UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Cônicas

Regina Lourenço de Barros

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:______________________

Regina Lourenço de Barros

Cônicas

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Hermano de Souza Ribeiro

USP – São Carlos
Janeiro de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

Barros, Regina Lourenço
277c Cônicas / Regina Lourenço Barros; orientador Hermano de Souza Ribeiro. -- São Carlos, 2018.
147 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2018.

1. . I. Ribeiro, Hermano de Souza, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Regina Lourenço de Barros

Conics

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC- USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Hermano de Souza Ribeiro

USP – São Carlos
January 2018

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos:

Ao meu grande mestre e orientador Prof. Dr. Hermano de Souza Ribeiro. Sua competência, carinho, estímulo e paciência foram essenciais para a realização deste trabalho.

Aos queridos mestres do PPG-Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do ICMC-USP pelos preciosos ensinamentos que enriqueceram minha formação.

À Coordenadora do PPG-PROFMAT do ICMC-USP Profª. Drª. Ires Dias pelo entusiasmo e dedicação, sempre estimulando a todos.

Ao docente Prof. Dr. Jean Piton Gonçalves, Professor Adjunto do Departamento de Matemática da UFSCar pelo valioso auxílio na utilização do editor LATEX.

Aos colegas de turma do PROFMAT que muito me ajudaram com incentivos nesta jornada.

RESUMO

BARROS, R. L. **Cônicas.** 2018. 147 p. Dissertação (PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Este trabalho trata das seções cônicas (circunferência, elipse, hipérbole e parábola), curvas planas obtidas pela intersecção de um cone circular reto com um plano. O objetivo do trabalho é representar algebricamente essas figuras geométricas. As referidas curvas serão estudadas num sistema cartesiano ortogonal. Nos primeiros capítulos as cônicas serão estudadas individualmente com relação aos seus elementos e às equações que descrevem cada curva. Serão apresentadas as equações canônicas, as equações paramétricas e as equações em coordenadas polares dentre outras. Destaque especial é dado às retas tangentes a essas curvas. No último capítulo as cônicas serão relacionadas através da equação geral. Serão estudados métodos que permitem a identificação e caracterização dessas curvas a partir da equação geral.

Palavras-chave: Geometria analítica, Cônicas, Função quadrática.

ABSTRACT

BARROS, R. L. **Conics**. 2018. 147 p. Dissertação (PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

This paper deals with the conic sections (circumference, ellipse, hyperbola and parabola), plane curves obtained by the intersection of a right circular cone with a plane. The objective of this work is to represent these geometric figures algebraically. These curves will be studied in an orthogonal Cartesian system. In the first chapters the conics will be studied individually with respect to their elements and to the equations that describe each curve. The canonical equations, the parametric equations and the equations in polar coordinates, among others, will be presented. Special emphasis is given to the tangent lines to these curves. In the last chapter the conics will be related through the general equation. Methods will be studied that allow the identification and characterization of these curves from the general equation.

Keywords: Analitic geometry, Conics, Quadratic function.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

O estudo das seções cônicas foi desenvolvido ao longo de muitos anos. Desde a antiguidade vários estudiosos se preocuparam com o tema. Menaecmus, Euclides e Arquimedes foram destaques importantes mas foi Apolônio de Perga (262-190 a.C.) o cientista que mais colaborou para o conhecimento dessas curvas. Muitos de seus trabalhos foram perdidos mas de sua grande obra, ”As Cônicas”, composta por oito volumes, sete foram preservados (os quatro primeiros em grego e os três seguintes em árabe, língua em que haviam sido traduzidos). Apolônio aprofundou bastante o que já se conhecia sobre as cônicas e mostrou que é possível se obter a elipse, a hipérbole, a parábola e também a circunferência a partir de um cone seccionado por um plano que não contém o vértice, mudando-se o ângulo de inclinação desse plano, e que não era necessário o cone ser reto. Apolônio também utilizou pela primeira vez um cone duplo, produzindo a hipérbole com dois ramos. Foi ainda Apolônio que designou as curvas cônicas de elipse, hipérbole e parábola, nomes utilizados até hoje. Sua obra lhe rendeu o título de ”O grande Geômetra”. Os estudos de Apolônio influenciaram outros cientistas como Ptolomeu, Galileu e Kepler. Galileu, estudando artilharia, concluiu que a trajetória da bala é parabólica. O interesse de Johann Kepler (1571-1620) se relacionava com suas aplicações na óptica e na astronomia: construiu espelhos parabólicos e mostrou que os planetas descrevem órbitas elípticas ao redor do sol, com este ocupando um dos focos. Isaac Newton (1642-1727), estudou as cônicas devido ao seu interesse no movimento dos planetas, demonstrando que sua trajetória elíptica deve-se à Lei da Atração Universal. As cônicas estão presentes em diversas situações de nossa vida. Por exemplo, a superfície da água num copo é circular quando essa superfície está alinhada na posição horizontal e é elíptica quando inclinada. Ao se girar o copo em torno de seu eixo, a superfície da água se tornará um paraboloide. Kepler mostrou que os planetas descrevem trajetórias elípticas ao redor do sol mas alguns cometas se locomovem segundo trajetórias hiperbolóides. Espelhos parabólicos e hiperbólicos são usados na construção de telescópios, radares e faróis de carros. Raios luminosos incidindo numa superfície parabólica paralelamente a seu eixo, reflete-se passando pelo seu foco. Espelhos parabólicos, fornos solares e antenas parabólicas utilizam esta propriedade. Por outro lado, raios que passam pelo foco da parábola, refletem-se paralelamente ao seu eixo, propriedade esta usada largamente em projetores. No caso da elipse e da hipérbole, raios que passam por um dos focos, refletem-se passando pelo outro foco. Já a propriedade refratora das cônicas tem sido usada na confecção de óculos, lupas e microscópios. As cônicas também são usadas em engenharia: arcos de parábola são usados na sustentação de pontes. Tendo em vista a importância das cônicas em vários setores da ciência, este trabalho pretende situar essas curvas dentro da geometria analítica e representá-las algebricamente de diferentes maneiras. Foi feita uma pesquisa na literatura com a finalidade de se reunir dados que permitam uma representação algébrica variada e ampla das seções cônicas. O objetivo do trabalho é apresentar um material didático que auxilie os alunos do Ensino Médio no estudo de Geometria Analítica. O trabalho foi estruturado em seis capítulos. No capítulo 1, procura-se dar uma definição geral para as seções cônicas, no capítulo 2 tratamos da circunferência, no capítulo 3 discorremos sobre a elipse, nos capítulos 4 e 5 estudamos a hipérbole e a parábola, respectivamente sendo o capítulo 6 utilizado para mostrar como se pode reconhecer e caracterizar essas curvas a partir de sua representação algébrica.

1 Definição Unificada de Cônica

Do ponto de vista geométrico, cônicas são figuras planas obtidas pela intersecção da superfície de um cone de revolução (figura produzida quando temos duas retas não perpendiculares e concorrentes em um ponto e uma reta gira 360 graus em torno da outra) com um plano. Se o plano não passar pela origem a intersecção será uma circunferência, uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola, conforme a figura 1. Se o plano passar pela origem a intersecção será um ponto, uma reta ou um par de retas concorrentes, cônicas estas chamadas de degeneradas.

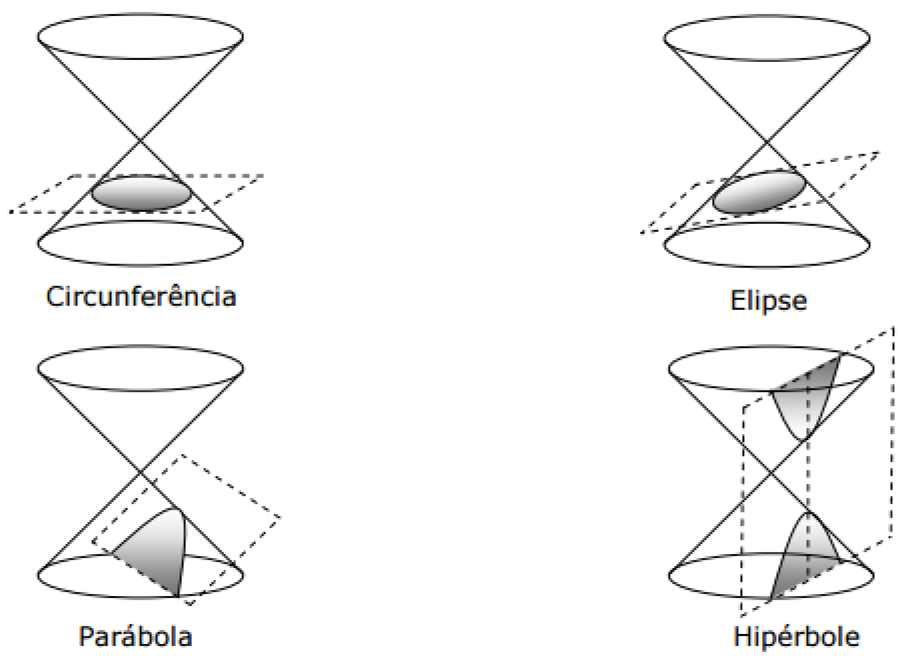

Figura 1 – Seções Cônicas- figura do trabalho de (CRUZ, 2017)

Germinal Dandelin (1794-1847) provou que a intersecção de um cone de revolução de duas folhas com um plano secante que não contém o vértice do cone é uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola.
Dandelin utilizou esferas inscritas no cone e que tangenciam o plano que intersectando o cone produz as curvas cônicas. No caso da elipse são duas as esferas inscritas numa folha do cone tangenciando o plano secante. Os pontos de tangência das esferas com o plano são os focos da elipse. Para a hipérbole são consideradas duas esferas inscritas no cone cada uma numa folha do cone e tocando o plano secante. Os pontos de contato são

os focos da hipérbole. Já para a parábola é considerada uma só esfera inscrita no cone que tangencia o plano secante no foco da parábola. Observar a figura 2 com as secções dos cones por um plano contendo o eixo de cada cone. A demonstração do teorema de Dandelin se baseia na igualdade dos segmentos tangentes a uma esfera traçados de um ponto externo a esfera.

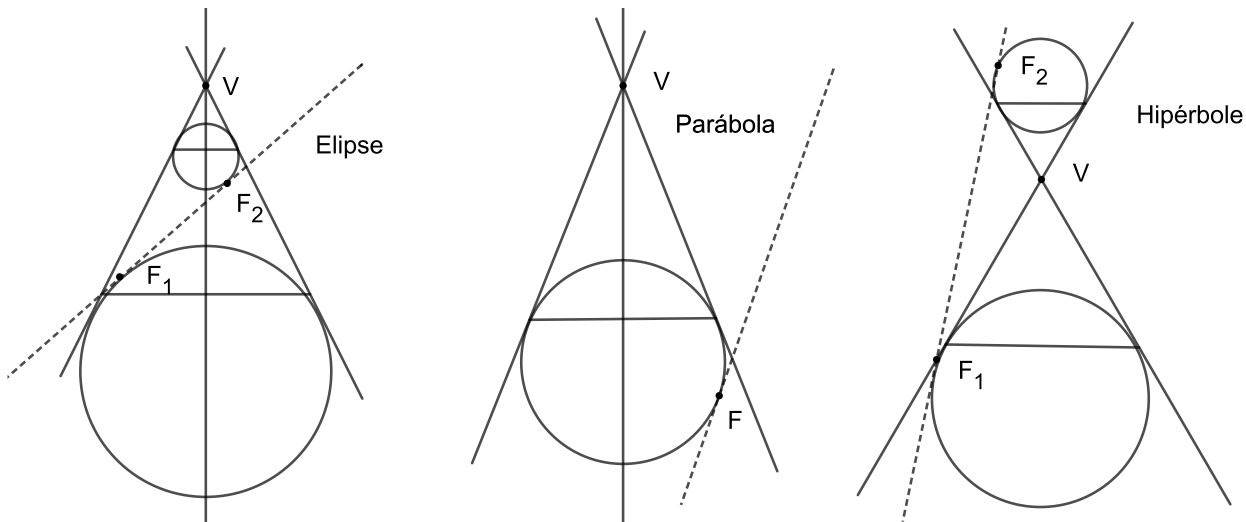

Figura 2 – Esferas de Dandelin

Do ponto de vista algébrico, com a adoção de um sistema cartesiano ortogonal em um plano, uma cônica é o lugar geométrico dos pontos $X = (x, y)$ do plano (com abscissa x e ordenada y em relação ao sistema considerado) que satisfazem uma equação do segundo grau $Q(x, y) = 0$ em que

$$Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F \tag{1.1}$$

A expressão $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ é chamada de **equação geral da cônica**. Os termos Ax^2, Bxy e Cy^2, são chamados de **termos quadráticos**, designando-se o termo Bxy de **termo quadrático misto** para diferençar dos outros dois enquanto Dx e Ey são chamados de **termos lineares** sendo F o termo **independente**. O conjunto solução da equação geral da cônica pode ser:

1. Conjunto vazio: $x^2 + y^2 + 5 = 0$ não tem solução.

2. Conjunto unitário: $(x-1)^2 + y^2 = 0$, que equivale a $x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0$, admite apenas a solução $(1, 0)$.
   Analogamente, a equação $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$ admite apenas a solução (a, b).

3. Reta: $(x+y)^2 = 0$, ou seja, $x^2 + 2xy + y^2 = 0$ descreve a reta $x + y = 0$.

4. Reunião de duas retas paralelas: $(x+y)(x+y+1) = 0$, que após a multiplicação fica $x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0$, representa a reunião de duas retas: $x + y = 0$ e $x + y + 1 = 0$.

5. Reunião de duas retas concorrentes: $(x-y)(x+y) = 0$, isto é, $x^2 - y^2 = 0$ representa a reunião das retas $x - y = 0$ e $x + y = 0$.

6. Circunferência: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$, que equivale a $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$, descreve a circunferência com centro de abscissa 1 e ordenada 2 e raio 2.

7. Elipse: $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$.

8. Hipérbole: $x^2 - y^2 - 1 = 0$.

9. Parábola: $x - y^2 = 0$.

Há controvérsia na literatura sobre quais figuras devam ser consideradas cônicas. Para propósito deste estudo serão consideradas a circunferência, a elipse, a hipérbole e a parábola. A elipse, a hipérbole e a parábola são definidas de modo unificado como o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja razão das distâncias a um ponto fixo F (chamado **foco**) e a uma reta d (chamada **diretriz**) é uma constante real positiva e chamada **excentricidade**, constante esta que depende de cada curva. Adiante será mostrado que a excentricidade da elipse é um número real entre 0 e 1, a excentricidade da hipérbole é estritamente maior do que 1 e a excentricidade da parábola é igual a 1.

2 Circunferência

A circunferência é uma curva plana obtida pela intersecção da superfície de um cone circular reto com um plano perpendicular ao eixo do cone e que não passa pelo vértice do cone.

2.1 Definição

Uma circunferência é definida como o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja distância a um ponto fixo C do mesmo plano chamado centro, é uma constante real positiva r chamada raio. Um ponto do plano da circunferência é um ponto interno (respectivamente externo) da circunferência se e somente se a distância do ponto a C é menor do que r (respectivamente maior do que r). O parâmetro geométrico da circunferência é o número real estritamente positivo r.

2.2 Elementos

- **Centro da circunferência**
  O centro da circunferência é o ponto C fixo do plano que equidista de todos os pontos da circunferência.

- **Raio da circunferência**
  O raio da circunferência é o comprimento do segmento que tem como extremidades: o centro e um dos pontos da circunferência .

- **Corda da circunferência**
  Corda é qualquer segmento de reta cujas extremidades são pontos distintos da circunferência.

- **Diâmetro da circunferência**
  Diâmetro é o comprimento da corda da circunferência que passa pelo centro . O diâmetro é a maior corda da circunferência sendo o centro seu ponto médio. O diâmetro é o dobro do raio.

- **Arco da circunferência**
  Arco é qualquer parte da circunferência que tem por extremos dois de seus pontos.

Dois pontos distintos da circunferência determinam dois arcos numa circunferência.

.

2.3 Equação Canônica

Seja a circunferência com centro $C = (0, 0)$ de abscissa 0 e ordenada 0 coincidindo com a origem O de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais . Em relação ao sistema cartesiano ortogonal canônico, um ponto P com abscissa x e ordenada y é um ponto da circunferência quando a distância PC de P ao centro C é igual a r ou seja $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r$.

Elevando ao quadrado ambos os membros da equação, teremos:

$$\mathbf{x^2 + y^2 = r^2} \tag{2.1}$$

que é chamada **equação canônica da circunferência**

2.4 Posições relativas entre reta e circunferência

Uma reta contida no plano da circunferência é **externa** à circunferência quando não tem nenhum ponto em comum com a circunferência, sendo a intersecção entre elas um conjunto vazio, **secante** quando tem dois pontos distintos comuns com a circunferência, tendo também pontos internos à circunferência e **tangente** quando tem apenas um ponto em comum com a circunferência, sendo os outros pontos da reta externos à curva.

Teorema 2.4.1 *Posições relativas entre reta e circunferência*
A reta perpendicular à reta determinada pelo centro da circunferência e um ponto P da mesma e que passa por P, é reta tangente à circunferência sendo P o ponto de tangência.

Prova do teorema
De acordo com a figura 3, seja P um ponto da circunferência e seja $Q \neq P$ um ponto da reta t perpendicular à reta determinada pelo centro da circunferência e pelo ponto P. No triângulo retângulo CPQ, o segmento de reta de extremos C e Q é hipotenusa e portanto, maior do que o cateto de extremos C e P. Assim, qualquer outro ponto da reta t além de P é externo à circunferência.

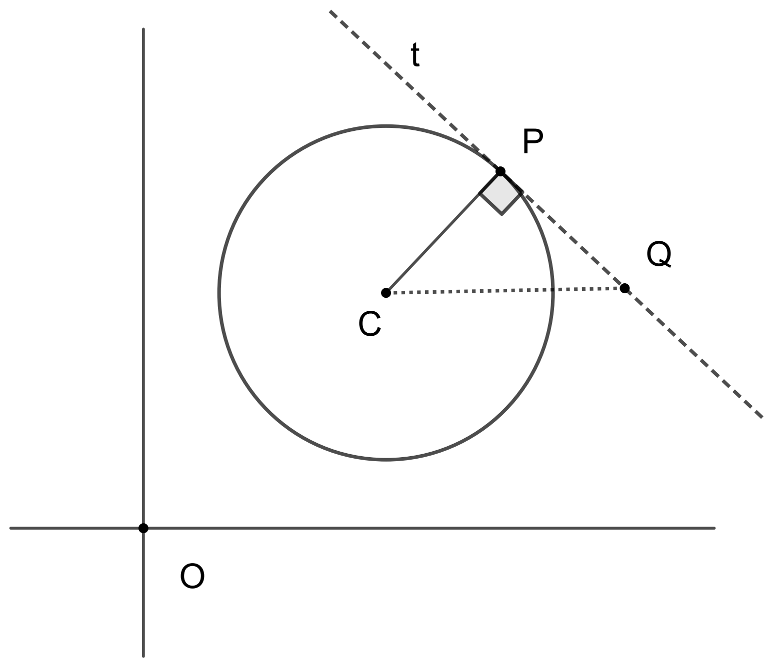

Figura 3 – Reta tangente a circunferência

2.5 Equações cartesianas das retas tangente e normal a uma circunferência por um ponto de tangência dado

Seja a circunferência de raio r cuja equação cartesiana em relação ao sistema cartesiano ortogonal xOy cuja origem O é o centro da circunferência é $x^2 + y^2 = r^2$. Dado um ponto de tangência da circunferência de abscissa x_0 e ordenada y_0 a equação da reta tangente à circunferência pelo ponto de tangência considerado é:

$$\mathbf{x_0 x + y_0 y = r^2} \tag{2.2}$$

e a equação da reta normal à circunferência pelo mesmo ponto é

$$\mathbf{y = \frac{y_0}{x_0} x} \tag{2.3}$$

quando $x_0 \neq 0$ e

$$\mathbf{x = 0} \tag{2.4}$$

quando $x_0 = 0$

- Equações das retas tangentes a circunferência paralelas a uma reta dada.
  Seja a equação quadrática representando a intersecção entre a circunferência $x^2+y^2 = r^2$ e uma reta $y = mx + n$:
  $(1 + m^2)x^2 + 2mnx + n^2 - r^2 = 0$
  Se o discriminante $n^2 - r^2(1 + m^2) = 0$, a intersecção é um ponto apenas e a reta é tangente à circunferência.
  $n^2 - r^2(1 + m^2) = 0 \Rightarrow n = \pm r\sqrt{1 + m^2}$

  As duas equações das retas tangentes a circunferência paralelas a uma reta $y = mx+n$ são:
  $y = mx - r\sqrt{1 + m^2}$ e $y = mx + r\sqrt{1 + m^2}$
  Os pontos de tangência (pontos de intersecção das retas tangentes com a circunferência) têm abscissas:
  $x = \dfrac{mr\sqrt{1 + m^2}}{1 + m^2}$ e
  $x = -\dfrac{mr\sqrt{1 + m^2}}{1 + m^2}$
  Esses valores são obtidos substituindo o valor de $n = r\sqrt{1 + m^2}$ na equação $(1 + m^2)x^2 + 2mnx + n^2 - r^2 = 0$ que tem no caso, o discriminante igual a 0. As equações das retas tangentes a circunferência perpendiculares a uma reta dada se reduzem ao caso anterior. Sendo m o coeficiente angular da reta dada, o coeficiente angular das perpendiculares será $-\frac{1}{m}$ quando $m \neq 0$.

2.6 Construções geométricas de retas tangentes à circunferência

1. Construção da reta tangente a uma circunferência por um ponto de tangência dado. Sendo P o ponto de tangência dado, basta traçar uma reta passando por P e que seja perpendicular ao raio da circunferência determinado pelo centro da circunferência e pelo ponto P de acordo com o teorema 2.4.1.

2. Construção das retas tangentes à circunferência por um ponto externo à circunferência.

   Conforme a figura 4 seja Q um ponto externo à circunferência e seja C o centro da circunferência. As duas retas tangentes à circunferência pelo ponto Q são as retas t e t' determinadas pelo ponto Q e pelas intersecções entre a circunferência dada e a circunferência cujo centro é o ponto médio do segmento de reta com extremos C e Q. O segmento CQ é também o diâmetro da nova circunferência e portanto, os triângulos CPQ e $CP'Q$ são retângulos. Concluímos que t e t' são perpendiculares respectivamente aos raios CP e CP' e portanto, tangentes à circunferência.

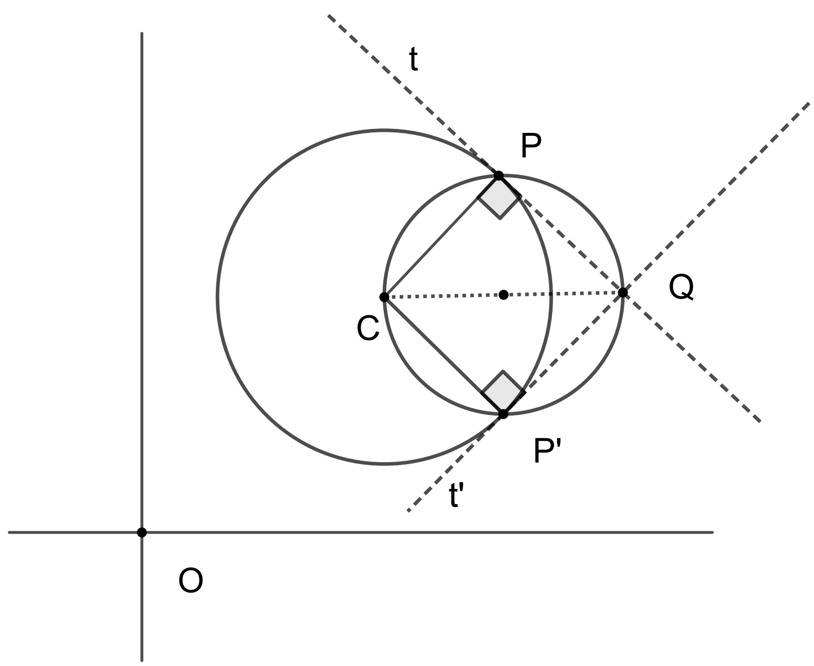

Figura 4 – Construção de retas tangentes a circunferência

2.7 Equações paramétricas da circunferência

Consideremos a circunferência de centro $C = (0,0)$ coincidindo com a origem O de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, cuja equação equação canônica é $x^2 + y^2 = r^2$, sendo r o raio. Seja P um ponto da circunferência de abscissa x e ordenada y e θ a medida em radianos do ângulo formado por OP com o semi eixo positivo Ox, no sentido anti-horário e seja P' a projeção de P sobre o eixo Ox como mostra a figura 5 .

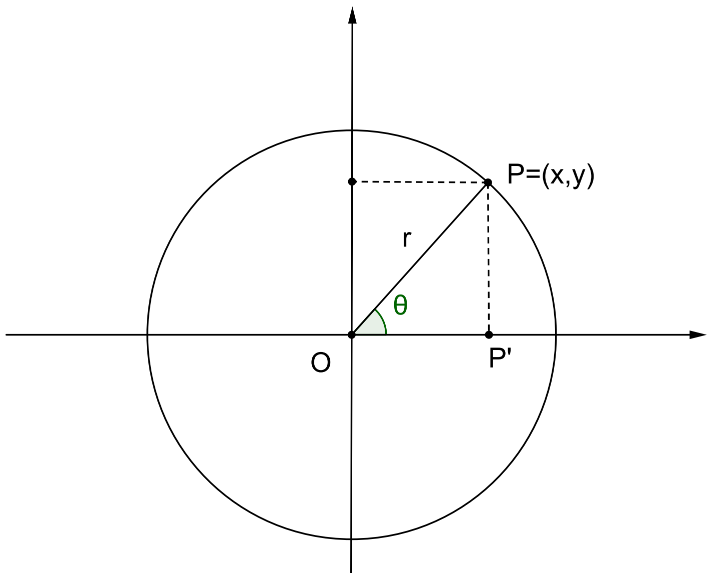

Figura 5 – Paramétricas de circunferência com centro na origem

Nessas condições, podemos observar no triângulo OPP', que $x = rcos\theta$ e $y = rsen\theta$. Para valores reais do ângulo θ entre 0 e 2π as seguintes expressões são equações paramétricas dessa circunferência .

$$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsen\theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Se o centro C da circunferência tiver coordenadas $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, as equações paramétricas para essa circunferência são:

$$\begin{cases} x - x_0 = rcos\theta \\ y - y_0 = rsen\theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + rcos\theta \\ y = y_0 + rse\theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

Observar a figura 6

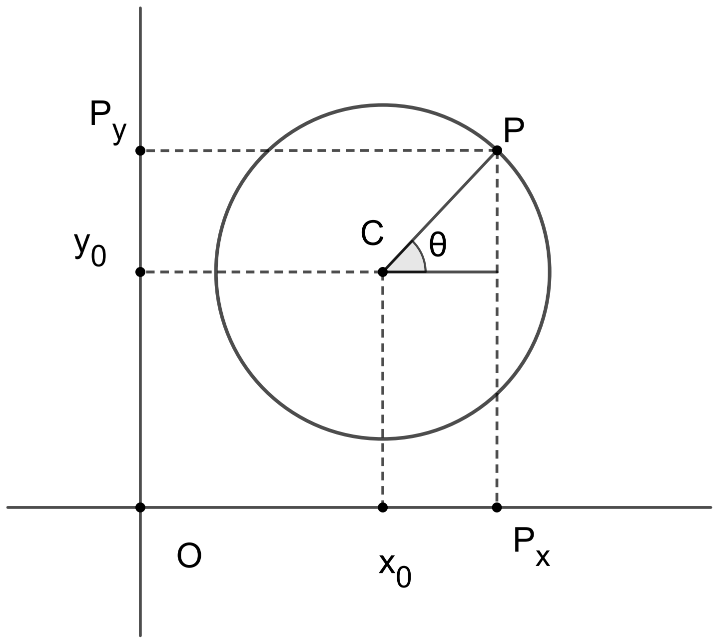

Figura 6 – Paramétricas da circunferência com centro não coincidente com a origem

2.8 Equações da circunferência em coordenadas polares

No plano, qualquer ponto pode ser representado no sistema ortogonal de coordenadas cartesianas por um par ordenado de números reais, havendo uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e os pares ordenados. Podemos também representar os pontos de um plano utilizando o sistema de coordenadas polares que é constituído por um semi-eixo polar e um ponto O chamado polo . Nesse sistema, cada ponto do plano é representado por um par ordenado (ρ, θ), sendo ρ a distância do ponto ao polo O e θ o ângulo formado entre o semi-eixo polar e o segmento OP. θ é medido em radianos a partir do eixo polar sendo considerado positivo no sentido anti-horário . Observar a figura 7

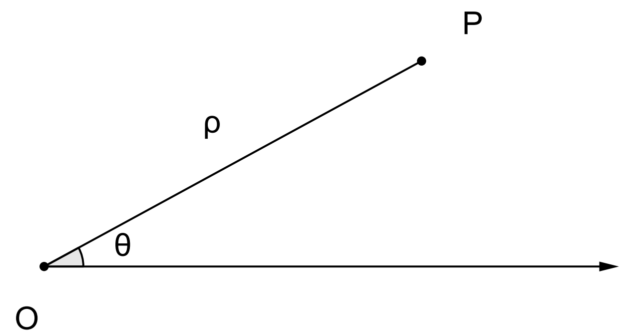

Figura 7 – Sistema de coordenadas polares

Os dois sistemas de coordenadas podem ser relacionados do seguinte modo: fazemos coincidir a origem do sistema cartesiano com o polo do sistema de coordenadas polares e o semi-eixo Ox com o semi-eixo polar. Assim, podemos verificar que no triângulo $PP'O$, $\rho^2 = x^2 + y^2$. Temos então:

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sen\theta \end{cases}$$

Observar a figura 8

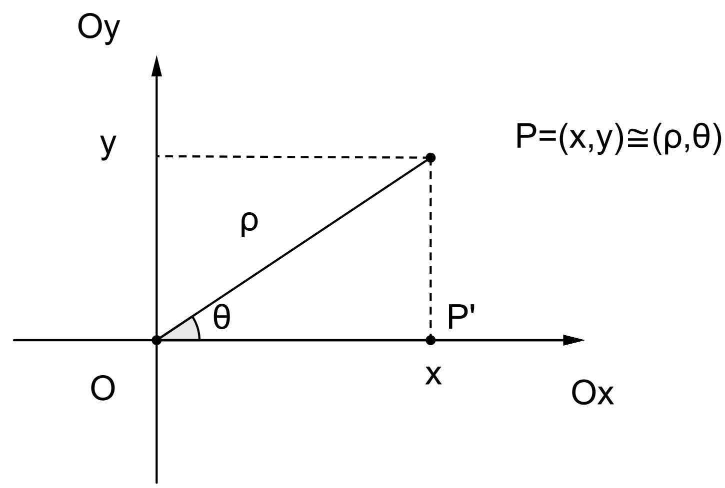

Figura 8 – Relação entre os sistemas de coordenadas

Equações polares da circunferência

- Circunferência de raio r e centro representado no sistema polar por $C = (\delta, \alpha)$
  Seja $P = (\rho, \theta)$ um ponto da circunferência. De acordo com a figura 9, podemos aplicar a lei dos cossenos no triângulo OCP e obter a equação polar dessa circunferência: $r^2 = \rho^2 + \delta^2 - 2\rho\delta cos(\theta - \alpha)$

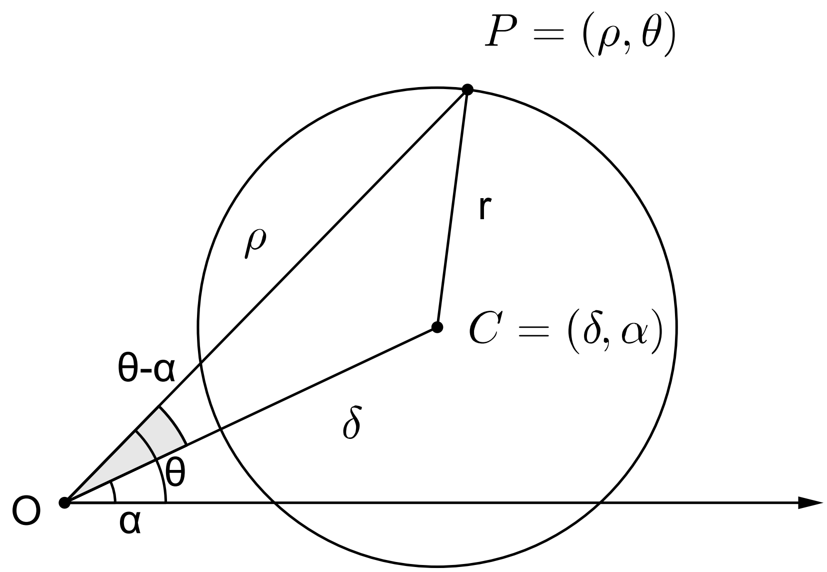

Figura 9 – Circunferência no sistema de coordenadas polares

- Circunferência contendo o polo

  Neste caso, $\delta = r$ e segundo a figura 10, aplicando a lei dos cossenos, chegaremos à equação desta circunferência:

  $r^2 = \rho^2 + r^2 - 2\rho r cos(\theta - \alpha) \Rightarrow \rho(\rho - 2rcos(\theta - \alpha)) = 0$. Assim,

  $$\begin{cases} \rho = 0 \\ \rho = 2rcos(\theta - \alpha) \end{cases}$$

  A primeira equação é chamada equação do polo e a segunda é a equação dessa circunferência.

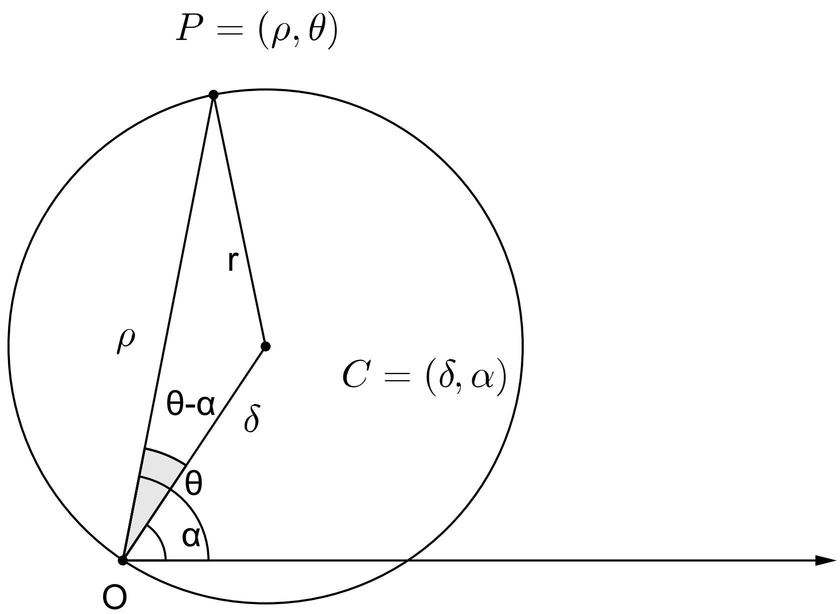

Figura 10 – Circunferência contendo o polo

- Circunferência de raio r e centro C sobre o polo O.
  Seja um ponto P da circunferência com representação (ρ, θ) no sistema de coordenadas polares. Como o centro coincide com o polo, a equação dessa circunferência é simplesmente, $\rho = r$.
  Ver figura 11

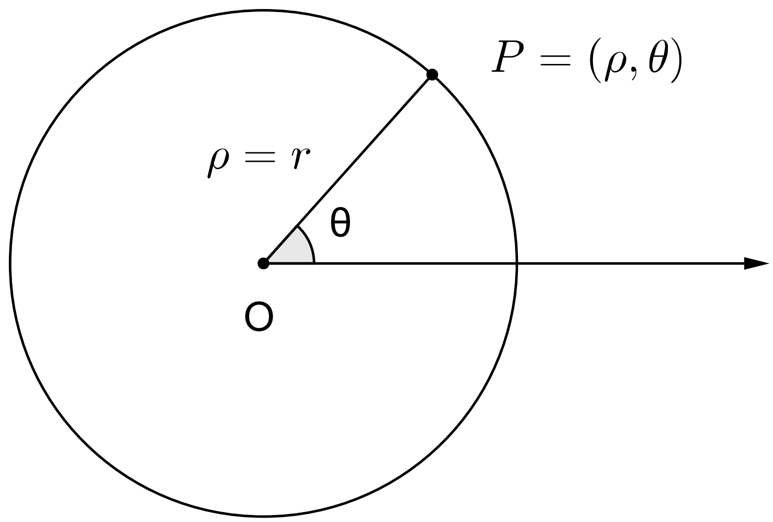

Figura 11 – Circunferência com centro coincidindo com o polo

2.9 Equações da circunferência quando o centro da circunferência não é a origem do sistema cartesiano ortogonal

- Consideremos a circunferência de raio $r > 0$, cujo centro não é coincidente com a origem O' de um sistema cartesiano ortogonal $XO'Y$ conforme a figura 12.

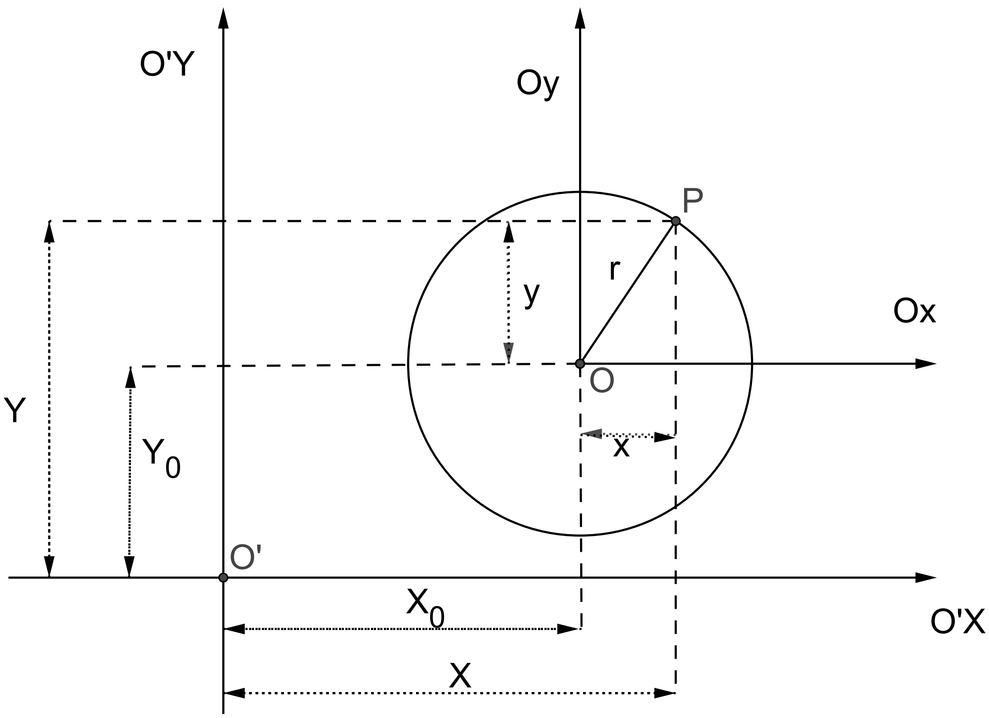

Figura 12 – Circunferência com centro não coincidente com a origem

Nesse sistema a circunferência tem por equação cartesiana
$(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 = r^2$
em que X_0 é a abscissa e Y_0 é a ordenada do centro da circunferência e a equação da circunferência no sistema cartesiano ortogonal canônico xOy é
$x^2 + y^2 = r^2$.
A relação entre a abscissa X de $XO'Y$ e a abscissa x de xOy é
$x = X - X_0$
e a relação entre a ordenada Y de $XO'Y$ e a ordenada y de xOy é
$y = Y - Y_0$.

- A equação da reta tangente à circunferência em um ponto de tangência da circunferência com abscissa x_1 e ordenada y_1 é
  $x_1x + y_1y = r^2$
  em relação ao sistema cartesiano ortogonal canônico e é
  $(X_1 - X_0)(X - X_0) + (Y_1 - Y_0)(Y - Y_0) = r^2$

com relação ao sistema cartesiano ortogonal $XO'Y$ em que
$x_1 = X_1 - X_0 \quad$ e $\quad y_1 = Y_1 - Y_0$
ou seja, o ponto de tangência da circunferência tem abscissa X_1 e ordenada Y_1 em relação a $XO'Y$.

3 Elipse

A elipse é uma curva plana obtida pela intersecção da superfície de um cone de revolução com um plano não paralelo a uma geratriz do cone e não paralelo ao eixo do cone.

3.1 Definição

Uma **elipse** é o conjunto dos pontos de um plano para os quais a soma de suas distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 distintos é uma constante real $2a$ estritamente maior do que a distância $2c$ entre os pontos F_1 e F_2 fixados. Um ponto do plano da elipse é um ponto interno (respectivamente externo) da elipse se e somente se a soma das distâncias do ponto a cada um dos focos é menor do que $2a$ (respectivamente maior do que $2a$). Os parâmetros geométricos de uma elipse são os números reais estritamente positivos a e c.

3.2 Elementos da Elipse

- **Focos**
  Os focos da elipse são os pontos F_1 e F_2 fixos distintos em relação aos quais são consideradas as distâncias de um ponto qualquer da elipse.

- **Segmento focal**
  O segmento focal da elipse é o segmento de reta cujas extremidades são os focos da elipse. A distância $2c$ entre F_1 e F_2 é chamada **distância focal**.

- **Centro da elipse**
  Centro da elipse é o ponto médio do segmento focal.

- **Reta focal**
  A reta focal da elipse é a reta determinada pelos focos da elipse.

- **Vértices principais**
  Os vértices principais da elipse são os pontos de intersecção da elipse com a reta focal.

- **Vértices secundários**
  Os vértices secundários da elipse são os pontos de intersecção da elipse com a reta perpendicular à reta focal pelo ponto médio do segmento focal.

- **Eixo maior ou principal**
  O eixo maior da elipse é o segmento de reta cujos extremos são os vértices principais da elipse.

- **Eixo menor ou secundário**
  O eixo menor da elipse é o segmento de reta cujos extremos são os vértices secundários da elipse.

- **Excentricidade** ou **razão de alongamento**
  A excentricidade ou razão de alongamento e da elipse é a razão entre a distância focal e a soma das distâncias de um ponto da elipse aos focos, ou seja, $\mathbf{e} = \mathbf{c/a}$. A excentricidade é uma medida do achatamento ou arredondamento da elipse. Na elipse $c < a$ e portanto, $0 < e < 1$. Quanto mais próximo de 0 a excentricidade estiver, mais arredondada será, aproximando-se da forma de uma circunferência.

- **Retas diretrizes**
  As retas diretrizes da elipse são duas retas perpendiculares à reta focal cuja distância ao ponto médio do segmento focal é igual à razão $\dfrac{a^2}{c} = \dfrac{a}{e}$.

- **Corda da elipse**
  Corda da elipse é qualquer segmento cujas extremidades distintas pertençam à elipse.

- ***Latus rectum***
  Chama-se amplitude focal ou *latus rectum* ou **corda focal** o comprimento da corda perpendicular à reta focal e que passa por um dos focos.

- **Raio vetor**
  Raio vetor é o segmento de reta que une um ponto da elipse a um de seus focos.

- **Circunferência principal**
  A circunferência principal da elipse é a circunferência cujo centro é o ponto médio do segmento focal e cujo comprimento do diâmetro é a medida do eixo maior da elipse.

- **Circunferência secundária**
  A circunferência secundária da elipse é a circunferência cujo centro é o ponto médio do segmento focal e cujo comprimento do diâmetro é a medida do eixo menor da

elipse. A figura 13 mostra as circunferências principal e secundária da elipse além de seus focos, vértices e eixos.

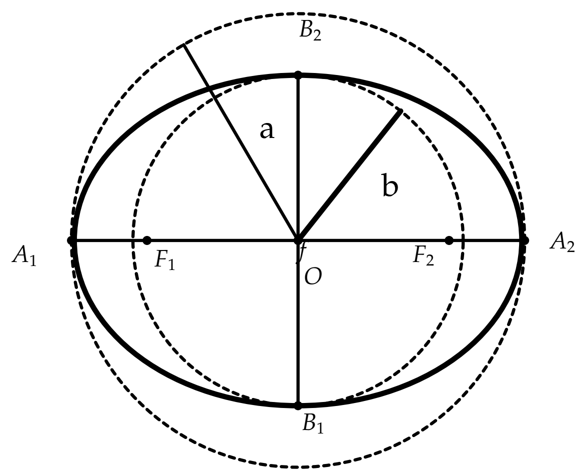

Figura 13 – Circunferência principal e circunferência secundária

- **Circunferências diretrizes**
  As circunferências diretrizes de uma elipse são as duas circunferências com centro nos focos da elipse e cujo diâmetro é igual ao comprimento do eixo maior da elipse.

Teorema 3.2.1 *A elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de um dos focos e da circunferência diretriz correspondente ao outro foco.*

Prova

Observar na figura 14 que, se PF_1 e PF_2 indicam respectivamente as distâncias do ponto P ao foco F_1 e do ponto P ao foco F_2, $PF_1 + PF_2 = 2a$ e $PF_1 + PM = 2a \Rightarrow PF_1 + PF_2 = PF_1 + PM \Rightarrow PM = PF_2$.

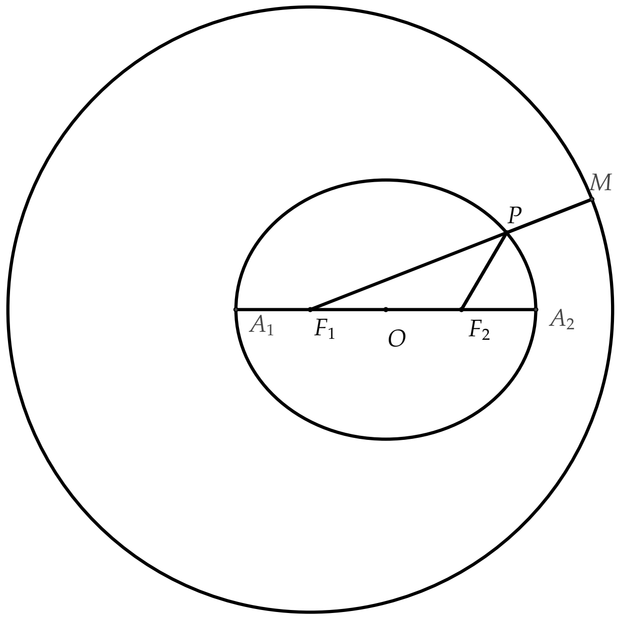

Figura 14 – Circunferência diretriz da elipse cujo centro é o foco F_1

3.3 Equação canônica da elipse

1. Elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Ox.

   Dada uma elipse com parâmetros geométricos a e c respectivamente, considere o sistema cartesiano ortogonal canônico xOy cuja origem O é o ponto médio do segmento focal, cujo eixo x das abscissas é a reta coincidente com a reta focal determinada pelos focos da elipse e cujo eixo das ordenadas é a reta perpendicular pelo centro da elipse à reta focal.
   Em relação ao sistema cartesiano ortogonal canônico temos:

   - O foco F_1 tem abscissa $-c$ e ordenada 0 e o foco F_2 tem abscissa c e ordenada 0.
   - As coordenadas cartesianas dos vértices principais A_1 e A_2 são respectivamente $(-a, 0)$ e $(a, 0)$.

   - As coordenadas cartesianas dos vértices secundários B_1 e B_2 são respectivamente $(0, -b)$ e $(0, b)$.

- As equações das retas diretrizes respectivamente associadas aos focos F_1 e F_2 são: $x = \dfrac{-a^2}{c}$ e $x = \dfrac{a^2}{c}$.

- As equações cartesianas das circunferências diretrizes C_1 e C_2 respectivamente associadas aos focos F_1 e F_2 são respectivamente:
  $C_1 : (x + c)^2 + y^2 = 4a^2$
  $C_2 : (x - c)^2 + y^2 = 4a^2$

- As equações cartesianas das circunferências principal e secundária são respectivamente: $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + y^2 = b^2$

Em relação ao sistema cartesiano ortogonal canônico, um ponto P com abscissa x e ordenada y é um ponto da elipse quando a soma da distância PF_1 de P ao foco F_1 com a distância PF_2 de P ao foco F_2 é igual a $2a$ ou seja $\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$.
Prova da equação canônica

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a \\
\iff\ &\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \\
\iff\ &(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2 \\
\iff\ &x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\
\iff\ &4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc \\
\iff\ &a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - xc \\
\iff\ &a^2x^2 - 2xa^2c + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2xa^2c + x^2c^2 \\
\iff\ &(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)
\end{aligned}
$$

Fazendo $a^2 - c^2 = b^2$, a equação fica: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$
Dividindo-se ambos os membros por a^2b^2, chega-se a

$$\mathbf{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{3.1}$$

que é chamada **forma canônica da elipse** .

Para se chegar à equação canônica da elipse foi necessário por duas vezes elevar ao quadrado os membros de uma igualdade o que pode fazer surgirem raízes estranhas

à equação inicial. Será que qualquer ponto $P = (x, y)$ que satisfaça a equação canônica pertence à elipse? Temos que nos certificar que se $P = (x, y)$ e $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, então $PF_1 + PF_2 = 2a$.
De fato, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$
Então,

$$\begin{aligned} PF_1^2 &= (x+c)^2 + y^2 \\ &= x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} \\ &= \frac{(a^2-b^2)x^2}{a^2} + 2cx + c^2 + b^2 \\ &= \frac{c^2x^2}{a^2} + 2cx + a^2 \\ &= (\frac{cx}{a} + a)^2 \end{aligned}$$

Do mesmo modo, chegamos a $PF_2^2 = (\frac{cx}{a} - a)^2$. Logo, $PF_1 = |\frac{cx}{a} + a|$ e $PF_2 = |\frac{cx}{a} - a|$
Da hipótese que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, decorre que $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$, que equivale a $|x| \leq a$. Multiplicando-se os dois membros da desigualdade por $\frac{c}{a}$, (que é um número positivo), chegamos a $\frac{c|x|}{a} \leq c < a$. Logo, $-a < \frac{cx}{a} < a$ e assim, $\frac{cx}{a} + a > 0$ e $\frac{cx}{a} - a < 0$. Podemos agora retirar os módulos: ficando $PF_1 = a + \frac{cx}{a}$ e $PF_2 = a - \frac{cx}{a}$ e $PF_1 + PF_2 = 2a$. Conclusão: todo ponto $P = (x, y)$ satisfazendo a equação reduzida, pertence à elipse.

2. Elipse com parâmetros geométricos a e c com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Oy.
   Em relação ao sistema cartesiano ortogonal considerado, o foco F_1 tem coordenadas cartesianas $(0, -c)$ e o foco F_2 tem coordenadas cartesianas $(0, c)$, de acordo com a figura 15. Um ponto P de coordenadas cartesianas (x, y) pertence à elipse se e somente se a soma das distâncias PF_1 de P a F_1 com a distância PF_2 de P a F_2 é igual a $2a$ sendo a equação canônica igual a $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$ ou $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ em que b é definido como $\sqrt{a^2 - c^2}$.

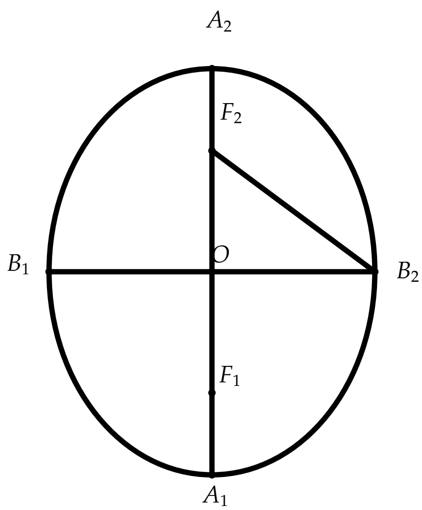

Figura 15 – Elipse com reta focal coincidindo com eixo Oy

Prova

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{x^2+(y+c)^2}+\sqrt{x^2+(y-c)^2}=2a\\
\iff&\sqrt{x^2+(y+c)^2}=2a-\sqrt{x^2+(y-c)^2}\\
\iff&x^2+y^2+2yc+c^2=4a^2-4a\sqrt{(y-c)^2+x^2}+y^2-2yc+c^2+x^2\\
\iff&4a\sqrt{(y-c)^2+x^2}=4a^2-4yc\\
\iff&a\sqrt{(y-c)^2+x^2}=a^2-yc\\
\iff&a^2(y^2-2yc+c^2+x^2)=a^4-2a^2yc+y^2c^2\\
\iff&a^2y^2-2ya^2c+c^2a^2+a^2x^2=a^4-2a^2yc+y^2c^2\\
\iff&(a^2-c^2)y^2+a^2x^2=a^2(a^2-c^2)
\end{aligned}
$$

Como $a^2-c^2=b^2$, a equação fica: $b^2y^2+a^2x^2=a^2b^2$
Dividindo-se ambos os membros por a^2b^2, chega-se a

$$\mathbf{\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1} \tag{3.2}$$

- ***Latus rectum***

  Consideremos o *latus rectum* que está à direita da origem. Sejam os pontos P_1 e P_2 as extremidades do *latus rectum*. A abscissa de P_1 e P_2 é $x = c$. Substituindo na equação canônica, temos:
  $\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$
  $\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow$
  $\frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2-c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow$
  $y^2 = \frac{b^4}{a^2} \Rightarrow$
  $y = \pm\frac{b^2}{a}$
  Portanto, as coordenadas do *latus rectum* são: $P_1 = (c, \frac{b^2}{a})$ e $P_2 = (c, -\frac{b^2}{a})$. Agora vamos calcular o comprimento l do *latus rectum*:
  $l = |P_1P_2| = \sqrt{(c-c)^2 + (-\frac{b^2}{a} - \frac{b^2}{a})^2} =$
  $\sqrt{(-\frac{2b^2}{a})^2} = \sqrt{\frac{4b^4}{a^2}} = \mathbf{\frac{2b^2}{a}}$

  Ver figura 16

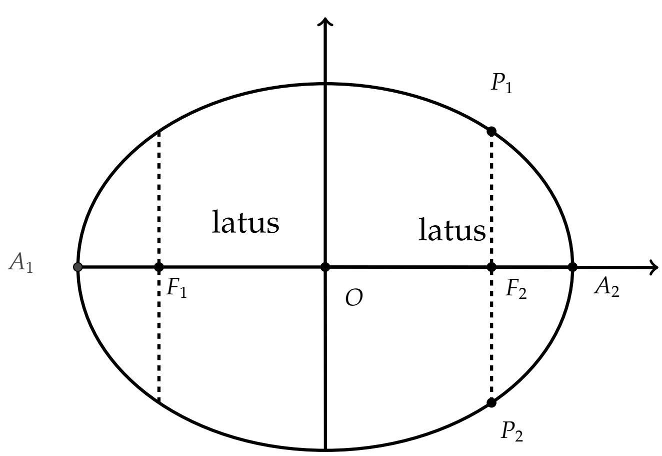

Figura 16 – Latus rectum

- **Raios vetores da elipse**

  Para um ponto P da elipse com abscissa $x > 0$ e ordenada y os comprimentos dos raios vetores do ponto P são respectivamente r_1 e r_2 (segmentos de extremos P e foco F_1 e de extremos P e foco F_2). Observar a figura 17:

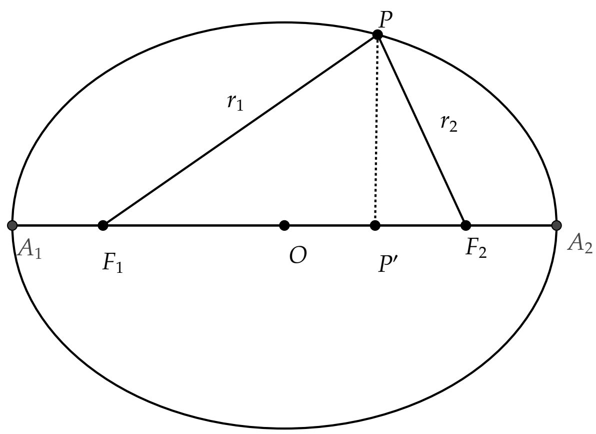

Figura 17 – Raios vetores de um ponto P da elipse

No triângulo retângulo $PP'F_1$: $r_1^2 = (x+c)^2 + y^2$ e
no triângulo retângulo $PP'F_2$: $r_2^2 = (c-x)^2 + y^2$ em que P' é o pé da perpendicular traçada por P à reta focal.
Subtraindo membro a membro,
$r_1^2 - r_2^2 = 4cx$ ou $(r_1+r_2)(r_1-r_2) = 4cx$
Portanto, $2a(r_1-r_2) = 4cx$ (pois $r_1 + r_2 = 2a$)
$r_1 - r_2 = \frac{2cx}{a} = 2ex$
Do sistema:
$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 2a \\ r_1 - r_2 = 2ex \end{cases}$$
vem que:

$$r_1 = a + ex \quad \text{e} \quad r_2 = a - ex.$$

Para um ponto P da elipse com abscissa $x < 0$ e ordenada y, de modo análogo, $r_1^2 = (x+c)^2 + y^2$ e $r_2^2 = (x-c)^2 + y^2$
$r_2^2 - r_1^2 = -4cx$ ou $(r_1 + r_2)(r_2 - r_1) = -4cx$
Portanto, $2a(r_2 - r_1) = -4cx$ (pois $r_1 + r_2 = 2a$)
$r_2 - r_1 = -\frac{2cx}{a} = -2ex$
Do sistema:
$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 2a \\ r_2 - r_1 = -2ex \end{cases}$$

vem que:
$r_1 = a + ex$ e $r_2 = a - ex$.

- Modo alternativo para deduzir a equação canônica da elipse
  Como mostrado acima, temos em relação ao comprimento do raio vetor r_1 da elipse quando $x > 0$: $r_1^2 = (x+c)^2 + y^2$ e $r_1 = a + ex$
  Portanto, $(a+ex)^2 = (x+c)^2 + y^2$
  Substituindo e por $\frac{c}{a}$: $(a + \frac{cx}{a})^2 = (x+c)^2 + y^2$
  Desenvolvendo: $a^2 + \frac{2acx}{a} + \frac{c^2x^2}{a^2} = x^2 + 2cx + c^2 + y^2$
  $a^2 + 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} = x^2 + 2cx + c^2 + y^2$
  $x^2 + 2xc + c^2 + y^2 - a^2 - 2xc - \frac{c^2x^2}{a^2} = 0$
  $a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 - a^4 - c^2x^2 = 0$
  Fatorando:
  $x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 - a^2(a^2 - c^2) = 0$. Definindo $b^2 = a^2 - c^2$, vem: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$
  Dividindo todos os membros por a^2b^2, temos: $\mathbf{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$

- **Retângulo Fundamental e Coroa Fundamental**
  A elipse é um conjunto de pontos contidos em um retângulo chamado retângulo fundamental:
  Considerando uma elipse de equação canônica igual a $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, temos:
  $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$ e $\frac{y^2}{b^2} \leq 1$, o que implica que
  $x^2 \leq a^2$ e $y^2 \leq b^2$ e ainda que $-a \leq x \leq a$ e $-b \leq y \leq b$.
  O retângulo de comprimento $2a$ e largura $2b$ é o retângulo fundamental.
  A elipse é também, um conjunto de pontos contidos em uma coroa circular formada pelas circunferências principal e secundária e chamada de coroa fundamental.
  Como $a > b$, temos:
  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2}$

Como $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, substituindo nas desigualdades, temos:
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \leq 1 \leq \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2}$ e assim, $b^2 \leq x^2 + y^2 \leq a^2$.
Portanto, se $P = (x, y)$ é um ponto qualquer da elipse de abscissa x e ordenada y e O é o centro da elipse, temos para a distância OP: $b \leq OP \leq a$, estando a elipse limitada também a essa coroa fundamental além de estar limitada ao retângulo fundamental. Consequentemente, os pontos da elipse se encontram na intersecção da coroa fundamental com o retângulo fundamental. Ver figura 18

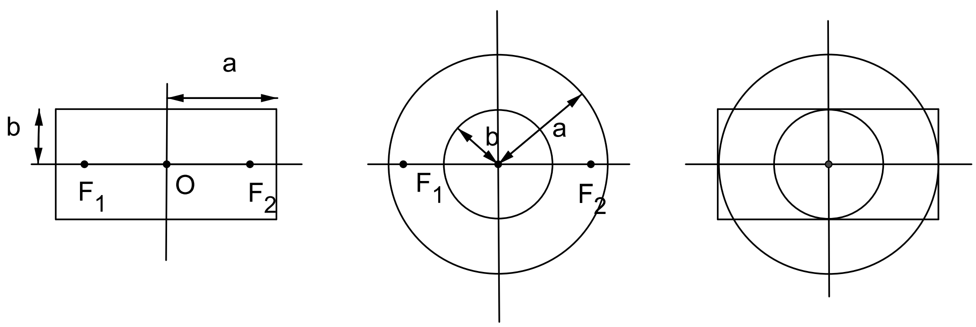

Figura 18 – Retângulo Fundamental e Coroa Fundamental

- **Retas diretrizes**

  As retas diretrizes d_1 e d_2 associadas respectivamente aos focos F_1 e F_2, são as retas perpendiculares ao eixo principal que distam $\frac{a^2}{c}$ do centro da elipse sendo D_1 e D_2 as intersecções dessas diretrizes com a reta focal. Como a excentricidade e de uma elipse é um número real entre 0 e 1, D_1 e D_2 são externos ao eixo maior A_1A_2 da curva como mostra a figura 19.

  Equações das retas diretrizes:

  Considerando um sistema cartesiano ortogonal cuja origem $O = (0, 0)$ é o centro da elipse cujos focos têm as seguintes coordenadas: $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, temos que:
  $d_1 : x = -\frac{a^2}{c} = -\frac{a*a}{c} = -\frac{a}{e}$
  $d_2 : x = \frac{a^2}{c} = \frac{a*a}{c} = \frac{a}{e}$

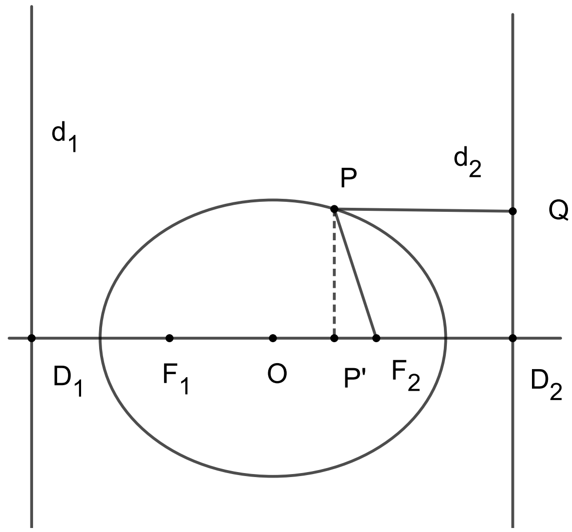

Figura 19 – Diretrizes da elipse

Teorema 3.3.1 *Definição unificada de cônica*
A elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja distância a um dos focos é igual ao produto da excentricidade pela distância do ponto à reta diretriz correspondente.

Prova

Seja a elipse com parâmetros geométricos a e c e excentricidade e cuja equação canônica é $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ com $b^2 = a^2 - c^2$. Em relação ao sistema cartesiano ortogonal, o foco F_1 da elipse tem abscissa $-c$ e ordenada 0 e o foco F_2 tem abscissa c e ordenada 0.
A distância ao quadrado de um ponto da elipse com abscissa x e ordenada y em relação ao sistema cartesiano ortogonal canônico ao foco F_2 da elipse é igual a
$(x-c)^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})$
$= x^2 - 2aex + a^2e^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$
$= (1 - \frac{b^2}{a^2})x^2 - 2aex + a^2e^2 + b^2$
$= [1 - \dfrac{(a^2-c^2)}{a^2}]x^2 - 2aex + a^2\frac{c^2}{a^2} + a^2 - c^2$
$= (\dfrac{a^2 - a^2 + c^2}{a^2})x^2 - 2aex + c^2 + a^2 - c^2$

$= a^2 - 2aex + e^2x^2$

enquanto que o quadrado do produto da excentricidade e pela distância do mesmo ponto à reta diretriz correspondente ao foco F_2 é igual a
$e^2(\frac{a}{e} - x)^2 = e^2[\frac{a^2}{e^2} - 2\frac{a}{e}x + x^2]$
$= a^2 - 2aex + e^2x^2$.

3.4 Posições relativas entre reta e elipse

Uma reta contida no plano da elipse é **externa** à elipse quando não tem nenhum ponto em comum com a elipse, sendo a intersecção entre elas um conjunto vazio, **secante** quando tem dois pontos distintos comuns com a elipse, tendo também pontos internos à elipse e **tangente** quando tem apenas um ponto em comum com a elipse, sendo os outros pontos da reta externos à elipse.

Lema 3.4.1 *Uma elipse e uma reta contida no plano da elipse não podem ter mais do que dois pontos em comum.*

Prova do lema:
Seja r a reta contida no plano da elipse e secante a uma elipse nos pontos P e Q e R um outro ponto de r. Podemos ter duas situações:

- R está entre P e Q
  Vamos determinar o ponto M simétrico ao ponto F_1 em relação à reta r. Desse modo, r é a mediatriz do segmento F_1M. Temos que :
  $PF_1 + PF_2 = 2a$ e $QF_1 + QF_2 = 2a$
  Sendo r a mediatriz de F_1M podemos verificar que:
  $PM = PF_1 \Rightarrow PM + PF_2 = 2a$
  $QM = QF_1 \Rightarrow QM + QF_2 = 2a$
  $RF_1 = RM \Rightarrow RF_1 + RF_2 = RM + RF_2$
  Chega-se a $RM + RF_2 < QM + QF_2 = 2a$. Ver figura 20.

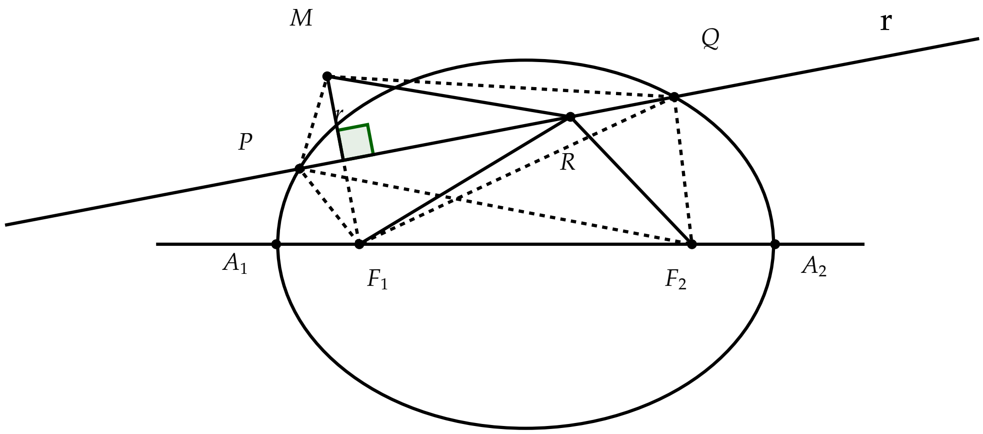

Figura 20 – Reta secante à elipse em P e Q e R entre P e Q

Por construção semelhante, determinando um ponto M' simétrico de F_2 em relação a r, temos também que $RM' + RF_2 < PM' + PF_2 = 2a$
Pode-se concluir então que R é interno à curva.

- R é externo ao segmento PQ
  De acordo com a figura 21 temos que:
  $RF_1 = RM \Rightarrow RF_1 + RF_2 = RM + RF_2$ e
  $RM + RF_2 > QM + QF_2 = 2a$, sendo R, portanto, externo à elipse.

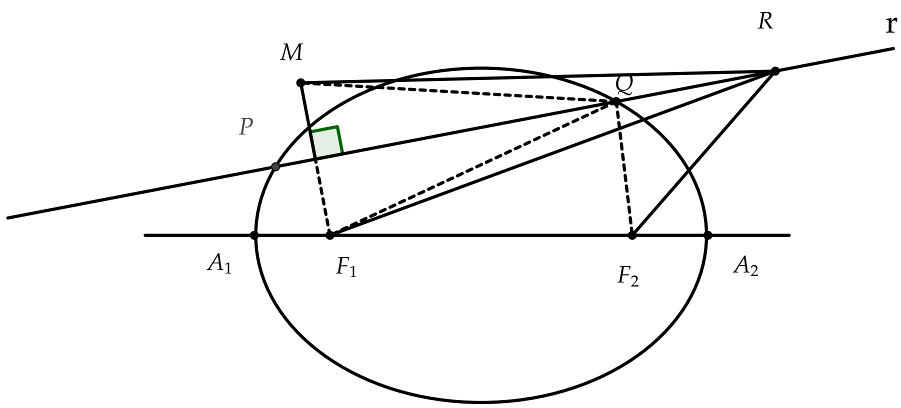

Figura 21 – Reta secante à elipse em P e Q. R fora de PQ

Corolário 3.4.1 *Dada uma reta secante à elipse nos pontos P e Q, os pontos internos do segmento de extremos P e Q são internos da elipse e os pontos externos ao segmento de extremos P e Q são pontos externos da elipse.*

Lema 3.4.2 *A reta perpendicular à reta focal passando por um dos vértices principais da elipse é reta tangente à elipse.*

Prova:
De acordo com a figura 22 , seja t a reta perpendicular à reta focal passando pelo vértice A_2 e seja Q outro ponto da reta t. Os triângulos QF_1A_2 e QF_2A_2 são retângulos sendo QF_1 e QF_2 hipotenusas. Portanto,$QF_1 + QF_2 > F_1A_2 + F_2A_2 = 2a$ sendo Q externo à elipse.

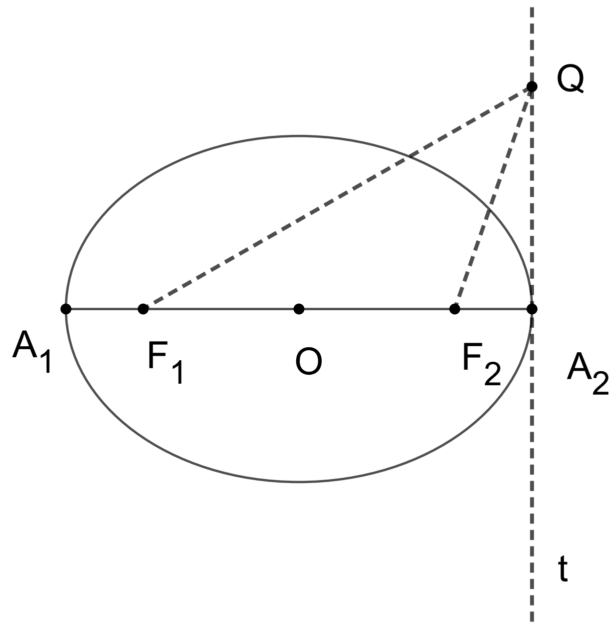

Figura 22 – Perpendicular à reta focal passando por um vértice da elipse

Lema 3.4.3 *Seja o sistema de duas equações*

$$\begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\ y = mx + n \end{cases}$$

nas incógnitas x e y em que a, b, m e n são números reais fixados com $a > 0$ *e* $b > 0$.

a) Se $a^2m^2 + b^2 - n^2 > 0$, *então o sistema de duas equações nas incógnitas x e y admite duas soluções reais* (x_1, y_1) *e* (x_2, y_2).

b) Se $a^2m^2 + b^2 - n^2 = 0$, *então o sistema de duas equações nas incógnitas x e y admite uma única solução real* (x_0, y_0) *em que* $x_0 = -\frac{a^2mn}{a^2m^2+b^2}$ *e* $y_0 = mx_0 + n$.

c) Se $a^2m^2 + b^2 - n^2 < 0$, *então o sistema de duas equações nas incógnitas x e y não admite solução real.*

Prova do Lema

Pela substituição de $y = mx + n$ em $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, temos:

$$\begin{aligned}
b^2x^2 + a^2(mx+n)^2 = a^2b^2 \Rightarrow \\
b^2x^2 + a^2(m^2x^2 + 2mnx + n^2) = a^2b^2 \Rightarrow \\
b^2x^2 + a^2m^2x^2 + 2a^2mnx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0 \Rightarrow \\
(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0
\end{aligned}$$

Esta última expressão é uma equação do segundo grau na incógnita x sendo seu discriminante Δ igual a:

$$\begin{aligned}
(2a^2mn)^2 - 4(a^2m^2 + b^2)(a^2n^2 - a^2b^2) = \\
4a^4m^2n^2 - 4(a^4m^2n^2 + a^2b^2n^2 - a^4b^2m^2 - a^2b^4) = \\
4(a^4m^2n^2 - a^4m^2n^2 - a^2b^2n^2 + a^4b^2m^2 + a^2b^4) = \\
4a^2b^2(a^2m^2 + b^2 - n^2)
\end{aligned}$$

cujo sinal é determinado pelo fator $a^2m^2 + b^2 - n^2$.

Lema 3.4.4 *Seja a elipse cuja equação cartesiana é $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ e seja a reta do plano da elipse cuja equação cartesiana é $y = mx + n$.*
a) Se $a^2m^2 + b^2 - n^2 > 0$, o sistema das duas equações admite duas soluções reais, sendo a reta secante à elipse.
b)Se $a^2m^2+b^2-n^2 = 0$, o sistema das duas equações admite uma solução real, sendo a reta tangente à elipse.
c) Se $a^2m^2 + b^2 - n^2 < 0$, a intersecção entre a reta e a elipse é um conjunto vazio.

Prova do lema.
A prova deste lema é imediata a partir do lema anterior.

3.5 Equações cartesianas das retas tangente e normal a uma elipse por um ponto de tangência dado

Seja a elipse com parâmetros geométricos a e c cuja equação canônica é $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ e seja um ponto de tangência dado da elipse com abscissa x_0 e ordenada y_0 em relação ao sistema cartesiano ortogonal canônico fixado. Então, a equação cartesiana da reta tangente à elipse pelo ponto de tangência dado é $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$.

De fato,
Se $y_0 \neq 0$ então o coeficiente angular da reta é $m = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$ e o termo independente da reta é $n = \frac{b^2}{y_0}$ e como
$a^2(-\frac{b^2x_0}{a^2y_0})^2 + b^2 - (\frac{b^2}{y_0})^2$
$= \frac{b^4x_0^2}{a^2y_0^2} + b^2 - \frac{b^4}{y_0^2}$
$= \frac{b^2}{a^2y_0^2}[b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2] = 0$
Se $y_0 = 0$, o ponto de tangência dado é um dos vértices principais da elipse e a reta tangente à elipse pelos vértices principais é a reta vertical $x = -a$ ou $x = a$ a qual é obtida da equação cartesiana $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$ substituindo x_0 por $-a$ ou a e y_0 por 0: $-b^2ax = a^2b^2$ ou $b^2ax = a^2b^2$.

- Equações das retas tangentes a elipse paralelas a uma reta dada.
  Seja a equação quadrática representando a intersecção entre a elipse $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$ e uma reta $y = mx + n$:
  $(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0$
  Se o fator $a^2m^2 + b^2 - n^2 = 0$, a reta é tangente à elipse.
  $a^2m^2 + b^2 - n^2 = 0 \Rightarrow n^2 = a^2m^2 + b^2 \Rightarrow n = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$. As duas equações das retas tangentes a elipse paralelas a uma reta $y = mx + n$ são:
  $y = mx - \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ e $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$
  Os pontos de tangência (pontos de intersecção das retas tangentes com a elipse) têm abscissas:
  $x = \dfrac{a^2m\sqrt{a^2m^2 + b^2}}{a^2m^2 + b^2}$ e
  $x = -\dfrac{a^2m\sqrt{a^2m^2 + b^2}}{a^2m^2 + b^2}$
  Esses valores são obtidos substituindo o valor de $n = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$ na equação $(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0$ que tem no caso, o discriminante igual a 0. As equações das retas tangentes a elipse perpendiculares a uma reta dada se reduzem ao caso anterior. Sendo m o coeficiente angular da reta dada, o coeficiente angular das perpendiculares será $-\frac{1}{m}$ quando $m \neq 0$.

Teorema 3.5.1 *Seja o ponto P intersecção da reta tangente a uma elipse no ponto de tangência T com a reta focal da elipse e seja o ponto Q intersecção da reta normal à elipse no ponto de tangência T com a reta focal. Então, o produto da distância do centro O da elipse a P com a distância do centro O da elipse a Q é igual ao quadrado da metade da distância focal.*

Ver figura 23

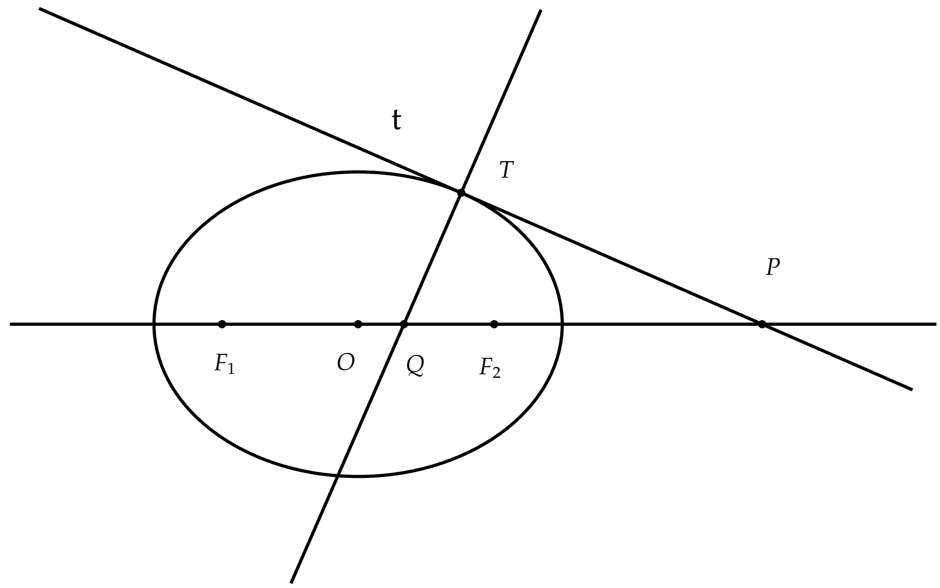

Figura 23 – Perpendicular à reta tangente à elipse passando pelo ponto de tangência

Demonstração:
Se $T(x_0, y_0)$ é o ponto de tangência de t à elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, então, a equação cartesiana da reta tangente à elipse é $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$.
Coordenadas do ponto P:
Sendo a coordenada $y = 0$, e como $P \in t$ vamos calcular a coordenada x.
$b^2x_0x = a^2b^2 \Rightarrow x = \frac{a^2b^2}{b^2x_0} = \frac{a^2}{x_0}$. Portanto, $P = (\frac{a^2}{x_0}, 0)$.
Coordenadas do ponto Q:
O ponto Q pertence à intersecção da reta normal n à tangente t com o eixo das abscissas, tendo também coordenada $y = 0$. Para chegar à coordenada x, vamos deduzir a equação de n.
Coeficiente angular de t:
$b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2 \Rightarrow y = -\frac{b^2x_0x}{a^2y_0} + \frac{a^2b^2}{a^2y_0}$ o que implica que o coeficiente angular de $t = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$.
Como n é perpendicular a t, seu coeficiente angular é igual a $\frac{a^2y_0}{b^2x_0}$ sendo a equação de n:
$y - y_0 = \frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x - x_0)$
Fazendo $y = 0$, temos:

$-y_0 = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0) \Rightarrow x - x_0 = -\frac{y_0(b^2 x_0)}{a^2 y_0} = -\frac{b^2 x_0}{a^2} \Rightarrow x = x_0(1 - \frac{b^2}{a^2}) = \frac{x_0 c^2}{a^2}.$
Portanto, $Q = (\frac{x_0 c^2}{a^2}, 0)$.
Como $OP = \frac{a^2}{x_0}$ e $OQ = \frac{x_0 c^2}{a^2}$,
$OP.OQ = \frac{a^2}{x_0} . \frac{x_0 c^2}{a^2} = c^2 = a^2 - b^2$.

Teorema 3.5.2 *O produto da distância de um foco da elipse a uma reta tangente à elipse com a distância do outro foco a mesma reta tangente é igual ao quadrado da metade do eixo menor da elipse.*

Ver figura 24

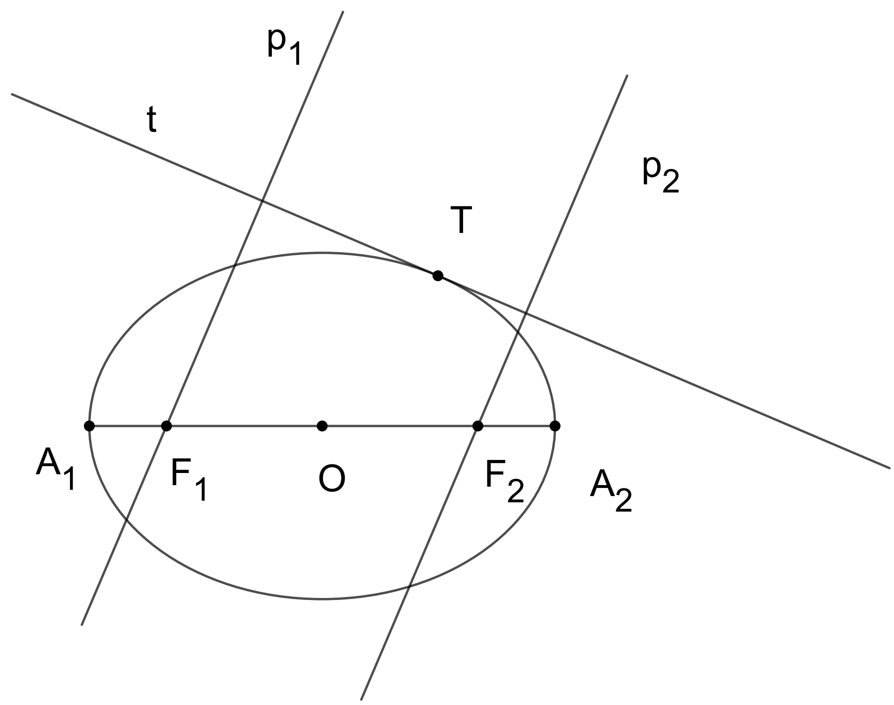

Figura 24 – Perpendiculares à reta tangente à elipse passando pelos focos da elipse

Demonstração
O produto das distâncias dos focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ à reta tangente t é igual a b^2 como é mostrado a seguir:

Distância do foco F_1 à tangente t cuja equação canônica é igual a $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$:

$$\frac{|-b^2x_0c - a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}}.$$

Distância do foco F_2 à tangente t.

$$\frac{|b^2x_0c - a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}}.$$

Então, o produto das duas distâncias, fica:

$$\frac{|(b^2x_0c + a^2b^2)(b^2x_0c - a^2b^2)|}{b^4x_0^2 + a^4y_0^2} = \frac{|b^4x_0^2c^2 - a^4b^4|}{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}.$$

Nesta última equação, podemos substituir $a^4y_0^2$, que é igual a $(a^2y_0^2)a^2$, por $(a^2b^2 - b^2x_0^2)a^2$ pois da equação da elipse tiramos que:

$$b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2 \Rightarrow a^2y_0^2 = a^2b^2 - b^2x_0^2$$

Teremos, então que:

$$\frac{|b^4x_0^2c^2 - a^4b^4|}{b^4x_0^2 + a^4y_0^2} = \frac{|b^4x_0^2c^2 - a^4b^4|}{b^4x_0^2 + (a^2b^2 - b^2x_0^2)a^2} = \frac{|b^4x_0^2c^2 - a^4b^4|}{b^4x_0^2 + a^4b^2 - b^2x_0^2a^2} = \frac{b^4|x_0^2c^2 - a^4|}{b^2(b^2x_0^2 + a^4 - a^2x_0^2)} =$$

$$\frac{b^4|x_0^2c^2 - a^4|}{b^2[x_0^2(b^2 - a^2) + a^4]} = \frac{b^4|x_0^2c^2 - a^4|}{b^2(-x_0^2c^2 + a^4)} = b^2.$$

Teorema 3.5.3 *Tangente à elipse e bissetriz externa*
Seja uma elipse cujos focos são F_1 e F_2 e seja P um ponto da elipse. Então, a bissetriz externa t no vértice P do triângulo cujos vértices são P, F_1 e F_2 é tangente à elipse no ponto P.

Prova do teorema:
Vamos prolongar PF_1 de modo que $PM = PF_2$ e depois, unir F_2 a M conforme a figura 25

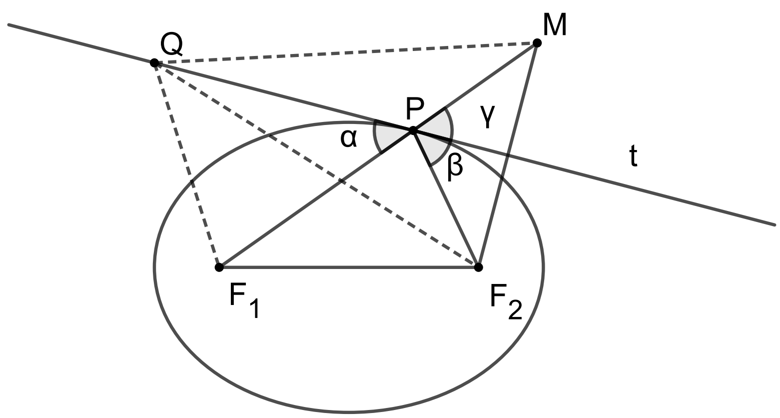

Figura 25 – Tangente e bissetriz externa

Como o triângulo PF_2M é isósceles e t é a bissetriz do ângulo formado entre F_2P e PM, t é também mediatriz do segmento F_2M. Seja Q outro ponto qualquer de t. Temos: $QF_2 = QM$, porque t é mediatriz de F_2M. Então,
$QF_1 + QF_2 = QF_1 + QM$
Sendo também $PF_2 = PM$ e $PF_1 + PF_2 = 2a \Rightarrow PF_1 + PF_2 = PF_1 + PM = F_1M = 2a$.
Como num triângulo, um lado é menor do que a soma dos outros dois, no triângulo F_1QM, $F_1M = 2a < F_1Q + QM$ sendo Q portanto, externo à elipse. Consequentemente, t é tangente à elipse.
Reciprocamente, se uma reta t é tangente à elipse num ponto P, ela é bissetriz externa em P no triângulo que P forma com os focos F_1 e F_2. Demonstração:
Sendo Q outro ponto de t, Q é externo à elipse. Portanto, como $PF_1 + PF_2 = 2a \Rightarrow QF_1 + QF_2 > 2a$.
Portanto, $PF_1 + PF_2$ é o percurso mínimo entre F_1 e PF_2 passando por um ponto da reta t sendo o ângulo α igual ao ângulo β. E como $\alpha = \gamma$ (opostos pelo vértice), concluímos que $\beta = \gamma$.

Corolário 3.5.1 *O ângulo entre a reta normal por um ponto da elipse e a reta determinada pelo* *ponto considerado e um dos focos é congruente ao ângulo entre a mesma reta normal e a reta determinada pelo ponto em questão e o outro foco da elipse.*

Observar os ângulos α e β da figura 26 .

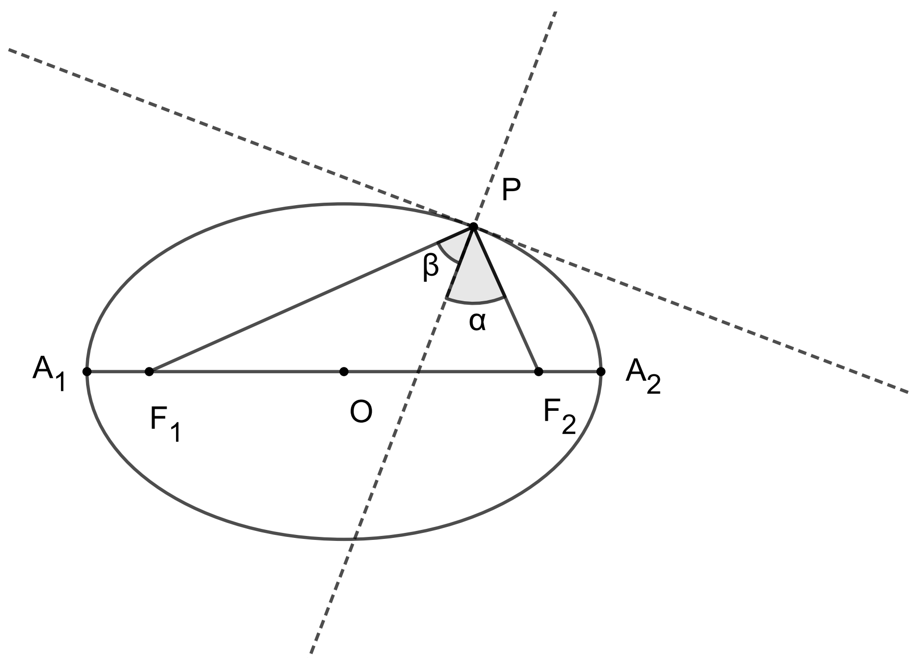

Figura 26 – Ângulos formados entre reta normal à elipse e retas pelos focos

Este corolário explica a propriedade da elipse segundo a qual uma fonte de luz colocada num dos focos da elipse são refletidos numa superfície elipsoide passando pelo outro foco.

- Podária da elipse
  A circunferência principal da elipse é o lugar geométrico dos pés H das perpendiculares baixadas de um foco às tangentes à curva. A circunferência principal é, portanto, a podária da elipse. Observar a figura 27.

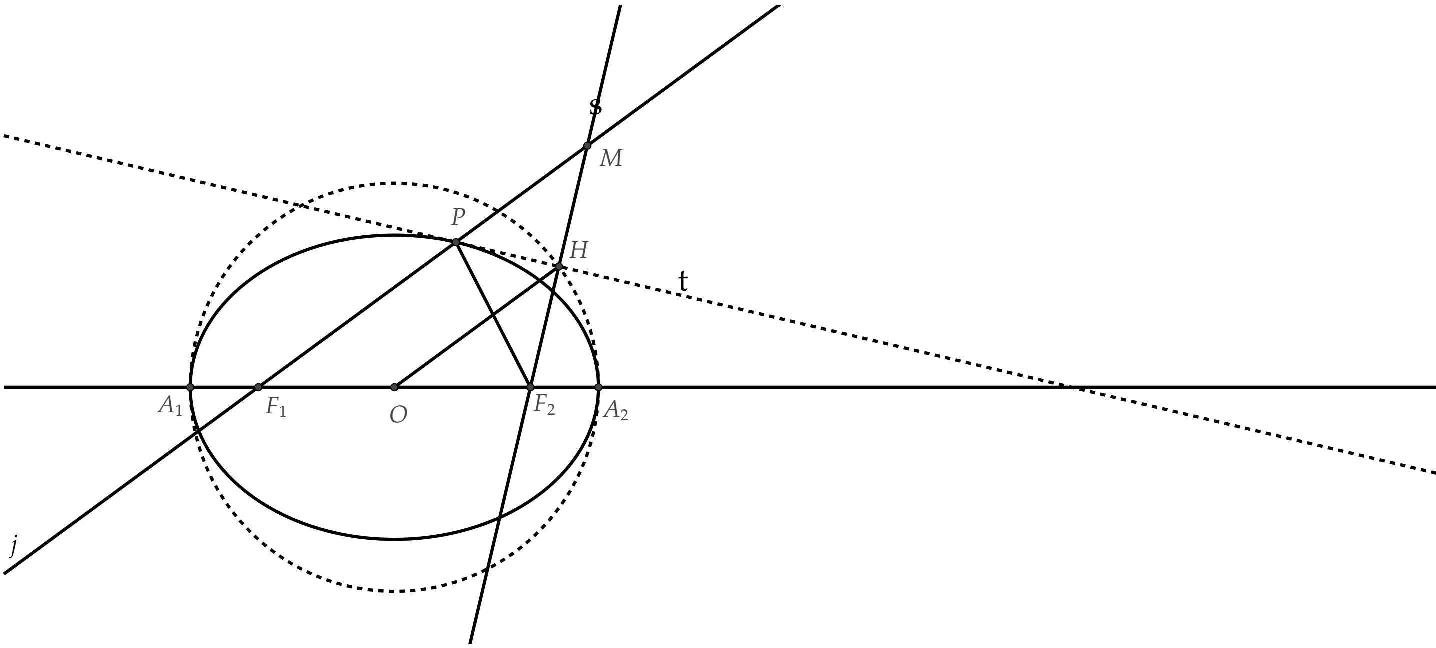

Figura 27 – Podária da elipse relativa a um foco

A reta s é a perpendicular à tangente t passando por F_2. Prolonga-se o segmento PF_1 até seccionar s no ponto M . Seja H o ponto de intersecção de s com t. Os triângulos PHF_2 e PHM são congruentes sendo $F_2H = HM$. Como $F_1O = OF_2$, O e H são pontos médios de lados do triângulo F_1F_2M. Temos então, que:
$OH = \frac{F_1M}{2} = \frac{2a}{2} = a$.
Assim os pontos H são equidistantes de O, pertencendo à circunferência principal.

3.6 Construções geométricas das retas tangentes à elipse

1. Por um ponto P da elipse
   De acordo com o teorema 3.5.3 da tangente e bissetriz externa, no triângulo PF_1F_2, basta traçar a reta bissetriz do ângulo externo em P. A bissetriz é a tangente procurada. Ver figura 28

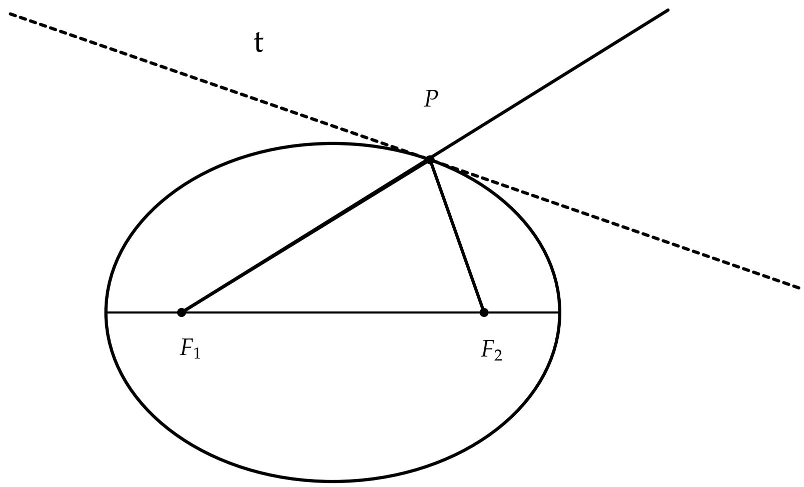

Figura 28 – Construção da reta tangente à elipse por um ponto da curva

2. Por um ponto Q externo à elipse
   Traçar a circunferência diretriz com centro em F_1. Traçar a circunferência com centro em Q e raio igual ao segmento QF_2 . Seja M o ponto de intersecção das duas circunferências. Obter o ponto H, ponto médio do segmento MF_2 . A reta t que passa por Q e H será a tangente procurada. O ponto P de contato da tangente com a elipse será a intersecção de t com o segmento MF_1. Temos segundo a figura 29, que o triângulo PF_2M é isósceles porque $PF_1 + PF_2 = 2a$ e $PF_1 + PM = 2a$ e portanto, $PF_2 = PM$. Como H é ponto médio de F_2M, PH é mediana e altura do triângulo PF_2M e bissetriz do ângulo $F_2\hat{P}M$ sendo t portanto, tangente à elipse.

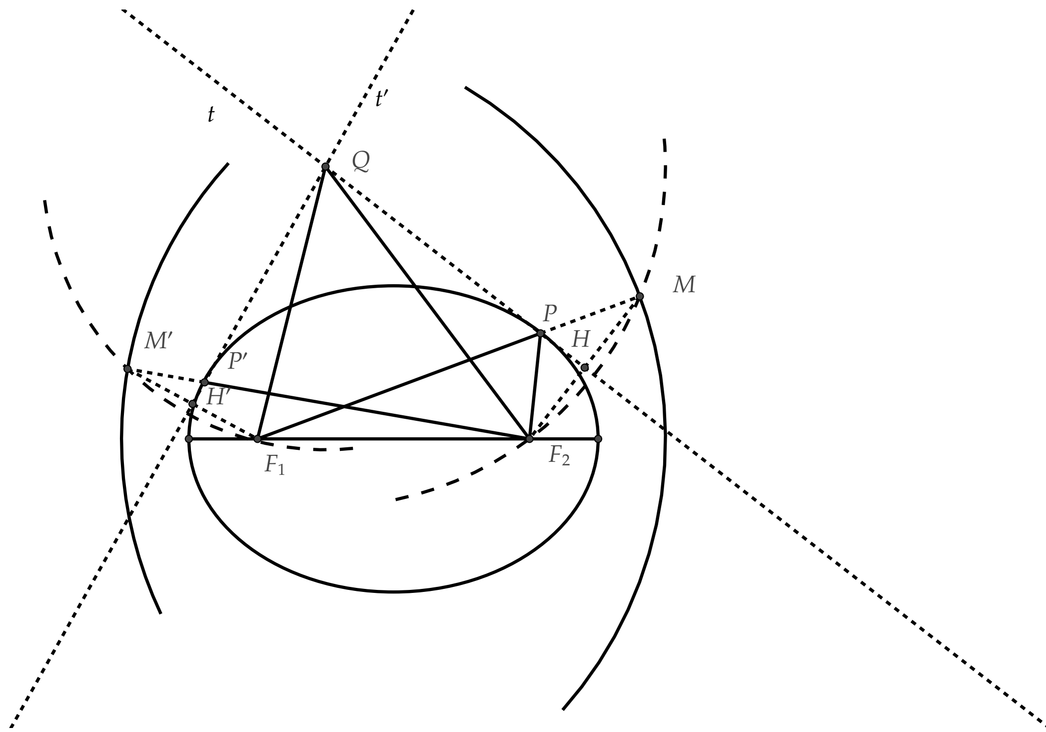

Figura 29 – Construção da reta tangente à elipse por um ponto externo à curva

Podemos construir por Q uma segunda tangente t' à elipse procedendo do mesmo modo em relação à circunferência diretriz de centro F_2 e à circunferência que tem QF_1 como raio, sendo M' o ponto de intersecção das duas circunferências, conforme a figura.

3. Paralela a uma reta dada s
   Traçar a circunferência diretriz com centro em F_1. Traçar a reta perpendicular a s passando por F_2. Esta reta intersecta a circunferência diretriz no ponto M. Seja H o ponto médio do segmento F_2M. Traçar por H uma reta t paralela a s. t é a tangente procurada conforme a figura 30. Observemos que o triângulo F_2PM é isósceles porque sendo $PF_1 + PF_2 = 2a$ e $PF_1 + PM = 2a$ temos que $PF_2 = PM$. A reta que passa por F_2M é perpendicular à reta dada e também à reta t. Portanto, t é mediatriz do segmento F_2M e também bissetriz externa do ângulo com vértice em P sendo portanto tangente à elipse segundo o teorema 3.5.3.

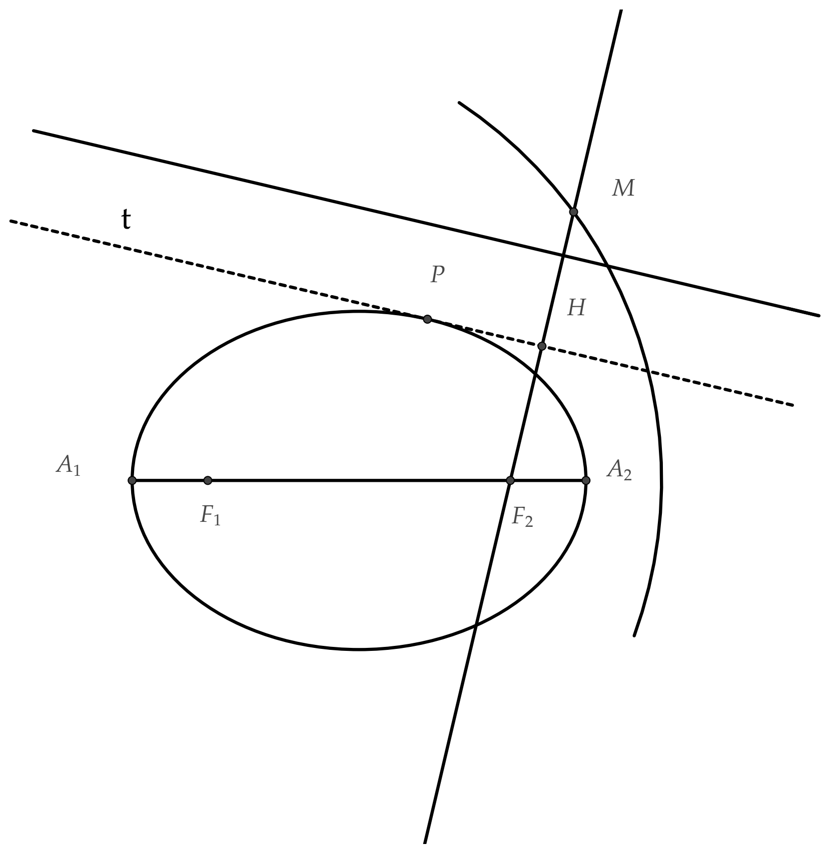

Figura 30 – Construção de reta tangente à elipse, paralela a uma reta dada

.

3.7 Equações Paramétricas da Elipse

Seja a elipse de centro $O = (0,0)$ num sistema cartesiano ortogonal. Vamos traçar uma circunferência com centro em O e raio igual ao semi-eixo maior a da elipse. Consideremos o ponto $P = (x, y)$ da elipse e uma reta paralela ao eixo Oy passando por P e que intersecta a circunferência no ponto A e o eixo Ox no ponto A'. O Raio OA determina o ângulo θ com o eixo Ox. No triângulo retângulo OAA', observa-se que $OA' = OAcos\theta$ ou seja, $x = acos\theta$. Ver figura 3.7

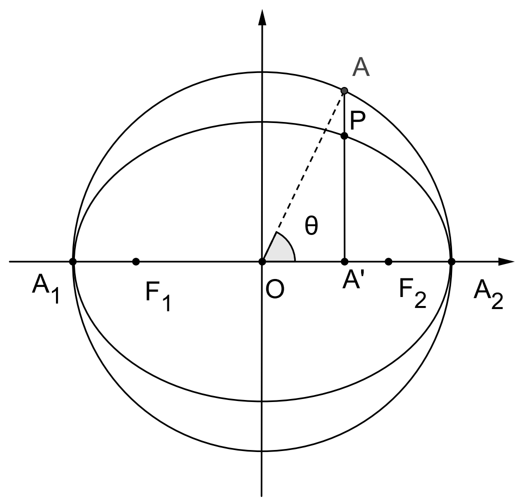

Figura 31 – Equações paramétricas da elipse

Para calcular a coordenada y do ponto P basta substituir o valor de x na equação canônica:
$\frac{(acos\theta)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - (cos^2\theta) = sen^2\theta \Rightarrow y^2 = b^2 sen^2\theta \Rightarrow y = bsen\theta$. Cada ponto P da elipse corresponde a um ângulo θ quando este varia de 0 a 2π. θ é o parâmetro sendo as equações paramétricas: $\begin{cases} x = acos\theta \\ y = bsen\theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

Observações:

- Quando a elipse tiver seu eixo maior sobre Oy, com equação canônica $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, as equações paramétricas ficam:
  $\begin{cases} x = bcos\theta \\ y = asen\theta \end{cases}$

- Se o centro da elipse for $C(x_0, y_0) \neq (0,0)$, com a translação de eixos temos:
  $\begin{cases} x - x_0 = acos\theta \Rightarrow x = x_0 + acos\theta \\ y - y_0 = bsen\theta \Rightarrow y = y_0 + bsen\theta \end{cases}$

- Das equações paramétricas temos que:
  $\frac{x-x_0}{a} = cos\theta$ e $\frac{y-y_0}{b} = sen\theta$
  Portanto, $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} = cos^2\theta$ e $\frac{(y-y_0)^2}{b^2} = sen^2\theta$

Como $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$ (relação fundamental da trigonometria), chegamos a
$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$
que é a equação na forma canônica. Por outro lado, podemos encontrar as equações paramétricas fazendo a seguinte identificação:
Se $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 = cos^2\theta + sen^2\theta$
$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} = cos^2\theta \Rightarrow x = x_0 + acos\theta$ e
$\frac{(y-y_0)^2}{b^2} = sen^2\theta \Rightarrow y = y_0 + bsen\theta$

3.8 Equações da Elipse em Coordenadas Polares

Em relação a um sistema de coordenadas polares cuja origem é o ponto médio O do segmento de reta cujos extremos são os focos F_1 e F_2 e cuja semi-reta polar de origem O contém F_2, temos: $x = rcos\theta$ e $y = rsen\theta$ em que x e y são as coordenadas cartesianas de um ponto da elipse em relação a um sistema cartesiano ortogonal com centro em O. Substituindo-se x e y por seus valores correspondentes em coordenadas polares na equação canônica da elipse, temos: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{r^2cos^2\theta}{a^2} + \frac{r^2sen^2\theta}{b^2} = 1$.
Por conveniência, vamos colocar o polo coincidindo com um dos focos da elipse. A reta diretriz pode estar posicionada de quatro modos em relação ao eixo polar e ao polo. Vamos considerar cada caso:

1. Elipse com reta diretriz perpendicular ao eixo polar e à direita do polo.
   Consideremos um sistema de coordenadas polares cuja origem é o foco F_2 da elipse e cuja semi-reta polar tem origem em F_2 e não contém F_1. Nesse caso se d é a distância entre o foco F_2 e a reta diretriz d_2, $d = \frac{a}{e} - c$ (porque a distância $d(O, d_2)$ entre o centro da elipse e a diretriz d_2 é igual a $\frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}$). Ver figura 32

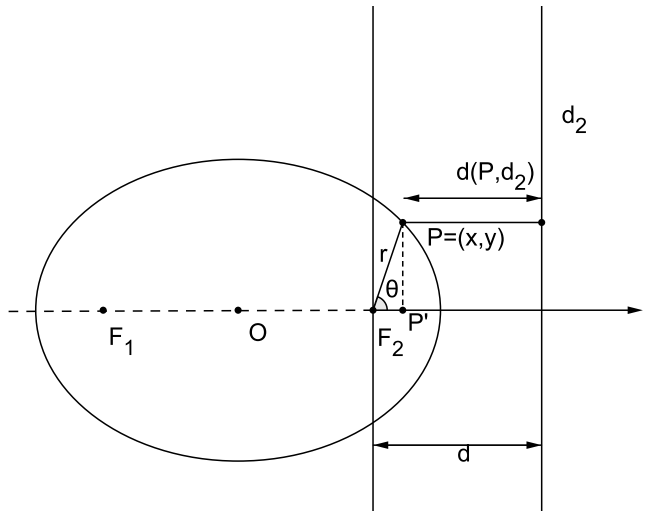

Figura 32 – Reta diretriz perpendicular ao eixo polar e à direita do polo

Sendo $d(P, F_2) = r$ (distância entre P e F_2) e $d(P, d_2) = d - x$ (distância entre P e d_2), como $\frac{d(P,F_2)}{d(P,d_2)} = e$, temos:
$r = e(d - x) = e(d - rcos\theta) = \frac{ed}{1+ecos\theta}$
Portanto nesse sistema de coordenadas polares a equação da elipse é:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{ed}}{\mathbf{1 + ecos}\theta} \tag{3.3}$$

Podemos utilizar a equação da elipse em coordenadas polares para o cálculo de alguns de seus elementos:

- Cálculo do comprimento do eixo maior $2a$ da elipse utilizando-se coordenadas polares
  $2a = r(0) + r(\pi) = \frac{de}{1+ecos(0)} + \frac{de}{1+ecos(\pi)} = \frac{de}{1+e} + \frac{(de)}{1-e} = \frac{de-de^2+de+de^2}{1-e^2} = \frac{2de}{1-e^2}$, sendo $\frac{de}{1-e^2}$ o comprimento do semi-eixo maior da elipse.
- Cálculo do comprimento da corda focal mínima ou *latus rectum* l
  $r(\frac{\pi}{2}) = \frac{de}{1+ecos\frac{\pi}{2}} = de$ que corresponde à metade superior de l.
  $r(\frac{3\pi}{2}) = \frac{de}{1+ecos(\frac{3\pi}{2})}$ que é igual à metade inferior de l. Portanto, $2de$ é o comprimento total de l em função da excentricidade e e da distância d de d_2 a F_2.
  Podemos ainda calcular o valor de l em função dos semi-eixos a e b da elipse:
  Na elipse temos que $1 - e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2-c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$. Substituindo $1 - e^2$ por$\frac{b^2}{a^2}$ na

equação do semi eixo maior a da elipse:
$a = \frac{de}{\frac{b^2}{a^2}} = \frac{dea^2}{b^2} \Rightarrow de = \frac{ab^2}{a^2} = \frac{b^2}{a}$

- Cálculo do comprimento do eixo menor b da elipse:
  Como $\frac{b^2}{a} = de \Rightarrow b^2 = aed = cd \Rightarrow b = \sqrt{cd}$.

2. Elipse com reta diretriz perpendicular ao eixo polar e à esquerda do polo.
   Analogamente, em relação a um sistema de coordenadas polares cuja origem é o foco F_1 da elipse e cuja semi-reta polar de origem F_1 contém F_2 , sendo d a distância de F_1 a d_1, $d = \frac{a}{e} - c$. Ver figura 33

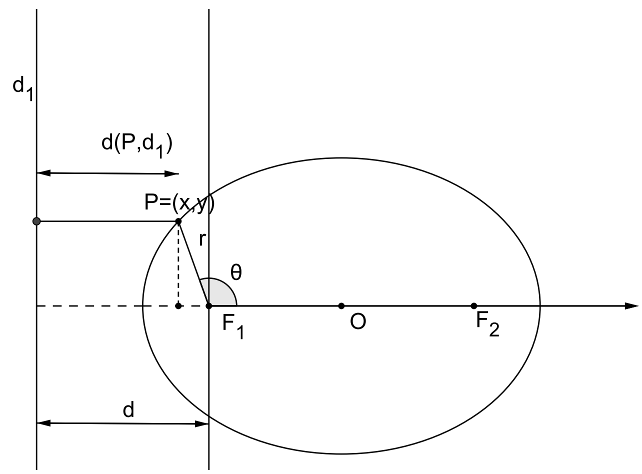

Figura 33 – Reta diretriz perpendicular ao eixo polar e à esquerda do polo

Como $r = e(d - (-rcos\theta) \Rightarrow r = ed + ercos\theta \Rightarrow r - ercos\theta = ed \Rightarrow r(1 - ecos\theta) = ed$. Portanto, nesse sistema, a equação polar da elipse é:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{ed}}{\mathbf{1 - ecos}\theta} \tag{3.4}$$

3. Elipse com reta diretriz paralela ao eixo polar (com origem em F_2) e acima dele.
   No caso de uma elipse com estas características, a $d(P, d_2)$ fica igual a $d - y = d - sen\theta$ e, então, como $\frac{d(P,F_2)}{d(P,d_2)} = e$, temos:

$r = e(d-y) = e(d - rsen\theta) = \frac{ed}{1+esen\theta}$
Portanto nesse sistema de coordenadas polares a equação da elipse é:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{ed}}{\mathbf{1 + e\ sen}\theta} \tag{3.5}$$

Ver figura 34

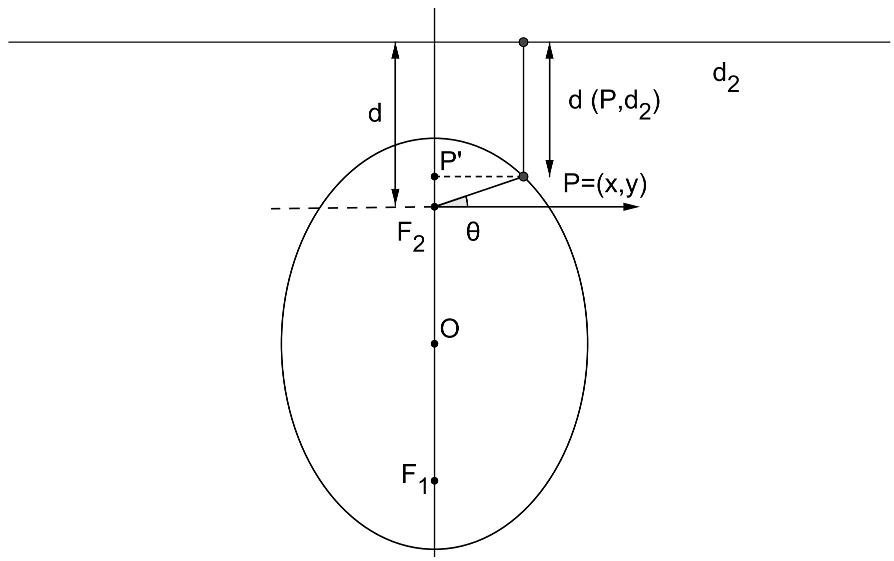

Figura 34 – Reta diretriz paralela ao eixo polar e acima do polo

4. Elipse com reta diretriz paralela ao eixo polar (com origem em F_1) e abaixo dele. Neste caso, a $d(P, d_1)$ fica igual a $d - (-r\ sen\theta) = d + rsen\theta$ e, assim, como $\frac{d(P,F_1)}{d(P,d_1)} = e$, temos:
   $r = e(d + r\ sen\theta) = \frac{ed}{1-e\ sen\theta}$
   Portanto nesse sistema de coordenadas polares a equação da elipse é:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{ed}}{\mathbf{1 - e\ sen}\theta} \tag{3.6}$$

Ver figura 35

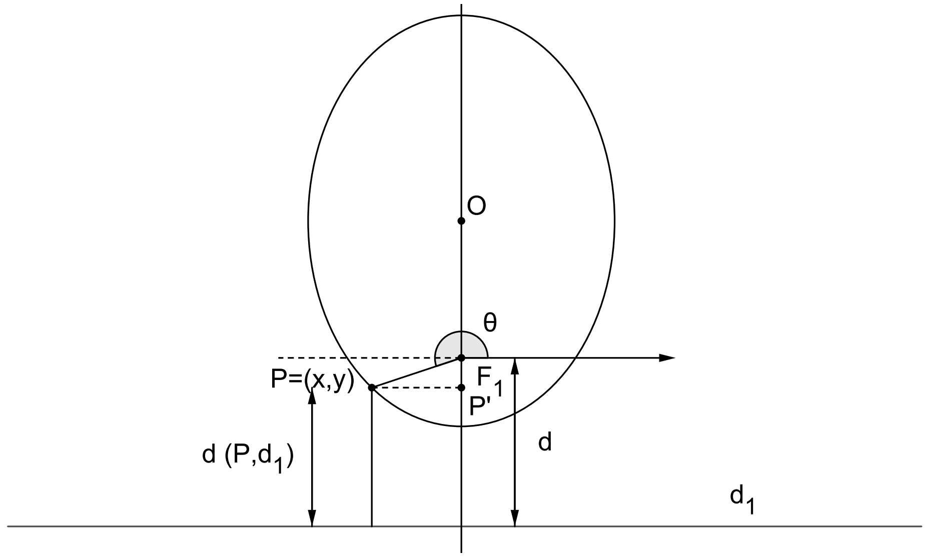

Figura 35 – Reta diretriz paralela ao eixo polar e abaixo do polo

3.9 Equações da elipse quando o centro da elipse não é a origem do sistema cartesiano ortogonal

- A equação de uma elipse com parâmetros geométricos a e c cujo centro tem abscissa X_0 e ordenada Y_0 em relação a um sistema cartesiano ortogonal $XO'Y$ com origem O' e cujo eixo X das abscissas é paralelo à reta focal da elipse e cujo eixo Y das ordenadas é paralelo ao eixo menor da elipse é:
  $\dfrac{(X - X_0)^2}{a^2} + \dfrac{(Y - Y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad b^2 = a^2 - c^2$
  porque a equação canônica da elipse em relação ao sistema cartesiano ortogonal canônico xOy cuja origem é o centro da elipse, cujo eixo x das abscissas é coincidente com a reta focal e cujo eixo y das ordenadas é a reta perpendicular à reta focal pela origem é:
  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad b^2 = a^2 - c^2$
  e as relações entre a abscissa X e a ordenada Y do sistema $XO'Y$ e a abscissa x e a ordenada y do sistema canônico xOy são respectivamente:
  $x = X - X_0 \quad \text{e} \quad y = Y - Y_0$
  Ver figura 36

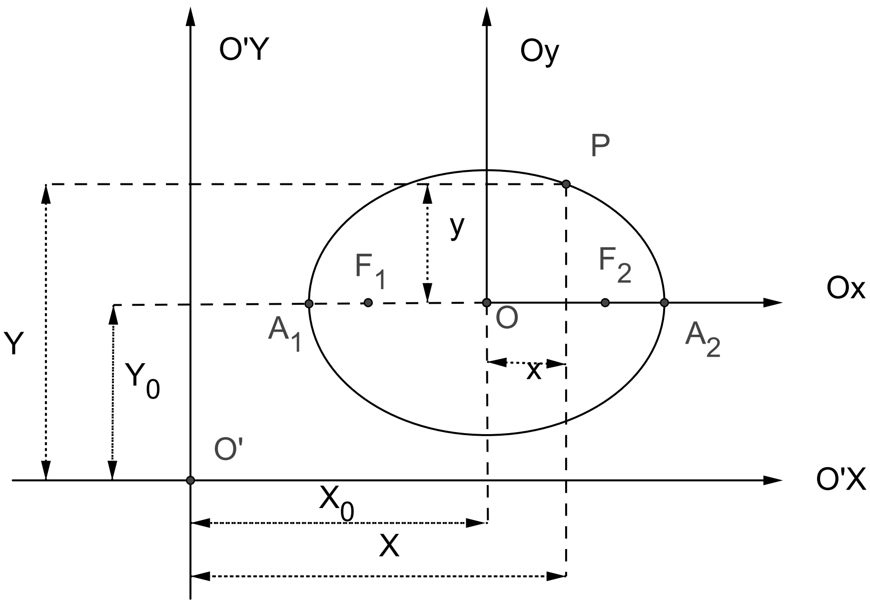

Figura 36 – Elipse com centro não coincidente com a origem do sistema

Em relação ao sistema cartesiano $XO'Y$ temos:

– **Focos** - O foco F_1 tem abscissa $X_0 - c$ e ordenada Y_0 enquanto o foco F_2 tem abscissa $X_0 + c$ e ordenada Y_0.

– **Vértices principais** - O vértice principal A_1 tem abscissa $X_0 - a$ e ordenada Y_0 enquanto que o vértice A_2 tem abscissa $X_0 + a$ e ordenada Y_0.

– **Vértices secundários** - O vértice secundário B_1 tem abscissa X_0 e ordenada $Y_0 - b$ enquanto o vértice secundário B_2 tem abscissa X_0 e ordenada $Y_0 + b$.

– **Reta focal** - A reta focal tem equação cartesiana $Y = Y_0$.

– **Retas diretrizes** - A reta diretriz associada ao foco F_1 tem equação cartesiana $X = X_0 - \frac{a^2}{c}$ enquanto que a reta diretriz associada ao foco F_2 tem equação cartesiana $X = X_0 + \frac{a^2}{c}$.

- **Circunferências diretrizes** - A circunferência diretriz associada ao foco F_1 tem equação cartesiana
$(X - X_0 + c)^2 + (Y - Y_0)^2 = 4a^2$.
enquanto que a circunferência diretriz associada ao foco F_2 tem equação cartesiana
$(X - X_0 - c)^2 + (Y - Y_0)^2 = 4a^2$.

- **Circunferência principal e secundária** - A circunferência principal tem equação cartesiana $(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 = a^2$ e a circunferência secundária tem equação cartesiana
$(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 = b^2$

- A equação da reta tangente à elipse por um ponto de tangência da elipse com abscissa X_1 e ordenada Y_1 é então:
$\dfrac{(X_1 - X_0)(X - X_0)}{a^2} + \dfrac{(Y_1 - Y_0)(Y - Y_0)}{b^2} = 1$ devido ao fato de que no sistema cartesiano canônico xOy o ponto de tangência dado tem abscissa $x_1 = X_1 - X_0$ e ordenada $y_1 = Y_1 - Y_0$ e a reta tangente tem equação cartesiana
$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

- No caso de um sistema cartesiano ortogonal $XO'Y$ com origem O' cujo eixo Y das ordenadas é paralelo à reta focal e cujo eixo X das abscissas é paralelo ao eixo secundário da elipse com parâmetros geométricos a e c e cujo centro O tem abscissa X_0 e ordenada Y_0 a equação canônica da elipse é:
$(\dfrac{X - X_0}{b^2})^2 + (\dfrac{Y - Y_0}{a^2})^2 = 1 \quad b^2 = a^2 - c^2$
porque a equação canônica da elipse em relação ao sistema cartesiano ortogonal canônico xOy cuja origem é o centro da elipse, cujo eixo y das ordenadas é coincidente com a reta focal e cujo eixo x das abscissas é a reta perpendicular à reta focal pela origem é:
$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad b^2 = a^2 - c^2$
e as relações entre a abscissa X e a ordenada Y do sistema$XO'Y$ e a abscissa x e a ordenada y do sistema canônico xOy são respectivamente:
$x = X - X_0 \quad \text{e} \quad y = Y - Y_0$
Em relação ao sistema cartesiano $XO'Y$ temos:

- **Focos** - O foco F_1 tem abscissa X_0 e ordenada $Y_0 - c$ enquanto o foco F_2 tem abscissa X_0 e ordenada $Y_0 + c$.

- **Vértices principais** - O vértice principal A_1 tem abscissa X_0 e ordenada $Y_0 - a$ enquanto que o vértice A_2 tem abscissa X_0 e ordenada $Y_0 + a$.

- **Vértices secundários** - O vértice secundário B_1 tem abscissa $X_0 - b$ e ordenada Y_0 enquanto o vértice secundário B_2 tem abscissa $X_0 + b$ e ordenada Y_0 .

- **Reta focal** - A reta focal tem equação cartesiana $X = X_0$.

- **Retas diretrizes** - A reta diretriz associada ao foco F_1 tem equação cartesiana $Y = Y_0 - \frac{a^2}{c}$ enquanto que a reta diretriz associada ao foco F_2 tem equação cartesiana $Y = Y_0 + \frac{a^2}{c}$.

- **Circunferências diretrizes** - A circunferência diretriz associada ao foco F_1 tem equação cartesiana
  $(X - X_0)^2 + (Y - Y_0 + c)^2 = 4a^2$.
  enquanto que a circunferência diretriz associada ao foco F_2 tem equação cartesiana
  $(X - X_0)^2 + (Y - Y_0 - c)^2 = 4a^2$.

- **Circunferência principal e secundária** - A circunferência principal tem equação cartesiana $(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 = a^2$ e a circunferência secundária tem equação cartesiana
  $(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 = b^2$

- A equação cartesiana da reta tangente à elipse por um ponto de tangência da elipse de abscissa X_1 e ordenada Y_1 é:
  $\dfrac{(X_1 - X_0)(X - X_0)}{b^2} + \dfrac{(Y_1 - Y_0)(Y - Y_0)}{a^2} = 1.$

4 Hipérbole

A hipérbole é a curva plana obtida pela intersecção da superfície de um cone de revolução com um plano paralelo ao eixo do cone e que não passe pelo vértice do cone.

4.1 Definição

A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos do plano cujo módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos distintos do plano é igual a $2a$ estritamente menor do que a distância $2c$ entre os pontos fixos. Os parâmetros geométricos da hipérbole são os números reais estritamente positivos a e c.

4.2 Elementos

- **Focos**
  Os focos da hipérbole são os pontos F_1 e F_2 fixos distintos em relação aos quais são consideradas as distâncias de um ponto qualquer da hipérbole.

- **Segmento focal**
  O segmento focal da hipérbole é o segmento de reta cujas extremidades são os focos da hipérbole. A distância $2c$ entre F_1 e F_2 é chamada **distância focal**.

- **Centro da hipérbole**
  Centro da hipérbole é o ponto médio do segmento focal.

- **Reta focal**
  A reta focal da hipérbole é a reta determinada pelos focos da hipérbole.

- **Vértices da hipérbole**
  Os vértices da hipérbole são os pontos de intersecção da hipérbole com a reta focal.

- **Eixo real ou transverso**
  O eixo real ou transverso da hipérbole é o segmento de reta cujos extremos são os vértices da hipérbole.

- **Eixo imaginário ou não transverso ou secundário**
  O eixo imaginário da hipérbole é o segmento de reta cujos extremos são os pontos

B_1 e B_2 determinados na reta perpendicular ao eixo real que passa pelo centro O de modo que $OB_1 = OB_2 = \sqrt{c^2 - a^2}$. O comprimento do eixo imaginário da hipérbole será designado por $2b$. Os pontos B_1 e B_2 são chamados de vértices secundários e não pertencem à curva. Designando por b a medida dos semi-eixos imaginários OB_1 e OB_2, teremos:
$c^2 = a^2 + b^2$.

- **Assíntotas**

  Assíntotas são as duas retas determinadas pelas diagonais do retângulo de lados paralelos aos eixos real e imaginário (chamado de **retângulo de base**), e que medem respectivamente $2a$ e $2b$. À medida que os pontos da hipérbole se afastam de seus vértices, eles se aproximam das assíntotas progressivamente, sem encostar nelas. O ângulo θ da figura é chamado de abertura da hipérbole. Ver figura 37

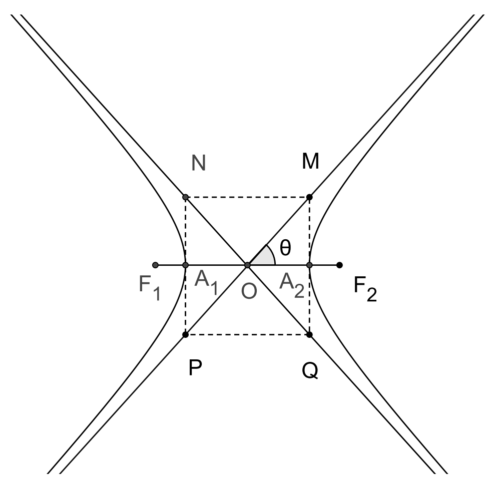

Figura 37 – Assíntotas da Hipérbole

- **Excentricidade**

  A excentricidade e da hipérbole é a razão entre a distância focal e o módulo da diferença entre as distâncias de um ponto da hipérbole aos focos, ou seja **e** = **c/a**.

  A excentricidade informa se a hipérbole tem os ramos mais abertos ou fechados. Se a excentricidade da hipérbole se aproxima de 1, c se aproxima de a e os ramos da hipérbole se fecham. Quanto maior a excentricidade, maior a abertura dos ramos da hipérbole.

- **Retas diretrizes**
  As retas diretrizes da hipérbole são duas retas perpendiculares à reta focal cuja distância ao ponto médio do segmento focal é igual à razão $\frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}$. Ver figura 38

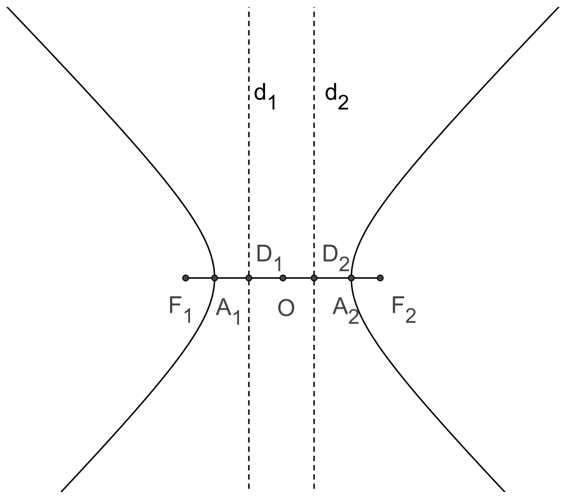

Figura 38 – Diretrizes da hipérbole

- **Corda da hipérbole**
  Corda da hipérbole é qualquer segmento cujas extremidades distintas pertençam à hipérbole.

- ***Latus rectum* da hipérbole**
  Chama-se amplitude focal ou *latus rectum* da hipérbole o comprimento da corda que passa por um dos focos e é perpendicular à reta focal e paralela à diretriz.

- **Raio vetor**
  Raio vetor é o segmento de reta que une um ponto da hipérbole a um de seus focos.

- **Circunferência principal**
  A circunferência principal da hipérbole é a circunferência cujo centro é o ponto médio do segmento focal e cujo comprimento do diâmetro é a medida do eixo real da hipérbole.

- **Circunferência secundária**
  A circunferência secundária da hipérbole é a circunferência cujo centro é o ponto

médio do segmento focal e cujo comprimento do diâmetro é a medida do eixo secundário da hipérbole.

- **Circunferências diretrizes**
  São as duas circunferências com centros nos focos e que têm diâmetros de medida igual ao eixo real da hipérbole.

Teorema 4.2.1 *A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de um dos focos e da circunferência diretriz correspondente ao outro foco.*

Prova

De acordo com a figura 39.Observar que: $PF_1 - PF_2 = 2a \Rightarrow (PM + MF_1) - PF_2 = 2a \Rightarrow PM + 2a - PF_2 = 2a \Rightarrow PM = PF_2$.

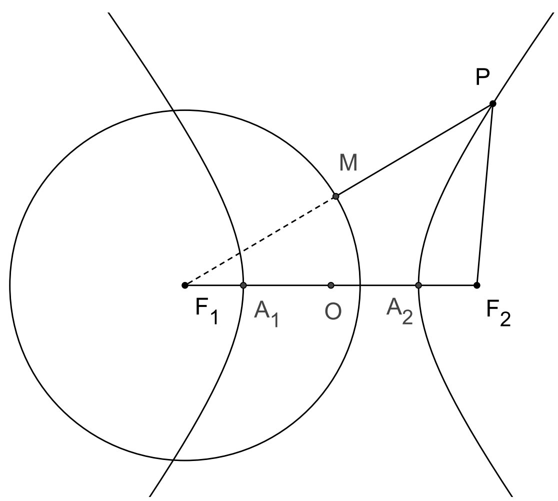

Figura 39 – Circunferência diretriz da hipérbole

4.3 Equação canônica da hipérbole

1. Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Ox. Ver figura 40

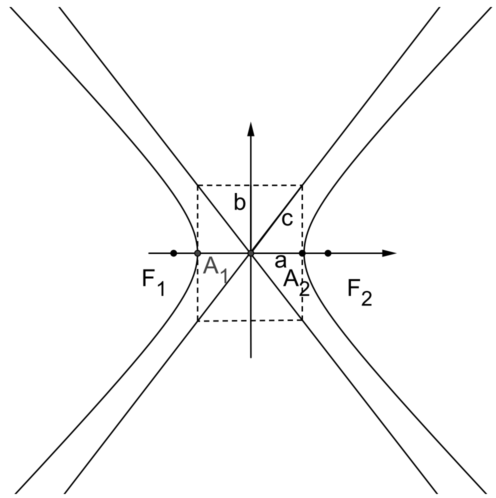

Figura 40 – Hipérbole com reta focal coincidindo com eixo Ox

Dada uma hipérbole com parâmetros geométricos a e c respectivamente, considere o sistema cartesiano ortogonal canônico xOy cuja origem O é o ponto médio do segmento focal, cujo eixo x das abscissas é a reta coincidente com a reta focal determinada pelos focos da hipérbole e cujo eixo das ordenadas é a reta perpendicular pelo centro da hipérbole à reta focal.
Em relação ao sistema cartesiano ortogonal canônico temos:

- O foco F_1 tem abscissa $-c$ e ordenada 0 e o foco F_2 tem abscissa c e ordenada 0.
- As coordenadas cartesianas dos vértices A_1 e A_2 são respectivamente $(-a, 0)$ e $(a, 0)$.

- As equações das retas diretrizes respectivamente associadas aos focos F_1 e F_2 são: $\dfrac{-a^2}{c}$ e $\dfrac{a^2}{c}$.

- As equações cartesianas das circunferências diretrizes C_1 e C_2 respectivamente associadas aos focos F_1 e F_2 são respectivamente:
  $C_1 : (x + c)^2 + y^2 = 4a^2$
  $C_2 : (x - c)^2 + y^2 = 4a^2$

- As equações cartesianas das circunferências principal e secundária são respectivamente: $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + y^2 = b^2$

Em relação ao sistema cartesiano ortogonal canônico, um ponto P com abscissa x e ordenada y é um ponto da hipérbole quando o módulo da diferença entre a distância PF_1 de P ao foco F_1 e a distância PF_2 de P ao foco F_2 é igual a $2a$ ou seja $|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a$.

Prova da equação canônica

$$\begin{aligned}
&|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a \\
\iff\ & \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \\
\iff\ & \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
\iff\ & (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
\iff\ & x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\
\iff\ & \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc \\
\iff\ & a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc \\
\iff\ & a^2x^2 - 2xa^2c + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2xa^2c + x^2c^2 \\
\iff\ & (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)
\end{aligned}$$

Fazendo $c^2 - a^2 = b^2$, a equação fica: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$
Dividindo-se ambos os membros por a^2b^2, chega-se a

$$\mathbf{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{4.1}$$

que é chamada **equação canônica da hipérbole** .

2. Hipérbole com parâmetros geométricos a e c com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Oy.
   Em relação ao sistema cartesiano ortogonal considerado, o foco F_1 tem coordenadas cartesianas $(0, -c)$ e o foco F_2 tem coordenadas cartesianas $(0, c)$, de acordo com a figura 41. Um ponto P de coordenadas cartesianas (x, y) pertence à hipérbole se e somente se o módulo da diferença entre a distância PF_1 de P a F_1 e a distância PF_2 de P a F_2 é igual a $2a$ sendo a equação canônica igual a $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$ ou $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

em que b é definido como $\sqrt{c^2 - a^2}$.

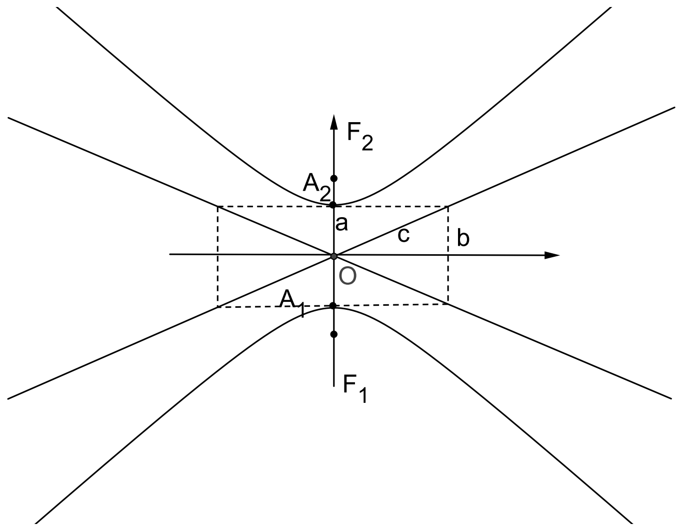

Figura 41 – Hipérbole com reta focal coincidindo com eixo Oy

Prova:

$$
\begin{aligned}
|\sqrt{x^2+(y-c)^2} - \sqrt{x^2+(y+c)^2}| &= 2a \\
\sqrt{x^2+(y-c)^2} - \sqrt{x^2+(y+c)^2} &= \pm 2a \\
\iff \sqrt{x^2+(y-c)^2} &= \pm 2a + \sqrt{x^2+(y+c)^2} \\
\iff x^2+y^2-2yc+c^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{x^2+(y+c)^2} + x^2+y^2+2yc+c^2 \\
\iff \pm 4a\sqrt{(y+c)^2+x^2} &= -4a^2-4yc \\
\iff a\sqrt{(y+c)^2+x^2} &= -a^2-yc \\
\iff a^2(y^2+2yc+c^2+x^2) &= a^4+2a^2yc+y^2c^2 \\
\iff a^2y^2+2ya^2c+c^2a^2+a^2x^2 &= a^4+2a^2yc+y^2c^2 \\
\iff (c^2-a^2)y^2-a^2x^2 &= a^2(c^2-a^2)
\end{aligned}
$$

Como $c^2 - a^2 = b^2$, a equação fica: $b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$
Dividindo-se ambos os membros por a^2b^2, chega-se a

$$\mathbf{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1} \tag{4.2}$$

- ***Latus rectum***

  Consideremos o *latus rectum* que está à direita da origem. Sejam os pontos P_1 e P_2 as extremidades do *latus rectum*. A abscissa de P_1 e P_2 é $x = c$. Ver figura 42. Substituindo na equação canônica, temos:
  $\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$
  $\frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2}{a^2} - 1 \Rightarrow$
  $\frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2-a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow$
  $y^2 = \frac{b^4}{a^2} \Rightarrow$
  $y = \pm\frac{b^2}{a}$
  Portanto, as coordenadas do *latus rectum* são: $P_1 = (c, \frac{b^2}{a})$ e $P_2 = (c, -\frac{b^2}{a})$. Agora vamos calcular o comprimento l do *latus rectum*:
  $l = |P_1P_2| = \sqrt{(c-c)^2 + (-\frac{b^2}{a} - \frac{b^2}{a})^2} =$
  $\sqrt{(-\frac{2b^2}{a})^2} = \sqrt{\frac{4b^4}{a^2}} = \mathbf{\frac{2b^2}{a}}$

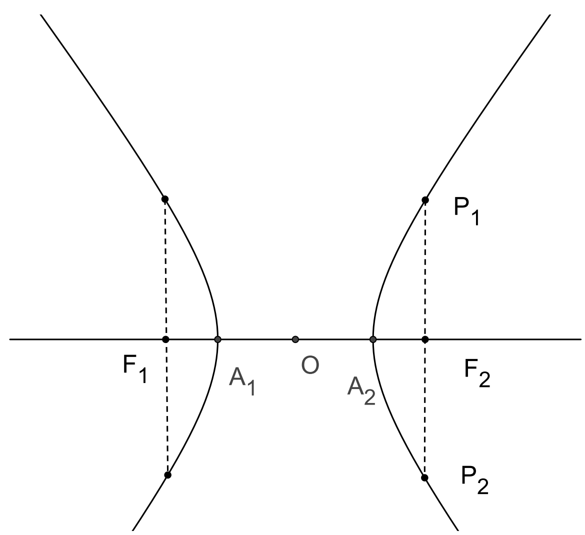

Figura 42 – Latus rectum da hipérbole

- Raios vetores

  Sejam r_1 e r_2 os comprimentos dos raios vetores de um ponto $P = (x, y)$ da hipérbole.

Como P pertence à hipérbole, $r_1 - r_2 = 2a$. Observemos, de acordo com a figura 43 que:

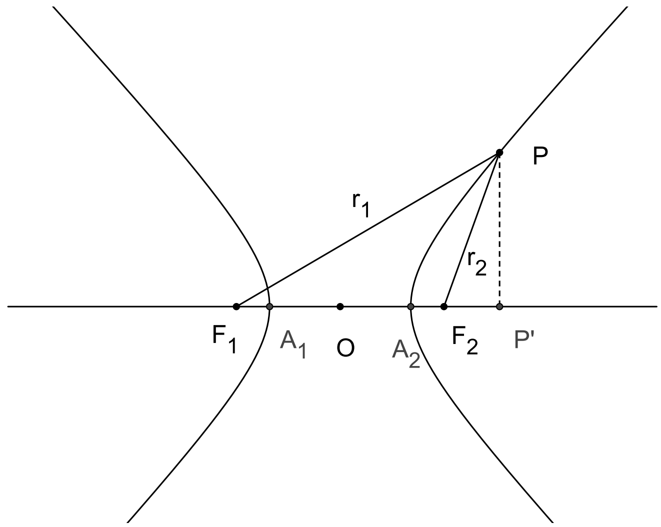

Figura 43 – Raios vetores da hipérbole

No triângulo $PP'F_1$: $r_1^2 = (x+c)^2 + y^2$
No triângulo $PP'F_2$: $r_2^2 = (x-c)^2 + y^2$
Subtraindo membro a membro,
$r_1^2 - r_2^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - x^2 + 2cx - c^2 - y^2 = 4cx$ ou $(r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = 4cx$
Portanto, $2a(r_1 + r_2) = 4cx$ (pois $r_1 - r_2 = 2a$)
$r_1 + r_2 = \frac{4cx}{2a} = 2ex$
Do sistema: $\begin{cases} r_1 - r_2 = 2a \\ r_1 + r_2 = 2ex \end{cases}$
retiramos que:
$r_1 = ex + a \quad \text{e} \quad r_2 = ex - a.$

- Modo alternativo para deduzir a equação canônica da hipérbole
  Como mostrado acima, temos em relação ao comprimento do raio vetor r_1 da hipérbole: $r_1 = ex + a \quad \text{e} \quad r_1^2 = (x+c)^2 + y^2$
  Portanto, $(ex + a)^2 = (x+c)^2 + y^2$
  Substituindo e por $\frac{c}{a}$: $(\frac{cx}{a} + a)^2 = (x+c)^2 + y^2$
  Desenvolvendo: $a^2 + \frac{2acx}{a} + \frac{c^2x^2}{a^2} = x^2 + 2cx + c^2 + y^2$

$\frac{c^2x^2}{a^2} + 2cx + a^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2$

$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 - a^2x^2 - 2a^2cx - a^2c^2 - a^2y^2 = 0$
Fatorando:
$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 - a^2(c^2 - a^2) = 0$. Como $b^2 = c^2 - a^2$, vem:
$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

Dividindo todos os membros por a^2b^2, temos:
$\mathbf{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$

- **Retas diretrizes**
  As retas diretrizes d_1 e d_2 da hipérbole associadas respectivamente aos focos F_1 e F_2, são as retas perpendiculares ao eixo principal que distam $OD_1 = OD_2 = \frac{a^2}{c} = a\frac{a}{c} = \frac{a}{e}$ do centro da hipérbole tendo, portanto, as equações:

  $d_1 : x = -\frac{a}{e}$
  $d_2 : x = \frac{a}{e}$
  Ver figura 44

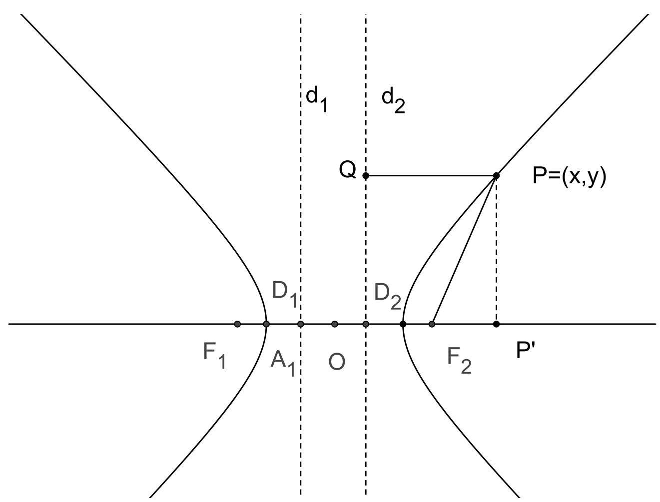

Figura 44 – Razão das distâncias ponto-foco/ponto-diretriz da hipérbole

Teorema 4.3.1 *Definição unificada de cônica*
A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja distância a um dos focos é igual

ao produto da excentricidade pela distância do ponto à reta diretriz correspondente.

Prova

Temos, de acordo com a figura 44, que $OD_1 = OD_2 = \frac{a}{e}$ e também que
$PQ = P'D_2 = OP' - OD_2 = x - \frac{a}{e} = \frac{ex-a}{e}$
Como $PF_2 = ex - a$ (raio vetor)
Segue que:

$$\frac{PF_2}{PQ} = \frac{ex-a}{\frac{ex-a}{e}} = e$$

- Distância entre assíntotas e hipérbole

  Cada uma das assíntotas da hipérbole é externa à curva, isto é, ambas não se tocam mas à medida que x cresce ou decresce, elas se aproximam. Vamos considerar a hipérbole da figura 45 que tem centro na origem de um sistema de coordenadas cartesianas com equação canônica $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

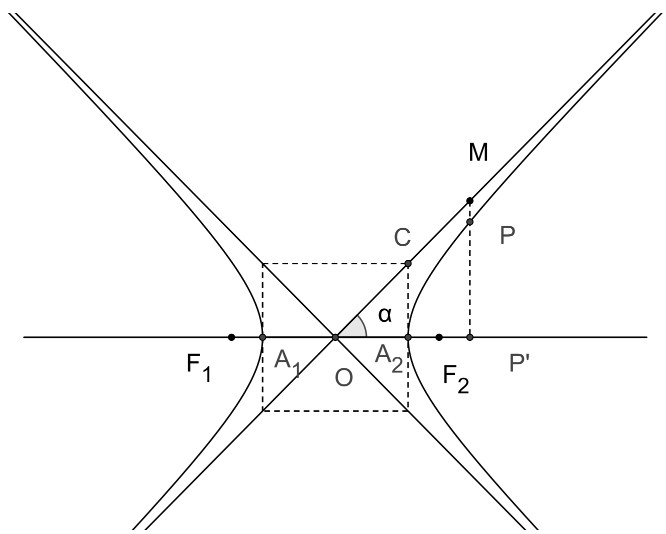

Figura 45 – Distância entre assíntotas e hipérbole

Seja $P = (x, y)$ um ponto da hipérbole e $M = (x, y')$ um ponto da assíntota ambos com a mesma projeção P' sobre a reta focal. Sendo os triângulos OMP' e OCA_2

semelhantes, temos a seguinte relação entre as distâncias a, b, x e y':
$\frac{y'}{b} = \frac{x}{a} \Rightarrow y' = \frac{b}{a}x$
Da equação canônica temos que $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, com $x^2 - a^2 > 0$
Subtraindo y de y': $y' - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \dfrac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$
Essa diferença é sempre positiva sendo, portanto, $y' > y$ o que implica que as curvas são se tocam. Observemos que à medida que a distância x aumenta, o denominador cresce e a diferença diminui, ficando os pontos da curva cada vez mais próximos da assíntota.
Para obter as equações das assíntotas fazemos:
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow (\frac{x}{a} - \frac{y}{b})(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = 0.$
As equações das assíntotas são portanto,
$y = \dfrac{b}{a}x \quad \text{e} \quad y = -\dfrac{b}{a}x$

4.4 Posições relativas entre reta e hipérbole

Uma reta contida no plano da hipérbole é **externa** à hipérbole quando não tem nenhum ponto em comum com a hipérbole sendo a intersecção entre elas um conjunto vazio, **secante** quando tem dois pontos distintos comuns com a hipérbole, tendo também pontos internos à hipérbole e **tangente** quando tem apenas um ponto em comum com a hipérbole, sendo os outros pontos da reta externos à curva.

Lema 4.4.1 *A reta perpendicular à reta focal passando por um dos vértices da hipérbole é reta tangente à hipérbole.*

Prova do lema:
Seja a hipérbole com parâmetros geométricos a e c cuja equação cartesiana em relação ao sistema cartesiano ortogonal canônico é
$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \qquad b^2 = c^2 - a^2$
e seja a reta perpendicular à reta focal pelo vértice principal A_2 cuja equação cartesiana é $x = a$ conforme a figura 46

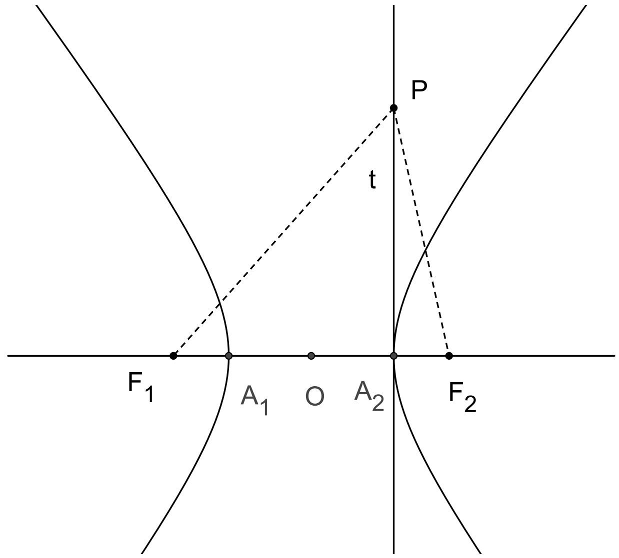

Figura 46 – Reta perpendicular à reta focal passando por um vértice da hipérbole

Um ponto P da reta distinto do vértice principal A_2 tem abscissa a e ordenada y enquanto que a distância PF_2 de P ao foco F_2 é igual a
$PF_2 = \sqrt{(a-c)^2 + y^2}$
e a distância PF_1 de P ao foco F_1 é igual a
$PF_1 = \sqrt{(a+c)^2 + y^2}$ e então

$$0 < PF_! - PF_2 = \sqrt{(a+c)^2 + y^2} - \sqrt{(a-c)^2} + y^2$$
$$= \frac{(a+c)^2 + y^2 - (a-c)^2 - y^2}{\sqrt{(a+c)^2 + y^2} + \sqrt{(a-c)^2} + y^2}$$
$$= \frac{4ac}{\sqrt{(a+c)^2 + y^2} + \sqrt{(a-c)^2} + y^2}$$

Admitindo que $\dfrac{4ac}{\sqrt{(a+c)^2 + y^2} + \sqrt{(a-c)^2} + y^2} = 2a$,
$\sqrt{(a+c)^2 + y^2} + \sqrt{(a-c)^2 + y^2} = 2c$ e chega-se assim a uma contradição: um lado do triângulo é igual à soma dos outros dois lados. Portanto, P é um ponto não pertencente à hipérbole sendo a reta tangente à hipérbole.

Lema 4.4.2 *Seja o sistema de duas equações*
$$\begin{cases} b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \\ y = mx + n \end{cases}$$

nas incógnitas x e y em que a, b, m e n são números reais fixados com $a > 0$ e $b > 0$.
a) Se $b^2+n^2-a^2m^2 > 0$, então o sistema de duas equações nas incógnitas x e y admite duas soluções reais (x_1, y_1) e (x_2, y_2).
b) Se $b^2+n^2-a^2m^2 = 0$, então o sistema de duas equações nas incógnitas x e y admite uma única solução real (x_0, y_0) em que $x_0 = \frac{a^2mn}{b^2-a^2m^2}$ e $y_0 = mx_0 + n$.
c) Se $b^2+n^2-a^2m^2 < 0$, então o sistema de duas equações nas incógnitas x e y não admite solução real.

Prova do Lema
Pela substituição de $y = mx + n$ em $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, temos:

$$\begin{aligned} b^2x^2 - a^2(mx+n)^2 = a^2b^2 \Rightarrow \\ b^2x^2 - a^2(m^2x^2 + 2mnx + n^2) = a^2b^2 \Rightarrow \\ b^2x^2 - a^2m^2x^2 - 2a^2mnx - a^2n^2 - a^2b^2 = 0 \Rightarrow \\ (b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2mnx - a^2(n^2+b^2) = 0 \end{aligned}$$

Esta última expressão é uma equação do segundo grau na incógnita x sendo seu discriminante Δ igual a:

$$\begin{aligned} (2a^2mn)^2 - 4(-a^2m^2 + b^2)(-a^2n^2 - a^2b^2) = \\ 4a^4m^2n^2 - 4(a^4m^2n^2 - a^2b^2n^2 + a^4b^2m^2 - a^2b^4) = \\ 4(a^4m^2n^2 - a^4m^2n^2 + a^2b^2n^2 - a^4b^2m^2 + a^2b^4) = \\ 4a^2b^2(-a^2m^2 + b^2 + n^2) \end{aligned}$$

cujo sinal é determinado pelo fator $b^2 + n^2 - a^2m^2$

Lema 4.4.3 *Seja a hipérbole cuja equação cartesiana é $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ e seja a reta do plano da hipérbole cuja equação cartesiana é $y = mx + n$.*
a) Se $b^2 + n^2 - a^2m^2 > 0$, o sistema das duas equações admite duas soluções reais, sendo a reta secante à hipérbole.
b)Se $b^2+n^2-a^2m^2 = 0$, o sistema das duas equações admite uma solução real, sendo a reta tangente à hipérbole.
c) Se $b^2 + n^2 - a^2m^2 < 0$, a intersecção entre a reta e a hipérbole é um conjunto vazio.

Prova do lema.
A prova deste lema é imediata a partir do lema anterior.

4.5 Equações cartesianas das retas tangente e normal a uma hipérbole

Seja a hipérbole com parâmetros geométricos a e c cuja equação canônica é $b^2x^2-a^2y^2 = a^2b^2$ e seja um ponto de tangência dado da hipérbole com abscissa x_0 e ordenada y_0 em relação ao sistema cartesiano ortogonal canônico fixado. Então, a equação cartesiana da reta tangente à hipérbole pelo ponto de tangência dado é $b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$.

De fato,
Se $y_0 \neq 0$ então o coeficiente angular da reta é $m = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}$ e o termo independente da reta é $n = -\frac{b^2}{y_0}$ e como
$-a^2(-\frac{b^2x_0}{a^2y_0})^2 + b^2 + (\frac{b^2}{y_0})^2$
$= -\frac{b^4x_0^2}{a^2y_0^2} + b^2 + \frac{b^4}{y_0^2}$
$= -\frac{b^2}{a^2y_0^2}[b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2] = 0$
Se $y_0 = 0$, o ponto de tangência dado é um dos vértices principais da hipérbole e a reta tangente à hipérbole pelos vértices principais é a reta vertical $x = -a$ ou $x = a$ a qual é obtida da equação cartesiana $b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$ substituindo x_0 por $-a$ ou a e y_0 por 0: $-b^2ax = a^2b^2$ ou $b^2ax = a^2b^2$.

- Equações das retas tangentes a hipérbole paralelas a uma reta dada.
  Seja a equação quadrática representando a intersecção entre a hipérbole $b^2x^2-a^2y^2 = a^2b^2$ e uma reta $y = mx + n$:
  $(-a^2m^2 + b^2)x^2 - 2a^2mnx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0$
  Se o fator $b^2 + n^2 - a^2m^2 = 0$, a reta é tangente à hipérbole.
  $-a^2m^2 + b^2 + n^2 = 0 \Rightarrow n^2 = a^2m^2 - b^2 \Rightarrow n = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2}$. As duas equações das retas tangentes a hipérbole paralelas a uma reta $y = mx + n$ são:
  $y = mx - \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ e $y = mx + \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ mas as retas só existem quando $a^2m^2 - b^2 > 0$.
  Os pontos de tangência (pontos de intersecção das retas tangentes com a hipérbole) têm abscissas:
  $x = \dfrac{a^2m\sqrt{a^2m^2 - b^2}}{-a^2m^2 + b^2}$ e
  $x = -\dfrac{a^2m\sqrt{a^2m^2 - b^2}}{-a^2m^2 + b^2}$

Esses valores são obtidos substituindo o valor de $n = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2}$ na equação $(-a^2m^2 + b^2)x^2 - 2a^2mnx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0$ que tem no caso, o discriminante igual a 0. As equações das retas tangentes a hipérbole perpendiculares a uma reta dada se reduzem ao caso anterior. Sendo m o coeficiente angular da reta dada, o coeficiente angular das perpendiculares será igual a $-\frac{1}{m}$ quando $m \neq 0$.

Teorema 4.5.1 *Tangente à hipérbole e bissetriz interna*
Seja P um ponto de uma hipérbole e F_1 e F_2 seus focos. A bissetriz interna do ângulo $F_1\hat{P}F_2$ é reta tangente à hipérbole no ponto P.

Prova do teorema De acordo com a figura 47, seja M um ponto do segmento PF_1 de modo que $PM = PF_2$. O triângulo PMF_2 é isósceles e sua bissetriz s é também mediana e altura do triângulo e mediatriz do segmento MF_2. Seja Q um outro ponto da reta s.

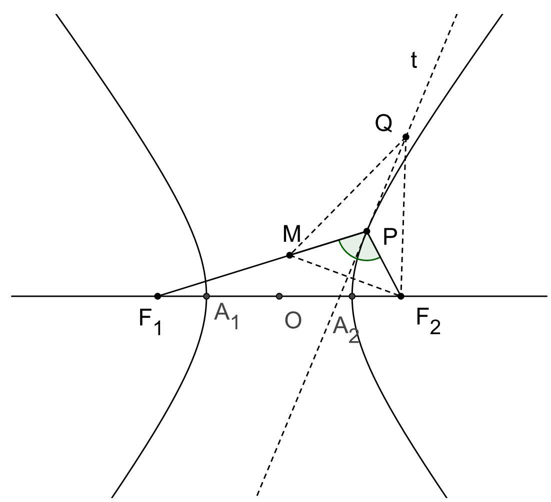

Figura 47 – Tangente e bissetriz interna

Temos que: $PF_2 = PM$ e $QF_2 = QM$ e lembrando que, num triângulo qualquer, um lado é maior do que a diferença entre os outros dois, concluímos observando o triângulo QF_1M:
$QF_1 - QF_2 = QF_1 - QM < MF_1 = PF_1 - PM = PF_1 - PF_2 = 2a$.

Portanto, com exceção do ponto P, todos os outros pontos de s são externos à hipérbole.

Corolário 4.5.1 *O ângulo entre a reta normal por um ponto da hipérbole e a reta determinada pelo ponto considerado e um dos focos é congruente ao ângulo entre a mesma reta normal e a reta determinada pelo ponto em questão e o outro foco da hipérbole.*

Observar os ângulos α e β da figura 48 .

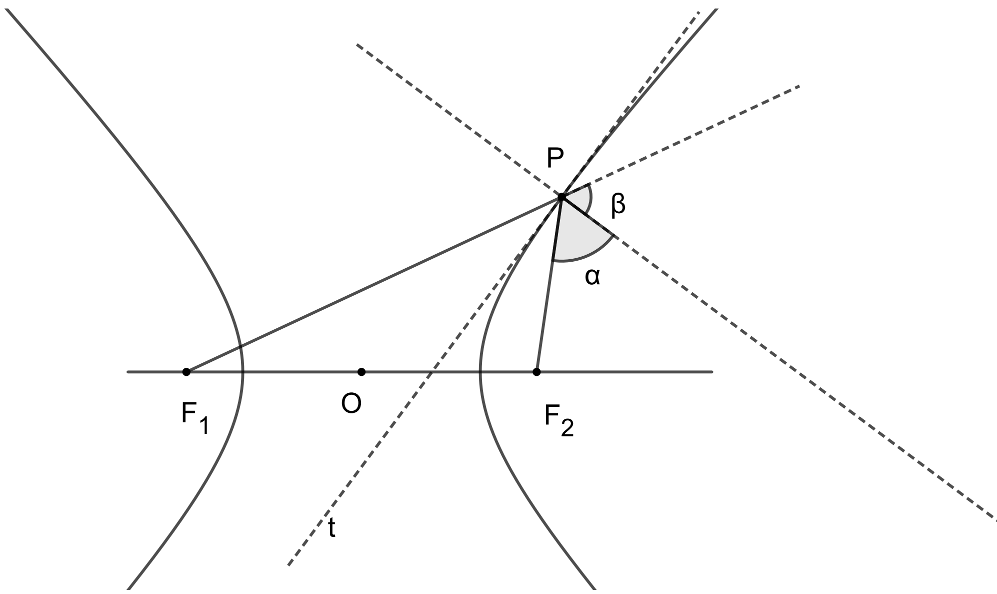

Figura 48 – Ângulos formados entre reta normal à hipérbole e retas pelos focos

Este corolário da hipérbole explica a propriedade da hipérbole segundo a qual raios que incidem em direção a um dos focos, refletem-se numa superfície hiperboloide em direção ao outro foco.

- Podária da hipérbole
  A circunferência principal é o lugar geométrico dos pés M das perpendiculares baixadas de um dos focos às tangentes à hipérbole. Seja t uma reta tangente à hipérbole no ponto P e seja s a reta perpendicular a t passando pelo foco F_2. Observar a figura 49

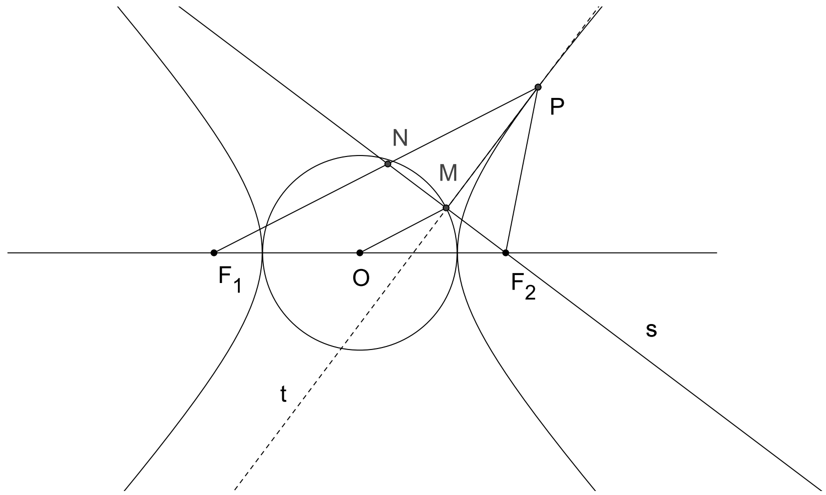

Figura 49 – Podária da hipérbole relativa a um foco

Na hipérbole sabemos que $PF_1 - PF_2 = 2a$. Temos que os triângulos PNM e PMF_2 são congruentes. Portanto, $PN = PF_2$ e $NM = MF_2$. Observar que, no triângulo F_1F_2N, O e M são pontos médios de lados do triângulo. Assim,
$MO = \frac{NF_1}{2} = \frac{PF_1 - PN}{2} = \frac{PF_1 - PF_2}{2} + \frac{2a}{2} = a$.
Portanto, a circunferência principal é a podária da hipérbole relativa a um dos focos.

4.6 Construções geométricas das retas tangentes à hipérbole

1. Por um ponto P da curva.
   Seja P um ponto de uma hipérbole e F_1 e F_2 seus focos. Para se obter a reta tangente à hipérbole por P, basta traçar a bissetriz do ângulo $F_1\hat{P}F_2$, conforme o teorema 4.5.1.

2. Por um ponto externo Q
   Determinar o ponto M, intersecção da circunferência diretriz de centro F_1 com a circunferência de centro Q e raio QF_2. Encontrar o ponto médio H do segmento MF_2. A reta tangente t é a reta que passa por H e por Q. O ponto de tangência P é a intersecção da tangente com a reta que passa por M e F_1. Observando a figura 50 constatamos que o triângulo MPF_2 é isósceles pois $PF_1 - PF_2 = 2a$ e $PF_1 - PM = 2a$ o que mostra que $PM = PF_2$. Além disso H é ponto médio de MF_2. O segmento PH é então mediana e altura do referido triângulo e bissetriz do ângulo $M\hat{P}F_2$. Podemos concluir que a reta t é tangente à hipérbole.

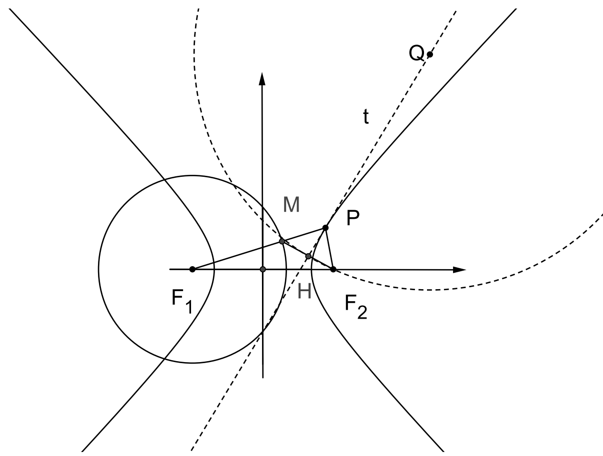

Figura 50 – Construção da tangente à hipérbole por um ponto externo

3. Paralelas a uma reta dada s

   Traçar a reta r perpendicular a reta s passando por F_2. A intersecção de r com a circunferência diretriz determina os pontos M e M'. Determinar os pontos médios H e H', respectivamente dos segmentos F_2M e F_2M'. As tangentes à hipérbole paralelas à reta s são as retas t e t' que passam por H e H', respectivamente. De acordo com a figura 51 vemos que os triângulos $M'P'H'$ e $P'H'F_2$ são congruentes. A reta t' portanto, é mediatriz do segmento $M'F_2$ e bissetriz do ângulo $M'\hat{P}'F_2$ sendo tangente à elipse de acordo com o teorema 4.5.1.

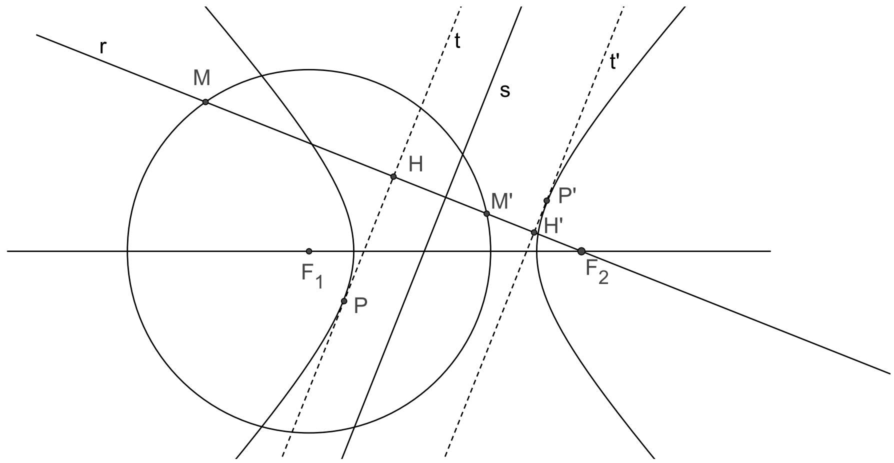

Figura 51 – Construção das tangentes à hipérbole paralelas a uma reta dada

4.7 Equações Paramétricas da Hipérbole

Consideremos a hipérbole de equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

As equações paramétricas da hipérbole são: $\begin{cases} x = a\ sec\theta \\ y = b\ tg\theta \end{cases}$

Para verificar, tracemos a hipérbole citada e as circunferências de centro $O = (0, 0)$ e de raios respectivamente a (semi-eixo real) e b (semi-eixo imaginário) da hipérbole. Tracemos o raio OM da circunferência maior determinando com o eixo Ox o ângulo θ. Vamos construir o triângulo retângulo OMX e traçar pelo ponto X uma reta perpendicular a Ox e que intersecta a hipérbole no ponto $P = (x, y)$. Vamos traçar também uma reta perpendicular a Ox passando por Q e que intersecta o raio OM no ponto N. Ver figura 52.

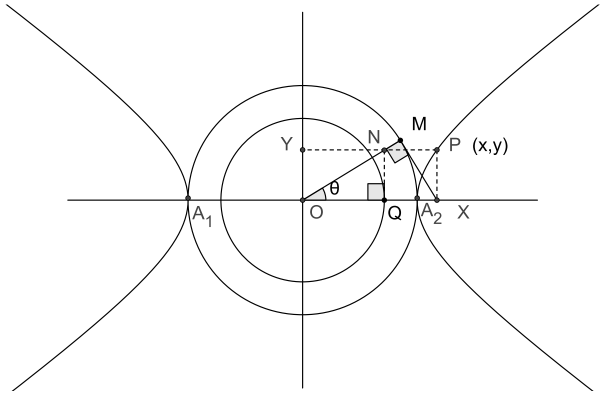

Figura 52 – Equações paramétricas da hipérbole

Temos no triângulo OMX que: $cos\theta = \frac{a}{x} \Rightarrow x = \frac{a}{cos\theta} = a \sec\theta$. No triângulo ONQ: $tg\theta = \frac{y}{b} \Rightarrow y = b\ tg\theta$. Portanto, utilizando o ângulo θ como parâmetro,as coordenadas do ponto P são:

$$\begin{cases} x = a\ sec\theta \\ y = b\ tg\theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ excluídos } \frac{\pi}{2} \text{ e } \frac{3\pi}{2}$$

No caso da hipérbole $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2}$ em que o eixo real é paralelo a Oy, as equações paramétricas ficam:

$$\begin{cases} x = b\ tg\theta \\ y = a\ sec\theta \end{cases}$$

4.8 Equações da Hipérbole em Coordenadas Polares

Igualmente ao que acontece com a elipse, na hipérbole a reta diretriz pode estar posicionada de quatro maneiras em relação ao eixo polar e ao polo:

1. Hipérbole com reta diretriz perpendicular ao eixo polar e à direita do polo.
   Consideremos um sistema de coordenadas polares cuja origem é o foco F_1 da hipérbole e cuja semi-reta polar tem origem em F_1 e contém F_2. Nesse caso se d é a distância entre o foco F_1 e a reta diretriz d_1, $d = \frac{a}{e} - c$.
   Ver figura 53

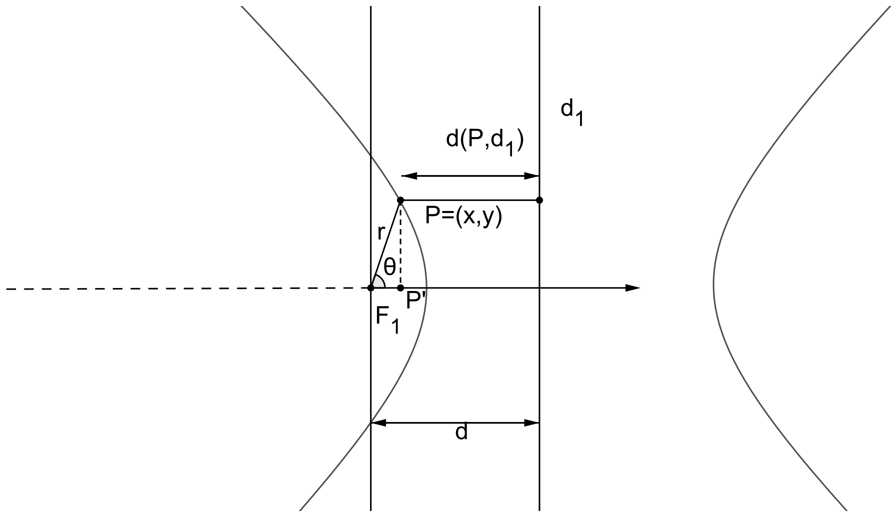

Figura 53 – Hipérbole com reta diretriz perpendicular ao eixo polar e à direita do polo

Sendo $d(P, F_1) = r$ (distância entre P e F_1) e $d(P, d_1) = d - x$ (distância entre P e d_1), como $\frac{d(P,F_1)}{d(P,d_1)} = e$, temos:
$r = e(d - x) = e(d - rcos\theta) = \frac{ed}{1+ecos\theta}$
Portanto nesse sistema de coordenadas polares a equação da hipérbole é:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{ed}}{\mathbf{1 + ecos}\theta}$$

2. Hipérbole com reta diretriz perpendicular ao eixo polar e à esquerda do polo. Analogamente, em relação a um sistema de coordenadas polares cuja origem é o foco F_2 da hipérbole e cuja semi-reta polar de origem F_2 não contém F_1 , sendo d a distância de F_2 a d_2, $d = \frac{a}{e} - c$.
Ver figura 54

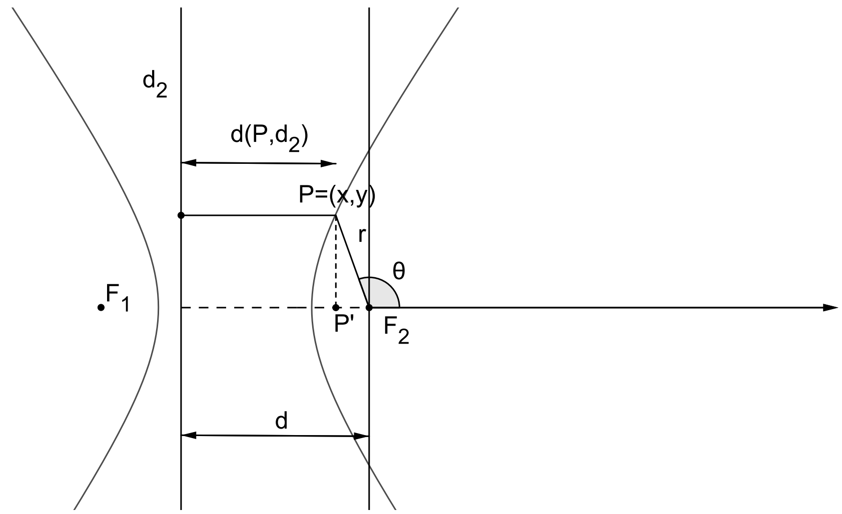

Figura 54 – Hipérbole com reta diretriz perpendicular ao eixo polar e à esquerda do polo

Como $r = e(d - (-rcos\theta) \Rightarrow r = ed + ercos\theta \Rightarrow r - ercos\theta = ed \Rightarrow r(1 - ecos\theta) = ed$. Portanto, nesse sistema, a equação polar da hipérbole é:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{ed}}{\mathbf{1 - ecos}\theta}$$

3. Hipérbole com reta diretriz paralela ao eixo polar (com origem em F_1) e acima dele. No caso de uma hipérbole com estas características, a $d(P, d_1)$ fica igual a $d - y = d - sen\theta$ e, então, como $\frac{d(P,F_1)}{d(P,d_1)} = e$, temos:
   $r = e(d - y) = e(d - rsen\theta) = \frac{ed}{1+esen\theta}$
   Portanto nesse sistema de coordenadas polares a equação da hipérbole é:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{ed}}{\mathbf{1 + e\ sen}\theta}$$

Ver figura 55

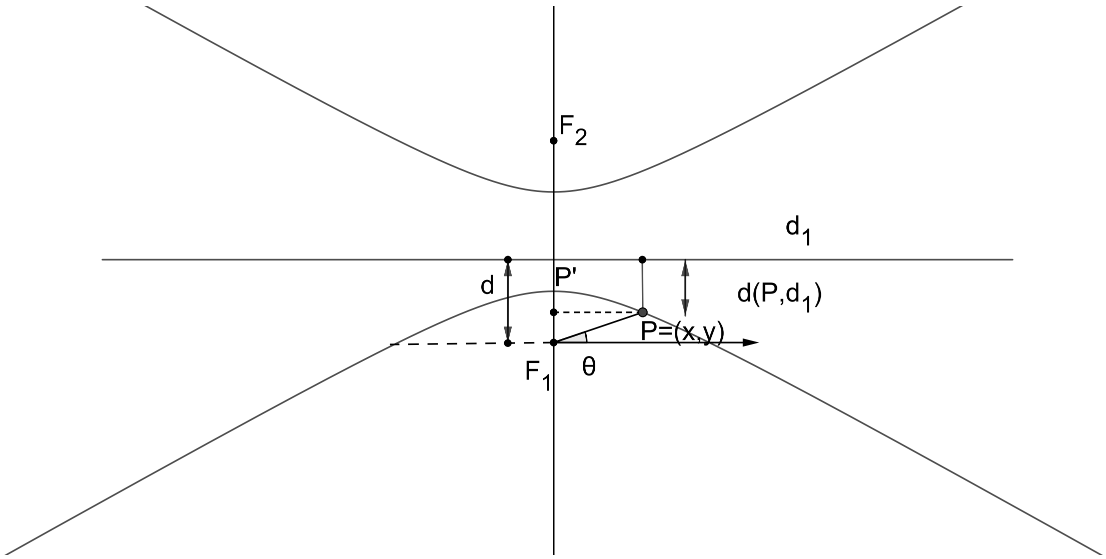

Figura 55 – Hipérbole com reta diretriz paralela ao eixo polar e acima do polo

4. Hipérbole com reta diretriz paralela ao eixo polar (com origem em F_2) e abaixo dele. Neste caso, a $d(P, d_2)$ fica igual a $d - (-r\ sen\theta) = d + rsen\theta$ e, assim, como $\frac{d(P,F_2)}{d(P,d_2)} = e$, temos:
   $r = e(d + r\ sen\theta) = \frac{ed}{1-e\ sen\theta}$
   Portanto nesse sistema de coordenadas polares a equação da hipérbole é:

   $$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{ed}}{\mathbf{1 - e\ sen}\theta}$$

   Ver figura 56

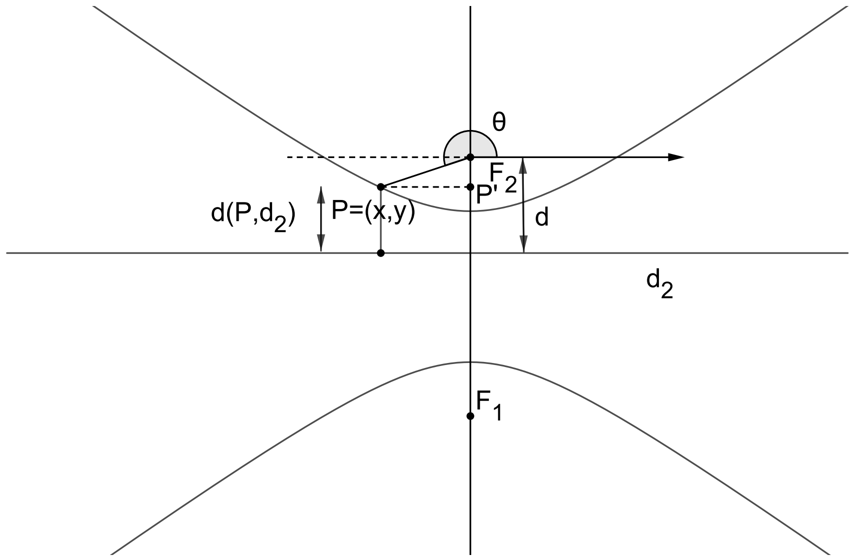

Figura 56 – Reta diretriz paralela ao eixo polar e abaixo do polo

Podemos observar que as equações da hipérbole em coordenadas polares são iguais às da elipse. Elas se diferenciam pelo valor da excentricidade e. Para a elipse $0 < e < 1$ e para a hipérbole $e > 1$.

4.9 Equações da hipérbole quando o centro da hipérbole não é a origem do sistema cartesiano ortogonal

- A equação de uma hipérbole com parâmetros geométricos a e c cujo centro tem abscissa X_0 e ordenada Y_0 em relação a um sistema cartesiano ortogonal $XO'Y$ com origem O' e cujo eixo X das abscissas é paralelo à reta focal da elipse e cujo eixo Y das ordenadas é paralelo ao eixo menor da hipérbole é:
  $\dfrac{(X-X_0)^2}{a^2} - \dfrac{(Y-Y_0)^2}{b^2} = 1 \quad b^2 = c^2 - a^2$
  porque a equação canônica da hipérbole em relação ao sistema cartesiano ortogonal canônico xOy cuja origem é o centro da elipse, cujo eixo x das abscissas é coincidente com a reta focal e cujo eixo y das ordenadas é a reta perpendicular à reta focal pela origem é:
  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad b^2 = c^2 - a^2$

e as relações entre a abscissa X e a ordenada Y do sistema $XO'Y$ e a abscissa x e a ordenada y do sistema canônico xOy são respectivamente:
$x = X - X_0$ e $y = Y - Y_0$
Observar a figura 57

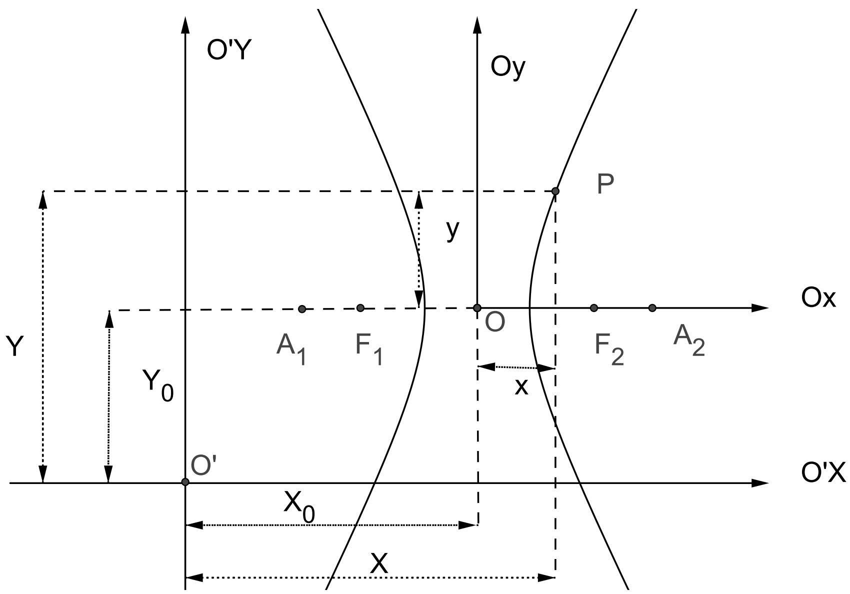

Figura 57 – Hipérbole com centro não coincidente com a origem do sistema

Em relação ao sistema cartesiano $XO'Y$ temos:

- **Focos** - O foco F_1 tem abscissa $X_0 - c$ e ordenada Y_0 enquanto o foco F_2 tem abscissa $X_0 + c$ e ordenada Y_0.

- **Vértices principais** - O vértice principal A_1 tem abscissa $X_0 - a$ e ordenada Y_0 enquanto que o vértice A_2 tem abscissa $X_0 + a$ e ordenada Y_0.

- **Vértices secundários** - O vértice secundário B_1 tem abscissa X_0 e ordenada $Y_0 - b$ enquanto o vértice secundário B_2 tem abscissa X_0 e ordenada $Y_0 + b$.

- **Reta focal** - A reta focal tem equação cartesiana $Y = Y_0$.

- **Retas diretrizes** - A reta diretriz associada ao foco F_1 tem equação cartesiana $X = X_0 - \frac{a^2}{c}$ enquanto que a reta diretriz associada ao foco F_2 tem equação cartesiana $X = X_0 + \frac{a^2}{c}$.

- **Circunferências diretrizes** - A circunferência diretriz associada ao foco F_1 tem equação cartesiana
$(X - X_0 + c)^2 + (Y - Y_0)^2 = 4a^2$.
enquanto que a circunferência diretriz associada ao foco F_2 tem equação cartesiana
$(X - X_0 - c)^2 + (Y - Y_0)^2 = 4a^2$.

- **Circunferência principal e secundária** - A circunferência principal tem equação cartesiana $(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 = a^2$ e a circunferência secundária tem equação cartesiana
$(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 = b^2$

• A equação da reta tangente à hipérbole por um ponto de tangência da hipérbole com abscissa X_1 e ordenada Y_1 é então:

$$\frac{(X_1 - X_0)(X - X_0)}{a^2} - \frac{(Y_1 - Y_0)(Y - Y_0)}{b^2} = 1$$
devido ao fato de que no sistema cartesiano canônico xOy o ponto de tangência dado tem abscissa $x_1 = X_1 - X_0$ e ordenada $y_1 = Y_1 - Y_0$ e a reta tangente tem equação cartesiana
$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

• No caso de um sistema cartesiano ortogonal $XO'Y$ com origem O' cujo eixo Y das ordenadas é paralelo à reta focal e cujo eixo X das abscissas é paralelo ao eixo secundário da hipérbole com parâmetros geométricos a e c e cujo centro O tem abscissa X_0 e ordenada Y_0 a equação canônica da hipérbole é:
$(-\dfrac{X - X_0}{b^2})^2 + (\dfrac{Y - Y_0}{a^2})^2 = 1 \quad b^2 = c^2 - a^2$
porque a equação canônica da hipérbole em relação ao sistema cartesiano ortogonal canônico xOy cuja origem é o centro da elipse, cujo eixo y das ordenadas é coincidente com a reta focal e cujo eixo x das abscissas é a reta perpendicular à reta focal pela origem é:
$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad b^2 = c^2 - a^2$
e as relações entre a abscissa X e a ordenada Y do sistema$XO'Y$ e a abscissa x e a

ordenada y do sistema canônico xOy são respectivamente:
$x = X - X_0$ e $y = Y - Y_0$
Em relação ao sistema cartesiano $XO'Y$ temos:

- **Focos** - O foco F_1 tem abscissa X_0 e ordenada $Y_0 - c$ enquanto o foco F_2 tem abscissa X_0 e ordenada $Y_0 + c$.

- **Vértices principais** - O vértice principal A_1 tem abscissa X_0 e ordenada $Y_0 - a$ enquanto que o vértice A_2 tem abscissa X_0 e ordenada $Y_0 + a$.

- **Vértices secundários** - O vértice secundário B_1 tem abscissa $X_0 - b$ e ordenada Y_0 enquanto o vértice secundário B_2 tem abscissa $X_0 + b$ e ordenada Y_0 .

- **Reta focal** - A reta focal tem equação cartesiana $X = X_0$.

- **Retas diretrizes** - A reta diretriz associada ao foco F_1 tem equação cartesiana $Y = Y_0 - \frac{a^2}{c}$ enquanto que a reta diretriz associada ao foco F_2 tem equação cartesiana $Y = Y_0 + \frac{a^2}{c}$.

- **Circunferências diretrizes** - A circunferência diretriz associada ao foco F_1 tem equação cartesiana
  $(X - X_0)^2 + (Y - Y_0 + c)^2 = 4a^2$.
  enquanto que a circunferência diretriz associada ao foco F_2 tem equação cartesiana
  $(X - X_0)^2 + (Y - Y_0 - c)^2 = 4a^2$.

- **Circunferência principal e secundária** - A circunferência principal tem equação cartesiana $(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 = a^2$ e a circunferência secundária tem equação cartesiana
  $(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 = b^2$

- A equação cartesiana da reta tangente à hipérbole por um ponto de tangência da hipérbole de abscissa X_1 e ordenada Y_1 é:

$$\frac{(X_1 - X_0)(X - X_0)}{b^2} - \frac{(Y_1 - Y_0)(Y - Y_0)}{a^2} = 1.$$

5 Parábola

A parábola é uma curva plana obtida pela intersecção de uma superfície cônica por um plano paralelo a uma geratriz do cone e que não passa pelo vértice do cone.

5.1 Definição

Uma **parábola** é o conjunto dos pontos de um plano equidistantes de um ponto F fixo chamado de foco da parábola e de uma reta d fixa chamada diretriz que não contém o foco, pertencentes a esse mesmo plano. O parâmetro geométrico da parábola é o número real estritamente positivo $p > 0$ em que $2p$ é a distância do foco à reta diretriz da parábola. Um ponto do plano da parábola é um ponto interno (respectivamente externo) da parábola se e somente se a distância do ponto à reta diretriz é maior do que a distância desse ponto ao foco (respectivamente se a distância do ponto à reta diretriz é menor do que a distância desse ponto ao foco).

5.2 Elementos da Parábola

- **Foco**
  O foco da parábola é o ponto F fixo cuja distância a qualquer ponto da parábola é igual à distância desse ponto da parábola à reta diretriz d.

- **Reta diretriz**
  A reta diretriz da parábola é a reta d citada acima.

- **Eixo da parábola**
  Eixo de simetria da parábola ou reta focal é a reta que passa pelo foco F e é perpendicular à reta diretriz d. A parábola, diferentemente da elipse e da hipérbole tem só um eixo de simetria o qual intersecta a parábola num único vértice.

- **Vértice da parábola**
  Vértice da parábola é o ponto V de intersecção da parábola com seu eixo.

- **Parâmetro geométrico da parábola**
  O parâmetro geométrico da parábola é o número real estritamente positivo $p > 0$ em que $2p$ é a distância do foco à reta diretriz da parábola. O vértice V é o ponto

médio do segmento que tem como extremidades o foco da parábola e o ponto de intersecção entre o eixo da parábola e a reta diretriz. A distância do vértice ao foco é igual à distância do vértice à diretriz e equivale ao parâmetro p.

- **Excentricidade**
  A excentricidade e da parábola é a razão entre a distância de um ponto da parábola ao foco e a distância desse mesmo ponto à reta diretriz. Como pela definição de parábola essas distâncias são iguais, a excentricidade da parábola é igual a 1.

- **Corda da parábola**
  Corda da parábola é qualquer segmento cujas extremidades distintas pertençam à parábola.

- ***Latus rectum***
  Chama-se amplitude focal ou *latus rectum* da parábola o comprimento da corda perpendicular à reta focal e que passa pelo foco.

- **Triângulo fundamental**
  É o triângulo formado pelo vértice da parábola e as extremidades do *latus rectum* . Esse triângulo é isósceles e tem base igual à amplitude focal e altura igual ao parâmetro da parábola.

- **Reta principal da parábola**
  É a reta tangente à curva no vértice. A reta principal é paralela à diretriz.

5.3 Equação canônica da parábola

Dada uma parábola com foco F, reta diretriz d e parâmetro p, considere o sistema cartesiano ortogonal canônico xOy cuja origem O é o vértice V da parábola (ponto médio entre F e o pé da perpendicular O' traçada por F à reta diretriz. Em relação a esse sistema de coordenadas a reta focal coincide com o eixo x das abscissas ou com o eixo y das ordenadas. Consideremos os diferentes casos:

- Parábola com vértice na origem e reta focal coincidindo com o eixo Ox
  São dois os casos com essas características:
  - Parábola cujo foco F está à direita da diretriz d (concavidade para a direita)
    Temos as seguintes coordenadas de acordo com a figura 58:
    Coordenadas do vértice: $V = (0, 0)$

Coordenadas do foco: $F = (p, 0)$
Coordenadas do ponto P', pé da perpendicular baixada sobre a reta d a partir de um ponto P da parábola: $P' = (-p, y)$
Equação da reta diretriz: $d : x = -p$
Distância entre o foco e a diretriz: $2p = d(F, d)$

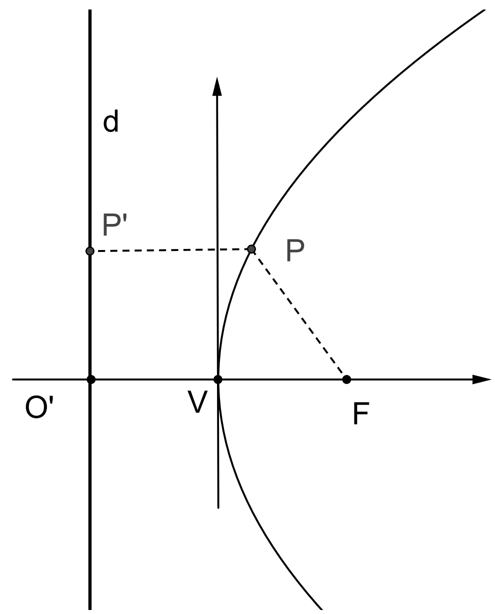

Figura 58 – Parábola com vértice na origem e foco à direita da diretriz

Um ponto $P = (x, y)$ pertence à parábola se e somente se a distância de P ao foco F é igual à distância de P à reta diretriz d ou seja, a distância de P a P': $d(P, F) = d(P, P')$:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-p)^2 + y^2} &= \sqrt{(x+p)^2 + (y-y)^2} \\ \Rightarrow x^2 - 2px + p^2 + y^2 &= x^2 + 2px + p^2 \\ \Rightarrow -2px + y^2 &= 2px \end{aligned}$$

Chega-se então a:

$$\mathbf{y^2 = 4px} \tag{5.1}$$

– Parábola cujo foco F está à esquerda da diretriz d (concavidade para a esquerda)
Temos as seguintes coordenadas de acordo com a figura 59:

Coordenadas do vértice: $V = (0, 0)$
Coordenadas do foco: $F = (-p, 0)$
Coordenadas do ponto P', pé da perpendicular baixada sobre a reta d a partir de um ponto P da parábola: $P' = (p, y)$
Equação da reta diretriz: $d : x = p$
Distância entre o foco e a diretriz: $2p = d(F, d)$

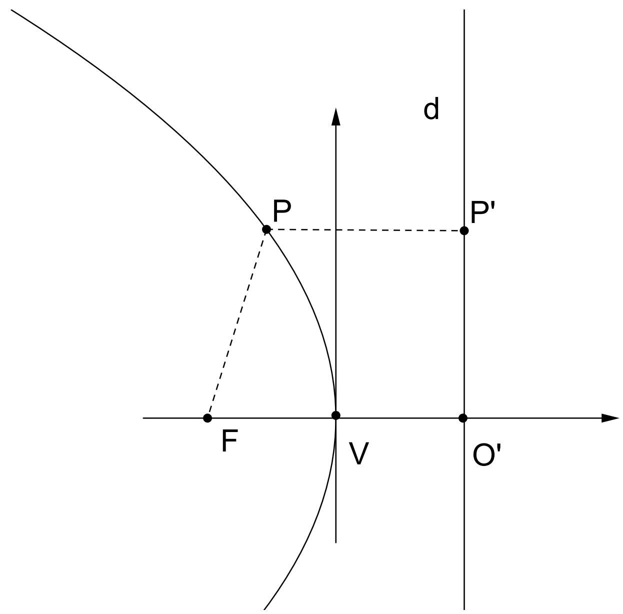

Figura 59 – Parábola com vértice na origem e foco à esquerda da diretriz

Um ponto $P = (x, y)$ pertence à parábola se e somente se $d(P, F) = d(P, P')$:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+p)^2 + y^2} &= \sqrt{(x-p)^2 + (y-y)^2} \\ \Rightarrow x^2 + 2px + p^2 + y^2 &= x^2 - 2px + p^2 \\ \Rightarrow 2px + y^2 &= -2px \end{aligned}$$

Chega-se então a:

$$\mathbf{y^2 = -4px} \tag{5.2}$$

- Parábola com vértice na origem e reta focal coincidindo com o eixo Oy
  São dois os casos com essas características:

– Parábola cujo foco F está acima da diretriz d (concavidade para cima)
  Temos as seguintes coordenadas de acordo com a figura 60:
  Coordenadas do vértice: $V = (0, 0)$
  Coordenadas do foco: $F = (0, p)$
  Coordenadas do ponto P', pé da perpendicular baixada sobre a reta d a partir de um ponto P da parábola: $P' = (x, -p)$
  Equação da reta diretriz: $d : y = -p$
  Distância entre o foco e a diretriz: $2p = d(F, d)$

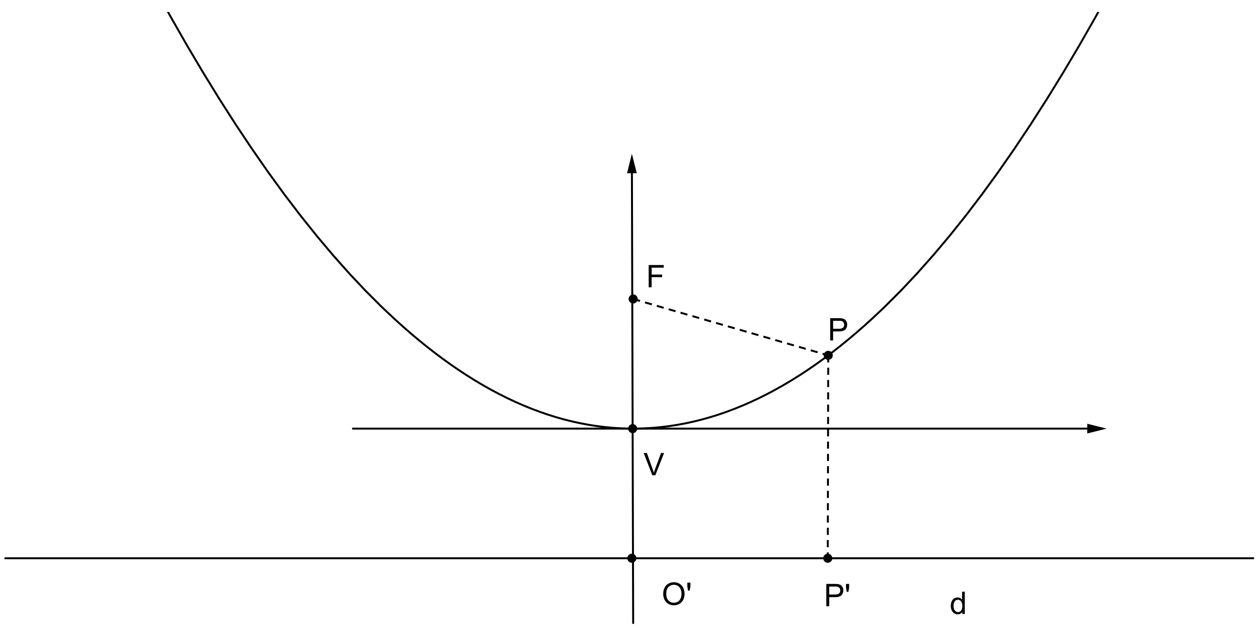

Figura 60 – Parábola com vértice na origem e foco acima da diretriz

Um ponto $P = (x, y)$ pertence à parábola se e somente se $d(P, F) = d(P, P')$:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} &= \sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2} \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 2yp + p^2 &= y^2 + 2py + p^2 \\ \Rightarrow x^2 - 2py &= 2py\end{aligned}$$

Chega-se então a

$$\mathbf{x^2 = 4py} \tag{5.3}$$

– Parábola cujo foco F está abaixo da diretriz d (concavidade para baixo)
Temos as seguintes coordenadas de acordo com a figura 61:
Coordenadas do vértice: $V = (0, 0)$
Coordenadas do foco: $F = (0, -p)$
Coordenadas do ponto P', pé da perpendicular baixada sobre a reta d a partir de um ponto P da parábola: $P' = (x, p)$
Equação da reta diretriz: $d : y = p$
Distância entre o foco e a diretriz: $2p = d(F, d)$

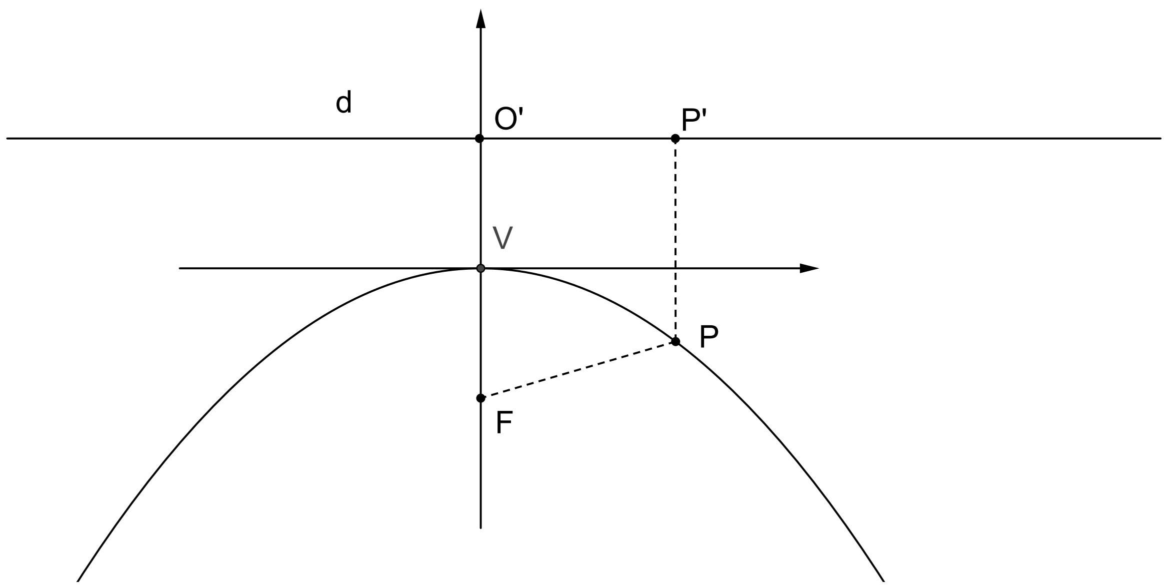

Figura 61 – Parábola com vértice na origem e foco abaixo da diretriz

Um ponto $P = (x, y)$ pertence à parábola se e somente se $d(P, F) = d(P, P')$:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-p)^2}$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2py + p^2 = y^2 - 2py + p^2$$
$$\Rightarrow x^2 + 2py = -2py$$

Chega-se então a

$$\mathbf{x^2 = -4py} \tag{5.4}$$

- ***Latus rectum***

  Consideremos o *latus rectum* da parábola cuja equação é: $y^2 = 4px$. Sejam os pontos P_1 e P_2 as extremidades do *latus rectum*. Temos as seguintes coordenadas: $V = (0, 0)$ e $F = (p, 0)$. A abscissa de P_1 e P_2 é $x = p$. Substituindo na equação canônica, temos: $y^2 = 4p^2 \Rightarrow y = \sqrt{4p^2} \Rightarrow y = \pm 2p$

  Portanto, as coordenadas das extremidades do *latus rectum* são: $P_1 = (p, 2p)$ e $P_2 = (p, -2p)$. Agora vamos calcular o comprimento l do *latus rectum*:
  $l = |P_1P_2| = \sqrt{(p-p)^2 + (2p+2p)^2} = 4p$

- **Área do triângulo fundamental**

  O triângulo fundamental tem por base o *latus rectum* e por altura o semi- parâmetro p da parábola. Portanto, sua área é igual a $\frac{4p*p}{2} = \frac{4p^2}{2}$

5.4 Posições relativas entre reta e parábola

Uma reta é secante a uma parábola quando tem dois pontos em comum com ela, externa quando não tem nenhum ponto em comum e tangente quando só tem um ponto em comum com a curva, sendo os outros pontos externos.A secante será chamada normal quando for perpendicular à tangente no ponto de contato.

Lema 5.4.1 *A reta perpendicular ao eixo de uma parábola passando pelo seu vértice é reta tangente à parábola.*

Prova:
De acordo com a figura 62, seja t a reta perpendicular ao eixo passando pelo vértice V, seja Q outro ponto da reta t e Q' a projeção de Q sobre a diretriz d. Observa-se que $QQ' = O'V = VF < QF$. Portanto, o ponto Q é externo e a reta t é tangente à parábola.

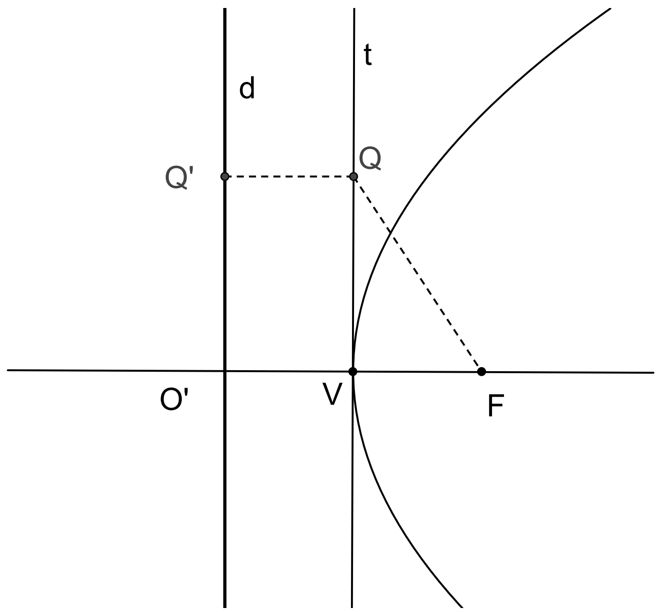

Figura 62 – Perpendicular ao eixo da parábola passando pelo vértice

Lema 5.4.2 *Seja o sistema de duas equações*

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{4p}x^2 \\ y = mx + n \end{cases}$$

nas incógnitas x e y em que m, n e p são constantes reais fixados com $p > 0$.

a) Se $pm^2 + n > 0$, então o sistema de duas equações nas incógnitas x e y admite duas soluções reais (x_1, y_1) e (x_2, y_2).

b) Se $pm^2 + n = 0$, então o sistema de duas equações nas incógnitas x e y admite uma única solução real (x_0, y_0).

c) Se $pm^2 + n < 0$, então o sistema de duas equações nas incógnitas x e y não admite solução real.

Prova do Lema

Pela substituição de $y = mx + n$ em $y = \frac{1}{4p}x^2$, temos:

$\frac{1}{4p}x^2 - mx - n = 0 \Rightarrow x^2 - 4pmx - 4pn = 0$

cujo sinal do discriminante Δ da equação do segundo grau

$\Delta = 16(p^2m^2 + pn) = 16p(pm^2 + n)$ é determinado pelo fator $pm^2 + n$

Se $pm^2 + n > 0$ as duas soluções são x_1, y_1 e x_2, y_2 em que

$x_1 = \dfrac{4p + 4\sqrt{p^2m^2 + pn}}{2} = 2p + 2\sqrt{p^2m^2 + pn}$ e $y_1 = mx_1 + n$ e

$x_2 = 2p - 2\sqrt{p^2m^2 + pn}$ e $y_2 = mx_2 + n$
Se $pm^2 + n = 0$ a solução (x_0, y_0) é:
$x_0 = 2pm$ e $y_0 = mx_0 + n$
Se $pm^2 + n < 0$ o sistema não admite solução real.

Lema 5.4.3 *Seja a parábola cuja equação cartesiana é $y = \frac{1}{4p}x^2$ e seja a reta do plano da parábola cuja equação cartesiana é $y = mx + n$.*
a) Se $pm^2 + n > 0$, o sistema das duas equações admite duas soluções reais, sendo a reta secante à parábola.
b)Se $pm^2 + n = 0$, o sistema das duas equações admite uma solução real, sendo a reta tangente à parábola.
c) Se $pm^2 + n < 0$, a intersecção entre a reta e a parábola é um conjunto vazio.

Prova do lema.
A prova deste lema é imediata a partir do lema anterior.

5.5 Equações cartesianas das retas tangente e normal a uma parábola

Dada uma parábola com parâmetro geométrico p e cuja equação canônica em relação ao sistema cartesiano ortogonal canônico é
$y = \frac{1}{4p}x^2$
a equação da reta tangente à parábola por um ponto de tangência da parábola com abscissa x_1 e ordenada y_1 em relação ao sistema cartesiano ortogonal canônico é
$$\frac{y + y_1}{2} = \frac{1}{4p}x_1x$$
porque a reta tem coeficiente angular $m = \frac{1}{2p}x_1$ e coeficiente independente $n = -y_1$ e então,
$pm^2 + n = p(\frac{1}{2p}x_1)^2 - y_1 = 0$ com $y_1 = \frac{1}{4p}x_1^2$
e a equação da reta normal à parábola pelo ponto de tangência dado é:
$y - y_1 = -\frac{2p}{x_1}(x - x_1)$ quando $x_1 \neq 0$
e $x = 0$ quando $x_1 = 0$

- Equação da reta tangente a parábola paralela a uma reta dada.
  Seja a equação quadrática representando a intersecção entre a parábola $y = \frac{1}{4p}x^2$ e uma reta $y = mx + n$:
  $x^2 - 4pmx - 4pn = 0$
  Se o discriminante $\Delta pm^2 + n$ é igual a 0, a reta é tangente à parábola.

$pm^2 + n = 0 \Rightarrow n = -pm^2$. A equação da reta tangente a parábola paralela a uma reta $y = mx + n$ dada é:
$y = mx - pm^2$ cujo ponto de tangência (ponto de intersecção da reta tangente com a parábola) têm abscissa $x = 2pm$ e ordenada $y = \frac{1}{4p}(2pm)^2 = pm^2$
O valor da abscissa é obtido substituindo o valor de $n = -pm^2$ na equação $x^2 - 4pmx - 4pn = 0$ que tem no caso, o discriminante igual a 0. A equação da reta tangente a parábola perpendicular a uma reta dada se reduz ao caso anterior. Sendo m o coeficiente angular da reta dada, o coeficiente angular da perpendicular será igual a $-\frac{1}{m}$ quando $m \neq 0$.

Teorema 5.5.1 *Propriedades da parábola*
Seja T o ponto de intersecção da reta tangente t a uma parábola pelo ponto P de tangência com o eixo da parábola.
Seja N o ponto de intersecção da reta normal à parábola pelo ponto de tangência P com o eixo da parábola
Seja M o pé da perpendicular traçada por P ao eixo da parábola.
Sejam L_1 e L_2 as extremidades do latus rectum. Nessas condições temos em relação às distâncias entre esses pontos que:
1. $FT = FP$
2. $VT = VM$
3. As retas tangentes a uma parábola pelos extremos da corda focal intersectam-se sobre a reta diretriz da parábola.

Prova:
Dada uma parábola com vértice V e foco F e parâmetro geométrico p, considere o sistema cartesiano ortogonal canônico xOy cuja origem é o vértice V da parábola, cujo eixo x das abscissas é paralelo à reta diretriz e cujo eixo das ordenadas é coincidente com o eixo da parábola. Em relação ao sistema cartesiano ortogonal canônico, a abscissa x e a ordenada y de um ponto da parábola satisfazem a equação canônica da parábola
$y = \frac{1}{4p}x^2$
e a equação da reta tangente à parábola pelo ponto de tangência P com abscissa x_1 e ordenada y_1 é:
$\frac{y+y_1}{2} = \frac{1}{4p}x_1 x$
Temos as seguintes coordenadas para os pontos citados, conforme a figura 63:

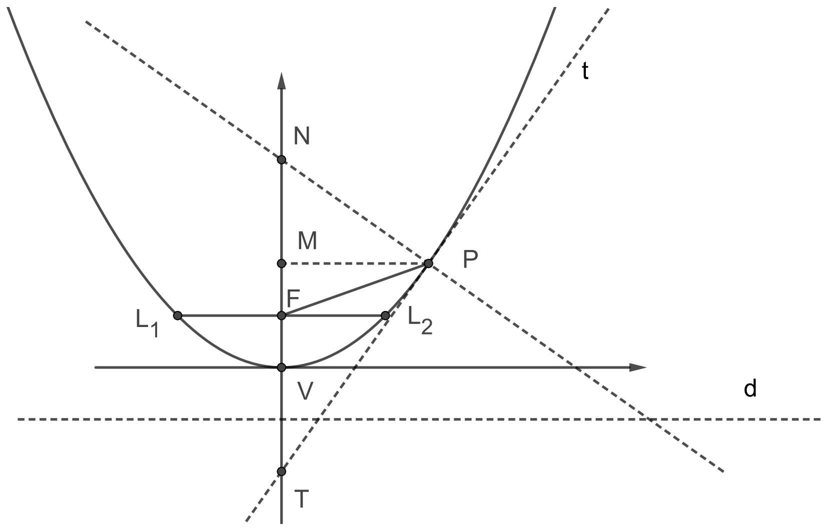

Figura 63 – Propriedades da parábola

$P = (x_1, y_1)$ (abscissa x_1 e ordenada y_1)
$T = (0, -y_1)$ (abscissa 0 e ordenada y_1 porque T é a intersecção da reta tangente à parábola no ponto de tangência P com o eixo da parábola $x = 0$. Para obter este resultado é só substituir x por 0 na equação da reta tangente)
$V = (0, 0)$
$F = (0, p)$
$N = (0, y_1 + 2p)$ (porque N é o ponto de intersecção entre a reta normal à parábola cuja equação é $y - y_1 = -\frac{2p}{x_1}(x - x_1)$ quando $x_1 \neq 0$ e o eixo da parábola $x = 0$)
$M = (0, y_1)$ (porque M está no eixo e tem a mesma ordenada do ponto P)
$L_1 = (-2p, p)$ e $L_2 = (2p, p)$
Calculando o quadrado das distâncias entre os pontos:
$(FT)^2 = (p + y_1)^2$ e
$(FP)^2 = x_1^2 + (y_1 - p)^2 = 4py_1 + y_1^2 - 2py_1 + p^2 = (p + y_1)^2$
Portanto, $FT = FP$, o que prova o primeiro item do teorema.
$(VT)^2 = y_1^2$ e
$(VM)^2 = y_1^2$
Portanto, $VT = VM$, o que prova o segundo item do teorema
Para a prova do terceiro item, sejam as equações das retas tangentes à parábola nos pontos de tangência L_1 e L_2 respectivamente:
$y + p = \frac{1}{2p}(-2p)x \Rightarrow y = -x - p$ e $y + p = \frac{1}{2p}(2p)x \Rightarrow y = x - p$

A intersecção dessas duas retas é o ponto de abscissa $x = 0$ e ordenada $y = -p$ e portanto, está na reta diretriz da parábola.

Teorema 5.5.2 *Tangente à parábola e bissetriz*
Seja P um ponto de uma parábola de foco F e diretriz d e P' o pé da perpendicular traçada do ponto P a d. A bissetriz t do ângulo $F\hat{P}P'$ é tangente à curva no ponto P.

Prova do teorema De acordo com a figura 64, sendo $PP' = PF$, o triângulo $PP'F$ é isósceles. A bissetriz PH é também altura e mediana do triângulo e a reta t que passa pelos pontos P e H é a mediatriz do segmento $P'F$. Seja Q um outro ponto de t e Q' o pé da perpendicular baixada de Q a d. Temos que $QP' = QF$ e como o triângulo $QP'Q'$ é retângulo, $QQ' < QP'$. Portanto, $QQ' < QF$ e qualquer ponto de t diferente de P é externo sendo a reta t tangente à curva.

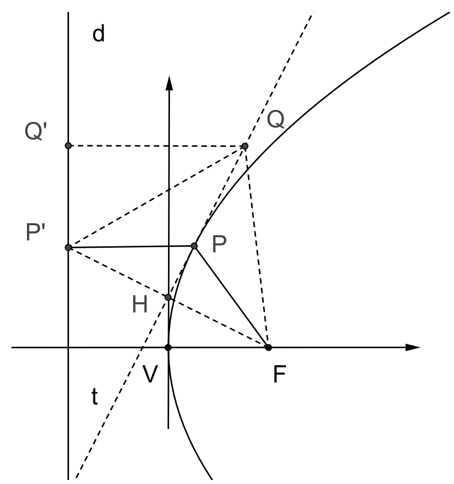

Figura 64 – Tangente à parábola e bissetriz

Corolário 5.5.1 *O ângulo entre a reta paralela ao eixo de uma parábola por um ponto da mesma e a reta normal pelo mesmo pontos é congruente ao ângulo entre a mesma reta normal e a reta determinada pelo ponto em questão e o outro foco da parábola.*

Observar os ângulos α e β da figura 65 .

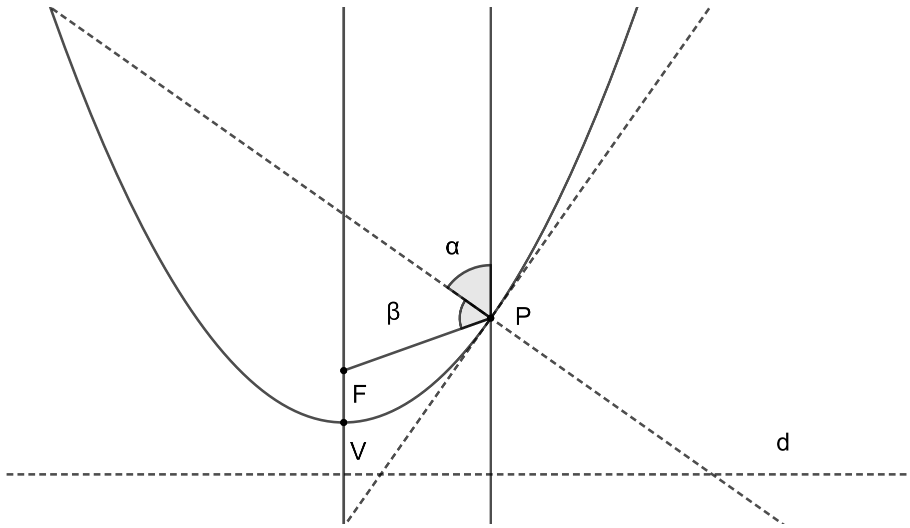

Figura 65 – Ângulos formados entre reta normal à parábola e retas: paralela ao eixo e reta pelo foco

Este corolário explica a propriedade da parábola largamente utilizada no cotidiano. Na antena parabólica, raios que chegam à parábola paralelos ao eixo da parábola se refletem na superfície parabólica se concentrando no foco. Já num farol de automóvel, raios de uma fonte de luz colocada no foco da parábola, se refletem na superfície parabólica seguindo direção paralela ao eixo.

- Podária da parábola
  A reta principal da parábola (tangente à curva no vértice) é o lugar geométrico dos pés das perpendiculares baixadas do foco às tangentes à curva.
  Seja t a tangente à parábola da figura 66 no ponto P e s a perpendicular a t passando por F.

  Temos que os triângulos $PP'H$ e PHF são congruentes sendo $P'H = HF$. No triângulo $P'FD$, H e V são pontos médios de lados do triângulo sendo HV paralelo a $P'D$. Como $P'D$ é perpendicular ao eixo da parábola, HV também é. Portanto, H pertence à reta q, tangente à curva no vértice.

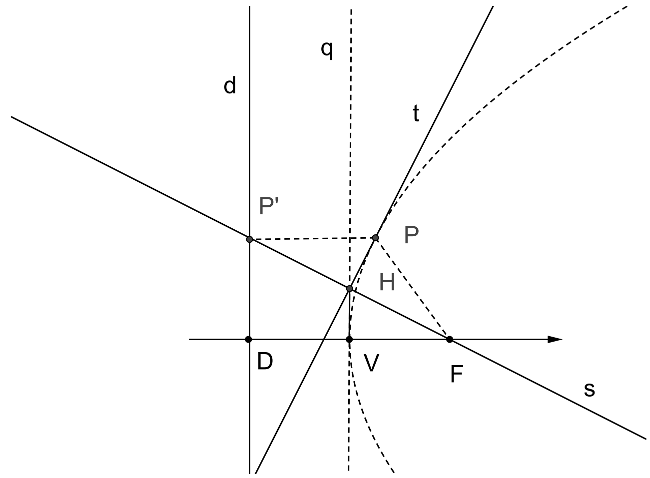

Figura 66 – Podária da parábola relativa ao foco

5.6 Construções geométricas das retas tangentes à parábola

1. Por um ponto P da parábola
   Basta traça a bissetriz do ângulo $F\hat{P}P'$ da figura anterior.

2. Por um ponto Q externo à parábola
   Seja Q um ponto externo à parábola e F o foco. Traçar circunferência de raio QF obtendo os pontos P' e P'', intersecções da circunferência com a reta diretriz d. Unindo P' a F, obtemos o ponto H, intersecção com a podária que para a parábola, é a reta tangente à curva no vértice. Unindo H a Q, teremos uma tangente à curva. Para se encontrar o ponto P de tangência, traçamos por P' uma reta paralela ao eixo da parábola até encontrar a tangente. Como podemos observar na figura 67 o triângulo $P'PF$ é isósceles porque $P'P = PF$ e como $QP' = QF$ a reta t é mediatriz do segmento $P'F$ e bissetriz do ângulo $P'\hat{P}F$ sendo portanto tangente à parábola. Uma segunda tangente poderá ser construída utilizando-se o ponto P'' ao invés de P'.

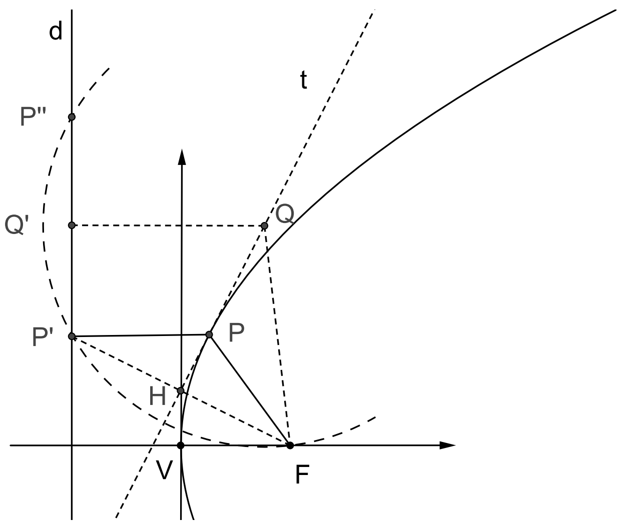

Figura 67 – Construção de tangente à parábola por ponto externo

3. Paralela a uma reta s dada
   Traçar uma reta perpendicular à reta s dada passando pelo foco F. Seja Q o ponto de intersecção da reta perpendicular a s com a reta diretriz d. A mediatriz de QF é a tangente t procurada. De acordo com a figura 68 podemos observar que o triângulo QPF é isósceles e sendo H ponto médio do segmento QF a reta t é mediatriz deste segmento e bissetriz do ângulo $Q\hat{P}F$.

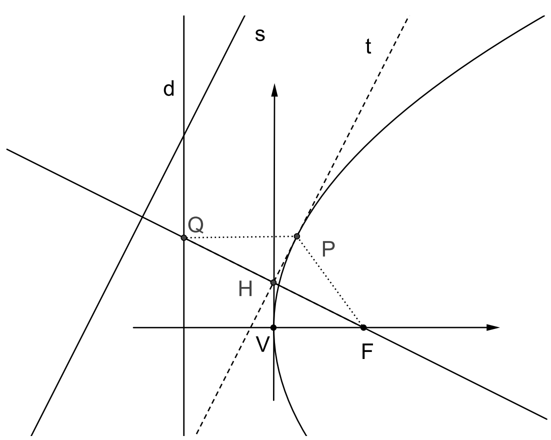

Figura 68 – Tangente à parábola paralela a uma reta dada

5.7 Equações paramétricas da parábola

Consideremos a parábola de vértice na origem e reta focal coincidindo com o eixo Oy ou Ox. Para se determinar as equações paramétricas dessas parábolas podemos:

- Substituir x ou y por t utilizando-o como parâmetro.
  Assim, na forma $x^2 = 4py$ de equação da parábola, fazendo $x = t$ teremos:
  $$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t^2}{4p} \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$
  que são equações paramétricas para essa parábola.

  Já na forma $y^2 = 4px$, substituímos y por t ficando com as seguintes equações paramétricas:
  $$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{4p} \\ y = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$
  Quando o vértice da parábola for um ponto $V = (x_0, y_0)$ diferente da origem $(0, 0)$, para a forma $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$ faremos a substituição $x - x_0 = t$ ficando com as seguintes equações paramétricas:
  $$\begin{cases} x = t + x_0 \\ y = \dfrac{t^2 + 4py_0}{4p} \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$
  Para a parábola $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$, fazendo $y - y_0 = t$, teremos as equações paramétricas:
  $$\begin{cases} x = \dfrac{t^2 + 4px_0}{4p} \\ y = t + y_0 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

- Associar x e y com o ângulo θ. O ângulo θ será usado como parâmetro.

  – Parábola de equação $x^2 = 4py$
    Colocando-se y em função de x temos: $y = \frac{x^2}{4p}$
    $tg\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{x^2}{4p}}{x} = \frac{x}{4p}$
    Assim, $\begin{cases} x = 4p\ tg\theta \\ y = 4p\ tg^2\theta \end{cases}$
    Ver figura 69

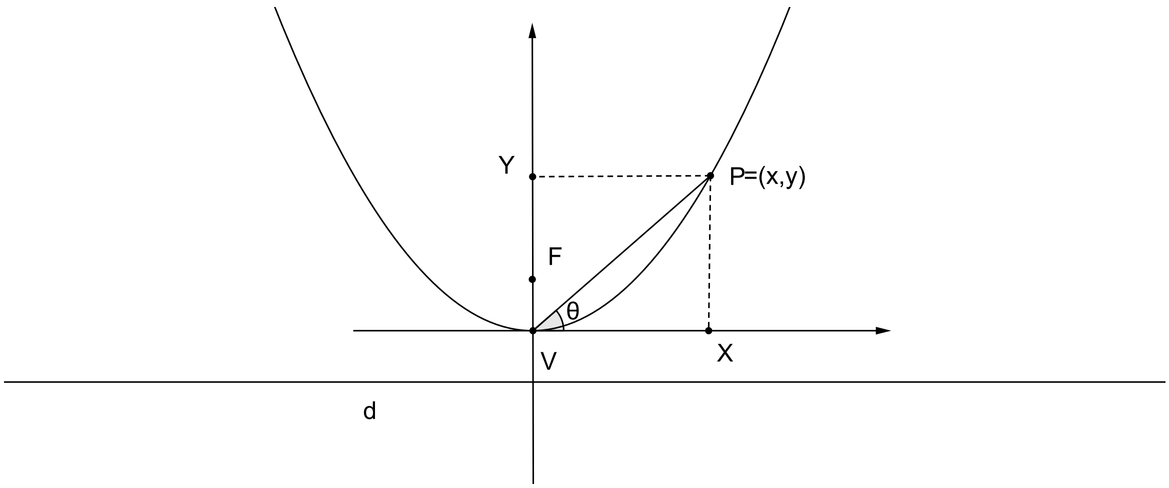

Figura 69 – Parábola $x^2 = 4py$ e ângulo θ

– Parábola de equação $x^2 = -4py$

Colocando-se y em função de x temos: $y = -\frac{x^2}{4p}$

$tg\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{-x^2}{4p}}{x} = \frac{-x}{4p}$

Assim, $\begin{cases} x = -4p\ tg\theta \\ y = -4p\ tg^2\theta \end{cases}$

– Parábola de equação $y^2 = 4px$

Colocando-se x em função de y temos: $x = \frac{y^2}{4p}$

$tg\theta = \frac{x}{y} = \frac{\frac{y^2}{4p}}{y} = \frac{y}{4p}$

Assim, $\begin{cases} x = 4p\ tg^2\theta \\ y = 4p\ tg\theta \end{cases}$

Ver figura 70

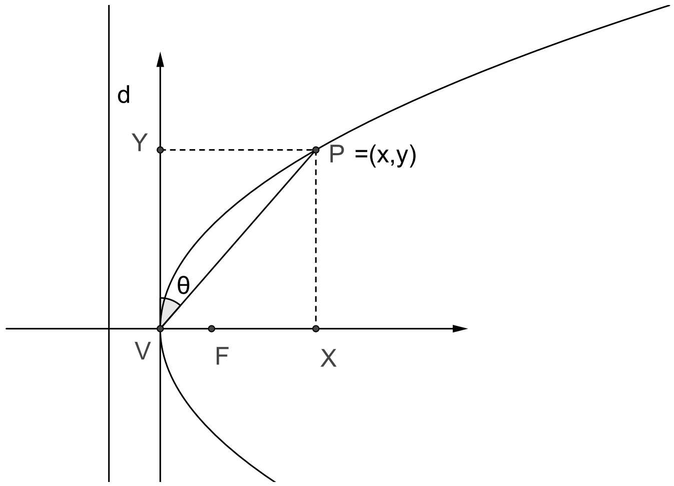

Figura 70 – Parábola $y^2 = 4px$ e ângulo θ

– Parábola de equação $y^2 = -4px$

Colocando-se x em função de y temos: $x = \frac{y^2}{4p}$

$tg\theta = \frac{x}{y} = \frac{\frac{-y^2}{4p}}{y} = \frac{-y}{4p}$

Assim, $\begin{cases} x = -4p\ tg^2\theta \\ y = -4p\ tg\theta \end{cases}$

5.8 Equações da Parábola em Coordenadas Polares

De modo semelhante ao que acontece com a elipse e a hipérbole a reta diretriz da parábola pode estar posicionada de quatro maneiras em relação ao eixo polar e ao polo:

1. Parábola com reta diretriz perpendicular ao eixo polar e à direita do polo. Consideremos um sistema de coordenadas polares cuja origem é o foco F da parábola e cuja semi-reta polar tem origem em F. Seja d a distância entre o foco F e a reta diretriz di.

   Ver figura 71

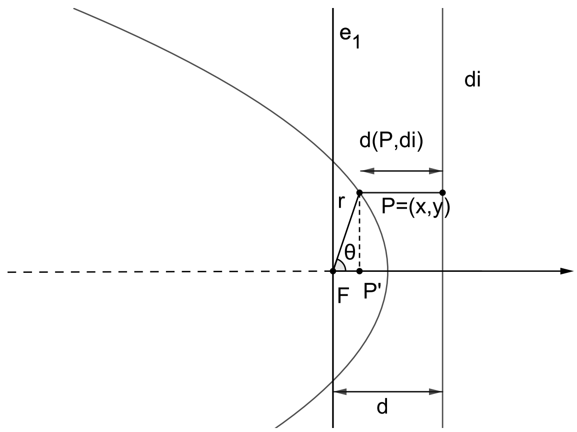

Figura 71 – Parábola com reta diretriz perpendicular ao eixo polar e à direita do polo

Sendo $d(P,F) = r$ (distância entre P e F) e $d(P,di) = d - x$ (distância entre P e di), como $\frac{d(P,F)}{d(P,di)} = e$, temos:
$r = e(d - x) = e(d - rcos\theta) = \frac{ed}{1+ecos\theta}$
Portanto nesse sistema de coordenadas polares a equação da parábola é:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{ed}}{\mathbf{1 + ecos}\theta}$$

2. Parábola com reta diretriz perpendicular ao eixo polar e à esquerda do polo.
   Analogamente, em relação a um sistema de coordenadas polares cuja origem é o foco F da parábola e cuja semi-reta polar tem origem F, seja d a distância do foco F à reta diretriz di.

   Ver figura 72

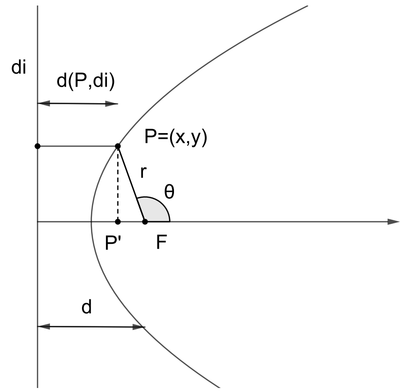

Figura 72 – Parábola com reta diretriz perpendicular ao eixo polar e à esquerda do polo

Como $r = e(d - (-rcos\theta) \Rightarrow r = ed + ercos\theta \Rightarrow r - ercos\theta = ed \Rightarrow r(1 - ecos\theta) = ed$. Portanto, nesse sistema, a equação polar da parábola é:

$$\mathbf{r = \frac{ed}{1 - ecos\theta}}$$

3. Parábola com reta diretriz paralela ao eixo polar (com origem em F) e acima dele. No caso de uma parábola com estas características, a $d(P, di)$ fica igual a $d-y = d-sen\theta$ e, então, como $\frac{d(P,F)}{d(P,di)} = e$, temos:
   $r = e(d - y) = e(d - rsen\theta) = \frac{ed}{1+esen\theta}$
   Portanto nesse sistema de coordenadas polares a equação da parábola é:

$$\mathbf{r = \frac{ed}{1 + e\ sen\theta}}$$

Ver figura 73

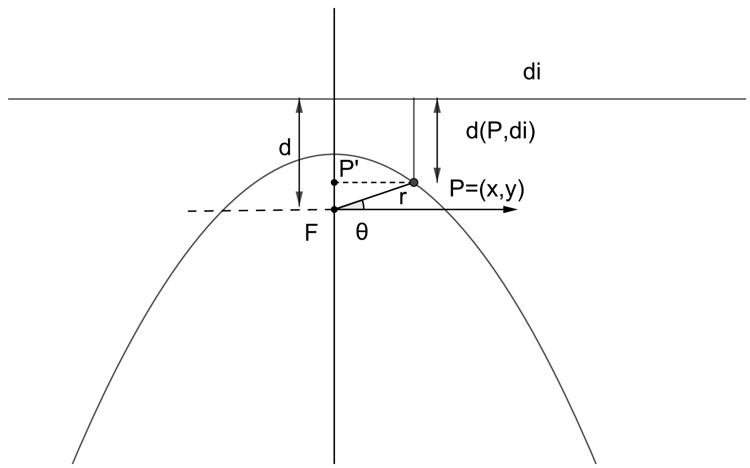

Figura 73 – Parábola com Reta diretriz paralela ao eixo polar e acima do polo

4. Parábola com reta diretriz paralela ao eixo polar (com origem em F) e abaixo dele. Neste caso, a $d(P, di)$ fica igual a $d - (-r\ sen\theta) = d + rsen\theta$ e, assim, como $\frac{d(P,F)}{d(P,di)} = e$, temos:
   $r = e(d + r\ sen\theta) = \frac{ed}{1 - e\ sen\theta}$
   Portanto nesse sistema de coordenadas polares a equação da hipérbole é:

$$\mathbf{r = \frac{ed}{1 - e\ sen\theta}}$$

Ver figura 74

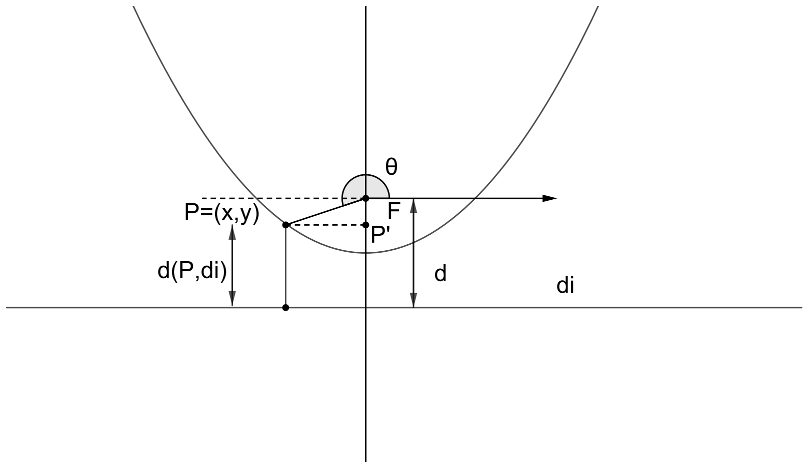

Figura 74 – Parábola com reta diretriz paralela ao eixo polar e abaixo do polo

As equações da parábola em coordenadas polares são iguais às da elipse e às da hipérbole. Elas se diferenciam pelo valor da excentricidade e. Para a elipse $0 < e < 1$, para a hipérbole $e > 1$ e para a parábola $e = 1$.

5.9 Equações da parábola quando o vértice da parábola não é a origem do sistema cartesiano ortogonal

- A equação de uma parábola com parâmetro geométrico p e cujo vértice tem abscissa X_0 e ordenada Y_0 em relação a um sistema cartesiano ortogonal $XO'Y$ com origem O' e cujo eixo Y das ordenadas é paralelo ao eixo da parábola e cujo eixo X das abscissas é perpendicular ao eixo da parábola é:
  $(X - X_0)^2 = 4p(Y - Y_0)$
  porque a equação canônica da parábola em relação ao sistema cartesiano ortogonal canônico xOy cuja origem é o vértice da parábola, cujo eixo y das ordenadas é coincidente com o eixo da parábola e cujo eixo x das abscissas é a reta perpendicular ao eixo da parábola pela origem é:
  $x^2 = 4px$ e as relações entre a abscissa X e a ordenada Y do sistema $XO'Y$ e a abscissa x e a ordenada y do sistema canônico xOy são respectivamente:
  $x = X - X_0 \quad \text{e} \quad y = Y - Y_0$
  Observar a figura 75

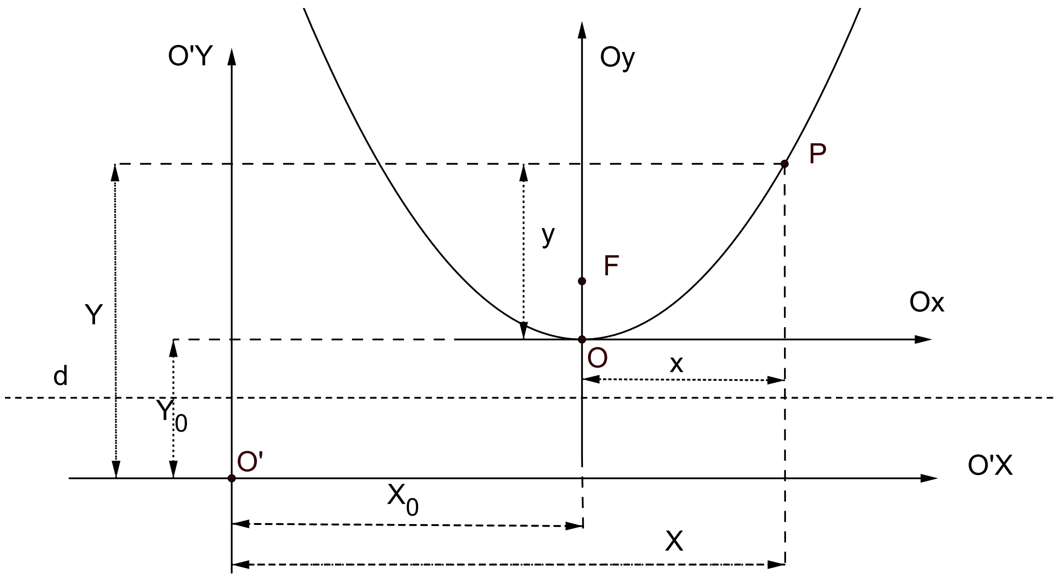

Figura 75 – Parábola com vértice não coincidente com a origem do sistema

Em relação ao sistema cartesiano $XO'Y$ temos:

- **Foco** - O foco F tem abscissa X_0 e ordenada $Y_0 + p$.
- **Vértice** - O vértice V tem abscissa X_0 e ordenada Y_0.
- **Eixo da parábola** - O eixo da parábola tem equação cartesiana $X = X_0$.
- **Reta diretriz** - A reta diretriz tem equação cartesiana $Y = Y_0 - p$.

- A equação da reta tangente à parábola por um ponto de tangência da parábola com abscissa X_1 e ordenada Y_1 é então:
$\dfrac{(Y_1 - Y_0) + (Y - Y_0)}{2} = \dfrac{(X_1 - X_0)(X - X_0)}{4p}$ devido ao fato de que no sistema cartesiano canônico xOy o ponto de tangência dado tem abscissa $x_1 = X_1 - X_0$ e ordenada $y_1 = Y_1 - Y_0$ e a reta tangente tem equação cartesiana
$\dfrac{y + y_1}{2} = \dfrac{x_1 x}{4p}$.

6 Equação geral das cônicas

A partir da equação de uma cônica, é possível reconhecer qual é a cônica representada e obter os elementos necessários para que possamos esboçar seu gráfico. Na forma canônica, o reconhecimento e caracterização dessas curvas é tarefa relativamente fácil. Quando temos a equação geral, reconhecer a cônica não é tão simples. A equação geral de uma cônica pode representar: um conjunto vazio, um ponto, uma reta, reunião de duas retas paralelas, reunião de duas retas concorrentes, circunferência, elipse, hipérbole ou parábola.
O objetivo deste capítulo é, fixado um sistema cartesiano ortogonal em um plano, identificar o conjunto dos pontos do plano cujas coordenadas cartesianas (x, y) satisfazem a equação polinomial do segundo grau em duas variáveis reais x e y:
$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ em que a, b, c, d, e, e f são constantes reais dadas. Esta equação, chamada de **equação geral das cônicas**, é composta de:

- Uma forma quadrática: $ax^2 + bxy + cy^2$
- Uma forma linear: $dx + ey$
- Um termo constante: f
  A equação geral de uma cônica pode ser representada na forma matricial como um produto de matrizes: $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$
  Fazendo a multiplicação das matrizes chegamos a $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

Existem vários métodos que permitem a identificação da classe à qual uma cônica pertence a partir de sua equação geral. A seguir serão apresentados alguns deles. Inicialmente será apresentada a técnica de identificação a partir dos chamados invariantes das cônicas. Depois, serão apresentados os métodos de translação e rotação de eixos e o método dos auto-valores e auto-vetores.

6.1 Identificação das cônicas através de seus invariantes

A função quadrática pode ser representada de maneira bastante útil através de uma matriz três por três. Seja a função $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ e sua representação através da matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$$

A matriz A fornece três expressões importantes para o estudo das cônicas que são os invariantes: τ, δ e Δ assim definidos:

$$\tau = a + c,$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{vmatrix}$$

Esses invariantes são úteis para a classificação das cônicas. O invariante Δ é o invariante dominante. As cônicas de maior interesse são as não degeneradas as quais têm discriminante diferente de zero. O invariante $\delta = 4ac - b^2$ também é importante na classificação: $4ac - b^2 \neq 0$ ocorre sempre que a cônica tem um centro único (h,k) calculado, como será visto na seção sobre translação, através do sistema:

$$\begin{cases} ah + \frac{b}{2}k + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{b}{2}h + ck + \frac{e}{2} = 0 \end{cases}$$

$\delta \neq 0$ pode estar relacionado com o conjunto vazio, um ponto, uma circunferência, uma elipse, uma hipérbole ou a reunião de duas retas concorrentes e $\delta = 0$ com o conjunto vazio, uma reta ou a reunião de duas retas paralelas (no caso do sistema ser indeterminado) e com o conjunto vazio ou parábola (quando o sistema for incompatível).
A equação geral de uma cônica pode representar nove classes diferentes de cônicas sendo parte delas chamadas não degeneradas e as restantes consideradas degeneradas. A tabela a seguir mostra as diferentes classes de cônicas e como distingui-las a partir dos invariantes δ e Δ e da quantidade de pontos que a equação representa. A circunferência está na classe da elipse real.

Tabela 1 – Classes de cônicas e seus invariantes - Tabela baseada no livro de (GIBSON, 2004)

Classes	Δ	δ	conjunto de pontos
Elipse real	$\Delta \neq 0$	$\delta > 0$	infinitos
Elipse virtual	$\Delta \neq 0$	$\delta > 0$	vazio
Hipérbole	$\Delta \neq 0$	$\delta < 0$	infinitos
Parábola	$\Delta \neq 0$	$\delta = 0$	infinitos
Par de retas concorrentes	$\Delta = 0$	$\delta < 0$	infinitos
Par de retas virtuais	$\Delta = 0$	$\delta > 0$	ponto
Retas paralelas reais	$\Delta = 0$	$\delta = 0$	infinitos
Retas paralelas virtuais	$\Delta = 0$	$\delta = 0$	vazio
Reta dupla	$\Delta = 0$	$\delta = 0$	infinitos

- Exemplos

1. Circunferência
   Equação: $x^2 + y^2 - 9 = 0$
   Matriz: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \quad \Delta \neq 0 \quad \delta > 0$
   Representa: infinitos pontos

2. Elipse real
   Equação: $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$
   Matriz: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Delta \neq 0 \quad \delta > 0$
   Representa: infinitos pontos

3. Elipse virtual (conjunto vazio)
   Equação: $x^2 + 2y^2 + 1 = 0$
   Matriz: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Delta \neq 0 \quad \delta > 0$
   Representa: conjunto vazio

4. Hipérbole
   Equação: $x^2 - y^2 - 1 = 0$

Matriz: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad \Delta \neq 0 \quad \delta < 0$
Representa: infinitos pontos

5. Parábola Equação: $x - y^2 = 0$
   Matriz: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \Delta \neq 0 \quad \delta = 0$
   Representa: infinitos pontos

6. Par de retas concorrentes
   Equação: $(x - y)(x + y) = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 = 0$
   Matriz: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \Delta = 0 \quad \delta < 0$
   Representa: infinitos pontos

7. Par de retas virtuais
   Equação: $(x - 1)^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0$
   Matriz: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \Delta = 0 \quad \delta > 0$
   Representa: um ponto

8. Retas paralelas reais
   Equação: $(x + y)(x + y + 1) = 0 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0$
   Matriz: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \Delta = 0 \quad \delta = 0$
   Representa: infinitos pontos

9. Retas paralelas virtuais
   Equação: $x^2 + 2xy + y^2 + x + y + 1 = 0$
   Matriz: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \Delta = 0 \quad \delta = 0$
   Representa: conjunto vazio

10. Reta dupla
    Equação: $(x + y)^2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 0$. Reta: $x + y = 0$

Matriz: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \Delta = 0 \quad \delta = 0$

Representa: infinitos pontos

Além de reconhecer as diferentes classes de cônicas a partir da equação quadrática podemos também identificar seus elementos e as coordenadas desses elementos através de estratégias algébricas. Quando os coeficientes b, d e e são nulos, chegamos à equação reduzida que permite um rápido reconhecimento. Caso contrário, tenta-se através de translações e rotações, eliminar esses coeficientes para se chegar à equação reduzida. Coeficiente $b \neq 0$ significa que o eixo da cônica se encontra rodado de um ângulo θ em relação aos eixos coordenados. Através de uma rotação, podemos anular o termo xy e chegar à equação de uma cônica congruente à cônica da equação original e, assim, reconhecer e caracterizar a curva.

Procedimentos para reconhecimento e caracterização das cônicas:

6.2 Translação de eixos

A mudança de coordenadas cartesianas:

$$\begin{cases} x = X + h \\ y = Y + k \end{cases}$$

é uma translação do sistema cartesiano ortogonal do plano em que o sistema cartesiano ortogonal com origem O e eixos Ox e Oy, respectivamente das abscissas e das ordenadas é alterado para um sistema cartesiano ortogonal cuja origem O' tem abscissa h e ordenada k em relação ao sistema cartesiano anterior e cujos eixos $O'X$ e $O'Y$ respectivamente das abscissas e das ordenadas são paralelos aos eixos coordenados anteriores. A equação cartesiana $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f = 0$ em relação ao sistema cartesiano xOy é transformada na equação cartesiana $AX^2+BXY+CY^2+DX+EY+F = 0$ em relação ao sistema cartesiano $XO'Y$ pela mudança de coordenadas cartesianas:

$$\begin{cases} x = X + h \\ y = Y + k \end{cases}$$

em que:

$A = a$

$B = b$

$C = c$

$D = 2ah + bk + d$

$E = bh + 2ck + e$

$F = ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek + f$

porque $a(X+h)^2 + b(X+h)(Y+k) + c(Y+k)^2 + d(X+h) + e(Y+k) + f = 0$ é equivalente a $aX^2 + bXY + cY^2 + (2ah + bk + d)X + (bh + 2ck + e)Y + ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek + f = 0$ e caso o sistema linear

$$\begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases}$$

ou, dividindo todos os membros por 2, o sistema linear

$$\begin{cases} ah + \dfrac{b}{2}k + \dfrac{d}{2} = 0 \\ \dfrac{b}{2}h + ck + \dfrac{e}{2} = 0 \end{cases}$$

admita como solução real um par ordenado (h, k) de números reais, a equação cartesiana fica reduzida a $AX^2 + BXY + CY^2 + F = 0$.

Isto ocorre se o determinante dos coeficientes

$$\begin{vmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{vmatrix} = ac - \tfrac{b^2}{4} \text{ ou } 4ac - b^2$$

é diferente de 0. Se o determinante é nulo, o sistema pode ter infinitas soluções ou ser incompatível. Sendo incompatível, não é possível eliminar os termos lineares por uma translação. Neste caso, a equação da cônica representa um conjunto vazio ou uma parábola. Sendo (h, k) uma solução, o valor de F é obtido substituindo h e k pelos respectivos valores encontrados na expressão de $F = ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek + f$. Após a translação ficamos com a expressão: $AX^2 + BXY + CY^2 + F = 0$ que não contém os termos lineares.

Exemplo:

$x^2 + 6xy + 2y^2 - 10x - 2y - 1 = 0$

Os coeficientes são: $a = 1$, $b = 6$, $c = 2$, $d = -10$, $e = -2$ e $f = -1$. Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} h + 3k - 5 = 0 \\ 3h + 2k - 1 = 0 \end{cases},$$

chegamos a $h = -1$ e $k = 2$. Substituindo esses valores na expressão de F chegamos a $F = 2$. A equação sem os termos lineares fica:

$X^2 + 6XY + 2Y^2 + 2 = 0$. Os coeficientes dos termos quadráticos não se alteram pela translação. Realizada a translação, passamos à rotação para eliminar o termo quadrático misto o que é sempre possível. Não se conseguindo eliminar os termos lineares através da translação, realizamos a rotação e depois tentamos eliminar um dos termos lineares completando quadrados.

6.3 As rotações de um sistema cartesiano

A mudança de coordenadas cartesianas para cada constante real θ

$$\begin{cases} x = cos(\theta)X - sen(\theta)Y \\ y = sen(\theta)X + cos(\theta)Y \end{cases}$$

é uma rotação do sistema cartesiano em que o sistema cartesiano ortogonal com origem O e eixos cartesianos de abscissas x e ordenadas y é transformado em um sistema cartesiano ortogonal com origem O e cujos eixos cartesianos de abscissas X e ordenadas Y são obtidos respectivamente dos eixos de abscissas x e ordenadas y por uma rotação de um ângulo θ medido em radianos no sentido anti-horário.
Ver figura 76

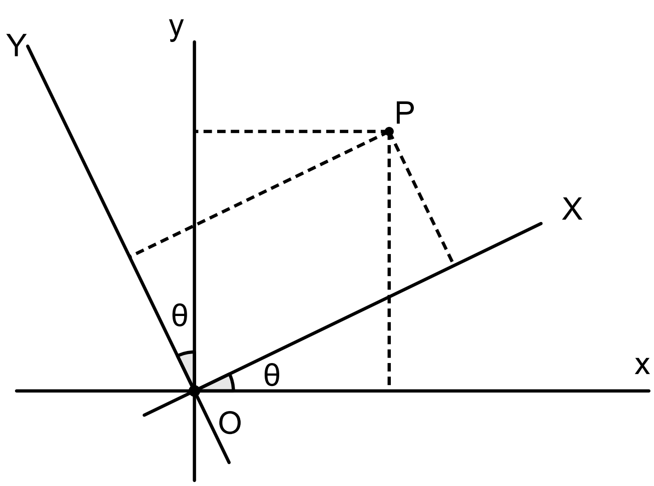

Figura 76 – Rotação de eixos

A equação cartesiana em relação ao sistema cartesiano ortogonal xOy, $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, é transformada na equação cartesiana $AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0$ em relação ao sistema cartesiano ortogonal XOY pela mudança das coordenadas cartesianas. Essa mudança pode ser representada na forma matricial do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

em que:
$A = acos^2(\theta) + bsen(\theta)cos(\theta) + csen^2(\theta)$
$B = -2asen(\theta)cos(\theta) + b[cos^2(\theta) - sen^2(\theta)] + 2csen(\theta)cos(\theta) = (c-a)sen(2\theta) + bcos(2\theta)$
$C = asen^2(\theta) - bsen(\theta)cos(\theta) + ccos^2(\theta)$
$D = dcos(\theta) + esen(\theta)$
$E = -dsen(\theta) + ecos(\theta)$
$F = f$
porque
$a[cos(\theta)X - sen(\theta)Y]^2$
$+b[cos(\theta)X - sen(\theta)Y][sen(\theta)X + cos(\theta)Y]$
$+c[sen(\theta)X + cos(\theta)Y]^2$
$+d[cos(\theta)X - sen(\theta)Y]$
$+e[sen(\theta)X + cos(\theta)Y]$
$+f = 0$ é congruente a
$AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0$
Estando presente o termo quadrático misto xy, isto é, quando $b \neq 0$, precisamos procurar valores de θ para os quais $B = 0$:
$B = -2asen(\theta)cos(\theta) + b[cos^2(\theta) - sen^2(\theta)] + 2csen(\theta)cos(\theta) = (c-a)sen(2\theta) + bcos(2\theta) = 0 \Rightarrow$
$\frac{cos(2\theta)}{sen(2\theta)} = -\frac{(c-a)}{b} \Rightarrow cotg(2\theta) = \frac{a-c}{b} \Rightarrow a - c = bcotg(2\theta)$
Podemos calcular A e C através do sistema:

$$\begin{cases} A + C = a + c \\ A - C = \dfrac{b}{sen(2\theta)} \end{cases}$$

porque
$A + C = a(cos^2(\theta) + sen^2(\theta)) + c(sen^2(\theta) + cos^2(\theta)) = a + c$
e
$A - C = a(cos^2(\theta) - sen^2(\theta)) + 2bsen(\theta)cos(\theta) + c(sen^2(\theta) - cos^2(\theta))$
$= acos(2\theta) + bsen(2\theta) - ccos(2\theta) = (a-c)cos(2\theta) + bsen(2\theta)$
Portanto, se o ângulo θ é tal que $B = 0$, substituindo $(a-c)$ por $bcotg(2\theta)$:
$A - C = bcotg(2\theta)cos(2\theta) + bsen(2\theta)$
$= b(\frac{cos^2(2\theta)}{sen(2\theta)} + sen(2\theta))$

$$= \frac{b(cos^2(2\theta)+sen^2(2\theta)}{sen(2\theta)} = \frac{b}{sen(2\theta)}$$

Para calcular $sen(2\theta)$ podemos usar a identidade trigonométrica $sen(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+cotg^2(2\theta)}}$
Se $d \neq 0$ e $e \neq 0$ e se esses coeficientes não tiverem sido eliminados por uma translação, é preciso, após eliminar o termo quadrático misto pela rotação, calcular D e E substituindo os valores de $sen(\theta)$ e $cos(\theta)$ nas equações: $D = dcos(\theta) + esen(\theta)$ e $E = -dsen(\theta) + ecos(\theta)$. Para chegar aos valores de $sen(\theta)$ e $cos(\theta)$ procedemos do seguinte modo:

1. Calculamos $cotg(2\theta) = \frac{a-c}{b}$
2. Calculamos $sen(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+cotg^2(2\theta)}}$
3. Calculamos $cos(2\theta) = cotg(2\theta)sen(2\theta)$
4. Calculamos $sen(\theta)$ e $cos(\theta)$, a partir de identidades trigonométricas, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} cos^2(\theta) - sen^2(\theta) = cos(2\theta) \\ cos^2(\theta) + sen^2(\theta) = 1 \end{cases}$$

Observação: No caso em que o ângulo de rotação (θ) em radianos é escolhido de modo que $cotg(2\theta) = \frac{a-c}{b}$, se $\frac{a-c}{b} > 0$, θ é fixado como um ângulo em radianos entre *zero* e $\frac{\pi}{4}$; se $\frac{a-c}{b} < 0$, θ é fixado como um ângulo em radianos entre $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$ e se $a = c$, θ é escolhido igual a $\frac{\pi}{4}$.
Após a rotação e o cálculo dos novos coeficientes dos termos lineares (no caso dos termos lineares não terem sido eliminados por uma translação), chegamos a: $AX^2 + CY^2 + DX + EY + F = 0$.
Usando a técnica de completar quadrados, se $AC \neq 0$, chegamos a :
$A(X^2 + 2\frac{D}{2A}X + \frac{D^2}{4A^2}) + C(Y^2 + 2\frac{E}{2C}Y + \frac{E^2}{4C^2}) = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$

$$= A(X + \frac{D}{2A})^2 + C(Y + \frac{E}{2C})^2 = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$$

Então:

- Se $A = C$, $A \neq 0$ e $\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4A} - F > 0$ a equação cartesiana obtida é equação de uma circunferência cujo centro tem coordenadas cartesianas $(\frac{-D}{2a}, \frac{-E}{2A})$ em relação ao sistema cartesiano ortogonal XOY e cujo raio é a raiz quadrada positiva de $\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4A} - F$.
- Se $A > C > 0$ e $\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F > 0$ a equação cartesiana obtida é equação de uma elipse cujo centro tem coordenadas cartesianas $(\frac{-D}{2a}, \frac{-E}{2C})$ em relação ao sistema cartesiano

ortogonal XOY e cujo eixo focal é coincidente com o eixo Y das coordenadas. (Caso $C > A > 0$ o eixo focal é coincidente com o eixo X das abscissas).

- Se $A > 0 > C$ e $\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F > 0$ a equação cartesiana obtida é equação de uma hipérbole cujo centro tem coordenadas cartesianas $(\frac{-D}{2A}, \frac{-E}{2C})$ em relação ao sistema cartesiano ortogonal XOY e cujo eixo focal é coincidente com o eixo X das abscissas (se $\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F < 0$, o eixo focal é coincidente com o eixo Y das ordenadas e se $C > O > A$ e $\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F < 0$, as situações acima se repetem.

- Se $AC > 0$ e $\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F < 0$ a equação cartesiana obtida é satisfeita por um único ponto a saber o ponto cujas coordenadas cartesianas em relação ao sistema cartesiano ortogonal XOY são $(\frac{-D}{2A}, \frac{-E}{2C})$.

- Se $AE \neq 0$ e $C = 0$ a equação cartesiana obtida é
$AX^2 + DX + EY + F = 0 \Rightarrow A(X + \frac{D}{2A})^2 - \frac{D^2}{4A} + EY + F = 0 \Rightarrow EY - \frac{D^2}{4A} + F = -A(X + \frac{D}{2A})^2 \Rightarrow$
$Y - (\frac{-F}{E} + \frac{D^2}{4AE}) = \frac{-A}{E}(X + \frac{D}{2A})^2$ que é a equação de uma parábola cujo vértice tem coordenadas cartesianas $(-\frac{D}{2A}, \frac{-F}{E} + \frac{D^2}{4AE})$ em relação ao sistema cartesiano ortogonal XOY e cujo eixo focal é coincidente com o eixo X das abscissas.

Exemplo

Identificar e encontrar os focos da cônica representada pela equação $Q(x, y) = 41x^2 - 24xy + 34y^2 - 90x + 5y + 25 = 0$ (exemplo retirado de (GIBSON, 2004)).
Seguimos as etapas:

1. Calculamos $cotg(2\theta)$:
$cotg(2\theta) = \frac{a-c}{b} = -\frac{41-34}{24} = -\frac{7}{24}$

2. Calculamos $sen(2\theta)$:
$sen(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+cotg^2(2\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{49}{576}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{625}{576}}} = \frac{1}{\frac{25}{24}} = \frac{24}{25}.$
Temos assim que:
$$\begin{cases} A + C = a + c = 41 + 34 = 75 \\ A - C = \dfrac{b}{sen(2\theta)} = -\dfrac{24}{\frac{24}{25}} = -25 \end{cases}$$
Desse sistema chegamos a: $A = 25$ e $C = 50$.

3. Calculamos $cos(2\theta) = cotg(2\theta)sen(2\theta)$
   $cos(2\theta) = -\frac{7}{24}\frac{24}{25} = -\frac{7}{25}$

4. Cálculo de $sen(\theta)$ e $cos(\theta)$ através do sistema:
   $\begin{cases} cos^2(\theta) - sen^2(\theta) = cos(2\theta) \\ cos^2(\theta) + sen^2(\theta) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cos^2(\theta) - sen^2(\theta) = -\dfrac{7}{25} \\ cos^2(\theta) + sen^2(\theta) = 1 \end{cases}$
   $\Rightarrow cos^2(\theta) = \frac{9}{25} \Rightarrow cos(\theta) = \frac{3}{5}$ e $sen(\theta) = \frac{4}{5}$

5. Cálculo dos coeficientes dos termos lineares

   - $x = Xcos(\theta) - Ysen(\theta) \Rightarrow x = X\frac{3}{5} - Y\frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{3X-4Y}{5}$

   - $y = Xsen(\theta) + Ycos(\theta) \Rightarrow y = X\frac{4}{5} + Y\frac{3}{5} \Rightarrow y = \frac{4X+3Y}{5}$

Chegamos a:
$Q(x, y) = 25X^2 + 50Y^2 - 90(\dfrac{3X - 4Y}{5}) + 5(\dfrac{4X + 3Y}{5}) + 25 = 0 \Rightarrow$
$25X^2 + 50Y^2 - 50X + 75Y + 25 = 0 \Rightarrow X^2 + 2Y^2 - 2X + 3Y + 1 = 0$
Completando quadrados:
$(X^2 - 2X + 1) - 1 + 2(Y^2 + \frac{3}{2}Y + \frac{9}{16}) - \frac{9}{8} + 1 = 0 \Rightarrow$
$(X - 1)^2 + 2(Y + \frac{3}{4})^2 - \frac{9}{8} = 0 \Rightarrow$
$(X - 1)^2 + 2(Y + \frac{3}{4})^2 = \frac{9}{8} \Rightarrow$
$\frac{8}{9}(X - 1)^2 + \frac{16}{9}(Y + \frac{3}{4})^2 = 1 \Rightarrow$
$\dfrac{(X-1)^2}{\dfrac{9}{8}} + \dfrac{(Y + \dfrac{3}{4})^2}{\dfrac{9}{16}} = 1$
Portanto, trata-se de uma elipse com seus eixos rodados em relação ao sistema xOy. Temos os seguintes valores para seus elementos a, b e c:
$a = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$
$b = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$
$c^2 = (\frac{3}{4}\sqrt{2})^2 - (\frac{3}{4})^2 \Rightarrow c = \frac{3}{4}$
Em relação ao sistema de coordenadas $XO'Y$ os focos F_1 e F_2 terão respectivamente as seguintes coordenadas: $F_1 = (\frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$ e $F_2 = (\frac{7}{4}, -\frac{3}{4})$ e o centro C terá coordenadas $(1, -\frac{3}{4})$
Para retornar às coordenadas originais de F_1 no sistema xOy:

$x = Xcos(\theta) - Ysen(\theta) \Rightarrow x = \frac{3}{4}$
$y = Xsen(\theta) + Ycos(\theta) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}$
Portanto, $F_1 = (\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$
Para F_2:
$x = Xcos(\theta) - Ysen(\theta) \Rightarrow x = \frac{33}{20}$
$y = Xsen(\theta) + Ycos(\theta) \Rightarrow y = \frac{19}{20}$
Portanto, $F_2 = (\frac{33}{20}, \frac{19}{20})$
E para C: $x = \frac{12}{10}$ e $y = \frac{7}{20}$. Assim, $C = (\frac{12}{10}, \frac{7}{20})$
É interessante notar que a cônica, que está rodada em relação ao sistema xOy original, mantém pela congruência suas características em relação ao sistema $XO'Y$. Seus elementos a, b e c, portanto não variam. Ver figura 77

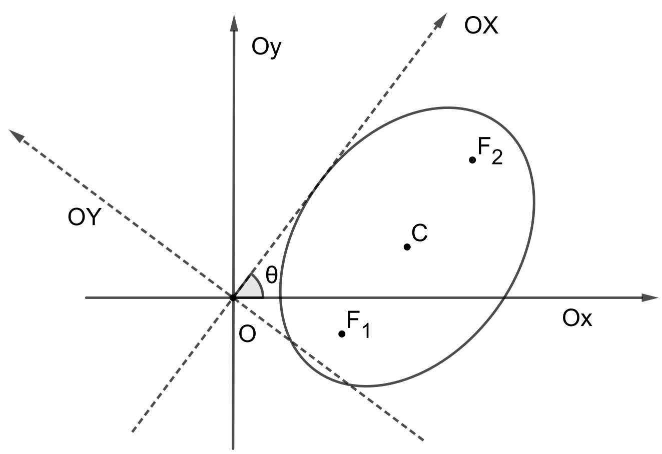

Figura 77 – Exemplo de elipse rodada

6.4 O método dos auto-valores e auto-vetores para identificação de uma cônica

A equação cartesiana em relação ao sistema cartesiano ortogonal xOy fixado $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ pode ser representada na forma de um produto de matrizes:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Os auto-valores da matriz simétrica real $A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$ são definidos como as raízes da equação do segundo grau (denominada equação característica da matriz A):

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b/2 \\ b/2 & c-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - \frac{b^2}{4}) = 0$$

Os auto-valores são números reais porque o discriminante da equação de segundo grau é $(a+c)^2 - 4ac + b^2 = (a-c)^2 + b^2 \geqslant 0$

A equação característica tem duas raízes iguais se o discriminante for nulo ($a = c$ e $b = 0$).

Para cada auto-valor real λ de A o auto-vetor correspondente ao autovalor λ é uma solução não nula do sistema linear

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} a-\lambda & b/2 \\ b/2 & c-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e as soluções do sistema linear são múltiplos da solução

$$\begin{bmatrix} c-\lambda \\ -\frac{b}{2} \end{bmatrix} \text{ e da solução } \begin{bmatrix} -\frac{b}{2} \\ a-\lambda \end{bmatrix}$$

em que $c - \lambda$ e $\frac{-b}{2}$ são cofatores dos elementos da primeira linha da matriz $A - \lambda I$ e $\frac{-b}{2}$ e $a - \lambda$ são cofatores dos elementos da segunda linha da matriz $A - \lambda I$ (lembrando que I é a matriz identidade de ordem dois).

Quando o discriminante da equação característica da matriz A for estritamente positivo, os auto-valores λ_1 e λ_2 de A são números reais distintos. Para cada $j = 1, 2$, seja $\begin{bmatrix} x_j \\ y_j \end{bmatrix}$ o auto-vetor de A associado a λ_j com a propriedade $x_j^2 + y_j^2 = 1$.

Seja P a matriz real de ordem dois cujas colunas são dadas pela coordenadas dos dois auto-vetores associados aos auto-valores da matriz A: $P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$

A mudança de coordenadas cartesianas:

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ é tal que, nas novas coordenadas cartesianas X e Y, ficamos com:

$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + d(x_1 X + x_2 Y) + e(y_1 X + y_2 Y) + f = 0$ que é a equação cartesiana em relação ao sistema ortogonal XOY. Neste sistema, o eixo x das abscissas do sistema cartesiano xOy é transformado no eixo X das abscissas do sistema cartesiano XOY o qual é coincidente com a direção e o sentido do auto vetor $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ e o eixo y das ordenadas do sistema xOy é transformado no eixo Y das ordenadas do sistema cartesiano XOY o qual é coincidente com a direção e o sentido do auto-vetor $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ e, o que é mais surpreendente, o ângulo entre os auto-vetores de A é o ângulo entre os vetores $\begin{bmatrix} c-\lambda_1 \\ \frac{-b}{2} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} c-\lambda_2 \\ \frac{-b}{2} \end{bmatrix}$ que é um ângulo reto devido ao fato de que $(c - \lambda_1)(c - \lambda_2) + \frac{b^2}{4} = 0$

Exemplo

Utilizando o método de auto-valores e auto-vetores identificar a cônica representada pela equação $Q(x, y) = 41x^2 - 24xy + 34y^2 - 90x + 5y + 25 = 0$ (será usada a mesma equação da seção anterior).

A matriz A da forma quadrática é:

$$\begin{bmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{bmatrix}$$

que tem como equação característica:

$\lambda^2 - 75\lambda + 1250 = 0$ cujas raízes são: $\lambda_1 = 25$ e $\lambda_2 = 50$ que serão os coeficientes A e C da equação $AX^2 + CY^2 + DX + EY + F$, já sem o termo misto BXY. Cálculo do auto vetores:

$\begin{bmatrix} a - \lambda & b/2 \\ b/2 & c - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ou seja, utilizando o auto-valor λ_1:

$$\begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As soluções desse sistema linear são múltiplos da solução $\begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$ e da solução $\begin{bmatrix} 12 \\ 16 \end{bmatrix}$

O autovetor (v_1), que dá a direção do eixo X das abscissas é, portanto, um múltiplo de $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Como se trata de um sistema cartesiano ortogonal, o vetor v_2 que dá a direção do eixo Y das ordenadas, será um múltiplo de $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

Na forma unitária esses vetores serão: $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \frac{-4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$.

A matriz formada pelas coordenadas dos auto-vetores será utilizada para a mudança de coordenadas cartesianas:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

Em relação ao sistema XOY a equação da cônica ficará:

$25X^2 + 50Y^2 - 90(\frac{3}{5}X + \frac{-4}{5}Y) + 5(\frac{4}{5}X + \frac{3}{5}Y) + 25 = 0$

O valor de F não se altera com a rotação. Completando quadrados ficamos finalmente com

$\dfrac{(X-1)^2}{\frac{9}{8}} + \dfrac{(Y + \frac{3}{4})^2}{\frac{9}{16}} = 1$ que é uma elipse.

6.5 Construção de cônicas a partir do foco e da diretriz

A elipse, a hipérbole e a parábola têm a seguinte propriedade: a distância de um ponto qualquer dessas curvas a um foco F é igual ao produto da excentricidade e da cônica pela distância do ponto à reta diretriz D correspondente ao foco considerado, o que pode ser escrito da seguinte forma, já que as distâncias são positivas: $PF^2 = e^2PD^2$.

Seja a equação cartesiana de uma elipse, hipérbole ou parábola em relação ao sistema ortogonal xOy: $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. O objetivo é a determinação das coordenadas cartesianas dos focos da cônica e a equação cartesiana das retas diretrizes (no caso da parábola, as coordenadas cartesianas do foco e a equação cartesiana de sua reta diretriz). Se as coordenadas cartesianas do foco F são: (x_F, y_F) e se a equação cartesiana da reta diretriz correspondente D em sua forma canônica é $px + qy + r$ (com $p^2 + q^2 = 1$, que corresponde à distância de um ponto à reta), então, as coordenadas (x, y) de um ponto qualquer da cônica satisfazem a equação:

$(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 - e^2(px + qy + r)^2 = 0$.

Podemos afirmar que $Q = \lambda[(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 - e^2(px + qy + r)^2 = 0]$ para algum λ não negativo.

Segue que $Q-\lambda[(x-x_F)^2+(y-y_F)^2] = \lambda e^2(px+qy+r)^2$ e portanto, $Q-\lambda[(x-x_F)^2+(y-y_F)^2]$ é um múltiplo por uma constante de

$D^2 = (px + qy + r)^2 = p^2x^2 + q^2y^2 + 2pqxy + 2prx + 2qry + r^2$. Esta equação de uma reta dupla tem matriz dos coeficientes de grau dois com determinante nulo:

$$\begin{vmatrix} p^2 & pq \\ pq & q^2 \end{vmatrix} = 0$$

Devemos procurar valores de λ para os quais o determinante da matriz dos coeficientes de $Q - \lambda[(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2]$ seja nulo.

Utilizando Q na sua forma usual ($Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$):

$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f - \lambda[(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2] =$

$(a - \lambda)x^2 + bxy + (c - \lambda)y^2 + (d + 2\lambda x_F)x + (e + 2\lambda y_F)y + f - \lambda(x_F^2 + y_F^2)$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Este determinante igual a 0 é a equação característica da função quadrática Q.

Portanto, $\lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - \frac{b^2}{4} = 0$.

Para cada autovalor λ precisamos encontrar valores para x_F e y_F para os quais $Q - \lambda[(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2]$ representa uma reta dupla.

Observação: O autovalor $\lambda = 0$ não é de interesse já que Q isolada não pode representar retas duplas. No caso da parábola um dos autovalores é nulo e deve ser usado o autovalor não nulo para os cálculos. Para a elipse e a hipérbole nenhum autovalor é igual a 0. A elipse possui dois focos no seu eixo maior e duas retas diretrizes perpendiculares a esse eixo que estão associadas aos focos. O autovalor de maior valor fornece os dois focos e as duas diretrizes da elipse. O de valor absoluto menor não fornece nenhum foco ou diretriz. No caso da hipérbole o autovalor a considerar é o de menor valor.

- Exemplo de construção da elipse (retirado de (GIBSON, 2004))
  Dada a equação cartesiana da elipse:
  $Q(x, y) = 7x^2 + 2xy + 7y^2 + 10x - 10y + 7 = 0$ em relação a um sistema cartesiano ortogonal xOy fixado, a equação característica é: $\lambda^2 - 14\lambda + 48 = 0$ cujas raízes são os autovalores $\lambda = 6$ e $\lambda = 8$, o objetivo é a determinação das coordenadas cartesianas (x_F, y_F) dos focos e a equação cartesiana das retas diretrizes na sua forma canônica $px + qy + r = 0$ (sendo $p^2 + q^2 = 1$).
  Para o autovalor $\lambda = 8$ de maior valor absoluto temos:
  $Q(x, y) - 8[(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2] = 7x^2 + 2xy + 7y^2 + 10x - 10y + 7 - 8(x^2 - 2xx_F + x_F^2 + y^2 - 2yy_F + y_F^2) = -(x - y)^2 + 2(8x_F + 5)x + 2(8y_F - 5)y - (8x_F^2 + 8y_F^2 - 7)$
  Esta última expressão, para representar retas duplas, deve ter a forma $-(x - y + r)^2 = -(x - y)^2 - 2rx + 2ry - r^2$. Para algum valor de r vem, igualando os coeficientes que:
  $8x_F + 5 = -r$
  $8y_F - 5 = r$
  $8x_F^2 + 8y_F^2 - 7 = r^2$
  Resolvendo as duas primeiras expressões para x_F e y_F em termos de r chegamos a $x_F = -\frac{1}{8}(5 + r)$ e $y_F = \frac{1}{8}(5 + r)$ e substituindo esses valores na terceira equação chegamos à equação quadrática
  $8(-\frac{1}{8}(5 + r)^2) + 8(\frac{1}{8}(5 + r)^2) - 7 = r^2$
  $\Rightarrow \frac{1}{4}(5 + r)^2 - 7 = r^2$
  $\Rightarrow (5 + r)^2 - 28 - 4r^2 = 0$
  $\Rightarrow -3r^2 + 10r - 3 = 0$ cujas raízes são 3 e $\frac{1}{3}$
  Para $r = 3$ obtém-se as coordenadas cartesianas do foco $F_1(-1, 1)$ e a equação cartesiana da reta diretriz correspondente: $x - y + 3 = 0$.
  Para $r = \frac{1}{3}$ obtém-se as coordenadas cartesianas do foco $F_2(\frac{-2}{3}, \frac{2}{3})$ e a equação cartesiana da reta diretriz correspondente: $x - y + \frac{1}{3} = 0$.
  Como a distância de um ponto da elipse a um dos focos é igual ao produto da excentricidade e da elipse pela distância do ponto à reta diretriz correspondente, é possível a determinação da excentricidade da elipse. Utilizando a equação de reta diretriz na sua forma canônica (que é igual à fórmula da distância de um ponto a uma reta) temos:

$(x+1)^2 + (y-1)^2 = e^2(\frac{x-y+3}{\sqrt{2}})^2$
Conclui-se que $e^2 = \frac{1}{4}$ e que $e = \frac{1}{2}$, isto é, $Q(x,y)$ é uma função polinomial múltipla de $(x+1)^2 + (y-1)^2 - \frac{1}{4}(\frac{x-y+3}{\sqrt{2}})^2$ e assim, $Q(x,y) = 7x^2 + 2xy + 7y^2 + 10x - 10y + 7 = 8[(x+1)^2 + (y-1)^2 - \frac{1}{8}(x-y+3)^2]$

- Exemplo de construção da hipérbole (retirado de (GIBSON, 2004))
  Dada a equação cartesiana de uma hipérbole $Q(x,y) = 3x^2 - 4xy + 2x + 4y - 9 = 0$ em relação a um sistema cartesiano ortogonal fixado, a equação característica da cônica é $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ cujas raízes são os autovalores $\lambda = -1$ e $\lambda = 4$.
  O objetivo é a determinação das coordenadas cartesianas (x_F, y_F) dos focos e a equação cartesiana das retas diretrizes $px + qy + r = 0$ na sua forma canônica $(p^2 + q^2 = 1)$.
  Para o autovalor $\lambda = -1$ temos: $Q(x,y) + (x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 = (2x - y)^2 + 2(1 - x_F)x + 2(2 - y_F)y + (x_F^2 + y_F^2 - 9) = (2x - y + r)^2 = (2x - y)^2 + 4rx - 2ry + r^2$.
  Para algum valor real da constante r vem, igualando os coeficientes:
  $2(1 - x_F) = 4r$
  $2(2 - y_F) = -2r$
  $x_F^2 + y_F^2 - 9 = r^2$
  em que
  $x_F = 1 - 2r$ e $y_F = 2 + r$
  e pela substituição de x_F e y_F na última equação:
  $(1 - 2r)^2 + (2 + r)^2 - 9 = r^2$
  $\Rightarrow 4r^2 + 1 - 4r + r^2 + 4r + 4 - 9 = r^2$
  $\Rightarrow 4r^2 - 4 = 0$
  $\Rightarrow r^2 = 1$
  Para $r = 1$ obtém-se as coordenadas cartesianas do foco $F_1(-1,3)$ e a equação cartesiana da reta diretriz $2x - y + 1 = 0$.
  Para $r = -1$ obtém-se as coordenadas do foco $F(3,1)$ e a equação da reta diretriz $2x - y - 1 = 0$. Como a distância de um ponto da hipérbole a um dos focos é igual ao produto da excentricidade e da hipérbole pela distância do ponto à reta diretriz correspondente, a função polinomial $Q(x,y)$ é um múltiplo de $(x+1)^2 + (y-3)^2 - e^2(\frac{2x-y+1}{\sqrt{5}})^2$ é possível a determinação da excentricidade e da hipérbole: $e^2 = 5$ ou $e = \sqrt{5}$
  Assim, $Q(x,y) = 3x^2 - 4xy + 2x + 4y - 9 = -[(x+1)^2 + (y-3)^2 - (2x - y + 1)^2]$

- Exemplo de construção da parábola (retirado de (GIBSON, 2004))
  No caso da parábola temos os autovalores $\lambda = 0$ e $\lambda = (a + c)$. O autovalor $\lambda = 0$

não interessa porque $Q(x, y)$ isolado não pode representar uma reta dupla. Dada a equação cartesiana da parábola $Q(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2 - 10y - 19 = 0$ em relação a um sistema cartesiano ortogonal xOy fixado, a equação característica da parábola é $\lambda^2 - 5\lambda = 0$ cujas raízes são: $\lambda = 0$ e $\lambda = 5$
O objetivo é a determinação das coordenadas cartesianas (x_F, y_F) do foco F e a equação cartesiana da reta diretriz na sua forma canônica $px + qy + r = 0$ (com $p^2 + q^2 = 1$).
Utilizando o autovalor 5 temos que:
$Q(x, y) - 5[(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2]$
$= -(x + 2y)^2 + 10x_F x + 10(y_F - 1)y - (5x_F^2 + 5y_F^2 + 19)$
Procuramos valores para x_F e y_F de modo que essa expressão represente uma reta dupla. A expressão deve ter a forma: $= -(x + 2y + r)^2 = -(x + 2y)^2 - 2rx - 4ry - r^2$ para alguma constante real r
Comparando os coeficientes de x e y e o termo constante verificamos que x_F e y_F devem satisfazer as relações:
$10x_F = -2r$
$10(y_F - 1) = -4r$
$5x_F^2 + 5y_F^2 + 19 = r^2$
Resolvendo as duas primeiras relações para x_F e y_F obtemos:
$x_F = -\frac{1}{5}r$ e $y_F = 1 - \frac{2}{5}r$
e pela substituição de x_F e y_F na última equação:
$5(-\frac{1}{5}r)^2 + 5(1 - \frac{2}{5}r)^2 + 19 = r^2$
$\Rightarrow \frac{1}{5}r^2 + \frac{4}{5}r^2 - r^2 - 4r + 24 = 0$
Chegamos a $r = 6$ e assim, o foco F tem coordenadas cartesianas $(-\frac{6}{5}, -\frac{7}{5})$ e a reta diretriz tem a equação cartesiana $x + 2y + 6 = 0$.

6.6 Intersecção entre uma reta e uma cônica

Fixado um sistema cartesiano ortogonal xOy com origem O em um plano, considere a cônica central cuja equação cartesiana em relação ao sistema cartesiano ortogonal escolhido é $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. Para cada par ordenado de números reais $(m, n) \neq (0, 0)$ e para cada ponto P do plano de coordenadas cartesianas (x, y) seja a equação paramétrica da reta que passa por P com direção (m, n):

$$\begin{cases} x(t) = x + mt \\ y(t) = y + nt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

A intersecção da reta que passa por P com a cônica dada é obtida através da equação:

$a(x+mt)^2 + b(x+mt)(y+nt) + c(y+nt)^2 + d(x+mt) + e(y+nt) + f = 0$ que é uma equação de segundo grau na variável t:
$(am^2+bmn+cn^2)t^2+(2amx+bnx+bmy+2cny+dm+en)t+(ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f) = 0$ e pode ser representada por $\Phi(t) = pt^2 + qt + r = 0$. Se pelo menos um coeficiente da equação for não nulo, a equação poderá ter duas raízes, uma raiz ou nenhuma raiz. No primeiro caso a reta será secante à cônica (dois pontos de intersecção), no segundo caso será tangente (um ponto de intersecção) e no terceiro, externa à cônica (nenhum ponto de intersecção)

- Pontos médios de cordas paralelas de uma cônica
  Com a hipótese de que o ponto P é o ponto médio do segmento de reta cujos extremos são pontos da cônica e cuja direção é definida pelo par ordenado $(m,n) \neq (0,0)$ de números reais, a equação do segundo grau na variável t admite duas raízes simétricas t_0 e $-t_0$, o que implica que a soma das raízes é nula, isto é,
  $(2am + bn)x + (bm + 2cn)y + (dm + en) = 0$
  O conjunto dos pontos do plano cujas coordenadas cartesianas (x,y) satisfazem a última equação é o conjunto dos pontos médios de todas as cordas da cônica com direção dada pelo par ordenado $(m,n) \neq (0,0)$ de números reais que ou é o conjunto dos pontos de uma reta ou é o conjunto vazio ou é todo o plano. O conjunto solução da última equação será a equação de uma reta desde que os coeficientes em x e em y, $(2am + bn, bm + 2cn) \neq (0,0)$, não sejam simultaneamente nulos e com a hipótese de que o determinante $\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} \neq 0$ o sistema linear

  $$\begin{cases} am + \dfrac{b}{2}n = 0 \\ \dfrac{b}{2}m + cn = 0 \end{cases}$$

  admite apenas a solução nula mas como $(m,n) \neq 0$, os coeficientes em x e em y da última equação não são simultaneamente nulos. Ver figura 78

  As coordenadas cartesianas do centro de uma cônica central são as soluções do seguinte sistema linear formado pelas derivadas parciais da equação geral em relação a x e y respectivamente:

  $$\begin{cases} 2ax + by + d = 0 \\ bx + 2cy + e = 0 \end{cases}$$

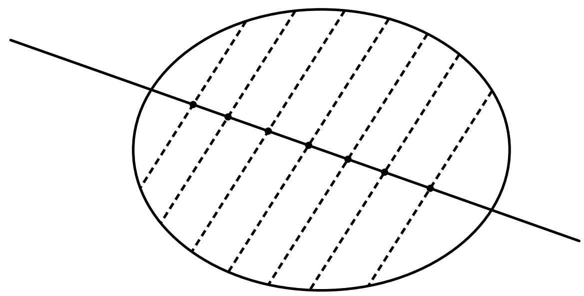

Figura 78 – Pontos médios de cordas paralelas da elipse

O centro da cônica, portanto, satisfaz a equação $(2am+bn)x+(bm+2cn)y+(dm+en) = 0$ e pertence ao conjunto dos pontos médios das cordas da cônica.

Assim, com a hipótese de que o determinante $\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} \neq 0$, a equação $(2am + bn)x + (bm + 2cn)y + (dm + en) = 0$ é a equação de uma reta a qual contém o centro de uma cônica central, quaisquer que sejam os valores do par ordenado $(m, n) \neq 0$ de números reais e, para cada par ordenado $(m, n) \neq 0$ de números reais fixado, as coordenadas cartesianas dos pontos médios das cordas da cônica com direção dada por (m, n) satisfazem essa última equação. Como o centro da cônica pertence à reta que passa pelos centros das cordas com a direção (m, n), a equação dessa reta pode ser calculada pela expressão $(2ax + by + d)m + (bx + 2cy + e)n = 0$

Exemplos

- Seja a elipse cuja equação é: $2x^2 + y^2 - 4x - 6y + 7 = 0$.

  As coordenadas de seu centro podem ser calculadas pelo sistema: $\begin{cases} 4x - 4 = 0 \\ 2y - 6 = 0 \end{cases}$ que dá as coordenadas $(1, 3)$ para o centro da curva. Considerando cordas da elipse com a direção igual a $(2, -1)$ chegamos, utilizando a equação dos pontos médios das cordas da cônica, à reta $4x - y - 1 = 0$ que passa pelo centro da elipse de coordenadas $(1, 3)$.

– Seja a hipérbole $2x^2 + 4xy - 5y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$ e cordas paralelas dessa curva com a direção $(m, n) = (-1, 1)$. Determinar a reta que passa pelos pontos médios dessas cordas.
As coordenadas cartesianas do centro da hipérbole podem ser calculadas através do seguinte sistema linear formado pelas derivadas parciais da equação geral em relação a x ey respectivamente:
$$\begin{cases} 4x + 4y - 4 = 0 \\ -10y + 4x - 6 = 0 \end{cases}$$
Como a reta que passa pelos pontos médios das cordas da hipérbole passa também pelo centro da curva, a equação da reta pode ser encontrada utilizando-se as coordenadas do centro da curva:
$(4x + 4y - 4)(m) + (-10y + 4x - 6)(n) = 0 \Rightarrow$
$(4x + 4y - 4)(-1) + (-10y + 4x - 6)(1) = 0$
Deste cálculo vem que a reta que passa pelo centro da hipérbole e pelos pontos médios das cordas que têm a direção $(-1, 1)$ é $y = -\frac{1}{7}$.

6.7 Definição de eixo de uma cônica

A elipse padrão e a hipérbole padrão têm eixos de simetria em ambos os eixos coordenados e a parábola em um dos eixos coordenados. Qualquer cônica é simétrica em relação a uma ou mais retas. A circunferência é simétrica em relação a qualquer reta que passe pelo centro.
Uma reta do plano é um eixo de uma cônica central dada pela equação cartesiana $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ em relação a um sistema cartesiano ortogonal xOy escolhido quando contém os pontos médios das cordas da cônica definidas por uma direção perpendicular a da reta . Em relação ao sistema cartesiano ortogonal xOy um eixo da cônica tem equação cartesiana $mx + ny + p = 0$ com $m^2 + n^2 > 0$ (estritamente positivo) e esta equação de reta é equivalente à equação dos pontos médios das cordas da cônica
$(2am + bn)x + (bm + 2cn)y + (dm + en) = 0$
ou seja, para algum valor real de λ
$(2am + bn)x + (bm + 2cn)y + (dm + en) = 2\lambda(mx + ny + p)$
o que implica que, igualando os coeficientes:

$$\begin{cases} 2am + bn = 2\lambda m \\ bm + 2cn = 2\lambda n \end{cases}$$

ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b/2 \\ b/2 & c-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e pelo fato de $(m,n) \neq (0,0)$ ser solução do sistema linear acima, o cálculo do determinante

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

leva à equação do segundo grau em λ
$\lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - \frac{b^2}{4}) = 0$ (que é denominada equação característica da cônica) a qual admite apenas raízes reais porque o discriminante da equação é maior ou igual a 0:
$(a+c)^2 - 4(ac - \frac{b^2}{4}) = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0.$

Exemplo

Seja a elipse de equação $17x^2 - 12xy + 8y^2 + 46x - 28y + 17 = 0$ cujo centro, calculado a partir do sistema linear:

$$\begin{cases} 17x - 6y + 23 = 0 \\ 4y - 3x - 7 = 0 \end{cases}$$

tem coordenadas iguais a $(-1,1)$. Precisamos encontrar os vetores que dão a direção dos eixos da elipse. A matriz dos coeficientes da forma quadrática:

$$\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$$

dá a equação característica $\lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0$ cujas raízes são os auto-valores $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 20$. A partir dos auto-valores, calculamos os auto-vetores:

- Auto-vetor correspondente ao auto-valor λ_1
  $$\begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
  que nos fornece o auto-vetor $v_1 = (1,2)$. A reta com esta direção é $2x - y + r = 0$, para algum r real. Como esta reta passa pelo centro $(-1,1)$, a equação de um dos eixos da elipse é $2x - y + 3 = 0$.

- Auto-vetor correspondente ao auto-valor λ_2
  $$\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que nos fornece o auto-vetor $v_2 = (2, -1)$. A reta com esta direção é $x + 2y - r$, para algum r real. Como esta reta passa pelo centro $(-1, 1)$, a equação do outro eixo da elipse é $x + 2y - 1 = 0$.
Observação: No caso da parábola que tem um só eixo e que apresenta um auto-valor nulo, utiliza-se o auto-valor não nulo para os cálculos.

6.8 Equação tangencial das cônicas

Nota: Nesta seção, os coeficientes dos termos x^2, xy, y^2, x e y da equação geral das cônicas serão representados respectivamente por a, $2b$, c, $2d$ e $2e$.
A equação da reta tangente a uma cônica geral
$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$
pelo ponto de tangência (x_0, y_0), isto é,
$ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2 + 2dx_0 + 2ey_0 + f = 0$
é dada por $ax_0x + b(x_0y + xy_0) + cy_0y + d(x + x_0) + e(y + y_0) + f = 0$
$\Rightarrow (ax_0 + by_0 + d)x + (bx_0 + cy_0 + e)y + (dx_0 + ey_0 + f) = 0$.
Como a reta tangente à cônica por (x_0, y_0) tem a forma $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, para que as duas equações sejam equações da mesma reta, é preciso que:
$\alpha = ax_0 + by_0 + d$
$\beta = bx_0 + cy_0 + e$
$\gamma = dx_0 + ey_0 + f$
sendo α, β e $\gamma \neq 0$.
Vamos deduzir uma equação tangencial das cônicas que não dependa do ponto de tangência. Para isso, vamos eliminar x_0 e y_0 das equações, encontrando valores de x_0 e y_0 em função dos coeficientes α, β, γ, a, b, c, d, e e f. Precisamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} \beta(ax_0 + by_0 + d) = \alpha(bx_0 + cy_0 + e) \\ \gamma(ax_0 + by_0 + d) = \alpha(dx_0 + ey_0 + f) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\beta a - \alpha b)x_0 + (\beta b - \alpha c)y_0 = \alpha e - \beta d \\ (\gamma a - \alpha d)x_0 + (\gamma b - \alpha e)y_0 = \alpha f - \gamma d \end{cases}$$

Resolvendo pela regra de Cramer,

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha e - \beta d & \beta b - \alpha c \\ \alpha f - \gamma d & \gamma b - \alpha e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta a - \alpha b & \beta b - \alpha c \\ \gamma a - \alpha d & \gamma b - \alpha e \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} \beta a - \alpha b & \alpha e - \beta d \\ \gamma a - \alpha d & \alpha f - \gamma d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta a - \alpha b & \beta b - \alpha c \\ \gamma a - \alpha d & \gamma b - \alpha e \end{vmatrix}}$$

e impondo que $\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0$, vem:

$$\alpha \begin{vmatrix} \alpha e - \beta d & \beta b - \alpha c \\ \alpha f - \gamma d & \gamma b - \alpha e \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} \beta a - \alpha b & \alpha e - \beta d \\ \gamma a - \alpha d & \alpha f - \gamma d \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} \beta a - \alpha b & \beta b - \alpha c \\ \gamma a - \alpha d & \gamma b - \alpha e \end{vmatrix} = 0$$

Calculando os determinantes, temos:
$\alpha(\alpha\gamma be - \alpha^2 e^2 - \alpha\beta bf + \alpha^2 cf + \beta\gamma bd - \beta\gamma bd - \alpha\gamma cd + \alpha\beta de) + \beta(\alpha\beta af - \beta\gamma ad - \alpha^2 bf + \alpha\gamma bd - \alpha\gamma ae + \beta\gamma ad + \alpha^2 de - \alpha\beta d^2) + \gamma(\beta\gamma ab - \alpha\beta ae - \alpha\gamma b^2 + \alpha^2 be - \beta\gamma ab + \alpha\gamma ac + \alpha\beta bd - \alpha^2 cd) = 0.$
Continuando os cálculos:
$2\alpha^2\beta(de - bf) + \alpha\gamma^2(ac - b^2) + \alpha\beta^2(af - d^2) + 2\alpha\beta\gamma(bd - ae) + \alpha^3(cf - e^2) + 2\alpha^2\gamma(be - cd)$
E dividindo por α, chegamos à equação tangencial da cônica:

$$\alpha^2(\mathbf{cf} - \mathbf{e}^2) + \beta^2(\mathbf{af} - \mathbf{d}^2) + \gamma^2(\mathbf{ac} - \mathbf{b}^2) + \mathbf{2}\alpha\beta(\mathbf{de} - \mathbf{bf}) + \mathbf{2}\beta\gamma(\mathbf{bd} - \mathbf{ae}) + \mathbf{2}\alpha\gamma(\mathbf{be} - \mathbf{cd}) = \mathbf{0} \tag{6.1}$$

observando que os coeficientes de α^2, β^2 e γ^2 são respectivamente os cofatores dos elementos diagonais a, c e f da matriz

$$\begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

e os coeficientes de $2\alpha\beta$, $2\beta\gamma$ e $2\alpha\gamma$ são respectivamente os cofatores dos elementos b, e e d da mesma matriz.
O significado da equação tangencial da cônica em $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \alpha\beta, \alpha\gamma$ e $\beta\gamma$ é que, se os valores dos coeficientes α, β e γ de uma reta $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ satisfazem a equação tangencial da cônica, então essa reta é tangente à cônica.

Exemplos

- Consideremos a cônica de equação $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Vamos calcular sua equação tangencial. A matriz representativa dessa curva é:

$$\begin{bmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{bmatrix}$$

  A equação tangencial dessa curva é da forma $\alpha^2(cf - e^2) + \beta^2(af - d^2) + \gamma^2(ac - b^2)$ Calculando os coeficientes de α^2, β^2 e γ^2 que são os cofatores dos elementos diagonais

da matriz chegamos à equação tangencial:
$-\alpha^2(a^4b^2) - \beta^2(a^2b^4) + \gamma^2(a^2b^2)$.
Uma reta $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ é tangente à cônica dada se os coeficientes α, β e γ satisfazem a equação tangencial.
Seja a equação $b^2x_0x + a^2y_0y - a^2b^2 = 0$. Vamos verificar se essa reta é tangente à curva dada sendo (x_0, y_0) o ponto de tangência. Vamos substituir os valores de seus coeficientes na equação tangencial:
$-(b^2x_0)^2(a^4b^2) - (a^2y_0)^2(a^2b^4) + (-a^2b^2)^2(a^2b^2) =$
$-b^4x_0^2a^4b^2 - a^4y_0^2a^2b^4 + a^4b^4a^2b^2 =$
$-b^6x_0^2a^4 - a^6y_0^2b^4 + a^6b^6 =$
$-b^4a^4(b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2)$
Como o ponto (x_0, y_0) pertence à curva dada, $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$ e portanto a equação $b^2x_0x + a^2y_0y - a^2b^2 = 0$ é, portanto, tangente à curva $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

- Encontrar a equação tangencial da circunferência $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ de centro $(1, 2)$ e raio igual a 1.
  Desenvolvendo, chegamos à forma geral: $(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$
  Para chegar à equação tangencial dessa circunferência, vamos construir a matriz dos seus coeficientes:
  $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$
  e calcular os cofatores dos elementos correspondentes a a, c, f, b, e e d da equação geral. Esses cofatores serão os coeficientes respectivamente de α^2, β^2, γ^2, $2\alpha\beta$, $2\beta\gamma$ e $2\alpha\gamma$ da equação tangencial dessa circunferência que ficará, então:
  $3\beta^2 + \gamma^2 + 4\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 4\beta\gamma = 0$.
  Qualquer reta $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ cujos coeficientes α, β e γ satisfaçam a equação tangencial dessa circunferência, será tangencial a ela. Por exemplo, os seguintes valores para α, β e γ: $(1, 0, -2)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, -1)$, $(0, 1, -3)$ ou $(1, 1, -3 + \sqrt{2})$ satisfazem a equação e portanto, as retas $x - 2 = 0$, $x = 0$, $y - 1 = 0$, $y - 3 = 0$ e $x + y - 3 + \sqrt{2} = 0$ são todas retas tangentes a essa circunferência.

- Encontrar a equação geral da cônica cuja equação tangencial é $9\alpha^2 + 4\beta^2 - 12\alpha\beta - 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma = 0$
  A matriz dos coeficientes é:

$$\begin{bmatrix} 9 & -6 & 1 \\ -6 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

cujo determinante $\Delta = \begin{vmatrix} 9 & -6 & 1 \\ -6 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

Para o cálculo dos coeficientes da equação geral procedemos do seguinte modo: $coeficiente * \Delta = cofator$

Portanto, neste exemplo, temos:

$a\Delta = -1 \Rightarrow a = 1$

$b\Delta = -1 \Rightarrow b = 1$

$c\Delta = -1 \Rightarrow c = 1$

$d\Delta = 2 \Rightarrow d = -2$

$e\Delta = 3 \Rightarrow e = -3$

$f\Delta = 0 \Rightarrow f = 0$

A equação da cônica na forma normal fica então: $x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 6y = 0$

Referências

CAMARGO, I.; BOULOS, P. *Geometria Analítica - um tratamento vetorial*. [S.l.]: Prentice Hall, 2005.

CRUZ, L. F. da. Coordenadas polares. In: *Material didátiico - Cálculo vetorial e geometria analítica*. [S.l.]: Departamento de Matemática - Faculdade de Ciências - Unesp Bauru, 2017.

EVES, H. *A survey of geometry*. [S.l.]: Allyn and Bacon, Inc. Boston, 1972.

GIBSON, C. G. *Elementary Euclidean Geometry: An Introduction*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004.

GOMEZ, J. J. D.; FRENSEL, K. R.; CRISSAFF, L. dos S. *Geometria Analítica*. [S.l.]: SBM, 2017.

J.Y.MCLEOD, R.; BAART, M. L. *Geometry and Interpolation of Curves and Surfaces*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1998.

PERES, E. dos S. *Classificação de Cônicas e Quádricas em Função da Equação Algébrica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, 2014.

ROCHA, L. M. *Geometria no Espaço*. [S.l.]: Livraria Nobel S.A., 1964.

WINTERLE, P. *Vetores e Geometria Analítica*. [S.l.]: Makron Books, 2000.