



Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Adriana de Carvalho Laurenço

Investigação Matemática por meio de Fractais

Vitória da Conquista
2017

Adriana de Carvalho Laurenço

Investigação Matemática por meio de Fractais

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, oferecido pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Orientadora: Prof.^a Dr.^a Maria Deusa Ferreira da Silva.

Vitória da Conquista
2017

L412i Laurenço, Adriana de Carvalho.
 Investigação matemática por meio de fractais. / Adriana de
 Carvalho Laurenço, 2017.
 82f. il.
 Orientador (a): Dra. Maria Deusa Ferreira da Silva.
 Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste
 da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional –
 PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2017.
 Inclui referências. 73-75.
 1. Geometria Fractal. 2. Aprendizagem – Uso de ferramentas. 3.
 Matemática – Estudo e ensino. I. Silva, Maria Deusa Ferreira. II.
 Universidade Estadual Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em
 Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista, III.
 T.

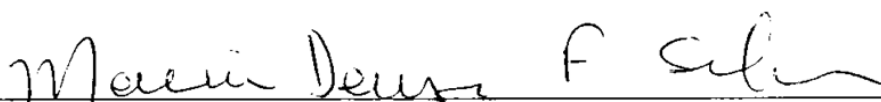
CDD: 516

Adriana de Carvalho Laurenço

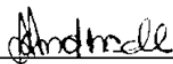
Investigação Matemática por meio de Fractais

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA



Profa. Dra. Maria Deusa Ferreira da Silva (PROFMAT/UESB)
(presidente)



Profa. Dra. Alexandra Oliveira Andrade (PROFMAT/UESB)



Profa. Dra. Selma Rozane Vieira (IFBA)

Vitória da Conquista, 20 de dezembro de 2017.

DEDICO este trabalho ao meu esposo Alex que me deu
força, apoio e incentivo nos momentos de dificuldades, e
ao meu filho, Vitor, que embora não tivessem
conhecimento disto colaborou e permitiu a conclusão
desta etapa.

AGRADECIMENTOS

A DEUS, por ter me dado forças para prosseguir na caminhada, permitido realizar mais este sonho. A minha orientadora Maria Deusa, pela paciência, compreensão e incentivo na orientação deste trabalho. A todos os professores que lecionaram no curso de Mestrado e que contribuíram, cada um a seu modo, para minha formação. Aos meus colegas que compartilharam seus conhecimentos e fizeram com que cada um de nós realizasse os seus sonhos. Aos meus pais, pelo amor, carinho e pelo apoio em todos os momentos, mas principalmente porque me deram a educação sem a qual eu não teria chegado a lugar algum. Ao meu esposo, Alex, pela paciência, compreensão, força, amizade, incentivo e companheirismo. Ao meu filho, que, ao seu modo, permitiu-me a realização de mais esta etapa da minha vida acadêmica. A coordenação do PROFMAT e corpo docente do departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, pela compreensão e oportunidade. A todos os meus amigos, que me apoiaram e incentivaram durante a realização desta pesquisa fazendo me acreditar que era capaz, em especial Ana Maria Soares pelas contribuições concretas na realização deste trabalho, ao fazer a leitura e devidas correções e a Edileusa Oliveira pela leitura e orientação para melhoria dos resultados aqui apresentados. Aos meus colegas de curso, que compartilharam momentos de saber e amizade no decorrer dessa trajetória. Enfim, a todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para a concretização desta etapa.

"Os fractais podem ser encontrados em todo o universo natural e em toda a ciência, desde o aspecto das nuvens, montanhas, árvores e relâmpagos, até a distribuição das galáxias, assim como na arte e na matemática".

Santos & Oliveira

RESUMO

Este trabalho discute o uso de fractais como ferramenta de ensino da matemática, no Ensino Médio, na perspectiva de aplicação de aulas investigativas, possibilitando aos alunos fazer parte do processo de ensino-aprendizagem como produtores de conhecimentos e não apenas receptores e reprodutores. As atividades propostas foram aplicadas à professores do Ensino Fundamental II, da rede pública municipal, como projeto piloto, e para alunos de uma turma do 2º ano do Ensino Médio, no Colégio Estadual de Piripá. Os fractais são figuras que se apresentam na natureza ou são construídos a partir de funções iterativas e possuem características próprias, como autossimilaridade, ou seja, um parte é igual ao todo, além disso, tem uma beleza inigualável. Ao introduzirmos em sala de aula estudos envolvendo a Geometria Fractal, permitimos aos alunos a oportunidade de desenvolver a capacidade de investigar e perceber a Matemática, que lhe é apresentada sob uma nova perspectiva, além de possibilitar a observação da Matemática na própria natureza, despertando o aluno para a busca do conhecimento, a partir de objetos palpáveis. Outro aspecto relevante é o fato de ser possível introduzir mídias educacionais no processo de ensino. O principal objetivo foi avaliar como a Geometria Fractal pode contribuir para que os alunos aprimorem suas habilidades de reconhecimento, formalização e generalização de sequências.

Palavras chave: Fractais. Geometria. Aprendizagem.

ABSTRACT

This paper discusses the use of fractals as a mathematics teaching tool in High School, in the perspective of applying investigative classes which enable students to be part of the teaching-learning process as knowledge producers, not just as receivers and reproducers. The proposed activities were applied to teachers of Elementary School II in the municipal public schools as a pilot project, and to students of a second year of high school class, in a state school of Piripá. Fractals are figures that are found in nature or are constructed from interactive functions and have their own characteristics, such as auto-similarity, that is, a part is equal to the whole, moreover, they have a unique beauty. When we introduce studies involving Fractal Geometry in the classroom, we allow students to develop their ability to investigate and perceive Mathematics, which is presented to them in a new perspective, as well as enabling the observation of Mathematics in nature itself, helping student with the pursuit of knowledge, considering the palpable objects. Another relevant aspect is the fact that it is possible to introduce educational media into the teaching process. The main aim here was to evaluate how Fractal Geometry can contribute to students by improving their abilities of recognition, formalization and generalization of sequences.

Keywords: Fractais. Geometry. Learning.

LISTA DE FIGURAS

Figura 01: Infográfico com a Geometria Fractal no livro didático	32
Figura 02: Atividade envolvendo fractais no livro didático	33
Figura 03: Construção do fractal Conjunto de Cantor	38
Figura 04: Construção do triângulo de Sierpinski	39
Figura 05: Construção do tapete de Sierpinski	40
Figura 06: Construção da curva de Kock	41
Figura 07: Construção do floco de neve	42
Figura 08: Fractal num brócoles romano	43
Figura 09: Fractal nos rios e seus afluentes	43
Figura 10: Fractal das samambaias	44
Figura 11: Fractal na flor Aloe africana	44
Figura 12: Fractal nos raios	45
Figura 13: Fractal nas árvores	45
Figura 14: Fractal nos pulmões	46
Figura 15: Atividade desenvolvida pelo grupo 2.....	57
Figura 16: Atividade desenvolvida pelo grupo 2.....	59
Figura 17: Atividade desenvolvida pelo grupo 3.....	60
Figura 18: Atividade desenvolvida pelo grupo 1.....	62

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	12
1.1 Motivação e questões iniciais.....	12
1.2 Organização do trabalho	16
2. PRESSUPOSTOS TEÓRICOS E REVISÃO DE LITERATURA.....	17
2.1 Investigação Matemática	17
2.2 O papel do professor.....	25
2.4 Geometria Fractal	30
2.5 Fractais e suas características.....	33
2.6 Fractais Clássicos	37
2.6.1 Conjunto de Cantor	37
2.6.2 Triângulo de Sierpinski.....	38
2.6.3 Curva de Koch e floco de neve	40
2.7 Fractais na Natureza.....	42
3. METODOLOGIA DA PESQUISA E ASPECTOS TEÓRICOS PRÁTICOS...	47
3.1 Sujeitos da Pesquisa.....	49
3.2 Etapas da pesquisa.....	50
3.3 Procedimentos para obtenção dos dados.....	52
4. ATIVIDADES COM FRACTAIS: apresentação, discussão e análises	54
4.1 Análise da atividade 1	54
4.2 Análise da atividade 2	57
4.3 Análise da atividade 3	58
4.4 Análise da atividade 4	61
4.5 Análise da atividade 5	64
4.6 Análise do questionário.....	65
5. BREVES RESULTADOS E CONSIDERAÇÕES FINAIS	68
5.1. BREVES RESULTADOS	68
5.2. CONSIDERAÇÕES FINAIS	70
6. REFERÊNCIAS.....	73
7. APÊNDICES.....	76
7.1 Atividade 1	76
7.2 Atividade 2	77

7.3 Atividade 3: EXPLORANDO O FRACTAL TRIMINÓ	78
7.4 Atividade 4: CONSTRUINDO CARTÕES FRACTAIS.....	79
7.5 Atividade 5: CONSTRUINDO O TRIÂNGULO DE SIERPINSKY.....	80
7.6 QUESTIONÁRIO.....	81

1. INTRODUÇÃO

1. 1 Motivação e questões iniciais

Comecei a lecionar Matemática em turmas do Ensino Médio no ano de 2005, quando ainda era estudante do curso de Licenciatura em Matemática, na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, onde ingressei no ano de 2002. Nessa etapa da minha vida tive a oportunidade de participar de vários eventos para debater o Ensino de Matemática, e constatar, desta forma, que existem muitos alunos com dificuldades na aprendizagem da Matemática e que isso se dá pelo fato de ainda, hoje, não haver professores que trabalhem de forma diferenciada, pois se percebe que a maioria dos docentes fazem uso da metodologia tradicional, com modalidade de aula, preferencialmente, centrada no professor e cuja ação prioriza alunos direcionados a aprender e a reproduzir algoritmos previamente estabelecidos e apresentados, assim como trilhar os mesmos caminhos já percorridos por outras pessoas para se chegar à solução dos problemas.

Metodologia essa que também era aplicada por mim, porém com um diferencial na minha prática: sempre busquei despertar nos meus alunos o espírito investigativo e, mesmo transmitindo os conteúdos sob a metodologia tradicional, sempre tive o cuidado de fazer com que os meus alunos percebessem que eles poderiam ser capazes de construir o seu próprio conhecimento. O que era feito a partir de questões desafiadoras que tanto possibilitavam ao aluno inserir os seus conhecimentos aprendidos em sala acerca do correspondente conteúdo ensinado, como também lhe permitiam refletir sobre estratégias para se aplicar outros conhecimentos previamente adquiridos.

Contudo, a sala de aula hoje nos desafia, a cada dia, a nos envolvermos em propostas metodológicas diferenciadas, especialmente quando tratamos do ensino de Matemática, o que nos leva a pensar até que ponto nos acomodamos com práticas que não traduzem o verdadeiro sentido do que é ensinar. Além disso, quando pensamos em levar aos nossos alunos, não apenas alguns conceitos, regras e fórmulas já prontas, cristalizadas, mas dar sentido ao processo de aquisição de conhecimento, precisamos nos questionar

sobre práticas correntemente adotadas, de modo a refletir e mudar, visto que o saber matemático não se resume em saber usar e manipular fórmulas e expressões. Desse modo, devemos, como educadores, buscar sempre novas metodologias que permitam ao aluno se transformar em um produtor de conhecimento, de modo a adquirir um novo olhar para a ciência constituída, assim como para a forma que esta vem sendo difundida no decorrer dos séculos, permitindo a renovação e aprimoramento do conhecimento já existente.

É notório como a forma com que as aulas de matemática vêm sendo desenvolvidas não tem despertado o interesse dos nossos alunos. Circunstância que nos deixa reflexivos: o que é possível fazer para despertar nessas novas gerações, que aparentemente buscam o conhecimento pronto e acabado, para a necessidade de um universo de conhecimento e descobertas? Sadovsky (2010, p.14) nos diz que é necessário desafiar os alunos de modo a propor situações complexas, porém não impossíveis. Considerando as colocações do estudioso, verificamos que, ao ser desafiado em alguma situação, o aluno pode despertar para os desafios e, assim, perceber que ele é capaz de produzir novos conhecimentos, ainda que atrelados a concepções e fundamentos anteriores. Vale salientar que as propostas de atividades investigativas devem limitar-se ao potencial dos alunos aos quais são dirigidas.

A aplicação de atividades diferenciadas em sala de aula pode contribuir de forma significativa para o desenvolvimento cognitivo dos nossos alunos, uma vez que elas lhes permitem participar do processo de construção do conhecimento, bem como, desenvolver habilidades importantes para o desenvolvimento de um indivíduo crítico e capaz de analisar, de maneira coerente, as informações que lhes são apresentadas. E, nesse sentido, a investigação matemática pode constituir uma dessas ferramentas para abordar determinados conteúdos em sala de aula, pois leva o aluno a interagir com o que está sendo abordado, uma vez que este passa a construir os próprios conhecimentos, bem como o leva a internalizar e relacionar os conteúdos, de maneira significativa, para a construção da sua aprendizagem.

No desenvolvimento de atividades investigativas, pode-se ainda utilizar, em alguns casos, a manipulação de objetos, o que possibilitará aos alunos fazer conjecturas sobre características importantes do objeto observado. Alguns estudos e concepções matemáticas apontam o ensino a partir de situações concretas como a melhor forma de trazer os conteúdos para próximo do aluno, pois se trata de um processo de investigação no qual o aluno, a partir da observação e manipulação de objetos, consegue perceber o abstrato e, assim, constrói os seus próprios conceitos que, por sua vez, são internalizados de forma mais eficaz, já que gera significado para o indivíduo. As principais concepções de que o concreto deve permear as aulas de matemática para que exista um sistema eficaz de ensino aprendizagem se baseiam principalmente nas ideias de Jean Piaget (1896-1980). Segundo Piaget, a aprendizagem da Matemática envolve o conhecimento físico e o lógico-matemático. O conhecimento físico ocorre quando o aluno manuseia, observa, analisa, identifica e opera com o material. O lógico-matemático se dá quando ele usa seus atributos ou opera sem ter o material em mãos (raciocínio abstrato). Uma aula na qual os alunos dispõem de materiais para manipular terá maiores chances de sucesso, tendo em vista as reais possibilidades dos alunos desenvolverem ações que lhes propiciem a construção de um saber consistente e significativo.

É importante salientar que atividades com materiais manipuláveis e atividades investigativas não devem ser aplicadas simplesmente porque sempre se ouviu falar que este tipo de metodologia contribui para a aprendizagem do aluno, mas deve ser abordada de maneira consciente e significativa para o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático do aluno. A partir das atividades lúdicas desenvolvidas, onde o aluno tem a oportunidade de ter o contato com os objetos e buscar informações sobre padrões e formas, o aluno também deve transformar as experiências concretas em informações abstratas, pois só assim o aluno será capaz de construir o seu conhecimento. Com base nas ideias dos estudiosos Fiorentini e Miorin (1990) o que realmente deve ser levado em consideração é que o aluno reflita as suas ações de modo que compreenda, elabore e reelabore seu conhecimento, usando todo o potencial que o material concreto pode trazer. Nesse processo o

aluno é um sujeito ativo na construção do saber e é a partir de suas experiências que ele aprende e torna significativo o conhecimento adquirido.

Desse modo, ao observamos a forma como as aulas de matemática são ministradas e como os alunos conseguem abstrair os conteúdos abordados, somos levados a refletir algumas questões acerca da metodologia utilizada: O ensino de Matemática tem alcançado o seu objetivo? De que forma as tendências do ensino de Matemática podem contribuir para melhor desempenho dos nossos alunos? A Metodologia da Investigação Matemática pode contribuir para o ensino e aprendizagem de matemática de maneira satisfatória? Como podemos inserir o conteúdo de Geometria Fractal na educação básica a fim de despertar o interesse dos nossos alunos pelo conhecimento matemático?

Assim, quando buscamos as respostas para estes questionamentos, chegamos à pergunta que norteia este trabalho: *De que forma a Investigação Matemática, por meio da Geometria Fractal, pode despertar e facilitar o ensino-aprendizagem de alguns conceitos matemáticos na educação básica?*

Partindo dessa pergunta diretriz realizamos neste trabalho o desenvolvimento de atividades que envolveram a investigação matemática, utilizando a Geometria Fractal. Para tanto, colocamos como objetivo geral: avaliar como uma proposta de atividades investigativas, usando a Geometria Fractal, pode desenvolver habilidades de raciocínio, reconhecimento e escrita formal de padrões, por alunos do Ensino Médio. E tomamos como alicerce os seguintes objetivos específicos:

- ✓ Introduzir a metodologia de Investigação Matemática como ferramenta para melhoria do ensino-aprendizagem de Matemática;
- ✓ Apresentar os fractais como objeto de estudo que desperte nos alunos o interesse pela busca do conhecimento;
- ✓ Identificar o nível dos nossos alunos quanto à escrita formal de padrões;
- ✓ Analisar o desenvolvimento dos alunos quanto à formalização de ideias a partir de padrões.

1.2 Organização do trabalho

O trabalho foi organizado em cinco capítulos, os quais descrevemos a seguir:

O primeiro capítulo, traça um pouco da minha trajetória como professora de matemática do Ensino Básico, e apresenta as questões que me inquietam enquanto educadora e que levam à reflexão da minha prática. Além disso, apresenta a questão que norteia este trabalho e os objetivos a serem alcançados.

O segundo capítulo apresenta o referencial teórico e versa sobre a Metodologia da Investigação Matemática, nos trazendo uma breve discussão do papel do professor e do aluno dentro desta perspectiva de ensino, além de abordar a história dos fractais, suas características, os fractais na natureza e na arte.

O terceiro capítulo aborda a metodologia utilizada para a pesquisa, fundamentada na pesquisa qualitativa, assim como descreve o campo de realização do trabalho, os indivíduos participantes e os instrumentos utilizados na coleta e análise dos dados.

O quarto capítulo apresenta as atividades propostas, de forma detalhada, e as discussões realizadas pelos alunos; expõe as dificuldades e questionamentos dos alunos durante a realização das atividades, além das observações realizadas em sala de aula.

O sexto capítulo versa sobre breves considerações acerca da aplicação de atividades investigativas usando a Geometria Fractal e apresenta as considerações finais, evidenciando a importância deste trabalho na tentativa de aquisição da atenção dos alunos para a busca do conhecimento, de modo com que o processo de ensino-aprendizagem passe a ter significado mais amplo e eficaz.

2. PRESSUPOSTOS TEÓRICOS E REVISÃO DE LITERATURA

2.1 Investigação Matemática

Ao longo dos anos, o ensino de Matemática passou por diversas transformações, buscando sempre atrair os estudantes para o desenvolvimento dessa ciência, que, embora pareça estática, nos apresenta frequentes novidades, sobretudo pelo trabalho detido de diversos estudiosos interessados pelo desenvolvimento de problemas matemáticos. A já conhecida metodologia tradicional, segundo a qual o professor seria o detentor do conhecimento, e o aluno um mero receptor, já não mais se justifica como procedimento que se pretende efetivo nas nossas aulas dos dias atuais, uma vez que esta não mais desperta o interesse dos nossos alunos, nem mesmo permite que o conhecimento matemático seja apreendido de maneira satisfatória e efetiva. Desse modo, algumas metodologias alternativas têm sido estudadas e difundidas por diversos pesquisadores no intuito de fazer com que as aulas de Matemática se tornem mais atrativas e que, assim, permitam que o processo de ensino-aprendizagem se dê de maneira mais significativa e, portanto, mais eficaz.

O ensino de matemática visa à formação integral do indivíduo, de modo a inseri-lo no contexto social, na medida em que busca contribuir para o desenvolvimento da sua capacidade de comunicação, de tomada de decisões, criação e resolução de problemas, bem como quando o incita a fazer inferências, argumentar, aperfeiçoar conhecimentos e trabalhar cooperativamente. Desta maneira, Corradi corrobora dizendo que as "tarefas de natureza investigativa e exploratória podem assumir relevância, pois os alunos viverão experiências com características semelhantes a dos matemáticos profissionais" (2011, p.5). Ainda sobre a natureza das atividades investigativas Fernandes acrescenta:

As investigações matemáticas em sala de aula têm sua importância, pois o desenvolvimento do trabalho em equipes, a utilização da argumentação, da comunicação matemática e da elaboração de relatórios, oportunizam aos alunos produzirem significados à matemática que mobilizam e desenvolvem através de seus registros. Além disso, ao socializarem suas produções aos outros grupos, eles podem validar (re)significar ou refutar muitas conjecturas que acreditavam ser verdades absolutas. Tudo isso ajuda a construir um ambiente de

conhecimento em sala de aula muito parecido com aquele vivido pelos matemáticos profissionais. (FERNANDES, p.13)

Notamos na fala de Fernandes que a investigação pode contribuir em vários aspectos para o desenvolvimento matemático e social dos nossos alunos, pois, conforme o estudioso, estes devem aprender a realizar trabalhos em grupo de modo a socializar seus conhecimentos com os colegas, processo que permite que cada um contribua para o desenvolvimento do outro indivíduo, assim como permite a troca de conhecimentos entre todos os integrantes do ambiente de aprendizagem (sala de aula).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's,1998, p. 24) caracterizam a Matemática "como uma forma de compreender e atuar no mundo, e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o conteúdo natural, social e cultural". Desse modo, temos o compromisso de formar cidadãos capazes de refletir e agir nas mais diversas situações cotidianas e, para isso, é necessário trazer os alunos para um ambiente onde a aprendizagem se dê de maneira prática e significativamente construída.

Nessa perspectiva, temos alguns estudos que nos direcionam a adotar metodologias diferenciadas, a fim de atrair a atenção dos alunos e levá-los a um aprendizado de forma contextualizada e integrada a outros conhecimentos. E, nesse aspecto, no ensino da matemática, isso não somente é possível, como também se faz necessário, visto que a respectiva disciplina – diferentemente do que se supõe – não se caracteriza como uma ciência imutável, mas o contrário disso, ela é viva e, como tal, passível de (re)construção de novos conhecimentos. Para tal processo, devemos introduzir, no ambiente da sala de aula, metodologias diferenciadas, tal como a resolução de problemas, investigação matemática, dentre outras.

Destacamos, ainda, que a tendência dos professores de Matemática se reservava, inicialmente, a buscar na Resolução de Problemas a melhor forma de diversificar as suas aulas, porém, mais recentemente, o processo de investigação Matemática vem ganhando espaço nas salas de aula, conforme podemos observar nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino

Fundamental, nos quais se observa a preocupação com o processo que prima pelas atitudes investigativas quando do trabalho com a Matemática:

[...] identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. (BRASIL, 2001, p.47).

A investigação matemática é uma tendência metodológica que vem sendo inserida no contexto educacional do Brasil nos últimos anos, a partir do momento em que passou a ser contemplada por grande parte dos professores cuja ação passou a incidir prioritariamente em atividades diversificadas e em práticas que estimulassem a resolução de problemas. Metodologia essa que tanto se caracteriza pela investigação quanto promove um processo de ensino-aprendizagem no qual os alunos são protagonistas aptos a trilhar seus próprios caminhos quando na busca de solução para os mais diferenciados problemas que lhes são apresentados.

O que difere as duas metodologias recai no ponto aonde se deve chegar: na resolução de problemas, os alunos têm um ponto de chegada conhecido, ou seja, deve buscar caminhos e métodos para alcançar um objetivo já determinado. Nesse caso, o aluno conhece o ponto de partida e de chegada, devendo apenas optar por um caminho a ser trilhado em busca da solução para a situação problema que lhe é apresentada, enquanto que, na investigação matemática, esse "alvo" (ponto de chegada) não é conhecido e, assim sendo, o aluno conhece apenas o problema e deve trilhar por vias desconhecidas para se chegar a um lugar, talvez, nunca alcançado. Segundo Ponte (et al 2013, p. 23), a investigação matemática "trata de situações mais abertas – a questão não está bem definida no início, cabendo a quem investiga um papel fundamental na sua definição". O que nos leva a concluir que cada um pode partir de um ponto diferente e, conseqüentemente, chegar a um alvo diferente. Corradi (2011, p. 167), baseando-se no pensamento de Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), nos apresenta a seguinte concepção:

[...] para que uma situação possa constituir uma investigação, é essencial que seja motivadora e desafiadora, não sendo imediatamente acessíveis, ao aluno, nem o processo de

resolução nem a solução da questão. As atividades de investigação contrastam-se claramente com as tarefas que são habitualmente usadas no processo de ensino-aprendizagem, uma vez que são muito mais abertas, permitindo que o aluno coloque as suas próprias questões e estabeleça o caminho a seguir.

Nesse aspecto, cabe ao professor orientar os seus alunos na atividade investigativa, de forma que possa alcançar os objetivos traçados para aquela atividade, uma vez que há caminhos que não levarão ao que o professor esperava. Essa interferência não deve interromper o processo de construção de conhecimento do aluno, mas deve, sim, direcionar para uma estratégia que se aproxime do que era esperado para o problema.

Na investigação matemática, o aluno é convidado a percorrer caminhos próprios em busca de algo novo, e esta atividade consiste em uma viagem pelo desconhecido, através da qual o aluno é incentivado a ser protagonista na descoberta e produção do conhecimento matemático, devendo ser capaz de perceber as particularidades do problema proposto, e assim formule as suas conjecturas acerca da solução. Na perspectiva de uma aula investigativa, deve-se considerar que o fundamental é que o aluno seja capaz de elaborar suas conjecturas e testá-las, assim como faz os matemáticos quando atestam a validade dos argumentos abordados, como Ponte, Brocardo e Oliveira afirmam:

Investigar em Matemática assume características muito próprias, conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas que se procuram testar e provar, se for o caso. As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura- teste-demonstração. (PONTE; BROCARDIO e OLIVEIRA, 2013, p. 10).

Além de ter que conjecturar soluções através de caminhos desconhecidos quando da tentativa de solução da situação problema que lhe é proposta, o aluno também deve ser capaz de validar as conjecturas formuladas, ou seja, não basta propor uma solução, é necessário que os alunos testem a solução apresentada e, por meios de argumentos irrefutáveis, demonstrem que a conjectura apresentada se trata da solução viável ao problema que lhe foi proposto. Desse modo, as aulas investigativas podem contribuir não só no sentido de levar o aluno a buscar soluções, mas também

para que possam refletir e testar as possíveis soluções apresentadas, possibilitando debates com os demais colegas e professor e construindo conhecimento.

Uma aula investigativa é aquela em que os alunos, além de formular problemas, são capazes de, usando seus conhecimentos matemáticos prévios, provar as suas conjecturas. Fiorientini e Lorenzato (2006, p.29) corroboram com essa ideia ao afirmar que:

[...] às aulas investigativas são aquelas que mobilizam e desencadeiam, em sala de aula, tarefas e atividades abertas, exploratórias e não diretivas do pensamento do aluno e que apresentam múltiplas possibilidades de alternativa de tratamento e significação. [...] Dependendo da forma como essas aulas são desenvolvidas, a atividade pode restringir-se apenas à fase de explorações e problematizações. Porém, se ocorrer, durante a atividade, formulação de questões ou conjecturas que desencadeiam um processo de realização de testes e de tentativas de demonstração ou prova dessas conjecturas, teremos, então, uma situação de Investigação Matemática.

Notamos, desse modo, que os alunos devem percorrer todas as etapas de uma aula investigativa, especialmente o momento de reflexão e avaliação de tudo que foi discutido e desenvolvido em grupo, durante o processo de investigação, para que todo o processo de investigação possa tornar o conhecimento produzido e compartilhado em algo sistematizado.

A ideia de que nas aulas investigativas os alunos deixam de ser passivos e assumem um papel de produtor de conhecimento é reforçada por Ponte et al (2013, p.23) quando este nos coloca que:

O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito de atividade genuína, constituindo por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentos com os seus colegas e o professor.

Os estudiosos que defendem o uso da investigação matemática em sala de aula como ferramenta que contribui no processo de ensino-aprendizagem argumentam que esta metodologia permite que os alunos deixem de ser apenas reprodutores de conhecimento matemático e assumam o papel de produtores.

Vejam as ideias de alguns desses estudiosos. Para Mendes (*apud* Corradi, 2011, p. 166), as atividades de investigação ajudam a desenvolver capacidades como a criação de “soluções pessoais para problemas novos, o desenvolvimento do espírito crítico e um sentido de uma maior cooperação”. Conforme Oliveira, Cunha e Segurado (*apud* Corradi, 2011, p. 166), as investigações matemáticas permitem ao aluno envolver-se na atividade desde o primeiro momento. Assim, consoante os críticos, seja na formulação de questões ou na elaboração de estratégias, seja na generalização de resultados ou no estabelecimento de relações entre conceitos e áreas da Matemática, seja na sistematização de ideias e resultados são múltiplas as oportunidades para o trabalho criativo, significativo para quem o empreende.

Segundo Brocardo (*apud* Corradi, 2011, p. 166), a realização de investigação na sala de aula pode ajudar a estabelecer um ambiente em que os alunos participam ativamente, facilitando a compreensão dos processos, ideias e da atividade matemática. Ainda corroborando com essa concepção, Santos et al. (*apud* Corradi, 2011, p. 166), declara que, para se aprender Matemática, deve-se fazer Matemática, pois é importante que os alunos tenham oportunidades para fazê-la. Para Ponte (2003, p. 02), investigar corresponde a realizar descobertas, recorrendo a processos metodologicamente válidos, como: formular problemas, explorar hipóteses, fazer e testar conjecturas, generalizar e construir argumentos e demonstrações.

Corradi (2011) nos apresenta a concepção de investigação matemática sob o ponto de vista de diversos estudiosos interessados no tema, tanto do Brasil quanto de Portugal, os quais, nos colocam que as aulas investigativas proporcionam um novo desafio para professores e alunos, tanto no ensino, quanto na aprendizagem, pois sua dinâmica demanda novas posturas e novos olhares sobre a aula de Matemática.

Desse modo, é possível considerar que as atividades de investigação na aula de Matemática permitem aos alunos uma participação efetiva, promovendo um ambiente de ensino-aprendizagem por meio de atividades que estimulam a criatividade dos alunos e, além disso, possibilitam ao aluno a

capacidade não só de formular soluções, mas principalmente de questionar as soluções apresentadas, buscando validá-las sob os princípios matemáticos já existentes. Ademais, permitem aos alunos desenvolverem suas capacidades por meio de experiências matemáticas e, por conseguinte, o desenvolvimento do pensamento matemático, como Mendes vem reforçar, as aulas de caráter investigativo

[...] poderão se manifestar como estratégias produtivas de se fazer Matemática, sob uma perspectiva sociocultural e construtiva, na qual o processo de criação matemática evidencia a elaboração de modelos matemáticos em ação, que conduzem professor e alunos à formação de novas concepções acerca do que seja Matemática, de como fazer e viver esse conhecimento, de maneira a criar, nessas matemáticas fatores imprescindíveis ao desenvolvimento de uma visão integral do conhecimento produzido pela sociedade humana. É nesse processo construtivo que os alunos estabelecem diálogos modeladores entre a realidade vivida e aquela construída na escola, desenvolvendo, assim, possibilidades de criar e recriar por si próprios. (MENDES, 2009, P. 18)

Nesse sentido, percebemos que o aluno passa a ser um protagonista do seu próprio conhecimento, trabalhando de forma autônoma, e que o processo investigativo pode contribuir de forma significativa para o ensino-aprendizagem, pois, quando o aluno se envolve na realização de atividades investigativas, ele desperta um olhar crítico sobre todo o processo de construção do conhecimento, conforme nos explica Braumann (2002, p.5):

Aprender matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão "detetivesca" indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção de sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles.

Nota-se, aqui, que, no momento em que o aluno se envolve significativamente no processo de investigação, ele começa a perceber o

conhecimento por outro ponto de vista, uma vez que ele passa a fazer parte da elaboração desse conhecimento assim como se torna capaz de contribuir para a sua formação enquanto sujeito crítico e reflexivo, capaz de atuar no contexto social, de comunicar-se, tomar decisões, resolver problemas, fazer inferências, argumentar, aperfeiçoar conhecimentos e intervir no meio social em que vive. Como vemos, tal resultado está em conformidade com as orientações que nos são colocadas pelos PCN's.

Corradi (2011) corrobora quando coloca que a investigação matemática pode contribuir para a construção do conhecimento, assim como possibilitar ao aluno a efetivação de atitudes de autonomia, cooperação e capacidade oral e escrita.

A investigação matemática deve ser levada para sala de aula com o intuito de apresentar problemas interessantes que tenham algum significado na vida do aluno. Além disso, deve o professor abordar um ou mais problemas nesse intento. Segundo Ian Stewart (*in* Ponte et al, 2013, p. 16), "um bom problema é aquele cuja solução, em vez de simplesmente conduzir a um beco sem saída, abre horizontes inteiramente novos". A partir do momento em que é apresentado um problema interessante e que é permitido ao aluno percorrer diversos caminhos e conhecimentos, a construção do saber norteia-se pelas próprias vivências e o aluno alça voo por caminhos que são do seu interesse, fazendo com que a matemática seja vista por um ângulo diferente, e assim possibilitando que se veja a sua importância e beleza.

Com tal procedimento, viabiliza-se ao aluno o desenvolvimento da capacidade de investigar, argumentar, comprovar, justificar e estimular a criatividade e a iniciativa pessoal.

Ainda sobre as atividades investigativas, Ponte et. al. (2013) nos coloca que a realização de uma boa aula investigativa envolve três fases indispensáveis. A primeira fica ao encargo do professor cuja ação consiste em fazer a introdução da tarefa (processo que deve ser breve) para que o aluno não perca o interesse pela atividade. Em seguida, os alunos realizam a investigação individual ou em grupos. Na última fase, não menos importante, tem-se a discussão dos resultados, momento no qual os alunos devem

apresentar as suas soluções, de modo a viabilizar a discussão dos conhecimentos produzidos, assim como compartilhar experiências e saberes.

Além disso, em se tratando do trabalho realizado pelo aluno durante a investigação matemática, os autores afirmam, ainda, que a mesma envolve quatro momentos importantes, conforme quadro abaixo:

Quadro - 1 Momentos na realização de uma investigação

Momento	Atividades envolvidas
Exploração e formulação de questões	- reconhecer uma situação problemática - explorar a situação problemática - formular questões
Conjecturas	- organizar dados - formular conjecturas
Testes e reformulação	- realizar testes - refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	- justificar uma conjectura - avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

(PONTE, et. al. 2013, p.21)

Todas as aulas investigativas devem passar por esses momentos, para que o trabalho possa ser desenvolvido de forma efetiva, sendo todas as fases importantes para o processo.

Alguns aspectos devem ser considerados quando aulas investigativas são propostas: em primeiro lugar, para que a proposta de atividades de cunho investigativo seja realizada com sucesso, o professor deve conhecer bem os seus alunos, pois esses devem ser capazes de realizar tarefas em grupo e também devem ter o espírito investigativo. Outro aspecto que contribui para o sucesso das atividades é o ambiente de aprendizagem que o professor cria junto com seus alunos na sala de aula, ponto fundamental na realização de tais tipos de atividade, uma vez que o ambiente de aprendizagem deve ser propício para o desenvolvimento intelectual do aluno.

2.2 O papel do professor

Na investigação matemática, o professor assume o papel de mediador do processo de investigação, orientando os seus alunos quanto às conjecturas que conseguiram formar a partir das observações analisadas pelo estudante,

porém não pode interferir de forma a apontar o caminho que o aluno deve percorrer. Esse direcionamento pode ser estabelecido por meio de questionamentos, de modo que o professor busque compreender a visão do aluno e levá-lo a perceber se o que estabeleceu de relações entre os objetos observados é, de fato, válido.

Para desempenhar seu papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, o professor precisa ter um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área, bem como uma concepção da Matemática como ciência que sempre permite novas (re)descobertas. Pereira (2004) nos mostra ainda que:

Integrar e implementar investigações matemática no currículo da disciplina requer por parte do professor, a criação e a adaptação de tarefas que proporcionem ao aluno o desenvolvimento de capacidades/aptidões de valores/atitudes, bem como a aquisição de técnicas e conhecimentos imprescindíveis a sua formação. Essa tarefa não é fácil para o professor, pois, requer o reequacionamento das suas próprias concepções sobre o assunto que ensina e sobre o próprio currículo (PEREIRA, 2004, p.2).

Nesse procedimento, o professor também deve assumir o papel de professor-investigador, uma vez que as soluções apresentadas pelos seus alunos podem se efetivar por diversos caminhos, desde que converjam para o mesmo resultado. Nesse aspecto, para a solução do problema apresentado, nem sempre é fácil propor atividades investigativas, pois nem todos os professores estão aptos a verificar a validade dos argumentos apresentados pelos alunos, o que poderia causar certo desconforto durante a realização da atividade. Contudo, para que a tarefa seja executada de forma satisfatória, cabe ao professor garantir que o aluno compreenda a atividade e os objetivos a serem alcançados.

Para Ponte (1999) o professor assume dois papéis fundamentais durante o processo de atividade investigativa, que pode ser uma função afirmativa, quando este propõe-se a esclarecer, explicar ou validar as proposições colocadas pelos alunos ou interrogativo, quando instiga, questiona e solicita do seu aluno que exponha as suas ideias tanto para o professor quanto para o grupo.

Desse modo, o professor assume um papel de suma importância durante uma aula investigativa, uma vez que ele deve apresentar aos estudantes o problema proposto de forma clara e objetiva, tão como deve levá-los a compreender o que realmente se busca num problema dessa natureza, para que possa explorá-lo nas suas mínimas especificidades. Além disso, para que os objetivos propostos sejam alcançados, cabe ao professor orientar, questionar e direcionar os seus alunos nos momentos que se fizerem necessários. E, ao fazê-lo, o professor os instiga a refletir sobre as próprias ações, tornando-os capazes de, não apenas elaborar soluções, mas, acima de tudo, de se fazerem seres reflexivos.

Propor uma atividade investigativa pode colocar o professor em uma situação desafiadora, visto que durante o processo de investigação podem ocorrer várias situações imprevisíveis. E isso requer do professor estar atento para que possa responder, de forma satisfatória, os questionamentos dos alunos diante dos obstáculos encontrados. Ponte et al (2013, p.49) salienta que, ao ser questionado por um grupo, o docente deve, antes de apresentar qualquer ideia, tentar compreender o trabalho que os alunos vêm desenvolvendo. O que constitui um desafio para o professor: perceber aonde os alunos pretendem chegar, uma vez que ele não acompanhou todo o processo.

Além disso, é necessário que o professor conheça bem o grupo de alunos para o qual irá propor as atividades, uma vez que estas devem estar de acordo com o nível de conhecimento dos discentes, bem como o professor precisa estabelecer com eles um ambiente propício para que as investigações possam ser realizadas com sucesso.

O professor, durante a realização de tarefas investigativas, deve estar atento ao desenvolvimento da atividade realizada por cada grupo para que possa intervir sempre que necessário e, desse modo, possa conduzir não somente um trabalho produtivo, como também promover um ambiente atrativo e, portanto, interessante. Além disso, deve ele garantir que o aluno tenha compreendido a proposta e como deve prosseguir para a realização da atividade.

É também de responsabilidade do professor apresentar o problema e, caso seja uma atividade através da qual os alunos poderão seguir por caminhos diversos, deve o professor delimitar os objetivos ao mesmo tempo deve limitá-los no desenvolvimento de suas ideias. Espera-se que, com os questionamentos direcionadores, os alunos sejam capazes de compreender e desenvolver a atividade, fazendo as discussões necessárias no grupo. Conforme nos reforça Ponte et al:

O professor tem de manter um diálogo com os alunos enquanto eles vão trabalhando na tarefa proposta, e no final cabe-lhe conduzir a discussão colectiva. Ao longo de todo este processo, precisa criar um ambiente propício à aprendizagem, estimular a comunicação entre os alunos e assumir uma variedade de papéis que favoreçam a sua aprendizagem. (PONTE; OLIVEIRA; BRUNHEIRA; VARANDAS e FERREIRA, 2016).

Acima de tudo, o professor deve estabelecer uma comunicação com os alunos, encorajando-os a mergulhar no universo de descobertas, a partir de conhecimentos e vivências adquiridas no decorrer de suas vidas, uma vez que os problemas propostos devem se dar de maneira que se estabeleça alguma relação com situações de conhecimentos prévios desses mesmos indivíduos.

Segundo Corradi (2011, p. 169), o professor deve assumir alguns papéis essenciais no desenvolvimento de uma aula investigativa:

Um deles é pensar matematicamente “em frente” aos seus alunos. Dois outros papéis são fornecer informação e promover a reflexão. Os três papéis restantes são desafiar os alunos, apoiá-los e avaliar o seu progresso. O professor exerce papel de orientador da atividade, o decorrer da aula depende, em grande parte, das indicações que fornece sobre o modo de trabalhar e do tipo de apoio que presta no desenvolvimento das investigações. Diversas são as situações em que o professor é chamado a intervir. Muitas vezes as solicitações feitas pelos alunos ao professor vão no sentido de validar suas ideias. Por isso, o professor deve estar sempre preparado a incentivar os alunos no desenvolvimento da atividade dando-lhe perspectivas sobre suas atitudes na realização das tarefas investigativas.

O professor deve estar pronto para atender às demandas dos alunos, fazendo com que estes superem possíveis dificuldades, assim como destacando aspectos relevantes sobre o problema em questão. Porém, não deve interferir diretamente na solução, permitido que os discentes desenvolvam

suas próprias ideias. E, nesse trabalho, o professor deve posicionar-se como investigador, levantando questões que permitam aos alunos validarem ou não as suas conjecturas, procedimento com o qual o aluno deixa de receber o conhecimento de forma pronta e acabada, e passa a produzir seu próprio conhecimento a partir de conceitos matemáticos já conhecidos.

Cabe também ao professor observar o desempenho dos seus alunos no decorrer da execução das atividades e permitir-lhes que apresentem suas ideias, pois somente assim será capaz de avaliar o desenvolvimento do aluno. Corradi (2011, p. 171), nos diz que:

Nas aulas de investigação matemática é preciso que o professor dê um retorno aos alunos quanto ao desempenho de suas atividades devida a expectativa do aluno em ver como é que o seu trabalho está em relação a avaliação formativa e somativa realizada pelo professor.

Mesmo no âmbito de atividades investigativas faz-se necessário o processo avaliativo, uma vez que é por meio deste que o professor coleta dados para traçar estratégias que tornam o aprendizado dos seus alunos mais significativo.

2.3 O papel do aluno

Na perspectiva de uma aula investigativa, o aluno assume o papel de produtor de conhecimento, perfazendo os caminhos que foram, anteriormente, trilhados por matemáticos. Para tal, não é suficiente conhecer um algoritmo e aplicá-lo à situação proposta, é necessário, de antemão, que o aluno seja capaz de tomar decisões, para que consiga traçar as melhores estratégias e chegar à solução dos problemas que lhe são propostos. Além disso, o aluno deve ser capaz de verificar a validade de seus argumentos, o que é, muitas vezes, possível, visto que são inúmeras as vezes com que nos deparamos com alunos que elaboram, eles próprios, soluções condizentes com a situação que lhes foi proposta. Contudo, pode ocorrer de, quando questionado quanto à sustentação daquela proposta, o aluno não conseguir encontrar argumentos que validem a sua solução proposta. Fator ao qual o professor deve também estar atento para, desse modo, buscar viabilizar circunstâncias de superação (ou minimização) dessa dificuldade.

Dessa maneira, no processo de investigação matemática, o aluno assume um papel central, atuando como sujeito, visto que será capaz de efetivamente produzir conhecimento matemático, assim como será capaz de perceber que a matemática não se resume a conhecimento de regras, fórmulas e conceitos, mas, sim, um processo de raciocínio com o qual se chega a uma forma lógica suscetível de novas formulações de conceitos e de produção de novos conhecimentos. Ponte et al (2013, p.23) nos coloca que:

[...] o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo.[...] Ao requerer a participação do aluno na formulação das questões a estudar, essa atividade tende a favorecer o seu desenvolvimento na aprendizagem. (PONTE, et. al, 2013)

Desse modo, podemos dizer que, quanto mais o aluno participa e utiliza os seus conhecimentos prévios para a realização das atividades investigativas, mais conhecimento esse aluno será capaz de produzir, uma vez que o envolvimento dele é um dos aspectos fundamentais para o processo de ensino aprendizagem, não somente em Matemática, mas nas diversas áreas do conhecimento. É necessário, pois, que o aluno tenha interesse pela atividade, e que esta tenha alguma significação para a sua vida, pois somente assim ele será capaz de se entregar à realização da atividade investigativa.

É importante, ainda, que o aluno compreenda não só que estudar matemática ultrapassa os limites do refazer exercícios e aprender métodos, como também que ela permite percorrer novos caminhos, tão como propicia o desenvolvimento de novos métodos e, conseqüentemente, a percepção do conhecimento matemático realizado por experiências próprias.

2.4 Geometria Fractal

Por muitos anos, a Geometria Euclidiana teve um importante papel na representação plana da nossa realidade, contribuindo significativamente para solucionar vários problemas. Porém, ao longo dos tempos, foi-se percebendo que existem padrões na natureza que esta geometria já não era capaz de representar de forma fidedigna. E foi a partir dessa carência de representação desses objetos que Mandelbrot começou os seus estudos, buscando uma

geometria que fosse capaz de representar aqueles elementos que não eram contemplados pela geometria plana. Surge daí uma nova geometria denominada Geometria Fractal.

A Geometria Fractal está relacionada à conhecida Teoria do Caos, com a qual é possível observar ordem e padrões em representações, tais como o irregular, o aleatório, o imprevisível e, também, o que se pode considerar caótico. As figuras geométricas tradicionais, como um quadrado, por exemplo, também possuem essa característica. É possível dividir um quadrado em certo número de réplicas menores dele mesmo.

Muitos são os matemáticos que dedicaram seus estudos ao desenvolvimento do que hoje conhecemos com Fractais, porém foi Mandelbrot Benoit que deixou a maior contribuição nesses estudos, destacando-se, inclusive, como o primeiro a utilizar o termo para representar as novas descobertas. No séc. XIX, o matemático Weierstrass estudou funções com características fractais.

Podemos encontrar os fractais na própria natureza, em elementos do nosso cotidiano, tais como: na estrutura dos flocos de neve, na linha da costa de uma região, nas estruturas das plantas, na couve-flor, em árvores e mariscos, assim como em quaisquer outras estruturas nas quais as ramificações se caracterizam como variações de uma mesma forma padrão.

Os fractais apresentam um apelo visual muito grande, uma vez que são figuras de uma beleza admirável, são formas geométricas abstratas que apresentam na sua formação uma estrutura diferenciada, com padrões complexos e infinitos. Todas estas formas e padrões possuem algumas características comuns e há uma curiosa e interessante relação entre estes objetos e aqueles encontrados na natureza.

Os fractais são gerados por meio de funções iterativas, muitas vezes bastante simples, mas que resultam em objetos considerados de beleza fascinante, caracterizados por repetir um determinado padrão, permitindo-lhe uma importante característica que é a autossimilaridade.

Ao observarmos alguns elementos na natureza fica difícil acreditar que tais formas surgiram naturalmente, visto que apresentam uma estrutura de padrões tão bem definidas que aparentemente foram construídas. Sabemos hoje, que com o uso de programas de computadores é possível reproduzir tais formas usando fórmulas matemáticas que possam traduzi-las.

É possível notar a disseminação da Geometria Fractal nos níveis básicos de ensino, visto que muitos autores têm inserido questões a serem desenvolvidas nos exemplares que vêm sendo adotados pelas escolas. Isso reforça o potencial das atividades investigativas usando fractais, para o desenvolvimento do pensamento matemático intuitivo e construtivo a partir de atividades que despertam o interesse do aluno nos diversos níveis de ensino.

Figura 01: Infográfico com a Geometria Fractal no livro didático

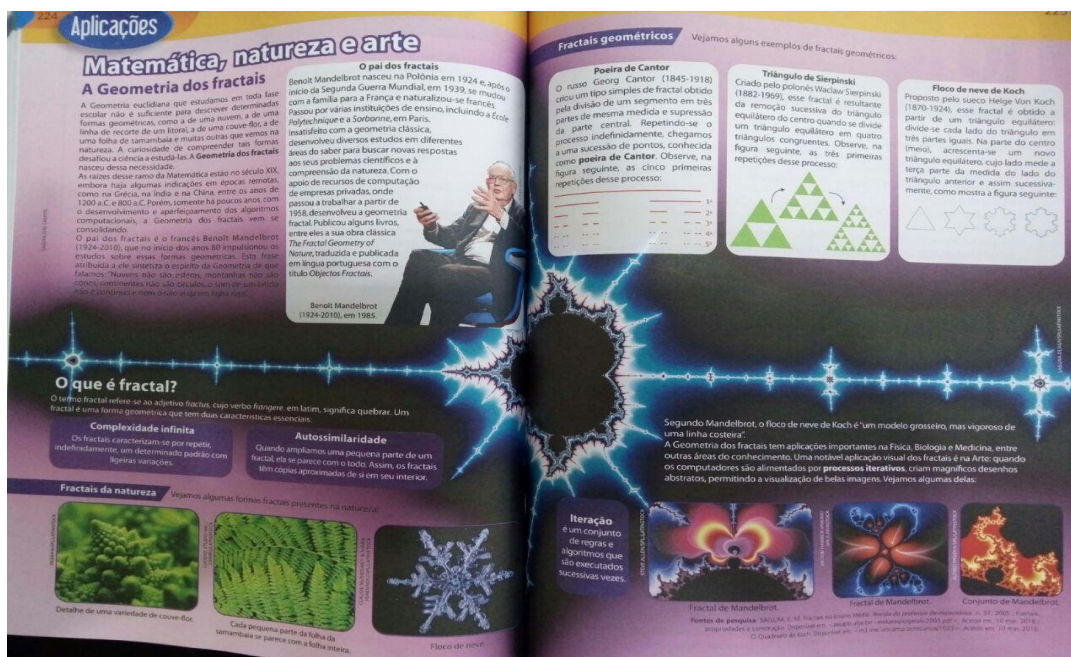
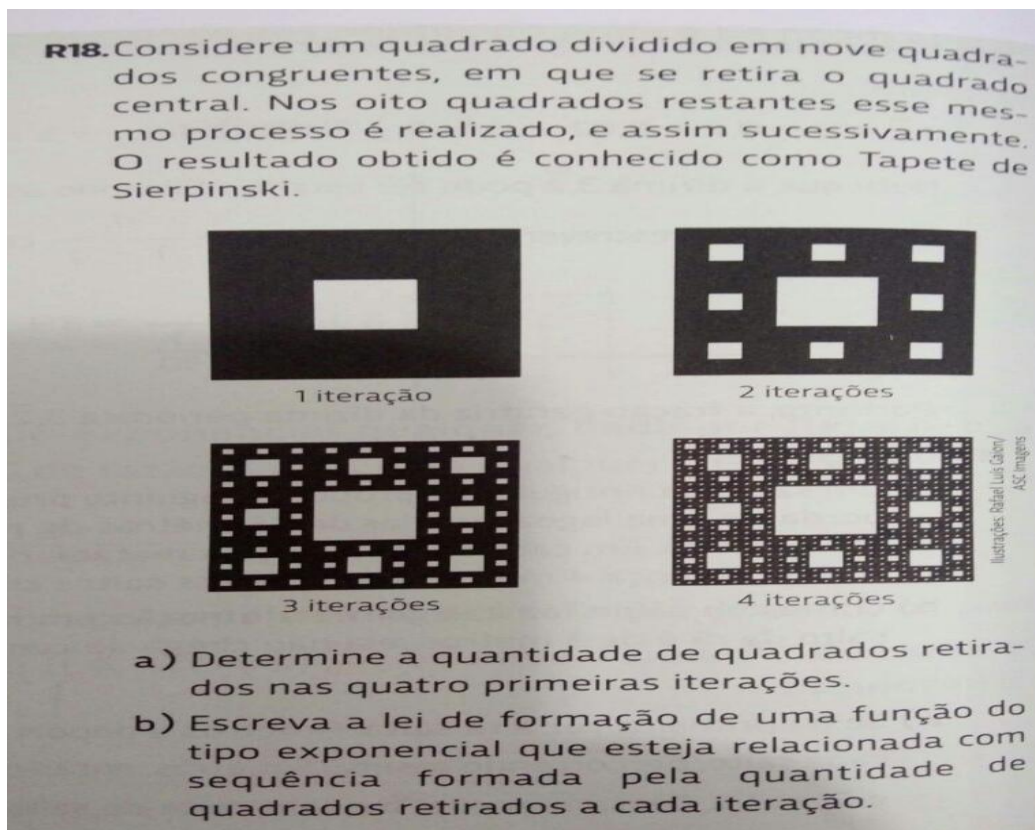


Imagem extraída do livro Matemática, Ciência e Aplicação. Vol. 2

Na figura 1 a Geometria Fractal aparece num infográfico, onde é apresentado um breve histórico, a biografia de Mandelbrot, alguns fractais clássicos, as principais características e como se apresentam na natureza. As atividades que envolvem a Geometria Fractal aparecem nos livros, especialmente, quando tratamos de conteúdos como sequências e função exponencial.

Na figura 2 apresentamos uma atividade envolvendo o fractal conhecido como tapete de Sierpinsky, que aparece no livro Matemática para compreender o mundo, de Kátia Stocco e Maria Diniz, vol. 1.

Figura 02: Atividade envolvendo fractais no livro didático



Fonte: Livro "Matemática para compreender o mundo", vol 1

Muitas outras atividades deste tipo, principalmente, envolvendo o triângulo de Sierpinski, permeiam os livros tanto do Ensino Médio como do Ensino Fundamental II, o que possibilita ao professor apresentar aos alunos um pouco da Geometria Fractal, e utilizá-las para desenvolver investigativas.

2.5 Fractais e suas características

Fractais são figuras geométricas formadas a partir de interações em outros objetos. De acordo com Sallum (2005, p.1):

Um fractal é uma figura que pode ser quebrada em pequenos pedaços, sendo cada um desses uma representação do todo. Não podemos ver um fractal porque é uma figura limite, mas as etapas de sua construção podem dar uma ideia da figura toda.

Seu nome se deve ao fato de que a dimensão de um fractal não é um número inteiro.

Os fractais são figuras de uma geometria estudada pelo matemático polonês Benoit Mandelbrot, considerado por muitos como o "pai dos fractais". Nela percebemos características diferentes daquelas que conhecemos na escola quando estudamos a Geometria Euclidiana, uma vez que com ela podemos representar e descrever figuras cujas dimensões não podem ser representadas por números inteiros. A palavra Fractal tem origem no latim e significa "quebrar, fragmentar". Barbosa (2002, p.12) descreve ainda que "a Geometria Fractal de Mandelbrot reflete uma natureza de irregularidades, de reentrâncias, saliências e depressões, de fragmentação." Além disso, os fractais apresentam estruturas geométricas de grande complexidade e beleza, ligadas às formas da natureza, ao desenvolvimento da vida e à própria compreensão do universo. As imagens de objetos fractais possuem a característica de aspectos em que o todo pode ser percebido em cada parte.

Os fractais têm como principal característica o fato de, ao tomarmos um pequeno pedaço, conseguirmos observar uma figura semelhante, numa escala reduzida da figura original. Observamos tal fenômeno em figuras existentes na natureza, como é o caso da couve flor, galhos de árvores, raios, dentre outros. Observamos também a beleza dos fractais em figuras geradas por meio de programas computacionais, através de funções interativas, tais como a Samambaia de Barnsley, o fractal de Mandelbrot, dentre outros.

Capra (1999, p.118) registra, ainda, com outros exemplos, a autossimilaridade observada na natureza:

Rochas em montanhas assemelham-se a pequenas montanhas; ramificações de relâmpagos, ou bordas de nuvens, repetem o mesmo padrão muitas e muitas vezes; linhas litorâneas dividem-se em porções progressivamente menores, cada uma delas mostrando arranjos semelhantes de praias e de promontórios. Fotografias de um delta de rio, as ramificações de uma árvore ou as ramificações repetidas dos vasos sanguíneos podem exibir padrões de uma semelhança notável que somos incapazes de dizer qual é qual. Essa semelhança de imagens provenientes de escalas muito diferentes tem sido conhecida desde há longo tempo, mas, antes de Mandelbrot, ninguém dispunha de uma linguagem matemática para descrevê-la.

Os fractais são entes matemáticos com características intrínsecas que lhes confere uma beleza rara, seja ela percebida quando observamos figuras da natureza, seja quando geradas por meio de computadores.

As principais características de um fractal são a autossimilaridade, a complexidade infinita e a sua dimensão.

- ✓ A autossimilaridade, também chamada por Mandelbrot de homotetia interna, consiste em se poder obter réplicas menores da figura através de sua divisão ou de sua ampliação. Quando as réplicas são sempre idênticas e obtidas através do mesmo fator de redução, diz-se que a figura possui autossimilaridade estrita. Algumas sendo um fractal, é recursivo. Isso significa que, quando se executa um determinado procedimento, no decorrer do mesmo encontra-se como sub-procedimento, o próprio procedimento anteriormente executado.
- ✓ A complexidade infinita refere-se ao fato de que o processo de geração de uma figura é definida como um fractal recursivo.

Os fractais são distribuídos em três categorias principais que se baseiam na forma como são gerados ou formados. São eles:

- Sistema de funções iteradas - que possuem uma regra fixa de substituição geométrica. São exemplos desse tipo de fractal o Conjunto de Cantor, o Floco de neve de Koch, a Esponja de Menger, entre outros.
- Relação de recorrência - são fractais onde há a recorrência em cada ponto do espaço, podem também ser chamados de fractais de fuga do tempo. Como exemplo, temos o Conjunto de Mandelbrot.
- Gerados por processos estatísticos e não determinísticos. Como exemplo deste, podemos citar o voo de Lévy e os terrenos fractais.

Ainda, também podem ser classificados de acordo com sua autossimilaridade. Existem três tipos de autossimilaridade encontrados em fractais:

- ✓ Autossimilaridade exata: é a forma em que a autossimilaridade é mais marcante, evidente. O fractal é idêntico em diferentes escalas. Fractais

gerados por sistemas de funções iterativas geralmente apresentam uma autossimilaridade exata.

- ✓ Quase-autossimilaridade: é uma forma mais solta de autossimilaridade. O fractal aparenta ser aproximadamente (mas não exatamente) idêntico em escalas diferentes. Fractais quase-autossimilares contém pequenas cópias do fractal inteiro de maneira distorcida ou degenerada. Fractais definidos por relações de recorrência são geralmente quase-autossimilares, mas não exatamente autossimilares.
- ✓ Autossimilaridade estatística: é a forma menos evidente de autossimilaridade. O fractal possui medidas numéricas ou estatísticas que são preservadas em diferentes escalas. As definições de fractais geralmente implicam alguma forma de autossimilaridade estatística (mesmo a dimensão fractal é uma medida numérica preservada em diferentes escalas). Fractais aleatórios são exemplos de fractais que possuem autossimilaridade estatística, mas não são exatamente nem quase autossimilares.

Quando observamos os objetos de estudo da Geometria Euclidiana, percebemos que estes apresentam suas dimensões bem definidas e quantificadas. Por exemplo, um ponto tem dimensão zero (0), pois não é possível medi-lo; uma reta tem dimensão um (1), pois possui comprimento; um plano tem dimensão dois (2), pois ele apresenta comprimento e largura, enquanto o espaço em que vivemos apresenta dimensão três (3), uma vez que possui comprimento, largura e altura.

Destacamos, desse modo, que uma das características dos fractais é a sua dimensão. Barbosa (2002, p.18) afirma que, inicialmente, Mandelbrot usou os conceitos de dimensão para definir fractal “um fractal é por definição, um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica.” A dimensão fractal tornou-se muito importante para compreender então a complexidade dos fractais. Capra (1999, p.119) descreve que: “Quanto mais denteados forem os contornos de um relâmpago ou as bordas de uma nuvem, e quanto mais acidentadas forem as formas de uma linha litorânea e de uma montanha, mais altas serão suas dimensões fractais.” Para o cálculo de qualquer dimensão fractal, seja ela representada por um

número inteiro ou não, tem-se a seguinte igualdade matemática: $n = m^D$. A letra D representa a dimensão fractal procurada; n representa o número de peças da figura fractal e m o fator de aumento ou coeficiente de proporcionalidade da figura fractal. A resolução dessa igualdade matemática implica na sua aplicação no conceito de logaritmo, ou seja, se: $n = m^D \Leftrightarrow D = \log_m n$. Aplicando o algoritmo de mudança de base de logaritmos, temos: $D = \log_m n \Leftrightarrow D = \frac{\log n}{\log m}$.

2.6 Fractais Clássicos

Alguns fractais assumem papel relevante dentro da Geometria Fractal, pois apresentam características próprias e por serem pioneiros nos estudos desta Geometria.

2.6.1 Conjunto de Cantor

Criado por Cantor ¹, o Conjunto de Cantor é considerado o primeiro fractal, cuja construção será descrita a seguir.

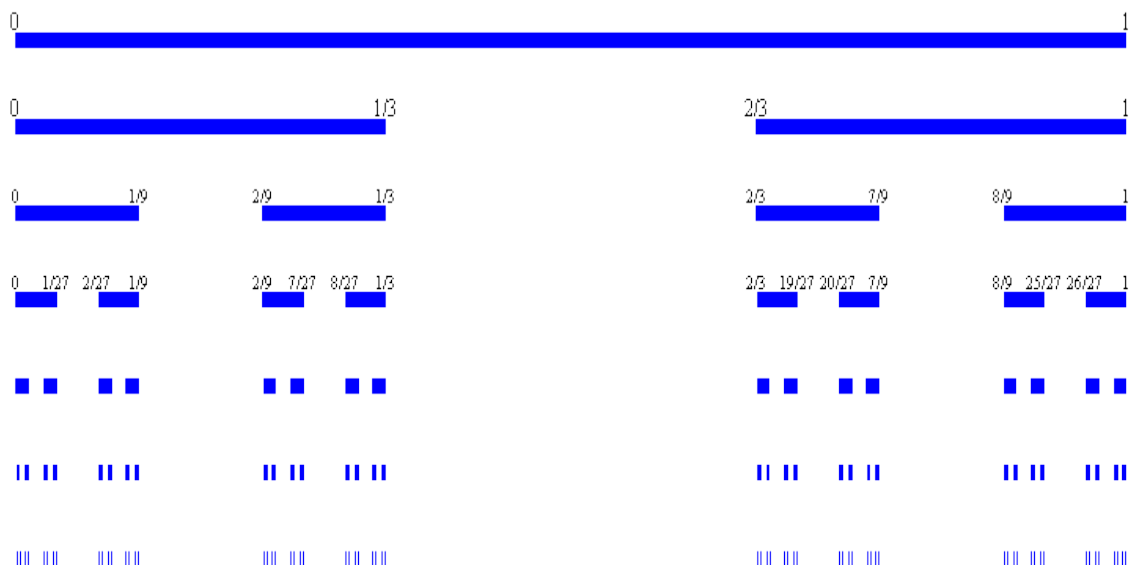
Para construirmos o Conjunto de Cantor começamos com o segmento que representa o intervalo fechado [0,1]. Dividimos este segmento em três partes e jogamos fora o pedaço do meio, ficando com os outros dois terços extremos. Repetimos, depois, o mesmo procedimento com cada um dos segmentos restantes, sempre jogando fora o terço médio de cada divisão. Os quatro segmentos restantes sofrerão o mesmo processo de divisão e retirada do terço médio, dando origem a oito segmentos cada vez menores. Este

¹ Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 - 1918), matemático descendente de portugueses, nascido na Rússia, adotou nacionalidade alemã, tornou-se Doutor em Matemática na Universidade de Berlim em 1867. Foi professor da Universidade de Hale, dedicou muito de seus estudos em pesquisas relativas à fundamentação da matemática, principalmente no tocante à parte hoje conhecida como Teoria dos Conjuntos. Provou que os conjuntos infinitos não têm, todos, a mesma potência, e provou também que o conjunto dos números racionais é enumerável, e o conjunto dos reais é contínuo.

processo deve ser repetido eternamente ("*ad infinitum*"), sempre dividindo cada segmento restante por três e dispensando o terço médio de cada divisão.

Na figura 3 a seguir, é possível observar as 6 primeiras interações do Conjunto de Cantor.

Figura 03 - Construção do fractal Conjunto de Cantor



http://www.igm.mat.br/aplicativos/index.php?option=com_content&view=article&id=564:cantor&catid=85:extras

2.6.2 Triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski foi descoberto pelo matemático Waclaw Sierpinski² (1882-1969). É obtido através de um processo iterativo de divisão de um triângulo equilátero em quatro triângulos semelhantes, visto que um destes triângulos está invertido, em relação ao original, e é retirado do triângulo original, sobrando apenas os outros três. Assim, repete-se, no passo seguinte,

² **Wacław Sierpinski**, matemático polonês, nascido na Varsóvia, em 14 de março de 1882, faleceu em 21 de outubro de 1969, na Varsóvia. Apesar de dificuldades impostas pela ocupação da Polônia pelo Império Russo, Sierpinski entrou para o departamento de física e matemática da Universidade de Varsóvia em 1899. Vários objetos matemáticos foram denominados em honra a Sierpinski, ou foram estudados por ele: triângulo de Sierpinski, tapete de Sierpinski, número de Sierpinski, curva de Sierpinski, dentre outros.

o mesmo procedimento em cada um dos três novos triângulos, com a orientação original, e assim sucessivamente.

O fractal obtido é estritamente autossimilar, ou seja, as partes da figura são cópias reduzidas de toda a figura.

Figura 04 - Construção do triângulo de Sierpinski



<http://professorandrios.blogspot.com.br/2011/06/geometria-fractal-arte-e-matematica-em.html>

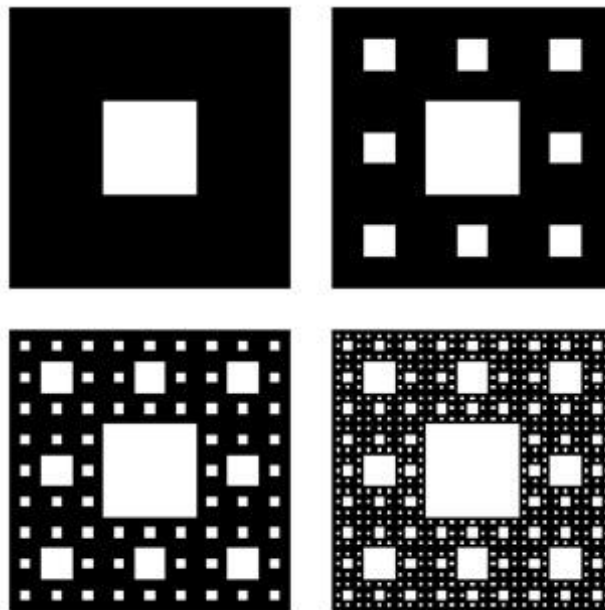
Além deste, temos também o tapete de Sierpinski, que é formado a partir de um quadrado. Para construí-lo, seguimos os passos descritos abaixo:

- ✓ subdivide-se este quadrado em nove partes do qual se remove a parte central, e teremos, então, oito pequenos quadrados;
- ✓ novamente, com cada quadrado, subdivide-se em nove partes, do qual se retira a parte central;
- ✓ este processo, chamado iteração, pode ser repetido infinitamente.

Após efetuarmos o processo descrito acima algumas vezes, obtemos a figura apresentada a seguir, na qual é possível observar as quatro primeiras etapas da construção do tapete de Sierpinski.

Uma característica interessante acerca do triângulo e do tapete de Sierpinski, é que estes partem de figuras geométricas planas, com dimensões euclidianas e além disso após cada interação uma parte da figura é retirada e assim sendo a área desses fractais tendem a zero.

Figura 05 - Construção do tapete de Sierpinski



<http://professorandrios.blogspot.com.br/2011/06/geometria-fractal-arte-e-matematica-em.html>

2.6.3 Curva de Kock e floco de neve

A curva de Kock é um dos primeiro fractais de curvas a ser descrito por Niels Kock³, se inicia a partir de uma reta, enquanto o floco de neve corresponde a mesma curva, entretanto a sua construção parte de um triângulo equilátero. A "curva do floco de neve" de Koch é uma curva contínua que não tem um tangente em qualquer ponto.

Para a construção da curva de Kock consideramos inicialmente um segmento de reta e a partir deste são realizados os seguintes passos:

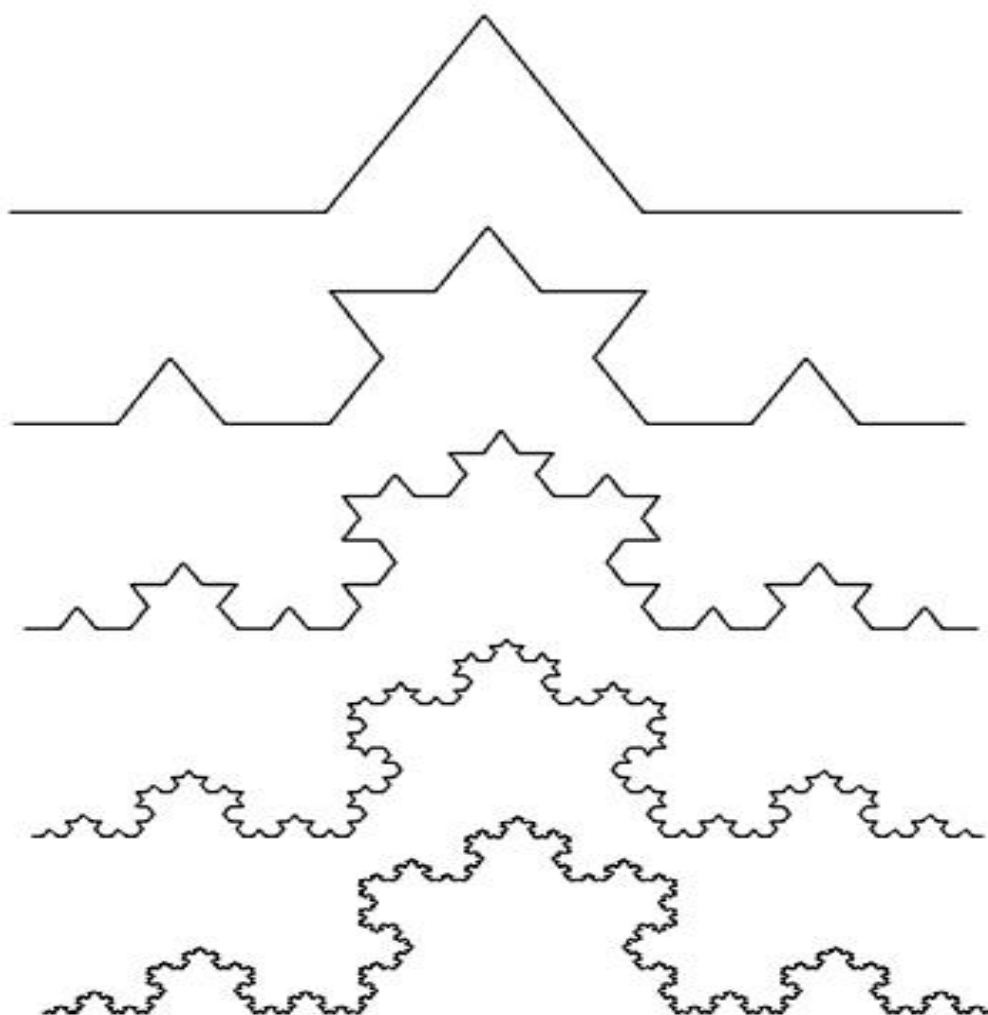
1. Divide-se o segmento de reta em três segmentos de igual comprimento.

³ Niels Fabian Helge Van Koch nasceu em 1870, Estocolmo, graduou-se em doutor na Universidade de Estocolmo em 1892. Foi um matemático sueco que deu o seu nome ao famoso fractal conhecido como Floco de Neve Koch, que foi um dos primeiros fractais de curvas a ser descrito.

2. Desenha-se um triângulo equilátero, em que o segmento central, referido no primeiro passo, servirá de base.
3. Apaga-se o segmento que serviu de base ao triângulo do segundo passo.

Os passos aqui descritos podem ser observados na figura abaixo, que nos mostra as primeiras interações na construção da curva de Koch.

Figura 06 - Construção da curva de Koch

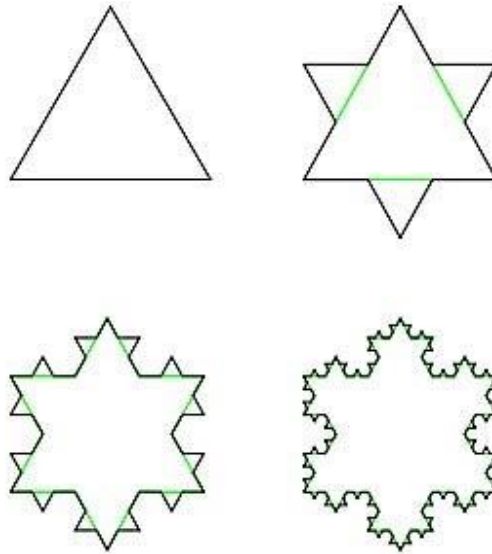


<https://ojovemarquiteto.wordpress.com/2010/05/31/ron-eglash-e-os-fractais-africanos/>

Para a construção do floco de neve, consideramos os passos descritos para a curva de Koch, tomando como referencial inicial o triângulo equilátero.

A seguir, podemos observar as quatro primeiras interações na construção do floco de neve.

Figura 07 - Construção do floco de neve



<https://en.wikipedia.org/wiki/File:KochFlake.svg>

2.7 Fractais na Natureza

A geometria fractal está presente não só na matemática, mas também em outras áreas do conhecimento como na química, na física, na biologia, dentre outras. São figuras onde é possível perceber a semelhança entre o todo e parte de si própria.

Embora a maior parte da população não consiga observar a beleza matemática que nos é apresentada por meio da natureza, essa nos traz muitas demonstrações de como o universo natural é perfeito, pois, por exemplo, ao observarmos uma folha de samambaia, conseguimos perceber que existe uma autossimilaridade entre a folha como um todo e uma parte de si, do mesmo modo podemos observar essa beleza em outros elementos naturais, desde os aspectos da nuvem, do relâmpago, das montanhas e das árvores até a distribuição das galáxias. Além disso, é possível observar elementos fractais também na química, na biologia, na medicina, na arte, na engenharia e na matemática.

A seguir, apresentaremos alguns objetos da natureza que são representados por meio de fractais.

Figura 08 - Fractal num brócoles romano



<http://www.caliandradocerrado.com.br/2014/10/fractais-na-natureza-tudo-e-matematica.html>

Acima, temos a imagem do brócoles romano no qual se observa facilmente a sua principal característica, que é o fato de uma parte ser semelhante ao todo, o que nos leva a caracterizá-lo com uma figura fractal.

Figura 09 - Fractal nos rios e seus afluentes



<http://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/Civiliza%C3%A7%C3%A3oaficana2.htm>

Nos afluentes de rios notam-se características fractais de autossimilaridade, o que torna a natureza exuberante na sua forma.

Figura 10 - Fractal das samambaias



Aqui temos a beleza da natureza sendo expressada por meio de uma planta que apresenta claramente uma estrutura fractal, sendo esta reproduzida, por suas características, a partir do uso de computadores e softwares destinados a construção de fractais, pela samambaia de Berseley.

Figura 11 - Fractal na flor Aloe africana



<https://paisagismodigital.com/noticias/?id=Plantas-matematicas:-Os-fractais-na-natureza&in=439>

Essa imagem carrega características de objetos matemáticos como o espiral, além da semelhança do todo com suas partes, o que nos leva a caracterizá-la como um elemento fractal.

Figura 12 - Fractal nos raios



<https://pattindica.wordpress.com/2008/09/24/17-exemplos-de-fractais-na-natureza/>

Os raios, assim como outros elementos da natureza, nos permitem contemplar o quanto a matemática pode se fazer presente em diversas situações do mundo real, levando nos a refletir sobre a potencialidade dessa ciência e seus objetos de estudo.

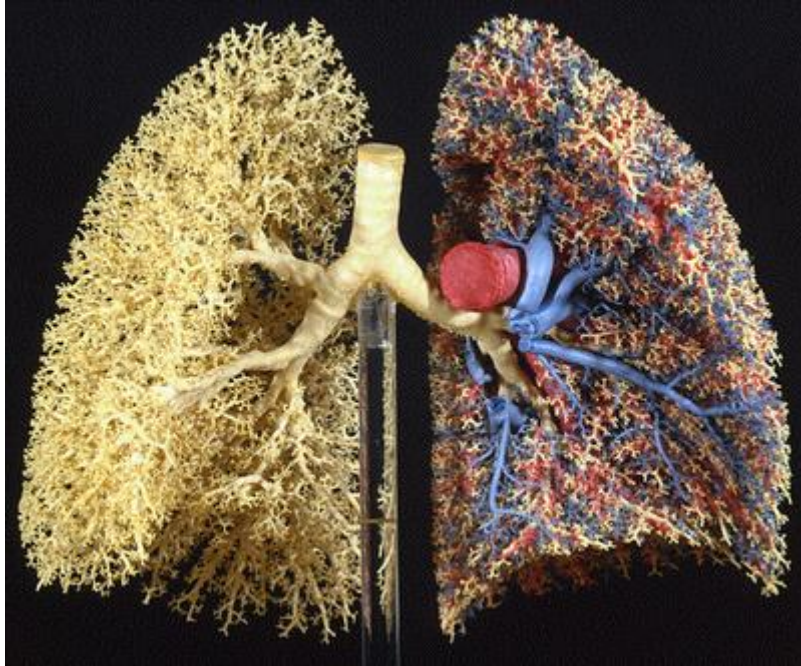
Figura 13 - Fractal nas árvores



<http://www.caliandradocerrado.com.br/2014/10/fractais-na-natureza-tudo-e-matematica.html>

As árvores são outros elementos da natureza nas quais é possível perceber a beleza da matemática, pois percebe-se uma semelhança entre a árvore como um todo e suas partes, quando tomamos apenas um pequeno galho.

Figura 14 -Fractais nos pulmões



<http://allmirante.blogspot.com.br/2008/03/economia-de-fractais.html>

Nesta imagem do pulmão notamos facilmente características fractais e podemos notar como a matemática pode estar inserida em outros ramos das ciências, tornando-se útil nas diversas áreas de conhecimento.

A natureza mostra-se tão bela que apresenta, em formas naturais, características que parecem ter sido criadas em computadores, de tão perfeitas que são, a exemplo disso, temos as características apresentadas pelos nossos pulmões.

3. METODOLOGIA DA PESQUISA E ASPECTOS TEÓRICOS PRÁTICOS

A metodologia utilizada no processo de pesquisa observou todo o processo de interpretação e descrição das atividades desenvolvidas em ambiente natural.

A pesquisa qualitativa tem caráter exploratório, isto é, estimula os entrevistados a pensar livremente sobre algum tema, objeto ou conceito. Mostra aspectos subjetivos e atinge motivações não explícitas, ou mesmo conscientes, de maneira espontânea. Dessa forma, podemos afirmar que o presente objeto de estudo baseou-se no método de pesquisa qualitativa através do qual o professor pesquisador buscou, por meio de atividades investigativas, promover a independência dos alunos na construção do seu conhecimento, bem como os motivou a buscar, de forma reflexiva e por meio da investigação matemática, soluções para as situações propostas.

Borba e Araújo (2013, p. 21) reforçam que a pesquisa qualitativa "é o caminho para escapar da mesmice. Lida e dá atenção às pessoas e às suas ideias,[...]. E a análise dos resultados permitirá propor os próximos resultados".

Borba e Araújo (2013, p. 25) ainda nos coloca que "as pesquisas realizadas segundo uma abordagem qualitativa nos fornecem informações mais descritivas, que primam pelo significado dado às ações. Bogdan e Biklem (*in Borba e Araújo*, 2013, p. 25) apresentam uma boa caracterização de pesquisas qualitativas. Segundo os estudiosos:

1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal (p.47)
2. A investigação qualitativa é descritiva (p.48)
3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos (p.49)
4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva (p.50)
5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa (p.50)

Assim sendo, este trabalho permeia os caminhos da pesquisa qualitativa, uma vez que o professor assume o papel de investigador, direcionando os seus alunos no desenvolvimento das atividades propostas,

bem como priorizando os caminhos que os levaram a construir seu conhecimento. Processo que, para o aluno, se deu de maneira gradual, contínua e mediante re/descobertas de resultados previamente apresentados. Nesse processo de pesquisa, os alunos são co-autores no ambiente de ensino-aprendizagem e na construção do seu conhecimento, pois os mesmos têm maior participação neste processo de produção e apresentação de resultados obtidos por meio das investigações. Nesse contexto de pesquisa qualitativa, analisa-se o ponto de vista dos alunos, e fornece, deste modo, maior riqueza ao desenvolvimento do trabalho de pesquisa.

Araújo e Borba (2004) enfatizam que pela pesquisa qualitativa deve perpassar uma visão de conhecimento que esteja em sintonia com procedimentos como entrevistas, análises de vídeos, interpretações, dentre outros meios de coleta. Desse modo, o que se convencionou chamar de pesquisa qualitativa prioriza procedimentos descritivos na medida em que traz em seu bojo uma visão de conhecimento que, explicitamente, admite a interferência subjetiva, assim como explora o conhecimento que se caracteriza como contingente, negociável, flexível e não como uma verdade irrefutável, rígida. Daí dizer que o que é considerado "verdadeiro", dentro desta concepção, é sempre dinâmico e, portanto, passível de ser mudado ou alterado. O que não significa dizer que se deva ignorar qualquer dado do tipo quantitativo, ou mesmo qualquer pesquisa que seja baseada em outra concepção de conhecimento.

Além dos aspectos relacionados à pesquisa qualitativa, este trabalho de investigação matemática com fractais também permeou os caminhos descritos pela pesquisa participante, através da qual o pesquisador também faz parte do objeto de pesquisa, visto que, quando são propostas atividades investigativas no ambiente de sala de aula, o professor/pesquisador acaba se tornando, também, objeto de estudo. Aguiar e Rocha (1997) corroboram quando nos coloca que:

Na pesquisa-intervenção, a relação pesquisador/objeto pesquisado é dinâmica e determinará os próprios caminhos da pesquisa, sendo uma produção do grupo envolvido. Pesquisa é, assim, ação, construção, transformação coletiva, análise das forças sócio-históricas e políticas que atuam nas situações e

nas próprias implicações, inclusive dos referenciais de análise. É um modo de intervenção, na medida em que recorta o cotidiano em suas tarefas, em sua funcionalidade, em sua pragmática - variáveis imprescindíveis à manutenção do campo de trabalho que se configura como eficiente e produtivo no paradigma do mundo moderno" (Aguilar e Rocha, 1997).

A pesquisa-intervenção permite que o pesquisador faça parte do processo de investigação, tornando-se, desse modo, objeto pesquisado ao mesmo tempo em que é promotor da pesquisa. Seu papel se caracteriza, assim, como sujeito e objeto em um processo de aprendizado (para o professor) e de viabilização da aprendizagem (para o educando). Tal trabalho permite que o aluno faça intervenções e contribua para a realização das atividades propostas. Cabe ao professor, nesse sentido, direcionar os estudantes para caminhos que efetivamente contribuirão para o desenvolvimento de novos conhecimentos. As atividades com fractais, aqui propostas, permitiram o uso desta metodologia, visto que o professor/pesquisador também participou das investigações propostas quando ao sugerir aos alunos, por meio de questionamentos, os caminhos pelos quais poderiam seguir para alcançar o objetivo proposto.

As discussões anteriores, embasadas em concepções apresentadas por estudiosos, vêm assegurar que o trabalho realizado com os alunos do 2º ano do Ensino Médio contempla os direcionamentos da pesquisa qualitativa, uma vez que na abordagem realizada durante a pesquisa o que realmente tinha relevância no desenvolvimento das atividades era o processo de descobertas, e o envolvimento do aluno. Neste aspecto, destaca-se que o professor não estava interessado em dados quantitativos, sendo que esses não eram considerados no momento de avaliação e ressignificação dos dados obtidos.

3.1 Sujeitos da Pesquisa

Os sujeitos desta pesquisa constitui-se de alunos de uma turma de 2º ano do Ensino Médio, do Colégio Estadual de Piripá, sendo esses escolhidos por coincidir com o trabalho de sequências, conteúdo que possibilita o uso da investigação matemática usando fractais, e que estava sendo abordado na série no período que a pesquisa foi aplicada. A realização das atividades

serviram para introduzir os conceitos de progressões aritméticas e geométricas. Com os sujeitos escolhidos para a realização da pesquisa, propomos atividades investigativas utilizando fractais no segundo semestre de 2015, entre os meses de agosto a novembro, e concluídas no primeiro semestre de 2016. Porém antes de realizarmos a pesquisa como o grupo de alunos foi proposto um projeto piloto junto aos professores da rede Municipal de Ensino de Piripá, para verificar a viabilidade de apresentar as atividades investigativas aos alunos do Ensino Médio.

3.2 Etapas da pesquisa

Para realizar a pesquisa de campo com os dois grupos citados, separamos em duas etapas, conforme a seguir:

1ª etapa

A primeira etapa se constituiu de uma oficina, com duração de quatro horas, aplicada aos professores de Matemática da Rede Municipal de Piripá, durante a jornada Pedagógica de 2015, na qual foi apresentado a esses professores do Ensino Fundamental II o conceito de fractais, e como os mesmos se apresentam na natureza. Em seguida, foram propostas as seguintes atividades: atividade 1, que consiste na investigação de padrões ocorridos na iteração de um quadrado; atividade 2, que aborda conceitos de reconhecimento de padrões na construção de uma figura geométrica. Além destas, que foram propostas para o grupo de professores também foram propostas para o grupo de alunos, as atividades seguintes: explorando fractais triminó, construção de cartões fractais e a exploração do triângulo de Sierpinsky. Ambas as atividades envolvem fractais que podem ser utilizadas para trabalhar conceitos matemáticos como: sequências, potenciação, áreas de figuras planas, a ideia de infinito dentre outros.

As atividades propostas tinham como objetivo levar o aluno a descobrir os conceitos matemáticos ali envolvidos, promovendo, desse modo, a construção do conhecimento pelo próprio aluno. Os professores conseguiram resolver as atividades propostas após algumas discussões de conjecturas que lhes permitissem obter uma generalização a partir de cada interação dos

objetos fractais apresentados. Em algumas atividades os professores apresentaram certas dificuldades para encontrar a lei de formação geral que pudesse representar as relações dadas, e, como tal, necessitaram, nesse momento, da interferência do professor ministrante no tocante a questionamentos que os fizessem perceber quais aspectos que passavam despercebidos. Questionados sobre a possibilidade de se levar as atividades para a sala de aula, os professores colocaram que as atividades propostas eram interessantes, porém achavam um pouco complexas para os seus alunos, entretanto afirmaram que a metodologia seria interessante e que poderia ser adaptada para ser aplicada aos alunos do Fundamental II.

Foram propostas atividades de construção com lápis e papel, bem como fazendo uso de um software matemático que possibilitasse ao aluno construir e observar os padrões de alguns fractais propostos.

2ª etapa

A segunda etapa, realizada com uma turma de 2º ano do Ensino Médio, no Colégio Estadual de Piripá, foi realizada entre junho e novembro de 2015 e concluídas no primeiro semestre de 2016. Nessa etapa, propomos algumas atividades para trabalhar o conteúdo de progressões aritméticas e progressões geométricas, buscando desenvolver nos alunos a capacidade de visualização de padrões e regularidades, além de estimulá-los na formalização matemática desses padrões.

Durante as aulas os alunos foram divididos em pequenos grupos (de no máximo 4 alunos) para que realizassem as atividades propostas, visando levá-los a discutir e analisar opiniões diversas acerca da atividade, de modo a enriquecer as ideias para a generalização dos padrões observados.

As atividades, aqui propostas, visavam à observação e construção, por parte dos alunos, de alguns fractais, além da formalização das observações de padrões apresentadas em cada fractal.

Inicialmente, o professor falou com os alunos sobre o significado de fractais e apresentou alguns exemplos de fractais que se apresentam na

natureza, de modo a despertar o interesse dos alunos para o assunto, sobretudo por meio da beleza e das peculiaridades dos mesmos, mostrando que, embora estejam ao nosso redor, não os notamos, ainda que estejam muito próximos.

Foram utilizadas oito horas aula para o desenvolvimento das atividades, que eram sempre propostas de forma escrita para que os alunos pudessem registrar as suas observações e conclusões diante do que lhes era proposto. Ao final de cada aula, essas atividades eram recolhidas para a análise do professor-pesquisador.

3ª etapa

A terceira etapa constitui da aplicação de um questionário ao grupo de alunos envolvidos na pesquisa, visando conhecer a opinião dos mesmos sobre as atividades desenvolvidas, e o quanto a metodologia utilizada contribuiu para o empenho no desenvolvimento das atividades propostas, bem como da contribuição das atividades investigativas para absorção dos conteúdos relacionado o que lhes foram apresentados.

3. 3 Procedimentos para obtenção dos dados

Na realização deste trabalho, utilizamos a observação e anotações por parte do professor e do questionário aplicado aos alunos, de modo a verificar os aspectos de relevância na realização da proposta de atividades.

A observação é um método que se utiliza dos sentidos para a obtenção de determinados aspectos da realidade observada. Realiza-se através do contato direto do pesquisador com o fenômeno observado com o intento de se obter informações. Esse processo demanda grande habilidade por parte do observador, bem como a sua imparcialidade no momento de julgar e registrar os dados observados.

Um aspecto importante é que, por meio da observação, é possível captar uma variedade de situações ou fenômenos que não são obtidos por meio de perguntas, uma vez que, observados diretamente na própria realidade, transmitem o que há de mais importante.

Já o questionário é um dos procedimentos mais utilizados para obter informações na pesquisa qualitativa. É uma técnica que apresenta as mesmas questões para todo o grupo, e apresenta elevada confiabilidade. Podem ser desenvolvidos para medir atitudes, opiniões, comportamentos e outras questões.

De acordo com Lüdke e André (1986), "a observação ocupa um lugar privilegiado nas novas abordagens da pesquisa educacional. [...] a observação possibilita um contato pessoal e estreito do pesquisador com o fenômeno pesquisado". (p. 26). Como a pesquisa foi realizada pelo professor em sua sala de aula, podemos afirmar que esse fato contribuiu para o processo de investigação, visto que conhecendo o perfil da turma, o professor-pesquisador já tem, de antemão, certa familiaridade com os alunos e, conseqüentemente, já pode prever os desafios que os mesmos poderiam encontrar com esse tipo de atividade. As aulas investigativas possibilitaram ao professor conhecer o raciocínio de seus alunos, bem como as estratégias que utilizam para resolver problemas.

Vale (2004) coloca que "as observações são a melhor técnica de recolha de dados do indivíduo em actividade, em primeira mão, pois permitem comparar aquilo que diz, ou que não diz, com aquilo que faz." (p.180). Por meio das observações, foi possível construir um diário de bordo com as experiências vivenciadas no processo de investigação, o que permitiu a oportunidade de compreender, complementar e ilustrar as informações recolhidas durante a tarefa.

A coleta de dados foi realizada pelo professor-pesquisador por meio de questionário, anotações feitas pelos estudantes e anotações realizadas por meio das observações realizadas pelo professor (diário de bordo).

4. ATIVIDADES COM FRACTAIS: apresentação, discussão e análises

Neste capítulo, visamos apresentar os resultados observados na aplicação das atividades foram propostas para professoras de do Ensino Fundamental II e para uma turma do Ensino Médio, tendo como base a investigação matemática por meio de fractais. Atividades essas adaptadas de outras que podem ser encontradas em livros e dissertações.

Na primeira etapa, realizada com os professores, foram propostas as atividades um e dois descritas nos anexos.

A oficina proposta aos professores teve duração de 4h/aula. No primeiro momento, o professor/pesquisador falou um pouco sobre os Fractais: os que são gerados por meio de interações matemáticas e os que se apresentam nas formas naturais, assim como os que representam figuras com características diferenciadas e que são consideradas Fractais. Desse modo, apreendemos a atenção dos professores para as atividades propostas, uma vez que a beleza dos Fractais despertou neles o interesse de se aprofundar um pouco mais nesse universo da matemática.

Em seguida, falou-se um pouco sobre as tendências de metodologias matemáticas de ensino utilizadas atualmente, abordando especificamente a investigação matemática, e como essa pode contribuir no processo-aprendizagem, visto que o aluno tem papel de produtor de conhecimento, e não meramente reprodutor. Com os alunos, foram apresentadas as mesmas atividades descritas para os professores, porém, como o trabalho realizado com esses teve maior duração, foi possível a realização de outras atividades.

4. 1 Análise da atividade 1

A atividade 1 foi proposta tanto para os professores como para os alunos. Conforme constatado em questionário aplicado aos alunos, a grande maioria nunca havia realizado atividades investigativas em sua vida acadêmica. Os professores também relataram não terem vivenciado atividades investigativas na sua prática em sala de aula, bem como não tiveram a

oportunidade de desenvolver atividades fazendo uso desta metodologia na sua formação.

A atividade foi apresentada de forma escrita e oral, e conforme Ponte et al. (2013) nos orienta que, ao apresentar uma atividade investigativa, o professor deve tomar o cuidado de não oferecer informações em excesso sobre a realização da atividade, assim como não pode permitir que o aluno fique sem compreender o que se espera que ele desenvolva, pois isso poderia desencadear o desinteresse pela atividade.

Na primeira atividade realizada, na oficina com os professores do Ensino Fundamental, propomos uma atividade típica da construção de fractais, na qual deveria, a partir de um quadrado, ir gerando novos quadrados por meio de interações. Iniciamos com um quadrado que, em seguida, foi dividido em quatro quadrados. Na próxima etapa, um quadrado deveria ser dividido em quatro novos quadrados, e assim seguia infinitamente a construção da figura. Para o primeiro questionamento, os professores não tiveram dificuldades em notar a sequência que representaria a quantidade de quadrados após cada interação. Nesta etapa todos os professores escreveram a sequência numérica

1 4 7 10 13 ...

como sendo a sequência que representa a quantidade de quadrados obtidos na figura após cada interação. Tendo estes percebido que, em cada etapa, um quadrado é dividido em quatro novos quadrados, gerando, deste modo, a cada etapa, três novos quadrados para a figura.

No segundo questionamento, alguns professores não conseguiram perceber que a sequência estabelecida no item anterior se tratava de uma progressão aritmética de razão 3 e, desse modo, apresentaram dificuldades para estabelecer uma lei que expressasse matematicamente a relação número de interações e número de quadrados da figura. Percebendo essa dificuldade, o professor-pesquisador começou a fazer questionamentos de modo a levar os professores a observarem os dados obtidos no item anterior, direcionando-os para a solução. Após essa interferência do pesquisador e da discussão estabelecida entre os professores, todos chegaram à conclusão que poderiam representar matematicamente essa relação por meio da fórmula:

$$a_n = 3n - 2$$

Para concluir a aplicação desta atividade, o professor ainda fez alguns questionamentos sobre como estabelecer a área da figura gerada pelo fractal. Após alguns comentários dos professores observados, o professor-pesquisador mostrou, por meio do programa online Fractal Tool, qual seria a área do fractal para as três primeiras interações. O programa citado nos permite criar fractais e observar algumas características deste após algumas interações. A seguir, para descrever os dados observados, apresentamos uma reprodução da tabela elaborada pelos professores.

INTERAÇÃO	NÚMERO DE QUADRADOS
0	1
1	4
2	7
3	10
⋮	⋮
⋮	⋮
N	$3n - 2$

Mesmo sendo proposta a professores, foi possível observar, em alguns momentos, a insegurança dos mesmos no desenvolvimento da atividade.

Quando a atividade 1 foi proposta aos alunos, notou-se que as dificuldades apresentadas para a realização foram semelhantes às apresentadas pelos professores, sendo que os alunos conseguiram estabelecer, após discussões em grupo, a sequência do primeiro item solicitado e, após discussão em grupos e interferência do professor-pesquisador, conseguiram estabelecer a relação matemática para a interação e a quantidade de quadrados da figura. Do mesmo modo, foi estabelecida uma discussão superficial acerca da área gerada pelo fractal e, além disso, foi apresentado o programa Fractal Tool para que fosse observado como se estabelece a sequência que descreve a área do fractal em análise.

4. 2 Análise da atividade 2

A atividade 2 também foi realizada com o grupo de professores e com os alunos de uma turma de 2º ano do Ensino Médio. A mesma foi retirada de uma proposta de atividades com fractais, em sala de aula, elaborada pelo professor Guilherme Erwin Hartung, encontrada no site Portal do Professor do MEC.

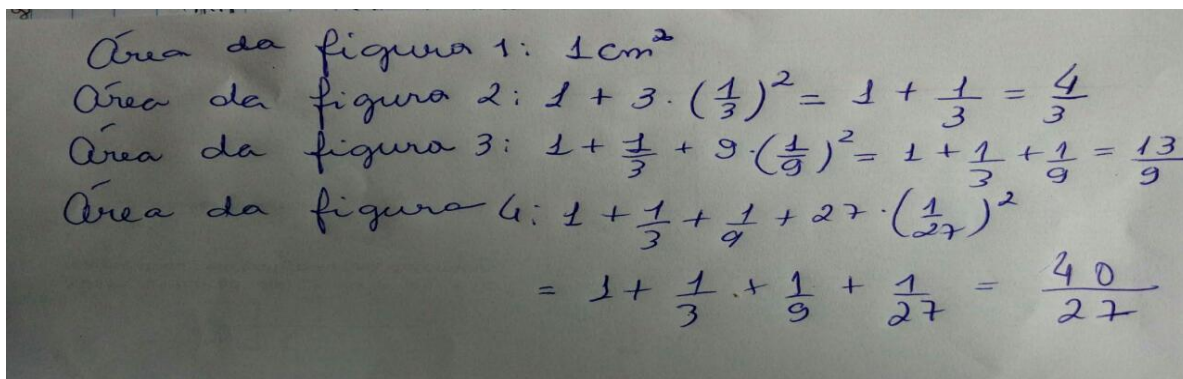
Assim como a primeira atividade, esta também foi apresentada de forma oral e escrita, permitido ao aluno conhecer os objetivos a serem alcançados no desenvolvimento da atividade proposta.

Para a segunda atividade proposta, tanto os professores como os alunos já iniciaram realizando cálculos para elaborar uma tabela de modo que fosse possível determinar a área solicitada, e além disso pudessem estabelecer uma relação que permitissem calcular a área do fractal gerado em qualquer interação.

O primeiro ponto, foi facilmente resolvido após a realização de alguns cálculos, porém o segundo envolvia um pouco mais de conhecimento da soma de sequências o que inviabilizou o sucesso na realização da atividade, entretanto o professor-pesquisador apresentou-lhes algumas considerações e juntos concluíram a atividade.

A seguir, apresentamos como a atividade foi desenvolvida por um dos grupos observados.

Figura 15: Atividade desenvolvida pelo grupo 2



Handwritten calculations showing the area of four figures:

$$\begin{aligned} \text{Área da figura 1: } & 1\text{cm}^2 \\ \text{Área da figura 2: } & 1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \\ \text{Área da figura 3: } & 1 + \frac{1}{3} + 9 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{13}{9} \\ \text{Área da figura 4: } & 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + 27 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^2 \\ & = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{40}{27} \end{aligned}$$

Arquivo pessoal da professora

A figura 15, nos mostra como os alunos, após discussões e cálculos, sistematizaram a resposta para a atividade proposta, além destes cálculos, alguns alunos foram além buscando expressar de forma geral a área gerada após n interações, e com a ajuda do professor, concluíram que a área da figura se trata da soma de progressão geométrica, no caso de n interações, uma soma de progressão geométrica infinita.

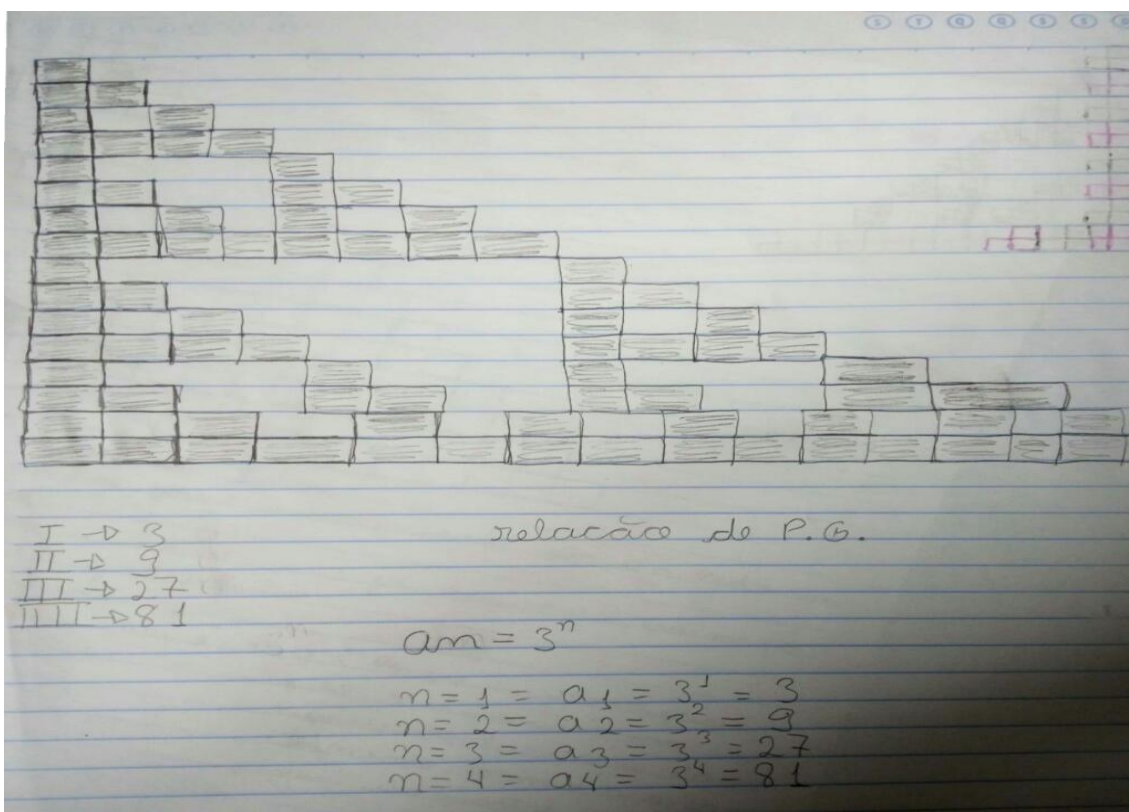
4.3 Análise da atividade 3

Esta foi a terceira atividade proposta aos alunos. A aula iniciou-se com a divisão dos alunos presentes em grupos de 4 ou 5, para que pudessem realizar a atividade. Em seguida, o professor distribuiu para os alunos a atividade impressa, solicitou que fizessem a leitura silenciosa. Logo após, o professor realizou a leitura junto com toda a turma e os orientou a tentar resolver as questões propostas de forma que não houvesse a intervenção do professor para que, desse modo, fossem valorizadas as ideias expostas pelos colegas nas discussões em grupos.

Para o primeiro item solicitado, o professor pediu aos alunos que observassem o que vinha acontecendo para que pudessem perceber o padrão e, assim, conseguissem realizar a tarefa solicitada. Os discentes assim procederam até perceberem que cada quadradinho do nível 3 deveria ser substituído por um triminó e, assim, formar o novo fractal. Todos os grupos conseguiram desenhar o fractal no nível 4 de forma coerente. Observamos apenas que alguns alunos, mesmo sabendo como deveriam proceder à atividade, se perderam no momento de executar tal tarefa e, conseqüentemente, alguns levaram um tempo maior para conseguir desenhar o fractal solicitado.

A seguir, na figura 16, podemos apreciar o desenvolvimento da atividade por um dos grupos de trabalho, na qual é possível perceber algumas das estratégias adotadas pelos alunos para conseguir realizar a atividade proposta. Todos os grupos observados iniciaram a atividade construindo o nível IV do fractal triminó, e a partir do que desenharam começaram as observações acerca das questões solicitadas.

Figura 16: Atividade desenvolvida pelo grupo 2

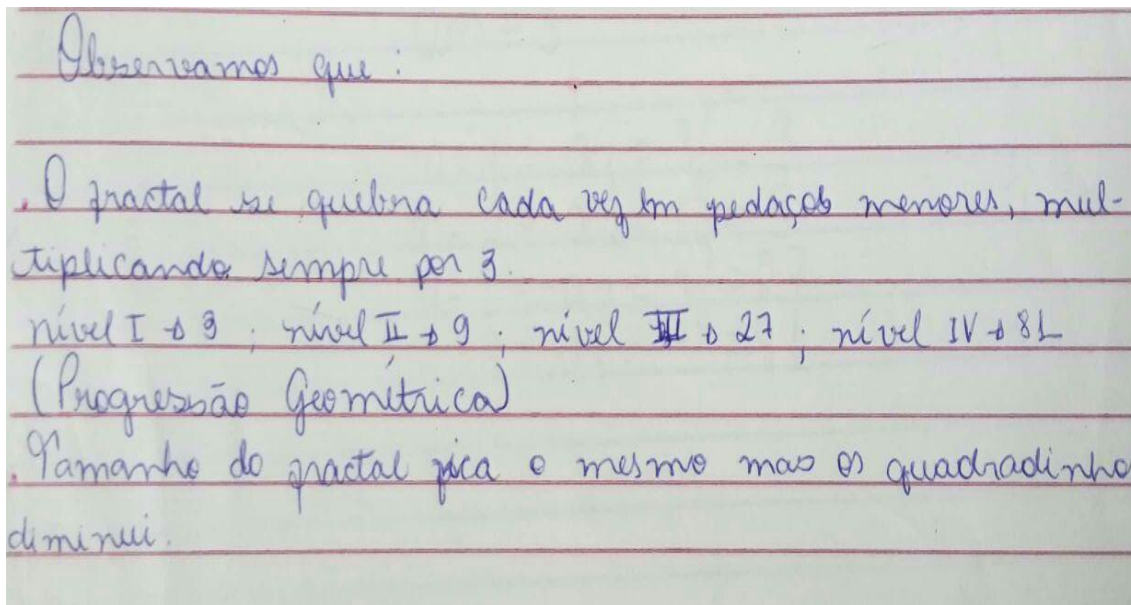


Arquivo pessoal da professora

Para os itens seguintes, os alunos passaram a fazer observações e contagens, montando tabelas para chegar às suas conclusões por meio das tabelas construídas. Os alunos tiveram um pouco mais de facilidade em perceber o que acontecia na passagem de cada nível do fractal. Para o item no qual o aluno deveria descrever a relação existente entre o número de quadradinho e nível do fractal, a maioria dos grupos conseguiu destacar que o número de quadrados triplica em relação ao nível anterior, e que os valores que representam essa quantidade de quadrados estabelecem uma progressão geométrica de razão $q = 3$, em que o nível do fractal representa a posição, e a quantidade de quadrados representa o termo da sequência. Para este item, apenas um grupo não conseguiu estabelecer essa relação, embora terem notado que tal operação se caracterizava como uma sequência cuja razão é igual a 3, afirmaram que se tratava de uma progressão aritmética. Durante as discussões finais, foi possível perceber que os alunos do grupo citado

conseguiram perceber tal relação, porém não conseguiram expressar-se de forma satisfatória.

Figura 17: Atividade realizada pelo grupo 3



Arquivo pessoal da professora

Percebe-se aí, claramente que os alunos não conseguem expressar-se de forma conveniente, ou seja, não apresentam domínio entre a escrita e o pensar matemático.

Para o item no qual deveriam descrever a relação entre o perímetro e o nível do fractal, a maior parte dos grupos apresentaram dificuldades, sendo necessária a intervenção do professor-pesquisador para esclarecer aos alunos o que chamamos de perímetro de uma figura plana. Após esse momento de esclarecimentos, os alunos passaram a fazer contagens nos fractais construídos e, como no item anterior, completaram a tabela para que pudessem perceber a relação. Nessa tarefa, apenas um grupo foi capaz de descrever satisfatoriamente a relação estabelecida.

Por fim, para o último item, os grupos utilizaram-se das tabelas construídas para chegar às suas conclusões, estabelecendo, assim, as leis matemáticas que pudessem expressar as relações: número de quadrados x nível do fractal e perímetro x nível do fractal.

A seguir, reproduzimos a tabela construída pela maioria dos alunos.

Nível	Número de quadradinhos	Perímetro do fractal
1	3	8
2	9	16
3	27	32
⋮	⋮	⋮
N	3^n	2^{n+2}

O que foi possível perceber ao término desta atividade é que, embora os alunos conseguissem perceber o princípio da construção do fractal triminó, apresentavam dificuldades para expressar-se por meio da linguagem matemática, ou seja, não conseguiam generalizar e realizar as representações algébricas. Tais dificuldades foram observadas no grupo como um todo, visto que, para se chegar às expressões matemáticas, foi necessária a intervenção do professor em alguns momentos. Além disso, observamos que temos alunos com poucas noções de potenciação, o que, até certo ponto, dificulta as generalizações e formalização por meio de expressões matemáticas.

4.4 Análise da atividade 4

Os alunos acharam essa atividade bem interessante, pois eles estavam manuseando o objeto para que pudessem realizar a contagem da quantidade de paralelepípedos gerados em cada interação, bem como observar a quantidade de paralelepípedos geral do objeto. Além disso, ao término da atividade, alguns alunos personalizaram os cartões e presentearam alguns colegas.

A construção de cartões fractais é uma atividade interessante a ser desenvolvida com os alunos, pois permite abordar conteúdos, como sequências numéricas e cálculo de volume de paralelepípedos, utilizando o material concreto que, segundo estudiosos, contribui de forma significativa no processo de ensino-aprendizagem, permitindo o contato direto do aluno com o objeto de estudo.

A investigação matemática requer que os alunos participem de forma ativa e, quando estas atividades são proporcionadas de forma que o aluno

possa manusear o objeto a ser investigado, é muito provável que esse envolvimento seja ainda mais significativo, pois permite um desenvolvimento ativo, levando o aluno a visualizar e refletir as suas ações.

Na atividade 4 proposta, os alunos tiveram a oportunidade de manusear o cartão fractal construído, conforme orientações da atividade, e a partir desta construção responderam as questões sugeridas. Na figura 18, observamos as respostas apresentadas por um dos grupos.

Figura 18: Atividade desenvolvida pelo grupo 1

Questões

Quanto são os paralelepípedos após a 4ª interação? E após a 10ª?

$4^{\circ} \rightarrow 15$ e $10^{\circ} \rightarrow 1023$

É possível estabelecer uma relação entre a interação realizada e o número de paralelepípedos? Qual seria essa relação?

Sim, a relação seria duas vezes o expoente menos um

Como podemos expressar algebricamente essa relação? A expressão algébrica obtida está relacionada a que conteúdo matemático?

$2^n - 1$ progressões geométricas

INTERAÇÃO	Nº DE PARALELEPÍPEDOS NOVOS	Nº DE PARALELEPÍPEDOS
1	1	1
2	2	3
3	4	7
4	8	15
5	16	31

Arquivo pessoal da professora

Para as questões apresentadas, foi possível notar que apenas um dos grupos não conseguiu responder de forma satisfatória, porém a maioria dos alunos tiveram algumas dificuldades para conseguir observar os padrões e, como tal, levaram algum tempo para chegar ao ponto desejado. Quanto ao segundo questionamento, houve alunos que não conseguiram descrever a relação que observaram no item anterior, e responderam que a relação existente seria: "duas vezes o expoente, menos um", ou "o resultado da soma

dos números de interação e da diferença entre ambas", ou ainda, "é o resultado da interação anterior, multiplicado por ele mesmo, subtraído um". Tais afirmações nos levam a concluir que o item anterior teve resposta satisfatória pelo fato de o aluno construir o fractal e, a partir deste, fazer a contagem, pois quando eles foram solicitados a descrever a relação existente entre o número de paralelepípedos e a interação, nenhum grupo conseguiu dar uma resposta coerente, e um grupo deixou a questão sem resposta. Conforme podemos observar, na imagem a seguir temos a representação da resposta dada por uma das equipes de trabalho para a atividade proposta e nessa notamos uma certa imaturidade dos nossos alunos ao tentar descrever os padrões observados, pois mesmo tendo conhecimento de como se realizam as operações, não consegue descrevê-las.

Tal experiência permite-nos, ainda, a conjecturar que, mesmo visualizando como obter o número de paralelepípedos em cada interação, os alunos ainda não possuem habilidade suficiente para descrevê-la, fato que se concretiza ao observarmos a resposta do terceiro item solicitado, através do qual os alunos deveriam expressar matematicamente a relação, cujo resultado foi relatado por todos os grupos: que a relação seria dada pela expressão $2^n - 1$, na qual n representa a interação. Ademais, alguns alunos concluíram que a relação caracterizava-se por uma progressão geométrica.

Quanto à tabela solicitada, todos os grupos preencheram de forma satisfatória, conforme transcrita abaixo:

INTERAÇÃO	Nº DE PARALELEPÍPEDOS NOVOS	Nº DE PARALELEPÍPEDOS
1	1	1
2	2	3
3	4	7
4	8	15
5	16	31
⋮		
N	2^n	$2^n - 1$

Ao término dessa atividade, pudemos concluir que os nossos alunos apresentam muita dificuldade quando se trata de descrever aquilo que observa, pois, mesmo visualizando os padrões, eles não conseguem expressar-se por

meio da linguagem oral. O que nos leva a refletir até que ponto realmente há comunicação entre professor e aluno, quando ao apresentarmos os conteúdos mediante o uso da linguagem verbal. Aspecto para o qual é necessário estar atento: para que haja compreensão por parte dos alunos, é preciso que o aluno tenha contato visual com aquilo que o professor está descrevendo durante sua aula.

4.5 Análise da atividade 5

A realização desta atividade ocorreu de forma mais tranquila, uma vez que os alunos já estavam adaptados às atividades investigativas, o que levou a ter bem menos interferência do professor na realização da atividade proposta.

Cada aluno do grupo construiu três interações do triângulo de Sierpinsky e recortou. Com isso, ao juntar as peças de cada componente do grupo, eles puderam construir um número de interações maior, assim como puderam fazer as observações acerca do número de triângulos de cada etapa e também sobre a área restante do triângulo.

Todos os grupos já iniciaram a atividade com a construção de uma tabela para fazer as anotações observadas para que conseguissem chegar à generalização e formalização das suas observações na construção do fractal.

Os alunos conseguiram estabelecer, com facilidade, a sequência que descreve a quantidade de triângulos em cada interação, bem como a lei matemática que pode ser estabelecida em função do número de interações. Quando partiram para o item no qual deveriam estabelecer a área restante do triângulo após as retiradas em cada interação, os alunos conseguiram fazer observações pertinentes, considerando, inicialmente, um triângulo de área 1 para, logo após, calcular para um triângulo de área qualquer A . Neste ponto, foi necessária a intervenção do professor-pesquisador, uma vez que os alunos não sabiam como estabelecer a área de um triângulo equilátero.

Após as observações apresentadas pelo professor, os alunos realizaram suas discussões em grupo e cujo resultado foi a conclusão da tarefa, de modo a fornecer uma tabela como produto, conforme representamos a seguir:

Interação	Número de triângulos	Área do fractal
1 ^a	1	$\frac{l^2\sqrt{3}}{2}$
2 ^a	3	$\frac{3l^2\sqrt{3}}{8}$
3 ^a	9	$\frac{9l^2\sqrt{3}}{32}$
4 ^a	27	$\frac{27l^2\sqrt{3}}{128}$
⋮	⋮	⋮
N	3^{n-1}	$\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{2}$

4.6 Análise do questionário

Ao término das atividades, foi proposto um questionário no qual os alunos deveriam descrever sobre suas vivências com a matemática e, em especial, a experiência com atividades de cunho investigativo, que também já foram realizadas em aulas de matemática em anos anteriores. Além disso, os alunos tiveram que falar sobre tais atividades, estabelecendo como a investigação matemática poderia contribuir para o ensino-aprendizagem.

Ao serem questionados sobre o fato de gostarem, ou não, de matemática, foi possível observar que, embora a grande maioria dos alunos reconhecesse a importância de se estudar essa ciência, muitos demonstraram não gostar da disciplina, por a considerarem complexa. Além disso, alguns justificaram que, algumas vezes, são propostos conteúdos de pouca ou nenhuma aplicabilidade, o que faz com que o interesse pela disciplina se torne ainda menor. Fato que não invalidou o reconhecimento de que os estudos de matemática permitem que a pessoa desenvolva habilidades importantes para a formação do indivíduo. O que pôde ser constatado quando um dos alunos participantes relata que "o estudo de matemática é importante, pois desenvolve o nosso raciocínio e a nossa capacidade de solucionar problemas no dia a dia de forma mais rápida". Nesse aspecto, notamos que alguns alunos, mesmo não se identificando tanto com a matemática, não deixam de tratá-la com uma

ciência que deve ser estudada, e que requer dedicação para se compreendê-la de maneira mais eficaz e significativa na formação do conhecimento do sujeito.

Com o objetivo de conhecer um pouco das vivências dos alunos nas aulas de matemática dos anos anteriores, perguntamos se eles já haviam participado de alguma aula na qual o professor tivesse feito uso da metodologia de investigação para aplicação de conteúdos, ao que todos relataram nunca terem participado de uma aula na qual já tivessem feito uso de tal metodologia. O que nos leva a considerar que os professores não estão habituados a fazer uso dessas novas ferramentas em suas aulas. E isso se dá, muitas vezes, porque oferecer aos alunos uma aula diferenciada exige uma preparação maior por parte do professor, sem contar que o mesmo deve, também, conhecer muito bem o seu público para que possa tentar estabelecer uma estratégia que contribua para a manutenção do foco da proposta, bem como que garanta que os objetivos traçados sejam alcançados.

Buscamos, ainda, por meio deste questionário, a opinião dos alunos acerca da metodologia aplicada. Para isso, perguntamos se eles consideraram as aulas investigativas como uma ferramenta que possa contribuir para o processo de ensino-aprendizagem, e, neste item, obtivemos respostas como: "a metodologia é importante, pois é uma forma de estimular a criatividade dos alunos", "é importante, pois estimula o raciocínio lógico", "sim, pois faz despertar em nós, alunos, o interesse para resolver os problemas". Assim, notamos que os alunos conseguiram compreender o objetivo de uma aula investigativa, na qual o aluno é "ator" no processo de ensino. Os discentes, ainda, consideraram que o uso da metodologia de investigação matemática permite que o aluno aprenda os conteúdos de forma dinâmica, além de fazer com que o conteúdo seja apresentado de forma interessante e prazerosa de modo a permitir sua interiorização. Processo esse pelo qual o aluno é parte do processo de descobertas.

Esta pesquisa foi apresentada a uma turma do 2º ano do Ensino Médio de forma concomitante com a aplicação do conteúdo de sequências. Deste modo, solicitamos que os alunos dessem sua opinião sobre a forma com que as atividades investigativas envolvendo Fractais contribuíram para a

compreensão significativa das sequências, bem como para a ideia de infinito e soma de sequências infinitas. Para isso, os alunos consideraram que a apresentação, por meio dessas atividades sobre fractais, despertaram neles o interesse e a vontade de buscar a solução do problema e, por estarem visualizando tais situações, consideraram-se aptos à compreensão do conteúdo mais simples, ou seja, a de alcançar a 'língua' que eles mesmos compreendiam. E, como já citado, o ensino baseado em atividades que envolvam o aluno, e que faça uso de ferramentas palpáveis, torna a aprendizagem significativa e, desse modo, a compreensão e apreensão tornam-se cada vez mais significativas para formação do educando.

Para a última pergunta, para a qual os alunos deveriam descrever suas percepções para posterior generalização das ideias observadas durante a atividade, os mesmos colocaram que, apesar de algumas dificuldades apresentadas no decorrer das atividades propostas, o uso do material concreto facilitou a percepção, porém alguns alunos ainda apresentaram algumas dificuldades em fazer a formalização na linguagem matemática.

Por fim, o questionário evidenciou que, apesar de lidarmos com alunos que apresentam dificuldades ou mesmo não que têm gosto pelos estudos de matemática, as atividades investigativas os tornaram mais participativos e interessados pela aula, pois os conteúdos foram apresentados de forma diferenciada e dinâmica. Além disso, a metodologia conseguiu inserir o aluno no contexto da aula como pesquisador, desafiando-os a superar dificuldades. Outro aspecto observado é que aqueles alunos que menos participam das aulas tradicionais são os que mais se empenham quando o professor traz uma proposta diferenciada e, muitas vezes, têm mais êxitos em suas observações que aquele aluno considerado participativo e de compreensão de conteúdos considerada satisfatória em aulas predominantemente tradicionais.

5. BREVES RESULTADOS E CONSIDERAÇÕES FINAIS

5. 1. BREVES RESULTADOS

Durante a realização de todas as atividades propostas, o que ficou evidente foi a dificuldade dos nossos alunos em formalizarem as suas ideias e a escrita matemática por meio de fórmulas que relacionam as grandezas, pois, em todas as propostas de atividades, percebia-se, pelo discurso do aluno, que ele compreendia a situação e conseguia resolver todas as propostas nas quais necessitavam apenas fazer cálculos matemáticos, porém quando solicitados a escrever a fórmula, eles necessitavam da interferência do professor para concluir a atividade.

Esse fato é perceptível nas colocações dos alunos durante as discussões, quando eles desejam descrever uma potência e, em tal atividade, utilizam-se do vocábulo "sobre", quando deveriam utilizar a palavra "elevado". Do que se pode depreender que, quando eles estabelecem um diálogo, em alguns momentos, acabam não tendo comunicação.

Outro aspecto relevante observado é que aqueles alunos que não demonstravam interesse pelas aulas tradicionais e não se empenhavam na realização das atividades propostas no cotidiano das aulas, foram os que mais se empenharam na realização das atividades propostas por meio da metodologia de investigação. Desse modo, estes exerceram papel importante nas discussões e na realização das atividades, enquanto que aqueles alunos – que, normalmente apresentavam facilidade na realização de atividades do dia a dia – apresentaram maiores dificuldades diante das atividades investigativas, e mostraram-se, muitas vezes, desmotivados a continuarem investigando.

À medida que as atividades foram sendo apresentadas, os alunos começaram a se familiarizar com a proposta de participação ativa na produção do seu conhecimento, o que facilitou para o desenvolvimento das atividades posteriores. A partir das quais notamos discussões mais direcionadas e soluções mais coerentes com a proposta.

A vantagem em se aplicar atividades de cunho investigativo é que conseguimos inserir o aluno no processo de aprendizagem, bem como nos possibilita conhecer a forma como os alunos abordam e compreendem os

conteúdos, uma vez que eles têm a oportunidade de expor as suas ideias acerca do que estava sendo abordado, o que muitas vezes não é oportunizado aos alunos mediante uma aula tradicional. Por outro lado, a aplicação destas atividades exige planejamento minucioso e estratégias bem definidas para que o foco não seja perdido durante a aplicação. O professor deve estar preparado para fazer as interferências nos momentos corretos e de forma a não influenciar o trabalho desenvolvido pelo aluno. Aspectos estes que tornam as aulas de investigação matemática um desafio não só para os alunos, mas principalmente para o professor, que deve direcionar os seus alunos para o seu objetivo traçado, sem tirar a magia da descoberta feita pelos estudantes.

Ponte et al. (2013, p.28) nos assegura que:

O sucesso de uma investigação depende também, tal como de qualquer outra proposta do professor, do ambiente de aprendizagem que se cria na sala de aula. É fundamental que o aluno se sinta à vontade e lhe seja dado tempo para colocar questões, pensar, explorar suas ideias e exprimi-las, tanto ao professor como aos seus colegas.

Diante disso, faz-se necessário que o professor, ao pensar numa aula de cunho investigativo deve procurar antes de dar início as atividades, criar na sala um ambiente onde os alunos se sintam a vontade para expor as suas ideias, sem medo de que suas opiniões sejam desconsideradas no processo de aprendizagem. Cada ideia apresentada deve ser valorizada para estimular o aluno a dar outras contribuições e assim sintam se valorizados naquele espaço de construção de conhecimentos.

5.2. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um dos motivos que nos leva a trabalhar com a investigação matemática é que, nesse processo, o aluno deixa de receber os conhecimentos prontos e passa a fazer parte da construção do mesmo, podendo torná-lo mais significativo no seu processo de ensino-aprendizagem.

Os fractais podem constituir uma importante ferramenta de investigação matemática, para o desenvolvimento de conteúdos como sequências, cálculo, a ideia de limite, como bem nos coloca Sallum (2005):

A introdução de fractais no Ensino Médio, além de satisfazer a curiosidade de quantos já ouviram falar neles, propicia a oportunidade de trabalhar com processos interativos, escrever fórmulas gerais, criar algoritmos, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente, introduzir uma ideia intuitiva do conceito de limite e é um excelente tópico para aplicação de progressões geométricas e estímulo do uso de tabelas. (SALLUM, 2005, p.1).

Buscamos, através dos fractais mais conhecidos, desenvolver atividades que propiciem ao aluno a construção do seu conhecimento, pois ele deverá buscar os padrões e escrevê-los matematicamente. Desse modo, o aluno poderá sentir-se ator no processo de ensino aprendizagem, além de tal processo possibilitar um momento diferenciado nas aulas de matemática. Além disso, será possível fazer uso de ferramentas tecnológicas de modo a inseri-las em um contexto de investigação.

Assim, os fractais podem representar uma importante ferramenta para que o desenvolvimento de alguns conteúdos matemáticos ocorra de forma dinâmica, visto que tal dispositivo não deixa de ser algo novo e visualmente atraente. Desse modo, buscamos, aqui, oferecer aos professores de ensino médio algumas atividades que levem os alunos ao desenvolvimento de habilidades relacionadas à percepção e formalização de padrões, assim como o desenvolvimento do conteúdo de sequências numéricas. Salientamos, ainda, que, atualmente, os fractais tem tido cada vez mais espaço nos livros didáticos, que apresentam propostas de atividades com as quais nossos alunos possam desenvolver habilidades de investigação e reconhecimentos de padrões.

O estudo de fractais em sala de aula, no ensino básico, pode ser justificado por vários fatores. Segundo Barbosa (2005), esses são os principais:

conexão com várias ciências

- [...] deficiências da Geometria Euclidiana para o estudo de formas da natureza [...]; os objetos naturais são, com frequência, mais complicados e exige uma geometria mais rica, que os modela com fractais, possibilitando desenvolver projetos educacionais sobre temas transversais voltados para a compreensão de fenômenos que ocorrem nos diversos ambientes.
- difusão de acesso aos computadores e tecnologias da informática nos vários níveis de escolarização;
- existência do belo nos Fractais e possibilidade do despertar e desenvolver o senso estético com o estudo e a arte aplicada à construção de fractais [...];
- sensação de surpresa diante da ordem na desordem.

Notamos desta forma, que a Geometria Fractal constitui uma importante aliada do ensino de matemática, e pode ser aplicada no Ensino Básico para aprimorar os conhecimentos dos alunos de forma dinâmica e atrativa, visto que permite, não somente a aplicação de atividades investigativas, mas também a inserção das tecnologias aliada a beleza dos fractais, seja naturais ou produzidos por meio de computadores.

Ainda segundo Nunes (2010, p. 74):

A exploração da geometria fractal, em contexto de sala de aula, proporciona o desenvolvimento das atitudes, dos valores e das competências dos alunos, na medida em que promove a curiosidade e o gosto de aprender, de pesquisar e de investigar; impulsiona utilização da matemática na interpretação do real, reconhecendo formas e processos que envolvem conceitos matemáticos; ajuda na compreensão dos conceitos de perímetro, área e volume; promove a pesquisa de padrões e regularidades formulando em seguida generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos.

Notamos que a Geometria Fractal possui um vasto campo de aplicação dos conceitos matemáticos e cabe ao educador, a partir dos recursos que lhes são disponibilizados na sua escola, buscar inserir no cotidiano das aulas de matemática, através dos componentes curriculares, temas diferenciados que permitam que os alunos sintam-se atraídos pela aprendizagem dos conceitos

matemáticos propostos. Fuzzo (2008) corrobora com essa ideia quando nos diz:

[...] é possível trabalhar conceitos de Geometria Fractal dentro da sala de aula e, não menos importante, possibilita relacionar conceitos com a Geometria Euclidiana, além de ser uma maneira nova e diversificada de motivar e incentivar os alunos aos estudos (p. 10).

Desse modo, podemos afirmar que a Geometria Fractal pode se tratar de uma importante ferramenta de que professor dispões na sala de aula, além de caracterizar-se como uma metodologia diferenciada e, ao mesmo tempo, eficaz para o ensino, possibilita ao professor trabalhar diversos conceitos matemáticos de modo que o aluno faça parte do processo de construção do conhecimento. Ao propor uma aula com situações novas, onde o educando possa descobrir e fazer relações entre o que visualiza e o que estuda, torna o ambiente de sala de aula favorável à aprendizagem. Por conseguinte, esta metodologia de ensino permitirá ao professor um trabalho que propicie ao educando a visualização do conteúdo trabalhado, de modo que este não fique apenas na formalidade que é própria da disciplina de matemática.

Apresentamos, aqui, apenas algumas das várias propostas de atividades envolvendo Fractais, que podem ser aplicadas tanto para se trabalhar, no Ensino Médio, conteúdos que envolvam sequências, ideia de infinito, conceitos da geometria, funções e Triângulo de Pascal; bem como para se trabalhar, com o Ensino Fundamental II, conteúdos que explorem conceitos de funções, potenciação, geometria e medidas. Ou seja, dispomos de um vasto campo de aplicações propício para a efetivação de um conceito inovador e atraente e, portanto, uma grande ferramenta que possa contribuir para o desenvolvimento de conteúdos diversos, nos vários níveis de ensino.

Outras atividades que podem ser propostas são aquelas que fazem uso de recursos computacionais, com as quais os alunos possam manusear programas que lhes permitam construir e observar as características e beleza dos fractais. Recurso esse capaz de chamar a atenção dos alunos quanto à natureza de tal ferramenta: por esta prestar-se como aliada capaz de promover um ambiente de aprendizagem eficiente.

6. REFERÊNCIAS

AGUIAR, K. F. e ROCHA, M. L. **Práticas Universitárias e a Formação Sócio-política**. *Anuário do Laboratório de Subjetividade e Política*, nº 3/4,1997, pp. 87-102. (in. AGUIAR, K. F. e ROCHA, M. L. Pesquisa-intervenção e a produção de novas análises, 2003, disponível no site: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1414-98932003000400010).

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 5. ed. 2013.

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo **Pesquisas Coletivamente em Educação Matemática**. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática, Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimos A Geometria Fractal para sala de aula**. 1 ed. Belo Horizonte: Autentica, 2002.

BRAUMANN, Carlos. **Divagações sobre Investigação Matemática e o seu papel na aprendizagem da Matemática**. ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM Educação Matemática, 11, 2002, Coimbra. Anais. Disponível em: . Acesso em 20 julho 2014.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC / SEF, 1998. 148 p.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais (1ª a 4ª série): Matemática. Brasília: MEC/SEF, 2001

CAPRA, Fritjof. **A teia da vida: uma nova compreensão científica dos sistemas vivos**. Tradução de Newton Roberval Eichenberg. 1 ed. São Paulo: Cultrix, 1999. p. 99-129. in TATIANA, Cardoso Roman **A GEOMETRIA FRACTAL E O SOFTWARE CABRI-GÉOMÈTRE II NO ESTUDO DE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA**.

CORRADI, Daiana Katiúscia Santos. **Investigações Matemáticas**. Revista da Educação Matemática da UFOP, Vol I, 2011 - XI Semana da Matemática e III Semana da Estatística, 2011.

FERNANDES, Fernando Luis Pereira. **Fractais em sala de aula: uma experiência de investigação matemática em classes de 6ª série do ensino fundamental**. Campinas, SP.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. **Uma reflexão sobre o uso dos materiais concretos e jogos no ensino da matemática.** Boletim da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, São Paulo: SBEM-SP, n.7, p. 5-10, 1990.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas: Autores Associados, 2006.

FUZZO, Regis Alessandro. **Calculando a Costa do Brasil: Uma Atividade Fractal com professores e Futuros Professores da Educação Básica.** FECILCAM, 2008.

LÜDKE, Menga & ANDRÉ, Marli. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas.** São Paulo: EPU, pp. 25-44, 1986. in Castardo, Cleide Ferraro.Silva, Maurina Passos G. O. da. Rivas, Noeli Prestes P. A (RE) VISÃO DO PROJETO PEDAGÓGICO A PARTIR DE UM OLHAR SOBRE AS ATIVIDADES PRÁTICAS: UM ESTUDO DE CASO NO CURSO DE PEDAGOGIA DA UNAERP/ CAMPUS GUARUJÁ

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem.** Editora Livraria da Física - São Paulo, 2009.

NUNES, Raquel Sofia Rabelo. **Geometria Fractal e Aplicações.** Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática Pura - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2006. Disponível em: Figura 7. Imagem Software Shapari. Fonte: Shapari, 2010. 25 <http://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf> . Acessado em 10 de junho de 2016.

PEREIRA, M. C. N. **As investigações matemáticas no ensino-aprendizagem das sucessões: Uma experiência com alunos do 11 ano de escolaridade.** 2004. Dissertação (Mestrado em ensino da Matemática) - Universidade da Beira Interior. Lisboa

PONTE, J. P. et al. **O trabalho do professor numa aula de investigação matemática.** Quadrante, 7(2), 41-70, (1999b).

PONTE, J.P. **Investigações matemáticas em Portugal. Investigar em educação,** 2003.

PONTE, João Pedro; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Helia. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** - 3. ed. rev. ampl. - Belo Horizonte-MG: Autêntica, 2013.

PONTE, BROCARD e OLIVEIRA, **Investigações Matemáticas mediadas pelo pensamento reflexivo no Ensino e Aprendizagem das funções seno e cosseno: Uma experiência com alunos do 2º Ano do Ensino Médio,** 2006, p. 10. in. Corradi, Daiana Katiúscia Santos, 2011.

PONTE, João Pedro. OLIVEIRA, Hélia. BRUNHEIRA, LINA. FERREIRA, Catarina. **O trabalho do professor numa aula de investigação matemática.** Departamento de

Educação da Faculdade de Ciências e Centro de Investigação em Educação, Universidade de Lisboa. 2016

SADOVSKY, Patrícia. **O ensino de matemática hoje: enfoques, sentidos e desafios**. Tradução Antônio de Padua Danesi; apresentação e revisão técnica da tradução Ernesto Rosa Neto. 1ª edição - São Paulo: Ática, 2010.

SALLUM, Élvia Mureb. **Fractais no ensino médio**. Revista do Professor de Matemática. Nº 57, 2º quadrimestre de 2005.

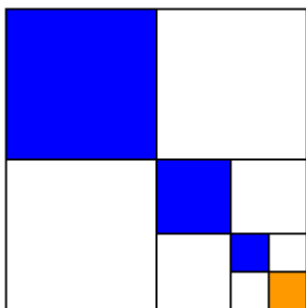
VALE, Isabel. **Algumas notas sobre investigação qualitativa em educação matemática, o estudo de caso**. Revista da Escola Superior de Educação, v. 5, p. 171-202, 2004.

7. APÊNDICES

7.1 Atividade 1

Objetivo

- Reconhecer uma sequência numérica;
- Estimar a quantidade de quadrados em cada interação;
- Construir a fórmula do termo geral para a sequência.



Considere o fractal gerado a partir de um quadrado, no qual, após cada interação, substituímos um dos quadrados por quatro novos quadrados.

Quantos quadrados você consegue após cada interação?

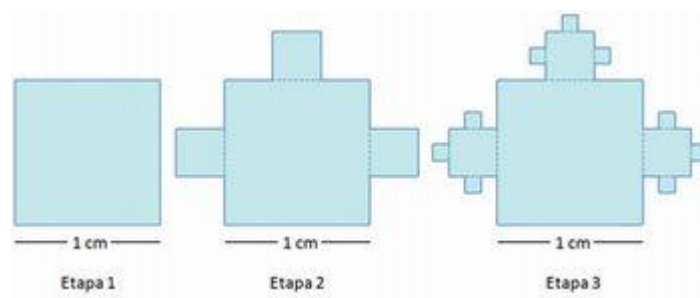
Como você expressaria matematicamente o número de quadrados após n interações?

7.2 Atividade 2

Objetivos

- Reconhecer padrões;
- Estabelecer relações;
- Formular a lei de termo geral da sequência.

(UFRJ) A região fractal F , construída a partir de um quadrado de lado 1 cm, é constituída por uma infinidade de quadrados e construída em uma infinidade de etapas. A cada nova etapa consideram-se os quadrados de menor lado (L), acrescentados na etapa anterior e acrescentam-se, para cada um destes, três novos quadrados de lado $L/3$. As três primeiras etapas de construção de F são apresentadas a seguir.



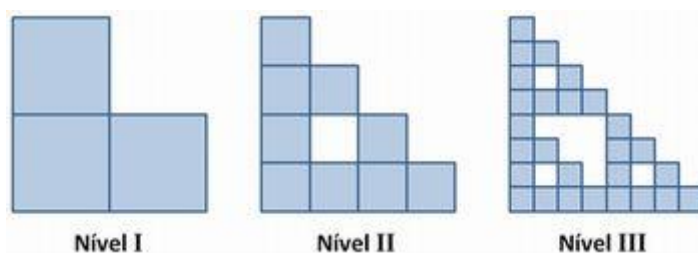
Represente, com uma expressão numérica, a área de F na 4ª etapa.

7.3 Atividade 3: EXPLORANDO O FRACTAL TRIMINÓ

Objetivos:

- Promover a interação entre os alunos;
- Estimular o pensamento matemático;
- Reconhecer padrões;
- Construir a lei do termo geral da progressão geométrica.

Os alunos, inicialmente, devem ser distribuídos em pequenos grupos para que possam discutir as questões propostas e registrar suas conclusões.



A seqüência de figuras acima ilustra 3 passos da construção de um fractal, utilizando-se como ponto de partida um triminó - nível I -, que consiste em uma peça formada por três quadrinhos de 1 cm de lado cada, justapostos em forma de L. No segundo passo, substitui-se cada quadrinho do fractal de nível I por um triminó, que tem os comprimentos dos lados de seus quadrinhos adequadamente ajustados à situação, de forma a se obter o fractal de nível II, conforme ilustrado acima. No terceiro passo, obtém-se, também, a partir do fractal de nível II, a substituição de cada um desses quadrinhos por um triminó com os lados de seus respectivos quadrinhos ajustados, o fractal de nível III. O processo continua dessa forma, sucessiva e indefinidamente, obtendo-se os fractais de níveis $n = I, II, III, \dots$

Com base nessas informações :

- Construa o fractal de nível IV.
- Investigue as relações existentes entre o número de quadrinhos em cada nível do fractal.
- Investigue as relações existentes entre o perímetro externo e área do fractal em cada nível.
- Expresse matematicamente essas relações.

7.4 Atividade 4: CONSTRUINDO CARTÕES FRACTAIS

Objetivos:

- Explorar conceitos matemáticos como sequências e volume do paralelepípedo;
- Reconhecer uma sequência numérica;
- Estabelecer a lei de formação da sequência.

Os alunos devem ser distribuídos em grupos de 4 ou 5, e cada grupo deverá confeccionar uma carta fractal, seguindo as instruções abaixo:

- 1) Dobre a folha ao meio;
- 2) Faça dois cortes com distância $a/4$;
- 3) A linha tracejada representa onde será feita a dobra;
- 4) Dobre;
- 5) Esta é a primeira interação fractal;
- 6) Dobre novamente como no último passo da sequência anterior;
- 7) Faça novamente dois cortes, conforme indicado;
- 8) Marca da dobra, dobre conforme indicado (está pronta a segunda interação);
- 9) Outras interações poderão ser obtidas repetindo os passos anteriores.

Após a confecção do cartão, os alunos deverão discutir as questões abaixo e registrar suas observações.

Questões

Quantos são os paralelepípedos após a 4ª interação? E após a 10ª?

É possível estabelecer uma relação entre a interação realizada e o número de paralelepípedos? Qual seria essa relação?

Como podemos expressar algebricamente essa relação? A expressão algébrica obtida está relacionada a que conteúdo matemático?

INTERAÇÃO	Nº DE PARALELEPÍPEDOS NOVOS	Nº DE PARALELEPÍPEDOS
1		
2		
3		
4		
5		
⋮		
N		

7.5 Atividade 5: CONSTRUINDO O TRIÂNGULO DE SIERPINSKY

Objetivos:

- Estimular o pensamento matemático com o uso de materiais concretos;
- Explorar conceitos de sequências;
- Explorar o conceito de área de triângulos equiláteros;
- Reconhecer a soma infinita de termos de uma sequência;
- Calcular a soma infinita de sequências.

Para a construção do fractal, foi distribuída uma folha sulfite para cada grupo, cujos alunos foram orientados a traçar um triângulo equilátero, fazendo uso de régua.

- Parte-se de uma superfície delimitada por um triângulo equilátero, totalmente preenchido no plano, sobre o qual aplicamos sistemas repetitivos de operações;
- Marcam-se os pontos médios de cada um dos três segmentos que se delimitam o triângulo, obtendo-se um novo triângulo central de vértices nos pontos médios do triângulo maior;
- Ligam-se esses três pontos médios e obtemos quatro triângulos congruentes, cujo lado é a metade do lado do triângulo original, e a área é $1/4$ da área deste triângulo;
- Retira-se o triângulo central, ficando 3 novos triângulos equiláteros;
- Repetem-se indefinidamente os três últimos passos com os triângulos restantes.

Observe a construção do triângulo de Sierpinsky e descreva as suas percepções acerca deste triângulo.

Como você representaria a área deste triângulo, considerando um triângulo inicial de área A ?

7.6 QUESTIONÁRIO

1. Você gosta de Matemática? Comente.
2. Você acha importante o estudo de Matemática? Comente.
3. Você já tinha participado de alguma aula investigativa na sua vida escolar?
Se sim, como foi?
4. Você considera que a metodologia de ensino baseada na investigação pode contribuir para despertar o interesse dos alunos pela matemática? Comente.
5. Você considera importante que os alunos construam seu próprio conhecimento por meio de atividades investigativas? Comente.
6. Você considera que o uso da Geometria Fractal pode facilitar o estudo de sequências? Comente.
7. Você considera que o uso da Geometria Fractal contribuiu para o estudo de sequências, em especial as progressões aritméticas e geométricas? Comente
8. Foi fácil deduzir as fórmulas gerais para as geração dos fractais na n -ésima interação?