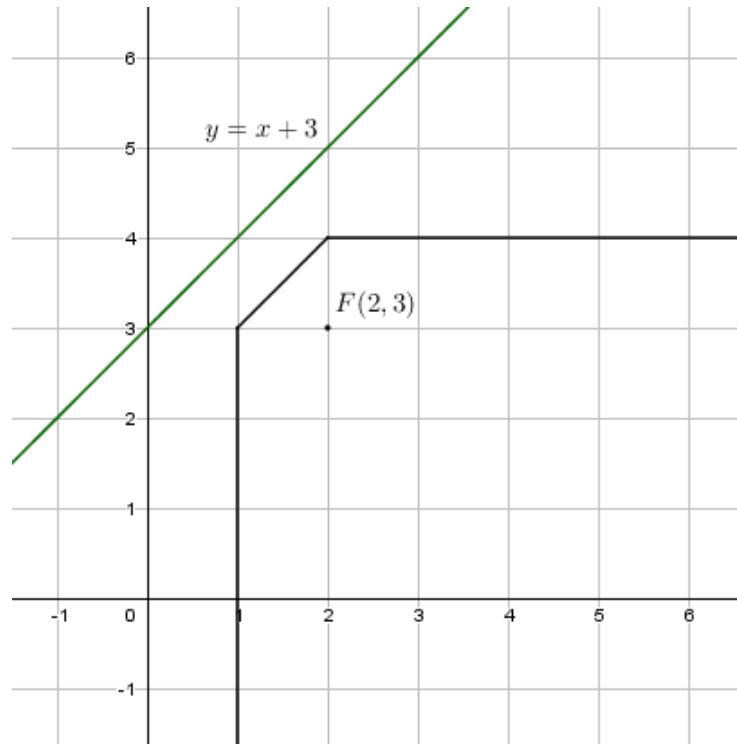


Figura 49: Parábola com reta diretriz:  $y = x + 3$ .

**Exemplo 4.2.2.** Escolheremos uma reta com  $|m| > 1$ .

Seja a diretriz  $d : 2x + y = 0$ , o foco  $F(5, 2)$  e o ponto  $A(x, y)$  que pertença à parábola.

Substituindo na equação 4.2 da parábola, temos:

$$|x - 5| + |y - 2| = \frac{|2x + y|}{\max\{|2|; |1|\}}$$

$$|x - 5| + |y - 2| = \frac{|2x + y|}{2}.$$

Separando em regiões no plano cartesiano 50 e considerando apenas aquelas que estão do mesmo lado do foco, em relação à diretriz, temos:

Analisando  $|x - 5|$ , temos  $x - 5 \geq 0$  na regiões 3 e 4, e, nas demais, ele será menor do que zero.

Para  $|y - 2|$ , temos  $y - 2 \geq 0$  na regiões 1 e 3, e, nas demais, ele será menor do que zero.

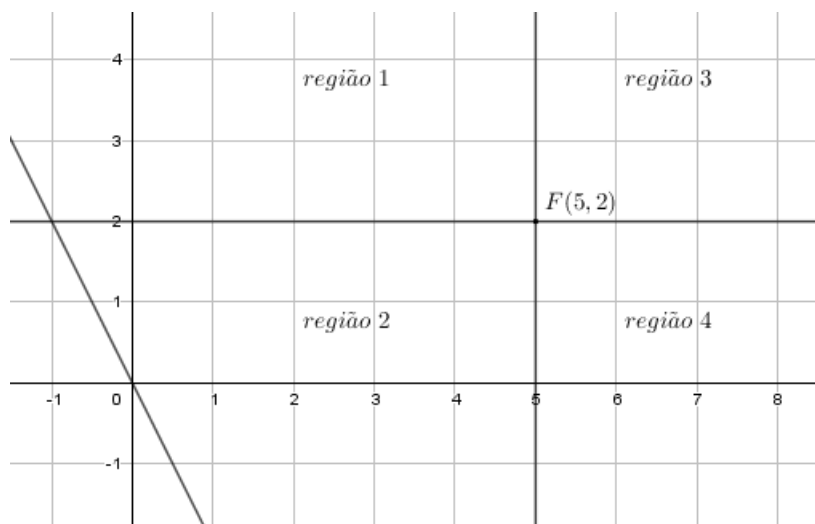


Figura 50: Regiões com reta diretriz:  $y = -2x$ .

Por fim, para  $|2x + y|$ , temos  $2x + y \geq 0$  em todas as regiões.

Podemos montar as equações sem os módulos da seguinte maneira:

**Região 1.**

$$\begin{aligned} -x + 5 + y - 2 &= \frac{2x + y}{2} \\ y &= 4x - 6. \end{aligned}$$

**Região 2.**

$$\begin{aligned} -x + 5 - y + 2 &= \frac{2x + y}{2} \\ y &= \frac{-4x + 14}{3}. \end{aligned}$$

**Região 3.**

$$\begin{aligned} x - 5 + y - 2 &= \frac{2x + y}{2} \\ y &= 14. \end{aligned}$$

**Região 4.**

$$\begin{aligned} x - 5 - y + 2 &= \frac{2x + y}{2} \\ y &= -2. \end{aligned}$$

Colocando os resultados obtidos no plano cartesiano, considerando as restrições de cada região, construímos a parábola da figura [51](#) com diretriz  $y = -2x$  e o foco  $F(5, 2)$  na Geometria do Taxista.

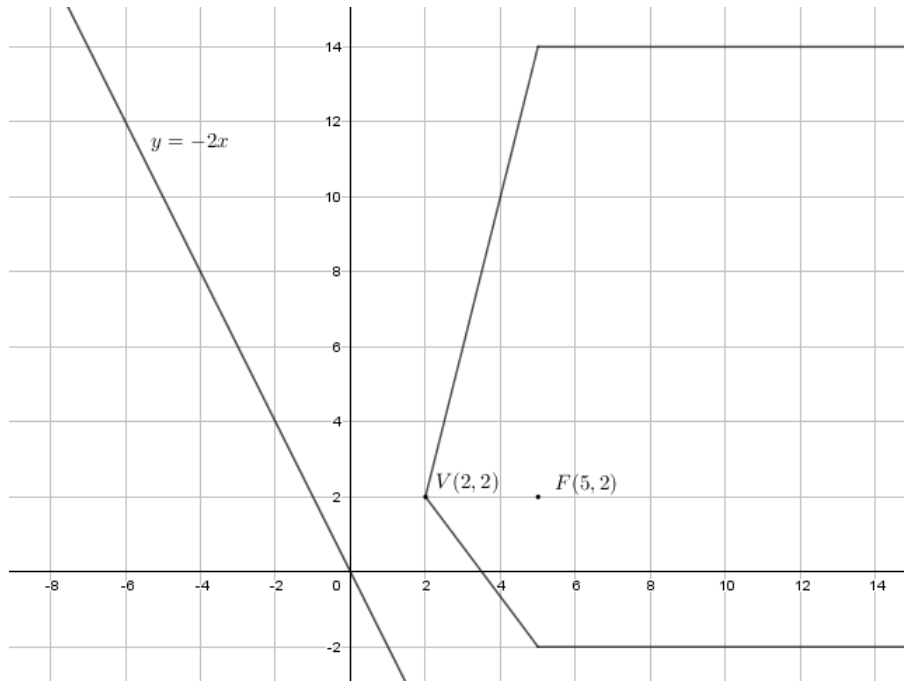


Figura 51: Parábola com reta diretriz:  $y = -2x$ .

**Exemplo 4.2.3.** Para finalizar, escolheremos uma reta com  $|m| < 1$ .

Seja a diretriz  $d : y + 4 = 0$ , o foco  $F(3, -1)$  e o ponto  $A(x, y)$  que pertença à parábola.

Substituindo na equação da parábola [4.2](#), temos:

$$|x - 3| + |y + 1| = \frac{|y + 4|}{\max\{|0|; |1|\}}$$

$$|x - 3| + |y + 1| = |y + 4|.$$

Separando em regiões no plano cartesiano, ver figura [52](#), e considerando apenas aquelas que estão do mesmo lado do foco, em relação à diretriz, temos:

Analisando  $|x - 3|$ , temos  $x - 3 \geq 0$  na regiões 3 e 4, e, nas demais, ele será menor do que zero.

Para  $|y + 1|$ , temos  $y + 1 \geq 0$  na regiões 1 e 3, e, nas demais, ele será menor do que zero.

Por fim, para  $|y + 4|$ , temos  $y + 4 \geq 0$  em todas as regiões.

Podemos montar as equações sem os módulos da seguinte maneira:



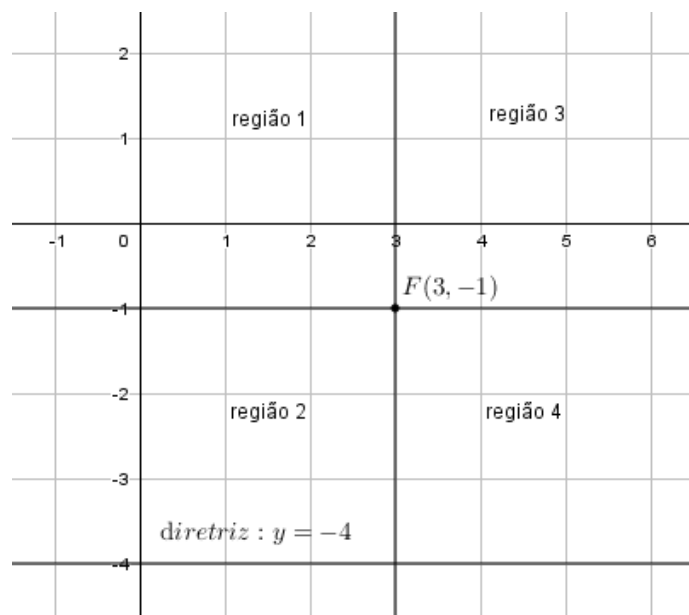


Figura 52: Regiões com reta diretriz:  $y = -4$ .

**Região 1.**

$$-x + 3 + y + 1 = y + 4$$

$$x = 0.$$

**Região 2.**

$$-x + 3 - y - 1 = y + 4$$

$$y = \frac{-x}{2} - 1.$$

**Região 3.**

$$x - 3 + y + 1 = y + 4$$

$$x = 6.$$

**Região 4.**

$$x - 3 - y - 1 = y + 4$$

$$y = \frac{x}{2} - 4.$$

Colocando os resultados obtidos no plano cartesiano, considerando as restrições de cada região, construímos a parábola da figura [53](#) com diretriz  $y = -4$  e o foco  $F(3, -1)$  na Geometria do Taxista.

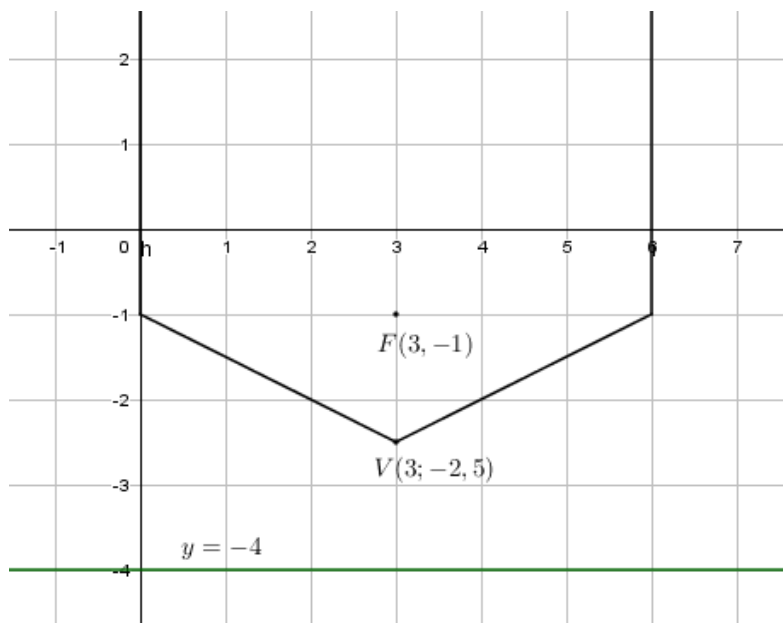


Figura 53: Parábola com reta diretriz:  $y = -4$ .

---

## SUGESTÃO DE SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

---

O objetivo desta sequência de atividades é propor um trabalho de revisão de parte do conteúdo de matemática abordado no ensino fundamental II e médio por meio da Geometria do Taxista. Outras atividades podem ser elaboradas, utilizando a Geometria do Taxista para sanar determinadas lacunas dos alunos.

Após o término do conteúdo do 3º ano do Ensino Médio, é comum que haja revisões, acreditamos que, se ela acontecer através da apresentação de um novo conceito, poderá ser mais atrativa e conseguirá atingir um número maior de alunos. Algumas atividades poderão ser realizadas em outros anos, inclusive no Ensino Fundamental II com poucas adaptações.

Para a realização das atividades, será necessário ter lápis, borracha, caderno, régua, compasso e folha quadriculada.

**Recomendações metodológicas:** em todas as atividades é interessante dividir a turma em duplas ou trios e sugerimos a mudança desses grupos entre uma atividade e outra.

A primeira atividade possui quatro partes, sugerimos aproximadamente 15 minutos para resolução de cada uma delas. A segunda atividade foi dividida em duas partes, sugerimos aproximadamente 15 minutos para cada uma delas. Por se tratar de uma atividade simples, uma sugestão é aproveitar o tema e rever outros pontos na Geometria Euclidiana como propriedades dos triângulos equiláteros e isósceles, assim como abordar semelhança de triângulos e outros pontos que o professor considerar importante. A terceira atividade conta com três partes, sugerimos aproximadamente 25 minutos para cada uma delas. A quarta atividade também possui três partes, sugerimos aproximadamente 15 minutos para as duas primeiras e 50 minutos para a terceira parte. A

última atividade foi dividida em três partes, sugerimos aproximadamente 15 minutos para a primeira e 30 minutos para as demais.

É fundamental realizar a discussão/correção de cada uma das partes das atividades antes de iniciar a outra. É importante que, ao finalizar cada parte, os alunos tenham compreendido o que foi abordado. Outros pontos poderão ser colocados como exemplo para auxiliar na compreensão.

### 5.1 PRIMEIRA ATIVIDADE - INICIANDO A GEOMETRIA DO TAXISTA

**Objetivos na Geometria do Taxista:** ampliar o conhecimento dos alunos apresentando outra maneira de medir distância entre dois pontos e deduzir a fórmula de distância entre dois pontos utilizada na Geometria do Taxista.

**Objetivos gerais:** revisar a colocação de pontos no plano cartesiano, fórmula de Pitágoras, utilização da fórmula de distância entre dois pontos, resolução de equações do primeiro grau, revisar e aplicar o valor absoluto (módulo), ampliar a visão do aluno na generalização de situações e demonstrações de fórmulas.

**Possíveis dificuldades:**

- i) Na terceira questão, os alunos poderão apresentar dificuldades na demonstração, alguns lembrarão da fórmula, porém não saberão demonstrar.
- ii) Na oitava questão alguns alunos poderão ter dificuldades para encontrar uma fórmula e outros poderão encontrá-la de forma incompleta sem ter colocado os módulos.
- iii) Nas questões 9 e 10, os alunos que compreenderam a necessidade de fazer a diferença entre os valores das abscissas e somar com a diferença das ordenadas, mas não usaram os módulos, poderão pensar que seu raciocínio estava completamente errado e ficar desmotivados.
- iv) Na questão 11, alguns alunos terão dificuldades com a parte algébrica, eventualmente pode ser interessante fazer alguma passagem para a turma, evitando que haja desmotivação na tentativa de resolução.

**Descrição:**

#### Primeira parte

Resolva os itens abaixo, utilizando o papel quadriculado para representar o plano cartesiano.

1. Monte um plano cartesiano, sendo cada quadradinho uma unidade e o eixo das abscissas e das ordenadas devem conter o intervalo de  $[-2,7]$ .
2. Coloque os pontos no plano cartesiano:  $A(-1,2)$ ,  $B(6,2)$ ,  $C(6,1)$ ,  $D(-1,-1)$  e  $E(2,6)$ .
3. Demonstre a fórmula que determina a distância (euclidiana) entre dois pontos.

Sugestão: usando a figura 54, demonstre  $d_E(A, B)$  para  $A(x_a, y_a)$  e  $B(x_b, y_b)$ . É possível encontrar um triângulo retângulo, sendo seus catetos possíveis de representar na figura, e a hipotenusa será a distância procurada.

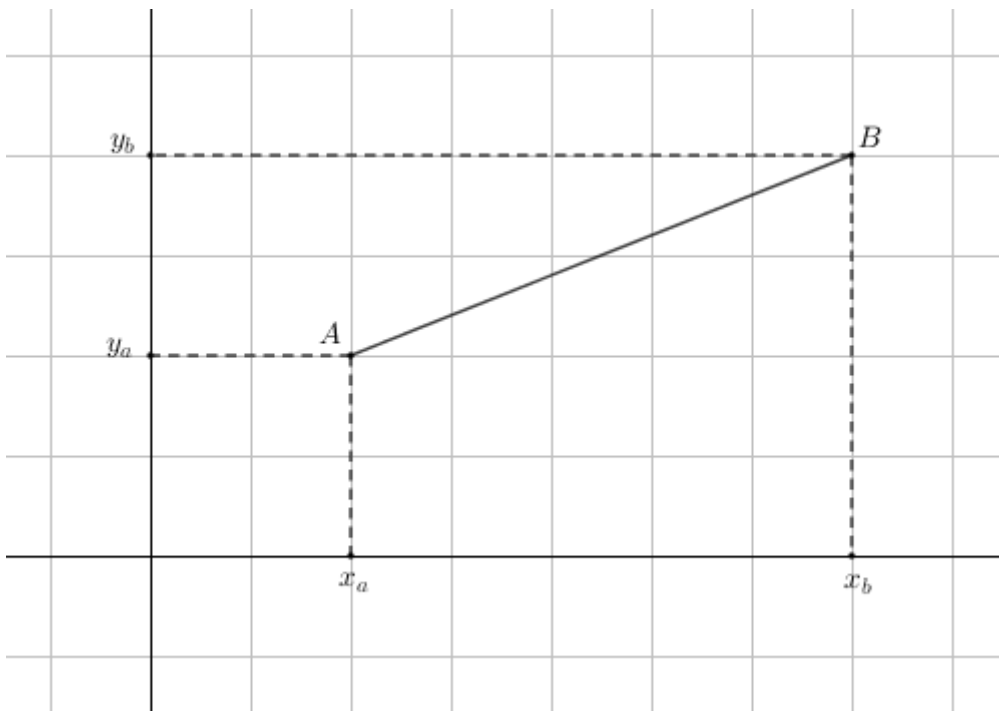


Figura 54: Distância entre dois pontos

4. Calcule as distâncias solicitadas e ligue cada par de pontos.

Calcular  $d_E(A, B)$ ,  $d_E(B, C)$ ,  $d_E(A, D)$ ,  $d_E(A, E)$  e  $d_E(D, E)$ .

### Segunda parte

5. Considere que esse plano cartesiano é a planta de uma cidade, em que todas as suas quadras possuem a mesma dimensão e podemos desconsiderar a largura

- das ruas para realizar os cálculos. Quais dos caminhos realizados (pontos ligados na questão anterior) seriam possíveis de fazer, considerando que podemos andar apenas pelas ruas (não é possível andar no meio das quadras)?
- Qual seria a distância entre os pontos da questão 5, se considerarmos o menor caminho possível de realizar, andando pelas ruas?
  - Utilizando flechas para indicar que andou para frente ( $\rightarrow$ ), para trás ( $\leftarrow$ ), para baixo ( $\downarrow$ ) ou para cima ( $\uparrow$ ), represente o caminho realizado nos casos da questão 6.

Por exemplo, para representar o caminho percorrido na figura 55, teremos:  $\rightarrow$ ,  $\rightarrow$ ,  $\uparrow$ ,  $\rightarrow$ ,  $\uparrow$ .

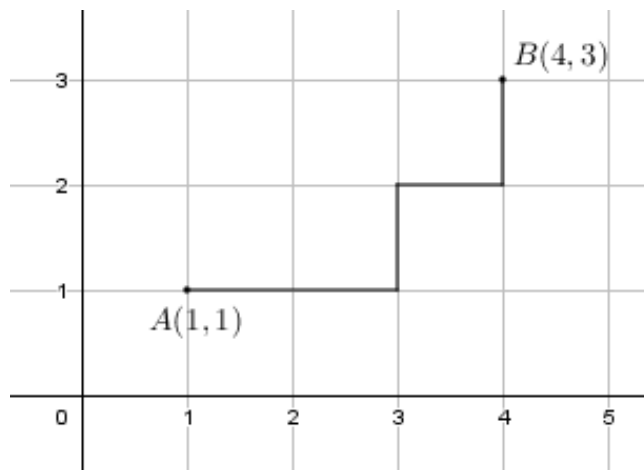


Figura 55: Representação por setas

**Observação para o professor:** montar na lousa algumas das possíveis soluções, valorizando o fato de que sempre andaremos uma determinada quantidade para frente e uma determinada quantidade para cima. Essas quantidades serão as mesmas independentemente da escolha do caminho, desde que ele seja o menor.

### Terceira parte

- Verifique uma fórmula para calcular esse tipo de distância.  
Sugestão: encontre uma fórmula para calcular a distância de  $A(x_a, y_a)$  até  $B(x_b, y_b)$  e de  $B(x_b, y_b)$  até  $A(x_a, y_a)$ , usando a imagem 54.
- Verifique se a fórmula da questão 8 vale para as demais distâncias que não foram necessárias calcular na questão 6.

10. A fórmula encontrada serviria para calcular  $d_E(E, A)$  e  $d_E(E, D)$ ?

**Observação para o professor:** nesse momento, caberá uma discussão a respeito do uso do módulo. Será importante definir e dar exemplos sobre esse assunto. Uma sugestão é utilizar as outras distâncias que não foram solicitadas na décima questão como exemplos. Caso os alunos tenham dificuldades na décima questão, é possível estabelecer uma relação com a sétima, e eles montarem as flechas que indicam o percurso. Aproveite esse momento para dar nome a essa nova geometria, defina a distância que eles conheceram como a distância do taxista ( $d_T$ ) e coloque que a distância euclidiana será escrita como  $d_E$ .

### Quarta parte

11. Demonstrar que  $d_T \geq d_E$ .

**Observação para o professor:** é fundamental que o aluno compreenda nessa atividade o conceito de distância entre dois pontos para quem só pode andar pelas ruas. Abra uma discussão com os alunos sobre qual distância representa o cotidiano e pondere com situações que precisarão ser desprezadas (como a largura da rua ou, se estivéssemos de carro, o fato de a rua ser “mão” ou não).

## 5.2 SEGUNDA ATIVIDADE - CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

**Objetivos na Geometria do Taxista:** verificar se os casos de congruências da Geometria Euclidiana são válidos na Geometria do Taxista.

**Objetivos gerais:** rever os casos de congruência e classificações de triângulos, retomar propriedades dos triângulos isósceles e equiláteros.

**Possíveis dificuldades:** essa atividade não apresenta um grau elevado de dificuldade, alguns alunos podem não lembrar da relação que o maior ângulo de um triângulo é oposto ao maior lado, da mesma forma o menor ângulo é oposto ao menor lado. Os demais itens devem ser resolvidos com certa facilidade por todos.

**Descrição:**

**Primeira parte**

1. Na Geometria Euclidiana, classifique os triângulos em relação aos seus lados, seus ângulos e escreva o(s) caso(s) de congruência(s).

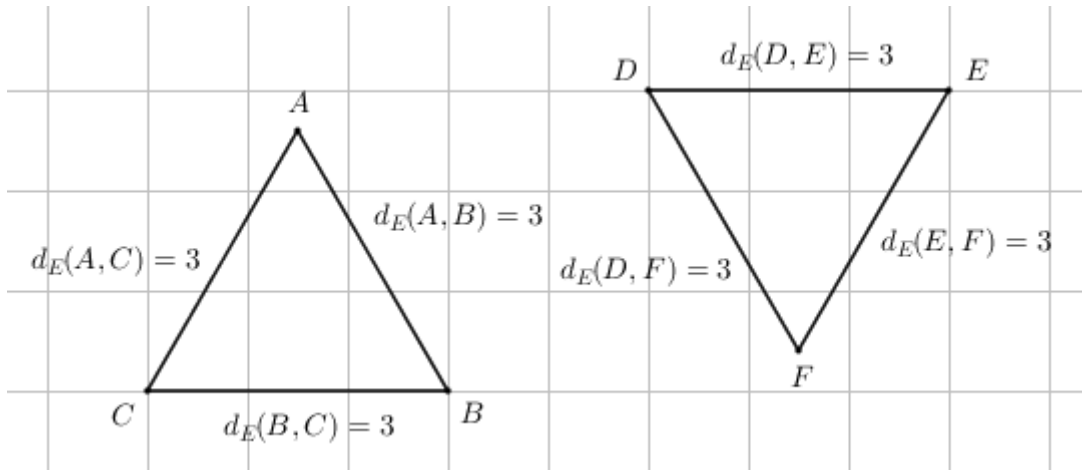


Figura 56: Casos de congruências - I

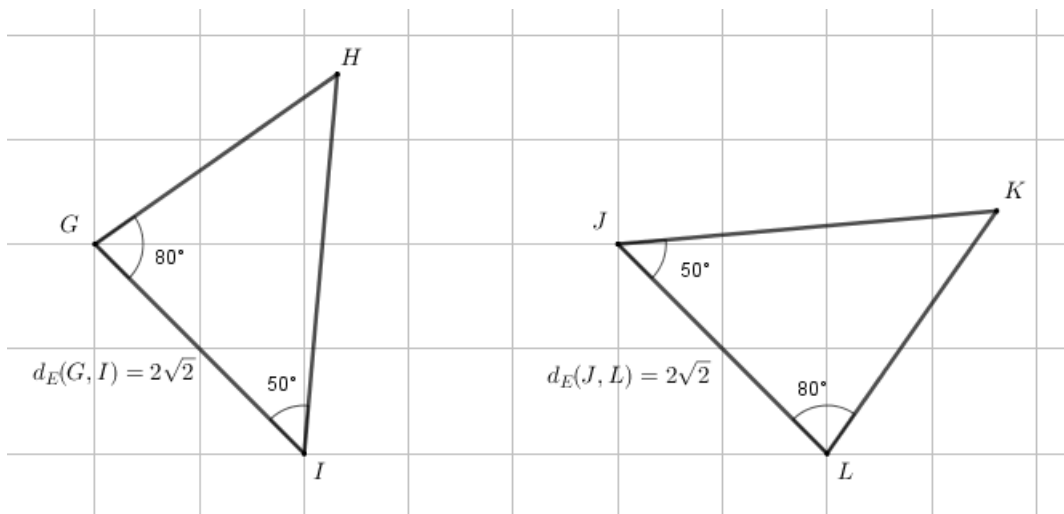


Figura 57: Casos de congruências - II



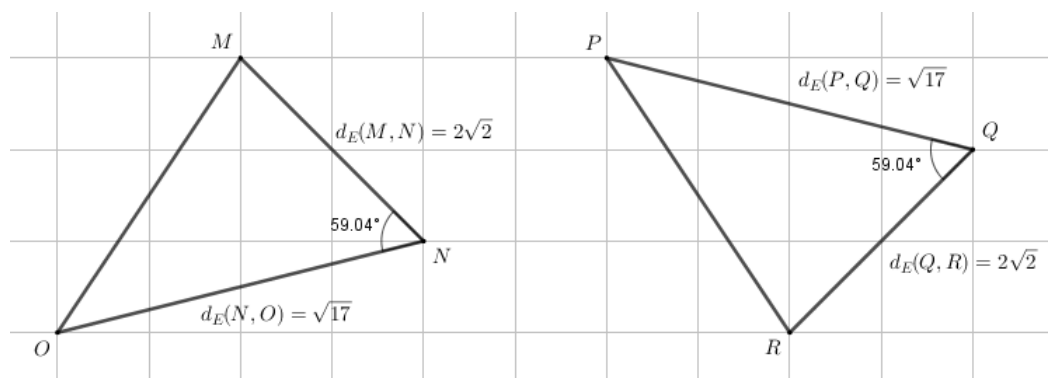


Figura 58: Casos de congruências - III

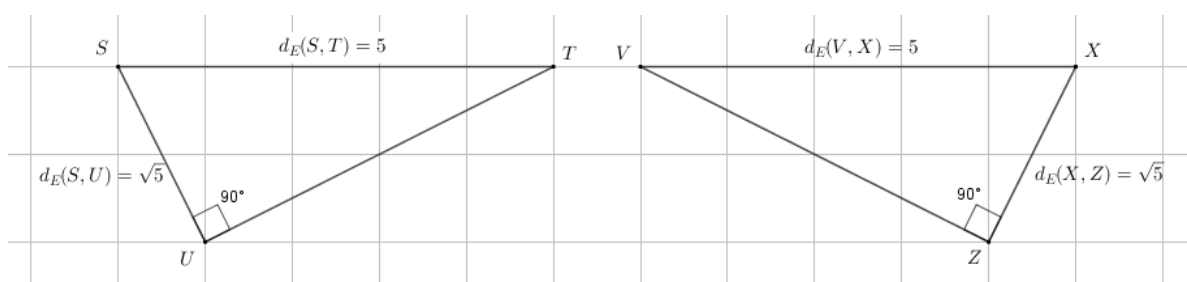


Figura 59: Casos de congruências - IV

2. Existe mais algum caso de congruência? Se a resposta for positiva, dê um exemplo.

**Observação para o professor:** o caso  $LAA_0$  não foi colocado, portanto é importante que ele seja citado, caso os alunos não lembrem. Uma sugestão é aproveitar a classificação dos triângulos e falar sobre as propriedades que são importantes na resolução de problemas na Geometria Euclidiana.

### Segunda parte

3. Considerando a Geometria do Taxista, analise os pares de triângulos, nas imagens [60](#) e [61](#), e conclua se cada um dos casos de congruência da primeira parte da atividade valem nessa nova geometria.
4. Observando o triângulo  $\triangle ABC$ , da figura [60](#), você perceberá que duas regras da Geometria Euclidiana não valem na Geometria do Taxista, uma delas é uma fórmula bastante conhecida e a outra é uma relação que existe entre ângulos opostos a lados, quais são elas?

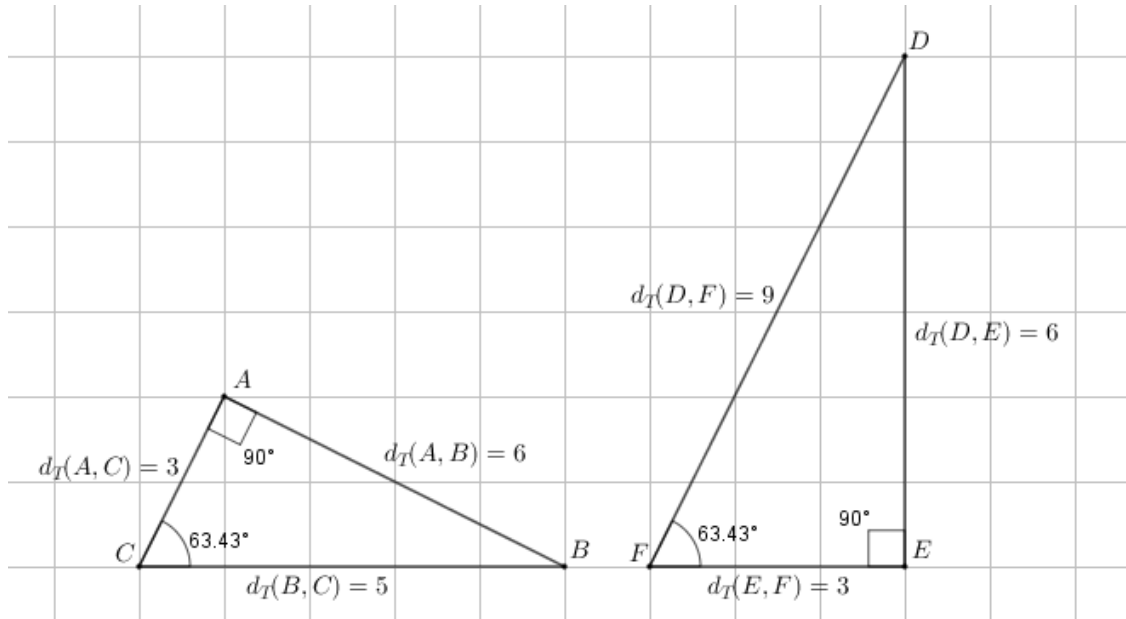


Figura 60: Casos de congruências - V

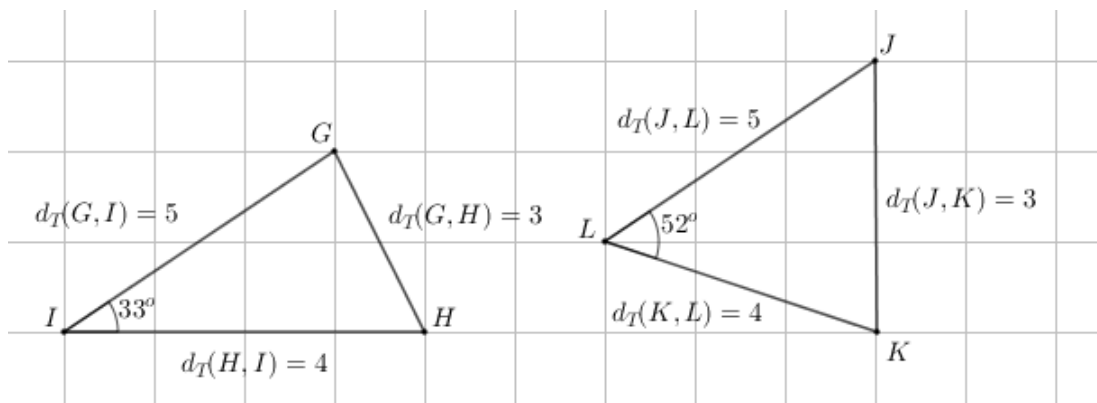


Figura 61: Casos de congruências - VI

**Observação para o professor:** os alunos perceberão com facilidade que estamos mencionando a fórmula de Pitágoras; já a relação que não vale é que o maior ângulo de um triângulo é oposto ao maior lado, da mesma forma o menor ângulo é oposto ao menor lado.

5. Verifique quais propriedades da Geometria Euclidiana os triângulos  $\triangle LMN$  e  $\triangle OPQ$ , da figura 62, não satisfazem.

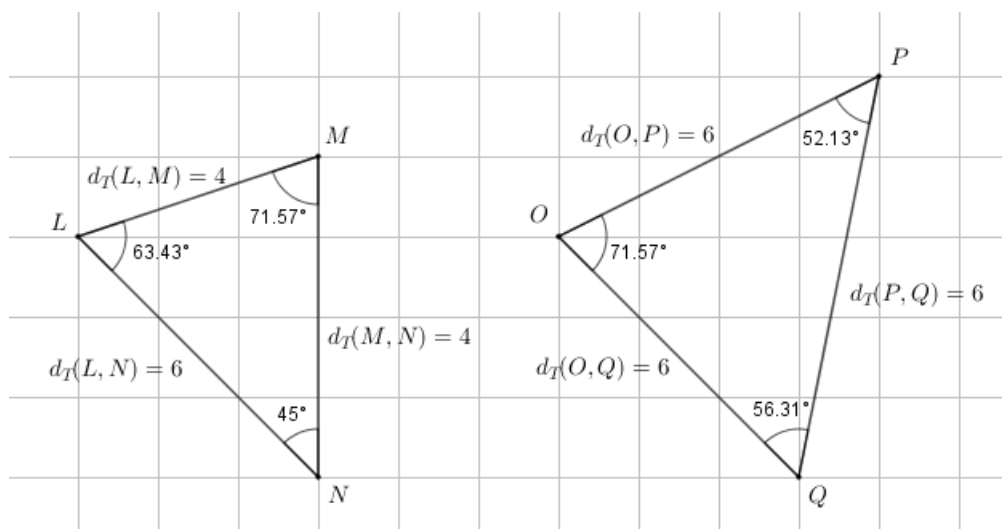


Figura 62: Triângulos.

**Observação para o professor:** o  $\triangle LMN$  é isósceles, porém seus ângulos da base não possuem a mesma medida. O triângulo  $\triangle OPQ$  é equilátero, porém seus ângulos não medem  $60^\circ$ . Outras situações podem ser levantadas, estando corretas é importante validar e estimular para que essas duas sejam mencionadas.

### 5.3 TERCEIRA ATIVIDADE - DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA

**Objetivos na Geometria do Taxista:** introduzir o conceito e a fórmula de distância entre ponto e reta.

**Objetivos gerais:** revisar o conceito e a fórmula de distância entre ponto e reta, rever equação geral da reta e conhecer a função máximo.

**Possíveis dificuldades:**

- i) Alguns alunos podem não se lembrar da fórmula que calcula a distância entre ponto e reta.
- ii) Caso algum aluno não perceba que existe um segmento de pontos no item (c) da segunda questão, estimule-o mostrando os extremos para ver se ele compreende a situação.

- iii) O item (d) da segunda questão precisa de condução do professor, em geral é difícil para o aluno perceber esse tipo de relação. Dê mais exemplos para facilitar esse item.
- iv) Por se tratar de uma nova fórmula com uma função que provavelmente eles nunca viram (máximo), explique esse item com exemplos.

**Descrição:**

**Primeira parte**

1. Resolva os itens abaixo, utilizando seus conhecimentos da Geometria Euclidiana.
- a) Dada a reta  $r : y - 5 = 0$  e os pontos  $A(-2, 3)$  e  $B(4, 6)$ , determine  $d_E(A, r)$  e  $d_E(B, r)$ .
- b) Dada a reta  $s : -2x + y - 4 = 0$  e os pontos  $A(-2, 3)$  e  $B(4, 6)$ , determine  $d_E(A, s)$  e  $d_E(B, s)$ .
- c) Dada a reta  $t : -x + y + 3 = 0$  e os pontos  $A(-2, 3)$  e  $B(4, 6)$ , determine  $d_E(A, t)$  e  $d_E(B, t)$ .

**Segunda parte**

2. Resolva os itens abaixo, utilizando seus conhecimentos da Geometria do Taxista.
- a) Determine e represente no plano cartesiano as distâncias:  $d_T(A, r)$  e  $d_T(B, r)$ .
- b) Determine e represente no plano cartesiano as distâncias:  $d_T(A, s)$  e  $d_T(B, s)$ .
- c) Determine e represente no plano cartesiano as distâncias:  $d_T(A, t)$  e  $d_T(B, t)$ .
- d) O que há de diferente em  $d_T(A, t)$  e  $d_T(B, t)$  em relação às demais distâncias?
- e) Encontre uma relação entre o coeficiente angular da reta e a maneira de medir a distância.

**Observação para o professor:** é importante que o aluno perceba que no item (c) da segunda questão existe um segmento que contém os pontos que possuem a distância procurada. No item (e) da mesma questão, caso os alunos não percebam, será necessário mostrar para eles que existem as seguintes relações:

- i)  $|m| < 1$  - distância vertical.
- ii)  $|m| > 1$  - distância horizontal.
- iii)  $|m| = 1$  - distância vertical e horizontal.

Provavelmente será necessário dar outros exemplos para que eles possam perceber esse fato.

### Terceira parte

3. Dada a reta  $r : ax + by + c = 0$  e o ponto  $P(x_0, y_0)$ , temos  $d_T(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\max\{|a|; |b|\}}$ . Sabendo que  $\max\{|a|; |b|\}$  é o maior valor entre  $|a|$  e  $|b|$ , determine as distâncias da questão 2, itens (a), (b) e (c), através da fórmula dada.

**Observação para o professor:** o conceito de distância entre ponto e reta precisa ficar claro para os alunos, colocar mais exercícios para casa pode colaborar com a compreensão desse assunto.

## 5.4 QUARTA ATIVIDADE - CIRCUNFERÊNCIAS E SUAS POSIÇÕES RELATIVAS

**Objetivos na Geometria do Taxista:** apresentar a táxi circunferência, determinar sua fórmula e analisar as posições relativas entre duas táxi circunferências.

**Objetivos gerais:** rever o conceito de circunferência e as posições relativas entre elas, resolver equações modulares e revisar a resolução de sistemas lineares.

### Possíveis dificuldades:

- i) O aluno que não consolidou o conhecimento a respeito de distância entre dois pontos precisará rever a terceira atividade antes de iniciar esta.
- ii) A quinta questão pode gerar dificuldades relacionadas a equações modulares e sistemas, por envolver três variáveis.

### Descrição:

#### Primeira parte

1. Vamos construir uma táxi circunferência. Para isso, siga os passos:
  - a) Dado o ponto  $O(2, 2)$ , localize no plano cartesiano os dois pontos que distam 5 unidades de  $O$  e possuem ordenada igual a 2. Chame de  $A$  o ponto da esquerda e de  $C$  o ponto da direita.
  - b) Ainda em relação ao ponto  $O$ , localize no mesmo plano cartesiano os dois pontos que distam 5 unidades de  $O$  e possuem abscissa igual a 2. Chame

de  $B$  o ponto localizado na parte superior e de  $D$  o ponto que está na parte inferior.

- c) Una os pontos formando um quadrilátero  $ABCD$ . Qual quadrilátero você encontrou? Justifique sua resposta.
- d) Qual a definição de circunferência na Geometria Euclidiana?

**Observação para o professor:** é importante fazer uma discussão nessa primeira parte, antes de iniciar a segunda, para assegurar que os alunos compreenderam a construção e que existe um quadrado formado pelos pontos  $ABCD$ . Além disso, a definição de circunferência será necessária para a sequência.

### Segunda parte

- e) Ainda no plano cartesiano que contém os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $O$ , determine a distância das retas  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{BC}$ ,  $\overleftrightarrow{CD}$  e  $\overleftrightarrow{DA}$  em relação ao ponto  $O$ . Para isso, utilize a fórmula dada no exercício três da terceira atividade.
- f) Sabendo que a definição de circunferência na Geometria do Taxista é a mesma que a definição da Geometria Euclidiana, o que podemos concluir a respeito do quadrilátero  $ABCD$  e do ponto  $O$ ?
- g) Quais são as posições relativas entre duas circunferências na Geometria Euclidiana? Faça um desenho, representando cada uma delas.

**Observação para o professor:** caso nenhum aluno comente, é importante esclarecer que todos os pontos dos segmentos, do quadrilátero  $ABCD$ , estão à mesma distância do centro, sendo assim uma circunferência. Para facilitar o entendimento, mostre que o coeficiente angular das retas é igual a  $|1|$ , ou seja, a distância entre o ponto e qualquer reta será um segmento. Aproveite para revisar a resolução de equações modulares, em seguida será fundamental.

### Terceira parte

2. Construa cada par de táxi circunferências no mesmo plano cartesiano e determine o que há em comum entre elas.
- a) Táxi circunferência 1: Centro  $A(1, 1)$  e raio 2.  
Táxi circunferência 2: Centro  $B(7, 1)$  e raio 4.
- b) Táxi circunferência 3: Centro  $C(3, 2)$  e raio 3.  
Táxi circunferência 4: Centro  $D(3, 3)$  e raio 2.

c) Táxi circunferência 5: Centro  $E(1, 4)$  e raio 4.

Táxi circunferência 6: Centro  $F(3, 4)$  e raio 4.

3. Determine a fórmula de uma táxi circunferência com centro  $O(x_o, y_o)$ , ponto  $P(x_p, y_p)$  e raio  $r$ .
4. Determine o centro e o raio de uma táxi circunferência que contém o segmento  $\overline{AB}$ , sendo  $A(1, 5)$  e  $B(2, 6)$ , em comum com a circunferência de centro  $O(3, 4)$  e raio 3.
5. Encontre o centro da táxi circunferência que contém os pontos  $A(4, 4)$ ,  $B(8, 2)$  e  $C(5, 1)$  e desenhe-a no plano cartesiano.

**Observação para o professor:** a última questão pode ser resolvida em casa, ela é extensa e requer muito cuidado com os módulos. Caso essa seja a opção, a questão quatro precisa estar resolvida corretamente.

## 5.5 QUINTA ATIVIDADE - CONSTRUÇÃO DE PARÁBOLAS

**Objetivos na Geometria do Taxista:** determinar a equação geral das parábolas e trabalhar com a construção delas, usando a definição.

**Objetivos gerais:** revisão de parábolas, suas equações e construções.

**Possíveis dificuldades:**

- i) A principal dificuldade está relacionada a resolução de equações modulares, fato que pode ter sido sanado caso os alunos tenham resolvidos as atividades anteriores.
- ii) A construção das parábolas da questão 7 pode ser confusa no início, considerando a figura que será gerada.

**Descrição:**

### Primeira parte

1. Qual a definição de parábola na Geometria Euclidiana?
2. Construa uma parábola qualquer e cite seus principais elementos.
3. Determine a equação geral de uma parábola na Geometria Euclidiana, usando a definição da primeira questão.

**Observação para o professor:** essas primeiras questões são simples, porém um momento valioso para rever o tema.

### Segunda parte

Utilizando os conceitos da Geometria Euclidiana, resolva as questões 4 e 5.

4. Construa uma parábola com foco  $F(2, 3)$  e diretriz  $d : y + 1 = 0$ . No mesmo plano cartesiano, construa uma parábola com foco  $G(2, -5)$ , sendo a mesma diretriz  $d$ .
5. Dado a diretriz  $e : x - 3 = 0$ , construa uma parábola com foco  $H(0, 0)$  e outra com foco  $I(6, 0)$ .

**Observação para o professor:** após a resolução das duas questões, será significativo dar outros exemplos.

### Terceira parte

Utilizando os conceitos da Geometria do Taxista, resolva as questões 6 e 7.

6. Considerando a definição de parábola da primeira questão, determine a equação geral da parábola na Geometria do Taxista.
7. Construa as parábolas solicitadas nas questões 4 e 5.

**Observação para o professor:** associar o formato das parábolas com os resultados obtidos na atividade três, distância entre ponto e reta, facilitará a compreensão dos alunos.



---

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

---

Este trabalho teve como objetivo estimular o ensino da Geometria do Taxista como consolidador de conteúdos abordados no Ensino Fundamental e Médio. Através de conceitos básicos, foi possível mostrar um universo novo para o estudante, uma geometria que difere na maneira de medir e que, ao ampliar o conhecimento em relação a ela, foi possível perceber diferenças e similaridades com a geometria que habitualmente é ensinada nas escolas, a Geometria Euclidiana.

A parte histórica mostra como a geometria evoluiu, e fica o desejo de que os estudantes se interessem pela contínua evolução dela. Além disso, perceber que outras geometrias existem motiva o aluno a buscar cada vez mais conhecimento.

Trabalhar a Geometria Euclidiana de forma axiomática engrandece o estudo, faz com que as peças do quebra-cabeça se encaixem. É fundamental demonstrar para os alunos os casos de congruências, assim como algumas propriedades que eles utilizam durante a vida escolar.

Ao estudar a Geometria do Taxista, é possível perceber que sua aplicação em sala de aula não é difícil, as atividades mostram algumas opções que podem ser levadas para sala de aula, porém o professor poderá elaborar muitas outras de acordo com seus alunos.

Como sugestão de continuidade ao trabalho, abordar as propriedades das elipses e hipérbolas trarão mais conhecimento e elementos para trabalhar com os alunos em sala de aula. Fica a sugestão de que o professor também tenha um olhar para outras geometrias que possam ser apresentadas para os alunos como fonte enriquecedora de conhecimento.



---

## APÊNDICE

---

### A.1 ATIVIDADE 1

Questões 1 e 2.

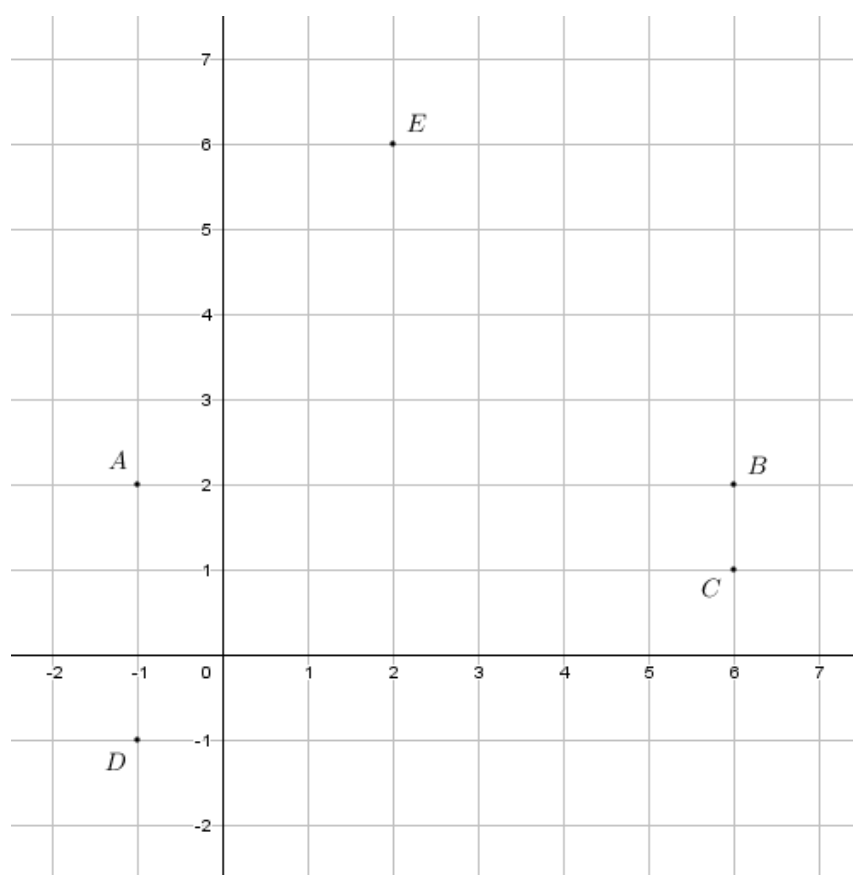


Figura 63: Atividade 1 - Questões 1 e 2.

## Questão 3.

Na figura 64 temos o  $\triangle ABC$  que é retângulo, sendo  $\overline{AB}$  sua hipotenusa. Sendo as medidas dos catetos  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$ , respectivamente  $d_E(A, C) = |x_b - x_a|$  e  $d_E(B, C) = |y_b - y_a|$ , temos por Pitágoras que:

$$d_E(A, B)^2 = |x_b - x_a|^2 + |y_b - y_a|^2.$$

Portanto, temos:

$$d_E(A, B) = \sqrt{|x_b - x_a|^2 + |y_b - y_a|^2}.$$

O módulo pode ser substituído por parênteses, pois temos uma diferença elevada ao quadrado.

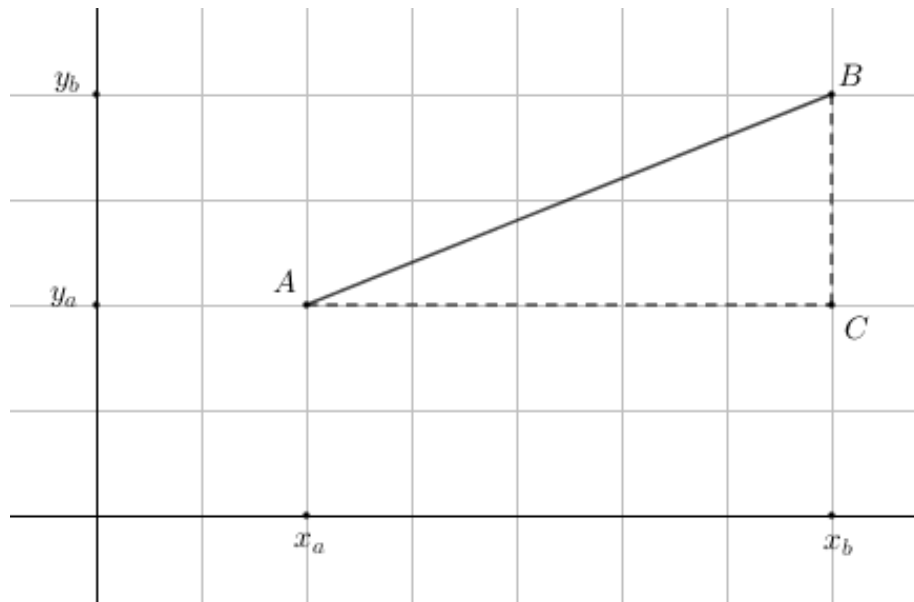


Figura 64: Atividade 1 - Questão 3.

## Questão 4

Utilizando a fórmula de distância entre dois pontos, temos:

$$d_E(A, B) = 7;$$

$$d_E(B, C) = 1;$$

$$d_E(A, D) = 3;$$

$$d_E(A, E) = 5 \text{ e}$$

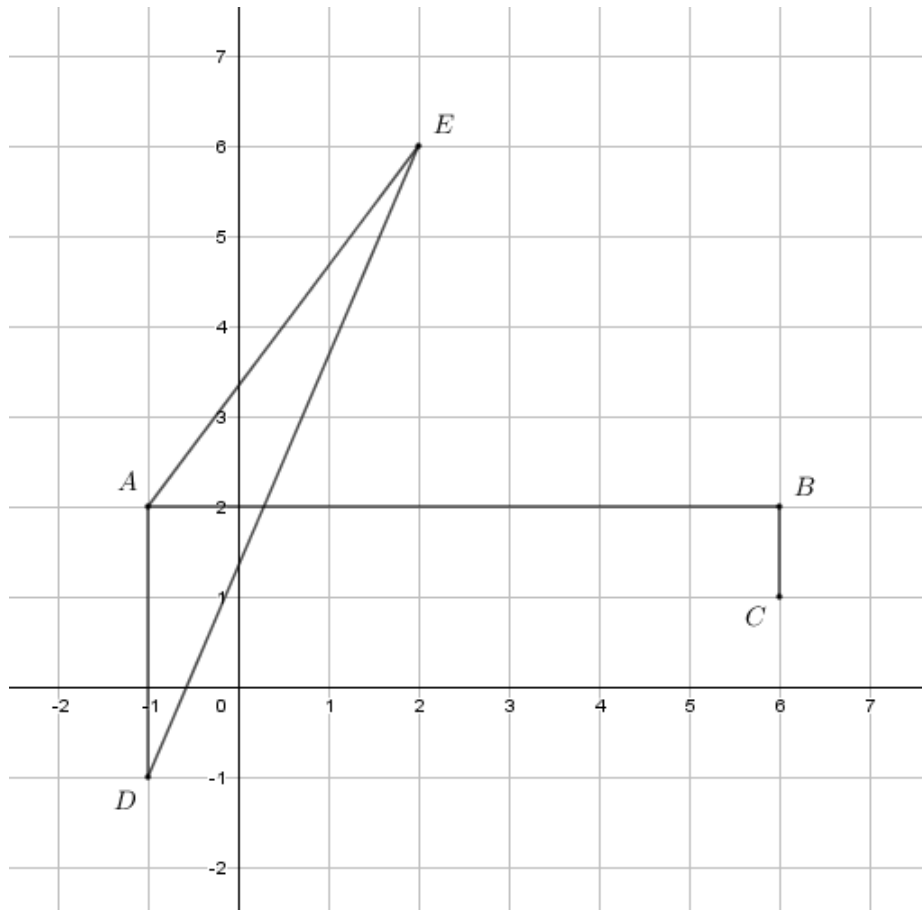


Figura 65: Atividade 1 - Questão 4.

$$d_E(D, E) = \sqrt{58}.$$

Questão 5

$$d_E(A, B), d_E(B, C) \text{ e } d_E(A, D).$$

Questão 6

$$d_T(A, E) = 7 \text{ e } d_T(D, E) = 10.$$

Questão 7

São diversas possibilidades, sendo possível abordar análise combinatória para saber a quantidade exata, sendo uma delas a que segue na figura 66.

A representação de setas nesses dois casos é:

$$d_T(A, E) = \rightarrow \rightarrow \uparrow \uparrow \uparrow \rightarrow \uparrow \text{ e}$$

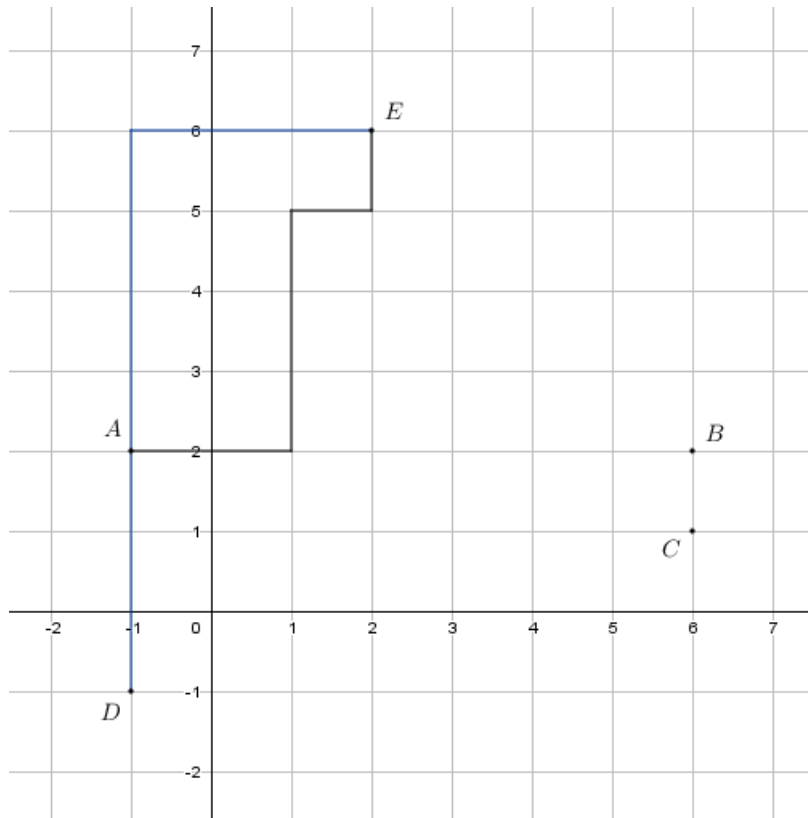


Figura 66: Atividade 1 - Questão 7.

$$d_T(D, E) = \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow.$$

Questão 8

$$d_T(A, B) = |x_b - x_a| + |y_b - y_a|.$$

Questões 9 e 10

Sim, será necessário substituir o valor das coordenadas para confirmar.

Questão 11

Ver 3.1.1 - Comparando a distância do taxista com a euclidiana

## A.2 ATIVIDADE 2

Questão 1

-  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ , pelo caso de congruência LLL. Ambos são equiláteros e acutângulos.

-  $\triangle GHI \cong \triangle JKL$ , pelo caso de congruência ALA. Ambos são isósceles (ver valor dos ângulos  $\widehat{GHI}$  e  $\widehat{JKL}$ ) e acutângulos.

-  $\triangle MNO \cong \triangle PQR$ , pelo caso de congruência LAL. Ambos são escalenos e acutângulos.

-  $\triangle STU \cong \triangle VXZ$ , pelo caso de congruência RHC. Ambos são escalenos e retângulos.

Questão 2

Faltou o caso  $LAA_o$ . Segue um exemplo na figura 67

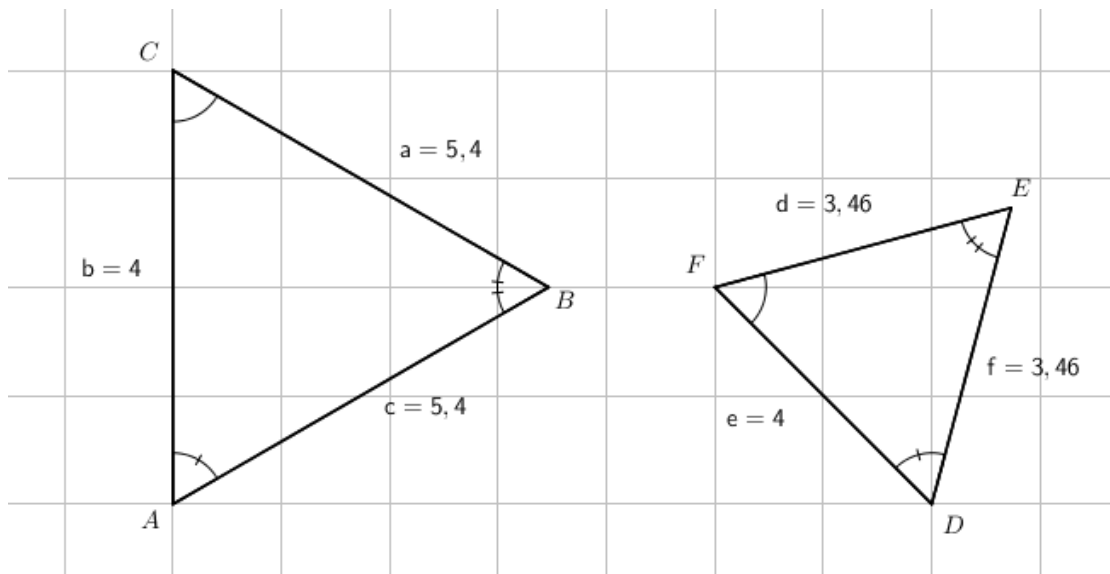


Figura 67: Atividade 2 - Questão 2.

Questão 3

Temos os casos de congruências ALA,  $LAA_o$  e LAL na imagem 60, porém elas não valem na Geometria do Taxista, para isso basta verificar que  $\overline{BC} \neq \overline{DF}$ .

Na imagem 61, temos o caso de congruência LLL, porém é possível perceber que ele não vale, pois temos  $\widehat{GIH} \neq \widehat{JLK}$ .

Questão 4

A fórmula que não vale na Geometria do Taxista é a fórmula de Pitágoras, para isso basta verificar no  $\triangle ABC$  que  $5^2 \neq 6^2 + 3^2$ . Nessa geometria também não vale o fato do maior ângulo do triângulo ser oposto ao maior lado e da mesma forma o menor ângulo é oposto ao menor lado, é possível verificar no  $\triangle ABC$ .

## Questão 5

O  $\triangle LMN$  é isósceles, porém os ângulos opostos aos lados com mesma medida não são congruentes. O  $\triangle OPQ$  é equilátero, porém seus ângulos são diferentes de  $60^\circ$ .

## A.3 ATIVIDADE 3

## Questão 1

Utilizar a fórmula de distância entre ponto e reta. Seja  $A(x_a, y_a)$  e  $r : mx + ny + o = 0$ , temos  $d_E(A, r) = \left| \frac{mx_a + ny_a + o}{\sqrt{m^2 + n^2}} \right|$ .

Outra opção é encontrar a equação da reta que passe por A e que seja perpendicular a reta r, usando o fato de um coeficiente angular ser o oposto do inverso do outro coeficiente. Igualar as equações das retas e encontrar o ponto em comum (P), para depois determinar  $d_E(A, P)$ .

a)  $d_E(A, r) = 2$  e  $d_E(B, r) = 1$ .

b)  $d_E(A, s) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$  e  $d_E(B, s) = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ .

c)  $d_E(A, t) = 4\sqrt{2}$  e  $d_E(B, t) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ .

## Questão 2

a)  $d_T(A, r) = 2$  e  $d_T(B, r) = 1$ .

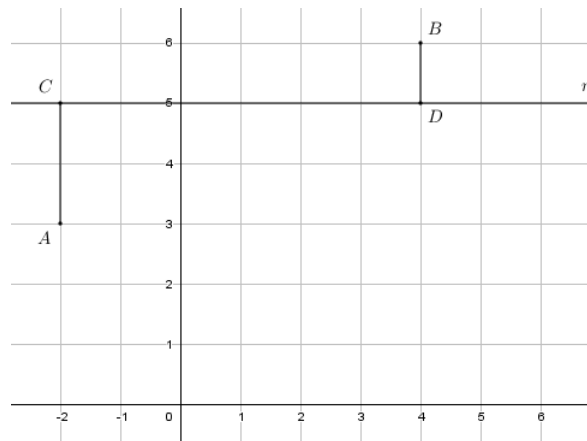


Figura 68: Atividade 3 - Questão 2 (a).



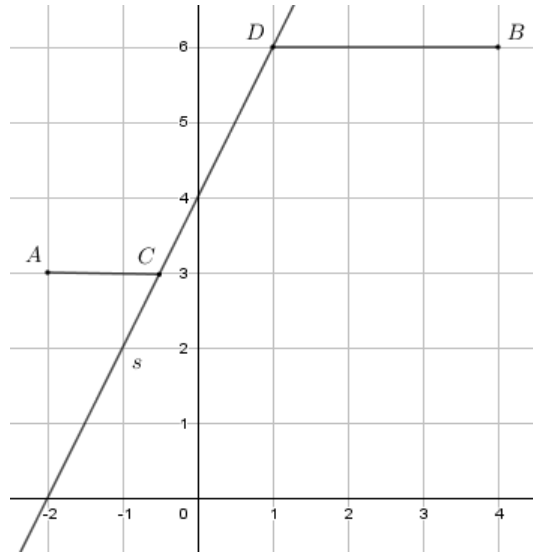


Figura 69: Atividade 3 - Questão 2 (b).

b)  $d_E(A, s) = \frac{3}{2}$  e  $d_E(B, s) = 3$ .

c)  $d_E(A, t) = 8$  e  $d_E(B, t) = 5$ .

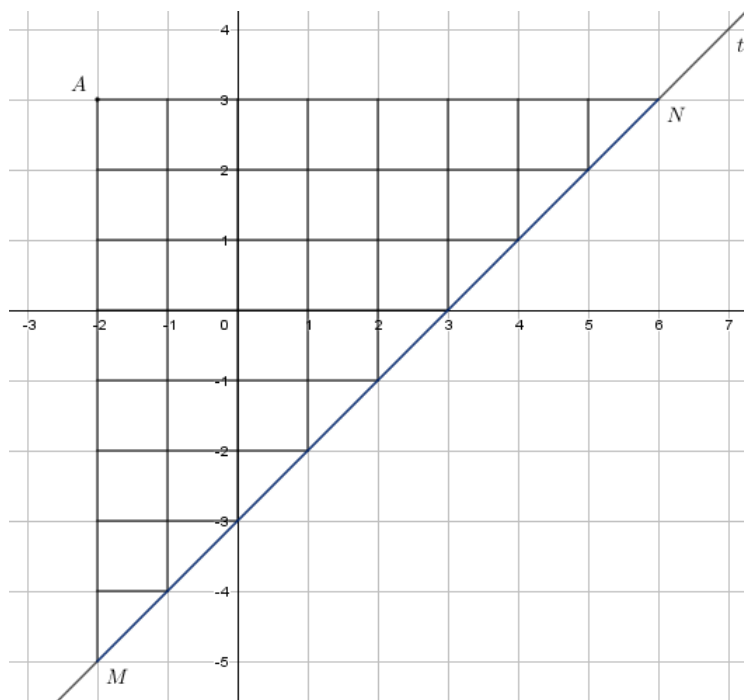


Figura 70: Atividade 3 - Questão 2 (c).

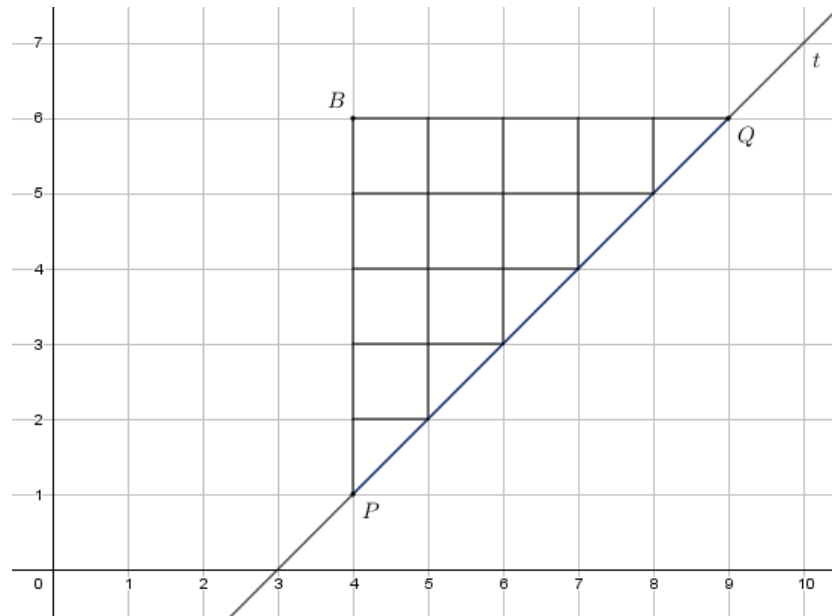


Figura 71: Atividade 3 - Questão 2 (c).

d) Existe um segmento de reta que contém os pontos com menor distância de  $A$  ou  $B$  até  $t$ .

e) Seja  $m$  o coeficiente da reta, temos:

- i)  $|m| < 1$  - distância vertical.
- ii)  $|m| > 1$  - distância horizontal.
- iii)  $|m| = 1$  - distância vertical e horizontal (segmento de reta).

Questão 3

Substituir os valores na fórmula.

#### A.4 ATIVIDADE 4

Questão 1

a) Ver 72.

b) Ver 72.

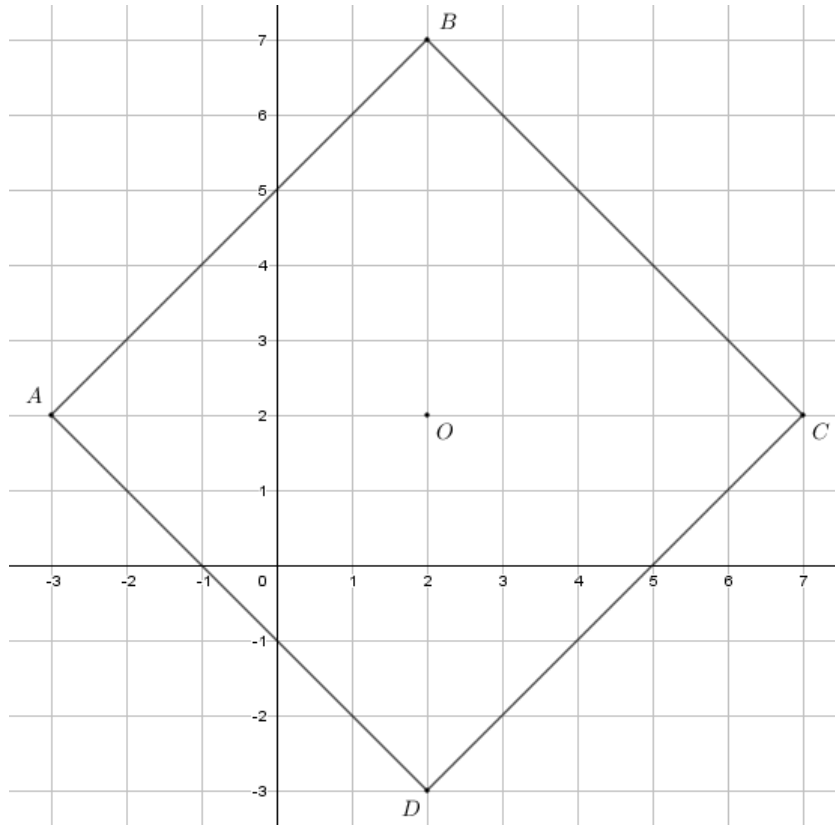


Figura 72: Atividade 4 - Questão 1.

c) Um quadrado, pois podemos olhar o  $\triangle AOB$  e percebemos que  $\widehat{AOB}$  é reto e os demais ângulos são iguais ( $45^\circ$ ), esse fato vale para  $\triangle BOC$ ,  $\triangle COD$  e  $\triangle AOD$ . Com isso mostramos que os ângulos do quadrilátero medem  $90^\circ$ . Todos os triângulos citados são congruentes, pois a distância de  $O$  até qualquer vértice é a mesma e o ângulo  $O$  em cada um deles é reto, portanto por LAL temos a congruência.

d) É o lugar geométrico do plano equidistante de um ponto fixo (centro).

e) Temos:

$$d_T(\overleftrightarrow{AB}, O) = 5, \text{ pontos que pertencem a } \overline{AB}.$$

$$d_T(\overleftrightarrow{BC}, O) = 5, \text{ pontos que pertencem a } \overline{BC}.$$

$$d_T(\overleftrightarrow{CD}, O) = 5, \text{ pontos que pertencem a } \overline{CD}.$$

$$d_T(\overleftrightarrow{AD}, O) = 5, \text{ pontos que pertencem a } \overline{AD}.$$

f) O quadrilátero  $ABCD$ , com centro  $O$ , é uma circunferência, pois possui os pontos que são equidistantes, um a um, ao centro  $O$ .

g)

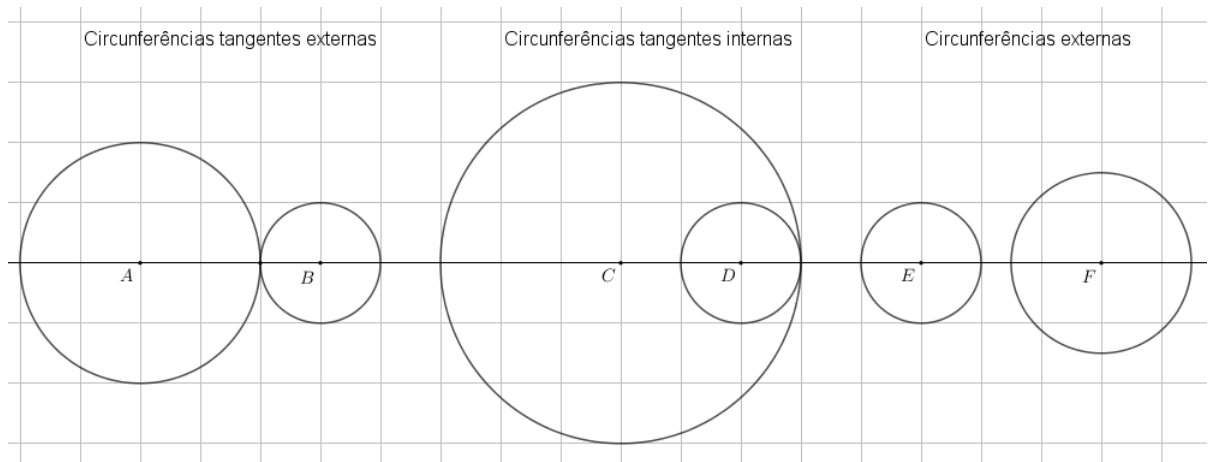


Figura 73: Atividade 4 - Questão 1.

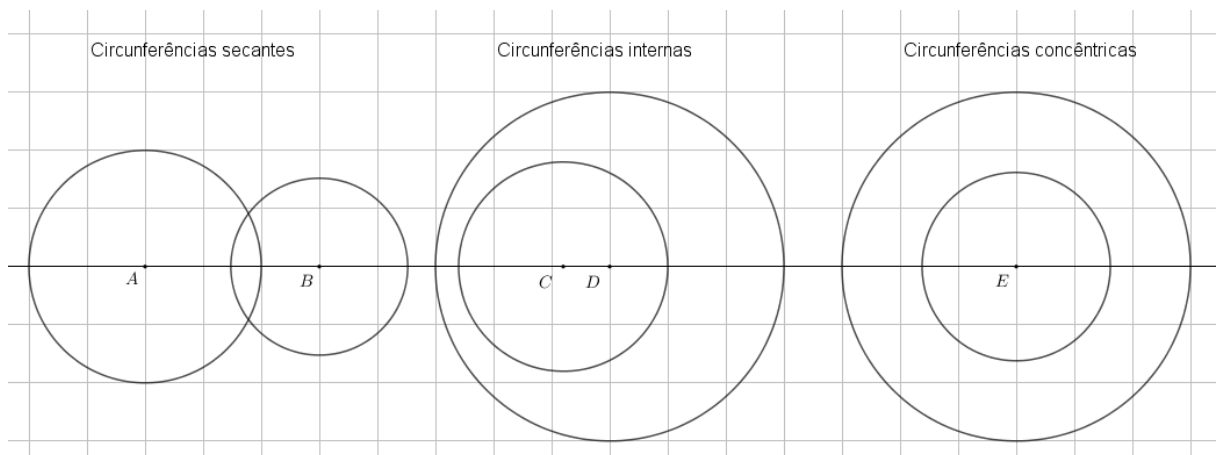


Figura 74: Atividade 4 - Questão 1.

Questão 2

- a) O ponto  $P$  é comum as duas táxi circunferências.
- b) Temos  $\overline{LM}$  e  $\overline{MN}$  comum as duas táxi circunferências.
- c) Os pontos  $Q$  e  $R$  são comuns as duas táxi circunferências.

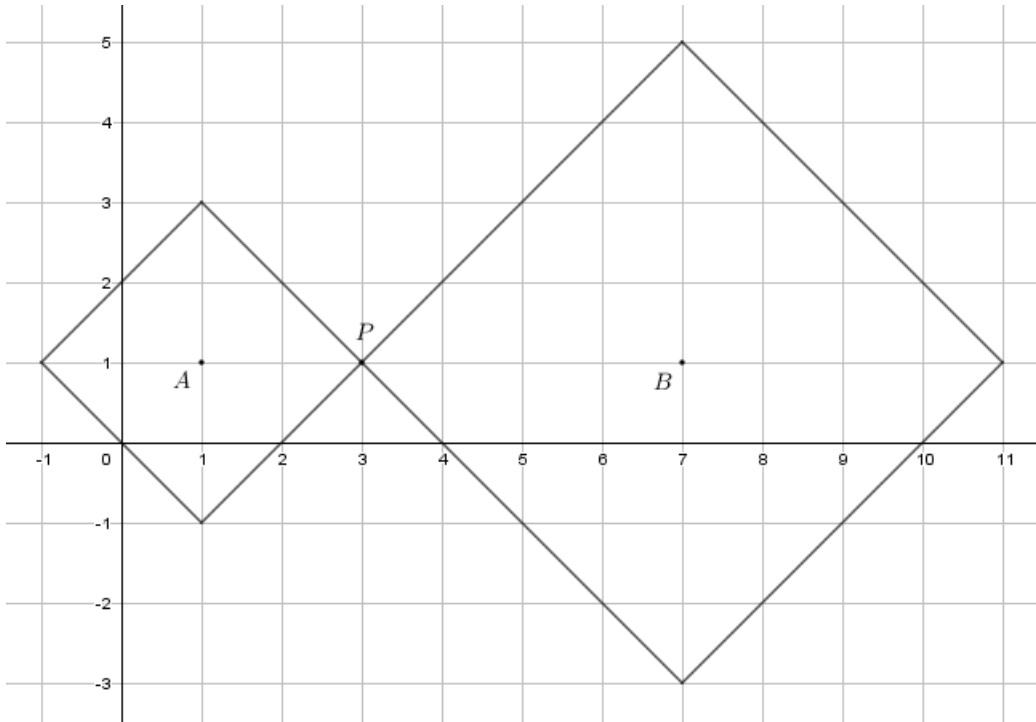


Figura 75: Atividade 4 - Questão 2.

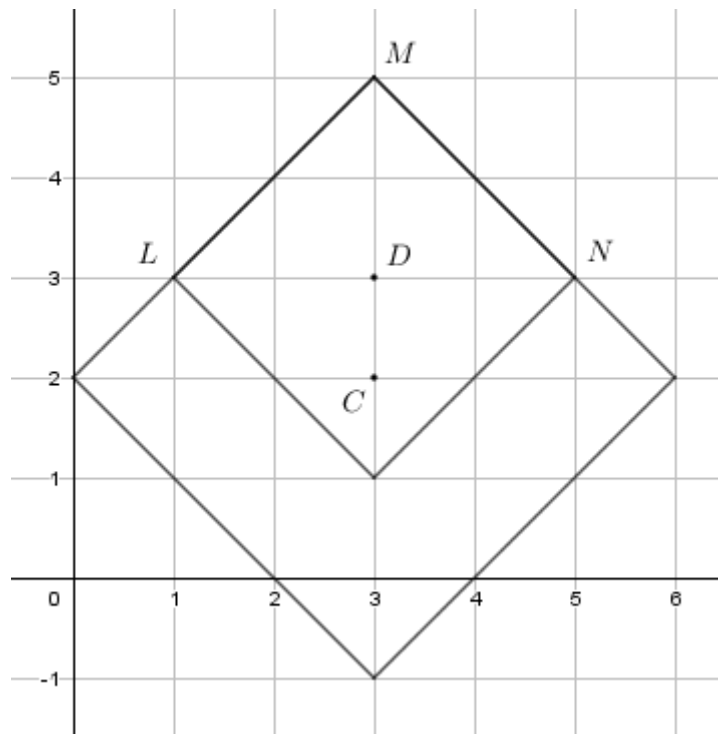


Figura 76: Atividade 4 - Questão 2.

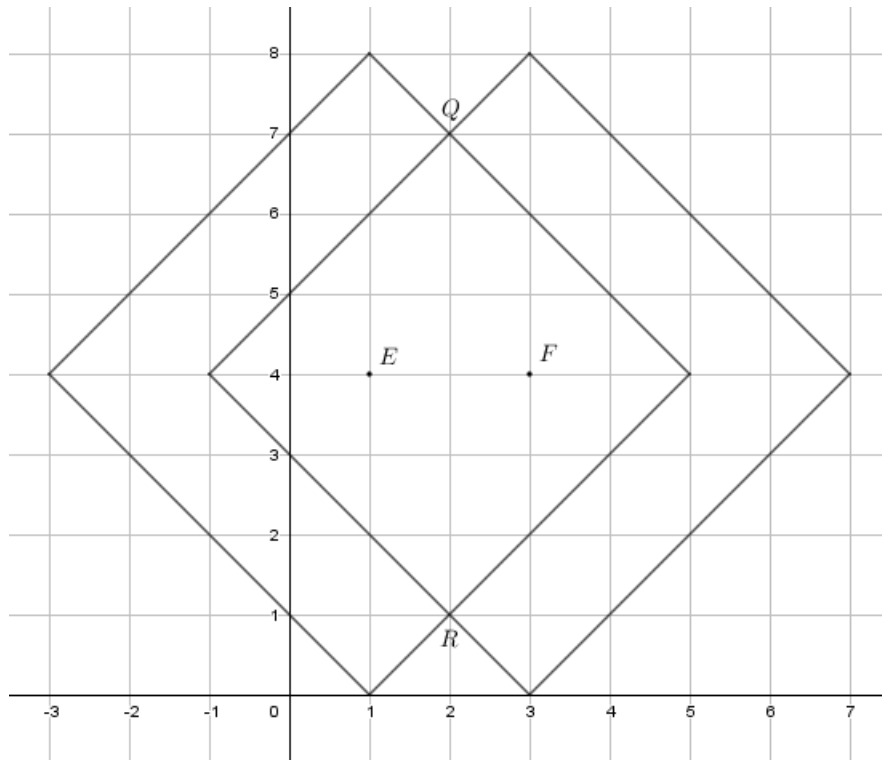


Figura 77: Atividade 4 - Questão 2.

## Questão 3

Sejam  $A(x_a, y_a)$  um ponto que pertence a táxi circunferência e  $O(x_o, y_o)$  o centro dela, temos:

$$|x_a - x_o| + |y_a - y_o| = r.$$

## Questão 4

Através da figura [78](#), temos duas soluções de centro  $H(2, 5)$  e centro  $I(1, 6)$ , ambas com raio 1.

Uma outra solução é usar a equação da circunferência e substituir três pontos que pertençam a ela. Podemos usar os pontos  $A$  e  $B$ , e escolher um ponto que pertença ao segmento  $\overline{AB}$ . As soluções da equação modular serão as duas táxi circunferências da figura [78](#).

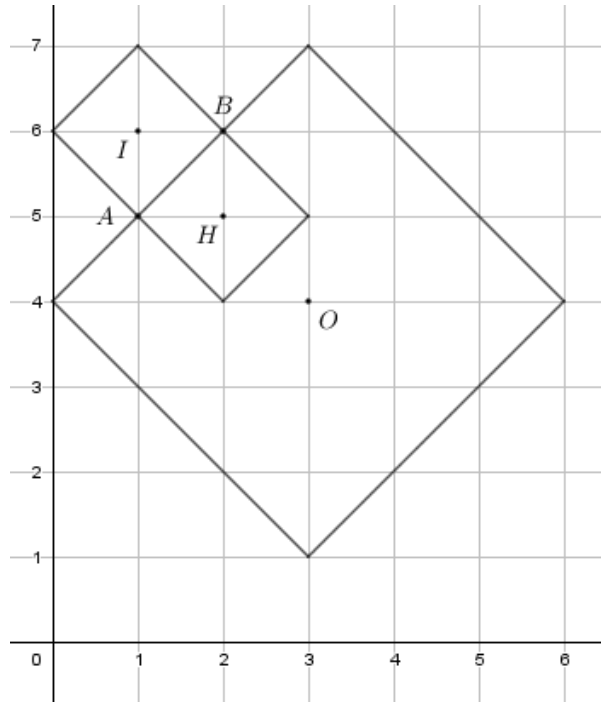


Figura 78: Atividade 4 - Questão 4.

## Questão 5

Substituir os três pontos na equação da circunferência e resolver o sistema com equações modulares. A figura 79 contém a circunferência que passa pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . O raio da circunferência é 3 e o centro  $O(6,3)$ .

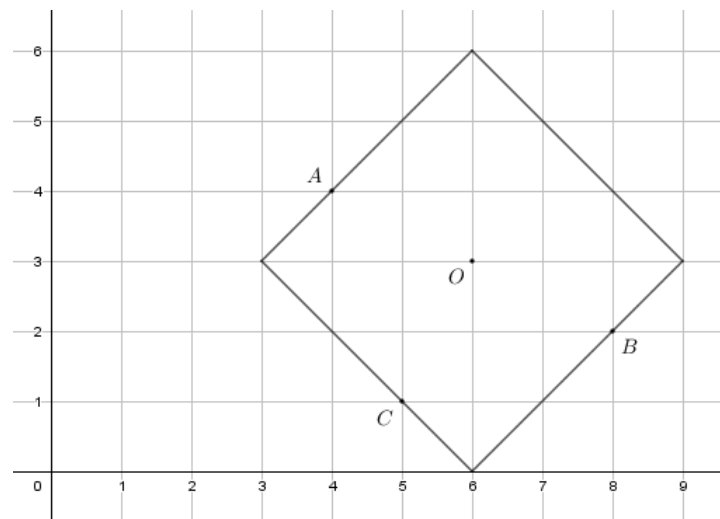


Figura 79: Atividade 4 - Questão 5.

## A.5 ATIVIDADE 5

## Questão 1

Sejam uma reta  $d$  e um ponto  $F \notin d$ , parábola é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de  $d$  e  $F$ . Sendo  $d$  a diretriz e  $F$  o foco da parábola, temos que

$$Q = \{P \in \mathbb{R}^2 / d(P, F) = d(P, d)\}.$$

## Questão 2

Construção de uma parábola e seus principais elementos, ver figura [80](#).

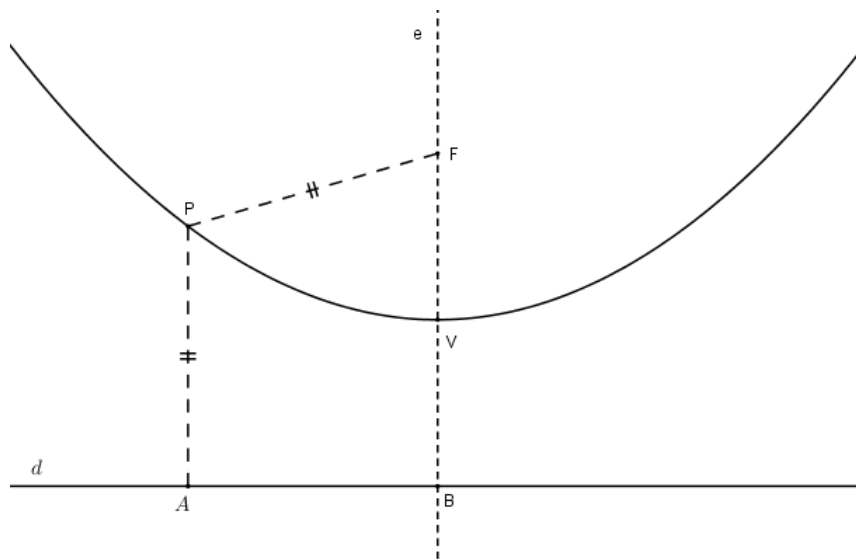


Figura 80: Atividade 5 - Questão 2.

1. O foco da parábola é o ponto  $F$ .
2. O vértice da parábola é o ponto  $V$ .
3. A diretriz da parábola é a reta  $d$ .
4. O eixo de simetria ou reta focal é a reta  $e$ , ela é perpendicular a  $d$ , passando por  $F$  e  $V$ .
5. O parâmetro ( $p$ ) da parábola é a distância entre o foco e a diretriz, ou seja, o valor de  $\overline{FB}$ . Temos:

$$d_E(F, V) = d_E(V, d) = \frac{p}{2}.$$



## Questão 3

Sejam o foco  $F(a, b)$ , a reta  $d : mx + ny + o = 0$  e o ponto  $P(x_p, y_p)$  que pertence à parábola, temos:

$$d_E(F, P) = d_E(d, P),$$

ou seja,

$$\sqrt{|x_p - a|^2 + |y_p - b|^2} = \frac{|mx_p + ny_p + o|}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

## Questão 4

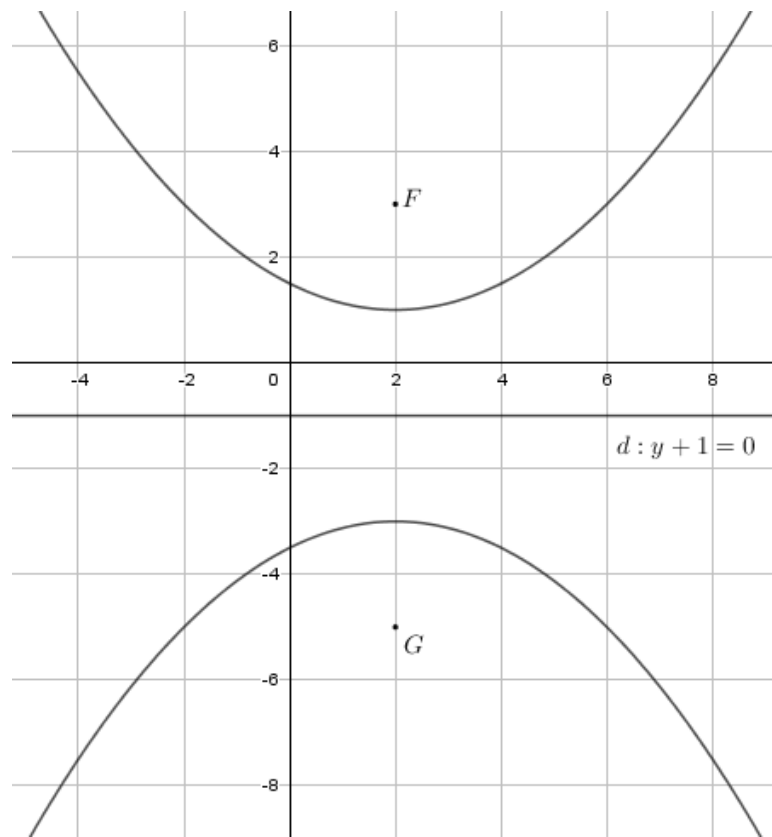


Figura 81: Atividade 5 - Questão 4.

## Questão 5

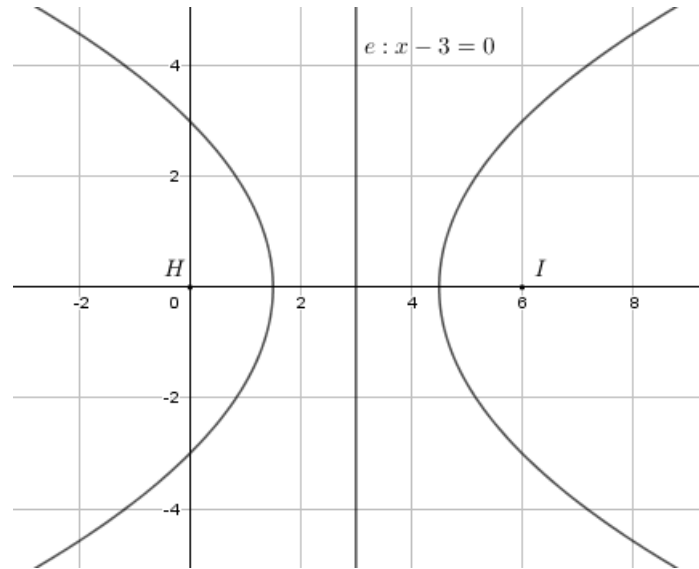


Figura 82: Atividade 5 - Questão 5.

## Questão 6

Para encontrar a equação geral da táxi parábola, sendo o foco  $F(a, b)$ , a reta diretriz  $d : mx + ny + o = 0$  e o ponto  $P(x_p, y_p)$  que pertence a parábola, temos:

$$d_T(F, P) = d_T(P, d);$$

$$|x_p - a| + |y_p - b| = \frac{|mx_p + ny_p + o|}{\max\{|m|; |n|\}}.$$

## Questão 7

Portanto, basta substituir os valores das coordenadas do foco e a equação da reta nessa equação geral.

Por exemplo, para  $F(2,3)$  e  $d : y + 1 = 0$  temos:

$$|x_p - 2| + |y_p - 3| = \frac{|y_p + 1|}{\max\{|0|; |1|\}}.$$

ou seja,

$$|x_p - 2| + |y_p - 3| = |y_p + 1|.$$

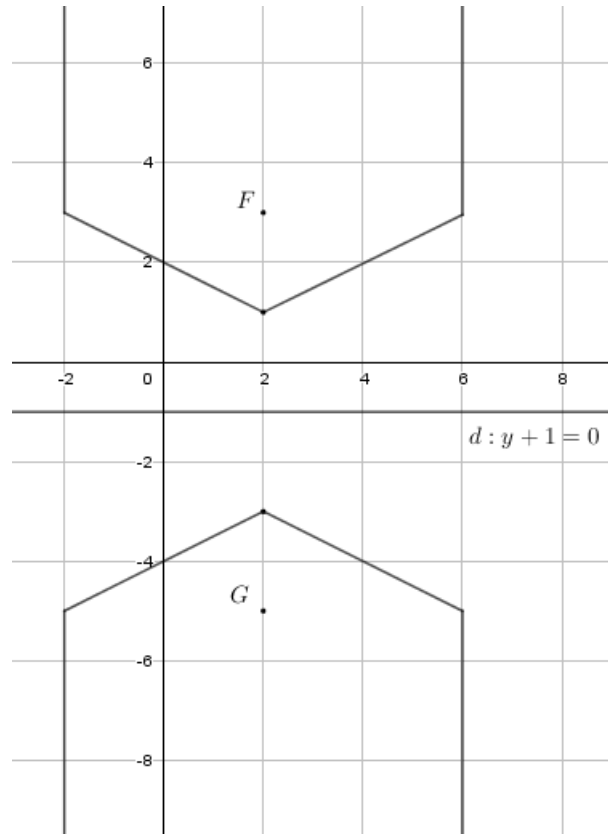


Figura 83: Atividade 5 - Questão 7.

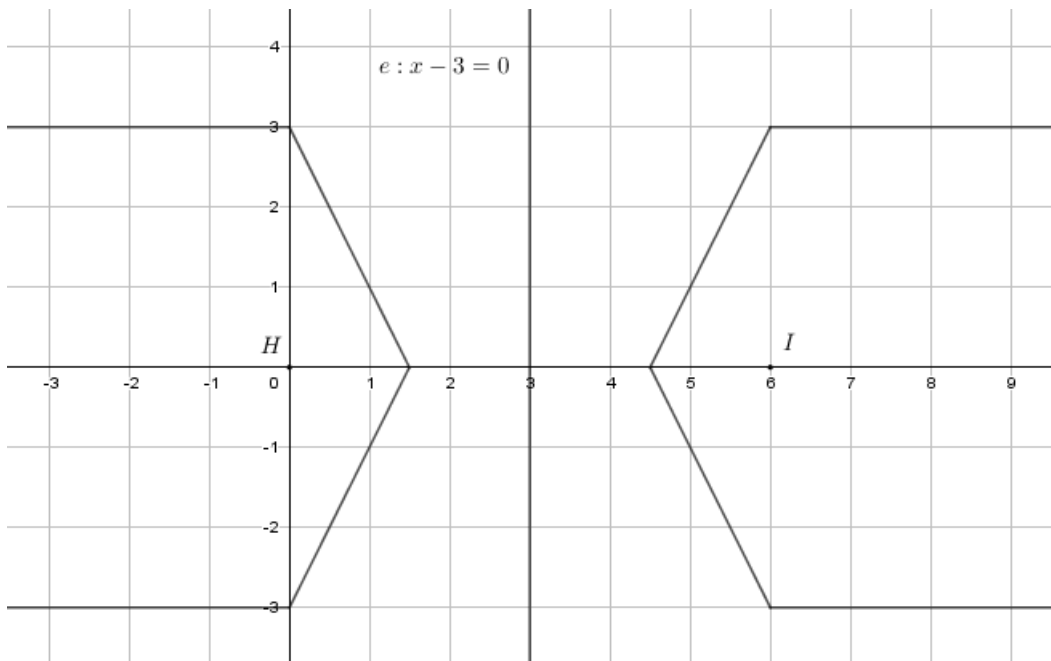


Figura 84: Atividade 5 - Questão 7.



---

## BIBLIOGRAFIA

---

- [1] ANDRADE, P.: *Introdução à Geometria Hiperbólica: O modelo de Poincaré*. SBM, 2013.
- [2] BARBOSA, J. L. M.: *Geometria euclidiana plana*. 2012.
- [3] BICUDO, I.: *Os Elementos/Euclides*. Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- [4] BICUDO, I.: *A história da geometria euclidiana do antigo Egito às salas de aula*. Globo Ciências, 2011.
- [5] BOYER, C. B.: *História da Matemática*. Editora Edgar Blücher Ltda., São Paulo, 1996. Traduzido por Elza F. Gomide do original em inglês: *A History of Mathematics*. Blucher, 1991.
- [6] CÉSAR, S. M. C.: *Geometria Táxi—Uma exploração através de atividades didáticas*.
- [7] EVES, H. W.: *Introdução à história da matemática*. Unicamp, 2004.
- [8] FLOOD, R. e R. Wilson: *A História dos Grandes Matemáticos: as Descobertas e a Propagação do Conhecimento através das Vidas dos Grandes Matemáticos*. São Paulo: M. Books do Brasil Editora LTDA, 2013. Rel. Téc., ISBN 978-85-7680-216-7.
- [9] Gomes Loiola, C. A. e C. Sertã Costa: *As Cônicas na Geometria do Taxi*. *Ciência e Natura*, 37(3), 2015.
- [10] GREENBERG, M. J.: *Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history*. Macmillan, 1993.
- [11] JANSSEN, C.: *Taxicab Geometry: Not the Shortest Ride Across Town*, 2007.
- [12] KRAUSE, E. F.: *Taxicab geometry: An adventure in non-Euclidean geometry*. Courier Corporation, 2012.
- [13] LOIOLA, C. A. G.: *Um Taxi para Euclides: Uma Geometria Não Euclidiana na Educação Básica*. 2014.

- [14] MANFIO, F.: *Fundamentos da Geometria*. ICMC-USP. Disponível em: <https://docs.ufpr.br/~otero/documentos/ensino/2sem2016/CM127-A/Angulos-Potencia-Circunferencia.pdf>.
- [15] MLODINOW, L.: *A janela de Euclides: a história da geometria: das linhas paralelas ao hiperespaço*. Geração Editorial, 2004.
- [16] MOISE, E. E.: *Elementary geometry from an advanced standpoint*. Addison-Wesley, 1990.
- [17] NETO, I. F.: *Um novo conceito de distância: a distância do táxi e aplicações*. 2013.
- [18] ROONEY, A.: *A História da Matemática: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito*. São Paulo: M. Books do Brasil Editora Ltda, 2012.
- [19] RAMSAY, A. e R. D. Richtmyer: *Introduction to hyperbolic geometry*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [20] REZENDE, E. Q. F. e M. L. B. de QUEIROZ: *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. Editora da UNICAMP, 2008.