**2013: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT**
**Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ**
**Sociedade Brasileira de Matemática - SBM**

# EXISTÊNCIA DE LIMITANTES PARA OS TRÊS PRIMEIROS FATORES PRIMOS DE UM NÚMERO PERFEITO ÍMPAR

Aurelio José Parreira[1]
Jorge Andrés Julca Avila[2]

**Resumo:** Como todo trabalho sobre números perfeitos ímpares, é necessário assumir que eles existem, o que é plausível, dado que ninguém provou o contrário. Este trabalho demonstra resultados importantes sobre os números perfeitos ímpares, como a Fórmula de Euler e, a soma dos inversos dos divisores de um número perfeito, que servem para provar o teorema principal deste trabalho, o qual, trata da existência de três números primos que são limitantes para os três primeiros fatores primos de um número perfeito ímpar, segundo Basak [3].

**Palavras-chave:** Números perfeitos ímpares. Decomposição em fatores primos. Rede Sylvester. Teoria dos Números.

## 1 Introdução

Euclides, em sua obra magna, *Os Elementos*, definiu número perfeito e apresentou a fórmula $2^{n-1}(2^n - 1)$ que produz números perfeitos pares se $2^n - 1$ é primo. Todavia nada foi dito a respeito da existência de números perfeitos ímpares [5]. Mais tarde Euler provou que todos os números perfeitos pares são da forma anunciada por Euclides [1]. As primeiras referências ao dilema da existência ou não-existência de números perfeitos ímpares podem ser encontradas nas cartas matemáticas entre Padre Marin Mersenne e René Descartes em 1638, em que Descartes propôs que essas entidades indescritíveis podem, de fato, existir. Em 1888, James Joseph Sylvester (1814-1897) publicou uma série de artigos que ele esperava abrir caminho para uma prova geral da inexistência de um número perfeito ímpar. Sylvester começou seu trabalho estabelecendo que um número perfeito ímpar possui ao menos quatro fatores primos distintos. Mais tarde, naquele mesmo ano, ele fortaleceu sua conclusão para cinco fatores primos distintos e ainda mostrou que nenhum perfeito ímpar é divisível por 105 . Estes achados ajudam a marcar o início da era moderna da pesquisa sobre números perfeitos ímpares [6]. Desde então, gerações de matemáticos, amadores ou profissionais têm atacado este problema e progressos têm sido feitos criando uma rede de condições para a existência destes números que veio a ser conhecida como Rede Sylvester [3]. Sabe-se, por exemplo, que o número de fatores primos distintos que um número perfeito ímpar pode ter é pelo menos

[1]Aluno do Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2011
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
E-mail: aurelio-parreira@ig.com.br
[2]Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ
E-mail: avila_jaj@ufsj.edu.br

nove, [9]. Segundo Ochem e Rao os números perfeitos ímpares devem ser maiores do que $10^{1500}$ e o total de fatores primos contando suas multiplicidades deve ser pelo menos 101, [7]. Acquaah mostra também que a desigualdade $q < (3x)^{1/3}$ vale para qualquer fator primo $q$ de qualquer perfeito ímpar $x$, [1]. Em [9] encontramos ainda outras condições para a existência dos números perfeitos ímpares.
Percebemos, portanto, que este conjunto de condições vem crescendo e somos motivados a abordar neste trabalho uma condição recentemente incorporada a esta rede. Para isso, nós definimos números multiperfeitos, ou $k$-perfeitos, conforme sugere Chen [4], demonstramos a Fórmula de Euler para números perfeitos ímpares e um resultado sobre a soma dos inversos dos divisores de um número perfeito. Estabelecemos, no Teorema 2.1, limites rigorosos sobre a soma dos inversos dos divisores de um número perfeito ímpar, independentemente dos expoentes dos números primos em sua fatoração. Finalmente no Teorema 3.1, estabelecemos limitantes superiores para os três primeiros fatores primos de um número perfeito ímpar, usando o número de fatores primos distintos deste número. Concluímos fornecendo tabelas destes limites superiores.

# 2 Preliminares

Alguns resultados importantes são necessários para a demostração do Teorema Principal deste trabalho.

**Definição 2.1 (Número perfeito)** *Seja $n$ um inteiro positivo e $\sigma(n)$ a soma de seus divisores positivos. Dizemos que $n$ é perfeito se $\sigma(n) = 2n$.*

Note que $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 4$, ...

**Exemplo 2.1** São exemplos de números perfeitos: 6, 28, 496, 8128,...

**Definição 2.2 (Divisor Comum)** *Dados dois números naturais $a$ e $b$, não nulos, diremos que o número natural não nulo $d$ é um divisor comum de $a$ e $b$ se $d|a$ e $d|b$.*

**Definição 2.3 (Máximo Divisor Comum)** *Diremos que $d$ é um máximo divisor comum (mdc) de $a$ e $b$ se possuir as seguintes propriedades:*

1. *$d$ é um divisor comum de $a$ e de $b$, e*
2. *$d$ é divisível por todo divisor comum de $a$ e $b$.*

O *mdc* de $a$ e $b$ será denotado por $(a, b)$.

**Proposição 2.1 (Propriedade Multiplicativa)** *Sejam $m, n \in \mathbb{Z}^+$, com $(m, n) = 1$. Então, $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$.*

A prova da Proposição 2.1 pode ser encontrada, por exemplo, em Voight (2013, p. 2).

**Proposição 2.2** *Seja $n$ um inteiro positivo e $p$ um fator primo de $n$. Então,*

$$\sigma(n) = \prod_{p|n} \sum_{k=0}^{h_p} p^k \tag{1}$$

*onde, $k \in \mathbb{N}$, e $h_p$ é o grau de $p$.*

**Demonstração:** Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ e $(p_i, p_j) = 1$, $i \neq j$. Então, $\sigma(n) = \sigma(p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}) = \prod_{i=1}^{r} \sigma(p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^{r}(1 + p_i + ... + p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^{r} \sum_{k=0}^{\alpha_i} p_i^k$. Como $p_i | n$, $\forall i = 1, ..., r$, é equivalente a dizer $p|n$, onde $p$ é um fator primo de $n$, temos $n = \prod_{p|n} \sum_{k=0}^{\alpha} p^k$. Agora, denote $\alpha$ por $h_p$ para concluir a prova. □

**Exemplo 2.2** Seja $n = 36 = 2^2 3^2$. De (1) temos $\sigma(36) = (1 + 2 + 4)(1 + 3 + 9) = 91$. De fato $\sigma(36) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 9 + 12 + 18 + 36 = 91$.

**Definição 2.4 (Número $k$-perfeito)** *Seja $n$ um inteiro positivo e $\sigma(n)$ a soma de seus divisores positivos. Dizemos que $n$ é $k$-perfeito se $\sigma(n) = kn$, para todo $k \geq 2$.*

**Definição 2.5 (Congruência módulo $m$)** *Seja $m$ um número natural diferente de zero. Diremos que dois números naturais $a$ e $b$ são congruentes módulo $m$ se os restos de sua divisão euclidiana por $m$ são iguais. Quando os inteiros $a$ e $b$ são congruentes módulo $m$, escreve-se $a \equiv b \ (mod\ m)$.*

**Exemplo 2.3** *Por exemplo, $21 \equiv 13 \ (mod\ 2)$, já que os restos da divisão de 21 e de 13 por 2 são iguais a 1.*

**Lema 2.1** *Seja $p$ um número primo, e "e" um inteiro positivo. Se $v_2(m)$ é a maior potência de 2 que divide o inteiro $m$, então,*

$$v_2\big(\sigma(p^e)\big) = \begin{cases} v_2(p+1) + v_2(\frac{e+1}{2}), & se\ \ p > 2,\ \ e \equiv 1 \pmod 2 \\ 0, & para\ os\ outros\ casos \end{cases} \tag{2}$$

$$v_2(\sigma\big(p^e) - 1\big) = \begin{cases} 0, & se\ \ p > 2,\ \ e \equiv 1 \pmod 2 \\ v_2(p+1) + v_2(\frac{e}{2}), & se\ \ p > 2,\ \ e \equiv 0 \pmod 2 \\ 1, & se\ \ p = 2 \end{cases} \tag{3}$$

**Demonstração:** Note que se $p = 2$, ou, se $p$ ímpar e $e$ par, sempre teremos:

$$\sigma(p^e) = 1 + p + ... + p^e \equiv 1 \pmod 2$$

Assim,

$$v_2\Big(\sigma(p^e)\Big) = 0 \tag{4}$$

Agora, assumamos que $p$ e $e$ são ambos ímpares e, denotemos,

$$r = v_2\left(\frac{e+1}{2}\right), \tag{5}$$

onde $\frac{e+1}{2} = 2^r s$ para algum $s \in \mathbb{Z}$ ímpar. Então,

$$\begin{aligned} \sigma(p^e) &= \frac{p^{e+1} - 1}{p - 1} = \frac{(p^2)^{\frac{e+1}{2}} - 1}{p - 1} = \frac{(p^2)^{2^r s} - 1}{p - 1} = \frac{(p+1)}{p^2 - 1}(p^{2s})^{2^r} - 1 \\ &= \frac{(p+1)}{p^2 - 1}\Big(p^{2s} - 1\Big)\Big((p^{2s})^{2^{r-1}} + 1\Big)\Big((p^{2s})^{2^{r-2}} + 1\Big)...\Big(p^{2s} + 1\Big) \\ &= (p+1)\frac{p^{2s} - 1}{p^2 - 1}\prod_{i=1}^{r}\Big((p^{2s})^{2^{r-i}} + 1\Big) \end{aligned} \tag{6}$$

Como $p$ é ímpar temos

$$(p^{2s})^{2^{r-i}}+1=(p^{s2^{r-i}})^2+1\equiv 2 \pmod 4,\quad 1\le i\le r.$$

Segue que

$$v_2\Big((p^{2s})^{2^{r-i}}+1\Big)=1,\quad 1\le i\le r.$$

Então,

$$v_2\left[\prod_{i=1}^{r}\Big((p^{2s})^{2^{r-i}}+1\Big)\right]=\sum_{i=1}^{r}v_2\Big((p^{2s})^{2^{r-i}}+1\Big)=r \tag{7}$$

Observe que

$$\frac{p^{2s}-1}{p^2-1}=1+p^2+p^4+...+(p^2)^{s-1}\equiv s\equiv 1 \pmod 2.$$

Então,

$$v_2\left(\frac{p^{2s}-1}{p^2-1}\right)=0. \tag{8}$$

Logo, aplicando $v_2$ em (6),

$$v_2\big(\sigma(p^e)\big) \;=\; v_2(p+1)+v_2\left(\frac{p^{2s}-1}{p^2-1}\right)+v_2\left[\prod_{i=1}^{r}\Big((p^{2s})^{2^{r-i}}+1\Big)\right]$$

De (5), (7) e (8), temos

$$v_2\big(\sigma(p^e)\big) \;=\; v_2(p+1)+v_2\left(\frac{e+1}{2}\right) \tag{9}$$

Assim, de (4) e (9) obtemos (2). Para obter (3) utilizamos o resultado anterior e o seguinte fato:

$$v_2\big(\sigma(p^e)-1\big)=v_2\big(p(1+...+p^{e-1})\big)=v_2\big(p\sigma(p^{e-1})\big)=v_2(p)+v_2\big(\sigma(p^{e-1})\big). \tag{10}$$

Com isto completamos a prova. $\square$

**Exemplo 2.4** Seja $p=3$ e $e=2$. Teremos $\sigma(3^2)=1+3+9=13$ e tomando (2) obtemos $v_2(13)=0$.

**Exemplo 2.5** Seja $p=5$ e $e=3$. Teremos $\sigma(5^3)=1+5+25+125=156$ e tomando (2) obtemos $v_2(125)=v_2(6)+v_2(2)=1+1=2$.

**Lema 2.2** *Seja $n$ um número k-perfeito e ímpar, com $v_2(k)\ge 1$, e $s$ qualquer inteiro satisfazendo $1\le s\le v_2(k)$. Então $n$ pode expressar-se como*

$$n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}...p_s^{e_s}M^2, \tag{11}$$

*onde $M$ é um inteiro positivo, os $p_i$ primos satisfazendo $(p_i,M)=1$, $i=1,...,s$ e, $e_j$ inteiros positivos ímpares. Se $v_2(k)-s$ pode ser decomposto em uma soma de parcelas não negativas,*

$$v_2(k)-s=a_1+a_2+a_3+...+a_s+b_1+b_2+...+b_s,\quad a_i\geqslant 0,\ \ b_j\geqslant 0, \tag{12}$$

*então os primos $p_1,...,p_s$ satisfazem*

$$p_i\equiv 2^{a_i+1}-1 \pmod{2^{a_i+2}} \tag{13}$$

*e os expoentes $e_1,...,e_s$ satisfazem*

$$e_j\equiv 2^{b_j+1}-1 \pmod{2^{b_j+2}} \tag{14}$$

**Demonstração:** Seja $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_r^{e_r}$, onde os $p_i$ são números primos distintos e ímpares. Por ser $n$ $k$-perfeito ímpar, temos que

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{e_1})\sigma(p_2^{e_2})...\sigma(p_r^{e_r}) = kn. \tag{15}$$

Como $v_2(k) \geq 1$, segue de (2) que algum $e_i$ deve ser ímpar. Com isso podemos escrever

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_s^{e_s} q_1^{2f_1} q_2^{2f_2} ... q_t^{2f_t} = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_s^{e_s} \left(q_1^{f_1} q_2^{f_2} ... q_t^{f_t}\right)^2, \tag{16}$$

onde $e_1, e_2, ..., e_s$ são inteiros positivos ímpares, $f_1, f_2, ..., f_t$ são inteiros positivos e $p_1, p_2, ..., p_s$, $q_1, q_2, ...q_t$ são todos primos ímpares. Por outro lado, utilizando o Lema 2.1, temos

$$\begin{aligned} v_2(k) &= v_2(kn) = v_2\big(\sigma(n)\big) = \sum_{i=1}^{s} v_2\big(\sigma(p_i^{e_i})\big) + \sum_{j=1}^{t} v_2\big(\sigma(q_j^{2f_j})\big) = \sum_{i=1}^{s} v_2\big(\sigma(p_i^{e_i})\big) \\ &= \sum_{i=1}^{s} \left[ v_2(p_i+1) + v_2\left(\frac{e_i+1}{2}\right)\right] = s + \sum_{i=1}^{s} \left[ v_2\left(\frac{p_i+1}{2}\right) + v_2\left(\frac{e_i+1}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

Logo,

$$v_2(k) - s = \sum_{i=1}^{s} \left[ v_2\left(\frac{p_i+1}{2}\right) + v_2\left(\frac{e_i+1}{2}\right)\right] \tag{17}$$

representa a soma de duas parcelas não negativas, ou seja,

$$v_2(k) - s = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_s + b_1 + b + 2 + ... + b_s, \quad a_i \geqslant 0, \quad b_j \geqslant 0, \tag{18}$$

onde, $v_2\left(\frac{p_i+1}{2}\right) = a_i$ e $v_2\left(\frac{e_j+1}{2}\right) = b_j$, $i, j = 1, ..., s$.
Note que, se $v_2\left(\frac{c+1}{2}\right) = d$ então, por (5), existe um inteiro ímpar $2l+1$, $l \geqslant 0$, tal que, $\frac{c+1}{2} = 2^d(2l+1)$. Assim,

$$c = 2^{d+2}l + 2^{d+1} - 1 \implies c \equiv 2^{d+1} - 1 \pmod{2^{d+2}}$$

Finalmente, fazendo $c = p_i$ e $d = a_i$ e, também, $c = e_j$ e $d = b_j$ concluí-se a prova. $\square$

Faremos a demonstração da Fórmula de Euler aplicando o Lema (2.2).

**Proposição 2.3 (Fórmula de Euler)** *Se $n$ é um número perfeito ímpar, então ele é da forma $n = p^b q_1^{2a_1} q_2^{2a_2} ... q_r^{2a_r}$ onde $p, q_1, q_2, q_3, ...q_r$ são primos e $p \equiv b \equiv 1 \pmod 4$.*

**Demonstração:** Como $n$ é um número *2*-perfeito ímpar, e tomando (3), temos $v_2(2) = v_2\big(\sigma(2^1) - 1\big) = 1$. Então, pelo Lema 2.2, $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_s^{e_s} M^2$, $1 \leqslant s \leqslant v_2(2)$. Temos, $s = 1$ pois, $v_2(2) = 1$. Assim, $n = p_1^{e_1} M^2$, com $e_1$ ímpar. Logo, $n = p_1^{e_1} q_1^{2f_1} q_2^{2f_2} ... q_r^{2f_r}$, onde $p, q_1, q_2, ..., q_r$ são primos. Por (12), $v_2(2) - s = a_1 + b_1 = 0$ implica $a_1 = b_1 = 0$. Por (13) e (14) temos $p_1 \equiv e_1 \equiv 1 \pmod 4$, o que conclui a prova. $\square$

**Notação:** Vamos denotar a soma dos inversos dos divisores de um número natural $n$ por $\sigma_{-1}(n)$ e provar um resultado bastante conhecido.

**Proposição 2.4** *Seja $p$ um número primo. Para a soma dos inversos dos divisores de um número perfeito $n$ temos,*

$$\sigma_{-1}(n) = \prod_{p|n} \sum_{k=0}^{h_p} p^{-k} = 2 \tag{19}$$

*onde $h_p$ é o grau de $p$ na fatoração de $n$.*

**Demonstração:** Por ser $n$ perfeito e por (1), temos que $\sigma(n) = \prod_{p|n} \sum_{k=0}^{h_p} p^k = 2n$ onde $h_p$ é o grau de $p$ na fatoração de $n$. Então,

$$2 = \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\prod_{p|n} \sum_{k=0}^{h_p} p^k}{n} = \frac{\prod_{p|n} \sum_{k=0}^{h_p} p^k}{\prod_{p|n} p^{h_p}} = \prod_{p|n} \frac{\sum_{k=0}^{h_p} p^k}{p^{h_p}} = \prod_{p|n} \sum_{k=0}^{h_p} p^{-k}$$

$\square$

**Exemplo 2.6** Seja $n = 6$ e tomemos (19). Então, $\sigma_{-1}(6) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2$.

***Observação* 2.1** De aqui em diante $p$ denota um número primo.

**Definição 2.6 (Função Zeta de Riemann)** *A função Zeta de Riemann é definida por*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{20}$$

*onde, $s \in \mathbb{C}$.*

**Proposição 2.5** *Se $Re(s) > 1$ então*

$$\zeta(s) = \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-s}} \tag{21}$$

A prova da Proposição 2.5 pode ser encontrada em Aguilera-Navarro et al. (1999, p. 41).

No que segue vamos provar que o produto: $\prod_{p|n} \sum_{i=0}^{\alpha} p^{-i}$ é limitado, para um certo $\alpha$.

**Teorema 2.1** *Dado $\alpha \in \mathbb{Z}^+$, satisfazendo $\alpha \leqslant h_p$ ($h_p$ é o grau de $p$ na fatoração de $n$). Então,*

$$\frac{2^{\alpha+2}}{\zeta(\alpha+1)(2^{\alpha+1}-1)} < \prod_{p|n} \sum_{i=0}^{\alpha} p^{-i} < 2 \tag{22}$$

*onde, $\zeta(s)$ é a função Zeta de Riemann.*

**Demonstração:** Para todo $p$ e para algum $\alpha$ considere $h_p \geq \alpha$. Então, de (19),

$$2 = \prod_{p|n} \sum_{k=0}^{h_p} p^{-k} \leq \prod_{p|n} \sum_{k=0}^{(\alpha+1)\lfloor \frac{h_p}{\alpha+1} \rfloor + \alpha} p^{-k}$$

pois, $h_p \leqslant (\alpha+1)\lfloor \frac{h_p}{\alpha+1} \rfloor + \alpha$. Logo,

$$\begin{aligned}
2 &\leqslant \prod_{p|n} \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{h_p}{\alpha+1} \rfloor} p^{-\left(j(\alpha+1)+i\right)} = \prod_{p|n} \left( \sum_{i=0}^{\alpha} p^{-i} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{h_p}{\alpha+1} \rfloor} p^{-j(\alpha+1)} \right) \\
&= \prod_{p|n} \sum_{i=0}^{\alpha} p^{-i} \prod_{p|n} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{h_p}{\alpha+1} \rfloor} p^{-j(\alpha+1)} < \prod_{p|n} \sum_{i=0}^{\alpha} p^{-i} \prod_{p|n} \sum_{j=0}^{\infty} p^{-j(\alpha+1)} \\
&< \prod_{p|n} \sum_{i=0}^{\alpha} p^{-i} \prod_{p,\, p\neq 2} \sum_{j=0}^{\infty} p^{-j(\alpha+1)} = \prod_{p|n} \sum_{i=0}^{\alpha} p^{-i} \left( \frac{\prod_p \sum_{j=0}^{\infty} p^{-j(\alpha+1)}}{\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j(\alpha+1)}} \right) \\
&= \prod_{p|n} \sum_{i=0}^{\alpha} p^{-i} \left( \frac{\prod_p \frac{1}{1-p^{-(\alpha+1)}}}{\frac{1}{1-2^{-(\alpha+1)}}} \right)
\end{aligned}$$

Agora, por (21), temos que

$$2 < \prod_{p|n} \sum_{i=0}^{\alpha} p^{-i} \left( \zeta(\alpha+1) \frac{2^{\alpha+1}-1}{2^{\alpha+1}} \right)$$

Assim,

$$\frac{2^{\alpha+2}}{\zeta(\alpha+1)(2^{\alpha+1}-1)} < \prod_{p|n} \sum_{i=0}^{\alpha} p^{-i} \tag{23}$$

Por outro lado, como $\alpha \leqslant h_p$, temos

$$\prod_{p|n} \sum_{i=0}^{\alpha} p^{-i} < \prod_{p|n} \sum_{i=0}^{h_p} p^{-i} \tag{24}$$

Note que em (24) não se cumpre a igualdade quando $\alpha = h_p$. Agora por (19)

$$\prod_{p|n} \sum_{i=0}^{\alpha} p^{-i} < 2 \tag{25}$$

Finalmente, de (23) e (25) concluímos a prova. $\square$

Como exemplo verificaremos o Teorema 2.1 quando $\alpha = 1$. Nesse caso, $h_p \geqslant 1$ e $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Assim, de (22),

$$\frac{8}{3\zeta(2)} = \frac{16}{\pi^2} \approx 1,621138938 < \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right) < 2. \tag{26}$$

Verificando o Teorema 2.1 para $\alpha = 2$ encontramos

$$\frac{16}{7\zeta(3)} \approx 1,901502566 < \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right) < 2. \tag{27}$$

Este é um limite mais forte do que o encontrado para $\alpha = 1$ e está demonstrado em [3]. Com isso concluímos que não é necessário conhecer os expoentes dos fatores primos na decomposição do perfeito ímpar $n$.

# 3 Teorema Principal

A seguir demonstraremos o teorema principal deste trabalho, o qual, refere-se à existência de três números primos limitantes dos três primeiros fatores primos da descomposição, em fatores primos, de um número perfeito ímpar.

**Teorema 3.1** *Se $n$ é um número perfeito ímpar e $\omega(n) = m$ o número de fatores primos distintos de $n$, então existem números primos $p_{I_1}, p_{I_2}$ e $p_{I_3}$ tais que o primeiro, o segundo e o terceiro fatores primos de $n$ são, respectivamente, menores do que $p_{I_1}, p_{I_2}$ e $p_{I_3}$ e, estes, podem ser determinados conhecendo $m$.*

**Demonstração:** Seja $n = p_{i_1}^{\alpha_1} p_{i_2}^{\alpha_2} ... p_{i_m}^{\alpha_m}$ um número perfeito ímpar onde todos os $p_{i_j}$ são primos distintos. Se $\alpha_1 = ... = \alpha_m = \alpha = 1$, então, considerando o produto em (22),

$$\prod_{p|n} \sum_{i=0}^{\alpha} p^{-i} = \prod_{j=1}^{m} \left(1 + \frac{1}{p_{i_j}}\right) \tag{28}$$

Definamos para $r \in \mathbb{Z}^+$,

$$\rho_r^{(1)} = \prod_{j=r}^{r+m-1} \left(1 + \frac{1}{p_j}\right), \tag{29}$$

onde $p_j$ é o $j$-ésimo número primo ímpar. Para $r = i_1$, (29) é sempre maior do que ou igual a (28), isto é,

$$\rho_{i_1}^{(1)} \geq \prod_{j=1}^{m} \left(1 + \frac{1}{p_{i_j}}\right)$$

e, por (26), $\rho_{i_1}^{(1)} > \frac{16}{\pi^2}$. Porém,

$$\lim_{r\to\infty} \rho_r^{(1)} = \lim_{r\to\infty} \prod_{j=r}^{r+m-1} \left(1 + \frac{1}{p_j}\right) = \lim_{r\to\infty} \left(1 + \frac{1}{p_r}\right)\left(1 + \frac{1}{p_{r+1}}\right) \cdots = 1 < \frac{16}{\pi^2} \approx 1,621$$

Logo, $\exists\ I_1$ tal que $\rho_r^{(1)} < \frac{16}{\pi^2},\ \ \forall r > I_1$. Portanto,

$$i_1 \leqslant I_1 \ \text{ e } \ p_{i_1} \leqslant p_{I_1} \tag{30}$$

De forma análoga, definamos

$$\rho_r^{(2)} = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \prod_{j=r}^{r+m-2} \left(1 + \frac{1}{p_j}\right), \tag{31}$$

Para $r = i_2$,

$$\rho_{i_2}^{(2)} = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \prod_{j=i_2}^{i_2+m-2} \left(1 + \frac{1}{p_j}\right), \tag{32}$$

Como $p_{i_1} \geqslant 3$, temos que

$$\rho_{i_2}^{(2)} \geq \left(1 + \frac{1}{p_{i_1}}\right) \prod_{j=2}^{m} \left(1 + \frac{1}{p_{i_j}}\right) = \prod_{j=1}^{m} \left(1 + \frac{1}{p_{i_j}}\right) > \frac{16}{\pi^2} \tag{33}$$

Porém,

$$\lim_{r\to\infty} \rho_r^{(2)} = \left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot 1 < \frac{16}{\pi^2}$$

Logo, $\exists\ I_2$ tal que $\rho_r^{(2)} < \frac{16}{\pi^2},\ \ \forall r > I_2$. Portanto,

$$i_2 \leqslant I_2 \ \text{ e } \ p_{i_2} \leqslant p_{I_2} \tag{34}$$

Finalmente, definamos

$$\rho_r^{(3)} = \left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\prod_{j=r}^{r+m-3}\left(1+\frac{1}{p_j}\right), \tag{35}$$

onde,

$$\rho_{i_3}^{(3)} \geq \left(1+\frac{1}{p_{i_1}}\right)\left(1+\frac{1}{p_{i_2}}\right)\prod_{j=3}^{m}\left(1+\frac{1}{p_{i_j}}\right) \tag{36}$$

e

$$\lim_{r\to\infty} \rho_r^{(3)} = \left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot 1 < \frac{16}{\pi^2}$$

Logo, $\exists\ I_3$ tal que $\rho_r^{(3)} < \frac{16}{\pi^2},\ \ \forall r > I_3$. Portanto,

$$i_3 \leqslant I_3 \ \text{ e } \ p_{i_3} \leqslant p_{I_3} \tag{37}$$

Com isso concluímos a prova. □

Segundo o Teorema 3.1 os fatores $p_{I_1}, p_{I_2}$ e $p_{I_3}$ podem ser determinados conhecendo $m$. Nós utilizaremos uma planilha eletrônica para calcular esses valores.

- **Cálculo de** $p_{I_1}$

Calcularemos $p_{I_1}$ com ajuda da fórmula (29) e os seguintes dados: $m = 9$ e $\alpha = 1$. Os valores de $\rho_r^{(1)}$ para $r = 1, ..., 4$ estão dados na Tabela 1. Note que $\rho_4^{(1)} = 1,5350 < \frac{16}{\pi^2}$. Logo, $p_{I_1} = 11$.

- **Cálculo de** $p_{I_2}$

Calcularemos $p_{I_2}$ com ajuda da fórmula (31) e os seguintes dados: $m = 9$ e $\alpha = 1$. Os valores de $\rho_r^{(2)}$ para $r = 1, ..., 10$ estão dados na Tabela 2. Note que $\rho_{10}^{(2)} = 1,5954 < \frac{16}{\pi^2}$. Logo, $p_{I_2} = 31$.

- **Cálculo de** $p_{I_3}$

Calcularemos $p_{I_3}$ com ajuda da fórmula (35) e os seguintes dados: $m = 9$ e $\alpha = 1$. De forma análoga que o cálculo das anteriores, obtemos $p_{I_3} = 509$.

Na Tabela 3 apresentamos os valores de $p_{I_k},\ k = 1, 2, 3,$ para $9 \leqslant m \leqslant 20$ e $\alpha = 1$, tomados de [3].

Tabela 1: Cálculo de $p_{I_1}$ utilizando $\rho_r^{(1)}$ na fórmula (29).

| $j$ | $p_j$ | $1+\frac{1}{p_j}$ | $\rho_1^{(1)}$ | $\rho_2^{(1)}$ | $\rho_3^{(1)}$ | $\rho_4^{(1)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1,3333 | 1,3333 | | | |
| 2 | 5 | 1,2000 | 1,6000 | 1,2000 | | |
| 3 | 7 | 1,1429 | 1,8286 | 1,3714 | 1,1429 | |
| 4 | $\boxed{11}$ | 1,0909 | 1,9948 | 1,4961 | 1,2468 | 1,0909 |
| 5 | 13 | 1,0769 | 2,1483 | 1,6112 | 1,3427 | 1,1748 |
| 6 | 17 | 1,0588 | 2,2746 | 1,7060 | 1,4216 | 1,2439 |
| 7 | 19 | 1,0526 | 2,3943 | 1,7958 | 1,4965 | 1,3094 |
| 8 | 23 | 1,0435 | 2,4984 | 1,8738 | 1,5615 | 1,3663 |
| 9 | 29 | 1,0345 | 2,5846 | 1,9384 | 1,6154 | 1,4134 |
| 10 | 31 | 1,0323 | | 2,0010 | 1,6675 | 1,4590 |
| 11 | 37 | 1,0270 | | | 1,7125 | 1,4985 |
| 12 | 41 | 1,0244 | | | | $\boxed{1{,}5350}$ |

Tabela 2: Cálculo de $p_{I_2}$ utilizando $\rho_r^{(2)}$ na fórmula (31).

| $j$ | $p_j$ | $1+\frac{1}{p_j}$ | $\rho_1^{(2)}$ | $\rho_2^{(2)}$ | $\rho_3^{(2)}$ | $\rho_4^{(2)}$ | $\rho_5^{(2)}$ | $\rho_6^{(2)}$ | $\rho_7^{(2)}$ | $\rho_8^{(2)}$ | $\rho_9^{(2)}$ | $\rho_{10}^{(2)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1,3333 | 1,7778 | | | | | | | | | |
| 2 | 5 | 1,2000 | 2,1333 | 1,6000 | | | | | | | | |
| 3 | 7 | 1,1429 | 2,4381 | 1,8286 | 1,5238 | | | | | | | |
| 4 | 11 | 1,0909 | 2,6597 | 1,9948 | 1,6623 | 1,4545 | | | | | | |
| 5 | 13 | 1,0769 | 2,8643 | 2,1483 | 1,7902 | 1,5664 | 1,4359 | | | | | |
| 6 | 17 | 1,0588 | 3,0328 | 2,2746 | 1,8955 | 1,6586 | 1,5204 | 1,4118 | | | | |
| 7 | 19 | 1,0526 | 3,1924 | 2,3943 | 1,9953 | 1,7459 | 1,6004 | 1,4861 | 1,4035 | | | |
| 8 | 23 | 1,0435 | 3,3313 | 2,4984 | 2,0820 | 1,8218 | 1,6700 | 1,5507 | 1,4645 | 1,3913 | | |
| 9 | 29 | 1,0345 | | 2,5846 | 2,1538 | 1,8846 | 1,7275 | 1,6042 | 1,5150 | 1,4393 | 1,3793 | |
| 10 | $\boxed{31}$ | 1,0323 | | | 2,2233 | 1,9454 | 1,7833 | 1,6559 | 1,5639 | 1,4857 | 1,4238 | 1,3763 |
| 11 | 37 | 1,0270 | | | | 1,9980 | 1,8315 | 1,7007 | 1,6062 | 1,5259 | 1,4623 | 1,4135 |
| 12 | 41 | 1,0244 | | | | | 1,8761 | 1,7421 | 1,6453 | 1,5631 | 1,4980 | 1,4480 |
| 13 | 43 | 1,0233 | | | | | | 1,7826 | 1,6836 | 1,5994 | 1,5328 | 1,4817 |
| 14 | 47 | 1,0213 | | | | | | | 1,7194 | 1,6335 | 1,5654 | 1,5132 |
| 15 | 53 | 1,0189 | | | | | | | | 1,6643 | 1,5950 | 1,5418 |
| 16 | 57 | 1,0175 | | | | | | | | | 1,6230 | 1,5688 |
| 17 | 59 | 1,0169 | | | | | | | | | | $\boxed{1{,}5954}$ |

Tabela 3: Valores dos limitantes $p_{I_1}, p_{I_2}$ e $p_{I_3}$, dado $m$.

| $m$ | $p_{I_1}$ | $p_{I_2}$ | $p_{I_3}$ |
|---|---|---|---|
| 9 | 11 | 31 | 509 |
| 10 | 11 | 31 | 593 |
| 11 | 11 | 37 | 659 |
| 12 | 13 | 41 | 739 |
| 13 | 13 | 43 | 811 |
| 14 | 13 | 43 | 881 |
| 15 | 13 | 47 | 947 |
| 16 | 13 | 53 | 1031 |
| 17 | 17 | 53 | 1093 |
| 18 | 17 | 59 | 1171 |
| 19 | 17 | 61 | 1237 |
| 20 | 17 | 61 | 1301 |

# 4 Considerações Finais

Os resultados apresentados neste trabalho fazem parte da Rede Sylvester ([3], [8]) sobre condições para a existência dos números perfeitos ímpares. Acreditamos que o estudo destas condições pode nos levar a uma prova geral da inexistência de tais números ou a um método eficaz de obtenção destes números. Perceba, ainda, que o intuito deste trabalho, era elucidar, o que Basak [3] fez, de modo que professores do ensino básico também se beneficiem da pesquisa matemática a fim de responder melhor as indagações de seus alunos e sejam motivados a abordar o tema em sua prática diária. Assim estaremos colaborando para com as metas do PROFMAT estabelecendo um vínculo entre a abordagem acadêmica e a transposição destes conteúdos para o Ensino Fundamental. O tema Números Perfeitos e em particular a existência ou não dos números perfeitos ímpares pode facilmente ser incorporada à prática do professor de Ensino Fundamental na forma de questionamento e pesquisa proporcionando ao aluno uma visão mais apurada do "fazer matemático".

# Agradecimentos

Agradeço a Deus, meu Senhor e Guia, inspirador em todos os momentos e especialmente durante estes anos de estudo.
Agradeço a SBM e a UFSJ pela oportunidade de crescimento. Ao Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo o agradecimento especial por todo o incentivo à minha carreira. A meu orientador, Prof. Dr. Jorge Andrés Julca Avila, agradeço pela confiança em meu trabalho propiciando um significativo enriquecimento em meus conhecimentos através das pesquisas compartilhadas neste último ano. Agradeço aos demais professores pelo conhecimento transmitido neste período.
Agradeço de forma especial a minha esposa, Angela, a pequena Liz e aos companheiros Novelo e Teo, minha família, que me fortaleceu com seu carinho e paciência nos momentos que precisei estar um pouco mais ausente.
Concluo agradecendo aos meus sogros (*in memorian*) por tudo que pude aprender durante o tempo em que convivemos e, carinhosamente, aos meus pais, por todo o cuidado e formação dispensada em minha infância e juventude que permitiram hoje estar completando mais esta etapa de minha vida acadêmica.

# Referências

[1] ACQUAAH, P.; KONYAGIN, S., *On Prime Factors Of Odd Perfect Numbers*. International Journal of Number Theory: 6.1537.1540v8, 2012.

[2] AGUILERA-NAVARRO, M. C. K.; AGUILERA-NAVARRO, V. C.; FERREIRA, R. C.; TERAMON, N., *A Função Zeta de Riemann*. Revista Ciências Exatas e Naturais: 1v1, 1999.

[3] BASAK, S., *Bounds On Factors Of Odd Perfect Numbers*. Arxiv prepint arXiv: 1211.4733v1, 2012.

[4] CHEN, S. C.; LUO, H., *Odd multiperfect numbers*. Arxiv prepint arXiv:1102.4396v1, 2011.

[5] EUCLIDES, *Os Elementos*. UNESP, 2009.

[6] GIMBEL, S.; JAROMA, J. H., *Sylvester: Ushering in the modern era of research on odd perfect numbers*. Integers: Eletronic Journal Of Combinatorial Number Theory: v3, 2003.

[7] OCHEM, P.; RAO, M., *Odd perfect numbers are greater than* $10^{1500}$, Math. Comp.: 81.1869.1877, 2012.

[8] ODDPERFECT.ORG, Disponível em: <http://www.oddperfect.org>. Acesso em: 16 fev. 2013.

[9] NIELSEN, P., *Odd Perfect Numbers have at least nine distinct prime factors*. Arxiv prepint arXiv: 0602485v1, 2006.

[10] VOIGHT, John, *Perfect numbers: an elementary introduction*. Disponível em: <http://www.cems.uvm.edu/ jvoight/notes/perfelem.pdf>. Acesso em: 14 fev. 2013.