1£es

Universidade Federal do Tocantins
Universitário de Arraias
Mestrado Profissional em Matemática
PROFMAT (Rede Nacional)

Fabiano Rodrigues de Sousa

Loteria Federal: Sorte, Azar ou Matemática?

ARRAIAS-TO
2017

Fabiano Rodrigues de Sousa

Título Loteria Federal: Sorte, Azar ou Matemática?

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática e ofertado pela Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr.Robson Martins de Mesquita

ARRAIAS - TO
2017

RESUMO

O presente trabalho tem como escopo o conhecimento matemático de probabilidade e análise combinatória aplicado ao Ensino Médio, voltado ao universo de loterias federais. Neste apresentamos a teoria básica de análise combinatória, probabilidade e aplicações em loterias federais, ilustrando esta teoria com aplicações no dia-a-dia. A pretensão deste é transmitir ao leitor resultados probabilísticos através de jogos de azar das principais loterias federais do Brasil, utilizando ferramentas de matemática discreta.

Palavras-chave: Combinatória, Jogos, Loteria Federal e Probabilidade

ABSTRACT

The present work has as scope mathematical knowledge applied to high school, with applications of probability and combinatorial analysis directed to the universe of federal lotteries. In this paper we present the basic theory of combinatorial analysis, probability and applications in federal lotteries, illustrating this theory with day-to-day applications. The intention of this is to transmit to the reader probabilistic results through games of chance of the main federal lotteries of Brazil, using tools of discrete mathematics.

Keywords: Combination, Games, Federal Lottery and Probability.

Lista de Figuras

Sumário

INTRODUÇÃO

Neste trabalho fizemos estudos de Análise Combinatória e de Probabilidade aplicados em análises das principais loterias federais do país, no nível do Ensino Médio Brasileiro; Por outro lado, no decorrer de nossa prática, como professor de Matemática, nos ensinos Médio e Técnico, temos sentido, ainda, a necessidade de incorporar práticas pedagógicas que dessem suporte prático ao professor que facilitasse a assimilação deste tipo de conhecimento por parte de nossos alunos. No tocante ao desenvolvimento da aprendizagem dos alunos do Ensino Médio, tais práticas parecem recompensar aqueles que desejam mais conteúdos matemáticos em sua formação. Neste contexto, nos propusemos investigar o desenvolvimento de um conteúdo especícfco para ensino de matemática básica. Escolhêramos para tal, a Análise Combinatória e Probabilidade em nível elementar aplicadas a jogos de loterias federais, uma vez que tais teorias, ensinadas no segundo ano do Ensino Médio, proporcionam uma estrutura formal de simples caracterização e contextualização, sendo imprescindível na formação do discente, apesar de serem conteúdos nos quais os alunos possuem maiores dificuldades de aprendizagem no Ensino Médio. No capítulo 1 e 2 apresentaremos fundamentação teórica de Análise Combinatória e Probabilidade respectivamente. Já no capítulo 3, faremos o estudo de Aplicações de Análise Combinatória e Probabilidade nas principais Loterias Federais do Brasil.

Capítulo 1

Fundamentação Teórica: Análise Combinatória

1.1 O que seria Sorte ou Azar?

O que é Sorte:

Sorte é um substantivo que pode significar destino, fado, ou um acontecimento casual, que pode ser bom ou mau. A palavra sorte pode ter significados diferentes, usados em diversos contextos.

No âmbito da filosofia é algo que resulta da casualidade, sendo a expressão de um fenômeno que não é possível prever ou explicar. O conceito de sorte ignora qualquer tipo de justificação racional, e alguns autores a diferenciam do destino, afirmando que o destino também não pode explicar a sorte.

Existem várias expressões com a palavra sorte:

Por sorte - Quando alguém ou alguma coisa é escolhida de forma aleatória.

Sorte grande - Descreve o maior prêmio da loteria.

Boa sorte - Expressão usada quando alguém deseja que uma ação de outra pessoa ocorra de forma favorável.

Maldita sorte - Quando uma pessoa passou por uma experiência desagradável.

A Definição de Sorte - Expressão que serve para descrever uma pessoa que vive uma situação favorável em alguma área da sua vida.

O trevo de quatro folhas é um dos símbolos mais famosos da sorte. Existem outros como a pata de coelho ou ferradura. A utilização de amuletos da sorte é um hábito bastante comum para o ser humano, que teve a sua origem há muitos séculos atrás. Estes amuletos estão envolvidos em superstição.

Um dos tipos de sorte mais apreciado é a sorte em jogos de azar, como a Mega-Sena, ou jogos de casino, onde é possível ganhar dinheiro, se você tiver a "sorte do seu lado"

O que é Azar:

Azar é uma palavra com múltiplos significados, sendo mais utilizada para denotar a má sorte, a casualidade, a desgraça ou a falta de sucesso na realização de um objetivo.

Os chamados "jogos de azar"são um exemplo do uso da palavra em um sentido relativo ao acaso. Esses jogos não dependem apenas da habilidade ou raciocínio dos participantes, mas também de regras que impliquem a casualidade, a "sorte"ou a falta dela: o azar.

A conotação mais conhecida da palavra azar é a que está ligada ao oposto da sorte, ou seja, aquilo que é negativo ou produz resultados desastrosos e contrários às expectativas da pessoa.

De acordo com a cultura popular, existem pessoas "azaradas"ou que "tiveram azar". Os azarados são os indivíduos que frequentemente se encontram em situação de azar. Quando as situações de azar ocorrem esporadicamente, diz-se que a pessoa simplesmente "teve azar".

O conceito de azar, como causador de desgraças ou má sorte, está intrinsecamente relacionado com a maioria das superstições, tanto no mundo ocidental, como no oriental. Muitas pessoa acreditam que objetos ou ações possam ter ou dar azar, sendo considerada como causadora de má sorte. Exemplo: gatos pretos e o número 13, por exemplo.

Essas associações acontecem a partir de mitos e lendas urbanas ou rurais, que são transmitidas através de tradições culturais ou individuais, quando um indivíduo, por exemplo, ao observar certas coincidências entre um objeto e acontecimentos desagradáveis em sua vida, começa a acreditar que tal objeto seja o motivo desse azar.

1.2 A importância da Análise Combinatória

Entre as disciplinas mais conhecida da Matemática, está a Análise Combinatória. Este é um tipo de disciplina como todas as outras que necessita de raciocínio lógico, e o principal objetivo é de analisar possibilidades e combinações.

Um bom exemplo disso para entender, é que para saber quantos números de quatro algarismos são formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 9, é necessário realizar a aplicação das propriedades da análise combinatória.

E entre essas propriedades da análise, estão os princípios fundamentais da contagem, fatorial, arranjos simples, permutação simples, combinação e também a permutação com elementos repetidos. Com isso, a análise combinatória é um estudo que tem o objetivo de permitir que se descubram as mais variadas possibilidades de uma possível combinação de variáveis. Esta é uma matéria de extrema importância e geralmente costuma estar presente em diversos areas e é muito importante para o estudo de loterias federais. Isso forma, ela é repleta de pensamentos um tanto quanto abstratos, e assim necessita de raciocínio lógico e mais rápido.

1.3 Princípios Básicos de Contagem

Princípio da Adição

Se A e B são dois conjuntos disjuntos, isto é, a intersecção dos conjuntos A e B é igual o conjunto vazio, com A possui p elementos e B possui q elementos, então $A \cup B$ possui $p+q$ elementos. A extensão do Princípio da Adição pode ser expressa da seguinte forma: se $A_1, A_2, ..., A_n$ são conjuntos, disjuntos 2 a 2, e se A_i possui $|A_i| = a_i$ elementos, então a união $\cup_{i=1}^{n} A_i$ (lê-se: a união de A_i para i variando de 1 a n) possui $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ elementos.

Exemplo 1.1. *Numa classe de discentes do curso de Informática Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal Goiano, existem 18 homens e 12 mulheres. De quantas maneiras distintas podemos selecionar 1 estudante?*

Resolucão: Pelo **Princípio da Adição** existem $18+12=30$ estudantes no curso de Informática Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal Goiano. Logo, podemos selecionar 1 aluno de 30 maneiras distintas.

Exemplo 1.2. *Na cantina da UFT há 5 sabores de sucos e 4 tipos de salgados. Suponha que Maria aluna do curso de Licenciatura em Matemática só tenha permissão para tomar um suco ou comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos distintos que Maria pode fazer?*

Resolucão: Ou Maria escolhe um sabor de suco dentre os 5 ou 1 tipo de salgado dentre os 4, note que a escolha dos pedidos de Maria é exclusiva, então os possíveis pedidos distintos são a união dos sabores de suco ou tipo de salgados. Portanto, pelo **Princípio da Adição** Maria pode fazer $5+4=9$ pedidos diferentes.

Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo

Se uma decisão pode ser tomada de p modos e uma segunda decisão pode ser tomada de q modos, qualquer que tenha sido a primeira decisão, então o número de modos de se tomar consecutivamente as duas decisões é $p.q$. A extensão do Princípio Multiplicativo em linguagem de conjuntos pode ser expressa da seguinte maneira: se o conjunto A_i possuir m_i elementos, então o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n)\,|a_i \in A_i, i = 1, 2, .., n\}$ possui cardinalidade $m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_n$.

Exemplo 1.3. *Na cantina da UFT há 5 sabores de sucos e 4 tipos de salgados. Suponha que Maria aluna do curso de Licenciatura em Matemática só tenha permissão para tomar um suco e comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos distintos que Maria pode fazer?*

Resolucão: Podemos tomar como elementos do conjunto A os 5 sabores de sucos e como elementos do conjunto B os 4 tipos de salgados. Como existem 5 maneiras diferentes de escolha para os sabores de sucos e, para cada uma dessas 5 maneiras de escolha em A, pode-se escolher 4 tipos de salgados no conjunto B, então o número de maneiras de se escolher um sabor de suco, na sequência, escolher um tipo de salgado é $5 \times 4 = 20$, pois as escolhas são independentes. Portanto, Maria pode fazer 20 pedidos diferentes.

Permutações Simples

Uma permutação de n objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses n objetos. Para contar o número total de maneiras de ordenar esses n objetos, procedemos da seguinte forma: o primeiro elemento pode ser escolhido de n modos, isto é, pode ser qualquer um dos n objetos; fixado o primeiro elemento, o segundo elemento pode ser qualquer um dos $(n-1)$ objetos que não foram escolhidos no primeiro momento; tendo assim $n(n-1)$ formas de escolher os dois primeiros elementos. Para a escolha do terceiro elemento, existem $(n-2)$elementos que não foram selecionados em nenhuma das duas escolhas anteriores; até que para o último elemento a ser escolhido sobre apenas um modo. Daí, denotando por P_n o número das permutações simples dos n objetos, definimos: $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot 2 \cdot 1$ que pode ser representado por $P_n = n!$

Exemplo 1.4. *De quantos modos podemos ordenar em fila n objetos distintos?*

Resolucão: Trata-se da permutações simples (sem repetições) de n objetos distintos. Logo, n objetos podem ser ordenados em fila de $P_n = n!$ modos.

Exemplo 1.5. *Escrevendo todos os anagramas da palavra PROFMAT e distribuindo-os como se fosse num dicionário (ordem alfabética), teremos como primeira palavra AFMOPRT, como segunda AFMOPTR, e assim por diante. Que palavra ocupará a posição 2017 nessa lista?*

Resolucão: Para determinar o anagrama da palavra PROFMAT que ocupará a posição 2017, seguindo a ordem alfabética, devemos contar os anagramas anteriores. Assim os anagramas começados por:
A são $6! = 720$ anagramas;
F são $6! = 720$ anagramas
Observe que se calculamos todos os anagramas que iniciam com a letra A, F e M são $3 \times 720 = 2160$, como queremos encontrar o anagrama que ocupará a posição 2017, já sabemos que o anagrama se inicia com a letra M, fixaremos o M e encontraremos a segunda letra do anagrama, segue então:
MA são $5! = 120$ anagramas
MF são $5! = 120$ anagramas
MO são $5! = 120$ anagramas
MP são $5! = 120$ anagramas
Sabemos que os anagramas que iniciam com a letra A e F são $720 + 720 = 1440$, por outro lado, os anagramas que iniciam com a letra MA, MF, MO, MP e MR são $5 \times 120 = 600$ somando todos temos 2040, como queremos encontrar o anagrama que ocupará a posição 2017, seguem que o anagrama se inicia com a letra M e R, fixaremos o M e R encontraremos a terceira letra do anagrama, segue então:
MRA são $4! = 24$ anagramas
MRF são $4! = 24$ anagramas
MRO são $4! = 24$ anagramas
MRP são $4! = 24$ anagramas
Mas $2 \times 720 + 4 \times 120 + 4 \times 24 = 2016$, então o anagrama que ocupa a posição 2016, seguindo

a ordem alfabética, é MRPTOFA, já que é o último anagrama dos anagramas iniciados com MRP. Desta forma o anagrama que ocupa a posição 2017 será o imediatamente o próximo depois MRPTOFA, seguindo a ordem alfabética o anagrama é MRTAFOP.

Arranjos

Definição: Designaremos por Arranjo a uma qualquer sequência formada por elementos, todos diferentes, de um dado conjunto, e ordenamento de todos os elementos do subconjunto de um conjunto dado é relevante, isto é, subconjuntos com todos os elementos iguais em posições diferentes são subconjuntos distintos. Se o conjunto tiver n elementos, designaremos por $A_{n,p}$ o número total de arranjos que é possível formar com p elementos escolhidos entre os n dados. $A_{n,p}$ lê-se arranjos de n, tomados p a p. É evidente que $p \leq n$. A dedução de uma fórmula para esta situção é menos imediata do que no caso anterior, no entanto recorre-se novamente ao **Princípio Fundamental Multiplicativo da Contagem**. Seja $(x_1, x_2, ..., x_p)$ um dos arranjos de p elementos, todos distintos, escolhidos de uma coleção de n elementos distintos. Existem então n maneiras de escolha do primeiro elemento x_1, existem $n-1$ maneiras para escolha do segundo elemento x_2, e assim sucessivamente, e existem $(n-(p+1))$ escolha do último elemento x_p. Logo, temos:

$$A_{n,p} = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-(p+1)),$$

multiplicando e dividindo por $(n-p)!$, temos:

$$A_{n,p} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-(p+1)) \times (n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Exemplo 1.6. *De um grupo de 20 pessoas deseja-se formar uma fila com 5 delas. Quantas filas distintas podemos formar?*

Resolucão: Observe primeiramente que o ordenamento das pessoas na fila é relevante, então pela definição anterior temos um problema de Arranjo, logo segue pelo resultado anterior que $A_{20,5} = \frac{20!}{(20-5)!} = 1.860.480.$
Portanto, podemos formar 1.860.480 filas distintas.

Problema das Combinações Simples

De quantos modos podemos selecionar p objetos distintos entre n objetos distintos dados? ou equivalentemente, existem quantos subconjuntos distintos com p elementos no conjunto

$\{a_1, a_2, ..., a_n\}$?
Para resolver o problema acima basta notar que selecionar p entre n objetos, equivale a dividir o conjunto em um grupo de p objetos, que são os selecionados, e um outro em grupo de $n-p$ objetos, que não são os selecionados. Neste problema, o que difere do Arranjo destes elementos é ordem, que é desconsiderada na Combinação Simples, temos a mais $p!$ objetos, pois os subconjuntos $\{a_1, a_2, ..., a_p\} = \{a_2, a_1, ..., a_p\}$, ou seja, a ordem dos elementos nos subconjuntos não importa, logo,

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}, 0 \leq p \leq n,$$

Segue que:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}, 0 \leq p \leq n,$$

Exemplo 1.7. *O Instituto Federal Goiano pretende formar uma comissão de 6 pessoas para organizar uma festa junina. Sabe-se que há 8 professores e 20 alunos que são candidatos a participar da comissão. Qual é o número de comissões distintas que podem ser formadas com pelo menos um professor?*

Resolucão: a resposta é :
As comissões de seis pessoas com pelo menos 1 professor podem ser compostas das seguintes maneiras:
1 professor e 5 alunos;
2 professores e 4 alunos;
3 professores e 3 alunos;
4 professores e 2 alunos;
5 professores e 1 aluno;
6 professores e 0 alunos.

OBS: note que a escolha de um professor no universo de oito professores e a escolha de 5 alunos no universo de vinte alunos são independentes, daí se aplica o **Princípio Multiplicativo da Contagem**. Por outro lado, as escolhas das comissões de 1 professor e 5 alunos ou 2 professores e 4 alunos são escolhas exclusivas, daí se aplica o **Princípio aditivo da Contagem**, os demais casos são análogos.
Portanto, o número de comissões de seis pessoas com pelo menos 1 professor é :

$$C_{8,1} \times C_{20,5} + C_{8,2} \times C_{20,4} + C_{8,3} \times C_{20,3} + C_{8,4} \times C_{20,2} + C_{8,5} \times C_{20,1} + C_{8,6} \times C_{20,0} = 337980.$$

1.4 Os Lemas de Kaplansky

O professor de Matemática, durante sua prática pedagógica, tem como grande desafio mostrar a Matemática no cotidiano do estudante. Seria importante propor uma investigação sobre jogos de loteria federal em turma de Ensino Médio.

Durante uma aula de Probabilidade, algumas indagações podem ser feitas pelos discentes; ex: Um aluno pode argumentar que, para ganhar na Mega Sena, não devemos jogar números consecutivos, ou seja, se, por exemplo, o número 11 for sorteado, dificilmente será sorteado o número 12, ou seja, seria muito difícil acontecer que uma sequência de seis números em que haja ao menos um par de números consecutivos seja sorteada. Outro aluno pode discorda da opinião do colega e dizer que o pai dele sempre joga três números consecutivos. Então, pode ser formulada a seguinte questão:

Dado que a Mega Sena apresenta um conjunto com 60 números, de quantas maneiras podemos formar subconjuntos, ou sequências, de seis elementos cada, de modo que ocorra nenhum par de elementos consecutivos?

Aproveitando o assunto o ideal seria pegar um caso mais particular por meio de um problema menor do que o da Mega Sena, como, por exemplo:
Dado $A = \{1,2,3,4,5\}$, de quantos modos é possível formar um subconjunto de dois elementos nos quais não haja números consecutivos? Os alunos facilmente listam os subconjuntos:
$\{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,5\}$.
No problema original da Mega Sena, temos um conjunto de 60 elementos e queremos encontrar o total de subconjuntos de seis elementos nos quais não haja números consecutivos. Descobrir o total procurado por meio da listagem de todos os casos é uma tarefa muito trabalhosa e, portanto, talvez devêssemos voltar ao caso simplificado com o objetivo de encontrar uma estratégia que possa ser generalizada e, posteriormente, aplicada à resolução do problema da Mega Sena.

Dessa forma, nossa estratégia será a de marcar com o sinal $(+)$ os elementos que farão parte do subconjunto e com o sinal $(-)$ os números que não estarão no subconjunto em questão. Podemos, assim, representar cada subconjunto de dois elementos como uma sequência de cinco símbolos: dois sinais de $+$ e três sinais de . Por exemplo, no problema simplificado, o conjunto $\{1,3\}$ será representado pela sequência $+-+--$, já que apenas o primeiro e o terceiro termos da sequência $(1,2,3,4,5)$ fazem parte do conjunto.

De forma análoga, o conjunto $\{1,4\}$ será representado pela sequência $+--+-$ porque apenas o primeiro e o quarto termos da sequência $(1,2,3,4,5)$ fazem parte do conjunto. Segue, portanto, que as representações serão: $\{1,3\} \to +-+--$
$\{1,4\} \to +--+-$
$\{1,5\} \to +---+$
$\{2,4\} \to -+-+-$
$\{2,5\} \to -+--+$
$\{3,5\} \to --+-+$

Note que representações como $++---$ ou $-++--$ não implicariam soluções do problema por indicarem subconjuntos de $\{1,2,3,4,5\}$ com números consecutivos; no caso, $\{1,2\}$ e $\{2,3\}$, respectivamente.

Observe que, para formar um subconjunto com dois elementos não consecutivos, devemos colocar 3 sinais $(-)$ e 2 sinais $(+)$ em fila, sem que haja 2 sinais $(+)$ consecutivos. Conseguimos isso colocando 3 sinais $(-)$ e deixando espaços entre eles. Como há 4 espaços disponíveis, chegamos a um total de 6 subconjuntos de 2 elementos não consecutivos, calculando $C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$.

Generalizando o raciocínio, queremos formar subconjuntos de p elementos não consecutivos partindo de um conjunto $\{1,2,3,...,n\}$ de n elementos, $n > p$. De maneira análoga ao problema simplificado, vamos representar os p elementos do subconjunto com o sinal $(+)$. Dessa forma, teremos $(n-p)$ elementos, que representaremos com o símbolo $(-)$, que serão os números que não estarão no subconjunto. Entre os sinais (-) vão existir $(n-p+1)$ espaços vazios disponíveis. Então, basta escolher, entre os $(n-p+1)$ espaços vazios, aqueles que serão ocupados pelos p sinais $(+)$. Daí, chegamos à demonstração do primeiro Lema de Kaplansky:

(Primeiro Lema de Kaplansky): O número de subconjuntos de p elementos do conjunto $\{1,2,3,...,n\}$ nos quais não há números consecutivos é:

$$C_{n,p} = \binom{n-p+1}{p}, n \geq p \geq 0.$$

Partindo agora para o problema da Mega Sena, queremos calcular o número de subconjuntos de 6 elementos, dentre os 60 elementos que podem ser sorteados, de forma que não haja números consecutivos. Temos, então, $n = 60$ e $p = 6$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\binom{60-6+1}{6} = \binom{55}{6} = \frac{55!}{6! \times (55-6)!} &= \frac{55!}{6! \times 49!} \\
&= \frac{54 \times 53 \times 52 \times 51 \times 50 \times 49!}{6! \times 49!} \\
&= \frac{54 \times 53 \times 52 \times 51 \times 50}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \\
&= 28.989.675.
\end{aligned}$$

Fica fácil verificar agora quantos subconjuntos terão pelo menos dois números consecutivos:

$$\begin{aligned}
\binom{60}{6} - \binom{60-6+1}{6} = \binom{60}{6} - \binom{55}{6} &= \frac{60!}{6! \times 54!} - \binom{55}{6} \\
&= \frac{60 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56 \times 55 \times 54!}{6! \times 54!} - \binom{55}{6} \\
&= \frac{60 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56 \times 55}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} - \binom{55}{6} \\
&= 50.063.860 - 28.989.675 = 21.074.185.
\end{aligned}$$

Reflexão: concluímos que existem mais sequências sem números consecutivos do que com eles, porém, isso não implica que as chances de sair uma determinada sequência sem números consecutivos é maior do que a de sair uma outra que tenha números consecutivos. Todas as sequências de seis números, dentre os 60 da Mega Sena, são igualmente prováveis. Em síntese, temos
$28.989.675 - 21.074.185 = 7.915.490$
possibilidades a mais de escolha de sequências sem números consecutivos do que de escolha de sequências com ao menos dois consecutivos, porém, cada uma das $28.989.675 + 21.074.185 = 50.063.860$ possibilidades de sorteio da Mega Sena são igualmente prováveis.
Uma proposta inicial de observação sobre a Mega Sena permitiu uma curiosa utilização de um precioso lema da Análise Combinatória, o primeiro lema de Kaplansky. Essa experiência mostra a importância da investigação matemática para que o aluno possa desenvolver seu aprendizado de forma autônoma e contextualizada, além de colocar o professor como mediador do processo

ao fazer as perguntas corretas e propor as devidas generalizações [3].

Capítulo 2

Fundamentação Teórica: Probabilidade

Probabilidade é uma palavra de origem latina derivada de probare (provar ou testar), surgida na Idade Média, a partir do interesse do homem em estudar os fenômenos que envolviam jogos de azar, sendo suas primeiras teorias desenvolvidas pelos matemáticos Luca Pacioli, Girolano Cardano, Galileu Galilei e Niccolo Tartaglia, que despertaram o interesse por esse estudo através da curiosidade em descobrir o próximo número em um lançamento de dado. Luca Pacioli (1500) solucionou o Problema dos pontos, para o qual foi feita uma divisão correspondente à probabilidade de vitória de cada jogador. Girolano Cardano (1526) foi o primeiro a introduzir técnicas de combinação no cálculo da probabilidade em eventos aleatórios, além de ser o autor da que é considerada como a primeira obra conhecida sobre o estudo de probabilidades, o livro De Ludo Aleae (Sobre Jogos de Azar). Galileu Galilei (1556), no livro Considerações sobre os jogos de dados, mostrou que, apesar de a probabilidade da soma no lançamento de 3 dados ser igual a 9 ou 10 serem equivalentes, o resultado 10 é mais comum quando comparado ao 9. Niccolo Tartaglia (1590) dedicou páginas do seu livro General Trattato aos problemas de Pacioli. (MORGADO, 1997). Segundo Boyer (1996), o estudo mais aprofundado da probabilidade em seus casos mais complexos foi explorado pelos matemáticos Blaise Pascal e Pierre de Fermat. O fascínio de Pascal pela probabilidade surgiu pela curiosidade de um filósofo interessado em jogos, chamado Chevalier de Maré, em saber como deveria ser indenizado um jogador que em oito lances de um dado deve lançar um, mas depois de três tentativas infrutíferas o jogo é interrompido. Com dúvidas, Chevalier de Maré pede ajuda a Pascal, que, junto ao matemático Pierre de Fermat, decide buscar respostas às perguntas indagadas pelo mesmo. Esse assunto era algo novo para os matemáticos da época, que passaram a buscar respostas para o acaso dos jogos, tornando-se os matemáticos responsáveis por começar a estabelecer formalizações da teoria da probabilidade e a desenvolvê-la mais fortemente como ciência.

No Brasil, as loterias seduzem milhões de pessoas a cada semana com a esperança de tornarem-se milionárias. Alguns se tornam tão obcecados com a possibilidade de ganhar, que tentam descobrir algum segredo estatístico a respeito da lógica dos números sorteados. Neste Trabalho, o intuito foi mostrar as probabilidades de acertos em diversos tipos de apostas no sorteios da Mega Sena, Quina, Loto Fácil, Lotomania, Lotogol, Dupla Sena, Timemania, Loteca e Loteria Federal.

Diremos que um experimento é determinístico quando repetido em condições semelhantes conduz a resultados essencialmente idênticos. Os experimentos que repetidos sob as mesmas condições produzem resultados geralmente diferentes serão chamados experimentos aleatórios. Exemplos de fenômenos aleatórios: Quais serão os números sorteados na Mega Sena? qual será a temperatura máxima no próximo domingo na cidade de Arraias?

A Teoria das Probabilidades é o ramo da Matemática que cria, desenvolve e em geral pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios.

2.1 Espaço Amostral e Probabilidade de Laplace

Chamaremos de espaço amostral o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Representaremos o espaço amostral por Ω e só vamos considerar o caso de Ω ser finito ou infinito e enumerável.

Definição 2.1. Um conjunto X diz-se enumerável quando é finito ou quando existe uma função bijetora $f : IN \to X$. Nesse último caso, X é também chamado de um conjunto infinito enumerável.

Exemplo 2.2. *O conjunto dos números inteiros é infinito enumerável, pois a função $f : IN \to Z$, definida como:*

$f(n) = \dfrac{n-1}{2}$, *n ímpar ;* $f(n) = \dfrac{-n}{2}$, *n par;*

é bijetora.

Os subconjuntos de Ω serão chamados de eventos.

A primeira definição de probabilidade foi dada por Laplace como a razão entre o número de casos favoráveis sobre o número de todos os casos possíveis, isto é:

$$probabilidade\ de\ A = P(A) = \frac{\text{número } de\ casos \text{ favoráveis}}{\text{número } de\ casos \text{ possíveis}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Definição 2.3. Uma probabilidade é uma função que associa a cada evento A um número $P(A)$ de forma que:
i) Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$.
ii) $P(\Omega) = 1$
iii) Se A e B são eventos mutuamente excludentes, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente ($A \cap B = \emptyset$) então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Teorema 2.4. *Se A e B são eventos, então:*
i) $P(A^c) = 1 - P(A)$.
ii) $P(\emptyset) = 0$.
iii) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.
iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
v) Se $A \supset B$ *então* $P(A) \geq P(B)$.

Demonstração: i) $1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$, Daí segue que $P(A^c) = 1 - P(A^c)$
ii) $P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$, pois Ω e $\emptyset$ são disjuntos. Segue então que $P(\emptyset) = 0$
iii) $P(A) = P[(A - B) \cup (A \cap B)] = P(A - B) + P(A \cap B)$, pois $A - B$ e $A \cap B$ são disjuntos. Segue então que $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.
iv) $P(A \cup B) = P[(A - B) \cup B)] = P(A - B) + P(B)$, pois $A - B$ e B são disjuntos. Como $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$. Segue que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
v) Como $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$, Se $A \supset B$ resulta $P(A - B) = P(A) - P(B)$. Como $P(A - B) \geq 0$, temos $P(A) \geq P(B)$. ∎

Exemplo 2.5. *Uma loteria tem N números e só um prêmio. Um jogador compra n bilhetes em uma extração. Outro compra só um bilhete em n extrações diferentes. (Ambos os jogadores apostam portanto a mesma importância). Qual deles tem maior probabilidade de ganhar o prêmio?*

Resolucão: Se todo o dinheiro é jogado numa única vez a probabilidade de ganhar é n/N. Para calcular a outra probabilidade procedemos da seguinte maneira. Vamos calcular primeiro a probabilidade de não ganhar. O número de casos possivéis é igual a N^n. Os casos favoráveis (neste caso não ganhar) são $(N-1)^n$. Portanto a probabilidade de não ganhar é igual a

$$\frac{(N-1)^n}{(N)^n} = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n = \left(1-\frac{1}{N}\right)^n$$

e a de ganhar

$$1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n.$$

Temos que comparar n/N com $\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$. Afirmamos que

$$\frac{n}{N} \geq 1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$$

ou equivalentemente,

$$1-\frac{n}{N} \leq \left(1-\frac{1}{N}\right)^n.$$

A demontração da desigualdade pode ser encontrada em [2]; É interessante observar a conclusão deste resultado: jogar tudo de uma só vez é melhor do que ir jogando aos poucos. Em outras palavras, o jogo "frio"é melhor (porém, em geral, parece provocar menos "satisfação", porque joga-se menos vezes). Esta conclusão é válida em geral para quase todos os jogos de azar.

2.2 Modelo Binomial

Muitas aplicações de Probabilidade podem ser reduzidas a um modelo em que um experimento é repetido várias vezes, cada uma independentemente da outra, e com apenas dois resultados possíveis para cada experimento. Quando um experimento tem apenas dois resultados possíveis e a probabilidade de cada resultado permanece constante ao longo das suas repetições independentes, ele é chamado de experimento binomial, ou experimento de Bernoulli [1].

O modelo tradicional para um tal experimento é o de uma moeda sendo lançada, com os possíveis resultados sendo "cara"ou "coroa". Para cada repetição do experimento (lançar a mo-

[1]Jakob Bernoulli, ou Jacob, ou Jacques, ou Jacob I Bernoulli (Basileia, 27 de dezembro de 1654 Basileia, 16 de agosto de 1705), foi o primeiro matemático a desenvolver o cálculo infinitesimal para além do que fora feito por Newton e Leibniz, aplicando-o a novos problemas

eda), os resultados possíveis são sempre dois, cara ou coroa, com probabilidades independentes dos resultados obtidos em experimentos anteriores.

As propriedades de um experimento binomial são resumidas a seguir:
1. Deve haver um número definido de repetições.
2. O resultado de cada repetição deve ser um entre dois possíveis eventos.
3. As probabilidades de cada uma das duas possibilidades devem permanecer constantes ao longo das repetições.
4. Cada repetição deve ser independente das outras.

Em geral, como apenas dois resultados são possíveis, denota-se a probabilidade de um evento por p e a do outro por q=1-p.
Como exemplos, temos: a transmissão de uma doença genética, uma gravidez resultar em menina ou menino, um paciente morrer ou não dentro de um ano, um paciente ter teste positivo ou não etc.
Consideremos agora um experimento com apenas dois resultados possíveis, que chamaremos de sucesso e fracasso.

Exemplo 2.6. *Qual a probabilidade de obtermos k sucessos nesses n repetições?*

A probabilidade de, nessas condições, obtermos k sucessos em n repetições e, em consequência, $n-k$ fracassos em ordem pré-determinada, por exemplo, os sucessos na k primeiras repetições e os fracassos nas demais:

$$ppp...p(1-p)(1-p)...(1-p) = p^k(1-p)^{n-k}$$

com k fatores p e $n-k$ fatores $1-p$. Daí segue que como as provas são independentes, todas as permutações são equivalentes a menos da ordenação. Isto demonstra o teorema a seguir:

Teorema 2.7. ***Binomial:*** *A probabilidade de ocorrerem exatamente k sucessos em uma sequência de n provas independentes, na qual a probabilidade de sucesso em cada prova é p, é igual a:*

$$\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$$

Exemplo 2.8. *Um jogador da cidade de Campos Belos-GO marca uma cartela de* 15 *números, apostando na Mega Sena em cada concurso a partir do primeiro sorteio de 2017. São realizados* 2 *concursos por semana, totalizando em torno de* 104 *concursos no ano. Suponhamos que esse jogador faça isso durante dez anos seguidos e considere que o valor da cartela durante esse período de tempo não sofra reajuste. Em* 10 *anos serão* $n = 104 \times 10 = 1040$ *concursos. Em* *cada concurso, a pessoa tem chance*

$$\frac{C_{60,15}}{C_{60,6}} = ... = \frac{1}{1003} \approx 0,00099701 = 0,099701\%$$

de fazer a sena (acertando seis números dentre os 15 marcados). Em 10 anos, a pessoa gastará $(R\$17.517,50) \times 1.040 = R\$18.218.200,00$ *(note que atualmente um bilhete da aposta da Mega Sena de 6 dezenas custa* $R\$3,50$*, já um bilhete na Mega Sena de 15 dezenas custa R\$17.517,50, pois um bilhete de 15 dezenas formam* $C_{15,6} = 5005$ *maneiras distintas de escolher quinze dezenas, tomados seis a seis, por outro lado, multiplicando este valor* $5005 \times R\$3,50 = R\$17.517,50$*). E a chance de, nesse período, ele ganhar nenhuma vez na sena é:*

Resolucão:

$$P(10) = \binom{1040}{0} \times (0,00099701)^0 \times (1 - 0,00099701)^{1.040}$$

$$P = (0,99900299)^{1.040} \approx 0,35$$

ou $35,1\%$.

Portanto, a probabilidade de ganhar nenhuma vez na Mega Sena em 10 anos é aproximadamente 35%.

Note que a probabilidade de um ganhador continuar jogando "ficar pobre "é muito maior do que ele ganhar na Mega Sena!

Capítulo 3

Aplicações de Análise Combinatória e Probabilidade nas principais Loterias Federais do Brasil

3.1 Introdução

Os jogos lotéricos contemporâneos, constituem-se no resultado histórico das diversas formas dos chamados jogos de azar (jogos de cartas, dados, ou mesmo sorteios, dentre outros), onde uma ou mais apostas são feitas, tendo como o universo de possibilidades, resultados numéricos ou não. A modalidade mais popular de jogos de azar no Brasil é a de resultados numéricos de sorteios, hoje congregados pelas Loterias da Caixa Econômica Federal. Dentre os diversos jogos oferecidos atualmente pelas Loterias Caixa destacam-se as modalidades de apostas conhecidas como Mega-Sena (onde escolhem-se, de seis até quinze números dentre sessenta para formar uma aposta) e a Quina (onde escolhemse, cinco, seis ou sete números dentre oitenta para formar uma aposta). Por serem modalidades de jogos de alcance nacional, com bom retorno ao investidor vencedor, com facilidade de compreensão e aceitação dos apostadores; têm sido jogos como estes os grandes exemplos de loterias praticadas no Brasil. Tendo isto em mente, o presente trabalho fará um panorama histórico e apresentará uma modelagem da Mega-Sena e da Quina através de tratamento matemático.

3.2 Motivação: PRÊMIO DA MEGA SENA NA CIDADE DE CAMPOS BELOS-GO

O Prêmio total da Mega Sena de R$ 197 milhões foi dividido entre um apostador de Santos (SP) e uma aposta feita na única lotérica de Campos Belos, pequena cidade goiana na divisa com o estado do Tocantins e distante 625 km de Goiânia. Cada aposta recebeu um prêmio de R$ 98.688.974,76 pelo sorteio do concurso 1.772 da Mega Sena em 22 de dezembro de 2015. O valor é 460 vezes maior que o Produto Interno Bruto (PIB) do município goiano de 19.200 habitantes, com PIB de R$ 212.800,00 naquele ano. O bilhete premiado saiu para um grupo de 12 pessoas que fez um "bolão"de oito números. O grupo, segundo a dona da lotérica de Campos Belos, que não quis se identificar, fazia "bolões"com frequência.
A proprietária brinca ainda que a lotérica dá sorte aos apostadores. "Há dois anos saiu um prêmio aqui de R$ 799 mil. Agora esse prêmio, no final do ano vai ser a Mega Sena da Virada, brinca."
Segundo informações da Assessoria de Imprensa da Caixa Econômica Federal em Goiás, até o início da tarde daquela quarta-feira (23), o prêmio do bilhete ainda não havia sido retirado.
Outras 244 apostas acertaram cinco dezenas e receberam, cada uma, R$ 21.377,77. Além disso, 13.112 apostas acertaram a quadra. Cada bilhete vai receber R$ 568,30.

3.3 MEGA SENA

Lançada em 4 de março de 1996, a Mega Sena substituiu a SENA e oferece maior atratividade na premiação, decorrente de acumulações. Seu primeiro sorteio foi realizado no dia 11 de março daquele ano. Hoje é o "carro-chefe "das Loterias Federais, a preferência do público apostador.

Dinâmica do Jogo

Na Mega Sena o apostador ganha se acertar 6 números (a Sena), 5 números (a Quina) ou 4 números (a Quadra) dentre os 6 números sorteados no universo de 60 números disponíveis no volante de apostas, variando de 1 a 60. o apostador pode marcar entre 6 e 15 números do volante, podendo deixar que o sistema escolha os números (Surpresinha) e/ou concorrer com a mesma aposta por 2,4 ou 8 concursos consecutivos (Teimosinha).

Premiação da Mega Sena

O prêmio bruto corresponde a $45,3\%$ da arrecadação. Dessa porcentagem:
35% são distribuídos entre os acertadores dos 6 números sorteados (Sena), note que este valor pago pela CEF ao prêmio da sena, corresponde aproximadamente 15,8% do total de arrecadação;
19% entre os acertadores de 5 números (Quina), o prêmio da quina na Mega Sena corresponde aproximadamente 8,6% da arrecadação total;
19% entre os acertadores de 4 números (Quadra), o prêmio da quadra na Mega Sena corresponde aproximadamente 1,6% da arrecadação total;
22% ficam acumulados e são distribuídos aos acertadores dos 6 números nos concursos de final 0 ou 5 e esse valor corresponde 9,9$ proximadamente da arrecadação total da Mega Sena
5% ficam acumulados para a primeira faixa - sena - do último concurso do ano de final 0 ou 5 (Mega da Virada) e equivale 2,2% aproximadamente da arrecadação total na Mega Sena neste sorteio de final 0 ou 5.

Tabela 3.1: Preços e Probabilidades da Mega Sena

Quantidade de nº jogados	**Valor de aposta**	**Probabilidade de acerto (1 em)**		
		Sena	**Quina**	**Quadra**
6	3,50	50.063.860	154.518	2.332
7	24,50	7.151.980	44.981	1.038
8	98,00	1.787.995	17.192	539
9	294	595.998	7.791	312
10	735	238.399	3.973	195
11	1.617,00	108.363	2.211	129
12	3.234,00	54.182	1.317	90
13	6.006,00	29.175	828	65
14	10.510,50	16.671	544	48
15	17.517,50	10.003	370	37

Cálculo para o valor do bilhete da Mega Sena

Observando os valores da tabela acima, conclui-se que o preço das apostas é calculado a partir do total de agrupamentos de seis dezenas que um apostador estaria fazendo com as dezenas apostadas. Por exemplo, se um apostador escolhe as dezenas $04-15-25-31-38-40-59$, ele irá pagar $24,50$ porque é cobrado $3,50$ por agrupamento seis a seis das sete dezenas apostadas. Qualquer uma das combinações indicadas ao lado dará o prêmio da sena a este apostador, desde que as seis dezenas sorteadas estejam entre as setes dezenas escolhidas por ele.
$04-15-25-31-38-40$

04 – 15 – 25 – 31 – 38 – 59
04 – 15 – 25 – 31 – 40 – 59
04 – 15 – 25 – 38 – 40 – 59
04 – 15 – 31 – 38 – 40 – 59
04 – 25 – 31 – 38 – 40 – 59
15 – 25 – 31 – 38 – 40 – 59

Generalizando, para n dezenas apostadas, o total de agrupamentos seis a seis, numa situação onde as trocas de ordem não devem ser contadas, é dado por :

$$C_{n,6} = \binom{n}{6} = \frac{n!}{6!(n-6)!}$$

Observe que o apostador irá pagar por uma aposta de oito dezenas o valor $28 \times 3,50 = 98,00$

$$C_{8,6} = \binom{8}{6} = \frac{8!}{6!(2)!} = 28;$$

Cálculo Probabilístico para Mega Sena

Outra informação contida no verso do volante diz respeito às chances que o apostador tem de acertar a sena, a quina ou a quadra com uma aposta simples de seis números:
Definimos P(Sena), P(Quina) ou P(Quadra), respectivamente a probabilidade de acertar 6 dezenas, 5 dezenas ou 4 dezenas num universo de 60 dezenas, então:

$$P(Sena) = \frac{C_{6,6}}{C_{60,6}} = \frac{1}{50.063.860}$$

O número de chances de ser premiado com a sena é uma para 50.063.860.
Quina é 1 para 154.518.

$$P(Quina) = \frac{C_{6,5} \times C_{54,1}}{C_{60,6}} = \frac{1}{154.518}$$

O número de chances de ser premiado com a quina é uma para 154.518.

$$P(Quadra) = \frac{C_{6,4} \times C_{54,2}}{C_{60,6}} = \frac{1}{2.332}$$

O número de chances de ser premiado com a quadra é uma para 2.332.

Tabela 3.2: Quantidade de prêmios a receber acertando

Apostas	**6 números**			**5 números**		**4 números**
Quantidade de nº jogados	Sena	Quina	Quadra	Quina	Quadra	Quadra
6	1	0	0	1	0	1
7	1	6	0	2	5	3
8	1	12	15	3	15	6
9	1	18	45	4	30	10
10	1	24	90	5	50	15
11	1	30	150	6	75	21
12	1	36	225	7	105	28
13	1	42	315	8	140	36
14	1	48	420	9	180	45
15	1	54	540	10	225	55

Observando a tabela acima que foi retirada do site da CEF, nota-se que os prêmios são pagos de acordo com o número de dezenas jogadas, utilizaremos a matemática para mostra como é feito os cálculos, conforme o exemplo abaixo:

Exemplo 3.1. *Os ganhadores da Mega Sena da cidade de Campos Belos-GO, foram premiados por ter acertado as seis dezenas sorteadas em bilhete de 8 dezenas, num "Bolão"de 12 cotas. Descreva matematicamente como se calcula os valores encontrados para os prêmios da mega sena no que tange a sena, quina e quadra respectivamente, para um bilhete de 8 números jogados que contém as 6 dezenas sorteadas também acerta 12 quinas e 15 quadras, conforme a tabela acima.*

Para se acerta a quina descarte 1 dezena das seis dezenas sorteadas. Como qualquer uma das 6 dezenas pode ser a dezena descartada e a ordem das dezenas sorteadas é irrelevante, então existe combinação de $C_{6,5}$ maneiras distintas de escolha para a dezena descartadas. A dezena descartada precisa ser substituida por uma outra entre as 2 dezenas que não foram sorteadas, e maneira de fazer isto, é a Combinação $C_{2,1}$. Portanto, as duas combinações acima são independentes, segue pelo **Princípio Fundamental da Contagem** que o número de quinas é $C_{6,5} \times C_{2,1} = 6 \times 2 = 12$.
Por outro lado, para se acerta a quadra descarte 2 dezenas das seis dezenas sorteadas. Como quaisquer duas das 6 dezenas pode serem as desenas descartadas e a ordem das dezenas sorteadas é irrelevante, então existem combinação de $C_{6,4}$ maneiras distintas de escolhas para as duas

dezenas descartadas. Nas duas dezenas descartadas precisam serem substituidas entre as 2 dezenas que não foram sorteadas, e maneira de fazer isto, é a Combinação $C_{2,2}$. Portanto, as duas combimações acima são independentes, segue pelo **Princípio Fundamental da Contagem** que o número de quinas é $C_{6,4} \times C_{2,2} = 15 \times 1 = 15$.

3.4 QUINA

O primeiro sorteio da Quina foi realizado em 13 de março de 1994. O novo produto veio substituir a Loto, oferecendo maior probabilidade de acerto com a alteração da quantidade de dezenas do volante, que era 100 na Loto e passou a ser para 80 na Quina. A princípio, eram realizados dois sorteios por semana; a partir de 30 de março de 1998, passaram a ser três sorteios semanais, o que proporcionou significativo acréscimo de arrecadação.

Dinâmica do Jogo

Na Quina o apostador pode marcar de 5 a 15 números dentre os 80 disponíveis no volante. Caso o apostador prefira, o sistema pode escolher os números através da Surpresinha. Ganham prêmios os acertadores de 2 números (duque), 3 números (terno), 4 números (quadra) ou 5 números (quina). O apostador ainda pode concorrer com a mesma aposta por 3, 6, 12, 18 ou 24 concursos consecutivos com a Teimosinha.

Premiação

O prêmio bruto corresponde a $45,3\%$ da arrecadação, Deste valor:

35% são distribuídos entre os acertadores dos 5 números, note que este valor pago pela CEF ao prêmio da quina, corresponde aproximadamente 15,8% do total de arrecadação;

19% entre os acertadores de 4 números, o prêmio da quadra na Quina corresponde aproximadamente 8,6% da arrecadação total;

20% entre os acertadores de 3 números, o prêmio do terno na Quina corresponde aproximadamente 8,6% da arrecadação total;

11% entre os acertadores de 2 números, o prêmio do duque na Quina corresponde aproximadamente 4,9% da arrecadação total;

15% acumulam para os acertadores dos 5 números da Quina de São João. o prêmio da quina na na Quina de são João corresponde aproximadamente 6,7% da arrecadação total;

Tabela 3.3: Quantidade de prêmios a receber acertando

Quantidade de nº jogados	**Valor de aposta**	**Probabilidade de acerto (1 em...)**			
		Quina	**Quadra**	**Terno**	**Duque**
5	1,5	24.040.016	64.106	866	36
6	9	4.006.669	21.658	445	25
7	31,5	1.144.763	9.409	261	18
8	84	429.286	4.770	168	14
9	189	190.794	2.687	115	12
10	378	95.396	1.635	82	9
11	693	52.035	1.056	62	8
12	1.188,00	30.354	714	48	7
13	1.930,50	18.679	502	38	6
14	3.003,00	12.008	364	31	5,8
15	4.504,50	8.005	271	25	5,2

Cálculo Probabilístico de acertos da Quina

A mudança no cálculo da cobrança nada tem a ver com o cálculo da probabilidade de acerto da quina, quadra ou terno. A tabela apresentada no volante, com o valor das probabilidades de acerto, é reproduzida abaixo: Definimos P(Quina), P(Quadra) ou P(Terno), respectivamente a probabilidade de acertar 5 dezenas, 4 dezenas ou 3 dezenas num universo de 80 dezenas, então:

$$P(Quina) = \frac{C_{5,5}}{C_{80,5}} = \frac{1}{24.040.016}$$

O número de chances de ser premiado com a quina é uma para 24.040.016.

$$P(Quadra) = \frac{C_{5,4} \times C_{75,1}}{C_{80,5}} = \frac{1}{64.106}$$

O número de chances de ser premiado com a quadra é uma para 64.106.

$$P(Terno) = \frac{C_{5,3} \times C_{75,2}}{C_{80,5}} = \frac{1}{866}$$

O número de chances de ser premiado com a terno é uma para para 866.

A conclusão óbvia é que seria mais vantajoso apostar na Quina do que na Mega Sena. O que leva o apostador a preferir a Mega Sena é, sem dúvida, a possibilidade de sonhar com as grandes quantias oferecidas como prêmio.

Quantidade de prêmios a receber acertando

Tabela 3.4: Tabela da Quina

Apts	**5 Números**				**4 Números**		
Ns	**1º Faixa**	**2º Faixa**	**3º Faixa**	**4º Faixa**	**2º Faixa**	**3º Faixa**	**4º Faixa**
jgs	**Quina**	**Quadra**	**Terno**	**Duque**	**Quadra**	**Terno**	**Duque**
5	1	0	0	0	1	0	0
6	1	5	0	0	2	4	0
7	1	10	10	0	3	12	6
8	1	15	30	10	4	24	24
9	1	20	60	40	5	40	60
10	1	25	100	100	6	60	120
11	1	30	150	200	7	84	210
12	1	35	210	350	8	112	336
13	1	40	280	560	9	144	504
14	1	45	360	840	10	180	720
15	1	50	450	1200	11	220	990

DICAS PARA GANHAR NA QUINA

1) Apostas com mais números no mesmo volante te darão maiores chances de vitória. Então ao invés de investir seu dinheiro em várias apostas simples (5 números), prefira a opção de apostar com mais números.

2)Para evitar vícios de aposta, causados pela posição dos números no bilhete da Quina,divida a cartela em quatro quadrantes e escolha números de cada quadrante e não só de um ou dois.

3.5 LOTO FÁCIL

Dinâmica do jogo

Na Loto Fácil você marca entre 15 a 18 números, dentre os 25 disponíveis no volante, e fatura o prêmio se acertar 11, 12, 13, 14 ou 15 números. Pode ainda deixar que o sistema escolha os números para você por meio da Surpresinha, ou concorrer com a mesma aposta por 3, 6, 9 ou 12 concursos consecutivos através da Teimosinha.

Premiação

O prêmio bruto corresponde a $45,3\%$ da arrecadação, já computado o adicional destinado ao Ministério do Esporte. Dessa porcentagem, será deduzido o pagamento dos prêmios com valores fixos:
- $R\$4,00$ para as apostas com 11 prognósticos certos entre os 15 sorteados;
- $R\$8,00$ para as apostas com 12 prognósticos certos entre os 15 sorteados;
- $R\$20,00$ para as apostas com 13 prognósticos certos entre os 15 sorteados.

Após a apuração dos ganhadores dos prêmios com valores fixos, o valor restante do total destinado à premiação será distribuído para as demais faixas de prêmios nos seguintes percentuais:
- 65% entre os acertadores de 15 números;
- 20% entre os acertadores de 14 números entre os 15 sorteados.
- 15% ficam acumulados para a primeira faixa (15 acertos) do concurso especial realizado em setembro de cada ano.

Tabela 3.5: Probabilidades da Loto Fácil

Prêmiação	**Apostas simples 15 números (1 aposta) Prob. (1 em):**	**16 números (16 apostas) Prob. (1 em):**	**17 números (136 apostas) Prob. (1 em):**	**18 números (816 apostas) Prob. (1 em):**
15	3.268.760	204.297	24.035	4.005
14	21.791	3.026	600	152
13	691	162	49	18
12	59	21	9,4	5
11	11	5,9	3,7	2,9
PREÇO A PAGAR	1 X R$ 2,00 = R$ 2,00	16 X R$ 2,00 = R$ 32,00	136 X R$ 2,00 = R$ 272,00	836 X R$2,00 = R$ 1.632,00

Cálculos Probabilísticos da Loto Fácil

Como 15 dezenas, cuja ordem não é importante, podem ser selecionados entre um total de 25 dezenas?

$$C_{25,15} = \frac{25!}{15!10!} = 3.268.760$$

Cuja inversa vai dar a probabilidade de acertar os 15 dezenas:

$P(15) = \frac{1}{3.268.760}$ (ou seja, 1 evento em 3.268.760)

Para obtermos a probabilidade de acerto de 14 dezenas em 15, tem-se que considerar que cada dezena apostada que não foi sorteada tem sua escolha independente da escolha feita de $C_{15,14}$, e que a tal dezena pode ser escolhida de $C_{10,1}$ maneiras, dentre as dezenas não sorteadas. O espaço amostral é evidentemente, $C_{25,15}$ ou seja,

$P(14) = \frac{C_{10,1} \times C_{15,14}}{C_{25,15}} = \frac{10 \times 15}{3.268.760} \approx \frac{1}{21.791}$.

Com o mesmo raciocínio acima, para obtermos a probabilidade de acertos da x dezenas deve-se considerar no mesmo espaço amostral de $C_{25,15}$ maneiras de selecionar 15 dezenas dentre 25, que as x dezenas podem ser selecionadas, independentemente da ordem das escolhas, também à revelia dos acertos de $C_{10,(15-x)}$ maneiras. Desta forma, se $P(x)$ denota a probabilidade de acerto de x dezenas dentre 15 apostadas,
segue então a fórmula para Lotofácil no caso Geral:

$$P(x) = \frac{C_{10,(15-x)} \times C_{15,x}}{C_{25,15}}, 5 \leq x \leq 15,$$

aonde $P(x)$ é a probabilidade de se acertar x dezenas.
uma vez que 25(total de possibilidades de escolha) - 15(máximo de acertos)= 10, seguem que existem, no máximo, a possibilidade de errar 10 dezenas, ou, equivaletemente sempre se acertar no máximo 5 dezenas.

Tabela de Preços da Loto fácil

Tabela 3.6: Tabela Lotofácil

Quantidade de números	**Valor em R$**
15 números	2
16 números	32
17 números	272
18 números	1.632,00

3.6 LOTOMANIA

Dinâmica do Jogo

Na Lotomania basta escolher 50 números dentre os 100 disponíveis no volante e então concorrer a prêmios para acertos de 20, 19, 18, 17, 16, 15 ou nenhum número. Além da opção de marcar no volante, você ainda pode marcar menos que 50 números e deixar que o sistema complete o jogo para você; não marcar nada e deixar que o sistema escolha todos os números na Surpresinha e/ou concorrer com a mesma aposta por 2, 4 ou 8 concursos consecutivos com a Teimosinha. Outra opção é efetuar uma nova aposta com o sistema selecionando os outros 50 números não registrados no jogo original, através da Aposta-Espelho.

Premiação

O prêmio bruto corresponde a $45,3\%$ da arrecadação, já computado o adicional destinado ao Ministério do Esporte. Dessa porcentagem são distribuídos:
- 45% entre os acertadores dos 20 números sorteados - 1ª faixa;
- 16% entre os acertadores de 19 dos 20 números sorteados - 2ª faixa;
- 10% entre os acertadores de 18 dos 20 números sorteados - 3ª faixa;
- 7% entre os acertadores de 17 dos 20 números sorteados - 4ª faixa;
- 7% entre os acertadores de 16 dos 20 números sorteados - 5ª faixa;
- 7% entre os acertadores de 15 dos 20 números sorteados - 6ª faixa;
- 8% entre os acertadores de nenhum dos 20 números sorteados - 7ª faixa;

Tabela de Probabilidades de Ganhar na Lotomania

Tabela 3.7: Tabela Lotomania

Faixas	**Probabilidade**
20 números	1/11.372.635
19 números	1/352.551
18 números	1/24.235
17 números	1/2.776
16 números	1/472
15 números	1/112
00 números	1/11.372.635

Cálculo Probabílistico da Lotomania

O número de maneiras para escolha de 50 dezenas num volante da Lotomania é dado por:

$C_{100,50} = \dfrac{100!}{50!50!}$

A probabilidade de acertos dos 20 números sorteados é:

$P(20) = \dfrac{C_{50,20}}{C_{100,20}} = 11.372.635$ (ou seja, 1 evento em 11.372.635)

O acerto de 19 números dentre os 20 números sorteados possui probabilidade determinada como nas probabilidades de acertos nas Loto Fácil, 19 dezenas estão entre as 50 apostadas, o que ocorre de $C_{50,19}$ modos e a dezena não sorteada é uma entre as 50 dezenas restantes, escolhidas indenpendetemente das primeiras 19 dezenas; Logo,

$P(19) = \dfrac{C_{50,1} \times C_{50,19}}{C_{100,20}} = \dfrac{10 \times 15}{3.268.760} \approx \dfrac{1}{21.791}$

Como na Lotomania, a probabilidade de acertar x dezenas,aonde $P(x)$ é a probabilidade de se acertar x dezenas, é dada por:

$$P(x) = \frac{C_{50,(20-x)} \times C_{50,x}}{C_{100,20}}$$

Diferentemente do que ocorre com a Loto Fácil, na Lotomania o domínio é $x \geq 0$.

Uma aposta de São Paulo (SP) acertou as 20 dezenas da Lotomania de Páscoa sorteada no dia 26 de março do ano de 2016 na cidade de Canela, no Rio Grande do Sul.Veja as dezenas sorteadas:
04 - 06 - 21 - 27 - 29 - 30 - 41 - 46 - 56 - 58 - 61 - 65 - 66 - 76 - 81 - 82 - 83 - 87 - 89 - 98.
Segundo a Caixa, a aposta vencedora que acertou as 20 dezenas levará R$ 35.480.875,28.
Também houve 5 apostas que não acertaram nenhuma dezena e também levam prêmio, eles tiveram sorte em não acertar nenhuma dezena, mais também tiveram azar em não fazer a aposta espelho, pois se todos tivesse feito a aposta espelho eles teria que dividir o prêmio de R$ 35.480.875,28 com a aposta vencendora.

3.7 LOTOGOL

Dinâmica do Jogo

Na Lotogol você marcar no volante o número de gols de cada time de futebol participante dos 5 jogos do concurso. Você pode assinalar 0, 1, 2, 3 ou mais gols (opção está representada pelo sinal $+$). Os clubes participantes estão impressos nos bilhetes emitidos pelo terminal.

Tabela de Probabilidades de Ganhar na Lotogol

Tabela 3.8: Probabilidades da Lotogol

Faixas	**Quantidade de placares acertados**	**Probabilidade de acerto**
1	5	9.765.625
2	4	81.380
3	3	1.695

Cálculo Probabilístico da Lotogol

Qual o cálculo da probabilidade de acerto de 5 escores da Lotogol?

Probabilidade de acertar na Logol nas 5 partidas é:

$1/(5^2) \times 1/(5^2) \times 1/(5^2) \times 1/(5^2) \times 1/(5^2) = 1/5^{10} = 1/9.765.625$

Qual o cálculo da probabilidade de acerto de 4 escores da Lotogol?

Probabilidade de errar apenas os gols do primeiro time em 1 partida:

$4/5 \times 1/5 \times (1/5)^8 = 4/5^{10}$

Comos são $A_{5,1} = 5$ pares , a probabilidade é $5 \times 4/5^{10} = 20/5^{10}$

Probabilidade de errar apenas os gols dos segundo time em 1 partida:

$4/5 \times 1/5 \times (1/5)^8 = 4/5^{10}$

Comos são $A_{5,1} = 5$ pares , a probabilidade é $5 \times 4/5^{10} = 20/5^{10}$

Probabilidade de errar apenas os gols dos dois times em 1 partida:

$4/5 \times 4/5 \times \times (1/5)^8 = 16/5^{10}$

Comos são $A_{5,1} = 5$ pares , a probabilidade é $5 \times 16/5^{10} = 80/5^{10}$

Total=$20/5^{10}+20/5^{10}+80/5^{10}$

$=(40+80)/9765625=120/9765625\approx 1/81.380$

Qual o cálculo da probabilidade de acerto de 3 escores da Lotogol?

Posso errar totalmente os números de gols de uma partida ou parcialmente, exemplo:

Botafogo 3 $\times$ São Paulo 2 $\Rightarrow$(este foi o resultado do jogo) Mas se coloquei:
$2\times 2\Rightarrow$ errei
$4\times 2\Rightarrow$ errei
$5\times 5\Rightarrow$ errei

Posso errar de três formas diferentes em 2 jogos:

Probabilidade de errar apenas os gols dos primeiros times em 2 pares ou 2 partidas:

$4/5\times 1/5\times 4/5\times 1/5\times (1/5)^6=16/5^{10}$

Comos são $A_{5,2}=20$ pares , a probabilidade é $20\times 16/5^{10}=320/5^{10}$

Probabilidade de errar apenas os gols dos segundos times em 2 pares ou 2 partidas:

$1/5\times 4/5\times 1/5\times 4/5\times (1/5)^6=16/5^{10}$

Comos são $A_{5,2}=20$ pares , a probabilidade é $20\times 16/5^{10}=320/5^{10}$

Probabilidade de errar apenas os gols dos dois times em 2 pares ou 2 partidas:

$4/5\times 4/5\times 4/5\times 4/5\times (1/5)^6=4^4/5^{10}$

Comos são $A_{5,2}=20$ pares , a probabilidade é $20\times 16/5^{10}=20\times (4)^4/5^{10}$

Total=$320/5^{10}+320/5^{10}+5120/5^{10}$

$=(640+5120)/9765625=5760/9765625\approx 1/1695$

3.8 DUPLA SENA

HISTÓRICO

Derivada da SENA ESPECIAL, modalidade de loteria $6/50$, com concursos esporádicos nos anos 1993/1994, com premiação para 6 e 5 acertos. Em 03 de abril de 1995, iniciou-se a comercialização dessa modalidade de loteria (6/48) sob o nome de SUPERSENA, com dois sorteios semanais, dos quais o primeiro se realizou em 10 de abril de 1995.

Em 11 de setembro de 1997, foi alterada para SUPERSENA - Dupla Chance, com dois sorteios no mesmo concurso; no primeiro sorteio, premiava a sena (6 números) e no segundo, a maior quantidade de números acertados (6, 5, 4...).

Em 29 outubro de 2001, a SUPERSENA Dupla Chance foi alterada para a modalidade 6/50, sob o nome de DUPLA SENA, com premiação da sena no primeiro sorteio e premiação da sena, quina e quadra no segundo.

Dinâmica do Jogo

Com apenas um bilhete da Dupla Sena, você tem o dobro de chances de ganhar: são dois sorteios por concurso e ganha acertando 3, 4, 5 ou 6 números no primeiro e/ou segundo sorteios. Basta escolher de 6 a 15 números dentre os 50 disponíveis e torcer. Você pode deixar, ainda, que o sistema escolha os números para você (Surpresinha) e/ou concorrer com a mesma aposta por 2, 4 ou 8 concursos consecutivos (Teimosinha).

PREMIAÇÃO

O prêmio bruto corresponde a 45,3% da arrecadação, já computado o adicional destinado ao Ministério do Esporte. Desse valor, são distribuídos, para o primeiro sorteio:

30% entre os acertadores de 6 números,

10% entre os acertadores de 5 números,

8% entre os acertadores de 4 números,

4%4 entre os acertadores de 3 números;

E para o segundo sorteio:

11% são atribuídos entre os acertadores de 6 números,

9% entre os acertadores de 5 números,

8% entre os acertadores de 4 números e

4% entre os acertadores de 3 números;

16% ficam acumulados para a 1ª faixa do 1º sorteio (seis acertos) do próximo concurso especial de Páscoa.

Não havendo ganhador em qualquer faixa de premiação, os valores acumulam para o concurso seguinte, na faixa de 6 acertos do primeiro sorteio.

Tabela de Probabilidade e Preços da Dupla Sena

Tabela 3.9: Tabela da Dupla Sena

Quantidade de nº jogados	**Valor de aposta**	**Probalidade de acerto (1 em)**			
		Sena	**Quina**	**Quadra**	**Terno**
6	R$2,00	15.890.700	60.192	1.120	60
7	R$14,00	2.270.100	17.597	502	37
8	R$56,00	567.525	6.756	263	25
9	R$168,00	189.175	3.076	153	18
10	R$420,00	75.670	1.576	97	13
11	R$924,00	34.395	881	64	11
12	R$1.848,00	17.197	528	45	9
13	R$3.432,00	9.260	333	33	7
14	R$6.006,00	5.291	220	25	6
15	R$10.010,00	3.174	151	19	5

Cálculo Probabilísticos da Dupla Sena

Sena é 1 para 15.890.700

$$P(Sena) = \frac{C_{6,6}}{C_{50,6}} = \frac{1}{15.890.700}$$

Quina é 1 para 60.192

$$P(Quina) = \frac{C_{6,5} \cdot C_{45,1}}{C_{50,5}} = \frac{1}{60.192}$$

Quadra é 1 para 1120

$$P(Quadra) = \frac{C_{6,4} \cdot C_{45,2}}{C_{50,4}} = \frac{1}{1120}$$

Terno é 1 para 60

$$P(terno) = \frac{C_{6,3} \cdot C_{45,3}}{C_{50,3}} = \frac{1}{60}$$

3.9 TIMEMANIA

Dinâmica do Jogo

Na Timemania você escolhe dez números entre os oitenta disponíveis e um Time do Coração. São sorteados sete números e um Time do Coração por concurso. Se você tiver de três a sete acertos, ou acertar o time do coração, ganha. Você pode deixar, ainda, que o sistema escolha os números para você (Surpresinha) e/ou continuar com o seu jogo por 2 ou 4 concursos consecutivos (Teimosinha).

PREMIAÇÃO

O prêmio bruto corresponde a 46% da arrecadação. Dessa porcentagem, é deduzido o pagamento dos prêmios com valores fixos, sendo R$ 5,00 para as apostas com o Time do Coração sorteado; R$ 2,00 para as apostas com 3 números sorteados; e R$ 6,00 para as apostas com 4 números sorteados.

Somente após a apuração dos ganhadores dos prêmios com valores fixos, o valor restante do total destinado à premiação será distribuído para as demais faixas de prêmios com os seguintes percentuais:

- 50% para os acertadores dos sete números;

- 20% entre os acertadores dos seis números;

- 20% para os acertadores de cinco números;

- 10% restantes são acumulados e distribuídos aos acertadores dos 7 números nos concursos de final 0 ou 5.

Tabela de Probabilidade e Preços da Timemania

Cálculo Probabilísticos da Timemania

Tabela 3.10: Tabela da Timemania

Faixas	Quantidade de placares acertados	Probabilidade de acerto (1 em)
1º	7 números	26.472.637
2º	6 números	216.103
3º	5 números	5.220
4º	4 números	276
5º	3 números	29
Time do Coração	Um clube de futebol	80

A probabilidade de acertar os sete números na timemania é 1 para 27.472.637

$$P(Sena) = \frac{C_{10,7}}{C_{80,7}} = \frac{1}{27.472.637}$$

A probabilidade de acertar o time do coração é 1 para 80

$$P(Sena) = \frac{1}{80}$$

3.10 LOTECA

Dinâmica do Jogo

Na Loteca para apostar, basta marcar o seu palpite para cada um dos 14 jogos do concurso, assinalando uma das três colunas, duas delas (duplo) ou três (triplo). Os clubes participantes estão impressos nos bilhetes emitidos pelo terminal.

PREMIAÇÃO

O prêmio bruto corresponde a $39,3\%$ da arrecadação, já computado o adicional destinado ao Ministério do Esporte. Dessa porcentagem:

- 70% vão para os acertadores dos 14 jogos;

- 15%, para os acertadores dos 13 jogos;

- Os 15% restantes são distribuídos entre os acertadores dos 14 jogos nos concursos de final 0 ou 5.

Tabela de Probabilidade e Preços da Loteca

Tabela 3.11: Add caption

Probabilidade com aposta mínima(R$ 2,00 - um duplo)		
Faixas	**Quantidade de jogos acertados**	**Probabilidade de acerto(1 em)**
1	14	2.391.485
2	13	85.415

Tabela 3.12: Add caption

PROBABILIDADE COM APOSTA MÁXIMA (3 TRIPLOS E 5 DUPLOS = 864 APOSTAS)		
Faixas	**Quantidade de jogos acertados**	**Probabilidade de acerto (1 em)**
1	14	5.536
2	13	197

Cálculo Probabilísticos da Loteca

Qual a chance de acertar 13 pontos no boleto da loteca. Sendo que o boleto pode ter um duplo aberto?

Esta é uma questão de distribuição binomial. Seja:
$p =$ probabilidade de sucesso
$q =$ probabilidade de falha
$n =$ número de repetições

Temos $p+q=1$ e:
$(p+q)^n = \sum C_{n,a} p^{n-a}$ .q$^a = 1$, $a = 0,1,2,...,n$
onde
$C_{n,a}$= probabilidade relativa de ocorrer $p^{n-a}.q^a$
$p^{n-a}.q^a$ corresponde a $(n-a)$ sucessos e (a) fracassos
$\sum C_{n,a} = 2^n$ = número total de eventos

Solução:

A loteca consiste de 14 jogos: $n = 14$

O problema pede para calcular a chance de fazer 13 pontos com o jogo mínimo (1 duplo).

Seja $A(13)$ a chance de acertar exatos 13 jogos SEM NENHUM palpite duplo nem triplo (1 jogo simples):
$A(13) = C_{14,13} p^{13} q^1$

Supondo que as 3 colunas são equiprováveis, p (probabilidade de acerto) vale $1/3$ e q, é claro, vale $1 - 1/3 = 2/3$. Como a probabilidade é muito pequena, é melhor trabalhar com $1/A(13)$, pois os erros de arredondamento são menores. Portanto:
$1/A(13) = 1/[14!/13!/(14-13)!.(1/3)^{13}.(2/3)^{1}]$ $1/A(13) = 1/[(14x2)/3^{14}] = 3^{14}/28 \approx 170820$
Ou seja, a chance é de fazer 13 pontos em jogo simples é 1 em 170.820

Fazer o jogo mínimo, ou seja, com um duplo, equivale a fazer 2 jogos simples. A probabilidade de acerto então dobra. Lembrando que estamos trabalhando com o INVERSO da probabilidade, a chance de fazer 13 pontos em jogo mínimo é então de:
1 em 170.820/2 ou 1 em 85.410.

Fazer o jogo máximo, ou seja, 3 triplos e 5 duplos, equivale a fazer $3^3 \times 2^5 = 864$ jogos simples. A probabilidade de acerto então fica multiplicada por 864 e a chance de fazer 13 pontos em jogo máximo é de:
1 em 170.820/864 ou 1 em 198.

Só por curiosidade, vamos calcular as probabilidades do prêmio máximo, obtido com 14 pontos:
$A(14) = C_{14,14} p^{14} q^{0} = 1/3^{14}$
$1/A(14) = 4.782.969$

14 pontos com jogo mínimo (a probabilidade de acerto dobra):
1 chance em $4.782.969/2 \approx 2.391.485$

14 pontos com jogo máximo (a probabilidade de acerto é multiplicada por 864):
1 chance em $4.782.969/864 \approx 5.536$

Respostas

13 pontos com jogo mínimo: 1 em 85.410
14 pontos com jogo mínimo: 1 em 2.391.485
13 pontos com jogo máximo: 1 em 198
14 pontos com jogo máximo: 1 em 5.536

O site da Caixa Econômica mostra estas probabilidades:
13 pontos com jogo mínimo: 1 em 85.415
14 pontos com jogo mínimo: 1 em 2.391.485
13 pontos com jogo máximo: 1 em 197

14 pontos com jogo máximo: 1 em 5.536

3.11 LOTERIA FEDERAL

HISTÓRICO

A Loteria Federal do Brasil, conhecida como a loteria tradicional, foi a primeira loteria a ser administrada pela Caixa Econômica Federal.

Antes de ser delegada à Caixa, a exploração da Loteria Federal era feita por empresas particulares, pelo prazo de 5 anos, mediante concorrência pública realizada pelo Ministério da Fazenda.

Em 1961, o Governo determinou à Caixa Econômica Federal a administração da Loteria Federal, cujos recursos seriam aplicados na realização de obras de natureza social. A primeira extração da Loteria Federal sob a administração do Conselho Superior das Caixas Econômicas Federais foi realizada em 15 de setembro de 1962, no Estado da Guanabara, atual Rio de Janeiro.

A aceitação desse produto no mercado, ao longo desses anos, deve-se à tradição do jogo aliada ao conceito de credibilidade do nome "Caixa Econômica Federal".

Dinâmica do Jogo

Com a Loteria Federal ganhar acertando:

- Um dos cinco prêmios principais;

- A milhar, a centena e a dezena de qualquer um dos números sorteados nos cinco prêmios principais;

- Bilhetes cujos números contenham a dezena final idêntica a umas das 3 (três) dezenas anteriores ou das 3 (três) dezenas posteriores à dezena do número sorteado para o 1º prêmio, excetuando-se os premiados pela aproximação anterior e posterior;

- A unidade do primeiro prêmio.

Tabela de Probabilidade da Loteria Federal

Tabela 3.13: Tabela de Probabilidade da Federal

Extrações	**Probabilidade**
Quarta	1 em 89.000
Sábado	1 em 88.000 (por série)
Milionária Federal	1 em 92.000
Milionária Especial	1 em 92.000
Especial de Natal	1 em 92.000 (por série)

3.12 Acumulação Programada

Nas diversas loterias administradas pela Caixa, sempre que o prêmio maior não saía e a quantia a ele destinada acumulava para o concurso seguinte, o interesse dos apostadores crescia, resultando num aumento considerável no número de apostas. Embora essa situação fosse interessante para a Caixa, o governo e os lotéricos, a sua ocorrência dependia do acaso. Com o objetivo de manter o interesse dos apostadores e conseqüentemente aumentar a arrecadação, foi criada a acumulação forçada que reserva uma parte do prêmio (cinco por cento do total destinado ? Mega Sena) para ser acrescentada ao rateio dos concursos cujos números terminam em zero, cinco e Mega Sena da Virada. Assim, por exemplo, em cada um dos concursos de números $201, 202, ..., 204$, cinco por cento do prêmio da Mega Sena ficam retidos para serem acrescentados ao prêmio do concurso 205 e 210 e a Mega Sena da Virada. Em várias ocasiões o acaso também faz sua parte e isso acaba elevando o valor do prêmio a um patamar bastante alto. No segundo semestre de 2015, repetidas acumulações fizeram com que o prêmio superasse 190 milhões de reais. Esse valor, superior a 60 milhões de dólares, está no nível dos prêmios de loterias do primeiro mundo, principalmente se levarmos em conta que, aqui no Brasil, ele é isento de imposto de renda

1. Intuitivamente o que significa ter uma chance em cinqüenta milhões?

Com o objetivo de fazer com que seus leitores entendam o que significa essa probabilidade tão pequena, os jornalistas pedem que façamos comparações com a possibilidade da ocorrência de outros eventos. É curioso que as comparações solicitadas quase sempre envolvem um evento auspicioso (ganhar o prêmio máximo da Mega Sena) com tragédias tais como morrer em desastre de avião, ser atingido por um raio ou morrer de câncer. A maior dificuldade em fazer essas comparações está no fato de que nem todos os indivíduos da população têm a mesma probabilidade de sofrer uma dessas desgraças, enquanto todos os que apostam 6 dezenas têm a mesma chance de acertar a Mega Sena. Eu acredito que a maneira mais fácil de fazer as pessoas entenderem é usando um outro exemplo puramente aleatório. O número de habitantes do Brasil é quase igual a três vezes o número de resultados possíveis do sorteio. Se fosse realizado um sorteio de três prêmios entre toda a população brasileira, a sua chance de ganhar um deles seria igual ? de ganhar o prêmio máximo da Mega Sena com um jogo de seis dezenas. No Você sabia? da RPM 41, pág. 29, foi observado que é mais fácil obter 25 caras em 25 lançamentos de uma moeda do que ganhar na Mega Sena com uma aposta de 6 dezenas.

2. Existe uma forma de apostar que melhore as chances do jogador?

Essa pergunta é geralmente feita na sala de aula por alunos curiosos em saber se o professor conhece algum truque ou algum sistema que preferencialmente garanta a vitória. A análise dos resultados dos sorteios realizados até hoje parece indicar que todas as dezenas são igualmente prováveis e que os resultados de diferentes sorteios são independentes. Não existem, portanto, elementos que nos permitam construir um sistema que melhore as nossas chances de vitória. Na sala de aula comento também que, se eu conhecesse um sistema, não iria contar para ninguém e provavelmente não estaria mais dando aulas.

3. Devo jogar no 13 **que é a dezena que mais vezes foi sorteada, ou no** 48**, que foi a que saiu menos vezes?**

O mesmo argumento usado na resposta da questão 2 nos leva a afirmar que, do ponto de vista teórico, tanto faz jogar no 13, no 48 ou em qualquer outra dezena. Agora, se você fizer questão de escolher com base nos resultados de concursos anteriores, eu recomendaria o 13 e não o 48. Isso porque, se tudo estiver funcionando corretamente, tanto faz, mas, caso exista uma pequena distorção (que os testes estatísticos não conseguem detectar), tudo indica que ela estaria favorecendo o 13 e não o 48.

4. Se eu estiver disposto a jogar 98,00 reais, é melhor fazer um único jogo de 8 **dezenas ou vinte e oito jogos de** 6 **dezenas?**

Essa é uma questão interessante, pois, embora as duas formas de jogar sejam equivalentes (supondo 28 jogos distintos de 6 dezenas) no que diz respeito ? Mega Sena, isso não é verdade com relação ? quadra e ? quina. De fato, com um único jogo de 8 dezenas existirão.
$\binom{8}{5}\binom{52}{1} = 2912$, resultados possíveis que darão a quina ao apostador. Com um único jogo de seis dezenas, o apostador terá $\binom{6}{5}\binom{54}{1} = 324$, Se os vinte e oito jogos não tiverem nenhuma

quina em comum, o total de resultados favoráveis será igual a $28 \times 324 = 9.072$. A probabilidade de acertarmos uma quina com o segundo sistema é mais do que três vezes maior do que com o primeiro. Essa diferença é, pelo menos parcialmente, compensada pelo fato de que, acertando uma quina com o jogo de 8 dezenas, receberemos três vezes o valor do prêmio. Os mesmos cálculos efetuados para a quadra mostram que, com um jogo de 8 dezenas, nós teremos 92820 resultados favoráveis e com 28 jogos de 6 dezenas (que não tenham quadras em comum) nós teremos 601020 resultados favoráveis, o que nos dá uma probabilidade que é aproximadamente $6,5$ vezes maior. Uma vez mais vale a pena observar que, se acertarmos a quadra com o jogo de 8 dezenas, receberemos 64 vezes o valor do prêmio.

5. Vale a pena jogar?

Do ponto de vista teórico, é fácil ver que a resposta é não. De fato, você estaria colocando dinheiro num jogo que destina apenas $45,3$ porcento da arrecadação para os prêmios e no qual a sua probabilidade de ganhar alguma coisa que valha a pena é muito pequena. Para aqueles que acreditam na sorte e gostam de arriscar de vez em quando, aí vão algumas sugestões:

a) Nunca aposte muito dinheiro. De fato, com a aposta de 15 dezenas, que custará $17.517,50$ reais, a sua probabilidade de ganhar o prêmio é igual a $1/10.003$. Portanto, a probabilidade de que você perca o seu dinheiro é bem grande e, se você é capaz de perder $17.517,50$ reais sem se importar, você é uma pessoa que não precisa de loterias.

b) Aposte de preferência nos concursos de final zero ou cinco. Nesses concursos você não está contribuindo para o prêmio de futuros apostadores, está concorrendo a um prêmio maior e principalmente está concorrendo a quantias que outros já perderam.

Vamos terminar com um argumento que serve para justificar essa pequena fraqueza de arriscar de vez em quando. Se você pode, sem nenhum sacrifício, dispor de 10 reais por semana e decidir guardá-los, você terá, em valores corrigidos, 520 reais após um ano e conseqüentemente 10400 reais após vinte anos. Com esse procedimento, a probabilidade de que você fique rico é zero. Se você jogar dez reais por semana, a probabilidade de que você fique rico é quase zero, mas não é zero.

3.13 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Estudo de análise combinatória e probabilidade explorando nas loterias foi uma forma de usar situações do cotidiano através do uso dos jogos de loterias. O uso de uma situação do cotidiano, neste caso, o uso da mega-sena e dos principais jogos das loterias federais, despertará o interesse dos leitores para aprender combinatória e probabilidade.

No entanto, o objetivo principal deste trabalho não é simplesmente a forma lúdica para o estudo de análise combinatória e probabilidade, mas a percepção de que o estudo desses temas é facilmente aplicada às mais diversas situações do cotidiano.

Jogos e brincadeiras como estas são inocentes e possibilitam o desenvolvimento de conceitos matemáticos. Mas que olhar devemos lançar sobre o jogo quando ele mexe com o imaginário de milhões de pessoas e envolve milhões em dinheiro como é o caso das chamadas loterias? Ao utilizar slogans do tipo: acredite na sorte, o que eles estão vendendo? Possibilidade ou ilusão? Será que as pessoas que apostam têm consciência do grau de dificuldade que está por traz destes jogos? Dentre todas as loterias existentes no Brasil, a Mega-Sena é, ao menos em certas ocasiões, a que desperta o maior interesse na população. O jogo consiste em acertar 6 números dentre os 60 (1 a 60) disponíveis no volante (quem acerta 4 ou 5 também ganha), sendo possível marcar de 6 a 15 números na aposta.

No Brasil, as loterias seduzem milhões de pessoas a cada semana com a esperança de tornaremse milionárias. É tão grande a fascinação, que jornais publicam quais números foram mais ou menos vezes sorteados e muitos apostadores tentam descobrir a lógica dos resultados dos sorteios. Mas há, realmente, alguma técnica para jogar, como defendem alguns, ou isso não passa de simples ilusão? A Mega-sena é um jogo de azar, pois não há como a habilidade do apostador interferir no resultado. Por que, então, contrariando essa condição, evitamos apostas em combinações sequenciais, ou formadas por números próximos um do outro? O raciocínio que norteia tal critério de aposta é o de que seria muito difícil ocorrer tais coincidências. Entretanto, o raciocínio correto é o de que a probabilidade de, em algum sorteio, saírem tais combinações especiais é a mesma de saírem quaisquer outras combinações. E isso demonstra o quanto é difícil acertar na Mega-sena: a probabilidade de ser sorteada uma combinação selecionada é a mesma de ser sorteada qualquer combinação especial (1, 2, 3, 4, 5 e 6, por exemplo). Portanto, imaginarmos que, afastando as combinações especiais, as probabilidades aumentam é pura ilusão. De fato, qualquer tentativa de previsão de resultados que se baseie na distribuição dos números no formulário não tem fundamento algum. Os números são apenas signos escolhidos para representar o resultado do sorteio. Poderiam ser substituídos por quaisquer outros símbolos, como desenhos de frutas, nomes de mulher, ou letras, e não precisariam estar em sequência. Além disso, o resultado da Mega-sena é uma combinação de seis números (o seu universo é de 50.063.860 de possíveis resultados), e considerar, de forma isolada, quantas vezes um número foi sorteado sequer tem significado estatístico. Em relação às estatísticas, a Matemática nos diz que um jogo como o da Mega-sena é regido por um processo que não tem memória. Isto significa que o resultado do evento anterior não exerce qualquer influência sobre o resultado do evento futuro (...) Por fim, poderíamos entender o significado da probabilidade de acertar na Mega-sena com um exemplo mais concreto. Se, durante 50 anos, jogássemos 100 jogos por dia de aposta (duas vezes por semana), nossa chance de acertar ao menos uma vez seria de pouco mais de 1%. Portanto, jogando duzentos reais por semana, durante 50 anos, nossa chance de não ganhar na sena seria de 99%. Portanto, aí está a receita para não ganhar na mega-sena: jogar toda semana, durante 50 anos, gastando 200 reais por semana (probabilidade de ganhar: menos de 1%).

Comparações como esta, possibilitam uma melhor compreensão do que significa essa probabilidade tão pequena. Podem ser feitas comparações com a possibilidade da ocorrência de outros eventos, ou ainda comparações com modelos geométricos, utilizando razões entre comprimentos, áreas ou volumes como analogias para uma probabilidade, já que esta também é uma razão.

Alguns exemplos:
A população do Brasil é de quase quatro vezes o número de resultados possíveis do sorteio. Se fosse realizado um sorteio de quatro prêmios entre toda a população brasileira, a sua chance de ganhar um deles seria igual à de ganhar o prêmio máximo da Mega-Sena com um jogo de seis números.
No Você sabia? da RPM 41 (Revista do Professor de Matemática), página 29, foi observado que é mais fácil obter 25 caras em 25 lançamentos de uma moeda do que ganhar na Mega-Sena com uma aposta de 6 números.

Através deste trabalho procuramos evidenciar a importância do uso dos jogos de azar como recurso para o estudos de combinatória e probabilidade de forma contextualizada com aplicações nas principais loterias federais do Brasil.
Em relação ao uso de jogos de loterias federais para o estudo de análise combinatória e probabilidade aplicada as loterias federais, conclui-se que é uma metodologia de estudo que pode ser aplicada no ensino médio e faz muita diferença na aprendizagem destes conteúdos que tradicionalmente são apenas expostos de forma conceitual na lousa sem nenhuma vinculação com a realidade vivenciada pelos aprendizes.

Referências

[1] FRANCISCO, Jose antonio *http: www.sigmasociety.com/artigos/jose-antonio-francisco-megasena.pdf*, (Dezembro/2010)

[2] SANTOS, Luiz G. Martins *Revista do professor de matemática*, 86. ed.- Rio De Janeiro: Editora SBM.

[3] RODRIGUES, Flávio Vagner *Revista do professor de matemática*, 43. ed.- Rio De Janeiro: Editora SBM.

[4] CARVALHO, P. C.; P. MORGADO, A. C.; O. PITOMBEIRA; FERNANDES, P.*Análise Combinatória e Probabilidade*, Rio De Janeiro: Editora SBM.

[5] MAGALHÃES, Marcos Nascimento *Probabilidade e Variáveis Aleatórias*, 2. ed. - São Paulo: Edusp - Editora da Universidade de São Paulo, 2006.

[6] BORBA, Marcelo C. *Fases das tecnologias digitais em educação matemática*, 1^a ed. Autêntica Editora, Belo Horizonte, (2014).

[7] BRAVO, J. A. F., HUETE, J. C. S. *O ensino da matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas*, ed. Artmed, Porto Alegre, (2006).

[8] CADAR, L., DUTENHEFNER, F. *Encontros de Aritmética.* Programa de Iniciação científica da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, SBM - IMPA, (2015).

[9] SILVA, Valdir V. *Números: construção e propriedades*, ed. da UFG, Goiânia, (2003).