UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

A História da Matemática e Os Exercícios Problemas como Ferramenta para o Ensino das Equações Algébricas do 1º ao 4º Graus.

André Lopes Teixeira

MANAUS
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

André Lopes Teixeira

A História da Matemática e Os Exercícios Problemas como Ferramenta para o Ensino das Equações Algébricas do 1º ao 4º Graus.

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Valtemir Martins Cabral

MANAUS
2017

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

L864h

Lopes Teixeira, André

A História da Matemática e Os Exercícios Problemas como Ferramenta para o Ensino das Equações Algébricas do 1º ao 4º Graus / André Lopes Teixeira. 2017

78 f.: 31 cm.

Orientador: Prof. Dr. Valtemir Martins Cabral

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.

1. História da Matemática. 2. Equações. 3. Complexos. 4. Raízes. I. Cabral, Prof. Dr. Valtemir Martins II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

André Lopes Teixeira

A História da Matemática e Os Exercícios Problemas como Ferramenta para o Ensino das Equações Algébricas do 1º ao 4º Graus

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 29 de Setembro de 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Valtemir Martins Cabral
Presidente

Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata
Membro

Prof. Dra. Kelly Alves Marães de Almeida
Membro

AGRADECIMENTOS

Primeiro e a cima de tudo, a Deus por ter me presenteado com o PROFMAT e me guiado, , dando-me a oportunidade de ampliar meus conhecimentos, sem deixar faltar forças, saúde, resignação e perseverança para que eu pudesse enfrentar todas as barreiras e dificuldades encontradas.

Aos meus pais Paulo Gerson Teixeira e Eurani Lopes Teixeira por sempre acreditarem em mim e me apoiarem em tudo, pois mesmo sofrendo com a minha ausência, sabiam que para mim e para eles, a conclusão do curso seria uma grande vitória.

Agradeço ao meus irmãos Alexandre Lopes Teixeira, Adriano Lopes Teixeira, Anderson Lopes Teixeira e a todos os meus sobrinhos e cunhadas, em especial a Cristiane de Moraes Gama por todo o apoio moral e por sempre acreditarem no meu sucesso.

Aos professores do PROFMAT pólo Manaus, especialmente ao meu orientador Dr. Valtemir Martins Cabral e aos Dr. Disney Douglas de L. Oliveira e MSc. Domingos Anselmo Moura da Silva por sempre estarem presente e a disposição para qualquer auxílio e esclarecimentos.

Aos amigos de turma Audemir dos Santos, Clicio Freire da Silva, Celiomar Machado Gonçalves, Felipe dos Santos Pereira, Genilce Ferreira Oliveira e Mauricio Rafael Oliveira da Costa, que somaram, sofreram e comemoraram juntos todos os desafios e vitorias alcançadas, um grupo que jamais será esquecido.

Ao amigo Eraldo Cezar Vianna Barreto (in memoriam) que, infelizmente, nos deixou no final dessa jornada, mas que ficará eterno em nossa memória.

Agradeço também, e de forma muito especial aos amigos Washington Rocha Triani, Victor Artur Baldissera, Fernando Wilson Santiago de Freitas, Marcus Vinicius dos Santos Liberato, Leonardo Francisco das Chagas e Ramina Samoa S. Camargo por estarem presentes e sempre me ajudarem em tudo o que foi preciso nessa longa e árdua caminhada.

E por fim, a minha amada e querida esposa Kamila Soares Silva por toda a sua paciência, por todos os seus conselhos e por acreditar muito em mim, mesmo quando nem eu acreditava, ela me levantava e fazia acender novamente a esperança. Essa conquista é nossa, pois sem você ela não teria acontecido.

"As leis da natureza nada mais são que pensamentos matemáticos de Deus."(Kepler).

RESUMO

Este trabalho tem por finalidade apresentar a importância da História da Matemática e dos exercícios problemas no ensino das Equações algébricas, em especial, sendo utilizados como ferramenta de ensino para as equações do 1º e 2º graus que são ensinadas no terceiro e quarto ciclos, respectivamente, além de também trazer uma proposta de ensino para os Números Complexos, sendo ensinados através da sua história e das equações do 3º grau, no terceiro ano do ensino médio. Para tal, apresentamos um apanhado da história das equações algébricas do 1º até o 4º grau para que possamos usar como base para o nosso roteiro de aula, e também como fonte de consulta. Assim, sugerimos um roteiro para o ensino das equações do 1º e 2º graus e também para o ensino dos Números complexos, utilizando como ferramenta, no primeiro caso, a História da matemática e os exercícios problemas e, no segundo, a História da Matemática e as equações do 3º grau. Os principais objetivos desses roteiros e o porquê de se ensinar os referidos assuntos dessa forma são detalhados neste trabalho.

Palavras-chave: História da Matemática; Equações; Complexos; Raízes.

ABSTRACT

The purpose of this paper is to present the importance of the History of Mathematics and of the exercises in the teaching of algebraic equations in particular, being used as a teaching tool for the 1st and 2nd degree equations that are taught in the third and fourth cycles respectively, In addition to bringing a proposal of teaching to the Complex Numbers, being taught through its history and the equations of the third degree, in the third year of high school. To do this, we present a history of the algebraic equations from 1st to 4th grade so that we can use as a basis for our lesson script, and also as a source of inquiry. Thus, we suggest a script for the teaching of the 1st and 2nd grade equations and also for the teaching of complex numbers, using as a tool, in the first case, the History of Mathematics and the Problem Exercises, and in the second, the History of Mathematics and The equations of the third degree. The main objectives of these scripts and why they teach those subjects in this way are detailed in this work.

Keywords: History of Mathematics; Equations; Complexes; Roots.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Qualquer problema que possa ser solucionado através dos números certamente será tratado, direta ou indiretamente, por meio de equações. Tornando-as, pelo menos do ponto de vista prático, a parte mais importante da Matemática.

As equações assumiram esse papel tão importante, porque a Ciência, cuja essência é o estabelecimento de correções entre fatos, conceitos e ideias, está sempre descobrindo equivalências entre associações de entes e utiliza as equações como linguagem, forma ou veículo para expressar tais correções, pois a palavra equação vem da mesma raiz latina que produziu as palavras igual e igualdade.

Pode-se perceber de forma bem clara quando um motorista de táxi, mesmo sem estar consciente disto, conhece implicitamente tal equação, pois está sempre avaliando tempos, distâncias e velocidades durante seu trabalho.

As equações estão por toda parte e, algumas mais, algumas menos, quase todos gastamos certo tempo de nossas vidas a resolvê-las.

A solução de uma equação pode ser um ou mais números, mas pode, também, ser a medida de uma grandeza física, como uma distância, um peso, um intervalo de tempo, etc. Resolver uma equação é, através da correlação que ela expressa, encontrar alguma coisa que desconhecemos e que costumamos denominar incógnita. Geralmente a letra x é a mais habitual representação das incógnitas, embora outras letras também sejam usadas para tal finalidade.

Resolver uma equação pode significar o encontro não de um número, mas de uma forma.

Vamos abordar somente uma categoria particular de equações, as conhecidas como Equações Algébricas do 1º ao 4º grau. Convidamos ao leitor a mergulhar num belíssimo e rico campo, onde se envolveram os grandes cérebros das ciências exatas ao longo dos séculos.

Capítulo 2

Um Passeio pela História do Surgimento das Equações do 1^o e 2^o Graus

2.1 Equações Algébricas

Equações Algébricas são aquelas em que a incógnita aparece apenas submetida às chamadas operações algébricas: soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação inteira e radiciação.

Nos exemplos a seguir todas equações são algébricas.

Exemplo 1. $ax + b = c$

Exemplo 2. $ax^2 + bx + c = 0$

Exemplo 3. $nx^5 + \sqrt{8x^3} + k = 12$

Exemplo 4. $x^8 + x^4 + 12x = \sqrt[3]{2x^4} + x^2 + 14\,x^{-3} + 4 = x^{-2}$

Por outro lado, as seguintes não são equações algébricas.

Exemplo 5. $x^3 + 3x^2 + 6 = e^{-x}$

Exemplo 6. $cos(x) + x^3 cos(2x) = 6$

Exemplo 7. $arctg(x) = \frac{\pi}{8}$

Quando uma equação algébrica é colocada sob a forma:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{2.1}$$

(n inteiro positivo), dizemos que a mesma está na **Forma Canônica** e a nomeamos de **Equação Polinomial**, que é também conhecida como **função racional inteira da variável x**.

O maior expoente da incógnita em uma equação algébrica em sua forma canônica é denominado o grau da referida equação.

Assim, a equação $2x^3 + 4x^2 + x + 5 = 0$ é uma equação do 3º grau.

Apesar da definição ser abstrata conforme Garbi [11], as formas mais simples de equações algébricas apresentaram-se quase que naturalmente aos antigos matemáticos, à medida que o homem começou a calcular, trocando produtos, contando rebanhos, contabilizando impostos ou construindo os primeiros monumentos e obras de engenharia.

2.2 Os Primeiros Registros sobre a Equação do 1º Grau

Os mais antigos documentos contendo registros numéricos conforme Garbi [11] são tabletes de barro sumérios, de meados do IV milênio a.C. Se quisermos ser rigorosos, podemos dizer que tais registros ainda não eram matemáticos porque não aparecem neles operações feitas com números. Elas começam a ser encontradas em tabletes sumérios de 2.200 a.C., dentro de um sistema de numeração posicional com **base 60** e grafia cuneiforme. É importante mencionar que os sumérios foram conquistados pelos acádios no final do III milênio a.C. mas mantiveram sua identidade até cerca de 1.900 a.C., quando os elamitas invadiram a região e destruíram a Suméria. Um século depois, entretanto, os elamitas foram derrotados pelos amoritas, que estabeleceram o chamado Império Babilônico, com capital em Babilônia. Os sucessores dos sumérios adotaram sua escrita e deram continuidade aos estudos matemáticos que vinham sendo feitos desde longa data.

Os matemáticos e astrônomos babilônicos do II milênio a.C. realizaram feitos surpreendentes: eles conheciam a propriedade geral dos triângulos retângulos (o hoje chamado teorema de Pitágoras, também já conhecido pelos chineses no século XII a.C.), resolviam equações do primeiro e do segundo graus, calculavam áreas e volumes de certas figuras geométricas, determinaram a raiz de 2 com grande precisão, etc. Certamente, a essas alturas, as descobertas matemáticas não mais se faziam de maneira puramente indutiva e contavam com o apoio de algum raciocínio dedutivo não formalizado, que desconhecemos.

Dentre todos os antigos documentos matemáticos que chegaram aos dias de hoje, talvez os mais famosos sejam os chamados **Papiro de Ahmes** (ou de Rhind) e **Papiro de Moscou**. O de Ahmes é um longo papiro egípcio, de cerca de 1650 a. C. e contém uma descrição verbal (desconhecia-se o conceito de "fórmulas", gerais) de como fazer-se o cálculo correto do volume de um tronco de pirâmide, o que demonstra um conhecimento notável para a época. Muito provavelmente existiram papiros análogos anteriores, mas estes foram os mais velhos que se salvaram. Além disto, o de Ahmes notabiliza-se por ter sido o autor o mais antigo matemático cujo nome a História registrou. Em ambos os papiros aparecem problemas que contêm, tímida e disfarçadamente, equações do 1º grau.

De um modo geral, somente os números eram representados por símbolos: os desenvolvimentos eram, em sua quase totalidade, expresso por palavras, uma forma de expressão que hoje é conhecida por **álgebra retórica**. Dentre os raros símbolos matemáticos criados pelos egípcios, destacam-se o da soma e o da subtração, respectivamente um par de perninhas caminhando na direção da escrita ou contrariamente a ela.

Um dos problemas de Ahmes dizia: **Uma quantidade, somada a seus $\frac{2}{3}$, mais sua metade e mais sua sétima parte perfaz 33. Qual é esta quantidade?**

No simbolismo atual, escreveríamos rapidamente: $x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x = 33$ ou seja, $\frac{97}{42}x = 33$, o que é uma equação do 1º grau. Evidentemente, os egípcios não adotavam a simbologia algébrica moderna, coisa inventada há poucos séculos. Não sabiam, também, resolver por nossos métodos nem mesmo as equações do 1º grau. Entretanto, usavam um artifício muito engenhoso que lhes permitia encontrar a resposta correta e que veio a ser chamado de **"Regra da Falsa Posição"**.

Por exemplo: qual o número que somado à sua terça parte dá 16? Pela Regra da Falsa Posição, fazia-se uma hipótese inicial qualquer (que fosse conveniente) a respeito do número e verificava-se o que ocorria. Suponhamos, em nosso caso, que tal número fosse 6. Ora, 6 somado com a sua terça parte dá 6 + 2 = 8, exatamente a metade dos 16 que deveria dar. Portanto, o número procurado é o dobro de 6, ou seja, 12.

Era uma forma legítima, mas sofrida de resolver uma questão que hoje é banal, porém misteriosa no passado.

Conforme Boyer [2] os Babilônicos também achavam muito útil uma tabulação dos valores de $n^3 + n^2$ para valores inteiros de n, tabela essencial na álgebra babilônica; esse assunto atingiu nível consideravelmente mais alto na Mesopotâmia que no Egito. Muitos textos de problemas do período babilônico antigo mostram que a solução da equação quadrática completa de três termos não constituía dificuldade para os babilônicos, pois tinham desenvolvido operações algébricas flexíveis. Podiam transportar termos em uma equação somando iguais a iguais, e multiplicar ambos os membros por quantidades iguais para remover frações ou eliminar frações. Somando $4ab$ a $(a - b)^2$ podiam obter $(a + b)^2$, pois muitas formas simples de fatoração lhes eram familiares. Não usavam letras para quantidades desconhecidas, pois o alfabeto não fora inventado, mas palavras como *comprimento, largura, área e volume* serviam bem nesse papel. Que tais palavras possam ter sido usadas em um sentido bem abstrato é sugerido pelo fato de os babilônicos não hesitarem em somar um *comprimento* com uma *área*, ou uma *área* com um *volume*. A álgebra egípcia tratara muito de equações lineares, mas os babilônicos evidentemente as acham demasiado elementares para merecer muita atenção. Um problema pede o peso x de uma pedra se $(x + \dfrac{x}{7}) + \dfrac{1}{11}(x + \dfrac{x}{7})$ é um mina; a resposta é dada simplesmente como 48; 7, 30 gin (número na base sexagesimal), onde 60 gin formam um mina (o referido número na base decimal corresponde a $48 + 7(60)^{-1} + 30(60)^{-2} = 48,125$). Em outro problema em um texto da Babilônia antiga, achamos duas equações lineares simultâneas em duas incógnitas, chamadas respectivamente primeiro anel de prata e segundo anel de prata. Se as denotarmos por x e y, em nossa notação as equações são $\dfrac{x}{7} + \dfrac{y}{11} = 1$ e $\dfrac{6x}{7} = \dfrac{10y}{11}$.

A resposta é dada laconicamente em termos da regra

$$\frac{x}{7} = \frac{11}{7+11} + \frac{1}{72} \quad e \quad \frac{y}{11} = \frac{7}{7+11} - \frac{1}{72}$$

Em outro par de equações, parte do método de resolução está incluído no texto. Aqui $\frac{1}{4}$ da largura + comprimento = 7 mãos e comprimento + largura = 10 mãos. A solução é achada primeiro substituindo cada *mão* por 5 *dedos* e então observando que uma largura de 20 dedos e um comprimento de 30 dedos satisfazem a ambas as equações. Em seguida, porém, a solução é achada por um método alternativo, equivalente a uma eliminação por combinação. Exprimindo todas as dimensões em termos de mãos, e fazendo comprimento e larguras iguais a x e y respectivamente, as equações ficam $y + 4x = 28$ e $x + y = 10$. Subtraindo a segunda da primeira tem-se o resultado $3x = 18$; daí $x = 6$ mãos ou 30 dedos e $y = 20$ dedos.

Os Babilônicos, na mesma época, já conseguiam trabalhar com equações do 2º grau e resolviam-nas por um método baseado no mesmo raciocínio empregado pelos hindus quase 3 milênios mais tarde, o chamado *completamento do quadrado*. Embora os resultados fossem corretos, os tabletes que contêm soluções de equações do 2º grau apresentam, como todos os demais, apenas sequências do como: *faça isso*, *faça aquilo*, *este é o resultado*; sem qualquer justificativa lógica sobre o caminho seguido.

De qualquer forma, foram admiráveis os feitos dos valentes escribas, astrônomos e engenheiros que viveram há milênios pois, mesmo na ignorância, não tiveram medo dos números e enfrentaram-nos com as armas de que poderiam dispor: a persistência, a confiança e a vontade de pensar.

2.3 Os Primeiros Registros sobre as Equações Quadráticas

Em 1930 Otto Neugebauer descobriu que as Equações quadráticas tinham sido tratadas eficientemente pelos babilônicos em alguns dos mais antigos textos de problemas, solução (equação quadrática com três termos) que para os egípcios parece ter sido demasiado difícil. Tais equações estavam na base sexagesimal. Em caracteres modernos o número na base sexagesimal pode ser adequadamente escrito usando ponto e vírgula para separar a parte inteira da fracionária, e uma vírgula para separar posições sexagesimais. Essa forma será usada em geral nesta seção para denotar números em notação sexagesimal. Exemplifiquemos o número sexagesimal $1; 24, 51, 10$ para a forma decimal, temos $1 + 24(60)^{-1} + 51(60)^{-2} + 10(60)^{-3}$.

Exemplo 8. *Um problema pede o lado de um quadrado se a área menos o lado dá 14,30.*

A solução desse problema, equivalente a resolver $x^2 - x = 870$, é expressa assim:

Tome a metade de 1, que é 0;30, e multiplique 0;30 por 0;30, o que dá 0;15; some isto a 14,30, o que dá 14,30;15. Isto é o quadrado de 29;30. Agora some 0;30 a 29;30 e o resultado é 30, o lado do quadrado.

De acordo com Boyer [2] a solução babilônica, é claro, equivale exatamente à fórmula $x = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q} + \frac{p}{2}$ para uma raiz da equação $x^2 - px = q$, a fórmula quadrática que qualquer aluno de ensino médio conhece. Em outro texto, a equação $11x^2 + 7x = 6; 15$ foi reduzida ao tipo padrão, $x^2 + px = q$, multiplicando primeiro tudo por 11, para obter $(11x)^2 + 7(11x) = 1, 8; 45$. Essa é uma quadrática em forma normal para a incógnita $y = 11x$, e a solução para y é achada facilmente pela regra familiar $y = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q} - \frac{p}{2}$, e dela se calcula então o valor de x. Essa solução é um notável exemplo de uso de transformações algébricas.

Até os tempos modernos, não se pensava em resolver uma equação quadrática da forma $x^2 + px + q = 0$, onde p e q são positivos, pois a equação não tem raiz positiva. Por isso, as equações quadráticas na antiguidade e na Idade Média, e mesmo no começo do período moderno, foram classificadas em três tipos:

1. $x^2 + px = q$.
2. $x^2 = px + q$.
3. $x^2 + q = px$.

Todos os três tipos são encontrados em textos de período babilônico antigo, de uns 4.000 anos atrás. Os dois primeiros tipos estão exemplificados nos problemas dados acima; o terceiro aparece frequentemente em textos de problemas, onde é tratado como equivalente ao sistema simultâneo $x + y = p$, $xy = q$. Tão numerosos são os problemas em que se pede achar dois números dados seu produto e, ou sua soma ou sua diferença, que eles parecem ter sido para os antigos, tanto babilônicos quanto gregos, uma espécie de forma *normal* à qual as quadráticas se reduzem. Então, transformando as equações simultâneas $xy = a$ e $x \pm y = b$ no par de equações lineares $x \pm y = b$ e $x \mp y = \sqrt{b^2 \mp 4a}$, os valores de x e y são achados por uma adição e uma subtração. Uma tábua cuneiforme de Yale, por exemplo, pede a solução do sistema $x + y = 6, 30$ e $xy = 7, 30$. As instruções do escriba são essencialmente as seguintes. Primeiro ache

$$\frac{x+y}{2} = 3; 15$$

e então ache

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 10; 33, 45$$

a seguir,

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = 3; 3, 45 \ \ e \ \ \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy} = 1; 45$$

logo,

$$\left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x+y}{2}\right) = 3; 15 + 1; 45.$$

e

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)-\left(\frac{x+y}{2}\right)=3;15-1;45.$$

Das duas últimas equações é evidente que $x = 5$ e $y = 1\frac{1}{2}$. Como as quantidades x e y entram simetricamente nas equações dadas, pode-se interpretar os valores de x e y como duas raízes da equação quadrática $x^2 + 7;30 = 6;30x$. Outro texto babilônico pergunta qual o número que somado com o seu recíproco dá 2;0,0,33,20. Isso leva a uma equação quadrática do tipo 3, e novamente temos duas soluções, 1;0,45 e 0;59,15,33,20.

Segundo Eves [10], o Egito e a Mesopotâmia foram as fontes onde a Europa começou a obter seus conhecimentos matemáticos. Neste processo de assimilação, os gregos desempenharam um importantíssimo papel, pois foram eles os primeiros europeus que, em contato com o Oriente Médio, interessaram-se pelas técnicas e reconheceram a utilidade da Geometria. Esta palavra, aliás, é de origem grega e significa **medida da terra** porque naquele tempo era este um dos principais usos que dela se fazia.

O primeiro grande matemático grego foi Thales, da cidade jônia de Mileto, colônia grega em território que hoje faz parte da Turquia.

Tales visitou o Egito e a Babilônia e de lá trouxe para a Grécia o estudo da Geometria. Entretanto, ao invés de apenas transmitir o que aprendera, introduziu um conceito revolucionário: **as verdades matemáticas precisam ser demonstradas**. Foi a primeira vez que um homem havia explicado este princípio fundamental de toda a atividade científica. Merecidamente, ele foi considerado um dos Sete Sábios da Grécia.

A partir daí começaram as demonstrações dos teoremas. Tales deu o pontapé inicial, provando que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais, que qualquer diâmetro divide o círculo em duas partes iguais, que um ângulo inscrito em um semi-círculo é sempre reto, que feixes de paralelas cortadas por transversais produzem segmentos proporcionais, etc. Poucas décadas depois, Pitágoras , que nascera na ilha de Samos, a 50 quilômetros de Mileto, e que provavelmente estudara com Tales ou com seus discípulos na chamada Escola de Mileto, demonstrou o teorema dos triângulos retângulos, sem dúvida o mais famoso e popular de toda a Matemática.

De acordo com Mol [13] muitos séculos antes de Pitágoras, os babilônicos e chineses já sabiam daquela propriedade geral, enquanto os egípcios conheciam-na para o caso particular do triângulo de lados 3, 4 e 5, mas foi o célebre grego quem primeiro apresentou uma prova para tal relação entre hipotenusas e catetos. Embora nascido em Samos, Pitágoras passou a maior parte da sua vida adulta na cidade de Crotona, no Sul da Itália, onde criou (circa 540 a. C.) uma escola voltada ao estudo da Filosofia, das Ciências Naturais e da Matemática. Em poucas décadas os pitagóricos espalharam por todo o mundo grego uma verdadeira febre pelo estudo da Matemática, colocando a civilização em um caminho que nos trouxe à era científico-tecnológica de hoje. Esta, certamente, foi a maior contribuição histórica de Pitágoras e a razão pela qual o filósofo-matemático inglês Bertrand Russel (1.872 - 1.970) considerava-o "*um dos* *maiores homens que já existiram*". A natureza mística da irmandade dos pitagóricos e sua grande influência na cidade provocaram uma revolta na população e Pitágoras precisou refugiar-se na cidade de Metaponto, também no Sul da Itália, onde diz-se que morreu assassinado em uma rebelião popular.

Quando Pitágoras demonstrou que em um triângulo retângulo vale a relação

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{2.2}$$

produziu-se, pela primeira vez na Europa, uma equação do 2º grau, com um atraso de pelo menos 1.200 anos em relação ao que já havia acontecido na Babilônia. É importante mencionar que os pitagóricos não se restringiram à Geometria e fizeram importantes incursões também na Aritmética, por exemplo encontrando métodos gerais para se calcular a soma dos termos de uma progressão aritmética e a soma dos quadrados dos números naturais.

Após Tales e Pitágoras, as descobertas geométricas e aritméticas avançavam rapidamente. Em 338 a. C., Filipe II, da Macedônia, passou a controlar a maior parte do mundo grego. Após ser assassinado em 336 a. C., o poder passou às mãos de seu filho, Alexandre, de apenas 20 anos, que veio a ser considerado o maior general da Antiguidade. Em 334 a. C., Alexandre deu início à conquista do Império Persa e em sete anos alcançou seu objetivo, tendo chegado até o Norte da Índia. Segundo Garbi [11], o Egito foi conquistado em 332 a. C. e ali, no delta do Nilo, ele fundou uma cidade portuária chamada Alexandria. Após sua morte, em 323 a. C., o império foi dividido entre os três maiores generais macedônicos, cabendo o Egito a seu amigo de infância, o general Ptolomeu. Este governou aquele país sob o nome de Ptolomeu I, Soter, e deu início a uma dinastia de reis macedônicos no Egito cuja última representante foi a célebre rainha Cleópatra. Estimulado pelo filósofo Demétrio, de Falero, que se mudara de Atenas para Alexandria, como comenta Burton [4], Ptolomeu I criou a chamada **Universidade de Alexandria**, formada por um museu e uma gigantesca biblioteca, concebida para abrigar todas as obras científicas e filosóficas produzidas no mundo grego.

2.4 Euclides entra em Cena com *Os Elementos*

Segundo Garbi [11], foi na Universidade de Alexandria que, por volta de 300 a. C., surgiu um gênio que se encarregou de sintetizar e sistematizar o conhecimento matemático que se reunira até então. Este homem foi Euclides, autor dos Elementos, considerado por muitos o mais influente livro-texto de Matemática de todos os tempos. Não se sabe onde Euclides nasceu, nem mesmo se isto ocorreu em território grego. Parece provável que tenha estudado em Atenas por algum tempo, mas o fato é que revelou seu talento em Alexandria, onde dirigiu a área de Matemática do Museu e escreveu vários livros, entre eles os célebres Elementos.

Já foi dito que Tales revolucionou o pensamento matemático ao estabelecer que as verdades precisavam ser demonstradas, com o que criou a matemática dedutiva. Euclides manteve este conceito, mas fez nele uma ressalva que, por si só, bastaria para imortaliza-lo: nem todas as verdades podem ser provadas; algumas delas, as mais elementares, devem ser admitidas sem demonstração.

Os Elementos, escritos em 13 livros, realizaram o prodigioso trabalho de sistematizar os conhecimentos da Geometria elementar, de forma rigorosa e dedutiva, partindo de um número mínimo de definições e de verdades aceitas sem provas. A ideia básica dos Elementos influenciou toda a produção científica posterior até nossos dias e ele é o mais antigo livro-texto que ainda continua em vigor atualmente. Albert Einstein disse que quem, na juventude, não teve seu entusiasmo despertado por Euclides, certamente não nasceu para ser cientista.

A quase total dedicação dos matemáticos gregos à Geometria custou-lhes o sacrifício dos conhecimentos aritméticos. A Grécia não foi forte em Aritmética e uma das razões pode ter sido o fato de que ela não dispunha de um adequado sistema de numeração. Apesar disto conforme Commandino [6], Euclides demonstrou alguns importantíssimos teoremas da Teoria dos números e introduziu conceitos que se tornaram fundamentais na solução de equações. Logo no início dos Elementos ele explicou algumas verdades evidentes por si mesmas, agrupando-as em **postulados de natureza geométrica** (cinco) e em **noções comuns** (também cinco), válidas genericamente. As noções comuns de Euclides foram:

a) Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.

b) Se iguais forem somados a iguais, os resultados serão iguais.

c) Se iguais forem subtraídos de iguais, os resultados serão iguais.

d) Coisas coincidentes são iguais entre si.

e) O todo é maior do que a parte.

Embora não tenha sido diretamente enunciada por Euclides, é fácil aceitar outra verdade:

f) Iguais multiplicados ou divididos por iguais continuam iguais.

Aqui estava a chave para a solução das equações do 1º grau.

Suponha-se, por exemplo, a seguinte equação

$$4x + 3 = 15$$

Pela noção comum c), se subtrairmos dos dois lados o número 3, a igualdade se preserva. Então:

$$4x + 3 - 3 = 15 - 3 \;\; ou \;\; 4x = 12$$

Pela verdade f), se dividirmos os dois lados pelo número 4, a igualdade se preserva. Então:

$$\frac{4x}{4} = \frac{12}{4} \;\; ou \;\; x = 3$$

E por fim, depois de tanto tempo, estava encontrado um método geral de resolução das equações do 1º grau, sem os sofrimentos da Regra da Falsa Posição. E tudo com base em verdades evidentes por si mesmas, válidas tanto para a Geometria quanto para a Aritmética.

É muito importante fazer aqui uma observação. Qualquer estudante que tenha rudimentos de Matemática sabe que, ao se passar um número de um lado para outro de uma equação, ele muda de sinal.

Exemplo 9. $2x^2 + 3 = 6$ *é equivalente a* $2x^2 = 6 - 3$ *(o 3 passou para a direita e mudou de sinal). No entanto, não é que o 3 tenha passado para o outro lado e mudado de sinal. Isto é apenas aparente, ou seja, o que ocorre é a subtração do número 3 aos dois membros da equação.*

O domínio que os gregos tiveram sobre a Geometria permitiu-lhes resolver alguns tipos de equações do 2º grau apenas com régua e compasso.

Depois de Euclides,conforme Garbi [11] ainda no período ptolemaico, passaram pela universidade de Alexandria outros grandes matemáticos, como: Aristarco; Arquimedes, o maior gênio da Antiguidade e um dos três maiores de todos os tempos; Eratóstenes; Apolônio, autor de magistral obra sobre as secções cônicas e Hiparco, o criador da Trigonometria. A conquista do Egito por Roma em 31 a.C. afetou bastante o desempenho da Universidade e somente um século depois voltaram a aparecer outros grandes nomes, como: Herão; Menelau; Cláudio Ptolomeu; Diofanto, o maior teórico dos números da Antiguidade; Papus; Têon e sua filha Hipácia. Conforme a comissão Women in Science [17], por volta de 400 dC, Hipácia havia se tornado a cabeça do Neo-platônico de Alexandria Escola, onde ensinou astronomia, matemática e filosofia, especialmente a Obras de Platão e Aristóteles. Ela fez tais realizações na literatura e na ciência. A morte de Hipácia, assassinada por uma turba de fanáticos cristãos em 415 d.C., simbolizou o fim da matemática grega. A Escola de Alexandria continuou a existir por várias centenas de anos mais segundo Burton [4].

Com a tomada de Roma pelos bárbaros godos de Odoacro, em 476 d.C., a Europa entrou na Idade das Trevas e somente começou a emergir dela muitos séculos depois. Neste período, o fogo sagrado da Rainha das Ciências passou a ser velado por dois outros povos: os árabes e os hindus.

2.5 As Equações do 2º Grau são Vencidas

As guerras, nos primeiros séculos depois de Cristo, consumiam as energias dos povos e pouco sobrava para ser dedicado ao progresso das ciências. Em 395 o Império dividiu-se em dois, em Ocidental e Oriental, porém a cultura acumulada na Antiguidade Clássica sobreviveu apenas no Império Romano do Oriente, que ainda resistiu por séculos embora tenha perdido o Egito aos árabes no ano 641. Por volta de 570 nasce Maomé e em 613 começou sua pregação pública. Unidos pelos ensinamentos islâmicos de Maomé, mais tarde compilados no Corão, os muçulmanos completaram a conquista de toda a península arábica e das regiões fronteiriças da Síria e do atual Iraque em 632. A partir daí, outros países foram caindo em sequência e, em poucas décadas, o império muçulmano chegou à fronteira da Espanha com a França, no Ocidente, e à Índia no Oriente.

O Egito caiu em 641 e os 600.000 manuscritos da Biblioteca de Alexandria, penosamente acumulados ao longo de séculos, arderam durante meses nas caldeiras dos banhos públicos da cidade. O conquistador árabe que decretou tão doloroso fim ao repositório da cultura clássica, o califa Omar, entendeu que os livros, ou repetiam os ensinamentos do Corão e eram supérfluos, ou os contrariavam e eram nocivos. Em ambos os casos deveriam ser queimados. Mas é preciso dizer que, antes de Omar, a passagem da esquadra de Júlio César por Alexandria e, séculos depois, a ação de fanáticos cristãos já haviam causado graves danos à Biblioteca.

Segundo a comissão Women in Science [17], estudiosos de Alexandria escreveram numerosos tratados matemáticos, que foram perdidos quando a biblioteca de Alexandria foi destruída. Com o triste episódio, parecia que o império árabe viria a tornar sinônimo de obscurantismo nas ciências e na cultura. O que ocorreu foi o contrário. Em pouco tempo os sucessores de Maomé perceberam e reconheceram a importância do saber e das artes e passaram a patrociná-los e em ambas as partes do mundo islâmico o progresso científico e cultural foi grande e rápido.

Bagdad foi construída às margens do rio Tigre e o califa al-Mansur, quem a construiu, desejou fazer dela uma nova Alexandria e para lá atraiu sábios de várias regiões, inclusive judeus e cristãos e adotaram o eficiente sistema indiano de numeração. Em pouco tempo foi ordenado que os Elementos fossem vertidos para o Árabe, sendo este fato de suma importância pois, muito mais tarde, esta foi a fonte a que a Europa recorreu para reencontrar os perdidos ensinamentos de Euclides. Um pouco mais tarde foi criado em Bagdad uma escola científica cuja biblioteca foi a melhor do mundo desde a que existira em Alexandria. Assim foram salvas importantes obras de Euclides, Arquimedes, Apolônio, Cláudio Ptolomeu e outros gênios da Antiguidade Clássica.

Al-Manun, que reinou entre 813 e 833, convidou para a sua corte muitos dos melhores cientistas do mundo e entre eles estava o famoso astrônomo e matemático Abu-Abdullah Muhammed ibn-Musa al-Khwarizmi, de quem herdamos as palavras algarismo e algoritmo, corruptelas de seu nome, e **álgebra**. Tendo-lhe sido solicitado por Al-Mamun que produzisse uma obra popular sobre as equações, ele escreveu o livro Al-Kitab al-jabr wa'l Muqababalah, título que pode ser aproximadamente traduzido por *O Livro da Restauração e do Balanceamento*. A palavra **Al-jabr** era empregada por al- Khwarizmi para designar operações em que, por exemplo, a equação $x - 4 = 3$ passa a $x = 7$, significando uma *restauração* de $x - 4$ de modo a tornar-se a incógnita completa x. Foi assim que nasceu a palavra **Álgebra**, presente em todos os idiomas do planeta, tão empregada na Matemática e que está claramente relacionada às noções comuns de Euclides. Al-Khwarizmi também popularizou o uso do *sistema hindu* de numeração decimal, utilizado hoje em todo o mundo, cujos elementos fundamentais são os algarismos de zero a nove e seu valor em função da posição ocupada no número.

Durante o primeiro milênio da era cristã a Índia produziu célebres matemáticos e astrônomos, como Varahamihira e Brahmagupta, mas é o nome de **Bhaskara** (1.114-1.185) que mais facilmente vem a nossa memória, por estar ligado à fórmula geral da solução das equações do segundo grau. A este respeito há um fato curioso: a fórmula de Bhaskara não foi descoberta por Bhaskara. Conforme ele mesmo relatou no século 12, a mencionada fórmula fora encontrada um século antes pelo matemático hindu **Sridhara** e publicada em uma obra que não chegou até nós.

Buscou-se uma forma de reduzir o grau da equação do 2º para o 1º grau, através da extração de raízes quadradas. Este foi o engenhoso instrumento que os hindus utilizaram com sucesso para chegar à Fórmula de Bhaskara. Seja a equação geral do 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ com } a \neq 0.$$

Portanto:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

ou

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Para extrair a raiz quadrada de $x^2 + \frac{b}{a}x$, não sendo ela um binômio perfeito, "O ovo de Colombo"foi somar aos dois lados da igualdade alguma coisa que tornasse o lado esquerdo um quadrado perfeito, exatamente o mesmo raciocínio seguido pelos Babilônicos 3.000 anos antes. A quantidade a ser somada é $\frac{b^2}{4a^2}$, pois

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

é um quadrado perfeito. Assim, tem-se:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

onde foi usada a mencionada noção de Euclides. Como $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$ é quadrado perfeito $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, tem-se:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

ou

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Após termos um quadrado perfeito, estamos prontos para extrair raízes quadradas, mas temos que tomar cuidado, pois os babilônicos não se deram conta de que números positivos ou negativos elevados ao quadrado são sempre positivos. Portanto, extrações de raízes quadradas geram sempre duas alternativas, uma com sinal positivo e outra com sinal negativo.

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

ou

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Logo,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{2.3}$$

E assim temos a famosa fórmula de Bhaskara, que não foi deduzida por ele mas que fez seu nome ficar imortalizado. As equações do 2º grau são a chave para a solução de um problema clássico: encontrar dois números, x e y, conhecendo-se sua soma S e seu produto P. Correspondente ao sistema:

$$\begin{cases} x+y=S \\ x.y=P \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} y=S-x \\ x.y=P \end{cases}$$

Logo, $x(S-x)=P$ ou $x^2-Sx+P=0$ e portanto,

$$x=\frac{S\pm\sqrt{S^2-4P}}{2} \qquad e \qquad y=S-x=\frac{S\mp\sqrt{S^2-4P}}{2}$$

Pelo menos duas constatações importantíssimas decorreram da Fórmula de Bhaskara, conforme Garbi [11]:

1) Equações acima do 1º grau poderiam ter mais do que uma solução;

2) Em alguns casos, a aplicação da fórmula conduzia a uma coisa misteriosa: a raiz quadrada de um número negativo.

Alguns séculos transcorreram até que se entendesse o significado das raízes quadradas de números negativos e foi a fórmula de Bhaskara que, no século 12, exibiu pela primeira vez ao mundo aquelas misteriosas entidades.

Vencidas as equações do 2º grau, a inesgotável curiosidade dos matemáticos levou-os a conjecturar sobre as formas de resolver as do 3º grau.

Capítulo 3

A História das Equações do 3º Grau e toda a sua Complexidade

Neste capítulo abordaremos toda a evolução das equações do 3º grau desde os seus primeiros registros até uma solução contemporânea.

3.1 Os Primeiros Registros das Equações do 3º Grau

A redução babilônica de uma equação quadrática da forma $ax^2 + bx = c$ à forma normal $y^2 + by = ac$ pela substituição $y = ax$ mostra o grau extraordinário de flexibilidade da álgebra mesopotâmia. Não há registro no Egito de resolução de uma equação cúbica, mas entre os babilônicos há muitos exemplos.

Cúbicas puras como $x^3 = 0; 7, 30$ (base sexagesimal) eram resolvidas por referência direta às tabelas de cubos e raízes cúbicas, onde a solução $x = 0; 30$ era encontrada. A interpolação linear dentro das tabelas era usada para achar aproximações para valores não constantes na tabela. As cubicas mistas na forma padrão $x^3 + x^2 = a$ eram resolvidas de modo semelhante, por referência às tabelas disponíveis, que davam valores para a combinação $n^3 + n^2$ para valores inteiros de n entre 1 e 30. Com a ajuda dessas tabelas, viam facilmente que a solução, por exemplo, de $x^3 + x^2 = 4, 12$ é igual a 6. Para casos ainda mais gerais de equações de terceiro grau, como $144x^3 + 12x^2 = 21$, os babilônicos usavam seu método de substituição. Multiplicando ambos os membros por 12 e usando $y = 12x$, a equação fica $y^3 + y^2 = 4, 12$, da qual se acha que y é igual a 6, donde x é $\frac{1}{2}$ ou $0; 30$. Cúbicas da forma $ax^3 + bx^2 = c$ são redutíveis à forma babilônica normal multiplicando tudo por $\frac{a^2}{b^2}$, cúbica do tipo padrão na incógnita $\frac{ax}{b}$. Lendo na tabela o valor dessa incógnita, determina-se o valor de x. Se os babilônicos eram ou não capazes de reduzir a cúbica geral de quatro termos $ax^3 + bx^2 + cx = d$ à sua forma normal, não se sabe. Porem não é improvável que pudessem reduzi-la, pois é indicado pelo fato de que basta a resolução de uma quadrática para levar a equação de quatro termos à forma de três termos $px^3 + qx^2 = r$. Não há, porém, evidência que sugira que os matemáticos mesopotâmios, de fato, realizaram tal redução da equação cúbica geral.

Com o simbolismo moderno é fácil ver que $(ax)^3 + (ax)^2 = b$ é essencialmente o mesmo tipo de equação $y^3 + y^2 = b$; mas reconhecer isso sem a atual notação seria bem mais complexo. A álgebra babilônica tinha atingido um tal nível de abstração que as equações $ax^4 + bx^2 = c$ e $ax^8 + bx^4 = c$ eram reconhecidas como sendo apenas equações quadráticas disfarçadas, isto é, quadráticas em x^2 e x^4.

3.2 Fibonacci e Pacioli Tentam Vencer as Equações do 3º Grau

Numa época bem mais a frente, no começo do segundo milênio, alguns fatos prenunciaram a chegada de uma nova era para as ciências do Ocidente. Por volta de 970, um francês conhecido por Gerbert d'Aurillac estudou na Espanha muçulmana e ali familiarizou-se com a Astronomia e a Matemática dos árabes, em especial com o sistema de numeração por eles trazido da Índia. De volta à Europa, Gerbert tornou-se, sob o nome Silvestre II, Papa da Igreja Católica em Roma. Dessa importante posição, Gerbert, o único matemático até hoje a ocupar o trono de São Pedro, estimulou o ensino da matemática e tentou promover a substituição dos inadequados algarismos romanos pelos indo-arábicos, mas os cardeais opuseram-se a isso porque consideravam *feitiçaria satânica* tudo o que se originava no mundo islâmico. Não muito depois, um notável erudito inglês, conhecido por Adelard de Bath, viajou por vários países do mundo muçulmano - Espanha, Ásia Menor e Egito - e conseguiu contrabandear para a Inglaterra uma cópia dos Elementos de Euclides em Árabe, tabelas astronômicas compiladas por al-Khwarizmi e informações detalhadas sobre o sistema indo-arábico de numeração. Traduzindo para o latim tudo o que trouxera, Adelard colocou a Inglaterra em contato com a esquecida Matemática grega e com as facilidades do pouco conhecido sistema de numeração dos árabes.

Foi na época de ebulição na Europa, nos séculos 12 e 13, que viveu o maior matemático europeu da Idade Média: Leonardo de Pisa, também conhecido como Leonardo Fibonacci (filho de Bonacci) ou Leonardo Pisano, filho de um próspero encarregado de negócios das cidades de Veneza, Pisa e Gênova, nasceu em Pisa no ano de 1.175 e passou parte da juventude no norte da África, onde teve intenso contato com a cultura Árabe. Em seguida, viajou pelo Mediterrâneo, visitando o Egito, a Síria, a Grécia, a Sicília, o Sul da França e Constantinopla, o que lhe permitiu estudar vários dos sistemas aritméticos então existentes. Convencido de que o método indo-arábico era o melhor de todos, passou a dedicar seus esforços a transmiti-lo a seus compatriotas italianos, o que o afastou totalmente das atividades comerciais de sua família.

De volta à Itália, publicou em 1202 sua primeira obra, o Liber Abaci, onde descreveu o sistema numérico dos árabes, deu profundo tratamento às questões aritméticas e onde, pela primeira vez um cristão discorreu sobre Álgebra. As palavras iniciais do Liber Abaci são históricas: "**Estes são os nove símbolos dos hindus: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Com eles, mais o símbolo 0, que em árabe é chamado de ZÉFIRO, qualquer número pode ser escrito.**"

Esta terceira tentativa de introdução de um novo sistema na Europa foi bem sucedida, pois a obra de Leonardo teve ampla aceitação na Itália. Foi dessa forma que os algarismos arábicos começaram a expulsar da Aritmética, em 1.202, os desconfortáveis algarismos romanos.

Leonardo deu algumas contribuições à então incipiente simbologia algébrica. As questões eram então escritas utilizando muitas palavras, uma vez que inexistiam símbolos mesmo para coisas elementares como a incógnita e suas potências. Ele introduziu as palavras "res"("coisa", em Latim) e "radix"(raiz) para representar a incógnita, enquanto os termos "censos"e "cubus"representavam, respectivamente, seu quadrado e seu cubo. À falta de um símbolo, ele utilizava a palavra aequalis, para representar a igualdade. Ele também empregou a letra R maiúscula para indicar a raiz quadrada e foi um dos primeiros matemáticos a utilizar o traço horizontal para grafar as frações ordinárias.

Em 1.220 Leonardo escreveu a Pratica Geometriae e em 1.228 uma edição enriquecida e ampliada do Liber Abaci. A estas alturas, sua reputação de grande matemático já era conhecida e, em 1.225, quando de passagem por Pisa, O Imperador Frederico II decidiu promover uma espécie de competição para testar a habilidade de Leonardo. Uma das questões propostas por um conselheiro do Imperador foi encontrar, pelos métodos euclidianos, um segmento x que satisfizesse a questão $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$. Leonardo provou que o problema não poderia ser resolvido com régua e compasso (únicos instrumentos permitidos por Euclides), mas deu uma solução numérica aproximada, correta até a 9ª casa decimal: 1,3688081075.

Aí estava, mais uma vez, o desafio das equações do 3º grau, não resolvidas e, por isso mesmo, provocadoras dos cérebros destemidos, daqueles que jamais se conformam com problemas sem solução. A obra de Leonardo foi importantíssima, pois inspirou inúmeros seguidores, principalmente na Itália, e representou um grande marco na história da ciência ocidental.

O próximo matemático depois de Leonardo foi Pacioli que fez uma síntese do conhecimento matemático acumulado na Europa. Sua obra foi publicada em Veneza em 1494, sob o título Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita, e motivou inúmeros talentos matemáticos a somarem suas forças no desenvolvimento da Matemática. Seguindo o caminho de Fibonacci, Pacioli introduziu mais alguns símbolos na Álgebra: a incógnita foi chamada de "cosa"("coisa", em Italiano) e abreviada como co. Seu quadrado e seu cubo foram chamados de "censo"e "cubo", cujas abreviaturas eram, respectivamente, ce. e cu.

Pacioli acabou cometendo um erro grave quando afirmou que a solução das equações do 3º grau era tão impossível quanto a quadratura do círculo, que foi demolida algumas décadas depois por Tartaglia e Cardano na disputa que teve entre os dois.

3.3 Tartaglia, Cardano e as Equações do 3º Grau

De Girolamo Cardano, nascido em Pavia em 1501 e falecido em Roma em 1576, o mínimo a ser dito é que levou uma vida marcada por contrastes e extremos. Excepcional cientista, dedicou-se também a Astrologia. Astrólogo do Vaticano, escreveu um livro louvando a Nero, o grande perseguidor de cristãos do Império Romano. Autor do Liber de Ludo Aleae, onde brilhantemente introduziu a ideia de probabilidade que se usa modernamente, ali também ensinou maneiras de se trapacear nos jogos.

Apesar de traços pessoais nada dignificantes, Cardano legou à posteridade um livro que, à época, era sem dúvida o maior compêndio algébrico existente: a Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis, mais conhecida por Ars Magna, publicada em Nurenberg, na Alemanha, em 1545. O nome de Cardano também chegou até nós na expressão "eixo cardan", utilizado nos automóveis, embora a invenção não tenha sido dele.

Nícolo Fontana, apelidado Tartaglia, em comum com Cardano só tinha o talento matemático e a nacionalidade italiana. Nascido em Bréscia, em 1501, desde a infância teve a vida marcada pelo infortúnio, pelas lutas, pelas asperezas e por toda a sorte de dificuldades.

Nícolo, que tinha como apelido Tartaglia, que quer dizer gago, devido a um defeito na boca o qual causou também defeito na fala, por conta da agressão sofrida pelas tropas francesas que invadiu a Bréscia, sua cidade. Apesar de todo o sofrimento e dificuldades pelo qual passara, ainda se tornou professor de ciências. Ao longo da vida publicou diversas obras, usando o cognome Tartaglia, e foi o primeiro, cerca de 100 anos antes de Galileu, a realizar cálculos na técnica da artilharia. Mas o que o colocou definitivamente nos anais da Matemática foram suas disputas com Cardano sobre as equações do 3º grau.

Segundo a história, por volta de 1510, um professor de Matemática da Universidade de Bolonha, de nome Scipione del Ferro, encontrou uma forma geral de resolver as equações do tipo $x^3 + px + q = 0$. Embora tenha morrido sem publicar sua descoberta, ele a revelou a seu aluno, Antonio Maria Fior que, mais tarde, tentou adquirir notoriedade valendo-se da descoberta do mestre. Naquela época era frequente o lançamento de desafios entre os sábios (e, também, entre os que não o eram, mas desejaram parecer sê-lo) e Fior elegeu Tartaglia, já bastante conhecido por seu talento, como alvo. O desafio consistia na solução de diversos problemas que um deveria propor ao outro e Fior, naturalmente, pretendia apresentar questões que dependessem daquele tipo de equação de 3º grau, da qual somente ele detinha a solução. Tataglia aceitou o desafio, até porque não levava Fior em grande consideração mas, pouco antes da data marcada, veio a saber que seu oponente estava armado de um método descoberto pelo falecido professor Scipione del Ferro. Porém Tartaglia mobilizou todo o entusiasmo, a aplicação e a arte de que foi capaz, objetivando encontrar uma regra para a solução daquelas equações, o que conseguiu a 10 de fevereiro de 1535. Mas foi mais longe: além de resolver as do tipo $x^3 + px + q = 0$, também achou a fórmula geral para as do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$, que Fior não conhecia.

O resultado do desafio foi que, enquanto Tartaglia resolveu corretamente todos os problemas propostos por Fior, este nada conseguiu resolver dos apresentados pelo primeiro, já que implicavam a solução das equações do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$. Fior saiu humilhado do episódio e hoje só é lembrado como alguém que recebeu o merecido castigo ao pretender adquirir fama às custas de outrem.

Por esta época, Cardano estava escrevendo a Pratica Arithmeticae Generalis, englobando Álgebra, Aritmética e Geometia. Ainda acreditando no que dissera Luca Pacioli sobre a impossibilidade de uma solução geral para as equações do 3º grau, Cardano nem pretendia tocar no assunto em seu livro. Entretanto, ficou sabendo que Tartaglia achara a solução e resolveu pedir-lhe que a revelasse para que fosse publicada na Pratica. Tartaglia não concordou, compreensivelmente, alegando que sua intenção era publicá-la ele mesmo em um livro a ser escrito no futuro. Diante da negativa, Cardano ofendeu Tartaglia, acusando-o de mesquinho, egoísta e não interessado em colaborar com o desenvolvimento da humanidade. Algum tempo após a troca de insultos, Tartaglia recebeu uma carta assinada por um nobre italiano, convidando-o a visita-lo em Milão. Lá chegando, ao invés do fictício nobre, esperava-o o próprio Cardano que lhe implorou, sob juramentos de segredo, a revelação das cobiçadas fórmulas. Nas próprias palavras de Tartaglia, ele decidiu confiar em Cardano pois, se não acreditasse em um homem que fazia tais juramentos sobre o Evangelho, ele mesmo deveria ser considerado uma pessoa perversa e desumana. Aceita a promessa, Tartaglia mandou o segredo em um poema, de forma cifrada e misteriosa, que Cardano não conseguiu entender. Mais conversações, mais juras, mais promessas e finalmente, Tartaglia revelou tudo.

Conforme qualquer um poderia prever, Cardano quebrou todas as promessas e juramentos e, em 1545, fez publicar na Ars Magna, a fórmula revelada por Tartaglia. Embora tenha feito rasgados elogios a ele, acrescentou que, independentemente e trinta anos antes, Scipione del Ferro chegara aos mesmos resultados. A reação de Tartaglia foi pronta e explosiva: publicou sua versão dos fatos e denunciou Cardano por haver traído um sagrado juramento sobre a Bíblia. Em defesa de Cardano veio seu discípulo Ferrari, o descobridor da solução das equações do 4º grau. O círculo do ódio, rivalidade e intriga aumentou, desembocando em mais ofensas e desafios entre as partes envolvidas. O corajoso Tartaglia chegou a aceitar um debate público contra Cardano, no próprio território deste, Milão, mas quem compareceu no lugar do perjuro foi Ferrari. Após longas trocas de insultos, cada parte retirou-se cantando vitória, mas o debate, propriamente, não se realizou. No final, a posteridade foi injusta para com o sofrido Tartaglia: a fórmula que ele deduzira e que ensinara ao desleal inimigo, ao invés de receber seu nome, é hoje generalizadamente conhecida como Fórmula de Cardano. O que ocorrera com a fórmula de Bhaskara repetiu-se nas equações do 3º grau.

O que Tartaglia solucionara foram os tipos especiais $x^3+px+q=0$ e $x^3+px^2+q=0$ e não a equação geral $ax^3+bx^2+cx+d=0$. Comecemos esclarecendo que qualquer equação geral pode ser transformada facilmente em um daqueles tipos especiais, digamos $x^3+px+q=0$, fazendo $x=y+n$ e calculando n de modo a anular o termo de 2º grau.

Resolvendo a equação $ax^3+bx^2+cx+d=0$ temos:

Se $x=y+n$, então:

$$a(y+n)^3+b(y+n)^2+c(y+n)+d=0$$

ou

$$ay^3+y^2(b+3an)+y(3an^2+2bn+c)+(n^3a+bn^2+cn+d)=0$$

Fazendo $b + 3an = 0$

Tem-se $n = -\dfrac{b}{3a}$

A nova equação do 3º grau em y será do tipo $y^3+py+q = 0$ e, se resolvê-la, acharemos x que é $y + n$. Portanto, quando encontrou a solução das equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, Tartaglia deu uma resposta geral e não apenas particular ao problema, o que aumenta seu mérito.

Todas as grandes descobertas, invariavelmente, partem de uma ideia fundamental. No caso, a ideia de Tartaglia foi supor que a solução procurada era composta de 2 parcelas. Assim, escreveu

$$x = A + B$$

Pois, se os dois lados da equação sendo iguais, seus cubos também o serão e, portanto,

$$x^3 = (A + B)^3$$

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$$

como $A + B = x$

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx$$

ou

$$x^3 - 3ABx - (A^3 + B^3) = 0$$

Mas, também,

$$x^3 + px + q = 0$$

com

$$p = -3AB$$

e

$$q = -(A^3 + B^3)$$

ou

$$A^3B^3 = -\frac{p^3}{27}$$

e

$$A^3 + B^3 = -q.$$

Assim, A^3 e B^3 são dois números dos quais conhecemos a soma e o produto e este é um problema clássico que se resolve com equações do segundo grau. Logo tem-se:

$$A^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

e

$$B^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Como $x = A + B$, então,

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{3.1}$$

Esta é a chamada fórmula de Cardano, que não foi descoberta por ele, mas sim por Tartaglia. (é preciso chamar a atenção do leitor que a simbologia da época era totalmente diferente da de hoje e muito difícil. Ex.: uma equação que hoje escreveríamos $2x^3 + 5x = 17$, foi escrita por Cardano como $2cub' : 5rebae\overline{q}lis17$).

Foi um achado lindo e maravilhoso de Tartaglia. Vejamos como funciona seu método, em um exemplo concreto.

Exemplo 10. *Seja a equação $x^3 - 6x - 9 = 0$, sendo $p = -6$ e $q = -9$.*

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$$

$$x = 2 + 1 = 3.$$

Se verificarmos veremos que 3 é realmente a solução da equação, ou seja, a fórmula funcionou.

À primeira vista, imaginou-se que as equações do 3º grau estavam vencidas pela fórmula de Cardano (de Tartaglia), analogamente ao que a fórmula de Bhaskara fizera com as equações do 2º grau. Mas a ilusão durou pouco. Logo começaram a surgir dúvidas, perguntas e problemas na aplicação do método de Tartaglia e os matemáticos viram-se enrolados em questões que demandariam cerca de 200 anos e os esforços dos grandes cérebros dos séculos XVII, XVIII e inícios do XIX até que fossem definitivamente esclarecidas. Tartaglia mexera em um verdadeiro vespeiro que foi resolver a equação do 3º grau.

A mais elementar dúvida que surge naturalmente em quem observa a fórmula de Cardano (de Tartaglia), é a seguinte: se a fórmula de Bhaskara exibe, de maneira tão simples, as duas raízes das equações do 2º grau, por que é que a de Cardano só apresenta uma? É muito fácil achar exemplos de equações do 3º grau com 3 soluções, mas como fica isto diante de uma fórmula que só fornece uma? Onde estariam as outras duas?

3.4 A Necessidade dos Complexos

Rafael Bombelli, nascido em Bolonha, Itália, em 1530 e engenheiro hidráulico por profissão, foi o homem que conseguiu atravessar a ponte que levava aos novos números que desafiavam o entendimento dos matemáticos da época. Bombelli era um homem corajoso e sempre disposto a pensar em coisas novas.

Exemplo 11. *Seja a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$. Por simples verificação constata-se que $x = 4$ é uma de suas raízes (as outras duas, menos evidentes, são $-2+\sqrt{3}$ e $-2-\sqrt{3}$) Entretanto, se tentarmos resolvê-la pela Fórmula de Cardano, teremos $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. E temos como resultado não apenas na extração de raízes quadradas de números negativos mas também na extração de raízes cúbicas de números de natureza desconhecida.*

Aqui estava uma questão realmente séria e que não poderia simplesmente ser ignorada. Quando, nas equações do 2º grau, a fórmula de Bhaskara levava a raízes quadradas de números negativos, era difícil dizer que aquilo indicava a inexistência de soluções. Agora, entretanto, estava-se diante de equações do 3º grau com soluções evidentes, mas cuja determinação passava pela extração de raízes quadradas de números negativos.

O que ocorria com a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ pode ser generalizado.

Considere o produto

$$(x-a)(x-b)(x-c),$$

é evidente que seu desenvolvimento leva a um polinômio do 3º grau em x. Se ele for igualado a zero, ter-se-á uma equação do 3º grau, cujas raízes são $x = a$, $x = b$, $x = c$ pois, para qualquer destes 3 valores, o produto se anula.

Veremos que relação deve haver entre a, b e c para que o desenvolvimento do produto conduza a uma equação do tipo $x^3 + px + q = 0$, para qual é válida a Fórmula de Cardano.

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc$$

Para que inexista o termo do 2º grau é necessário e suficiente que $a+b+c = 0$ ou $c = -(a+b)$.

Portanto, a equação

$$(x-a)(x-b)(x-c) = 0$$

Tem por raízes a, b e $-(a+b)$ e equivale à equação

$$x^3 + [ab - (a+b)^2]x + ab(a+b) = 0$$

Aplicando-se a Fórmula de Cardano tem-se

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{ab(a+b)}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{ab(a+b)}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{ab-(a+b)^2}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{ab(a+b)}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{ab(a+b)}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{ab-(a+b)^2}{3}\right)^3}}$$

expressão esta que deve levar a $x = a$, b e $-(a+b)$, soluções já conhecidas de antemão.

Estudaremos a expressão que se encontra sob o radical quadrático e chamemo-la de $\triangle$

$$\triangle = \left(\tfrac{ab(a+b)}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{ab-(a+b)^2}{3}\right)^3$$

Efetuando-se as operações e simplificando-se o polinômio decorrente tem-se:

$$\Delta = \frac{-4a^6 - 12a^5b + 3a^4b^2 + 26a^3b^3 + 3a^2b^4 - 12ab^5 - 4b^6}{108}$$

É possível mostrar que o numerador acima é igual ao produto

$$-(a-b)^2(2a+b)^2(a+2b)^2.$$

Vejamos,

$$\begin{gathered}
-4a^6 - 12a^5b + 3a^4b^2 + 26a^3b^3 + 3a^2b^4 - 12ab^5 - 4b^6 = \\
-(4a^6 + 12a^5b - 3a^4b^2 - 26a^3b^3 - 3a^2b^4 + 12ab^5 + 4b^6) = \\
-(4a^6 + 4a^5b - 8a^5b + 16a^5b + a^4b^2 - 8a^4b^2 + 4a^4b^2 + 16a^4b^2 - 32a^4b^2 + 16a^4b^2 - 2a^3b^3 + \\
4a^3b^3 + 4a^3b^3 - 32a^3b^3 + 16a^3b^3 + 16a^3b^3 - 32a^3b^3 + a^2b^4 - 8a^2b^4 + 16a^2b^4 + 4a^2b^4 - \\
32a^2b^4 + 16a^2b^4 + 4ab^5 - 8ab^5 + 16ab^5 + 4b^6) = \\
-(4a^4 + 4a^3b + a^2b^2 - 8a^3b - 8a^2b^2 - 2ab^3 + 4a^2b^2 + 4ab^3 + b^4) \cdot (a^2 + 4ab + 4b^2) = \\
-(a^2 - 2ab + b^2) \cdot (4a^2 + 4ab + b^2) \cdot (a^2 + 4ab + 4b^2) = \\
-(a-b)^2(2a+b)^2(a+2b)^2.
\end{gathered}$$

Portanto

$$\Delta = -\frac{(a-b)^2(2a+b)^2(a+2b)^2}{108}$$

Ora se a e b são reais, Δ nunca é positivo.

Esta é uma constatação surpreendente pois, para que achemos a e b reais distintos pela Fórmula de Cardano, teremos obrigatoriamente que trabalhar com raízes quadradas de números negativos, coisa que, por muito tempo, pensou-se ser impossível. A surpresa é ainda maior quando se recorda que, nas equações do 2º grau, as duas raízes somente são reais quando $\Delta \geq 0$.

Para as equações do 3º grau, as 3 raízes somente são reais quando $\Delta \leq 0$! Realmente, Tartaglia encontrara uma verdadeira caixa de surpresas e os fatos indicavam claramente que os números com que a Matemática vinha trabalhando havia séculos não eram mais suficientes para o estudo da Álgebra. Não havia como negar as evidências de que se estava diante de um novo tipo de número, diferente de tudo o que se conhecia até então.

Para atravessar a ponte que levava aos novos números, os estudos de Bombelli começaram com a tentativa de conciliar o resultado fornecido pela Fórmula de Cardano para a equação

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

com a raiz $x = 4$, constatada por simples observação.

Conforme ele mesmo revelou em 1572 no livro L'algebra parte Maggiore dell' Arithmetica, seu método baseou-se no "pensamento rude" segundo o qual

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$$

e

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

deveriam ser números da forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$, respectivamente.

Assim supondo, escreveu

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b}$$

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - \sqrt{-b}$$

e deduziu que $a = 2$ e $b = 1$ pois

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}$$

e

$$(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - \sqrt{-121}$$

Assim

$$x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$$

resultado que se esperava obter.

Ao realizar seus cálculos, Bombelli criou as seguintes regras para trabalhar com $\sqrt{-1}$:

$$\begin{gathered}
(\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = -1 \\
(-\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = 1 \\
(-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) = -1 \\
(\pm)(\sqrt{-1}) = \pm\sqrt{-1} \\
(\pm)(-\sqrt{-1} = \mp\sqrt{-1}
\end{gathered}$$

Criou também a regra para a soma de dois números do tipo $m + n\sqrt{-1}$:

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-1}$$

Estavam lançadas as bases para o desenvolvimento de um gigantesco ramo da Matemática, com infindáveis aplicações práticas, principalmente na Eletrônica: A Teoria dos Números Complexos.

É importante que sejam feitas duas observações.

A primeira, é que Cardano foi o primeiro a manusear os números complexos. Em certa passagem da **ARS MAGNA**, ele escreveu que se alguém procurar dividir 10 em duas partes de modo que seu produto seja 40, verificará que isto é impossível. Entretanto, diz Cardano, o problema pode ser sim resolvido:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x.y = 40 \end{cases}$$

Portanto:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 100 \\ 4x.y = 160 \end{cases}$$

Subtraindo uma da outra

$$x^2 - 2xy + y^2 = -60$$
$$(x - y)^2 = -60 \Rightarrow x - y = \pm\sqrt{-60} = \pm 2\sqrt{-15}$$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = \pm 2\sqrt{-15} \end{cases} \quad \Rightarrow 2x = 10 \pm 2\sqrt{-15}$$

Consequentemente

$$x = 5 \pm \sqrt{-15}$$
$$y = 5 \mp \sqrt{-15}$$

É fácil constatar que tais números somam 10 e que seu produto é 40. Embora, a seguir, Cardano tenha acrescentado que aquele resultado era "tão sutil quanto inútil", deve ser creditado a ele a honra de ter sido o primeiro matemático a fazer algumas operações com números complexos.

A segunda, é quanto a um equívoco frequentemente cometido por alguns professores e livros-texto relativamente à origem dos números complexos: foram as equações do 3º grau e não a do 2º que desencadearam todo o desenvolvimento teórico havido naquela área, trabalho que durou mais de dois séculos a partir da ideia pioneira de Bombelli.

3.5 Viète e a sua Habilidade com Substituições

François Viète, que viveu na segunda metade do século XVI na França, também deixou a sua contribuição no campo das equações algébricas. Nesse campo, Viète tinha especial predileção por fazer substituições de incógnitas de modo a cair em problemas mais fáceis de serem resolvidos. Já vimos que, por exemplo, fazendo $x = y - (b/3a)$ consegue-se transformar a equação geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ em outra sem o termo do segundo grau, passível de resolução pelo método de Tartaglia. Esse recurso de mudança de incógnita pode ser de grande valia e Viète possuía excelente visão em fazer as substituições adequadas. Assim, através de um engenhoso artifício, conseguiu encontrar outro caminho algébrico para a solução das equações do 3º grau, diferente daquele descoberto por Tartaglia.

Seja a equação $x^3 + px + q = 0$.

Viète introduziu a incógnita auxiliar z, de modo que

$$x = z - \frac{p}{3z}$$

Obtém

$$\left(z - \frac{p}{3z}\right)^3 + p\left(z - \frac{p}{3z}\right) + q = 0$$

ou

$$z^3 - 3z^2\frac{p}{3z} + 3z\frac{p^2}{9z^2} - \frac{p^3}{27z^3} + pz - \frac{p^2}{3z} + q = 0$$

ou

$$z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0$$

que é uma equação do 2º grau em z^3 e, assim,

$$z^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}$$

Consequentemente,

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}}$$

Este resultado é correto e pode-se monstrar que é equivalente ao obtido por Tartaglia, embora pareçam diferentes.

Para mostrar a equivalência façamos $x = z - \dfrac{p}{3z}$, assim como fez Viète.

Logo

$$\left(z - \frac{p}{3z}\right)^3 + p\left(z - \frac{p}{3z}\right) + q = 0$$

ou

$$z^3 - 3z^2\frac{p}{3z} + 3z\frac{p^2}{9z^2} - \frac{p^3}{27z^3} + pz - \frac{p^2}{3z} + q = 0$$

ou

$$z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0$$

ou

$$(z^3)^2 + z^3q - \frac{p^3}{27} = 0$$

que é uma equação do 2º grau em z^3 do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ e, assim,

$$z_1^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \text{ e } z_2^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$z_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \text{ e } z_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Sabemos que o produto entre as raízes é $\frac{c}{a}$, em que c é igual a $-\frac{p^3}{27}$ e a é igual ao coeficiente angular de $(z^3)^2$ que é 1. Ou seja,

$$\frac{c}{a} = z_1^3 \cdot z_2^3$$

$$-\frac{p^3}{27} = z_1^3 \cdot z_2^3$$

$$(-\frac{p}{3})^3 = z_1^3 \cdot z_2^3$$

$$-\frac{p}{3} = z_1 \cdot z_2$$

$$p = -3z_1 \cdot z_2$$

Substituindo em $x = z - \frac{p}{3z}$, temos

$x_1 = z_1 - \frac{(-3z_1 \cdot z_2)}{3z_1} \Rightarrow x_1 = z_1 + z_2$

$x_2 = z_2 - \frac{(-3z_1 \cdot z_2)}{3z_2} \Rightarrow x_2 = z_2 + z_1$

Como $= z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

$x = x_1 = x_2 = z_1 + z_2$, portanto

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Entretanto, permaneciam todas as dúvidas sobre quantidades de raízes e operações com números complexos quando $\Delta < 0$.

Viète debateu-se com equações como a famosa $x^3 - 15x - 4 = 0$, (cujas raízes, todas reais, não podiam ser achadas pela fórmula de Cardano ou pela que ele próprio deduzira, pois implicavam trabalhar com números "imaginários") até que, num lampejo de genialidade, encontrou uma solução trigonométrica para o problema.

O caminho, como não poderia deixar de ser em se tratando de Viète, foi uma substituição de incógnitas. Estamos lembrados de que a Fórmula de Cardano foi achada por Tartaglia fazendo-se a substituição $x = A + B$. No método trigonométrico de Viète faz-se a substituição $x = k\cos\theta$.

Seja

$$\begin{gathered} x^3 + px + q = 0 \\ (k\cos\theta)^3 + p(k\cos\theta) + p = 0 \\ \cos^3\theta + \frac{p}{k^2}\cos\theta + \frac{q}{k^3} = 0 \end{gathered}$$

Como grande conhecedor de trigonometria, Viète sabia que $\cos 3\theta = \cos\theta(4\cos^2\theta - 3)$ ou $\cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta - \frac{\cos 3\theta}{4} = 0$

Assim, fez as seguintes equivalências:

$$\frac{p}{k^2} = -\frac{3}{4} \therefore k^2 = -\frac{4p}{3} \therefore k = \pm 2\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

$$\frac{q}{k^3} = -\frac{\cos 3\theta}{4} \therefore \cos 3\theta = -\frac{4q}{k^3} = \frac{-4q}{\pm 2\sqrt{\frac{-p}{3}}(-\frac{4p}{3})} = \pm\frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{(-\frac{p}{3})^3}}$$

Portanto, conhece-se $\cos 3\theta$ como função de p e q e, com isso, determina-se $\cos\theta$ através de tábuas trigonométricas. Multiplicando-se k por $\cos\theta$ encontra-se x, mesmo quando $\Delta < 0$, e Viète descobrira uma forma de driblar os números complexos, já que não conseguia trabalhar com eles.

Vejamos que resultados daria este método trigonométrico aplicado à velha equação

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

Neste caso,

$$p = -15 \ \ e \ \ q = -4$$

Assim, $k = \pm 2\sqrt{(\frac{15}{3})} = \pm 2\sqrt{5}$

Para $k = 2\sqrt{5}, \cos 3\theta = (-4(-4)/(2\sqrt{5})^3) = (2\sqrt{5}/25) \cong 0,178885438$.

Neste ponto, o grande Viète cometeu um pequeno equívoco: se $\cos 3\theta \cong 0,178885438$ ele deduziu, pelas tabelas, que 3θ somente poderia ser $79°41'57''$, porém, lembremos que a equação trigonométrica $\cos x = m$, $-1 \leq m \leq 1$, tem infinitas soluções do tipo $x = 2\pi n \pm \alpha$, onde α é o menor dos arcos positivos para os quais $\cos\alpha = m$. Ao concluir que $3\theta \cong 79°41'57''$, deduziu que $\theta \cong 26^{o}33'59''$, $\cos\theta \cong 0,894427$ e, portanto $x \cong 2\sqrt{5}.0,894427 \cong 3,999999$ (o valor exato é 4).

Para $k = -2\sqrt{5}, \cos 3\theta = -\dfrac{-4(-4)}{(-2\sqrt{5})^3} = -\dfrac{2\sqrt{5}}{25} \cong -0,178885438.$

Se $\cos 3\theta \cong -0,178885438$ ignorando da multiplicidade de ângulos que satisfazem esta relação, $3\theta \cong 100°18'03''$, $\theta \cong 33^{o}26'01''$, $\cos\theta \cong 0,834512$ e, portanto, $x \cong -2\sqrt{5}.0,834512 \cong -3,732051$ (O valor exato é $-2-\sqrt{3}$).

Com grande aproximação, foram achadas duas raízes mas como encontrar a terceira, que sabemos que existe? Por que é que este método não a revelou?

Tivessem sido resolvidas corretamente as duas equações trigonométricas $\cos 3\theta = (2\sqrt{5}/25)$ e $\cos 3\theta = -(2\sqrt{5}/25)$, levando-se em conta a infinidade de arcos que as satisfazem, as três raízes da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ teriam sido encontradas (embora em números aproximados e não exatos).

Tome novamente,

$$k = 2\sqrt{5},\ \cos 3\theta \cong 0,178885438,$$

então

$$3\theta \cong 2n\pi + 79^{o}41'57''(n = 0, \pm1, \pm2, ...)$$

onde

$$\theta \cong 2n\frac{\pi}{3} + 26^{o}33'59''$$

e

$$\cos\theta \cong \cos(\frac{2\pi}{3}n + 26^{o}33'59'').$$

Fazendo variar n, existem exatamente três valores diferentes para $\cos\theta$, ou seja,

$$\cos(26^{o}33'59'') \cong 0,894427$$

$$\cos(\frac{2\pi}{3} + 26^{o}33'59'') \cong -0,834512$$

$$\cos(\frac{4\pi}{3} + 26^{o}33'59'') \cong -0,059915$$

e, assim, as três raízes são

$x_1 \cong 2\sqrt{5}.0,894427 \cong 3,999999$ (o valor exato é 4)
$x_2 \cong -2\sqrt{5}.0,834512 \cong -3,732051$ (o valor exato é $-2-\sqrt{3}$)
$x_3 \cong 2\sqrt{5}.(-0,059915) \cong -0,267949$ (o valor exato é $-2+\sqrt{3}$)

Se tivéssemos trabalhado com $k = -2\sqrt{5}$ e $\cos 3\theta \cong -0,178885438$, obteríamos os mesmos resultados.

Viète achara uma belíssima solução para o problema mas ela, além de não ser algébrica, não enfrentava os números complexos, cuja existência era flagrante. Além disto, não se aplicava a algumas equações como

$$x^3 - 11x - 20 = 0 \quad p = -11 \quad q = -20$$

$$\cos 3\theta = \pm \frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{(\frac{p}{3})^3}} \cong \frac{-10}{\sqrt{(\frac{-11}{3})^3}} \pm \cong \pm 1,42427$$

e não existe ângulo que satisfaça tal relação pois os cossenos devem estar sempre entre -1 e $+1$.

Viète avançara bastante mas a solução total das questões ligadas às equações do 3º grau ainda precisariam aguardar quase um século e meio, quando Leonhard Euler desvendou todos os seus mistérios.

3.6 O Surgimento do Número Imaginário

Pierre de Fermat (1601 - 1665) e René Descartes (1596 - 1650), foram os inventores da Geometria Analítica, porém Descartes foi o primeiro a anuncia-la ao mundo. Nascido em La Haye, embora não tenha desenvolvido técnicas novas para a resolução das equações algébricas, prestou grandes contribuições à respectiva teoria. Uma delas foi fazer com que as raízes negativas também fossem aceitas como soluções o que, à época, ainda encontrava resistências. Descartes descobriu, também, um critério para se conhecer o número de raízes positivas e negativas de uma equação algébrica, mesmo sem saber seus valores, através da análise das variações e permanências dos sinais de seus coeficientes (por exemplo, a equação $x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 8x^2 + 7x - 6 = 0$ não pode ter mais do que três raízes positivas, porque há três variações de sinal na sequência de seus coeficientes).

Infelizmente, uma frase descuidada de Descartes na Géomètrie acabou consagrando uma denominação muito imprópria para os números que envolvem a raiz quadrada de valores negativos. A frase em questão é: *"Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são imaginárias"*. Foi, portanto, Descartes que batizou a $\sqrt{-1}$ de "número imaginário", o que é um termo inadequado, subjetivo e nada matemático. Lamentavelmente, o nome consagrou-se, juntamente com a expressão "números complexos", para trauma dos jovens que, um dia, ouvem de seus professores: "hoje vamos começar o estudo dos números complexos, formados por uma parte real e outra imaginária". Na verdade, não há nada de "imaginário" na $\sqrt{-1}$ nem são "complexos" os números que a contêm. São números como todos os outros e aprende-se a trabalhar com eles com a mesma facilidade com que se manuseiam os inteiros, as frações e os irracionais.

Este tropeço do grande e genial Descartes mostra como devemos ser cuidadosos com o emprego das palavras.

3.7 A Contribuição de Newton para as Equações Algébricas

Isaac Newton, o grande gênio que nasceu prematuramente no dia de Natal de 1642, em uma fazenda de propriedade de seu pai, em Woolsthorpe, na Inglaterra também deixou seu legado sobre as equações do 3º grau.

As contribuições de Newton à teoria das questões algébricas podem ser, simplificadamente, classificadas em 3 grupos: métodos algébricos aproximados para o encontro de raízes reais, um método aproximado não algébrico (utilizando elementos de Cálculo Diferencial e amplamente conhecido como Método de Newton) e um conjunto de critérios numéricos para a pesquisa de raízes, como a determinação de números chamados cotas inferiores e cotas superiores, abaixo e acima dos quais, respectivamente, não existem raízes reais de uma dada equação (com a determinação de tais cotas restringem-se os intervalos numéricos dentro dos quais as raízes devem ser procuradas).

Para ilustrar um procedimento algébrico adotado por Newton para o cálculo de raízes vamos reproduzir a solução que ele próprio deu para a equação

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

Por simples inspeção, verifica-se que uma das raízes está situada entre 2 e 3. Observemos que substituindo o valor 2 na equação teremos -1 e substituindo o 3 na mesma teremos 16, como os valores resultantes possuem sinais opostos, verifica-se que uma das raízes está situada entre 2 e 3. Portanto, façamos $x = 2 + x_1$, com $0 < x_1 < 1$.

$$(2 + x_1)^3 - 2(2 + x_1) - 5 = 0$$
$$x_1^3 + 6x_1^2 + 10x_1 - 1 = 0.$$

Como $x_1 < 1$, as parcelas x_1^3 e $6x_1^2$ são pequenas em relação a $10x_1$, de modo que podemos dizer que, aproximadamente, $10x_1 - 1$ é igual a zero, ou seja, que x_1 é aproximadamente 0,1. Logo, $x_1 = 0,1 + x_2$ ou $x = 2,1 + x_2$, sendo x_2 um valor pequeno, quando comparado com 0,1.

Entrando na equação original, tem-se

$$x_2^3 + 6,3x_2^2 + 11,23x_2 + 0,061 = 0$$

e, novamente desprezando as duas primeiras parcelas, x_2 é aproximadamente

$$-\frac{0,061}{11,23} = -0,0054$$

Pelo mesmo raciocínio

$$x = 2 + 0,1 - 0,0054 + x_3 = 2,0946 + x_3$$

e, voltando à equação original, calcula-se $x_3 = -0,000004854$ ou

$$x = 2,0946 - 0,00004854 + x_4 = 2,09455146 + x_4.$$

O valor da raiz, correto até a nona casa decimal, é 2,094551482 de modo que o processo adotado conduziu rapidamente a uma boa aproximação.

O chamado método de Newton (não algébrico) é muito elegante, simples e extremamente prático, tanto que é atualmente empregado por aquelas calculadoras eletrônicas de bolso que incluem em suas facilidades a resolução de certos tipos de equações polinomiais. Sua compreensão, entretanto, exige algum conhecimento de Cálculo Diferencial.

3.8 Os Complexos são Desvendados

Quando vemos hoje uma equação ser escrita, por exemplo, $ax^2 + bx + c = 0$ ou a raiz quadrada de um número ser simbolizada por $\sqrt{\ }$, imaginamos que as coisas tenham sido sempre assim. Na realidade, esta simbologia é relativamente moderna pois a soma e a subtração eram representadas pelas letras p (plus) e m (minus) até meados do século XVI, quando, gradativamente, passaram a ser empregados os sinais + e -, propostos em 1489 pelo alemão Johann Widmann e popularizados por Michael Stifel (1487-1567). O sinal de multiplicação $\times$ foi introduzido em 1631 pelo inglês Oughtred (autor do Clavis Mathematicae, estudado por Newton em seu mergulho). Descartes foi o primeiro a representar potências sob a forma a^b e um dos primeiros a utilizar letras minúsculas para representar parâmetros ou incógnitas e a escrever as equações algébricas sob a forma de um polinômio igualado a zero. A raiz quadrada era indicada por R ou Rq até que, em 1525, o alemão Christoff Rudolff inventou o símbolo $\sqrt{\ }$. Os sinais > (maior) e < (menor) foram criados por Thomas Harriot (1560-1621) e publicados postumamente em 1631. O sinal de igualdade foi inventado pelo inglês Robert Recorde (1510-1558) e publicado em 1557. Para que se tenha uma ideia de como a simbologia moderna tornou mais clara a visualização e o tratamento dos problemas basta mostrar como a equação $3x^2 + 5x = 21$ seria representada por alguns famosos matemáticos do passado:

- Rudolff (1525) sit3Z+5$\aleph$ aequatus 21
- François Viète (1590) 3Q+5N aequatur 21
- René Descartes (1637) 3ZZ+ 5Z $\propto$ 21

- John Wallis (1693) 3XX +5X = 21

A equação do 3º grau $2x^3 + 5x = 17$ seria assim expressa por Cardano:

2cub'p:5reb' aeq̄lis 17

Leonhard Euler foi o consolidador da simbologia moderna, tendo não apenas consagrado o que de melhor se dispunha à época mas, também, inventado muito do que hoje se utiliza. Os livros de Euler, escritos há mais de 250 anos, transpiram atualidade de símbolos, coisa que não ocorre, por exemplo, com os trabalhos de Newton. Aliás, embora tenha sido o primeiro a inventar o Cálculo, Newton não conseguiu impor sua simbologia, que foi suplantada por aquela desenvolvida por Leibniz e Euler.

Foi Euler quem criou o símbolo Σ para a somatória, a notação $f(x)$ para as funções, a representação $\binom{m}{n}$ para as combinações, etc. Foi através de seus livros que se consagrou o uso da letra π para a célebre constante da circunferência (usada pela primeira vez pelo inglês William Jones). Dentre as inúmeras representações propostas e consagradas por Euler, uma nos interessa de imediato: é o famoso "i", significando a $\sqrt{-1}$, usado por ele pela primeira vez em um artigo escrito em 1777. Foi o mesmo Euler quem, em um artigo escrito em 1727 - 1728, utilizou a letra **e** para representar a base dos logaritmos naturais (o célebre número de Euler) cujo valor aproximado é 2,7182818284... e que aparece frequentemente em equações que expressam fenômenos do mundo físico.

Agora, os Números Complexos. Já vimos que as primeiras tentativas bem sucedidas de operar com eles surgiram com Bombelli. Após os passos iniciais do audacioso italiano, novos matemáticos avançaram nas pesquisas, conseguindo resultados que estimularam outros a seguir a diante. Leibniz ficou surpreso quando descobriu que $\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$, mas parecia não acreditar no que via e falava dos números complexos "aquele anfíbio, entre o ser e o não ser, que nós chamamos a raiz imaginária da unidade negativa". Newton, que amava os números reais porque eles lhe permitiam uma visão prática do mundo, não se interessou pelos complexos e chamou-os de "impossíveis". Entretanto, seu amigo Abraham DeMoivre, pensava de forma diferente e estudou-os dedicadamente, o mesmo tendo ocorrido com os briguentos irmãos Bernoulli. Assim, muitos pesquisadores já haviam trabalhado na matéria quando Euler fez-lhe um ataque final, deixando pouca coisa a ser achada no futuro. É por isso, embora tenha tido precursores importantes, que Euler é considerado o matemático que dominou os números complexos.

De um modo sintético, um número complexo é aquele que pode ser escrito da forma

$$z = a + bi \text{ onde } a \text{ e } b \text{ são reais e } i = \sqrt{-1}$$

É fácil ver que os números reais são um caso particular dos complexos quando $b = 0$ ou seja, o chamado Campo Complexo (conjunto de todos os complexos) contém o Campo Real.

Logo percebeu-se que z poderia, também, ser escrito de outra maneira:

$$z = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Ora, $(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$ e $(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$ são números situados entre -1 e $+1$ e a soma de seus quadrados é sempre 1. Portanto, podem ser considerados o cosseno e o seno de um ângulo θ, batizado de argumento. Chamando $\sqrt{a^2+b^2}$ de ρ , batizado de módulo, o número z pode ser expresso pela fórmula

$$z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Imagine-se, agora, dois números complexos z_1 e z_2

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

Muliplicando-os, obtém-se

$$z_1.z_2 = \rho_1\rho_2([\cos\theta_1.\cos\theta_2 + (i)^2\sin\theta_1.\sin\theta_2] + i[\sin\theta_1.\cos\theta_2 + \sin\theta_2.\cos\theta_1])$$

e como $i^2 = -1$

$$z_1.z_2 = \rho_1\rho_2([\cos\theta_1.\cos\theta_2 - \sin\theta_1.\sin\theta_2] + i[\sin\theta_1.\cos\theta_2 + \sin\theta_2.\cos\theta_1])$$

Ora, lembrando que

$$\cos\theta_1.\cos\theta_2 - \sin\theta_1.\sin\theta_2 = \cos(\theta_1+\theta_2)$$

e

$$\sin\theta_1.\cos\theta_2 + \sin\theta_2.\cos\theta_1 = \sin(\theta_1+\theta_2)$$

Tem-se

$$z_1.z_2 = \rho_1\rho_2(\cos[\theta_1+\theta_2] + i\sin[\theta_1+\theta_2])$$

Este é um resultado importantíssimo: quando se multiplicam dois números complexos, multiplicam-se os módulos e somam-se os argumentos (ângulos).

Com esta descoberta torna-se simples, entre outras coisas, calcular as potências inteiras dos números complexos, bastando lembrar que elas são o produto deles por si mesmos n vezes. Portanto

$$z^n = [\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$$

Esta fórmula recebeu o nome de fórmula de DeMoivre mas tal resultado já era conhecido antes dele.

Acabamos de ver como se eleva um número complexo à potência n. Como seria então a operação inversa, a extração da raiz enésima de um número complexo? Ao procurar responder a esta pergunta, Euler descobriu algo fantástico: *qualquer número complexo não nulo (os reais inclusive) tem exatamente n raízes enésimas (n inteiro).* Há muito se sabia que todo número positivo tem duas raízes quadradas diferentes mas ninguém suspeitava que qualquer número tem três raízes cúbicas, 4 raízes quartas, 5 raízes quintas, etc. A prova disto é simples, bastando apenas certo cuidado no raciocínio.

Seja o número:

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Sua(s) raiz(es) enésima(s) será(ão) o(s) números(s) que, elevado(s) à enésima potência, for(em) igual(is) a z. Chegaremos, genericamente, este(s) número(s) de

$$(\sqrt[n]{z}) = \rho'(\cos\phi + i\sin\phi)$$

Elevando à potência n, tem-se

$$(\sqrt[n]{z})^n = \rho'^n(\cos n\phi + i\sin n\phi).$$

Para que este resultado seja igual a $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ é necessário e suficiente que $\rho'^n = \rho$ portanto $\rho' = \sqrt[n]{\rho}$

$$\begin{cases} \cos(n\phi) = \cos\theta \\ \sin(n\phi) = \sin\theta \end{cases}$$

Nossa primeira tentação é concluir, apressadamente, através das duas últimas igualdades, que $n\phi = \theta$ mas isto é apenas uma parte da verdade.

O fato de serem $\cos(n\phi) = \cos\theta$ e $\sin(n\phi) = \sin\theta$ não significa que os ângulos sejam iguais. Se eles diferirem entre si por um número inteiro de 2π radianos as igualdades de senos e cossenos também estarão asseguradas e este é ponto fundamental do raciocínio.

Assim conclui-se que:

$n\phi = \theta + 2k\pi$ (k inteiro qualquer)

$\phi = \frac{\theta}{n} + k(\frac{2\pi}{n})$

Como se vê, fazendo variar k(inteiro) vão sendo obtidos diferentes valores de ϕ, ou seja, diferentes raízes enésimas do número z. Mas, se k é qualquer inteiro, haverá então infinitas raízes? Não, e isto é fácil de ser compreendido.

Façamos k tomar sucessivamente os valores $0, 1, 2, 3, ..., n-1, n, n+1, n+2$, etc. Vejamos a seguir.

k	ϕ
0	$\phi_1 = \frac{\theta}{n}$
1	$\phi_2 = \frac{\theta}{n} + (\frac{2\pi}{n})$
2	$\phi_3 = \frac{\theta}{n} + 2(\frac{2\pi}{n})$
3	$\phi_4 = \frac{\theta}{n} + 3(\frac{2\pi}{n})$
$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$\phi_n = \frac{\theta}{n} + (n-1)(\frac{2\pi}{n})$
n	$\phi_{n+1} = \frac{\theta}{n} + n(\frac{2\pi}{n}) = \frac{\theta}{n} + 2\pi$
$n+1$	$\phi_{n+2} = \frac{\theta}{n} + (n+1)(\frac{2\pi}{n}) = \frac{\theta}{n} + (\frac{2\pi}{n}) + 2\pi$

A partir de $k = n$ os ângulos começam a diferir entre si por múltiplos inteiros de 2π, ou seja, as raízes enésimas $\rho'(\cos\phi + i\sin\phi)$ passam a se repetir, de modo que somente n delas são distintas e a belíssima descoberta de Euller está demonstrada.

Como seriam, na prática, as extrações de raízes cúbicas? Vejamos a seguir um exemplo.

Exemplo 12. *Consideremos os números 8 e -8.*

$$8 = a + ib = 8 + i0$$

$$a = 8$$

$$b = 0$$

$$\sin\theta = \frac{0}{\sqrt{8^2 + 0^2}} = 0 \therefore \theta = zero$$

$$\cos\theta = \frac{8}{\sqrt{8^2+0^2}} = 1$$

$$\rho = \sqrt{8^2+0^2} = 8 \therefore \rho' = 2.$$

Portanto, as 3 raízes cúbicas de 8 são:

$$\sqrt[3]{8} = \begin{cases} 2(\cos\frac{0}{3} + i\sin\frac{0}{3}) = 2 \\ 2(\cos[\frac{0}{3} + (\frac{2\pi}{3})] + i\sin[\frac{0}{3} + (\frac{2\pi}{3})]) = 2(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = (-1+\sqrt{3}i) \\ 2(\cos[\frac{0}{3} + 2(\frac{2\pi}{3})] + i\sin[\frac{0}{3} + 2(\frac{2\pi}{3})]) = 2(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = (-1-\sqrt{3}i) \end{cases}$$

Consideremos os números 8 e -8.

$$-8 = a + ib = -8 + i0$$

$$a = -8$$

$$b = 0$$

$$\sin\theta = \frac{0}{\sqrt{8^2+0^2}} = 0 \therefore \theta = \pi$$

$$\cos\theta = \frac{8}{\sqrt{8^2+0^2}} = -1$$

$$\rho = \sqrt{8^2+0^2} = 8 \therefore \rho' = 2.$$

e as raízes cúbicas de -8 são:

$$\sqrt[3]{-8} = \begin{cases} 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = (1+\sqrt{3}i) \\ 2(\cos[\frac{\pi}{3} + (\frac{2\pi}{3})] + i\sin[\frac{\pi}{3} + (\frac{2\pi}{3})]) = 2(-1+0i) = -2 \\ 2(\cos[\frac{\pi}{3} + 2(\frac{2\pi}{3})] + i\sin[\frac{\pi}{3} + 2(\frac{2\pi}{3})]) = 2(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = (1-\sqrt{3}i) \end{cases}$$

Finalmente, depois de quase 200 anos, aprendera-se a extrair raízes de números complexos, aquele mistério que intrigou Bombelli e tantos outros que haviam tentado aplicar a fórmula de Cardano nos casos em que $\Delta < 0$.

O achado de Euler revolucionou a teoria das Equações Algébricas que, a partir de então, ganhou novo impulso.

3.9 Gauss e o Teorema Fundamental da Álgebra

Quando se estuda a obra matemática de Gauss tem-se a sensação de que em todos os campos onde atuou ele não apenas fez o melhor possível mas, também, nada deixou para que outros, no futuro, viessem a superá-lo. Assim, por exemplo, aconteceu com seu doutoramento, aos 21 anos, em 1799, quando apresentou o que ainda hoje é considerado por muitos a maior tese de doutorado em Matemática de todos os tempos. Ela nos interessa diretamente por ser o mais importante dos alicerces da teoria das equações algébricas e é conhecida como o Teorema Fundamental da Álgebra (denominação dada pelo próprio Gauss).

Teorema 3.9.1 (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** *Toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos tem, no campo complexo, pelo menos uma raiz.*

Desde os tempos de Cardano suspeitava-se que, por exemplo, as equações do 3º grau tinham 3 raízes, as do 4º grau 4 e assim por diante. Quando Euler demonstrou que qualquer número, real ou complexo, tem (no campo complexo) n raízes enésimas (n inteiro), sentiu-se que se estava muito próximo de uma descoberta importante quanto ao número de raízes das equações polinomiais de grau n. Vários matemáticos chegaram a enunciar que elas têm exatamente n raízes sem, no entanto, conseguir demonstrá-lo.

A tese de Gauss foi recebida com grande perplexidade pelo mundo matemático porque nela não apenas era dada uma demonstração inquestionável do Teorema Fundamental da Álgebra como, adicionalmente, o jovem de 21 anos evidenciava que a prova fornecida por D'Alembert anos antes era "insatisfatória e ilusória". Gauss, como sempre, estava certo em suas afirmações.

Façamos agora uma pequena pausa para avaliar as consequências do Teorema Fundamental da Álgebra, segundo o qual toda equação polinomial de coeficiente reais ou complexos tem, no campo complexo, pelo menos uma raiz. Seja o polinômio:

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$

Pelo mencionado teorema 3.9.1 existe pelo menos um número complexo k_1 para o qual $P(x) = 0$. Ora, sabemos da álgebra elementar que o resto da divisão de qualquer polinômio por $x - \alpha$ é exatamente $P(\alpha)$. Portanto, se $P(k_1) = 0$, $P(x)$ é divisível por $(x - k_1)$ e o polinômio pode ser reescrito como o produto de $(x - k_1)$ por um polinômio de grau $n - 1$. Por sua vez, neste polinômio de grau $n - 1$ vale também o teorema fundamental da álgebra e ele é divisível por pelo menos um fator$(x - k_2)$. Continuando o raciocínio, conclui-se que $P(x)$ pode ser desdobrado no produto de n binômios do tipo $(x - k_j)j = 1, 2, ..., n$. Como existem n valores de x que anulam cada um dos n binômios, o polinômio $P(x)$ de grau n tem exatamente n raízes, eventualmente repetidas pois nada obriga que os n k_j sejam todos diferentes entre si.

Portanto, ao demonstrar que as equações polinomiais têm pelo menos uma raiz no campo complexo, Gauss demonstrou que elas têm exatamente n raízes, sendo n o grau do respectivo polinômio.

Até o final da vida, Gauss voltou várias vezes a este teorema e deu a ele 3 outras demonstrações por caminhos distintos, todas elas bastante difíceis que o leitor está convidado a pesquisar.

Após o teorema fundamental da álgebra ser apresentado, foram surgindo outros teoremas e conclusões como:

"Se o número complexo $(a + bi)$ é raiz de uma equação polinomial de coeficientes reais, então o complexo $(a - bi)$ também o é."

"Toda equação polinomial de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real."

"Dados uma equação algébrica em sua forma canônica $P(x) = 0$ e dois números reais a e b $(a < b)$, se $P(a)$ e $P(b)$ tiverem o mesmo sinal, o número de raízes reais da equação (eventualmente repetidas) dentro do intervalo (a, b) será par; se $P(a)$ e $P(b)$ tiverem sinais opostos, o número de raízes reais da equação (eventualmente repetidas) dentro do intervalo (a, b) será ímpar."

3.10 A Existência de Raízes Estranhas

A resolução de uma equação irracional deve ser efetuada procurando transformá-la inicialmente numa equação racional, obtida ao elevarmos ambos os membros da equação a uma potência conveniente.

Em seguida, resolvemos a equação racional encontrada e, finalmente, verificamos se as raízes da equação racional obtidas podem ou não ser aceitas como raízes da equação irracional dada (verificar a igualdade).

É necessária essa verificação, pois, ao elevarmos os dois membros de uma equação a uma potência, podem aparecer na equação obtida raízes estranhas à equação dada.

Observemos o exemplo de resolução de equações irracionais no conjunto dos reais.

Exemplo 13. $\sqrt{\dfrac{2x}{3} - \sqrt{x}} = \sqrt{3}$.

Solução

Elevando ambos os membros ao quadrado.

$$\left(\sqrt{\frac{2x}{3} - \sqrt{x}}\right)^2 = (\sqrt{3})^2$$

$$\frac{2x}{3} - \sqrt{x} = 3$$

$$-\sqrt{x} = 3 - \frac{2x}{3}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado.

$$(-\sqrt{x})^2 = (\frac{9-2x}{3})^2$$

$$x = \frac{81 - 36x + 4x^2}{9}$$

$$9x = 81 - 36x + 4x^2$$

$$4x^2 - 45x + 81 = 0$$

$$x' = 9 \; e \; x" = \frac{9}{4}$$

Verificação

$$\sqrt{\frac{2.9}{3} - \sqrt{9}} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{6-3} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{3} \; (V)$$

$$\sqrt{\frac{2.9/4}{3} - \sqrt{9/4}} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3/2 - 3/2} = \sqrt{3}$$

$$0 = \sqrt{3} \; (F)$$

Logo, $V = 9$; notemos que $\frac{9}{4}$ é uma raiz estranha a essa equação irracional.

Outro exemplo: Se $x = 1$ Então, $x^3 = 1$ (elevado ao cubo). Essa segunda equação pode ser assim reescrita:

$$x^3 - 1 = 0 \; ou \; (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

e suas raízes são $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ e $x_3 = \dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.

Neste caso, apareceram duas raízes estranhas e complexas.

O que estaria acontecendo? Por que aparecem tais raízes estranhas?

A resposta é dada pela descoberta de Euler: enquanto a potenciação é unívoca (cada número tem somente uma potência enésima), a radiciação não o é (um número tem n raízes enésimas). No retorno da potenciação alguns caminhos não conduzem à equação original. Estes correspondem a raízes estranhas.

Com isto, aprendemos uma lição importante: sempre que os membros de uma elevação são submetidos a uma potência inteira corremos o risco de estar introduzindo raízes estranhas e, neste caso, cada resposta deve ser testada na equação pela qual se começou. Recordando que, quando foi falado da solução encontrada por Tartaglia para as equações do 3º grau, foi dito que a passagem de $x = A + B$ para $x^3 = (A + B)^3$ era correta, mas continha uma sutileza perigosa. Esta era a sutileza: poderíamos estar introduzindo raízes estranhas com aquela operação.

Não só apenas as operações de potenciação que contêm os riscos das raízes estranhas. Também a eliminação de denominadores em que a incógnita está presente pode provocar o mesmo problema.

Exemplo 14. *Seja a equação* $\dfrac{x^2 - 8x}{x^2 - 4} + 5 + \dfrac{3}{x - 2} = 0.$

Multiplicando-se pelo denominador comum $x^2 - 4$ tem-se

$$(x^2 - 8x) + 5(x^2 - 4) + 3(x + 2) = 0$$

$$6x^2 - 5x - 14 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4.6.14}}{12} = \frac{5 \pm \sqrt{361}}{12} \rightarrow x_1 = \frac{5 + 19}{12} = 2 \; e \; x_2 = \frac{5 - 19}{12} = -\frac{7}{6}$$

Entretanto, é fácil ver que $x = 2$ não é raiz da equação fracionária da qual se partiu porque, neste caso, $x^2 - 4$ e $x - 2$ seriam nulos e não existe divisão por zero.

Então $x = -(7/6)$ é solução do problema.

Neste exemplo a raiz estranha apareceu porque, sem que o soubéssemos, multiplicamos a equação pelo fator $x^2 - 4$ que, casualmente, anulou-se por uma das raízes da equação que surgiu após a eliminação dos denominadores. Portanto, igualmente ao que se faz quando uma equação é elevada a potências inteiras, também na eliminação de denominadores que contêm a incógnita as raízes devem ser testadas.

A manipulação desatenta de equações algébricas pode produzir o fenômeno oposto ao da introdução de raízes estranhas: a perda de raízes.

Exemplo 15. *Seja a equação* $x^3 + 2x^2 + 5 = x^2 + 5x + 5$

$$x^3 + 2x^2 - x^2 - 5x + 5 - 5 = 0$$

$$x^3 + x^2 - 5x = 0$$

$$x(x^2 + x - 5) = 0$$

.

É importante atentar para não descuidar e não dividir tudo por x, pois se isso ocorrer, termos apenas

$$x^2 + x - 5 = 0 \therefore x_1 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \; e \; x_2 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}.$$

É claro que x_1 e x_2 são raízes, mas na operação descuidada perdeu-se a raiz $x = 0$. Quando se divide ambos os termos da igualdade por algum fator comum que contenha a incógnita, este deve, obrigatoriamente, ser pesquisado para o encontro de todas as raízes que contiver pois elas não podem ser desprezadas.

3.11 Voltando a Equação $x^3 - 15x - 4 = 0$

Com tudo que foi visto até agora, pode-se perceber que na fórmula de Cardano foram introduzidas raízes estranhas, porém fica difícil de enxergar, pois se nem as duas legítimas consegue-se visualizar. Porém o grande Euler, de maneira simples nos traz que: cada parcela que compõe x corresponde à extração de raízes cúbicas e, portanto, tem 3 alternativas.

Assim, são 9 os valores possíveis da soma

$$(A+B) = x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

sendo 3 deles raízes legítimas e 6 raízes estranhas.

Na fórmula de Baskhara ambas as raízes da equação do 2º grau aparecem claramente porque as duas opções para a raíz quadrada do discriminante distinguem-se pelos sinais + e - . Para as raízes cúbicas não há esta facilidade e é por isso que não se consegue visualizar na Fórmula de Cardano as 3 soluções da equação do 3º grau, embora elas estejam ali.

Quando foi falado de Bombelli, foi demonstrado que se uma equação do terceiro grau do tipo $x^3 + px + q = 0$ tem 3 raízes reais e distintas, então $\Delta < 0$ e isto conduz a operações com números complexos. Entretanto, não foi demonstrado o inverso, ou seja, que se $\Delta < 0$ as três raízes são reais e distintas, mesmo que $\Delta > 0$ teremos uma raízes real e as outras duas complexas.

Proposição 3.11.1. *Supondo que uma tal equação do 3º grau tenha uma raiz complexa do tipo $(a + ib)$. Então, $(a - ib)$ também será raiz da mesma equação. A terceira raiz será obrigatoriamente real, digamos c.*

Para que inexista o termo do 2º grau é necessário que a soma das 3 raízes seja zero, ou seja, que $(a+ib)+(a-ib)+c = 0$ ou

$$2a + c = 0 \leftrightarrow c = -2a$$

.

Portanto, toda equação do 3º grau do tipo $x^3 + px + q$ que tenha raízes complexas pode ser assim escrita

$x^3 + px + q = 0$
$(x - [a+ib])(x - [a-ib])(x+2a) = 0$
$((x-a)^2 + b^2)(x+2a) = 0$
$x^3 + x(b^2 - 3a^2) + 2a(a^2+b^2) = 0$

Assim,

$$\Delta = (-\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3$$
$$= [-a(a^2+b^2)]^2 + (\frac{b^2-3a^2}{3})^3$$
$$= \frac{81a^4b^2 + 18a^2b^4 + b^6}{27}$$

e isto é sempre positivo, a menos que a = b = 0 (o que faria com que as três raízes fossem nulas e nenhuma verdadeiramente complexa). Portanto, ficou provado o seguinte:

1. Se as raízes são reais e distintas então $\Delta < 0$;

2. Se as raízes são reais mas duas ou 3 são iguais entre si (se as 3 forem iguais todas serão nulas) então $\Delta = 0$;

3. Se uma raiz é real e duas são complexas então $\Delta > 0$.

Disto decorrem os inversos, ou seja, se $\Delta < 0$ as 3 raízes são reais e distintas. Se assim não fosse, então haveria casos em que, com $\Delta < 0$, poder-se-ia ter ou 2 complexas e uma real ou três raízes reais não todas distintas entre si. Mas, em ambas as alternativas, Δ seria, respectivamente, positivo ou nulo, o que contraria a hipótese de $\Delta < 0$. O mesmo raciocínio permite, finalmente, afirmar que, para as equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, sendo

- $\Delta < 0$ as 3 raízes são reais e distintas
- $\Delta > 0$ uma raiz é real e duas são complexas
- $\Delta = 0$ as 3 raízes são reais mas pelo menos duas delas são coincidentes.

Já aprendemos a trabalhar com números complexos, já entendemos a questão das 3 alternativas para a raiz cúbica e já sabemos excluir raízes estranhas. Imaginamos, portanto, que já somos capazes de resolver algebricamente qualquer equação do 3º grau, como a que foi "rudemente" resolvida por Bombelli:

$$x^3 - 15 - 4 = 0$$

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

Entretanto, uma última surpresa ainda nos está reservada.

Tentemos, extrair, pelo método de Euler, aquelas duas raízes cúbicas:

$$2+\sqrt{-121} = 2 + 11i \ , \ \ a = 2, \ b = 11 \ , \rho = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

$$\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{25} \ \therefore \ \theta = \arccos\frac{2\sqrt{5}}{25}.$$

Com isso:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = \sqrt[3]{\sqrt{125}}(\cos[\frac{\theta}{3}] + i\sin[\frac{\theta}{3}]) = \sqrt{5}(\cos[\frac{\theta}{3}] + i\sin[\frac{\theta}{3}])$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}}(\cos[\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}] + i\sin[\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}]) = \sqrt{5}(\cos[\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}] + i\sin[\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}])$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}}(\cos[\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}] + i\sin[\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}]) = \sqrt{5}(\cos[\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}] + i\sin[\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}])$$

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = \sqrt[3]{\sqrt{125}}(\cos[-\frac{\theta}{3}] + i\sin[-\frac{\theta}{3}]) = \sqrt{5}(\cos[-\frac{\theta}{3}] + i\sin[-\frac{\theta}{3}])$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}}(\cos[-\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}] + i\sin[-\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}]) = \sqrt{5}(\cos[-\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}] + i\sin[-\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}])$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}}(\cos[-\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}] + i\sin[-\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}]) = \sqrt{5}(\cos[-\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}] + i\sin[-\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}]).$$

Pode-se constatar que

$$\cos(-\frac{\theta}{3}) = \cos\frac{\theta}{3} \qquad \sin(-\frac{\theta}{3}) = -\sin\frac{\theta}{3}$$

$$\cos[-\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}] = \cos[-\frac{\theta}{3} - \frac{4\pi}{3}] = \cos[\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}]$$

$$\sin[-\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}] = \sin[-\frac{\theta}{3} - \frac{4\pi}{3}] = -\sin[\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}]$$

$$\cos[-\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}] = \cos[-\frac{\theta}{3} - \frac{2\pi}{3}] = \cos[\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}]$$

$$\sin[-\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}] = \sin[-\frac{\theta}{3} - \frac{2\pi}{3}] = -\sin[\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}].$$

Logo,

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = \sqrt{5}(\cos\frac{\theta}{3} - i\sin\frac{\theta}{3})$$

$$= \sqrt{5}(\cos[\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}] - i\sin[-\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}])$$

$$= \sqrt{5}(\cos[\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}] - i\sin[-\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}]).$$

Como, neste caso, sabemos que todas as raízes são reais, pois $\Delta < 0$, as únicas combinações de $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ com $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ que anulam as partes imaginárias de $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ com $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ são:

$$\sqrt{5}(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}) + \sqrt{5}(\cos\frac{\theta}{3} - i\sin\frac{\theta}{3}) = 2\sqrt{5}(\cos\frac{\theta}{3})$$

$$\sqrt{5}(\cos[\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}] + i\sin[\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}]) + \sqrt{5}(\cos[\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}] - i\sin[\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}]) = 2\sqrt{5}\cos[\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}]$$

$$\sqrt{5}(\cos[\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}] + i\sin[\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}]) + \sqrt{5}(\cos[\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}] - i\sin[\frac{\theta}{3} - \frac{4\pi}{3}]) = 2\sqrt{5}\cos[\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}],$$

e sendo conhecido $\cos\theta = (2\sqrt{5}/25)$, é possível calcular $\cos(\theta/3)$, $\cos[(\theta/3) + (2\pi/3)]$ e $\cos[(\theta/3) + (4\pi/3)]$ e assim obter os valores das raízes.

Como isso poderia ser feito? Sabemos que $\cos 3x = \cos x[4\cos^2 x - 3]$ ou

$$4\cos^3 x - 3\cos x - cos3x = 0$$

$$\cos^3 x - \frac{3}{4}\cos x - \frac{\cos 3x}{4} = 0$$

e esta é uma equação do 3º grau em $\cos x$, sem o termo do 2º grau, á qual se aplica a Fórmula de Cardano

$$\cos x = \sqrt[3]{\frac{\cos 3x}{8} + \sqrt{(\frac{\cos 3x}{8})^2 + (-\frac{1}{4})^3}} + \sqrt[3]{\frac{\cos 3x}{8} - \sqrt{(\frac{\cos 3x}{8})^2 + (-\frac{1}{4})^3}}$$

$$\cos x = \sqrt[3]{\frac{\cos 3x}{8} + \sqrt{\frac{\cos^2 3x - 1}{64}}} + \sqrt[3]{\frac{\cos 3x}{8} - \sqrt{\frac{\cos^2 3x - 1}{64}}}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{\cos 3x + \sqrt{\cos^2 3x - 1}} + \sqrt[3]{\cos 3x - \sqrt{\cos^2 3x - 1}}).$$

E aqui está a surpresa final: $\cos^2 3x - 1$ é sempre menor ou igual a zero (porque $-1 \leq \cos 3x \leq 1$) de modo que, exceto quando $\cos 3x = \pm 1$, caímos novamente na extração de raízes cúbicas de números complexos, num círculo vicioso sem saída.

Isto significa que, dado $\cos\theta$, somente podemos calcular $\cos\dfrac{\theta}{3}$ por meio de tábuas trigonométricas ou outros métodos aproximados, mas nunca exatos. Como as tábuas trigonométricas são, de um modo geral, elaboradas através de técnicas de Cálculo Infinitesimal (séries infinitas), a fórmula descoberta por Tartaglia, no caso em que $\Delta < 0$, não oferece resultados práticos melhores do que o método de Newton. Ao contrário, este é mais simples e rápido (quando $\Delta < 0$). A incrível visão de Viète também é digna de nota, ao supor $x = k\cos\theta$, literalmente adivinhou um resultado a que somente se chegaria muitos anos mais tarde por um caminho dedutivo.

Utilizando as tábuas trigonométricas, calcularemos as 3 raízes R_1, R_2 e R_3.
Se $\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{25} \cong 0,17888543816$ então $\theta = 79^o41'57"$ e $\frac{\theta}{3} \cong 26^o33'59"$.
Logo,

$$R_1 = 2\sqrt{5}\cos\frac{\theta}{3} \cong 2\sqrt{5}\cos(26^o33'59") \cong 3,999999$$

$$R_2 = 2\sqrt{5}\cos(\frac{2\pi}{3} + \frac{\theta}{3}) \cong 2\sqrt{5}\cos(\frac{2\pi}{3} + 26^o33'59") \cong -3,37205$$

$$R_3 = 2\sqrt{5}\cos(\frac{4\pi}{3} + \frac{\theta}{3}) \cong 2\sqrt{5}\cos(\frac{4\pi}{3} + 26^o33'59") \cong -0,267949.$$

Com os resultados das 3 raízes pode-se concluir que não foram trazidos benefícios maiores para as equações do terceiro grau em relação aos métodos como o de Newton e o de Viète, as soluções encontradas neste também foram aproximadas.

Para encerrar essa viajem que fizemos dentro da história das equações do terceiro grau. Cabe-nos uma pergunta bem interessante: Será que a fórmula de Cardano, quando $\Delta < 0$, conduzir a números aproximados (aproximação tão boa quanto quisermos), significa que, naquele caso, não há soluções algébricas para as equações do 3º grau?

Não, isto pode ser esclarecido através de uma comparação com o que ocorre com equações do 2º grau.

Seja a equação $x^2 = 2$, cujas raízes, obtidas através de métodos algébricos, são exatamente $x = \pm\sqrt{2}$. Entretanto, quando procuramos converter a expressão $\sqrt{2}$ em números grafados na notação decimal, somente podemos fazê-lo de forma aproximada, ou seja, $x \cong \pm 1,414213...$.

Analogamente, as raízes da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, obtidas por métodos algébricos, são exatamente $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Tal expressão, no entanto, somente é conversível de forma aproximada em números com os quais se pode trabalhar na prática.

3.12 Uma Solução Contemporânea das Equações do 3º Grau Conforme Carlos Gustavo Tamn

Nesta subseção o texto foi extraído do artigo *Uma Solução das Equações do 3º e 4º graus* de Moreira [14]. Aos 14 anos de idade Carlos Gustavo Tamn de Araujo Moreira tentou mostrar ao seu professor Elon Lages Lima outra solução para as equações do 3º e do 4º graus, mas este não lhe deu na época a devida atenção.

Mais tarde Elon concordou em ouvi-lo e percebeu logo que se tratava da mais simples e menos artificial das deduções das fórmulas para equações do terceiro e do quarto grau que conhecia.

Porém naquela altura, Carlos Gustavo que relutava em publicá-las, alegando que já não tinham mais graça. Finalmente, cedeu aos apelos e as soluções foram publicadas na Revista do Professor de Matemática 25, 1994. Carlos Gustavo Tamn de Araujo Moreira [14] chegou a uma nova solução para as equações do 3º e do 4º grau. A seguir mostraremos a resolução das equações do 3º grau demonstrada por Moreira [14] no artigo "Uma solução das equações do 3º e 4º graus".

3.12.1 Solução para as Equações do 3º Grau

Motivado pelo cálculo de expressões simétricas nas raízes de uma equação do 2° grau em função dos coeficientes da equação, resolvi um dia calcular a expressão:

$$y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$$

onde x_1 e x_2 são as raízes da equação $x^2 - Sx + P = 0$ (e portanto satisfazem $x_1 + x_2 = S$ e $x_1 x_2 = P$). Isso leva aos seguintes cálculos:

$$y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} \Rightarrow$$

$$y^3 = x_1 + x_2 + 3\sqrt[3]{x_1 x_2}(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}) \Rightarrow$$
$$y^3 = S + 3\sqrt[3]{P}y$$

Assim, para determinar y há que se resolver uma equação do 3° grau.

Ocorreu-me então o seguinte: Dada uma equação do terceiro grau é possível escrever suas raízes como soma de raízes cúbicas de raízes de uma equação do 2° grau. Isso pode ser feito como a seguir: Dada a equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, procuramos uma substituição $x = y + t$ que anule o coeficiente em y^2:

$$(y+t)^3 + a(y+t)^2 + b(y+t) + c = 0$$

$$y^3 + 3y^2t + 3yt^2 + t^3 + ay^2 + 2ayt + at^2 + by + bt + c = 0$$

$$y^3 + (3t+a)y^2 + (3t^2 + 2at + b)y + (t^3 + at^2 + bt + c) = 0$$

Façamos $3t + a = 0$, segue que $t = -\frac{a}{3}$ e assim temos:

$$y^3 + (\frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} + b)y + (-\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c) = 0$$

Fazendo

$$p = \frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} + b$$

e

$$q = -\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c,$$

temos:

$$y^3 + py + q = 0.$$

Determinamos números P e S tais que

$$p = -3\sqrt[3]{P} \; e \; q = -S$$

de forma que se x_1 e x_2 são raízes de $x^2 - Sx + P = 0$, então $\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$ satisfaz a equação $y^3 + py + q = 0$. Feito isso, obtemos

$$\sqrt[3]{P} = -\frac{p}{3} \Rightarrow P = -\frac{p^3}{27}$$

e

$$S = -q,$$

ou seja, x_1 e x_2 são raízes de $x^2 + qx - \dfrac{p^3}{27} = 0$, isto é,

$$x_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

e

$$x_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

donde,

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

satisfaz $y^3 + py + q = 0$.

Cada raiz cúbica pode assumir três valores complexos, mas a equação $\sqrt[3]{P} = -p/3$ diz que o produto das duas raízes deve ser $-p/3$. Essa fórmula dá as três raízes de $y^3 + py + q = 0$, que somadas a $t = -a/3$ nos dão as três raízes de $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Exemplo 16. *Considere a equação* $x^3 - 6x - 40 = 0$.

Para aplicar a fórmula que dá as raízes da equação do 3° grau temos $p = -6$ e $q = -40$. A formula nos dá $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$.

Assim, as três raízes da equação são :

$$x_1 = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}},$$

$$x_2 = \xi\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \xi^2\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

e

$$x_3 = \xi^2\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \xi\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}},$$

onde

$$\xi = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$$

Assim x_1 é a única raiz real da equação. Por outro lado, claramente $x = 4$ satisfaz a equação, donde $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$.

Exemplo 17. *Seja* $\alpha = \cos 20°$.

Como $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, temos:

$$\cos 60° = 4\cos^3 20° - 3\cos 20° = 4\alpha^3 - 3\alpha \Rightarrow$$

$$4\alpha^3 - 3\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha^3 - \frac{3}{4}\alpha - \frac{1}{8} = 0$$

Aqui $p = -3/4$, $q = -1/8$, e substituindo na fórmula obtemos as raízes de $x^3 - (3/4)x - (1/8) = 0$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{16} + \sqrt{\frac{1}{256} - \frac{1}{64}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{16} - \sqrt{\frac{1}{256} - \frac{1}{64}}}$$

ou

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}\right),$$

que não diz nada de novo sobre $\cos 20°$. Essa expressão não é lá muito satisfatória, pois usa números complexos para exprimir $\cos 20°$, que é real. Na verdade é possível provar que qualquer expressão por radicais de $\cos 20°$ tem que envolver números complexos.

Capítulo 4

Ferrari e Moreira Vencem as Equações do 4º Grau

Nascido em Bolonha em 1522 e falecido por volta de 1560, neto de Bartholomaeus Ferrari, segundo Garbi [11] Ludovico Ferrari iniciou sua carreira como auxiliar de Girolamo Cardano. Dada sua notável facilidade no aprendizado, Cardano começou por ensinar-lhe matemática. Ferrari ajudou Cardano na descoberta das soluções para as equações quadrática e cúbica e foi ainda imensamente responsável pela solução da equação quadrática que Cardano publicou. Ainda jovem (antes dos vinte anos), Ferrari passou a ensinar por conta própria em Milão. Logo após tornar-se professor de Matemática na Universidade de Bolonha, veio a falecer aos 38 anos de idade, provavelmente envenenado por sua própria irmã.

4.1 Método Geral para a Solução das Equações do 4º Grau

Dentro do costume então vigente entre os matemáticos de proporem problemas uns aos outros como forma de desafio, um certo Zuanne de Tonini da Coi submeteu a Cardano uma questão que envolvia a equação

$$x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$$

Após inúmeras tentativas sem êxito, Cardano passou a questão ao jovem Ferrari que, num lampejo de gênio, encontrou o método geral para a solução das equações do 4º grau. Tal método foi publicado também por Cardano [5] na ARS MAGNA, em continuidade à solução dada por Tartaglia às equações do 3º grau. Sabemos que a equação geral do 4º grau é

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

sempre pode ser transformada em outra do tipo

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0$$

fazendo $x = y + m$ e calculando m de modo a anular o termo de 3º grau. Vejamos:

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ multiplicando a equação por $\frac{1}{a}$ temos:

$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = 0$ substituindo o $x = y + m$ segue que,

$(y+m)^4 + \frac{b}{a}(y+m)^3 + \frac{c}{a}(y+m)^2 + \frac{d}{a}(y+m) + \frac{e}{a} = 0$

$y^4 + 4y^3m + 6y^2m^2 + 4ym^3 + m^4 + \frac{b}{a}y^3 + 3\frac{b}{a}y^2m + 3\frac{b}{a}ym^2 + \frac{b}{a}m^3 + \frac{c}{a}y^2 +$
$+2\frac{c}{a}ym + \frac{c}{a}m^2 + \frac{d}{a}y + \frac{d}{a}m + \frac{e}{a} = 0$

$y^4 + (4m + \frac{b}{a})y^3 + (6m^2 + 3\frac{b}{a}m + \frac{c}{a})y^2 + (4m^3 + 3\frac{b}{a}m^2 + 2\frac{c}{a}m + \frac{d}{a})y + m^4 + \frac{b}{a}m^3 +$
$+\frac{c}{a}m^2 + \frac{d}{a}m + \frac{e}{a} = 0$

onde $4m + \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow m = -\frac{b}{4a}$. Substituindo m por $-\frac{b}{4a}$ na equação temos:

$y^4 + (6(-\frac{b}{4a})^2 + 3\frac{b}{a}(-\frac{b}{4a}) + \frac{c}{a})y^2 + (4(-\frac{b}{4a})^3 + 3\frac{b}{a}(-\frac{b}{4a})^2 + 2\frac{c}{a}(-\frac{b}{4a}) + \frac{d}{a})y+$

$+(-\frac{b}{4a})^4 + \frac{b}{a}(-\frac{b}{4a})^3 + \frac{c}{a}(-\frac{b}{4a})^2 + \frac{d}{a}(-\frac{b}{4a}) + \frac{e}{a} = 0$

$y^4 + (\frac{3b^2}{8a^2} - \frac{3b^2}{4a^2} + \frac{c}{a})y^2 + (-\frac{b^3}{16a^3} + \frac{3b^3}{16a^3} - \frac{2bc}{4a^2} + \frac{d}{a})y + (\frac{b^4}{256a^4} - \frac{b^4}{64a^4} + \frac{b^2c}{16a^3} -$

$-\frac{bd}{4a^2} + \frac{e}{a}) = 0$

Façamos

$$p = \frac{3b^2}{8a^2} - \frac{3b^2}{4a^2} + \frac{c}{a},$$

$$q = -\frac{b^3}{16a^3} + \frac{3b^3}{16a^3} - \frac{2bc}{4a^2} + \frac{d}{a}$$

e

$$r = \frac{b^4}{256a^4} - \frac{b^4}{64a^4} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{e}{a}.$$

Com isso temos:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Assim, analogamente ao que ocorre com as equações do 3º grau, quem sabe resolver a equação incompleta

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \tag{4.1}$$

consegue resolver qualquer tipo de equação do 4º grau.

Ferrari olhou a equação incompleta (4.1) e procurou reagrupar os termos de modo que nos dois lados da igualdade houvesse polinômios quadrados perfeitos. Se tal reagrupamento fosse possível, seriam extraídas as raízes quadradas, cair-se-ia em equações do 2º grau e o problema estaria resolvido.

A equação foi, então, assim escrita:

$$x^4 + (p+\alpha)x^2 + (r+\beta) = \alpha x^2 - qx + \beta$$

novamente com a noção comum de Euclides, onde α e β são números a ser determinados de forma que os dois lados da igualdade sejam quadrados perfeitos. Para que isso ocorra, é necessário e suficiente que os discriminantes daqueles dois trinômios, ao mesmo tempo, sejam iguais a zero, ou seja,

$$(p+\alpha)^2 - 4(r+\beta) = 0$$

e

$$q^2 - 4\alpha\beta = 0 \rightarrow \beta = q^2/4\alpha$$

$$(p+\alpha)^2 - 4(r + q^2/4\alpha) = 0$$

$$(p+\alpha)^2 - 4r - q^2/\alpha = 0$$

logo

$$\alpha^3 + 2p\alpha^2 + (p^2 - 4r)\alpha - q^2 = 0$$

o que é uma equação de 3º grau em α. Como as equações de 3º grau podem ser resolvidas, acha-se α, em seguida β e extraem-se as raízes quadradas

$$\sqrt{x^4 + (p+\alpha)x^2 + (r+\beta)} = \pm\sqrt{\alpha x^2 - qx + \beta}.$$

Para cada alternativa de sinal + ou - tem-se uma equação do 2º grau, ambas com duas soluções. Portanto, para a equação do 4º grau, o método fornece 4 raízes, de uma forma semelhante ao que acontece na fórmula de Bhaskara.

Os passos para a solução da equação geral do 4º grau, portanto, são:

1. Toma-se a equação geral e faz-se uma transformação do tipo $x = y + m$ de modo a cair-se

em uma equação do 4º grau em y sem o termo do 3º grau;

2. Reagrupam-se seus termos de modo a fazer com que ambos os lados da igualdade sejam quadrados perfeitos. Cai-se em uma equação do 3º grau em α. Se ela for completa, faz-se a transformação $\alpha = \alpha' + t$ de modo a obter-se uma equação do 3º grau em α', sem o termo do 2º grau;

3. Resolve-se a equação em α' pelo método de Tartaglia;

4. Soma-se t a α' e obtém-se α. Obtido α calcula-se β.

5. Com α e β, extraem-se as raízes quadradas dos dois lados da igualdade e obtém-se os 4 valores possíveis de y. Soma-se m a y e obtém-se as 4 raízes da equação geral.

Realmente, é um método perfeito, do ponto-de-vista teórico, mas bastante trabalhoso. O grande mérito de Ferrari foi haver demonstrado que a solução das equações do 4º grau era possível apenas com operações algébricas.

Mas o que aconteceria se a equação do 3º grau em α tivesse 3 soluções? Como a cada valor de α correspondem a 4 raízes, poderia acontecer de alguma equação do 4º grau ter $3 \times 4 = 12$ raízes? A resposta é não e a explicação é simples.

Chamemos de x_1, x_2, x_3 e x_4 as quatro raízes de uma equação do 4º grau. O método de Ferrari, ao reduzir o problema a um par de equações do 2º grau, coloca duas raízes em uma delas e as outras duas em outra. De quantas formas diferentes podem ser agrupadas as raízes x_1, x_2, x_3 e x_4 em dois blocos de duas cada? A resposta conforme a Tabela 4.1 é 3:

	1ªequação	2ªequação
Forma 1	x_1x_2	x_3x_4
Forma 2	x_1x_3	x_2x_4
Forma 3	x_1x_4	x_2x_3

Tabela 4.1: Raízes Agrupada

Portanto, cada valor de α corresponde apenas a uma das 3 formas diferentes de se agrupar raízes duas a duas, mas estas são sempre as mesmas, independentemente da raiz α adotada no método de Ferrari.

Vejamos um exemplo concreto ilustrado no livro "Romance das Equações Algébricas"do autor Garbi [11].

Exemplo 18. *Seja a equação* $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$

Aplicando o método de Ferrari, encontra-se α e β tais que

$$x^4 - (15 - \alpha)x^2 + (24 + \beta) = \alpha x^2 + 10x + \beta$$

com ambos os lados da igualdade quadrados perfeitos.

Para isto

$$(15-\alpha)^2 - 4(24+\beta) = 0$$

e

$$100 - 4\alpha\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{25}{\alpha}$$

o que leva à equação $\alpha^3 - 30\alpha^2 + 129\alpha - 100 = 0$.

Esta equação, sendo de 3º grau, possui as raízes $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 4$ e $\alpha_3 = 25$.

Para $\alpha_1 = 1$ e $\beta_1 = 25$ os dois membros da igualdade ficam

$x^4 - (15-1)x^2 + (24+25) = x^2 + 10x + 25$

$x^4 - 14x^2 + 49 = x^2 + 10x + 25$

$(x^2-7)^2 = (x+5)^2$

Então

$(x^2-7) = (x+5) \therefore x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 4$ e $x_2 = -3$

$(x^2-7) = -(x+5) \therefore x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_3 = -2$ e $x_4 = 1$

Para $\alpha_2 = 4$ e $\beta_2 = \dfrac{25}{4}$, tem-se

$x^4 - (15-4)x^2 + (24 + \dfrac{25}{4}) = 4x^2 + 10x + \dfrac{25}{4}$

$x^4 - 11x^2 + \dfrac{121}{4} = 4x^2 + 10x + \dfrac{25}{4}$

$(x^2 - \dfrac{11}{2})^2 = (2x + \dfrac{5}{2})^2$

Seque que,

$(x^2 - \dfrac{11}{2}) = (2x + \dfrac{5}{2}) \therefore x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = 4$ e $x_2 = -2$

$(x^2 - \dfrac{11}{2}) = -(2x + \dfrac{5}{2}) \therefore x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_3 = 1$ e $x_4 = -3$

Para $\alpha_3 = 25$ e $\beta_3 = 1$ e tem-se

$x^4 - (15-25)x^2 + (24+1) = 25x^2 + 10x + 1$

$x^4 + 10x^2 + 25 = 25x^2 + 10x + 1$

$(x^2+5)^2 = (5x+1)^2$

Então,

$(x^2+5) = (5x+1) \therefore x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 4$ e $x_2 = 1$

$(x^2+5) = -(5x+1) \therefore x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_3 = -3$ e $x_4 = -2$.

Portanto, as raízes são sempre -3,-2,1 e 4. O que existe de diferente são as 3 maneiras de se agrupar os termos da equação de modo a ter-se quadrados perfeitos em ambos os membros da equação:

$$(x^2-7)^2 = (x+5)^2$$

$$(x^2 - \frac{11}{2})^2 = (2x + \frac{5}{2})^2$$

$$(x^2+5)^2 = (5x+1)^2$$

As 3 são equivalentes à equação original $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$.

A seguir um outro exemplo elaborado pelo próprio autor:

Exemplo 19. *Seja a equação* $4x^4 + 8x^2 + 8x + 5 = 0$

Dividindo toda a equação por 4, tem-se

$$x^4 + 2x^2 + 2x + \frac{5}{4} = 0$$

Aplicando o método de Ferrari, encontra-se α e β tais que

$$x^4 + (2+\alpha)x^2 + (\frac{5}{4} + \beta) = \alpha x^2 - 2x + \beta$$

com ambos os lados da igualdade quadrados perfeitos. Para isto

$$(2+\alpha)^2 - 4(\frac{5}{4} + \beta) = 0$$

e

$$4 - 4\alpha\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{1}{\alpha}$$

o que leva à equação $\alpha^3 + 4\alpha^2 - \alpha - 4 = 0$.

Esta equação, sendo de 3º grau, possui as raízes $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$ e $\alpha_3 = -4$.

Para $\alpha_1 = 1$ e $\beta_1 = 1$ os dois membros da igualdade ficam

$x^4 + (2+1)x^2 + (\frac{5}{4} + 1) = x^2 - 2x + 1$

$x^4 + 3x^2 + \frac{9}{4} = x^2 - 2x + 1$

$(x^2 + \frac{3}{2})^2 = (x-1)^2$

Então

$(x^2 + \frac{3}{2}) = (x-1) \therefore x^2 - x + \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{1+3i}{2}$ e $x_2 = \dfrac{1-3i}{2}$

$(x^2 + \frac{3}{2}) = -(x-1) \therefore x^2 + x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x_3 = \dfrac{-1+i}{2}$ e $x_4 = \dfrac{-1-i}{2}$

Para $\alpha_2 = -1$ e $\beta_2 = -1$, tem-se

$x^4 + (2-1)x^2 + (\frac{5}{4} - 1) = -x^2 - 2x - 1$

$x^4 + x^2 + \frac{1}{4} = -x^2 - 2x - 1$

Somando-se $2x^2 + 2$ aos dois membros da equação, tem-se

$x^4 + 3x^2 + \frac{9}{4} = x^2 - 2x + 1$

$(x^2 + \frac{3}{2})^2 = (x-1)^2$

Então

$(x^2 + \frac{3}{2}) = (x-1) \therefore x^2 - x + \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{1+3i}{2}$ e $x_2 = \dfrac{1-3i}{2}$

$(x^2+\frac{3}{2}) = -(x-1) \therefore x^2+x+\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{-1+i}{2}$ e $x_4 = \frac{-1-i}{2}$

Para $\alpha_3 = -4$ e $\beta_3 = -\frac{1}{4}$ e tem-se

$x^4+(2-4)x^2+(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}) = -4x^2-2x-\frac{1}{4}$

$x^4-2x^2+1 = -4x^2-2x-\frac{1}{4}$

Somando-se $5x^2+\frac{5}{4}$ aos dois membros da equação, tem-se

$x^4+3x^2+\frac{9}{4} = x^2-2x+1$

$(x^2+\frac{3}{2})^2 = (x-1)^2$

Então

$(x^2+\frac{3}{2}) = (x-1) \therefore x^2-x+\frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1+3i}{2}$ e $x_2 = \frac{1-3i}{2}$

$(x^2+\frac{3}{2}) = -(x-1) \therefore x^2+x+\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{-1+i}{2}$ e $x_4 = \frac{-1-i}{2}$

Portanto, as raízes são sempre $\frac{1+3i}{2}$, $\frac{1-3i}{2}$, $\frac{-1+i}{2}$ e $\frac{-1-i}{2}$.

4.2 Uma Solução Contemporânea das Equações do 4º Grau Conforme Carlos Gustavo Tamn

A seguir mostraremos a resolução das equações do 4º grau demonstrada por Moreira [14] no artigo "Uma solução das equações do 3º e 4º graus". Porém, poucos dias antes da publicação, a RPM (Revista do Professor de Matemática) recebeu uma carta do autor Moreira, pedindo que a seguinte nota fosse anexada ao artigo: "Recentemente, folheando o livro Elements of Algebra do Euler [9], descobri que o próprio Euler tinha desenvolvido essencialmente o mesmo método que o meu para resolver equações do 4° grau".

4.2.1 Solução para as Equações do 4º Grau

Uma variação da técnica para a resolução das equações do 3º grau de Moreira, o permitiu resolver as equações do 4° grau.

Considere a equação do 3° grau $x^3 - Sx^2 + S_d x - P = 0$ de raízes x_1, x_2 e x_3, que satisfazem:

$$x_1+x_2+x_3 = S, \quad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = S_d \quad e \quad x_1x_2x_3 = P.$$

Seja $y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$. Temos:

$$y^2 = x_1 + x_2 + x_3 + 2(\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3}) \Rightarrow$$

$$(\frac{y^2 - S}{2})^2 = (\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3})^2 =$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 2\sqrt{x_1x_2x_3}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}),$$

ou seja,

$$(\frac{y^2 - S}{2})^2 = S_d + 2\sqrt{P}y, \ ou$$

$$y^4 - 2Sy^2 - 8\sqrt{P}y + S^2 - 4S_d = 0 \tag{4.2}$$

Dada a equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, fazemos uma substituição do tipo $x = y + t$ e obtemos $y^4 + (4t + a)y^3 + ... = 0$. Tomando $t = -a/4$, obtemos uma equação do tipo

$$y^4 + k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0$$

sem termo em y^3.

Comparando com (4.2), tomamos S, P e S_d tais que

$$-2S = k_1, \ -8\sqrt{P} = k_2 \ e \ S^2 - 4S_d = k_3 \Rightarrow$$

$$S = -\frac{k_1}{2}, \ P = (\frac{k_2}{8})^2 \ e \ S_d = \frac{S^2 - k_3}{4} = \frac{k_1^2 - 4k_3}{16}.$$

Assim, resolvendo a equação

$$x^3 + \frac{k_1}{2} + \left(\frac{k_1^2 - 4k_3}{16}\right)x - \left(\frac{k_2}{8}\right)^2 = 0$$

obtemos raízes x_1, x_2 e x_3 tais que

$$y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$$

satisfaz

$$y^4k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0.$$

Para obter as raízes de $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, basta diminuir $a/4$ das raízes de $y^4 + k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0$.

Observe que cada raiz quadrada pode assumir dois valores complexos, mas a equação

$\sqrt{P} = -k_2/8$ diz que $\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\sqrt{x_3} = -k_2/8$. Assim, para cada valor de $\sqrt{x_1}$ e $\sqrt{x_2}$ há um único valor de $\sqrt{x_3}$. Dessa forma obtemos todas as quatro raízes da equação original.

Exemplo 20. *Considere a equação* $y^4 - 12y^2 - 16y - 4 = 0$.

Segundo o método utilizado para resolver equações do 4.° grau, temos:
$k_1 = -12$, $k_2 = -16$ e $k_3 = -4$.
Resolvendo a equação do 3° grau:

$$x^3 + (\frac{k_1}{2})x^2 + (\frac{k_1^2 - 4k_3}{16})x - (\frac{k_2}{8})^2 = 0$$

temos:

$$x^3 - 6x^2 + 10x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 2 + \sqrt{2},\ x_3 = 2 - \sqrt{2}.$$

As raízes de $y^4 - 12y^2 - 16y - 4 = 0$ são:

$$\sqrt{2} + \sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}},\ \ \sqrt{2} - \sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$-\sqrt{2} + \sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}\ \ e\ \ -\sqrt{2} - \sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

(lembre-se da regra dos sinais: o produto deve ser sempre $k_2/8$, no caso igual a 2).

Exemplo 21. *Considere a equação* $x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4 = 0$.

Fazendo $x = y - 1$, obtemos $y^4 + 2y^2 - 16y + 17 = 0$. Temos, pois, $k_1 = 2$, $k_2 = -16$ e $k_3 = 17$.

A equação auxiliar $x^3 + \frac{k_1}{2}x^2 + \frac{k_1^2 - 4k_3}{16}x - (\frac{k_2}{8})^2 = 0$ torna-se $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$, cujas raízes são $-1,\ -2\ e\ 2$.

Assim as raízes de $y^4 + 2y^2 - 16y + 17 = 0$ são

$$i + i\sqrt{2} + \sqrt{2},\ \ i - i\sqrt{2} - \sqrt{2},\ \ -i + i\sqrt{2} - \sqrt{2}\ \ e\ \ i - i\sqrt{2} + \sqrt{2}$$

e, como $x = y - 1$, as raízes de $x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4 = 0$ são

$$-1 + \sqrt{2} + i(1 + \sqrt{2}),\ \ -1 - \sqrt{2} + i(1 - \sqrt{2}),$$

$$-1 - \sqrt{2} + i(\sqrt{2} - 1),\ \ -1 + \sqrt{2} + i(-1 - \sqrt{2}).$$

Capítulo 5

A História da Matemática como Ferramenta de Ensino

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) [3] aprender e ensinar matemática no ensino fundamental pressupõe a análise de variáveis envolvidas nesse processo - aluno, professor e saber matemático -, assim como das relações entre elas.

Numa reflexão sobre o ensino da Matemática é de fundamental importância ao professor:

- identificar as principais características dessa ciência, de seus métodos, de suas ramificações e aplicações;
- conhecer a história de vida dos alunos, sua vivência de aprendizagens fundamentais, seus conhecimentos informais sobre um dado assunto, suas condições sociológicas, psicológicas e culturais;
- ter clareza de suas próprias concepções sobre a Matemática, uma vez que a prática em sala de aula, as escolhas pedagógicas, a definição de objetivos e conteúdos de ensino e as formas de avaliação estão intimamente ligadas a essas concepções.

As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam uma inteligência essencialmente prática, que permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões e, portanto, desenvolver uma ampla capacidade para lidar com a atividade matemática. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado.

No entanto, apesar dessa evidência, tem-se buscado, sem sucesso, uma aprendizagem em Matemática pelo caminho da reprodução de procedimentos e da acumulação de informações; nem mesmo a exploração de materiais didáticos tem contribuído para uma aprendizagem mais eficaz, por ser realizada em contextos pouco significativos e de forma muitas vezes artificial. É muito importante que se estabeleça relações entre os conteúdos matemáticos e situações problemas existente no cotidiano, pois, abordados de forma isolada, os conteúdos podem acabar representando muito pouco para a formação do aluno, particularmente para a formação da cidadania. Por sua vez o conhecimento da história dos conceitos matemáticos precisa fazer parte da formação dos professores para que estes tenham elementos que lhes permitam mostrar aos alunos a Matemática como ciência que não trata de verdades eternas, infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos. Além disso, conhecer os obstáculos envolvidos no processo de construção de conceitos é de grande utilidade para que o professor compreenda melhor alguns aspectos da aprendizagem dos alunos.

Tradicionalmente, a prática mais frequente no ensino de Matemática era aquela em que o professor apresentava o conteúdo oralmente, partindo de definições, exemplos, demonstração de propriedades, seguidos de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação, e pressupunha que o aluno aprendia pela reprodução. Considerava-se que uma reprodução correta era evidência de que ocorrera a aprendizagem.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais [3] a História da Matemática, mediante um processo de transposição didática e juntamente com outros recursos didáticos e metodológicos, pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem em Matemática. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno diante do conhecimento matemático.

Além disso, conceitos abordados em conexão com sua história constituem-se veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural.

Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns "porquês"e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento.

De acordo com o PCN [3], o trabalho com a história da matemática e estudos da Etnomatemática ajuda a explicar, histórica e socialmente, a evolução e produção do conhecimento matemático. Segundo Balestri [1], quando os alunos têm a oportunidade de observar que o conhecimento matemático é construído, ou utilizado, por todos aqueles que precisam contar, medir, desenhar, localizar, etc. - e não somente por matemáticos - eles podem reconhecer que a Matemática pode ser produzida por todos, e não somente por sociedades e grupos específicos. A aproximação do saber escolar aos contextos culturais e a valorização da Matemática, construída intuitiva e socialmente, são muito importantes para os processos de ensino e de aprendizagem.

A ideia de que os alunos devem compreender a Matemática como uma construção humana é reforçada pelo NCTM [15] (National Council of Teachers of Mathematics) ao defender que o professor deve comunicar, como um gosto acentuado pela matemática e um estilo de fazer matemática que implique a ideia de que a matemática é uma criação do espírito humano.

Segundo Nobre [16], o professor deve tentar trabalhar um conceito matemático a partir do desenvolvimento histórico desse conceito. Dessa forma, o professor estará investindo na fundamentação desse conceito, ou seja, o professor estará ensinando o porquê desse conceito, em vez de ensinar somente para quê ele serve. Ao expor questões acerca de determinado conteúdo matemático, o professor poderá despertar no aluno as mesmas curiosidades despertadas naqueles que contribuíram para o desenvolvimento do conteúdo matemático, e desse modo, contribuir para o desenvolvimento do pensamento matemático de seus alunos. Segundo os PCN [3], os alunos, ao observarem o alto nível de abstração matemática de culturas antigas, têm a oportunidade de compreender que os avanços tecnológicos de hoje são possíveis graças à cultura que herdamos de gerações anteriores. O uso da história da matemática em sala de aula não deve se resumir à simples narração ou datação de acontecimentos históricos. A história da matemática deve ir além de datas, nomes e lugares, ela deve ser vista como um recurso didático que abre um leque de possibilidades para o trabalho com diferentes conteúdos.

Não é necessário que o professor seja um especialista em história da matemática para incorporá-la à sua prática pedagógica. No simples fato de compartilhar com seus alunos algumas informações ou curiosidades históricas a respeito de um tema estudado, o professor já estará - em alguma medida - incorporando a história da matemática às suas aulas. Conforme D'Ambrosio [7], o professor também não é obrigado a trazer informações históricas para todas as aulas. Caso ele não tenha informações para compartilhar com seus alunos a respeito de determinado tema, não há problema.

5.1 A História da Matemática e Os Exercícios Problemas como Ferramenta para o Ensino das Equações 1º e 2º Graus

É muito importante que os alunos do 3º e 4º ciclos do ensino fundamental, antes de aprenderem qualquer assunto referente a matemática, saiba o porquê de "alguém" ter criado aquela fórmula ou o porquê de "alguém" ter encontrado a resolução para a mesma, ou seja, qual o objetivo de se aprender tal assunto e onde ele poderá ser aplicado no seu cotidiano. Por isso a história da matemática se torna indispensável para o ensino da mesma, assim como os exercícios problemas para que percebam que elas são frequentemente usadas no cotidiano.

Vamos ver a seguir uma pequena sugestão de roteiro da aula a ser aplicada a uma turma do 3º ciclo do fundamental (no caso das equações do primeiro grau) ou a uma turma do 4º ciclo do fundamental (no caso das equações do segundo grau).

5.1.1 Roteiro I

No caso das equações do 1º e 2º graus poderíamos começar com uma proposta pedagógica de ensino, com o professor já respondendo e explicando alguns porquês para os nossos alunos como:

Como elas surgiram?

Para que elas servem?

Como eram resolvidas antes de Elclides?

Como são resolvidas hoje (depois de Euclides)?

Após serem feitas as perguntas, responde-las mostrando que elas surgiram na antiguidade por necessidade da vida cotidiana (através de exercícios problemas exemplificados a seguir), e logo em seguida explicar a sua dificuldade de resolução usando a "Regra da Falsa Posição".

Exemplo 22. *Qual o número somado a sua quarta parte resulta em 10?*

Pela Regra da Falsa Posição, fazia-se uma hipótese inicial qualquer a respeito do número e verificava-se o que ocorria. Suponhamos, que tal número fosse 4.

Ora, 4 somado com a sua quarta parte dá 4 + 1 = 5, exatamente a metade dos 10 que deveria dar. Portanto, o número procurado é o dobro de 4, ou seja, 8.

Para depois, sim, ensinar o nosso método de hoje através dos postulados de natureza geométrica e em noções comuns de Euclides, concomitantemente com situações problemas do cotidiano; com certeza seria mais aceito pelos alunos do que simplesmente estudá-las só por estudar.

É interessante que os postulados de Euclides, conforme Commandino [6], sejam expostos no quadro e que se explique o que cada um quer dizer.

Vamos mais uma vez aos postulados:

a) Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.

b) Se iguais forem somados a iguais, os resultados serão iguais.

c) Se iguais forem subtraídos de iguais, os resultados serão iguais.

d) Coisas coincidentes são iguais entre si.

e) O todo é maior do que a parte.

Embora não tenha sido diretamente enunciada por Euclides, é fácil aceitar outra verdade:

f) Iguais multiplicados ou divididos por iguais continuam iguais. Após a explicação dos postulados, resolver um exercício problema de equação do primeiro grau simples, usando os mesmos.

Exemplo 23. *O dobro da idade de João menos 3 é igual a 7. Qual a idade de João?*

Aqui, além de o professor ensinar seus alunos a montarem a equação, eles também vão resolver usando os postulados de Euclides:

$$2x - 3 = 7$$

1. Utilizando o postulado b) tem-se: $2x - 3 + 3 = 7 + 3$, logo $2x = 10$
2. Utilizando o postulado f) tem-se: $2x/2 = 10/2$, logo $x = 5$, portanto João tem 5 anos.

No caso das equações do 2º grau para alunos do quarto ciclo, o procedimento seria o mesmo, acrescentando apenas a demonstração da Fórmula de Bhaskara (*demonstrada na seção 2.3*) através da utilização dos postulados de Euclides e após isso, resolver alguns exercícios problemas para melhor entendimento.

Assim, no primeiro contato com o assunto os alunos já entenderão e saberão como surgiram as equações do 1º e 2º graus, para que servem, a dificuldade para resolvê-las antes de Euclides e a facilidade depois desse, dando maior importância e atenção para o assunto, pois terão a plena consciência de que não estarão aprendendo somente por aprender, mas por poder ser aplicada no seu dia-a-dia para resolução de diversos problemas. Por isso, também, que os exercícios propostos devem ser exercícios (problemas), exercícios que simulem problemas e situações reais para que seja reforçada a ideia da "necessidade do aprendizado das equações do 1º e do 2º graus".

A seguir mostraremos alguns exemplos de exercícios problema de equações do 1º grau.

Exemplo 24. *André viaja 200 quilômetros para ir de carro de sua casa à cidade onde moram seus pais. Numa dessas viagens, após alguns quilômetros, ele parou para um cafezinho. A seguir, percorreu o triplo da quantidade de quilômetros que havia percorrido antes de parar. Quantos quilômetros ele percorreu após o café?*

Solução:

Este é um tipo de problema que devemos pensar "de trás para frente"para determinarmos sua incógnita.

Observe o seguinte trecho do enunciado: "percorreu o triplo da quantidade de quilômetros que havia percorrido antes de parar ..."

Vamos supor que André, antes de parar, tenha percorrido uma distância d. Então, o triplo de d é $3d$.

Desse modo, acabamos de representar a incógnita do problema por d.

Incógnita d: quantidade percorrida antes de parar.

Triplo da quantidade percorrida: $3d$.

Montando a equação:

De acordo com o problema, André percorre um quantidade d antes de parar e depois percorre o triplo dessa quantidade, isto é, $3d$. Então, o total percorrido por André é de $(d + 3d)$.

Mas, o problema diz ainda que o total percorrido (quantidade) até a casa dos pais é de 200 km.

Portanto, concluímos que as quantidades devem ser iguais.

$d + 3d = 200$.

Resolução:

$d+3d=200 \Leftrightarrow 4d=200 \Leftrightarrow d=200/4 \Leftrightarrow d=50$km (atenção, essa não é a resposta final).

Após o café, André percorreu o triplo de d, ou seja,

$3 \times 50 = 150$ km. Essa solução satisfaz as condições do problema. Não é um número negativo. Somando o que André percorreu antes do café com o percorrido depois, temos 200 km.

Exemplo 25. *Um motorista, após ter enchido o tanque de seu veículo, gastou 1/5 da capacidade do tanque para chegar à cidade A; gastou mais 28 L para ir da cidade A até a cidade B; sobrou, no tanque, uma quantidade de combustível que corresponde a 1/3 de sua capacidade. Quando o veículo chegou à cidade B, quantos litros de combustível havia no tanque?*

Solução:

A resolução deste problema é semelhante ao problema 2, porém, com muito mais informação. Vejamos:

Para responder a pergunta do problema, devemos antes saber a capacidade do tanque.

Incógnita: capacidade do tanque: c.

1/5 da capacidade do tanque para chegar à cidade A : $1/5$ de $c = c/5$.

1/3 de sua capacidade: 1/3 de $c = c/3$.

Montando a equação:

Para montarmos a equação devemos ter em mente que a capacidade do tanque menos o que foi consumido para chegar até a cidade B é igual ao que sobrou no tanque, isto é, (capacidade do tanque) - (o que foi consumido) = (sobrou no tanque).

$$c - (c/5 + 28) = c/3$$

O consumo para chegar a cidade B foi de $(c/5 + 28)$, ou seja, até A, $c/5$ e de A até B, 28 litros.

Resolução:

$c - (c/5 + 28) = c/3 \Leftrightarrow$ (retirando dos parênteses, multiplicando sinais)

$\Leftrightarrow c - c/5 - 28 = c/3 \Leftrightarrow$ (igualando os denominadores com o cálculo do m.m.c. e já simplificando) $\Leftrightarrow 15c - 3c - 420 = 5c$

$\Leftrightarrow 15c - 5c - 3c = 420 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7c = 420 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c = 60$L.

Agora já sabemos a capacidade do tanque que é de 60 litros.

De acordo com o problema, sobrou no tanque um terço da capacidade $(c/3)$, então 60/3 = 20 L.

Logo, sobrou no tanque 20 Litros de combustível.

Observação 5.1.1. *Na resolução de problemas desse tipo temos duas situações, uma é equacionar o problema e a outra é resolver a equação.*

Exemplo 26. *Arthur tem R\$ 1.325,00 e Carlos, R\$ 932,00. Arthur economiza R\$ 32,90 por mês e Carlos, R\$ 111,50. Depois de quanto tempo terão quantias iguais?*

Solução:

Este problema é um pouco mais bem elaborado que os demais, então vamos por partes para resolvê-lo.

Vamos definir nossa incógnita. Você deve ter percebido que se trata do tempo.

Incógnita: tempo (em meses) em que terão quantias iguais: t.

Como Arthur e Carlos possuem quantias e economizam valores diferentes, vamos fazer em separado, por enquanto.

Arthur: tem R\$ 1.325,00 e economiza R\$ 32,90 por mês.

Como calcular o valor total que Arthur terá ao longo dos meses?

Vamos pensar um pouco antes, pois o mesmo valerá para Carlos.

Total em 1 mês: 1325 + 32,90 = R\$ 1357,90.

Total em 2 meses: 1325 + (32,90 $\times$ 2) = 1325 + 65,80 = R\$ 1390,80.

Total em 3 meses: 1325 + (32,90 $\times$ 3) = 1325 + 98,70 = R\$ 1423,70.

Bem, acredito que você já deve ter percebido que o total ao final de cada mês, será obtido pela soma do valor que Arthur tem com o valor total economizado que é dado pelo produto de 32,90 com a quantidade de meses.

Mas como chamamos o tempo de t, vamos substituir a quantidade de meses por t. Fazendo isso, temos uma expressão que nos dá o valor total que Arthur terá em t meses (uma quantidade qualquer de meses).

Total em t meses: 1325 + (32,90 $\times t$) = 1325 + 32,90t.

Equação da quantia para Arthur: 1325 + 32,90t.

O mesmo raciocínio vale para Carlos, pois o tempo deve ser o mesmo.

Equação da quantia para Carlos: 932 + 111,50t.

Pode acreditar, a parte mais difícil do problema já foi resolvida.

A pergunta é: depois de quanto tempo (t meses) terão quantias iguais (=).

Equação e resolução:

Quantia de Arthur = Quantia de Carlos. $1325 + 32,90t = 932 + 111,50t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1325 - 932 = 111,50t - 32,90t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 393 = 78,60t \Leftrightarrow$

$393/78,60 = t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = 5$ meses.

Logo, Carlos e Arthur terão quantias iguais depois de 5 meses.

Exemplo 27. *O dobro da quantia que Pedro possui e mais R$ 20,00 dá para comprar exatamente um objeto que custa R$ 80,00. Quanto Pedro possui?*

Solução:

Vamos começar por representar a incógnita do problema por uma letra (você escolhe!). A incógnita do problema é a quantia que Pedro possui (o que o problema quer saber).

Incógnita: quantia que Pedro possui: q

Observe que estamos lidando com uma quantia de dinheiro, então "q" só poderá assumir valores, neste caso, inteiro ou decimal mas não negativo.

Dobro da quantia que Pedro possui: $2.q$ ou $2q$.

Veja que Pedro possui uma quantia q, então o dobro de q é $2q$.

Equação: $2q + 20 = 80$.

O problema diz: o dobro da quantia que Pedro possui ($2q$) mais vinte reais (+20) dá para comprar exatamente um objeto que custa oitenta reais (=80), isto é, se "dá para comprar exatamente"quer dizer então que é igual (=).

Resolução:

$2q + 20 = 80 \Leftrightarrow 2q = 80 - 20 \Leftrightarrow 2q = 60 \Leftrightarrow q = 60/2 \Leftrightarrow q = 30$ reais.

Verificando se a solução (valor de q) satisfaz as condições do problema:

30,00 é inteiro ou decimal, positivo. O dobro de 30,00 é 60,00 e 60,00 mais 20 é exatamente igual a 80. Portanto, Pedro possui R$ 30,00.

A seguir mostraremos alguns exemplos de exercícios problema de equações do 2º grau.

Exemplo 28. *Comprei 4 lanches a um certo valor unitário. De outro tipo de lanche, com o mesmo preço unitário, a quantidade comprada foi igual ao valor unitário de cada lanche. Paguei com duas notas de cem reais e recebi R$ 8,00 de troco. Qual o preço unitário de cada produto?*

Solução:

O enunciado nos diz que os dois tipos de lanche têm o mesmo valor unitário. Vamos denomina-lo então de x.

Ainda, segundo o enunciado, de um dos produtos eu comprei 4 unidades e do outro eu comprei x unidades.

Sabendo-se que recebi R$ 8,00 de troco ao pagar R$ 200,00 pela mercadoria, temos as informações necessárias para montarmos a seguinte equação:

$4.x + x.x + 8 = 200$

Como x representa o valor unitário de cada lanche, vamos solucionar a equação para descobrirmos que valor é este:

Seja a equação $x^2 + 4x + 8 = 200$.

Usando a Fórmula de Bhaskara (2.3) ($x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, onde $a = 1$, $b = 4$ e $c = -192$) temos:

$$x^2 + 4x - 192 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.(-192)}}{2.1}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{784}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 28}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{24}{2} = 12$$

$$x_1 = \frac{-4 - 28}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-32}{2} = -16$$

Logo, as raízes da equação são -16 e 12. Como o preço não pode ser negativo, o valor -16 deve ser descartado.

Portanto, o preço unitário de cada produto é de R$ 12,00.

Exemplo 29. *O produto da idade de Arthur pela idade de Carlos é igual a 374. Arthur é 5 anos mais velho que Carlos. Quantos anos tem cada um deles?*

Solução:

Se chamarmos de x a idade de Arthur, teremos que $x - 5$ será a idade de Carlos. Como o produto das duas idades é igual a 374, temos que $x.(x - 5) = 374$.

Essa sentença matemática também pode ser expressa como:

$$x^2 - 5x = 374$$

$$x^2 - 5x - 374 = 0$$

Primeiramente para obtermos a idade de Arthur, vamos solucionar a equação $x^2 - 5x - 374 = 0$.

Usando a Fórmula de Bhaskara (2.3) ($x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, onde $a = 1$, $b = -5$ e $c = -374$) temos:

$$x^2 - 5x - 374 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.(-374)}}{2.1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1521}}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 + 39}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{44}{2} = 22$$

$$x_1 = \frac{5 - 39}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-34}{2} = -17$$

Logo, as raízes encontradas são -17 e 22, por ser negativa, a raiz -17 deve ser descartada. Portanto a idade de Arthur é de 22 anos.

Como Arthur é 5 anos mais velho que Carlos, Carlos tem então 17 anos.

Logo, Arthur tem 22 anos e Carlos tem 17 anos.

Exemplo 30. *Uma tela retangular com área de 9800 cm^2 tem de largura duas vezes a sua altura. Quais são as dimensões dessa tela?*

Solução:

Se chamarmos de x a altura da tela, temos que $2x$ será a largura da mesma.

Sabemos que a área de uma figura geométrica retangular é calculada multiplicando-se a medida da sua largura, pela medida da sua altura.

Escrevendo o enunciado na forma de uma sentença matemática, temos:

$x.2x = 9800$

Note que temos uma equação do segundo grau incompleta, com isso teremos duas raízes reais opostas, situação que ocorre sempre que o coeficiente b é igual a zero.

Vamos aos cálculos:

$x.2x = 9800 \; 2x^2 = 9800 \; \frac{2}{2}x^2 = \frac{9800}{2} \; x^2 = 4900 \; x = \pm\sqrt{4900} \; x_1 = 70 \; x_2 = -70$

As raízes reais encontradas são -70 e 70, no entanto como uma tela não pode ter dimensões negativas, devemos desconsiderar a raiz -70.

Como $2x$ representa a largura da tela, temos então que ela será de $2.70 = 140$.

Portanto, esta tela tem as dimensões de 70 cm de altura, por 140 cm de largura.

5.2 O Ensino dos Complexos Utilizando a História da Matemática e as Equações do 3º Grau

Atualmente, na maioria das escolas, não são ensinadas as equações do 3º grau, porem foi o surgimento e a tentativa de resolução da mesma que indicaram claramente que os números com que a Matemática vinha trabalhando havia séculos não eram mais suficientes para o estudo da Álgebra.

E para que as equações do 3º grau fossem vencidas, algebricamente, aqueles "estranhos" números deveriam ser desvendados.

Foi preciso a dedicação de inúmeros matemáticos até que os complexos fossem vencidos por Euler e o primeiro e principal motivo de vencer os complexos era justamente para que se chegasse, de forma algébrica, a resolução das equações do 3º grau, ou seja, foram as equações do 3º grau e não as do 2º que desencadearam todo o desenvolvimento teórico dos complexos.

Segundo Garbi [11], Bombelli comenta que existe um equívoco frequente de alguns professores e livros-texto relativo à origem dos números complexos, pois foram as equações do 3º grau e não as do 2º que desencadearam todo o desenvolvimento teórico naquela área. O trabalho que durou mais de dois séculos a partir da ideia pioneira de Bombelli.

E porque não aprender os complexos com o objetivo inicial de desvendar as equações do 3º grau?

Falaremos sobre esta relação entre as equações do 3º grau e os complexos com análise e proposta pedagógica para que as equações de grau três seja utilizada como tema percursor para os estudos dos complexos.

A seguir mostraremos pequena sugestão de roteiro da aula a ser aplicada a uma turma de 3º ano do Ensino Médio referente aos complexos.

5.2.1 Roteiro II

Antes que os complexos sejam apresentados para os alunos, as equações do 3º grau deveriam ser apresentadas com um exemplo clássico proposto por Cardano "Qual é a medida x, comum à aresta de um cubo e à altura de um paralelepípedo com área da base 15 unidades, sabendo que a diferença entre seus volumes é de 4 unidades?"equivalente a equação $x^3 - 15x = 4$ (verificar que 4 é uma solução para o problema proposto).

$4^3 - 15.4 = 4$

Agora, dividindo a equação $x^3 - 15x - 4$ por $(x - 4)$, tem-se $x^2 + 4x + 1$, igualando este a zero, basta aplicar a fórmula de Bhaskara (2.3) para se chegar nas outras duas raízes que são $-2 + \sqrt{3}$ e $-2 - \sqrt{3}$.

Após ter feito isso, é importante contar, brevemente, a historia de Tartaglia e Cardano, ilustrada acima, e demonstrar a linda fórmula geral criada por aquele.

Agora, utilizando a fórmula de Cardano-Tartaglia (3.1), determinar as raízes da equação $x^3 + 15x - 4 = 0$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Aqui os alunos vão se deparar com equações que possuem raízes reais conhecidas,porém quando resolvida pela fórmula de Cardano-Tartaglia (3.1) obtém-se por raízes quadradas de números negativos. Algo que até então é novidade para todos, causando-os assim, perplexidade e curiosidade.

Nesse momento, pode surgir uma pergunta feita por algum aluno mais atento: Por que nas equações quadráticas com discriminante menor que zero, tal equação não possui solução real? Essa é uma pergunta importantíssima para que todos fiquem convictos da importância que tem os complexos. Se nenhum dos alunos a fizer, o professor deve estimulá-la. E, na sequência, respondê-la: porque os números estudados até aqui não são suficientes para resolução de todos os problemas algébricos que conhecemos.

O professor então estaria ali provando e explicando a insuficiência dos números reais e também a necessidade da extração de raízes quadradas de números negativos, ou seja, a primeira apresentação dos números complexos para os referidos alunos.

Usando ainda os passos de Bombelli, que mostra

$$(\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = -1$$
$$(-\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = 1$$
$$(-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) = -1$$
$$(\pm)(\sqrt{-1}) = \pm\sqrt{-1}$$
$$(\pm)(-\sqrt{-1} = \mp\sqrt{-1}$$

e utiliza $\sqrt{-1}$ como um número conhecido, pode ser feita a aplicação desses passos na equação

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

onde chegará a $x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$, resultado este já conhecido.

A partir daí sim, começaria o ensino dos complexos feito pelo professor, explanando de forma rápida, como Bombelli iniciou os estudos, como Euler desvendou-os extraindo raízes de números complexos e como Gauss não deixou muito a ser acrescentado, mostrando assim que a equação do 3º grau foi a maior responsável pelo surgimento dos números complexos.

A primeira vista é compreensível que os alunos demorem um pouco a aceitar e operar com essa nova espécie de número, por isso a importância da história da matemática concomitantemente com as equações do 3º grau para que seja ensinados os números complexos.

Antes de continuamos com alguns exemplos, é importante comentarmos também como se resolve as equações do terceiro grau na integra.

A equação geral do 3º grau é $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ que equivale a

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

Logo, basta considerar equações em que o coeficiente de x^3 é igual a 1. Dada a equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, a substituição $x = y - \frac{a}{3}$ a transforma em

$$(y - \frac{a}{3})^3 + a(y - \frac{a}{3})^2 + (y - \frac{a}{3}) + c = 0$$

ou seja,

$$y^3 + (b - \frac{a^2}{3})y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0,$$

que é uma equação desprovida de termo do segundo grau do tipo

$$x^3 + px + q = 0$$

Para resolver esta equação, escrevemos $x = z + w$. Substituindo, obtemos

$$x^3 = z^3 + w^3 + 3zw(z + w)$$

isto é,

$$x^3 - 3zwx - (z^3 + w^3) = 0$$

Portanto se conseguirmos acha números z, w tais que

$$z^3 + w^3 = -q$$

$$zw = -\frac{p}{3}$$

ou seja,

$$z^3 + w^3 = -q$$

$$z^3.w^3 = -\frac{p^3}{27},$$

então $x = z + w$ será raiz da equação $x^3 + px + q = 0$. Ora, o problema de achar z^3 e w^3 conhecendo a sua soma e seu produto é, como sabemos, de fácil solução: z^3 e w^3 são raízes da equação do segundo grau

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$$

Utilizando a fórmula clássica para resolver esta equação, temos

$$z^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$w^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

e consequentemente,

$$x = z + w = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Assim, $x = z + w$, é uma raiz da equação $x^3 + px + q$. Então basta dividir a equação $x^3 + px + q$ por $x - (z + w)$, que encontraremos uma equação do 2º grau na qual pode ser resolvida pela fórmula de Bhaskara.

Destaquemos o radicando $\Delta = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}$. Em que mostramos no capítulo 3 deste trabalho que se $\Delta > 0$ a equação tem uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas; se $\Delta = 0$, tem-se três raízes reais sendo uma repetida; se $\Delta < 0$ então as três raízes da equação $x^3 + px + q = 0$ são reais e distintas. Quando $\Delta < 0$, a fórmula exprime $x = z + w$ como soma de duas raízes cúbicas de números complexos. No entanto é este o caso em que a equação possui três raízes reais distintas. Este é chamado tradicionalmente o "caso irredutível", também mostrado no capítulo 3 deste trabalho, porque ao tentar eliminar os radicais, recai-se em outra equação do 3º grau.

A seguir, vejamos alguns exemplos retirados do livro de álgebra de Leonard Euler [8], escrito em 1770 e também citados no artigo "A Equação do Terceiro Grau"escrito por Elon Lages Lima [12].

Exemplo 31. *Seja* $x^3 + 3x + 2 = 0.$

Utilizando o método de resolução comentado neste roteiro temos

$$z^3 + w^3 = -q \ \ zw = -\frac{p}{3}$$

ou seja,

$$z^3 + w^3 = -q \ \ z^3.w^3 = -\frac{p^3}{27},$$

$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$

$$x = z + w = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$x = z + w = \sqrt[3]{-\frac{2}{2} + \sqrt{\frac{2^2}{4} + \frac{3^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{2}{2} - \sqrt{\frac{2^2}{4} + \frac{3^3}{27}}}$$

temos

$$\Delta = \frac{2^2}{4} + \frac{3^3}{27} \Rightarrow \Delta = 1 + 1 \Rightarrow \Delta = 2 > 0.$$

$$x = z + w = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{2}},$$

logo

$$r = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{2}} = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{2}} - \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$$

é raiz da equação.

As outras duas raízes são complexas; elas são obtidas resolvendo a equação do segundo grau $x^2 + ax + b = 0$, onde $x^2 + ax + b = (x^3 + 3x + 2) \div (x - r)$.

Portanto $a = r$ e $b = r^3 + 3$, isto é, a equação do segundo grau cujas raízes (complexas) são as duas outras raízes de $x^3 + 3x + 2 = 0$ é a equação $x^2 + rx + r^2 + 3 = 0$, onde r foi mostrada anteriormente. Aqui, a fórmula foi essencial para nos conduzir a raiz r.

Exemplo 32. *Seja* $x^3 - 3x - 2 = 0.$

Utilizando o mesmo método de resolução, temos

$$x = z + w = \sqrt[3]{-\frac{(-2)}{2} + \sqrt{\frac{(-2)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-2)}{2} - \sqrt{\frac{(-2)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27}}}$$

$$\Delta = \frac{(-2)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27} \Rightarrow \Delta = 1 - 1 \Rightarrow \Delta = 0$$

$x = z + w = \sqrt[3]{1 + \sqrt{1-1}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1-1}}$

Neste caso, $\Delta = 0$ e a fórmula nos dá a raiz $x = 2$. Como $(x^3 - 3x - 2) \div (x - 2) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, as outras raízes são -1 e -1, ou seja, uma raiz dupla.

Vejamos outra equação do 3º grau cujo $\Delta = 0$, desenvolvida pelo o autor do trabalho.

Exemplo 33. *Seja* $x^3 - 12x - 16 = 0.$

$$x = z + w = \sqrt[3]{-\frac{(-16)}{2} + \sqrt{\frac{(-16)^2}{4} + \frac{(-12)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-16)}{2} - \sqrt{\frac{(-16)^2}{4} + \frac{(-12)^3}{27}}}$$

$$\Delta = \frac{(-16)^2}{4} + \frac{(-12)^3}{27} \Rightarrow \Delta = 64 - 64 \Rightarrow \Delta = 0$$

$x = z + w = \sqrt[3]{8 + \sqrt{64 - 64}} + \sqrt[3]{8 - \sqrt{64 - 64}}$

$x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{8}$

$x = 4$

Como $(x^3 - 12x - 16) \div (x - 4) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$, as outras raízes são -2 e -2, ou seja, uma raiz dupla.

Exemplo 34. *Seja* $x^3 - 6x - 4 = 0.$

Utilizando o mesmo método de resolução, temos

$$x = z + w = \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} + \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} - \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}}$$

$$\Delta = \frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27} \Rightarrow \Delta = 4 - 8 \Rightarrow \Delta = -4 < 0.$$

$x = z + w = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}} \Rightarrow x = z + w = \sqrt[3]{2 + 2i} + \sqrt[3]{2 - 2i}$ isto parece ser um número complexo mas como vimos no capítulo 2 deste trabalho, tem que ser um número real, pois $\Delta = -4 < 0$, portanto ela deve ter 3 raízes reais e distintas.

Ora, testando os divisores de -4, termo independente de x, vemos que -2 é raiz da equação proposta. As outras duas são as raízes de $x^2 - 2x - 2 = 0$ porque $x^2 - 2x - 2 =$

$(x^3-6x-4)\div(x+2)$. Logo as três raízes da equação proposta são -2, $1+\sqrt{3}$ e $1-\sqrt{3}$. Este é um exemplo do caso irredutível, três raízes reais mas a fórmula nos dá um radical complexo.

Seria muito importante também, se após o ensino dos números complexos através das equações do 3º grau fosse exposta a equação do 4º grau e demonstrada a sua resolução, pois de acordo com o método de Ferrari mostrado na seção (4.1) e o método de Carlos Gustavo Tamn de Araújo Moreira mostrado na subseção (4.2.1), a resolução da equação do 4º grau, além de utilizar a noção comum de Euclides, também cai na resolução de uma equação do 3º grau, logo a relação entre as duas e o porquê de expô-la também.

Não seria necessário resoluções de exercícios e nem elucubrações com as de grau quatro, pois são muito trabalhosas, mas o simples fato de mostra-la e demonstrar o seu método de resolução já despertaria a curiosidade de alguns alunos no futuro, além de todos adquirirem a ideia de como estas são resolvidas, pois é necessário que os professores despertem curiosidades no campo das ciências, principalmente no campo da Matemática para que novos teoremas e teorias sejam criadas e desvendadas, pois afinal, não é novidade para ninguém, que os jovens possuem mais facilidade para aprender e criar.

Portanto, existe muito a se criar e a se descobrir no mundo da matemática e a curiosidade pode ser um canal para que se desperte em alguns alunos essa vontade de aprender, pesquisar e solucionar problemas ainda não resolvidos.

Para ilustrar, mostraremos um exemplo, com a solução baseada no método contemporâneo de Carlos Gustavo Tamn de Araújo Moreira, pois já vimos um exemplo com o método de Ferrari na seção (4.1).

Exemplo 35. *Seja a equação* $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$.

Façamos uma mudança de variável $x=y+t$. $\longleftrightarrow y=x-t$

$$(y+t)^4-10(y+t)^3+35(y+t)^2-50(y+t)+24=0$$

Desenvolvendo, temos:

$$y^4+(4t-10)y^3+(6t^2-30t+35)y^2+(4t^3-30t^2+70t-50)y+(t^4-10t^3+35t^2-50t+24)=0$$

Para eliminarmos o termo de grau 3, façamos $t=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$. E a equação se transforma em

$$y^4-\frac{5}{2}y^2+\frac{9}{16}=0\rightarrow y=\pm\frac{1}{2}\ ou\ y=\pm\frac{3}{4}$$

Então, $x=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}=1$, ou $x=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}=2$, ou $x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}=3$, ou $x=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}=4$.

Notemos que nesse caso, ao eliminar o termo de grau 3, a equação transformou-se em uma biquadrada, facilitando assim a sua resolução, podendo ser resolvida pela fórmula de Bhaskara. Também existem outros exemplos, já expostos neste trabalho, na qual as equações de grau quatro caem na resolução de uma equação do 3º grau.

Capítulo 6

Considerações Finais

O trabalho apresentado nos traz a história da matemática como ferramenta e fonte de consulta para o ensino das equações algébricas exemplificando uma possibilidade de estudo das equações do 1º e 2º graus através daquela história da matemática e dos exercícios problemas e também o ensino dos números complexos através da história da matemática e das equações do 3º grau.

No ensino das equações do 1º e 2º graus, ao ser mostrado como elas surgiram, para que servem, como eram resolvidas antes e como são resolvidas hoje, despertará interesse pelos alunos, pois estes entenderão e saberão o motivo pelo qual elas surgiram e após serem apresentadas através de exercícios problemas, estes entenderão o objetivo de estar aprendendo tal assunto, onde ele será útil e a importância dos matemáticos para a resolução daquelas, em especial a de Euclides.

Já no ensino dos números complexos, ao ser contada a história e ao ser mostrado através das equações do 3º grau a insuficiência dos números reais, os alunos entenderão o objetivo de se aprender os complexos, com isso o interesse deles pelo assunto aumentará, pois saberão o objetivo de se aprender tal assunto.

O conhecimento da História da Matemática nos permite compreender melhor como chegamos aos conhecimentos atuais, nos mostra o porquê de se ensinar este ou aquele capítulo. Com efeito, sem a perspectiva crítica que a história nos dá, a matemática ensinada transforma-se pouco a pouco no seu próprio objeto, e os objetos matemáticos ficam desnaturados: já não são mais do que objetos de ensino. Aprendem-se os casos notáveis para eles mesmos, a noção de distancia para ela mesma, surgindo, assim, o fenômeno da transposição didática em que o objeto de ensino é o resultado de uma descontextualização, separando-se da problemática que lhe deu origem e que faz viver a noção como saber.

Enfim, para a formação dos professores, bem como para formação dos alunos, é bom desmistificar a matemática mostrando que ela é uma obra humana, feita por homens em tempos historicamente datados, em evolução constante mesmo hoje e não, como tudo leva crer, uma obra do espírito humano numa eternidade mítica. É preciso que o interesse pela história da matemática seja mais do que uma moda, ou algo artificial, é necessário que a mesma se transforme em uma ferramenta de ensino frequentemente usada no ensino da matemática. Pois assim, conseguiremos despertar um maior interesse dos nossos alunos por essa ciência tão fundamental, cuja sua história proporciona ao estudante a noção exata dessa ciência em construção, com erros e acertos e sem verdades universais, contrariando a ideia positivista de uma ciência universal e com verdades absolutas.

Referências Bibliográficas

[1] BALESTRI, Rodrigo D. *A participação da história da matemática na formação de professores de matemática na óptica de professores/pesquisadores*. 106 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática)- Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

[2] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da Matemática*. São Paulo: Blucher, 2012.

[3] BRASIL. MEC. SEF. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (PCN)*. Brasília, 1998.

[4] BURTON, David M. *The history of mathematics: an introduction*. New York: McGraw-Hill, 2011.

[5] CARDANO, Girolamo. *Ars Magna*. translated and edited by T. Richard Witmer ; with a foreword by Oystein Ore. Cambridge, Mass. : M.I.T. Press, 1968.

[6] COMMANDINO, Frederico. *Elementos de Euclides dos seis primeiros livros, do undecimo e duodecimo*.Versão Latina. Coimbra: Imprensa da Universidade, 1855.

[7] D'AMBROSIO, Ubiratan. *História da Matemática e Educação*. Campinas: Papirus, 1996.

[8] EULER, L. *Vollständige Anleitung zur Algebra* Sututtgart: Reclam-Verlag, 1770.

[9] EULER, L. *Elements of Álgebra*.p. 282: Of a new method of resolving equations of the forth degree. New York, Springer, 1972.

[10] EVES, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*. Sunder: Series, 1953.

[11] GARBI, Gilberto G. *O Romance das equações algébricas*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

[12] LIMA, Elon L. *A Equação do Terceiro Grau*. Matemática Universitária, v. 5, p. 9-23, 1987.

[13] MOL, Rogério S. *Introdução à história da Matemática*. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

[14] MOREIRA, Carlos G. T. A. *Uma Solução das equações do 3º e 4º graus*. Matemática Universitária, v. 25, p. 23-28, 1994.

[15] NCTM. *Nacional Council of Theachers of Mathematics: Professional Standards*. Tradução: Associação de Professores de Matemática. Portugual, 1998.

[16] NOBRE, Sérgio. *Alguns "porquês"na história da matemática e suas contribuições para a Educação Matemática*. Campinas: Papirus, 1996.

[17] WOMEN IN SCIENCE. *WOMEN IN SCIENCE* Luxembrourg: Ofice for Official Publications of the European Communities, 2009.