ROGÉRIO MAURÍCIO FERNANDES PESSANHA

# TEOREMA DE TALES E SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: UMA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

Dezembro de 2017

ROGÉRIO MAURÍCIO FERNANDES PESSANHA

# TEOREMA DE TALES E SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: UMA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Geraldo de Oliveira Filho

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
Dezembro de 2017

**FICHA CATALOGRÁFICA**

Preparada pela Biblioteca do **CCT** / **UENF** **15/2018**

Pessanha, Rogério Maurício Fernandes
Teorema de Tales e semelhança de triângulos na educação de jovens e adultos : uma aprendizagem significativa / Rogério Maurício Fernandes Pessanha. – Campos dos Goytacazes, 2017.
99 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, 2017.
Orientador: Geraldo de Oliveira Filho.
Área de concentração: Matemática.
Bibliografia: f. 74-76.

1. PROPORCIONALIDADE 2. EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS 3. APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA 4. SEMELHANÇA (GEOMETRIA) I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas II. Título

CDD 510

ROGÉRIO MAURÍCIO FERNANDES PESSANHA

# TEOREMA DE TALES E SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: UMA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 04 de dezembro de 2017.

**Prof. Elba Orocia Bravo Asenjo**
D.Sc. - UENF

**Prof. Rigoberto Gregório Sanabria Castro**
D.Sc. - UENF

**Prof. Sílvia Cristina Freitas Batista**
D.Sc. - IFFluminense

**Prof. Geraldo de Oliveira Filho**
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

*Dedico este trabalho à minha família, amigos e aos meus colegas de profissão, que se empenham em proporcionar uma educação de qualidade a seus alunos.*

# Agradecimentos

Agradeço à Deus por ter me dado força e perseverança para prosseguir.

Agradeço à minha esposa Raquel, pelo apoio em todos os momentos.

Agradeço à minha família, por sempre me incentivar.

Ao meu orientador, prof. Geraldo de Oliveira Filho, pela paciência e confiança.

Aos meus colegas do PROFMAT, por todos os momentos passados juntos, tornando a caminhada mais amena, em especial à Alice e Tuane, pelo companheirismo e amizade.

Aos professores do PROFMAT/UENF, por compartilharem seu conhecimento.

Enfim, agradeço a todos que, de alguma maneira, contribuíram para a realização deste trabalho.

"Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção." (Paulo Freire)

# Resumo

O presente trabalho trata do ensino do Teorema de Tales e Semelhança de Triângulos para alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA), pautado pela teoria da Aprendizagem Significativa, elaborada pelo pesquisador norte-americano David Paul Ausubel. Em sua teoria, Ausubel defende que a aprendizagem ocorre de maneira significativa quando a nova informação ancora-se em algum conhecimento relevante, já presente na estrutura cognitiva do aluno. Assim, o objetivo principal deste trabalho é apresentar uma metodologia de ensino que favoreça o aprendizado dos temas propostos, de forma significativa, pelos alunos da EJA, cuja clientela é composta, em sua maioria, por adultos, trabalhadores, que já possuem uma vivência e saberes que devem ser considerados. Dessa forma, espera-se aumentar a motivação e interesse, diminuindo assim, a evasão escolar. Para alcançar este objetivo, esta pesquisa, aplicada em uma escola da rede estadual do município de Campos dos Goytacazes-RJ, foi dividida em três etapas: verificação dos conhecimentos prévios dos alunos acerca dos temas propostos (pré-teste), aplicação de duas sequências didáticas elaboradas segundo a teoria da Aprendizagem Significativa e, por fim, verificação da aprendizagem (pós-teste). A análise dos resultados obtidos ao final da intervenção pedagógica mostra que houve realmente um aprendizado significativo por parte dos alunos, indicando que a utilização da teoria de Ausubel na Educação de Jovens e Adultos pode ser bastante favorável ao aprendizado.



**Palavras-chaves**: Proporcionalidade, Educação de Jovens e Adultos, Aprendizagem Significativa.

# Abstract

The present work deals with the teaching of Tales Theorem and Similarity of Triangules for students of Youth and Adult Education (EJA), guided by the Theory of Meaningful Learning, elaborated by the North American researcher David Paul Ausubel. In his theory, Ausubel argues that learning occurs in a meaningful way when the new information is anchored in some relevant knowledge, already present in the student's cognitive structure. Thus, the main objective of this work is to present a teaching methodology that supports the learning of the proposed themes, meaningfully, by the students of EJA, whose clientele is composed mostly of adults, workers, that already have an experience and knowledge that must be considered. Therefore, it is expected to increase the motivation and interest, reducing then, school dropout. To achieve this objective, this reaserch, applied in a public state school of the municipality of Campos dos Goytacazes-RJ, was divided in three stages: verification of the students' previous knowledge about the proposed themes (pre-test), application of two didatic sequences elaborated according to the Theory of Meaningful Learning and, finally, verification of learning (post-test). The analysis of the results obtained at the end of the pedagogical intervention shows that there was indeed a significant learning by the students, indicating that the use of Ausubel's theory on Youth and Adult Education can be quite favorable to learning.

**Key-words**:Proportionality, Youth and Adult Education, Meaningful Learning.

# Lista de ilustrações

# Lista de tabelas

# Lista de abreviaturas e siglas

| | |
|---|---|
| EJA | Educação de Jovens e Adultos |
| NEJA | Nova Educação de Jovens e Adultos |
| LDB | Lei de Diretrizes e Bases da Educação |
| PNE | Plano Nacional de Educação |
| INEP | Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas |
| SEA | Serviço de Educação de Adultos |
| ONU | Organização das Nações Unidas |
| UNESCO | United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization |
| CNER | Campanha Nacional de Educação Rural |
| CNEA | Campanha de Erradicação do Analfabetismo |
| CNBB | Conferência Nacional dos Bispos do Brasil |
| UNE | União Nacional dos Estudantes |
| MOBRAL | Movimento Brasileiro de Alfabetização |
| PAS | Programa Alfabetização Solidária |
| IBGE | Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística |
| PBA | Programa Brasil Alfabetizado |
| SEEDUC | Secretaria de Estado de Educação |
| CNE | Conselho Nacional de Educação |
| CEB | Câmara de Educação Básica |
| MEC | Ministério da Educação e Cultura |
| AA | Ângulo-Ângulo |

| | |
|---|---|
| LAL | Lado-Ângulo-Lado |
| LLL | Lado-Lado-Lado |

# Lista de símbolos

| | |
|---|---|
| $\equiv$ | Congruente |
| $\Delta$ | Triângulo |
| $\sim$ | Semelhante |
| $=$ | Igual |
| $\rightarrow$ | Implicação |
| $//$ | Paralelismo |
| $\%$ | Porcentagem |

# Sumário

# Introdução

A educação tem papel fundamental na formação das pessoas. Ela propicia ao cidadão oportunidades de alcançar níveis cada vez mais elevados dentro da sociedade, cada vez mais competitiva e segregadora. A matemática, como parte integrante da base de formação educacional, figura como uma área de grande relevância nesse processo formador de cidadãos, estando presente em praticamente todas as áreas e atividades do cotidiano das pessoas. Ela favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e ajuda a estruturar o pensamento.

> Em seu papel formativo, a matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e cientifica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais.(BRASIL, 2002, p.40)

Dessa maneira, cabe ao professor buscar formas de fazer com que a matemática seja ofertada aos alunos, de maneira a cumprir com as suas finalidades e funções.

Com esse intuito, várias metodologias, ferramentas e abordagens pedagógicas vêm sendo utilizadas. Algumas mais eficazes, outras menos, mas sempre visando um aprendizado de qualidade. Nesse sentido, vários aspectos devem ser levados em consideração, e um deles, refere-se às características da clientela que se está trabalhando.

A Educação de Jovens e Adultos (EJA) é uma modalidade de ensino destinada a jovens e adultos que não deram continuidade em seus estudos ou não tiveram acesso aos ensinos Fundamental e Médio na idade apropriada. Assim, sua clientela é formada, em sua maioria, por pessoas que já têm uma vivência maior, que já estão inseridas no mercado de trabalho (seja ele formal ou informal) e que muitas vezes não apresentam uma perspectiva de crescimento e desenvolvimento profissional e social, levando a uma baixa auto-estima. Para esses alunos, a escola deve ser um espaço de transformação social e de construção de conhecimentos. Assim, é importante que seja valorizada a bagagem cultural de cada um, suas experiências de vida e seu cotidiano pois, em sala de aula, é clara a preocupação do aluno em saber se o que está aprendendo será útil em seu dia a dia.

A maneira como o professor deve atuar na Educação de Jovens e Adultos, devido às suas especificidades deve ser diferente em relação ao Ensino Regular. Além da idade cronológica, os alunos da EJA, de maneira geral, têm interesses, motivações e vivências diferenciadas, que devem ser considerados no processo educacional. Porém, grande parte dos professores que atuam na EJA não estão preparados para esse "agir"diferente. Na maioria das vezes reproduzem, por ser mais fácil, as ações e métodos adotados no Ensino Regular, de maneira inadequada. De acordo com Matos (2009, p.02) :

> Diante desse universo educacional tão diversificado e heterogêneo, é comum muitos professores, por estarem inseridos nesse cotidiano escolar, retratarem uma realidade de insegurança, medo, angústia e sentirem-se incapazes de dar conta de um processo ensino/aprendizagem de qualidade, transformador, pois como profissionais foram preparados para trabalhar com a homogeneidade, com uma escola única e igual para todos, com os mesmos currículos, métodos, normas e provas.
>
> Sendo assim, a EJA deve contemplar ações pedagógicas que venham dar subsídios teóricos/práticos aos professores, buscando atender a essa clientela com características distintas e que merecem respeito nas suas diversidades sócio-histórico-culturais.

Há oito anos trabalhando com turmas da Educação de Jovens e Adultos em uma escola da rede Estadual, é notório o fato de que a forma de atuação nessa modalidade de ensino deve ser diferente das turmas regulares. Além disso, quando o conhecimento prévio do aluno é valorizado e são utilizados exemplos a partir de seu cotidiano e vivência, o conteúdo é assimilado e compreendido com uma facilidade bem maior do que quando utilizadas situações fora de suas realidades e saberes.

Dessa maneira, este trabalho tem como objetivo principal propor a utilização de uma metodologia de ensino para alunos do Ensino Médio da Educação de Jovens e Adultos, sobre os temas Teorema de Tales e Semelhança de Triângulos, pautada na teoria da Aprendizagem Significativa, proposta pelo pesquisador norte-americano David Paul Ausubel (1918/2008). A teoria de Ausubel defende que "a aprendizagem ocorre quando uma nova informação ancora-se em conceitos já presentes nas experiências de aprendizados anteriores e, por isso, o fator mais importante que influencia na aprendizagem consiste no que o aluno já sabe"(PAULA; BIDA, 2015, p.04).

Pretende-se ainda que, ao final da aplicação das sequências didáticas, os alunos sejam capazes de:

• identificar segmentos proporcionais em um feixe de retas paralelas cortadas por uma transversal;

• utilizar o Teorema de Tales na resolução de problemas, contextualizados ou não;

• identificar triângulos semelhantes;

• calcular a razão de semelhança entre triângulos, através das medidas dos lados, das alturas e dos perímetros;

• resolver problemas, contextualizados ou não, envolvendo semelhança de triângulos.

A escolha dos temas deve-se ao fato desses assuntos estarem presentes em diversas situações do dia-a-dia e serem bastante utilizados na resolução de problemas práticos envolvendo retas paralelas, proporcionalidade e segmentos proporcionais. Assim, considerando o perfil do aluno da EJA, torna-se necessário criar uma metodologia de ensino que oportunize o aprendizado de forma clara e significativa.

O trabalho está estruturado em quatro capítulos:

O capitulo 1 apresenta o referencial teórico, abordando a Educação de Jovens e Adultos (EJA), a Teoria da Aprendizagem Significativa, além de apresentar os principais conceitos do Teorema de Tales e da Semelhança de Triângulos.

O capitulo 2 trata dos aspectos metodológicos: o tipo, o campo, os sujeitos e as etapas da pesquisa.

O capitulo 3 apresenta o desenvolvimento da pesquisa: a aplicação, análise e resultados do pré-teste, a intervenção pedagógica realizada e os resultados da aplicação do pós-teste.

O capítulo 4 apresenta as considerações finais acerca do trabalho e avalia os resultados obtidos.

# Capítulo 1

# REFERENCIAL TEÓRICO

## 1.1 A EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

### 1.1.1 Aspectos Gerais

A Educação de Jovens e Adultos é parte integrante da Lei Federal número 9.394 de 20 de dezembro de 1996 (LDB 9394/96), que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Dessa forma, é considerada uma modalidade da educação básica, contemplando os níveis do ensino fundamental, para os maiores de quinze anos, e do ensino médio, para os maiores de dezoito anos, sendo "destinada àqueles que não tiveram acesso ou continuidade de estudos no ensino fundamental e médio na idade própria"(BRASIL, 2017, p.30)

De maneira geral, a clientela dessa modalidade de ensino apresenta perfil semelhante: são pessoas de baixa renda, inseridas muito cedo no mercado de trabalho, sem perspectivas de crescimento profissional, com baixa auto-estima, além de adolescentes oriundos de um processo educacional deficitário, muitas vezes trabalhando de forma informal, e idosos com breve passagem pela escola.

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (BRASIL, 2017, p.30-31), é dever do Poder Público proporcionar a essas pessoas o retorno aos bancos escolares:

> §1º Os sistemas de ensino assegurarão gratuitamente aos jovens e aos adultos, que não puderam efetuar os estudos na idade regular, oportunidades educacionais apropriadas, consideradas as características do alunado, seus interesses, condições de vida e de trabalho, mediante cursos e exames.
>
> §2º O Poder Público viabilizará e estimulará o acesso e a permanência do trabalhador na escola, mediante ações integradas e complementares entre si.

A necessidade cada vez maior de adolescentes buscarem atividades que lhes garantam renda, sobretudo para ajudar no sustento de sua família, fez com que essa modalidade de ensino deixasse de ter como clientela principal, adultos que não frequentaram os bancos escolares na idade apropriada. Segundo Pierro, Joia e Ribeiro (2001, p.64) :

> A entrada precoce dos adolescentes das camadas mais pobres no mercado de trabalho formal ou informal provocou a sua transferência para os programas de educação originalmente destinados à população adulta. Levantamentos realizados em vários estados comprovam essa tendência.

Assim, a entrada precoce no mercado de trabalho, aliada às exigências de qualificação e conhecimento cada vez maiores pelos empregadores, são os principais motivos que têm levado a um aumento crescente da procura pelos cursos na modalidade Educação de Jovens e Adultos. Além desses fatores, outras motivações levam os jovens e adultos de volta aos bancos escolares, como por exemplo, a realização pessoal e a sensação de capacidade e dignidade, que eleva a autoestima. A educação escolar, independente de sua aplicabilidade, potencializa a participação do indivíduo na sociedade. Podemos citar ainda, como uma parcela considerável desse público inserido na EJA, idosos também em busca do resgate da autoestima e convívio social. É comum encontrarmos histórias que comprovem esses fatos. De uma maneira geral, o aluno da EJA vive uma situação de exclusão social, que limita seu acesso a bens culturais e materiais, oferecidos pela sociedade. Assim, com a volta aos bancos escolares, ele busca uma forma de reverter esse processo.

Porém, até esta modalidade de ensino ser regulamentada e assegurada a todos os cidadãos que não concluíram seus estudos na idade apropriada, um longo caminho se percorreu, como poderemos ver a seguir.

### 1.1.2 Breve histórico da EJA no Brasil

Pode-se dizer que as primeiras ações voltadas para a Educação de Jovens e Adultos no Brasil remontam o período colonial, em 1549. Nessa época, os jesuítas acreditavam não ser possível a conversão dos índios sem que eles soubessem ler e escrever. Assim, a importância da alfabetização (catequização) na vida dos adultos já era percebida, tanto para servir à igreja como também ao trabalho (SILVA; MOURA, 2013).

No século XVIII, com a expulsão dos jesuítas, o ensino até então estabelecido ficou desorganizado. Até a época do Império, praticamente nada foi feito nesse sentido. A Constituição Imperial de 1824, reservava a todos os cidadão a gratuidade da instrução primária. No entanto, o cumprimento dessa lei não ocorreu de fato. Segundo Strelhow (2010, p.51), "havia uma grande discussão em todo o Império de como inserir as chamadas camadas inferiores (homens e mulheres pobres livres, negros e negras escravos, livres e libertos) nos processos de formação formais".

Assim, apenas às pessoas livres, oriundas da elite, que poderiam ocupar funções na burocracia imperial, era dada a titularidade de cidadania. Novas escolas noturnas começaram a surgir, então, com o intuito de absorver esses alunos. Era um ensino de baixa qualidade e curta duração.

A partir do Ato Adicional de 1834, a instrução primária e secundária de todas as pessoas passou a ser responsabilidade das províncias, sendo designada especialmente para jovens e adultos. Essas ações de escolarização eram revestidas de um sentimento de caridade e benevolência, não sendo vistas como um direito (STRELHOW, 2010).

Com o início da República, a nova constituição excluía cada vez mais as pessoas analfabetas. O direito ao voto, por exemplo, que antes era condicionado à uma determinada renda, agora também dependia da alfabetização.

Com a chegada do século XX, iniciou-se uma grande mobilização social com o intuito de acabar com o analfabetismo, considerado, então, como um dos responsáveis pela situação de subdesenvolvimento do país, sendo criada, em 1915, a Liga Brasileira contra o Analfabetismo (STRELHOW, 2010).

Na década de 30, surgem algumas iniciativas, com o único interesse de alfabetizar as camadas baixas para atender o processo de industrialização. O ensino era oferecido de forma gratuita, estimulado pelo Governo Federal, o qual projetava diretrizes educacionais para todo o país:

> Desde a Revolução de 1930, as mudanças políticas e econômicas permitiram o início da consolidação de um sistema público de educação elementar no país. A Constituição de 1934 estabeleceu a criação de um Plano Nacional de Educação (PNE), que indicava pela primeira vez a EJA como dever do Estado, incluindo em suas normas, a oferta do ensino primário integral, gratuito e de frequência obrigatória extensiva para adultos. (SILVA; MOURA, 2013)

Para Pierro, Joia e Ribeiro (2001, p.59), "a educação de adultos se constitui como tema de política educacional sobretudo a partir dos anos 40”. Durante essa década, várias iniciativas políticas e pedagógicas contribuíram para que a educação de adultos passasse a ser tratada como uma questão nacional. Entre essas iniciativas, temos a criação e regulamentação do Fundo Nacional do Ensino Primário (1942), com o objetivo de realizar programas que incluíssem o ensino supletivo para adultos e adolescentes, a criação do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas (INEP), o lançamento da Campanha Nacional de Educação de Adultos (1947), entre outras. Em 1946, surge a Lei Orgânica do Ensino Primário que previa o ensino supletivo. No ano seguinte, foi lançado um programa de abrangência nacional, com o intuito de atender, especificamente, às pessoas adultas, sendo criado então o Serviço de Educação de Adultos (SEA). Esse movimento durou até o fim da década de 50, sendo denominado de Primeira Campanha Nacional de Educação de Adultos.

Um dos motivos para a criação dessa campanha foi a forte pressão internacional para a erradicação do analfabetismo nas chamadas "nações atrasadas", com o surgimento da ONU (Organização das Nações Unidas) e da UNESCO (Órgão das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura), após o fim da segunda guerra mundial (STRELHOW, 2010).

Visando atender a população que vivia na zona rural, foi criada em 1952 a Campanha Nacional de Educação Rural (CNER).

Na década de 50, com o intuito de avaliar o trabalho até então realizado e discutir soluções para questões como qualidade do professor e adequação do material didático utilizado, foi realizado o Segundo Congresso Nacional de Educação de Jovens e Adultos. Nesse congresso, começam a tornar-se notórias as ideias de Paulo Freire. Freire defendia que o desenvolvimento educativo deveria estar relacionado com as necessidades especiais das pessoas educadas.

Como resposta às críticas do congresso, foi criada a Campanha de Erradicação do Analfabetismo (CNEA), em 1958, com a finalidade de se criar projetos voltados para a realidade de cada município.

No fim da década de 50 e início da década de 60, surgiram vários movimentos sociais voltados para a educação de adultos, como o "Movimento de Educação Base"(CNBB), os Centros Populares de Cultura (UNE), entre outros, que procuravam valorizar o saber e a cultura popular. O analfabetismo, através da influência das ideias de Paulo Freire, passava a ser visto como consequência de uma sociedade injusta e não igualitária e não mais como a causa da situação de pobreza (STRELHOW, 2010).

Conforme cita Strelhow (2010), com o Golpe Militar de 1964, os programas voltados para uma transformação social foram interrompidos e a educação passou a ser tratada como um modo de homogeneização e controle das pessoas. Foi criado então, em 1967, pelo governo militar, o Movimento Brasileiro de Alfabetização (MOBRAL), com a finalidade de alfabetizar funcionalmente e promover uma educação continuada. Esse programa, no entanto, restringiu-se à apenas proporcionar ao indivíduo a capacidade de ler e escrever, sem se preocupar com a compreensão contextualizada. Os alfabetizadores eram escolhidos e contratados sem muita exigência de pré-requisitos, transparecendo a ideia de que, para se alfabetizar uma pessoa adulta é preciso apenas ser alfabetizado, não sendo necessário compreender-se o método pedagógico. O MOBRAL foi extinto em 1985, com a chegada da Nova República.

Com a Nova República, os direitos dos cidadãos que não foram escolarizados na idade apropriada, ficam assegurados legalmente pela primeira vez, como destaca Oliveira (2007, p.03-04):

> A Constituição Federal de 1988 é a primeira a explicitar os direitos dos que não se escolarizaram na idade ideal. O inciso I do artigo 208 indica que o Ensino Fundamental passa a ser obrigatório e gratuito, "assegurada, inclusive, sua oferta gratuita para todos os que a ele não tiveram acesso na idade própria". Em seu artigo 214, a Carta Magna indica também a que legislação "estabelecerá o Plano Nacional de Educação, de duração plurianual, visando à articulação e ao desenvolvimento do ensino em seus diversos níveis e à integração das ações do poder público que conduzam à • I – erradicação do analfabetismo, • II – universalização do atendimento escola.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) nº 9394/96, de 20 de dezembro de 1996, reforça o previsto na Constituição Federal de 1988, garantindo igualdade de acesso, permanência na escola, ensino de qualidade, além da valorização da experiência do educando fora da escola (BRASIL, 2017).

Com a extinção do MOBRAL, outros programas de alfabetização surgiram, como a Fundação Educar, extinta em 1990, com o Governo Collor. Inicia-se um período de ausência do governo federal nos projetos de erradicação do analfabetismo, passando, então, os municípios a assumir essa questão (STRELHOW, 2010). Em 1997, o Governo Federal cria o Programa Alfabetização Solidária (PAS), desenvolvido com o intuito de alfabetizar jovens e adultos nas cidades com maior índice de analfabetismo, de acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

Em 2003, o governo federal lançou o Programa Brasil Alfabetizado (PBA), com a chancela da UNESCO. Voltado para a alfabetização de jovens com idade acima de 15 anos, adultos e idosos, o PBA continua em vigor.

Atualmente, no Estado do Rio de Janeiro, novas iniciativas voltadas para a educação de adolescentes e adultos que não completaram seus estudos na idade apropriada têm surgido, como o programa Nova Educação de Jovens e Adultos (Nova EJA) e o Programa Autonomia.

A Nova Educação de Jovens e Adultos, implantada em 2013 em parceria com a Fundação CECIERJ - Centro de Ciências e Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro, e direcionada ao Ensino Médio, é ofertada a estudantes com idade a partir de 18 anos. É composta por quatro módulos, semestrais, sendo dois módulos com disciplinas com ênfase nas áreas de Humanas e dois com ênfase nas disciplinas de Ciências da Natureza, além das disciplinas de Matemática e Língua Portuguesa, presentes em todos os módulos(RIO DE JANEIRO, 2013).

O Programa Autonomia, lançado em 2009 em parceria com a Fundação Roberto Marinho, é voltado tanto para o Ensino Fundamental, contemplando estudantes com idade entre 13 e 17 anos, como para o Ensino Médio, para estudantes com idade entre 17 e 20 anos. São utilizados materiais didáticos que permitem ao aluno construir o conhecimento de maneira gradativa. Tem um professor apenas, para trabalhar todas as disciplinas, agindo como mediador no processo de ensino-aprendizagem.

### 1.1.3 As funções da EJA

Dentre as principais funções da Educação de Jovens e Adultos, pode-se destacar:

1 - Função Reparadora

No ano de 1996, de acordo com dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), 14,7 % da população com idade igual ou superior a quinze anos era analfabeta (BRASIL, 2000). Assim, segundo o Parecer CNE/CEB 11/2000, "a Educação de Jovens e Adultos (EJA) representa uma dívida social não reparada para com os que não tiveram acesso a e nem domínio da escrita e leitura como bens sociais, na escola ou fora dela, e tenham sido a força de trabalho empregada na constituição de riquezas e na elevação de obras públicas. Ser privado deste acesso é, de fato, a perda de um instrumento imprescindível para uma presença significativa na convivência social contemporânea"(BRASIL, 2000, p.05).

Desta forma, a função reparadora da EJA representa não só a restauração de um direito negado: o direito a uma escola de qualidade, "mas também o reconhecimento daquela igualdade ontológica de todo e qualquer ser humano"(BRASIL, 2000, p.07) .

Porém, não podemos confundir restauração com suprimento. Assim, é indispensável um modelo educacional que contemple as necessidades de aprendizagem específicas de alunos jovens e adultos.

2 - Função Equalizadora

Refere-se à igualdade de oportunidades, que torne possível oferecer aos indivíduos novas inserções nos campos profissional e social. Assim, a EJA se apresenta como uma possibilidade de acesso ao desenvolvimento para todas as pessoas, de todas as idades, possibilitando que jovens e adultos atualizem seus conhecimentos, troquem experiências e conheçam novas formas de trabalho e cultura (BRASIL, 2000).

3 - Função Qualificadora

Refere-se a função de propiciar a todos a atualização de conhecimentos de forma permanente, sendo este o verdadeiro sentido da EJA. Baseia-se no caráter incompleto do ser humano, cujo potencial de desenvolvimento e adequação pode ser atualizado no ambiente escolar ou não escolar (BRASIL, 2000).

Muitos jovens, inseridos ou não no mercado de trabalho, formal ou informal, podem encontrar na EJA, seja nas funções de reparação e de equalização, seja na função qualificadora, um ambiente propício a uma melhor capacitação e desenvolvimento, tanto no aspecto pessoal, como no aspecto profissional.

### 1.1.4 O papel da Matemática na Educação de Jovens e Adultos

Na EJA, a matemática deve desempenhar os papeis formativo (voltado ao desenvolvimento intelectual para a estruturação do pensamento) e funcional (voltado à aplicação dos conhecimentos na vida prática e em diversas áreas do conhecimento) (BRASIL, 2002) . Assim, um currículo de matemática para a EJA deve ser pensado de maneira a fazer com que o aluno tenha condições de transformar seu ambiente, possibilitando uma maior participação no âmbito profissional, social, político e cultural.

Através do estudo e compreensão da Matemática, o indivíduo assume uma postura mais crítica e questionadora. Passa a pensar e entender o mundo e os acontecimentos de maneira mais clara. Auxilia a compreensão de dados estatísticos e a tomada de decisões diante de questões sociais e políticas que dependem da interpretação de índices divulgados em meios de comunicação, pois é composta por um conjunto de conceitos e procedimentos que englobam métodos de investigação e raciocínio, formas de representação e comunicação. Dessa maneira, a compreensão e o saber matemático tornam-se cada vez mais necessários.

## 1.2 A TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

### 1.2.1 Conceito

A Aprendizagem Significativa é uma teoria desenvolvida pelo psiquiatra norte-americano David Paul Ausubel (1918 - 2008), que dedicou vinte e cinco anos à psicologia educacional. Segundo Ausubel, quanto mais sabemos, mais aprendemos, ou seja, a aprendizagem ocorre quando uma nova informação relaciona-se com algum conhecimento relevante já presente na estrutura cognitiva do indivíduo. Entende-se por estrutura cognitiva, segundo Moreira e Masini (1982, p.03) :

> Cognição é o processo através do qual o mundo de significados tem origem. À medida que o ser se situa no mundo, estabelece relações de significação, isto é, atribui significados à realidade em que se encontra. Esses significados não são entidades estáticas, mas pontos de partida para a atribuição de outros significados. Tem origem, então, a estrutura cognitiva (os primeiros significados), constituindo-se nos "pontos básicos de ancoragem"dos quais derivam outros significados.

Assim, estrutura cognitiva é uma estrutura hierárquica de conceitos abstraídos da experiência do indivíduo. O conhecimento, relevante à nova aprendizagem, pode ser um conceito, um símbolo significativo, uma proposição, uma imagem, entre outros, chamado por Ausubel de subsunçor ou ideia-âncora. Segundo Moreira (2010, p.02):

> Em termos simples, subsunçor é o nome que se dá a um conhecimento específico, existente na estrutura de conhecimentos do indivíduo, que permite dar significado a um novo conhecimento que lhe é apresentado ou por ele descoberto. Tanto por recepção como por descobrimento, a atribuição de significados a novos conhecimentos depende da existência de conhecimentos prévios especificamente relevantes e da interação com eles.

Por exemplo, para aprender significativamente o conteúdo "perímetro de polígonos", seria importante para o aprendiz já ter em sua estrutura cognitiva os conceitos de polígono, medida e unidades de medida.

Assim, a aprendizagem significativa difere das demais teorias de aprendizagem pois o conteúdo pode (e deve) ser relacionado com o conhecimento prévio do aluno, devendo este adotar uma postura favorável para tal, dotando de significado próprio os conteúdos assimilados. De acordo com Moreira (2006, p.38), "a aprendizagem significativa é o processo por meio do qual novas informações adquirem significado por interação (não associação) com aspectos relevantes preexistentes na estrutura cognitiva".

Quando sua teoria foi apresentada, em 1963, predominavam as ideias comportamentalistas, ou seja, acreditava-se que o meio exercia influência sobre o sujeito. Assim, não considerava-se o que o estudante sabia: o aprendizado estava condicionado à transmissão do conhecimento por alguém. Só se aprenderia o que fosse transmitido pelo professor. As ideias de Ausubel quanto ao processo de ensino e aprendizagem vão de encontro às ideias comportamentalistas. Segundo sua teoria, "aprender significativamente é ampliar e reconfigurar ideias já existentes na estrutura mental e com isso ser capaz de relacionar e acessar novos conteúdos"(FERNANDES, 2011, p.02).

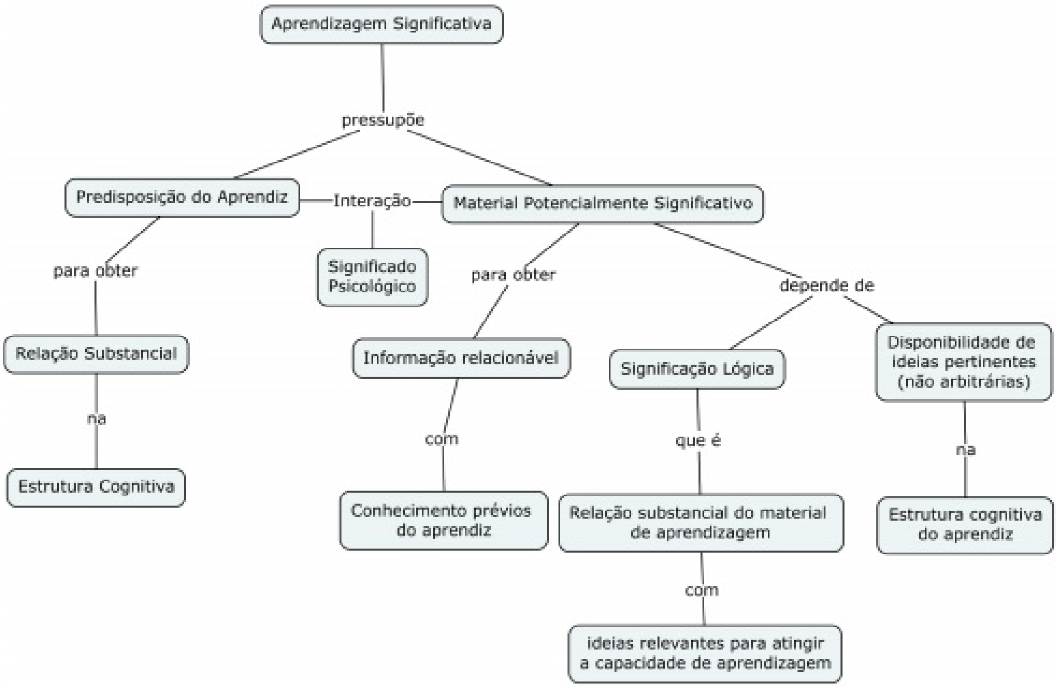
Para que a aprendizagem significativa ocorra, são necessárias, basicamente, duas condições: o material da aprendizagem deve ser potencialmente significativo e o aprendiz deve apresentar uma predisposição para aprender.

A primeira condição refere-se ao fato de que o material de aprendizagem (livros, vídeos, aplicativos, aulas) tenha significado lógico, ou seja, possa ser relacionado de maneira não literal a uma estrutura cognitiva apropriada e relevante. A segunda condição implica no fato de o aprendiz ter que manifestar uma disposição para estabelecer essa relação entre os novos conceitos, potencialmente significativos, e os conceitos (subsunçores) relevantes existentes em sua estrutura cognitiva. Segundo Silva (2017, p.10):

> Em outras palavras, o aprendiz deve apresentar uma motivação voluntária e consciente para aprender, ou seja, ele deve se predispor a relacionar (diferenciando e integrando) os novos conhecimentos à estrutura cognitiva prévia, modificando-a, enriquecendo-a, elaborando-a e criando novos significados a esse novo material cognitivo. Esta predisposição não se trata exatamente de motivação, ou de gostar da matéria.

Na Figura 1 temos um diagrama representativo das condições necessárias à ocorrência da Aprendizagem Significativa.

Figura 1 – Condições para ocorrência da Aprendizagem Significativa




Fonte: (SILVA, 2017, p.10)

Quando se relaciona uma nova informação a um subsunçor que o aluno já possui, essa nova informação começa a ter significado para ele, um significado próprio, do aluno. A informação a ser aprendida é apenas potencialmente significativa. Há uma mudança tanto na nova informação como no subsunçor com o qual esta se relaciona. O resultado dessa interação é a assimilação de significados. Assim, tem de ocorrer o processo de assimilação significativa e, este só ocorre, quando o aluno dispõe do subsunçor específico para relacionar-se com essa nova informação. Assim, um determinado material pode ser potencialmente significativo para um aluno (que possui os subsunçores apropriados para a nova informação) e não ser para outro ( que não possui os subsunçores apropriados).

### 1.2.2 Aprendizagem Significativa e Aprendizagem Mecânica

Como visto anteriormente, a aprendizagem significativa ocorre quando o novo conhecimento é relacionado a um conhecimento já existente na estrutura cognitiva do aluno. Quando isto não acontece, na maioria dos casos ocorre a chamada aprendizagem mecânica. Este tipo de aprendizagem ocorre quando é introduzido um conhecimento novo de forma arbitrária: o aluno necessita aprender, sem entender do que se trata ou o significado. Ele aprende exatamente como lhe foi transmitido, sem margem para uma interpretação própria. O conteúdo é armazenado de maneira isolada, existindo grande possibilidade de esquecê-lo em seguida, ou seja, o aluno apenas memoriza, mas não aprende realmente. Isto acontece pois não há um conhecimento prévio relacionado ao novo conhecimento a ser aprendido.

Segundo Valadares (2011, p.37) :

> A antítese da aprendizagem significativa é a aprendizagem mecânica, literal, ou memorística em que a nova informação que se apresenta ao aluno não interage com qualquer subsunçor adequado previamente existente na estrutura cognitiva, ou porque este não existe mesmo, ou porque o aluno não quis desenvolver o esforço de confrontar a nova informação com o subsunçor, analisar diferenças e semelhanças, estabelecer as pontes entre ambos, no fundo desencadear o processo de assimilação com significado.

O conhecimento adquirido de forma mecânica fica distribuído na estrutura cognitiva do aprendiz de maneira arbitrária, sem relacionar-se a subsunçores específicos.

O aprendizado quando feito de forma significativa, favorece a compreensão de novos conteúdos, bem como as habilidades do indivíduo frente à situações e problemas contextualizados, ao contrário do processo mecânico de aprendizagem. De acordo com Lemos (2011, p.28):

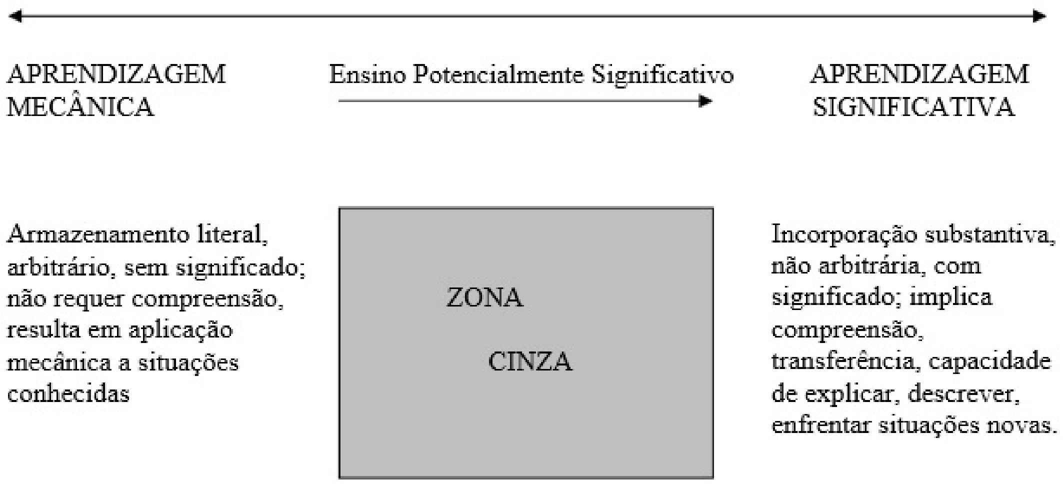
> O conhecimento, quando produto de aprendizagem mecânica, por ter restrita a sua capacidade de utilização em novas situações, não garante autonomia intelectual para a ação do indivíduo. A aprendizagem significativa, ao contrário, favorece a construção de respostas para problemas nunca vivenciados e leva tanto à capacitação humana quanto ao compromisso e à responsabilidade.

Deve-se ressaltar que quando um conteúdo é aprendido de maneira significativa, não quer dizer que o aprendiz nunca o esquecerá. Porém, se tal fato ocorrer, o conteúdo esquecido poderá ser reaprendido de maneira relativamente fácil e rápida, ao contrário da aprendizagem mecânica. Neste caso, não tem sentido falar em reaprendizagem.

Porém, não podemos simplesmente dividir o processo de aprendizagem em aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica. Segundo Moreira (2010), aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica não constituem uma dicotomia: estão ao longo de um mesmo contínuo, existindo uma "zona cinza", intermediária entre elas.

Na prática, grande parte da aprendizagem ocorre na "zona cinza"desse contínuo. A transposição dessa zona intermediária pode ser facilitada por um ensino potencialmente significativo, como mostra a Figura 2.

Figura 2 – Zona intermediária entre a Aprendizagem Mecânica e Significativa




Fonte: (MOREIRA, 2010, p.12)

Deve-se ressaltar que a passagem da aprendizagem mecânica para a aprendizagem significativa não é um processo que ocorre naturalmente: depende da existência de subsunçores adequados, da predisposição do aluno para aprender, da utilização de materiais potencialmente significativos e da atuação do professor no sentido de exercer a função de mediador. Assim, uma aprendizagem inicialmente mecânica poderá, ou não, ao final do processo, tornar-se significativa. De acordo com Braathen (2012, p.65), "a posição de um dado conhecimento no intervalo mecânico-significativo depende das habilidades, competências e especialização individuais em uma determinada área de conhecimento".

O conhecimento aprendido de forma mecânica pode ir, pouco a pouco, se relacionando com novas ideias e se reorganizando na estrutura cognitiva do aluno. Essa interação dinâmica do conhecimento a ser aprendido com subsunçores adequados é que caracteriza a não dicotomia entre a aprendizagem mecânica e a significativa.

### 1.2.3 A origem dos subsunçores

Quando se decide pelo aprendizado de um determinado conteúdo de maneira significativa, deve ser considerada, inicialmente, a existência de subsunçores que possibilitem a ocorrência desse tipo de aprendizagem. Porém, quando o conteúdo a ser aprendido situa-se em uma área de conhecimento completamente nova para o aprendiz, pode ocorrer a inexistência de subsunçores em sua estrutura cognitiva, passíveis de relação com o assunto a ser estudado. Nestes casos, recorre-se à aprendizagem mecânica, inicialmente. Assim, a aprendizagem mecânica torna-se necessária até que alguns elementos de conhecimento, relevantes à assimilação de novas informações na mesma área, passem a existir na estrutura cognitiva e possam servir de subsunçores para novas informações, mesmo que pouco elaborados.

A partir deste momento, a aprendizagem poderá ocorrer de forma significativa, fazendo com que os subsunçores iniciais fiquem, pouco a pouco, mais elaborados, sendo capazes, cada vez mais, de ancorar novas informações. A esse respeito Soares (2009, p.54) cita:

> Por exemplo, ao se apresentar ao aluno o conceito de área, ele só terá sentido, à medida que ele for relacionado com alguma idéia relevante, que esteja clara e organizada na sua estrutura cognitiva. Caso contrário, a princípio será armazenado de forma mecânica. O conhecimento anterior sobre medidas de comprimento, unidades de medida de comprimento, entre outros, facilitarão a construção do conceito de "área", uma vez que podem funcionar como ancoradouros para o novo conceito.

Com o objetivo de facilitar a aprendizagem significativa, Ausubel recomenda o uso dos chamados organizadores prévios, que são "materiais introdutórios apresentados antes do próprio material a ser aprendido"(MOREIRA; MASINI, 1982, p.11) . São conteúdos com um grau de generalidade maior que o conteúdo a ser aprendido, que fazem uma relação entre ideias já existentes na estrutura cognitiva e ideias existentes na tarefa de aprendizagem em questão. Sua principal função é fazer uma relação entre o que o aprendiz já sabe e o que ele deve saber, com o intuito de fazer com que o aprendizado seja significativo.

De acordo com Ausubel, Novak e Hanesian (1980 apud SOARES, 2009, p.54-55), a aprendizagem significativa apresenta quatro vantagens relevantes sobre a aprendizagem mecânica:

1. Os conhecimentos adquiridos significativamente ficam retidos por um período maior de tempo;

2. As informações assimiladas resultam num aumento da diferenciação das idéias que serviram de "âncoras", aumentando, assim, a capacidade de uma maior facilitação da subseqüente aprendizagem de materiais relacionados;

3. As informações que não são recordadas (são esquecidas) após ter ocorrido a assimilação ainda deixam um efeito residual no conceito assimilado e, na verdade em todo o quadro de conceitos relacionados;

4. As informações apreendidas significativamente podem ser aplicadas em enorme variedade de novos problemas e contextos.

### 1.2.4 Os Mapas Conceituais

Mapas conceituais são diagramas representativos de conceitos e relações entre esses conceitos, elaborados a partir, normalmente, de caixas de texto interligadas por linhas e setas. Segundo Moreira (2012), trata-se de uma técnica desenvolvida na década de setenta por Joseph Novak na Universidade de Cornell, nos Estados Unidos, com o intuito de favorecer a aprendizagem significativa, considerando-se que a teoria de Ausubel baseia-se na interação entre o novo conhecimento e o conhecimento já existente na estrutura cognitiva dos aprendiz. De acordo com Tavares (2010, p.09), "os mapas conceituais foram propostos inicialmente por Novak como uma maneira de organizar hierarquicamente os conceitos e proposições que representassem a estrutura cognitiva de estudantes". Dessa maneira, conceitos mais gerais e inclusivos devem estar no topo do mapa. À medida que os conceitos vão se tornando menos gerais e mais específicos, o mapa vai se formando, até chegar aos exemplos, que irão compor a base do mapa.

### 1.2.5 Aprendizagem Significativa e a EJA

Não se pode negar que a clientela da Educação de Jovens e Adultos é diferenciada. Como já dito anteriormente, são pessoas que há muito deixaram os bancos escolares e/ou apresentam, em sua maioria, grande defasagem quanto aos requisitos básicos para a aprendizagem. Assim, a forma de agir com esses alunos também precisa ser diferenciada.

Grande parte desses alunos já tem uma vivência, tanto social como profissional, que precisa ser levada em consideração no processo de aprendizagem. Na prática, o que prevalece, de maneira geral, é a aprendizagem mecânica: o aluno, que já apresenta uma carência de pré requisitos, é levado a decorar fórmulas e teoremas de maneira isolada. Isso leva, cada vez mais, à falta de interesse, diminuição da auto-estima e evasão.

Dessa maneira, como mudar esse panorama? Segundo Pinto (1993, p.42), "a educação não deve se reduzir à transmissão escolar dos conhecimentos". O papel do aluno não deve ser o de mero receptor do que é ensinado pelo professor. Torna-se necessário, portanto, considerar os saberes do aluno, sua vivência, seu cotidiano. Segundo Anjos e Silveira (2013, p.03):

> Associada às questões de conteúdo e método, cabe considerar o respeito que nós educadores devemos ter para com os saberes de nosso educando. Especialmente o educando de EJA – mesmo adolescente – que já traz uma bagagem de saberes construídos no cotidiano de suas vivências.

Assim, uma metodologia de ensino para a Educação de Jovens e Adultos pautada na teoria da Aprendizagem Significativa, favorece a utilização de conhecimentos e saberes que o aluno já possui. Torna-se necessário, portanto, despertar esses conhecimentos prévios (subsunçores), presentes em sua estrutura cognitiva.

Ao valorizar o que o aluno já sabe e compreende, o aluno passa a sentir-se como parte integrante do processo de aprendizagem, aumentando sua motivação, auto-estima e, principalmente, oportunizando ao aluno a construção e aquisição do conhecimento de maneira eficaz, significativa.

## 1.3 TEOREMA DE TALES

O Teorema de Tales é um dos principais teoremas no estudo da geometria plana. Tem sua origem na resolução de problemas práticos envolvendo paralelismo e proporcionalidade, estando no centro da relação entre o geométrico e o numérico (BONGIOVANNI, 2007). Possui papel fundamental na teoria da semelhança e, consequentemente, na semelhança entre triângulos.

Por ser um conteúdo de relevante importância na geometria, faz-se necessário adotar uma metodologia de ensino que favoreça sua compreensão e não apenas a sua memorização. De acordo com Brum e Schuhmacher (2012, p.106-107):

> Apesar dos estudos deixados por esse grande matemático sobre paralelismo e proporcionalidade a partir de situações do cotidiano, diversos professores ainda apresentam seu famoso teorema de modo mecânico e memorístico, desconsiderando os conhecimentos prévios que os estudantes carregam para dentro de sala de aula.

A seguir, apresentamos os principais conceitos do Teorema de Tales, segundo Pesco e Arnaut (2009, p.142-144).

### 1.3.1 Segmentos proporcionais

**Definição:** Dois segmentos são proporcionais a dois outros segmentos se a razão dos dois primeiros é igual à razão dos outros dois.

Exemplo:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

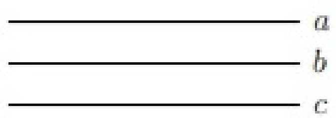
A igualdade dessas duas razões forma uma proporção.

### 1.3.2 Feixe de retas paralelas

**Definição:**

1) *Feixe de retas paralelas é um conjunto de retas coplanares distintas, paralelas entre si.* Na Figura 3, as retas *a, b* e *c* constituem um feixe de retas paralelas.

Figura 3 – Feixe de retas paralelas

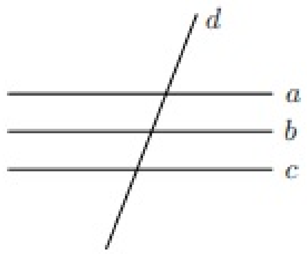



Fonte: (PESCO; ARNAUT, 2009, p.142)

2) *Transversal do feixe de retas paralelas é uma reta do plano do feixe que concorre com todas as retas do feixe de retas paralelas.*

Na Figura 4, a reta *d* é uma reta transversal às retas *a, b* e *c*.

Figura 4 – Reta transversal à um feixe de retas paralelas

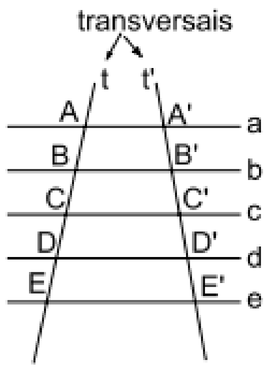



Fonte: (PESCO; ARNAUT, 2009, p.143)

3) *Pontos correspondentes de duas transversais são pontos destas transversais que estão numa mesma reta do feixe de retas paralelas.*

Na Figura 5, *a, b, c, d* e *e* é o feixe de retas paralelas. Os pontos *A e A', B e B', C e C', D e D', E e E'* são pontos correspondentes.

Figura 5 – Pontos correspondentes de duas retas transversais




Fonte: (PESCO; ARNAUT, 2009, p.143)

4) *Segmentos correspondentes de duas transversais são segmentos cujas extremidades são os respectivos pontos correspondentes.*

Na Figura 5, AB e A'B', BC e B'C', CD e C'D' são segmentos correspondentes.

**TEOREMA 1**

*Se um feixe de paralelas tem duas transversais, então os segmentos congruentes de uma tem como correspondentes segmentos congruentes na outra* (demonstração no ANEXO A).

**Teorema de Tales**
Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmento quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra (PESCO; ARNAUT, 2009, p.144).

## 1.4 TRIÂNGULOS SEMELHANTES

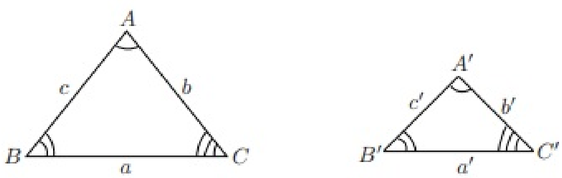
Apresentamos as principais definições relacionadas à semelhança de triângulos, segundo Pesco e Arnaut (2009, p.155-162).

### 1.4.1 Definição

Dois triângulos são semelhantes se os três ângulos são ordenadamente congruentes e se os lados homólogos são proporcionais (PESCO; ARNAUT, 2009, p.155)

Na Figura 6 temos dois triângulos *ABC* e *A'B'C'* semelhantes. Lados homólogos são lados opostos a ângulos ordenadamente congruentes.

Figura 6 – Dois triângulos semelhantes




Fonte: (PESCO; ARNAUT, 2009, p.155)

Os triângulos *ABC* e *A'B'C'* da figura são semelhantes.

$\widehat{A} \equiv \widehat{A'} \rightarrow$ temos que os lados *a* e *a'* são homólogos

$\widehat{B} \equiv \widehat{B'} \rightarrow$ temos que os lados *b* e *b'* são homólogos

$\widehat{C} \equiv \widehat{C'} \rightarrow$ temos que os lados *c* e *c'* são homólogos

**Vértices homólogos** são os vértices de ângulos ordenadamente congruentes.

**Razão de semelhança** é a razão de dois lados homólogos quaisquer.

Temos que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ se $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$, $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$, $\widehat{C} \equiv \widehat{C'}$ e também $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$; *k* é a razão de semelhança.

### 1.4.2 Teorema Fundamental

Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e encontra os outros dois lados em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro (PESCO; ARNAUT, 2009, p.155).

A prova encontra-se no ANEXO B.

**Observação:** Dois triângulos semelhantes são congruentes se a razão de semelhança é $k = 1$.

### 1.4.3 Casos de semelhança entre triângulos

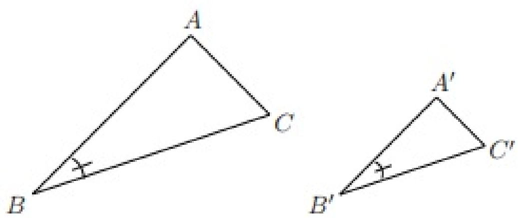
**Primeiro caso: AA (Ângulo-Ângulo)**

Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes.

**Segundo caso: LAL (Lado-Ângulo-Lado)**

Se dois triângulos possuem dois lados correspondentes ordenadamente proporcionais e os ângulos compreendidos entre esses lados são congruentes, então os triângulos são semelhantes. Sejam os triângulos *ABC* e *A'B'C'*, conforme a Figura 7.

Figura 7 – Triângulos semelhantes: caso LAL




Fonte: (PESCO; ARNAUT, 2009, p.160)

Se:

$$\begin{cases} \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \end{cases}$$

então:

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'.$$

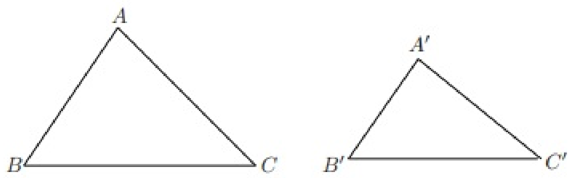
**Terceiro caso: LLL (Lado-Lado-Lado)**

Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes.

Sejam os triângulos *ABC* e *A'B'C'* (Figura 8) tal que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Figura 8 – Triângulos semelhantes: caso LLL




Fonte: (PESCO; ARNAUT, 2009, p.161)

**Observação:** As provas dos três casos de semelhança encontram-se no ANEXO B.

# Capítulo 2

# ASPECTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, são apresentados os aspectos metodológicos da pesquisa, que abrangem os seguintes tópicos: tipo de pesquisa, campo de pesquisa, sujeitos da pesquisa e etapas da pesquisa.

## 2.1 Tipo de pesquisa

A presente pesquisa apresenta um caráter qualitativo, tendo em vista que a coleta de dados é realizada no próprio ambiente dos sujeitos da pesquisa. Segundo Prodanov e Freitas (2013, p.70) :

> Na abordagem qualitativa, a pesquisa tem o ambiente como fonte direta dos dados. O pesquisador mantém contato direto com o ambiente e o objeto de estudo em questão, necessitando de um trabalho mais intensivo de campo. Nesse caso, as questões são estudadas no ambiente em que elas se apresentam sem qualquer manipulação intencional do pesquisador.

Ainda de acordo com Prodanov e Freitas (2013), os dados coletados nesse tipo de pesquisa são descritivos, retratando o maior número possível de elementos existentes na realidade estudada.

## 2.2 Campo da pesquisa

A presente pesquisa foi realizada no Colégio Estadual General Dutra, localizado na Avenida Souza Mota, s/n, bairro Fundão, no município de Campos dos Goytacazes, estado do Rio de Janeiro.

A escola funciona em três turnos (manhã, tarde e noite) e oferta os ensinos Fundamental II, Ensino Médio - regular e na modalidade Nova EJA, além do projeto Autonomia, distribuídos nos três turnos da seguinte forma:

***Primeiro turno - manhã:*** Ensino Fundamental (oitavo e nono ano); Ensino Médio (primeiro, segundo e terceiro ano)

***Segundo turno - tarde:*** Ensino Fundamental (sexto, sétimo e oitavo ano); projeto Autonomia

***Terceiro turno - noite:*** Ensino Fundamental (nono ano); Ensino Médio (primeiro ano regular, módulos I, II, III e IV - NEJA)

A escola apresenta condições razoáveis de instalações e funcionamento. Conta com 11 salas de aulas, quadra de esportes descoberta, auditório, biblioteca, sala multimídia, laboratório de informática, cozinha, refeitório, despensa, sala de professores, sala da coordenação pedagógica, secretaria, sala da direção, banheiros feminino e masculino para os alunos e banheiro para funcionários. A escola conta também com salas de aulas adaptadas com rampas de acesso para deficientes físicos.

A escolha dessa escola para a realização da pesquisa, deve-se ao fato do pesquisador lecionar nessa escola desde 2005, no turno da noite, trabalhando também com as turmas da EJA desde a sua implantação na escola. Assim, foi possível vivenciar as dificuldades que os alunos da EJA apresentam em relação ao aprendizado.

## 2.3 Sujeitos da pesquisa

A pesquisa foi realizada com alunos do segundo módulo do programa Nova EJA. Este programa, compatível com o Ensino Médio, é formado por quatro módulos, com duração de dois anos (um módulo por semestre). Apresenta a seguinte distribuição de disciplinas por módulo:

**Módulo 1:** Filosofia I, Geografia I, História I, Língua Portuguesa e Literatura I, Matemática I e Sociologia I.

**Módulo 2:** Biologia I, Física I, Língua Portuguesa e Literatura II, Matemática II e Química I.

**Módulo 3:** Educação Física I, Filosofia II, Geografia II, História II, Língua Portuguesa e Literatura III, Matemática III e Sociologia II.

**Módulo 4:** Artes I, Biologia II, Física II, Língua Estrangeira I, Língua Portuguesa e Literatura IV, Matemática IV e Química II.

Apesar de existirem 33 alunos matriculados, apenas 23 frequentavam regularmente às aulas. Porém, devido à frequência irregular de parte da turma, a pesquisa foi realizada com a participação de 20 alunos, sendo, assim, os sujeitos da pesquisa. A turma era composta por estudantes de diversas faixas etárias, sendo em sua maioria, mulheres.

Foi escolhido o Módulo 2, pois os assuntos Teorema de Tales e Semelhança de Triângulos foram abordados no Módulo 1, como mostra a Figura 9, sendo, portanto, de conhecimento dos alunos.

Figura 9 – Nova EJA - Módulo 1

| Disciplina | Volume | Módulo | Unidade | Estimativa de aulas para essa unidade |
|---|---|---|---|---|
| Matemática | 1 | 1 | 6 | 4 aulas de 2 tempos |

| Título da unidade | Tema |
|---|---|
| Proporcionalidade e semelhança de polígonos | Proporcionalidade e semelhança de polígonos |
| **Objetivos da unidade** | |
| Identificar uma proporção | |
| Resolver problemas que envolvam grandezas diretamente e inversamente proporcionais | |
| Resolver problemas que envolvam aplicações do Teorema de Tales e do Teorema de Pitágoras | |
| **Seções** | **Páginas no material do aluno** |
| Para início de conversa... | 237 e 238 |
| Seção 1 – Razões e proporções | 239 a 242 |
| Seção 2 – Ajustando as unidades de medida ao contexto: múltiplos submúltiplos | 242 a 243 |
| Seção 3 – Razão entre as medidas de duas grandezas | 244 a 250 |
| Seção 4 – Proporcionalidade e Geometria - Teorema de Tales e triângulos semelhantes | 251 a 261 |
| Resumo | 262 |
| Veja ainda | 262 |
| O que perguntam por aí? | 271 |

Fonte: (RIO DE JANEIRO, 2012, p.07)

Com o intuito de preservar a identidade dos estudantes, os sujeitos da pesquisa foram identificados por números, de 1 a 20.

## 2.4 Etapas da pesquisa

A pesquisa foi realizada em cinco encontros, com duração de duas horas/aula cada um. Para a sua realização, foram seguidas as seguintes etapas:

**Primeira etapa:** Aplicação da primeira avaliação diagnóstica, denominada Pré-teste (apêndice A)

Com o intuito de verificar os conhecimentos dos alunos acerca do tema da pesquisa, tendo em vista que o assunto já havia sido abordado no primeiro módulo (semestre anterior), foi aplicada uma lista de exercícios composta por oito questões, denominada Pré-teste.

A realização desta etapa foi feita de forma individual, em um encontro, com duração de duas horas/aula.

**Segunda etapa:** Aplicação dos instrumentos pedagógicos

Após a aplicação e análise do Pré-teste, foi realizada a intervenção pedagógica, com a aplicação de duas sequências didáticas - uma sobre o assunto Teorema de Tales, e outra sobre o assunto Semelhança de Triângulos, esta última com a utilização de materiais concretos, e pautadas na Teoria da Aprendizagem Significativa, de Ausubel.

Esta etapa foi realizada em três encontros, cada um com duração de duas horas/aula.

**Terceira etapa:** Aplicação da segunda avaliação diagnóstica, denominada Pós-teste.

Após a realização da segunda etapa, foi aplicada novamente a lista de exercícios da primeira etapa, agora denominada Pós-teste, com o intuito de verificar se o aprendizado dos alunos em relação ao tema foi favorecido pela aplicação dos instrumentos pedagógicos da etapa anterior.

Esta etapa foi realizada em um encontro, com duração de duas horas/aula.

# Capítulo 3

# Aplicação e desenvolvimento da atividade de pesquisa

A realização da presente pesquisa, conforme mencionado no capítulo anterior, envolveu três etapas:

- aplicação de uma lista de oito questões acerca dos temas Teorema de Tales (quatro questões) e Semelhança de Triângulos (quatro questões), denominada Pré-Teste, com o intuito de se verificar o nível de conhecimento dos alunos em relação aos temas propostos;

- aplicação de duas sequências didáticas, uma para cada tema. As sequências didáticas são de autoria do pesquisador e foram desenvolvidas utilizando-se alguns materiais concretos;

- reaplicação da lista de questões, agora denominada Pós-teste, com o objetivo de se verificar o aprendizado dos alunos, após a aplicação da sequência didática.

Segue a análise de cada etapa:

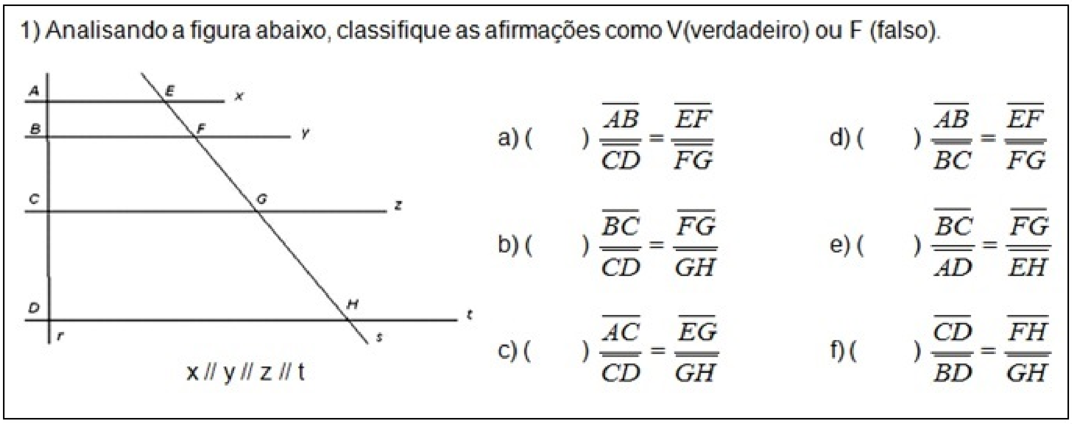
## 3.1 Pré-teste: análise dos resultados

Com o intuito de se verificar o nível de conhecimento acerca dos temas propostos, foi solicitado aos alunos que respondessem a uma lista de oito questões, denominada Pré-Teste (Apêndice A). Essa etapa teve duração de duas aulas de 50 minutos cada uma, e contou com a participação de 20 alunos. A lista de exercícios é composta por 4 questões (1 a 4) a respeito do tema Teorema de Tales e 4 questões (5 a 8) a respeito do tema Semelhança de Triângulos. A seguir, uma análise de cada questão, bem como dos resultados obtidos.

**Questão 1**

A primeira questão (Figura 10), composta por seis itens do tipo Verdadeiro ou Falso, trata da análise de proporções de segmentos em um feixe de retas paralelas. Para a resolução desta questão, não eram necessários cálculos, apenas a observação das relações apresentadas.

Figura 10 – Questão 1 do Pré-teste




Fonte: autoria própria

O desempenho dos alunos é mostrado na Tabela 1:

Tabela 1 – Pré-teste/questão 1: acertos

| Item | Quantidade de acertos |
|---|---|
| a | 9 |
| b | 9 |
| c | 8 |
| d | 9 |
| e | 11 |
| f | 12 |

Fonte: dados da pesquisa

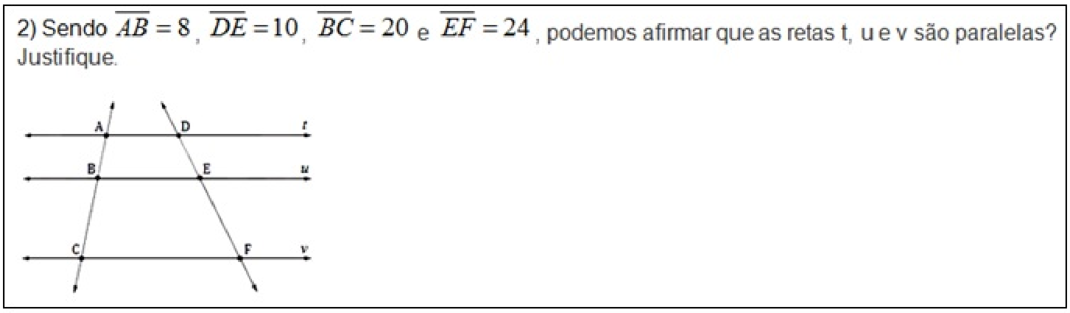
Percebe-se que, com exceção dos itens *e* e *f*, em todos os outros itens, menos de 50 % dos alunos analisaram corretamente as proporções apresentadas, evidenciando a dificuldade dos alunos em relação às possíveis maneiras de se relacionar e identificar segmentos proporcionais em situações como a apresentada.

**Questão 2**

A segunda questão (Figura 11) trata de paralelismo entre retas. O aluno deveria decidir se três retas, aparentemente paralelas, eram ou não paralelas.

Era esperado do aluno que tomasse essa decisão através do cálculo e comparação das razões entre as medidas dos segmentos, ou através da propriedade fundamental das proporções (produto dos meios igual produto dos extremos).

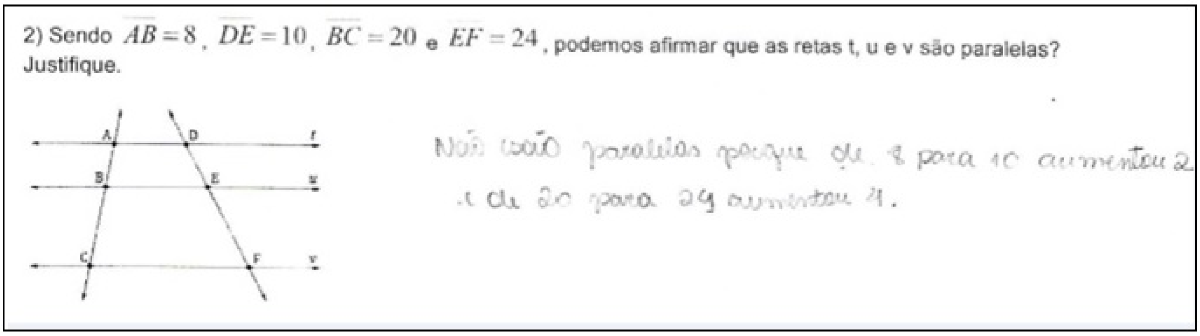
Figura 11 – Questão 2 do Pré-teste




Fonte: autoria própria

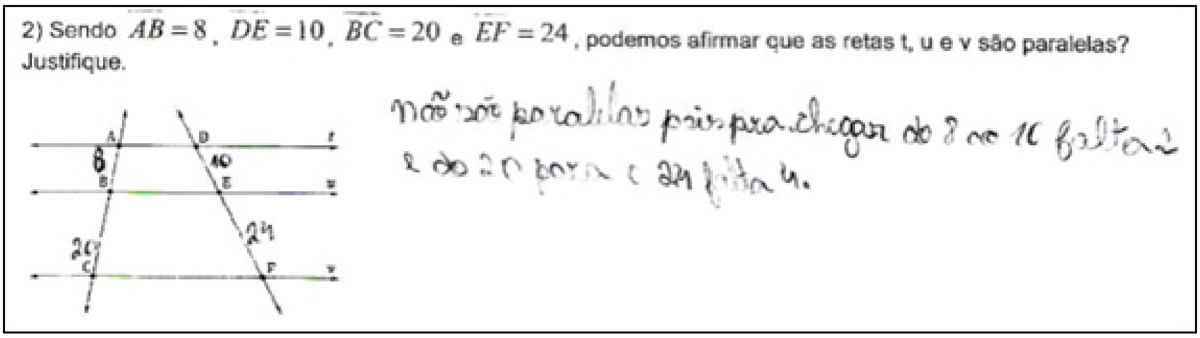
Entre os 20 alunos que participaram da pesquisa, 12 responderam corretamente que as retas não eram paralelas, porém com justificativa errada. Assim, considera-se que não houve acertos. De maneira geral, esses apresentaram justificativas semelhantes à do aluno 19 e do aluno 4, apresentadas, respectivamente, nas Figuras 12 e 13:

Figura 12 – Resposta do aluno 19 à questão 2




Fonte: dados da pesquisa

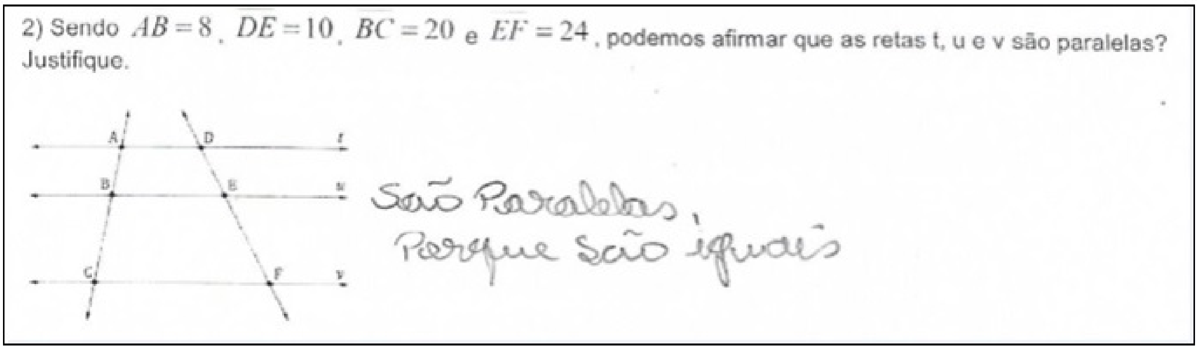
Figura 13 – Resposta do aluno 4 à questão 2




Fonte: dados da pesquisa

Três alunos decidiram pelo paralelismo apenas pela observação da aparência e posição das retas, como o aluno 1 (Figura 14):

Figura 14 – Resposta do aluno 1 à questão 2

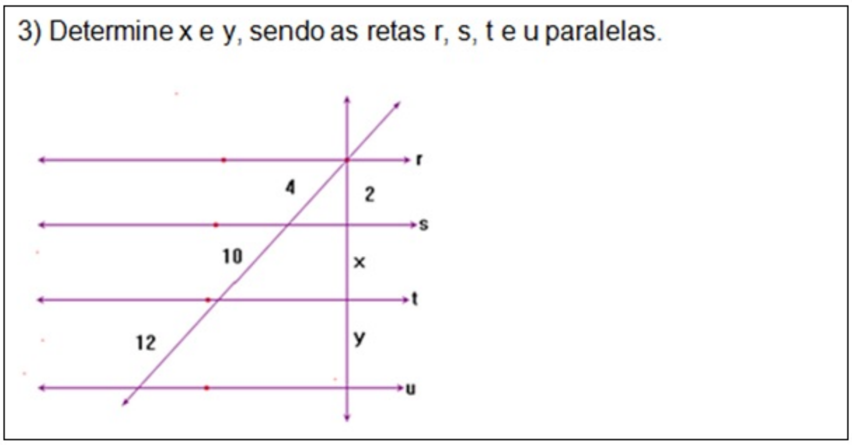



Fonte: dados da pesquisa

**Questão 3**

Frequentemente encontram-se questões similares a esta em livros didáticos. É solicitado que, em um feixe de três retas paralelas cortadas por duas transversais, determine-se as medidas de dois segmentos, x e y (Figura 15).

Figura 15 – Questão 3 do Pré-teste




Fonte: (SALLE, 2013, p.11)

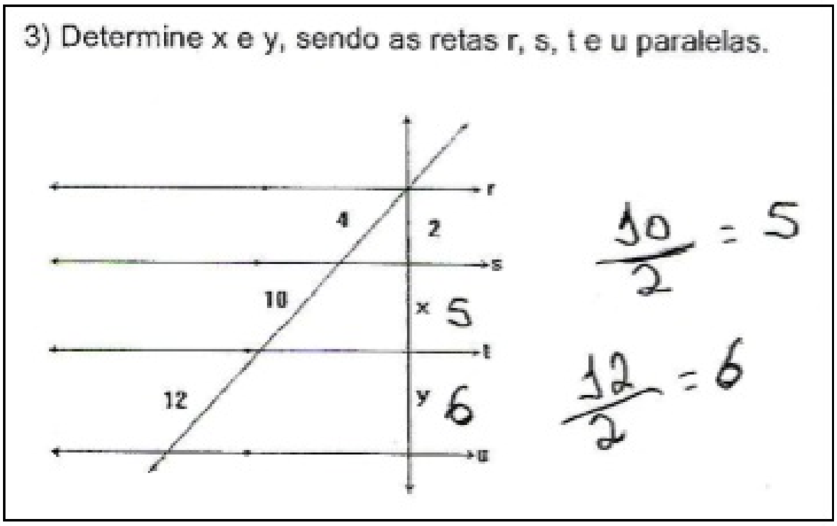
O objetivo dessa questão é verificar os conhecimentos do aluno acerca do Teorema de Tales, propriamente dito. Diferentemente da questão 1, agora o aluno depara-se com medidas representadas numericamente.

Oito alunos acertaram essa questão, porém apenas seis alunos apresentaram os cálculos que justificavam a resposta.

O resultado obtido nesta questão é preocupante, pois espera-se que esse tipo de questão consiga ser resolvida por qualquer aluno que tenha conhecimento do Teorema de Tales, tendo em vista que trata-se de sua aplicação simples.

Dos alunos que apresentaram os cálculos, quatro obtiveram a razão de semelhança de forma visual, efetuando a seguir os cálculos para encontrar os valores pedidos, como o aluno 11 (Figura 16):

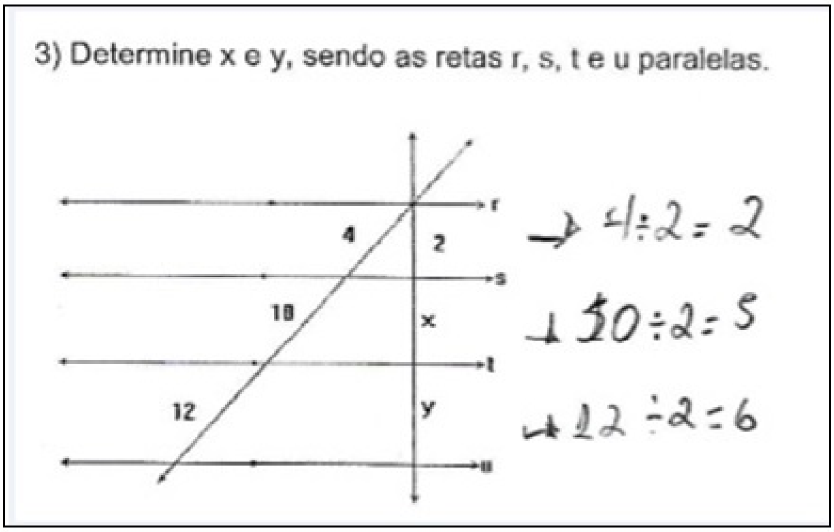
Figura 16 – Resposta do aluno 11 à questão 3




Fonte: dados da pesquisa

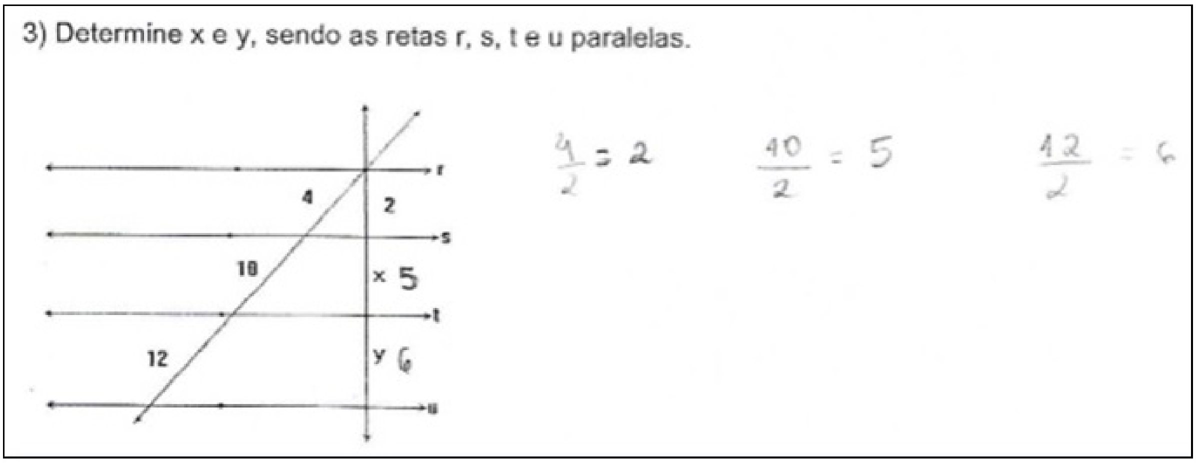
Apenas os alunos 5 e 19 apresentaram o cálculo da razão de semelhança e, só então, obtiveram as medidas pedidas (Figuras 17 e 18):

Figura 17 – Resposta do aluno 5 à questão 3




Fonte: dados da pesquisa

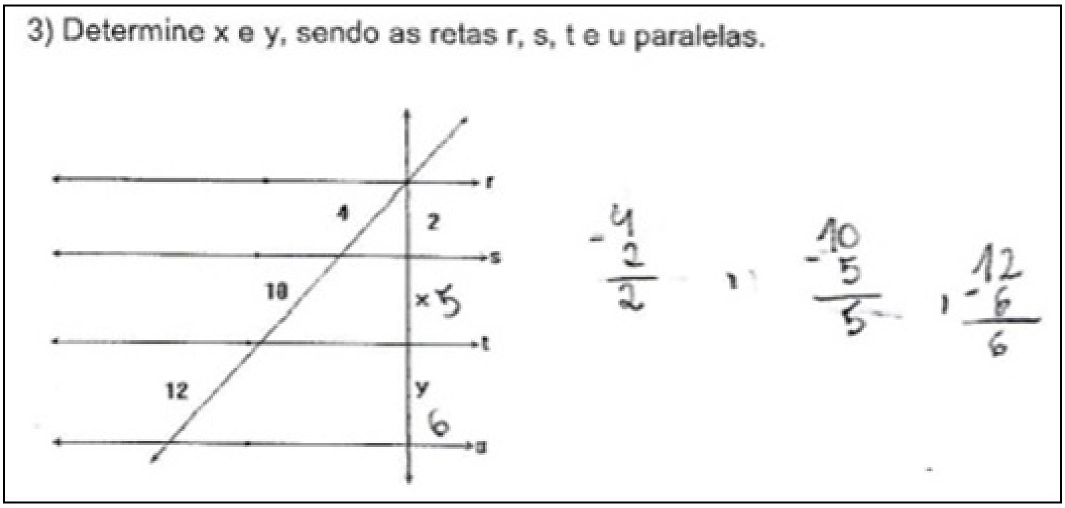
Figura 18 – Resposta do aluno 19 à questão 3




Fonte: dados da pesquisa

O aluno 4 chegou aos resultados corretos, porém, de forma errada. Ele utiliza subtração entre os segmentos correspondentes (Figura 19):

Figura 19 – Resposta do aluno 4 à questão 3

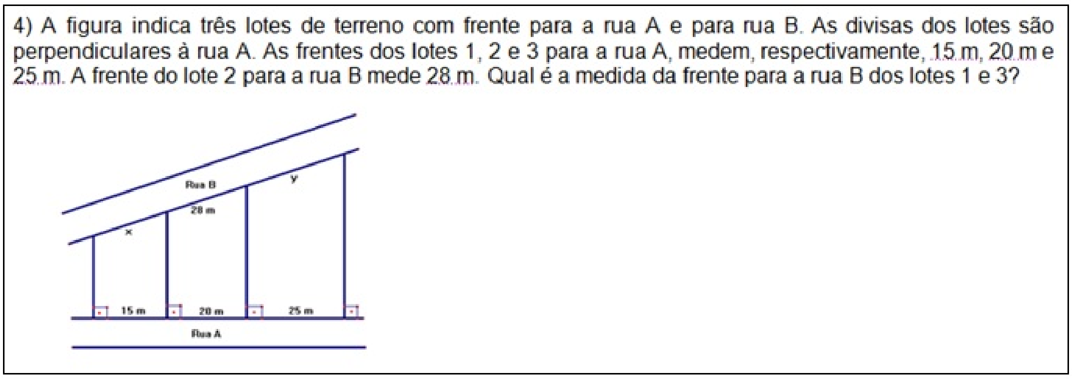



Fonte: dados da pesquisa

**Questão 4**

A quarta questão é contextualizada, apresentando uma situação prática. O objetivo dessa questão é verificar como o aluno relaciona o Teorema de Tales à situações reais, contextualizadas (Figura 20).

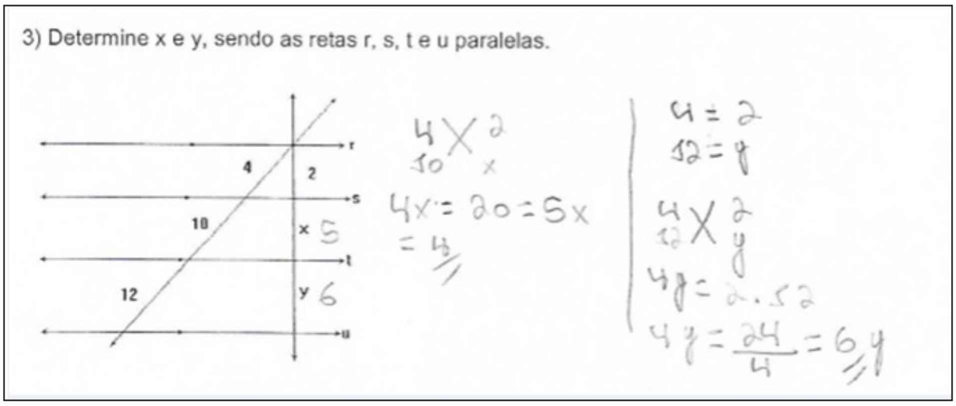
Figura 20 – Questão 4 do Pré-teste


4) A figura indica três lotes de terreno com frente para a rua A e para rua B. As divisas dos lotes são perpendiculares à rua A. As frentes dos lotes 1, 2 e 3 para a rua A, medem, respectivamente, 15 m, 20 m e 25 m. A frente do lote 2 para a rua B mede 28 m. Qual é a medida da frente para a rua B dos lotes 1 e 3?


Fonte: (SALLE, 2013, p.12)

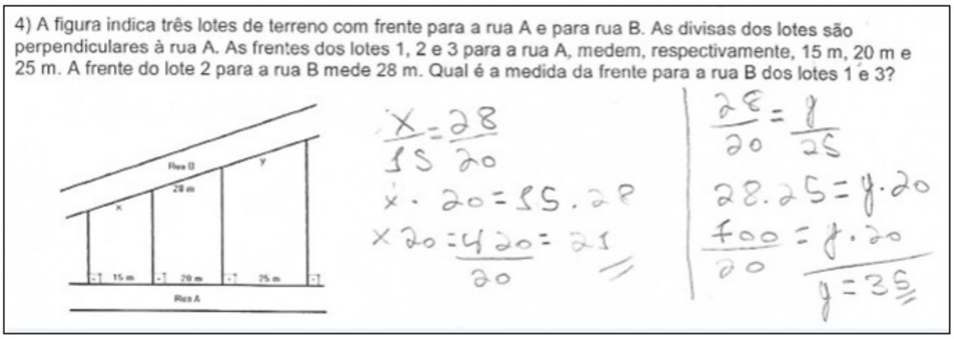
Sua resolução segue o mesmo raciocínio da questão 3, porém apenas dois alunos resolveram corretamente: alunos 13 e 18. O aluno 18 respondeu corretamente também a questão 3, o mesmo não ocorrendo com o aluno 13 (Figuras 21, 22, 23 e 24).

Figura 21 – Resposta do aluno 18 à questão 3


3) Determine x e y, sendo as retas r, s, t e u paralelas.

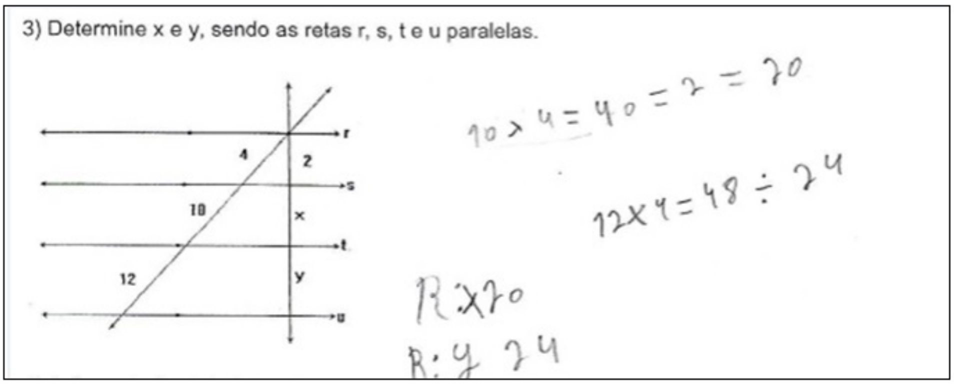

Fonte: dados da pesquisa

Figura 22 – Resposta do aluno 18 à questão 4


4) A figura indica três lotes de terreno com frente para a rua A e para rua B. As divisas dos lotes são perpendiculares à rua A. As frentes dos lotes 1, 2 e 3 para a rua A, medem, respectivamente, 15 m, 20 m e 25 m. A frente do lote 2 para a rua B mede 28 m. Qual é a medida da frente para a rua B dos lotes 1 e 3?

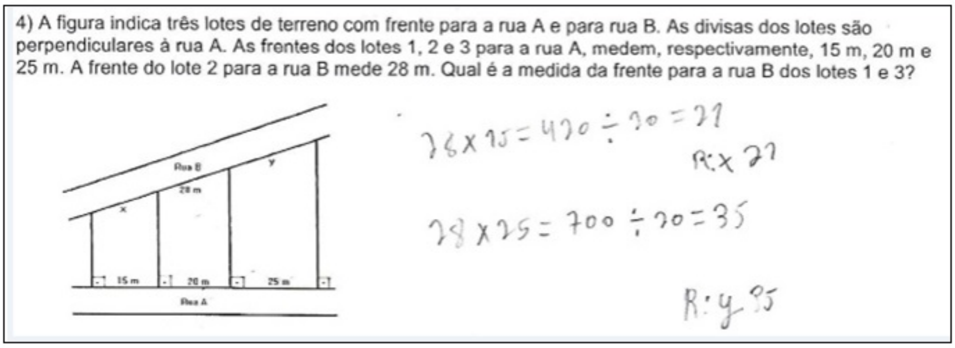

Fonte: dados da pesquisa

Figura 23 – Resposta do aluno 13 à questão 3




Fonte: dados da pesquisa

Figura 24 – Resposta do aluno 13 à questão 4

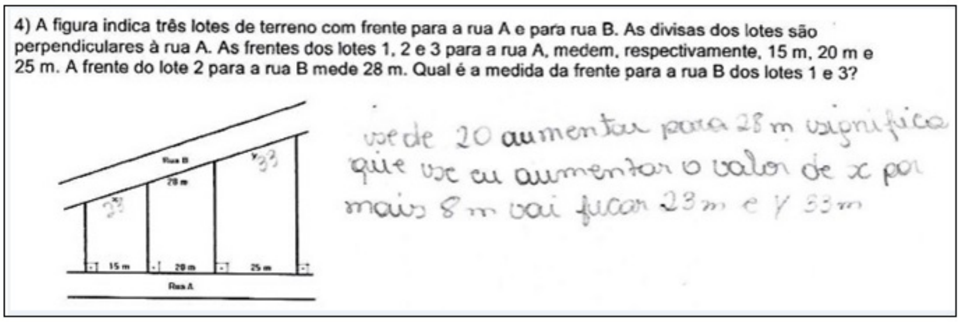



Fonte: dados da pesquisa

Assim, alunos que resolveram corretamente a questão 3, que não se tratava de uma questão contextualizada, não tiveram o mesmo desempenho na questão 4, contextualizada. Percebemos, então, uma grande dificuldade por parte dos alunos em trabalhar com contextualização, aplicando em problemas reais o que é aprendido teoricamente.

De maneira geral, as demais respostas da questão 4 seguem o mesmo raciocínio do aluno 2 (Figura 25).

Figura 25 – Resposta do aluno 2 à questão 4

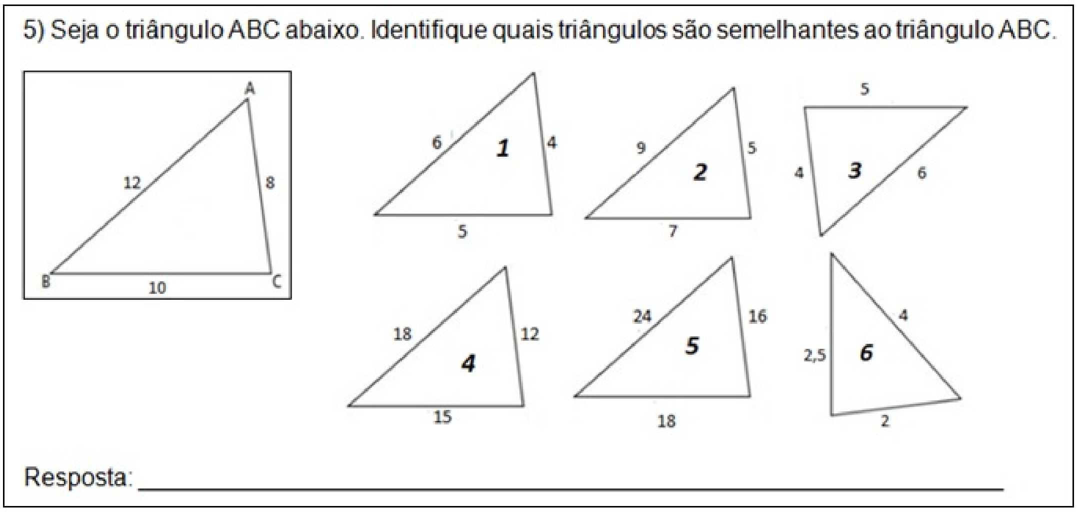



Fonte: dados da pesquisa

**Questão 5**

O objetivo dessa questão (Figura 26), era verificar como o aluno julga a semelhança entre dois triângulos, através apenas da comparação entre as medidas dos lados. Foi permitido aos alunos o uso de calculadora, porém não lhes foi dito o tipo de cálculo que deveriam efetuar.

Figura 26 – Questão 5 do Pré-teste




Fonte: autoria própria

Os alunos 2 e 14 responderam de forma correta (triângulos 1, 3 e 4), enquanto 12 alunos responderam incorretamente, porém mencionaram os triângulos 1 e 3. Os demais alunos erraram por completo.

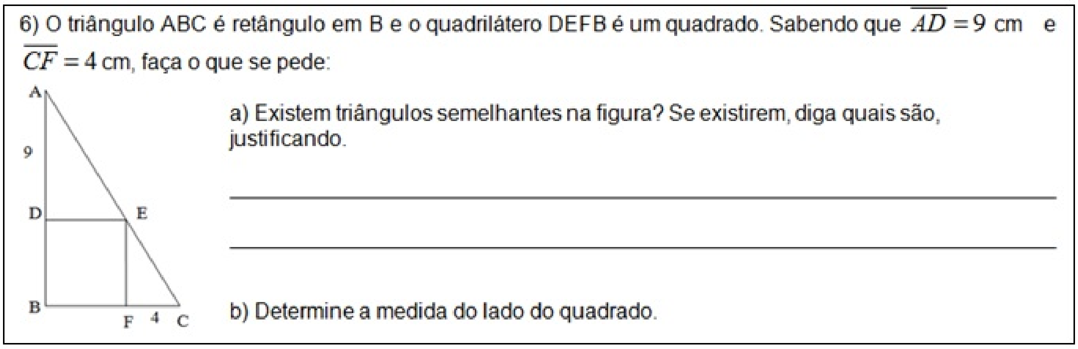
Percebemos através dos resultados obtidos que, apesar da possibilidade de utilização da calculadora, a simples observação dos triângulos 1 e 3, que possuíam medidas iguais à metade das medidas do triângulo ABC, foi adotada pela maioria dos alunos. Baseados neste fato, concluíram de forma correta quanto à semelhança destes triângulos.

**Questão 6**

Essa questão (Figura 27), possuía dois itens, a e b.

O item a), que questionava a existência de triângulos semelhantes na figura, exigia apenas observação. O objetivo desse item era verificar o conhecimento dos alunos quanto à identificação de ângulos correspondentes congruentes nos triângulos e, a partir dessa identificação, concluir pela semelhança ou não.

Figura 27 – Questão 6 do Pré-teste


6) O triângulo ABC é retângulo em B e o quadrilátero DEFB é um quadrado. Sabendo que $\overline{AD} = 9$ cm e $\overline{CF} = 4$ cm, faça o que se pede:



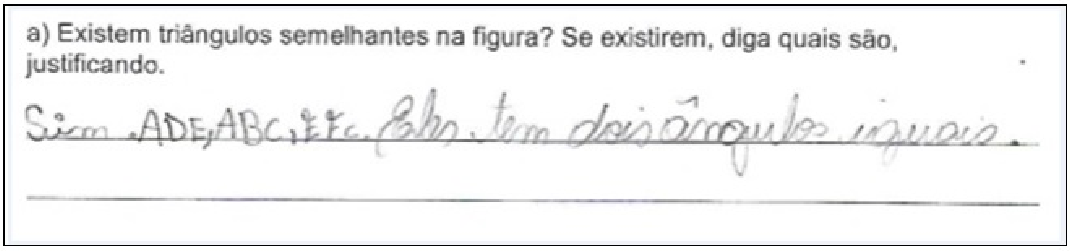
a) Existem triângulos semelhantes na figura? Se existirem, diga quais são, justificando.

b) Determine a medida do lado do quadrado.

Fonte: autoria própria

Apenas cinco alunos responderam corretamente, sendo que quatro alunos concluíram após a identificação de três ângulos congruentes entre os triângulos. Apenas o aluno 18 concluiu com a identificação de apenas dois ângulos congruentes entre os triângulos, como mostra a Figura 28:

Figura 28 – Resposta do aluno 18 ao item a da questão 6


a) Existem triângulos semelhantes na figura? Se existirem, diga quais são, justificando.

Sim ADE, ABC, EFC. Eles tem dois ângulos iguais.

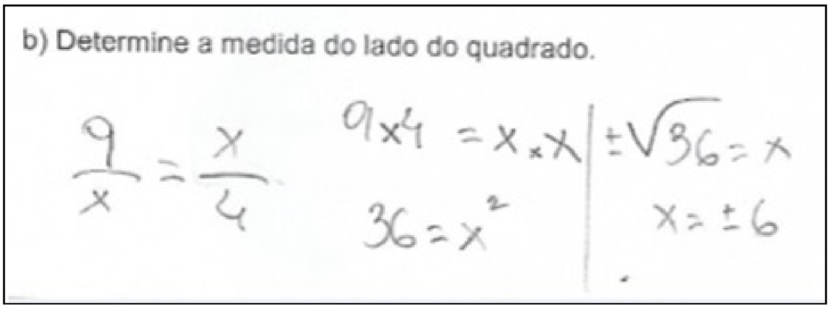
Fonte: dados da pesquisa

Com os resultados obtidos, percebemos que a maioria dos alunos não conhece os critérios de semelhança de triângulos e, os poucos que sabem identificar a semelhança, o fazem baseando-se nas medidas dos três ângulos, e não apenas nas medidas de dois deles, que é o necessário, à exceção do aluno 18.

O item b) pedia que determinassem a medida do lado do quadrado. Para responderem corretamente esse item, seria necessário perceberem que os triângulos *ADE* e *EFC* são semelhantes, além de relacionarem corretamente os lados homólogos.

Como era esperado, apenas os alunos que responderam corretamente o item a), responderam corretamente o item b). Porém, apesar de montarem a proporção corretamente e efetuarem os cálculos, nenhum deles percebeu que, por se tratar da medida do lado de um polígono, deveriam desconsiderar o resultado negativo dos cálculos, como mostra a Figura 29.

Figura 29 – Resposta do aluno 13 ao item b da questão 6

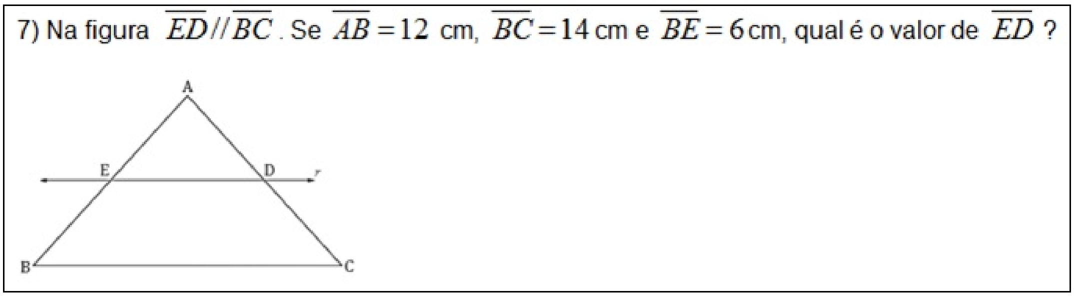



Fonte: dados da pesquisa

**Questão 7**

A questão 7 apresentava um triângulo *ABC* cortado nos pontos E e D por uma reta paralela à sua base (Figura 30). Os alunos tinham que determinar a medida do segmento ED, paralelo à base BC.

Figura 30 – Questão 7 do Pré-teste



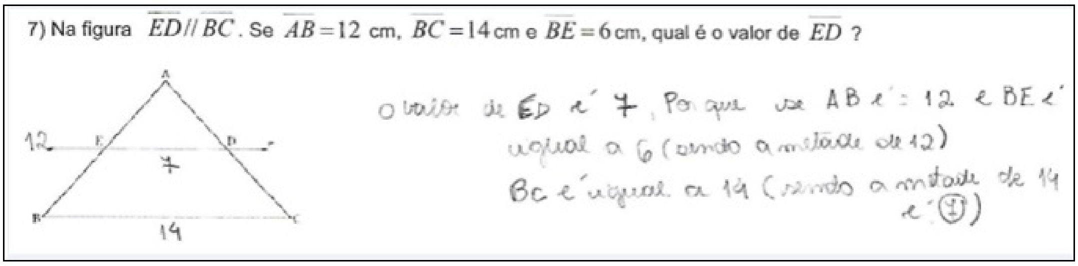

Fonte: autoria própria

O objetivo dessa questão, bastante comum nos livros didáticos, era verificar se o aluno iria identificar que o triângulo AED é semelhante ao triângulo ABC, relacionando então os lados homólogos e determinando a medida do segmento ED.

Apenas sete alunos acertaram essa questão, sendo que cinco deles efetuaram os cálculos esperados para chegar ao resultado.

O aluno 19 não efetuou os cálculos mas percebeu visualmente que a razão de semelhança entre os triângulos ABC e AED era 2, explicando, então, seu raciocínio com palavras (Figura 31):

Figura 31 – Resposta do aluno 19 à questão 7



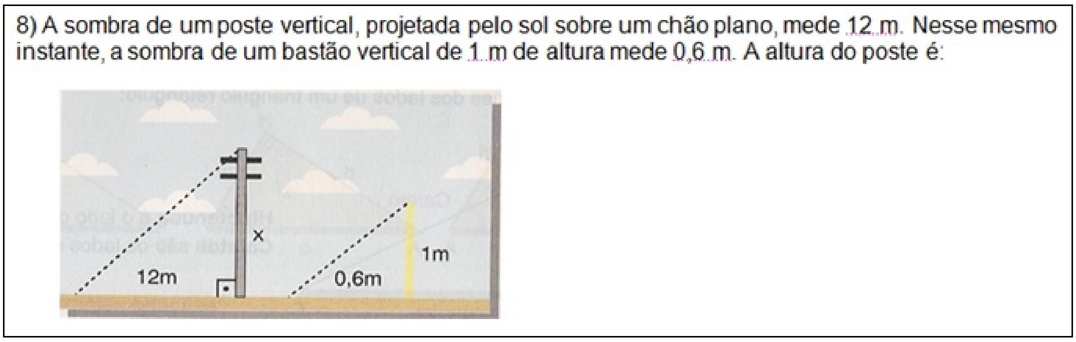

Fonte: dados da pesquisa

Essa questão reforça ainda mais o fato de que, grande parte dos alunos não sabe identificar congruência entre ângulos e, consequentemente, a semelhança entre dois triângulos, ou não conhecem os casos de semelhança entre triângulos, situação já identificada na questão anterior.

**Questão 8**

A questão 8 (Figura 32), é um problema contextualizado, no qual era necessário perceber a semelhança entre os triângulos e relacionar os lados homólogos.

Figura 32 – Questão 8 do Pré-teste



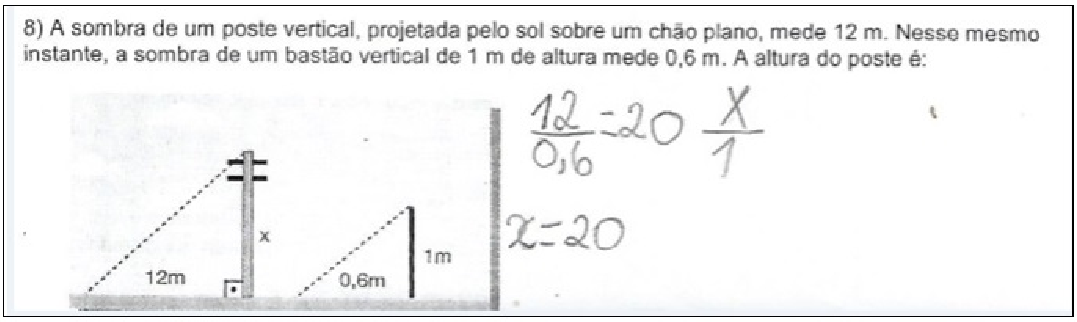

Fonte: (MONTESSORI, 2013)

O objetivo dessa questão era verificar como o aluno utiliza os conhecimentos sobre semelhança de triângulos em situações reais.

Apenas dois alunos acertaram essa questão, evidenciando ainda mais a dificuldade que existe em se lidar com problemas contextualizados, percebida anteriormente na questão 4.

O aluno 20, apesar da falta de organização no desenvolvimento da solução, raciocinou de forma correta, chegando ao resultado correto (Figura 33).

Figura 33 – Resposta do aluno 20 à questão 8




Fonte: dados da pesquisa

## 3.2 Intervenção pedagógica

O ensino baseado na Teoria da Aprendizagem Significativa deve ser pautado por atividades e estratégias que levem o aluno a construir um corpo de conhecimentos claro e organizado. Assim, os conceitos e ideias já existentes na estrutura cognitiva do aluno são de fundamental importância. De acordo com Moreira (2006), o papel do professor nesse processo envolve quatro etapas:

1. Identificar os conceitos e proposições mais relevantes do conteúdo a ser estudado, separando os mais abrangentes dos que estão em um nível intermediário de generalidade, organizando sua estrutura conceitual de maneira sequencial.

2. Identificar quais subsunçores (conceitos, proposições e ideias), relevantes à aprendizagem do conteúdo a ser ensinado, o aluno deveria possuir em sua estrutura cognitiva para poder aprender signicativamente esse conteúdo. Não trata-se de pré-requisitos, mas de conhecimento especificamente relevante para a aprendizagem do conteúdo.

3. Verificar se os subsunçores necessários ao estudo do conteúdo estão presentes na estrutura cognitiva do aluno.

4. Utilizar recursos e métodos que facilitem a passagem da estrutura conceitual do conteúdo a ser estudado para a estrutura cognitiva do aluno, de maneira organizada, clara e estável, fazendo com que a aprendizagem seja realmente significativa.

A identificação dos subsunçores presentes na estrutura cognitiva do aluno deve ser feita através da aplicação de problemas contextualizados, entrevistas ou outros instrumentos que sirvam para esse fim.

Os recursos e métodos utilizados no processo de aprendizagem assumem importante papel para que uma aprendizagem efetivamente significativa aconteça. Cabe ao professor, de acordo com o conteúdo a ser ensinado, estrutura da instituição de ensino e características dos alunos, fazer a escolha dos recursos mais adequados, que podem ser contextualizações, modelagem, material concreto, recursos tecnológicos, entre outros.

Assim, as sequências didáticas realizadas, sobre os assuntos Teorema de Tales e Semelhança de Triângulos, foram elaboradas de acordo com as etapas citadas, sempre procurando levar o aluno a construir conceitos e relações de maneira natural e significativa, conforme segue:

**Primeira etapa:** identificação dos conceitos mais relevantes dos assuntos Teorema de Tales e Semelhança de Triângulos.

O estudo dos assuntos em questão abrange vários conceitos, como medidas proporcionais, paralelismo entre retas e congruência de ângulos.

**Segunda etapa:** identificação dos subsunçores necessários ao estudo dos temas.

Para o estudo dos temas Teorema de Tales e Semelhança de Triângulos, a ideia de proporcionalidade é de grande importância. Dessa maneira, para que ocorra uma aprendizagem pautada na teoria de Ausubel, é necessário que os alunos apresentem em sua estrutura cognitiva uma compreensão clara a respeito de quantidades proporcionais e aumentos e reduções proporcionais. Assim, o subsunçor proporcionalidade deve estar presente na estrutura cognitiva dos alunos.

**Terceira etapa:** verificação da presença do subsunçor proporcionalidade na estrutura cognitiva dos alunos.

Para o cumprimento desta etapa, foram propostas duas situações-problema que ocorrem no dia-a-dia da maioria dos alunos da turma e que não tem relação direta com o assunto em questão. A turma é formada, em sua maioria, por mulheres que cuidam dos afazeres de casa, e por homens que, de alguma maneira, têm contato com tarefas da construção civil.

**Primeira situação-problema**

Dona Maria é uma doceira de mão cheia. Trabalha fazendo doces e tortas há mais de vinte anos e recebe encomendas para vários eventos, como aniversários, casamentos, batizados, enfim, todo tipo de festa. Certo dia, dona Maria recebeu uma encomenda de um bolo para dez pessoas. Juntou todos os ingredientes, misturou, levou ao forno e, após algumas horas, o bolo estava pronto. O bolo fez tanto sucesso que sua freguesa voltou e encomendou outro bolo, igual, mas para 30 pessoas, com a recomendação de que ficasse com o mesmo sabor e textura do primeiro. O que dona Maria deve fazer para conseguir atender sua freguesa?

**Segunda situação-problema**

Pedro e Marcos trabalham com construção civil. Fazem todo tipo de trabalho nesta área, como parte hidráulica, instalações elétricas, pintura, alvenaria, reboco de paredes, entre outros. Estavam trabalhando na construção de dois muros laterais de uma casa e estavam na etapa de reboco. O primeiro muro tinha 2 metros de altura e 5 metros de comprimento, ou seja, 10 metros quadrados. Fizeram uma argamassa com cimento, areia, argila e água, rebocaram todo o muro e, para surpresa deles, a quantidade de argamassa que fizeram foi na medida exata. Quando passaram para o outro muro, que tinha também 2 metros de altura, mas 7,5 metros de comprimento, ou seja, 15 metros quadrados, tiveram a ideia de fazer a argamassa, com as mesmas características da primeira, também na medida exata. Como eles irão conseguir isto?

**Quarta etapa:** escolha do recurso a ser utilizado na abordagem dos assuntos.

Na abordagem de conteúdos relacionados à Geometria, a utilização e manipulação de materiais concretos favorecem a aprendizagem e proporcionam uma melhor compreensão do pensamento geométrico. Além disso, acentuam a percepção e estimulam o interesse do aluno pelo assunto a ser estudado, tornando a aula mais dinâmica e atrativa, propiciando também uma maior participação dos alunos no processo ensino-aprendizagem. Assim, as sequências didáticas foram elaboradas com a utilização de materiais manipuláveis (régua, transferidor, calculadora e canudos). De acordo com Rodrigues e Gazire (2012, p.191), "o material didático concreto pode ter um importante papel nesse processo, atuando como meio auxiliar de ensino, podendo ser um recurso capaz de catalisar experiências individuais de aprendizagem na construção dos conceitos matemáticos".

Dessa forma, a utilização de materiais manipuláveis pode ser uma importante aliada na efetivação da aprendizagem de maneira significativa. Cabe ao professor a tarefa de fazer a ligação entre o uso desses materiais e a construção do conhecimento por parte dos alunos. Segundo Ribeiro (2011, p.08):

> Manipular os materiais concretos permite aos alunos criar imagens mentais de conceitos abstratos. Porém, ele sozinho não consegue atingir essas funções. É preciso uma participação ativa do professor, pois, materiais concretos sozinhos não garantem a compreensão de conceitos. Ao utilizar um material é necessário que o professor o conheça bem, saiba aplicá-lo e tenha claro os seus objetivos ao utilizá-lo. Os professores devem criar uma sequência didática que promova a reflexão e a construção de significados pelo aluno.

Por ser o público alvo alunos da Educação de Jovens e Adultos, optou-se pela elaboração de sequências didáticas relativamente simples, sem muita complexidade, o que poderia ocasionar desmotivação e, consequentemente, desinteresse por parte dos alunos.

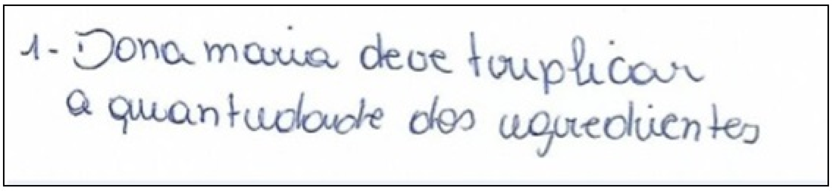
**Execução das sequências didáticas**

Por se tratar de uma turma de Educação de Jovens e Adultos, a maioria dos alunos já está inserida no mercado de trabalho. Assim, a frequência é variável, tendo havido certa dificuldade em aplicar as sequências didáticas propostas para o mesmo grupo de alunos, durante os dias de execução. Por esse motivo, o trabalho com os alunos foi realizado na menor quantidade de dias possível. Pelo mesmo motivo, a execução da pesquisa contou com a participação de 20 alunos, apesar de existirem 33 alunos matriculados.

A primeira sequência didática, sobre o Teorema de Tales (APÊNDICE B), foi realizada em duas aulas, com duração de 50 minutos cada uma. Inicialmente, foram apresentadas aos alunos as duas situações-problema (terceira etapa).

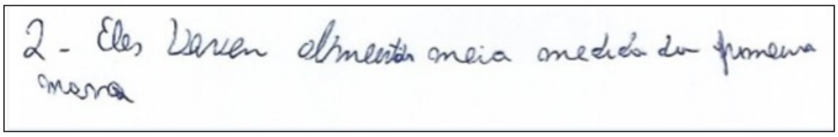
Por serem situações próximas de suas realidades, todos os alunos responderam de forma correta e sem grandes dificuldades. Assim, a partir das soluções apresentadas, confirmou-se a presença do ***subsunçor proporcionalidade*** na estrutura cognitiva dos alunos. De maneira geral, as respostas apresentadas assemelham-se às respostas dos alunos 2 (Situação 1) e 12 (Situação 2), mostradas nas Figuras 34 e 35, respectivamente:

Figura 34 – Resposta do aluno 2 à Situação-problema 1


1- Dona maria deve tuplicar a quantidade dos ingredientes

Fonte: dados da pesquisa

Figura 35 – Resposta do aluno 12 à Situação-problema 2

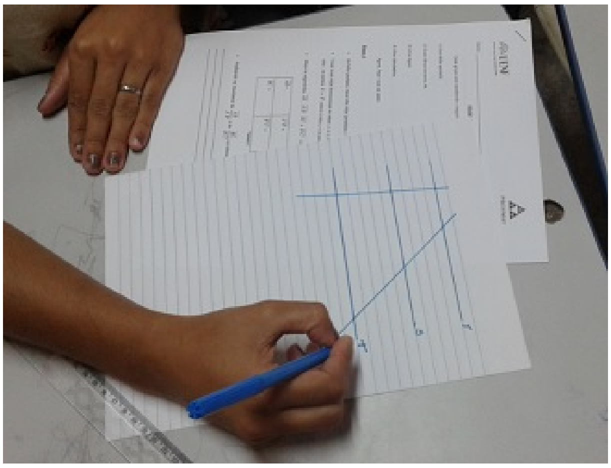

2- Eles varen almentar meia medida da primeira massa

Fonte: dados da pesquisa

Após a confirmação da presença do subsunçor proporcionalidade, a turma foi dividida em grupos de cinco alunos. A divisão dos grupos foi feita de forma livre, ficando a cargo dos alunos a escolha dos integrantes de cada grupo.

A seguir, foi disponibilizado a cada grupo os seguintes materiais: uma folha pautada, uma régua, caneta e calculadora. Os alunos deram início, então, às construções solicitadas, como mostra a Figura 36.

Figura 36 – Sequência Didática Teorema de Tales - primeira construção



Fonte: autoria própria

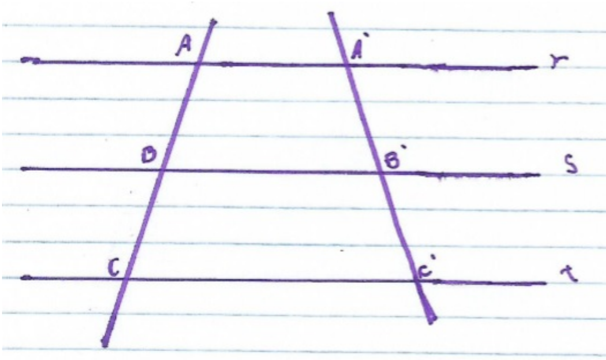
Na primeira construção, verificou-se que os alunos conheciam, ainda que de forma informal, o conceito de retas paralelas, identificando-as nas linhas da folha pautada.

O mesmo não ocorreu com a ideia de retas transversais e pontos de intersecção: vários alunos ficaram em dúvida ou simplesmente desconheciam esses conceitos, sendo preciso a intervenção do professor no esclarecimento dos questionamentos.

Feita a construção solicitada, iniciaram as medições com a régua.

Os integrantes do grupo 2 perceberam que as medidas dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, e $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$ eram praticamente iguais (Figuras 37 e 38). Observaram e concluíram, então, que isso ocorreu devido às retas *r*, *s* e *t* possuirem a mesma distância entre si. Foi esclarecido pelo professor que a pequena diferença entre os resultados foi ocasionada pela imprecisão nas medições, e que o correto seria os resultados serem iguais.

Figura 37 – Primeira construção do grupo 2 - sequência didática Teorema de Tales




Fonte: dados da pesquisa

Figura 38 – Medições da primeira construção do grupo 2 - sequência didática Teorema de Tales

| | | |
|---|---|---|
| $\overline{AB}$ = 2,5 | $\overline{BC}$ = 2,6 | $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ = 0,9615 |
| $\overline{A'B'}$ = 2,4 | $\overline{B'C'}$ = 2,5 | $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$ = 0,96 |

Tabela 1

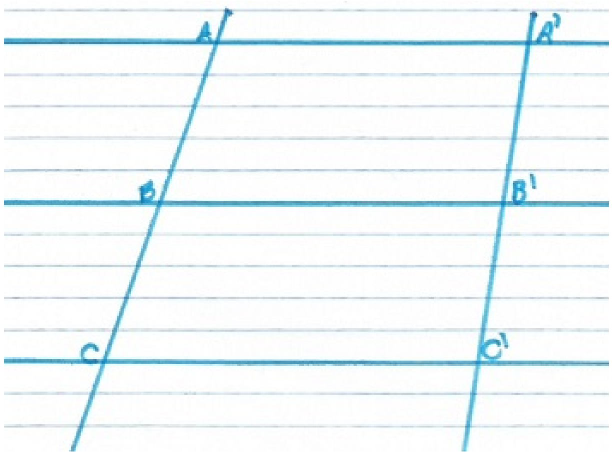
Fonte: dados da pesquisa

Após efetuarem os cálculos das razões entre os segmentos, todos os grupos observaram que os resultados eram aproximadamente iguais. Mais uma vez, o professor esclareceu que a pequena diferença encontrada havia sido causada pela imprecisão nas medições e que teoricamente, deveriam ser iguais.

Foi solicitado aos grupos que refizessem a construção anterior, porém aumentando-se as distâncias entre as retas paralelas. Após refazerem as construções, os grupos passaram às medições.

Dessa vez, foi o grupo 1 que traçou as retas paralelas com a mesma medida, obtendo assim, resultados iguais para as medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, e $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$ (Figuras 39 e 40). Assim como o grupo 2, o grupo 1 também percebeu a igualdade entre as medidas, sendo orientados pelo professor.

Figura 39 – Segunda construção do grupo 1 - sequência didática Teorema de Tales




Fonte: dados da pesquisa

Figura 40 – Medições da segunda construção do grupo 1 - sequência didática Teorema de Tales

| | | |
|---|---|---|
| $\overline{AB} = 4{,}3$ | $\overline{BC} = 4{,}3$ | $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{4{,}3}{4{,}3} = 1$ |
| $\overline{A'B'} = 4{,}1$ | $\overline{B'C'} = 4{,}1$ | $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{4{,}1}{4{,}1} = 1$ |

Tabela 2

Fonte: dados da pesquisa

Após completarem a Tabela 2 e efetuarem os cálculos das razões entre os segmentos, observaram novamente que os resultados eram aproximadamente iguais.

O professor, então, explicou que essa igualdade (ou semelhança) entre os resultados nas duas construções, deve-se ao fato dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ serem proporcionais aos segmentos $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$.

Ao responderem ao último questionamento da sequência didática sobre o Teorema de Tales, todos os grupos concluíram que, se as distâncias entre as retas paralelas fossem alteradas novamente, os resultados dos cálculos das razões entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, e $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$ continuariam a ser iguais ou, devido à imprecisão nas medições, semelhantes.

Foi feita, então, a formalização do Teorema de Tales aos alunos.

| |
|---|
| Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmento quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra. |

A segunda sequência didática, sobre Semelhança de Triângulos (APÊNDICE C) estava prevista para ser realizada, assim como a primeira, em duas aulas com duração de 50 minutos cada uma. Porém, a construção dos triângulos com os canudos levou mais tempo que o esperado, sendo preciso mais duas aulas, também com duração de 50 minutos cada uma, para a sua conclusão.

A turma novamente foi dividida em grupos, com a mesma formação da primeira sequência didática.

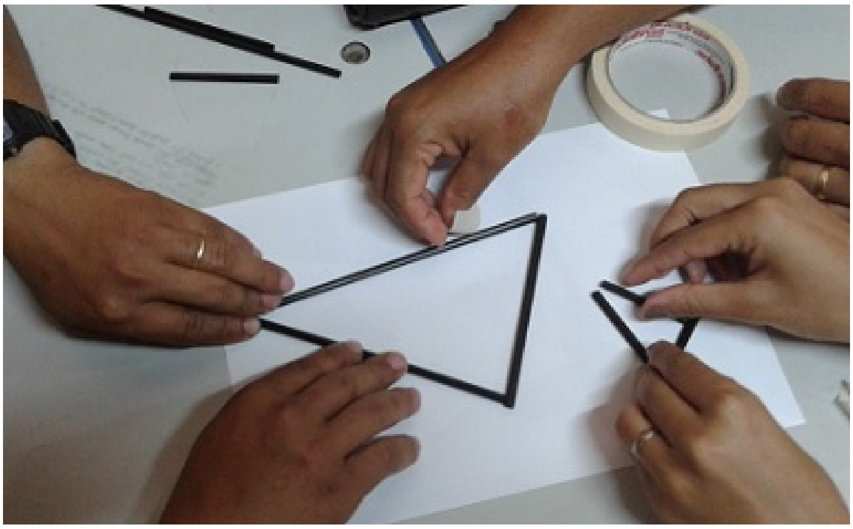
Inicialmente, os alunos fizeram a montagem de dois triângulos de medidas proporcionais às medidas do triângulo padrão (APÊNDICE D), denominados de triângulos 1 e 2. Como já tinham a ideia de proporcionalidade e conheciam o conceito de segmentos proporcionais, trabalhados na primeira sequência didática, deveriam, com o auxílio da régua e da calculadora, escolher entre nove canudos dados, os que formariam os triângulos pedidos.

Primeiro, mediram os lados do triângulo padrão. Depois, mediram os canudos e, a partir dos valores encontrados, deram início às montagens (Figura 41).

Todos os grupos concluíram, apenas pela observação, que os canudos cujas medidas eram metade das medidas do triângulo padrão, formavam um triângulo proporcional a este. Este fato ratifica o observado nos resultados da Questão 5 do Pré-teste, onde 14 alunos dentre 20, responderam corretamente que os triângulos 1 e 3, de medidas iguais à metade das medidas do triângulo ABC, eram semelhantes a este.

Na escolha dos canudos que formariam o segundo triângulo de medidas proporcionais ao triângulo padrão, somente o grupo 5 utilizou novamente apenas a observação, para escolher os canudos. Dessa forma, escolheram de forma incorreta, sendo alertados e corrigidos pelo professor. Os demais grupos agiram de forma correta, dividindo as medidas obtidas pelas medidas dos lados do triângulo padrão (portanto, achando a razão de semelhança), escolhendo os canudos cujos resultados fossem iguais.

Figura 41 – Montagem dos triângulos proporcionais ao triângulo padrão - grupo 1

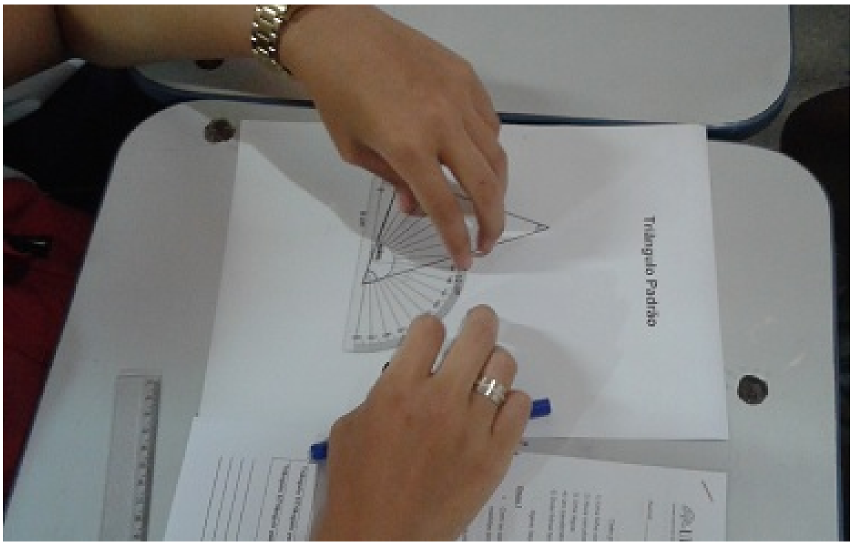


Fonte: autoria própria

Após montados os triângulos, deveriam medir com o auxílio do transferidor, os ângulos do triângulo padrão e os ângulos dos triângulos 1 e 2. A maioria dos alunos nunca tinha utilizado o transferidor e alguns sequer conheciam. Foi necessário, então, a intervenção do professor, explicando e mostrando como ele deveria ser utilizado.

Após aprenderem a utilizar o transferidor, passaram às medições, como mostra a Figura 42.

Figura 42 – Medições dos ângulos dos triângulos - grupo 4




Fonte: autoria própria

Os grupos observaram que, apesar dos tamanhos dos triângulos serem diferentes, as medidas dos ângulos eram as mesmas (Figura 43).

Figura 43 – Medidas dos ângulos dos triângulos - grupo1

- Com o auxílio do transferidor, meça os três ângulos internos dos triângulos 1 e 2 e complete a tabela abaixo. Comparando os resultados com os ângulos internos do triângulo padrão, o que você observa?

| | Ângulo 1 | Ângulo 2 | Ângulo 3 |
|---|---|---|---|
| Triângulo 1 | 83° | 56° | 41° |
| Triângulo 2 | 83° | 56° | 41° |

Tamanhos diferentes, mesmos ângulos e mesmo formato.

Fonte: dados da pesquisa

O professor, então, formalizou a definição de triângulos semelhantes.

| |
|---|
| Dois triângulos são semelhantes se os três ângulos são ordenadamente congruentes e se os lados homólogos são proporcionais. |

A seguir, os grupos deveriam calcular as razões entre os lados correspondentes do triângulo 1 e do triângulo padrão, bem como do triângulo 2 e do triângulo padrão, completando uma tabela e analisando os resultados obtidos. Para a montagem de um dos triângulos, eles já haviam feito esse cálculo, porém, sem uma análise mais detalhada.

Todos os grupos observaram que, tanto em relação aos triângulos 1 e padrão, como em relação aos triângulos 2 e padrão, os resultados dos cálculos eram os mesmos. Apenas o grupo 3 soube dizer que tratava-se da razão de semelhança (Figura 44). Nesse momento, o professor confirmou a conclusão do grupo 3 e explicou aos demais grupos que o resultado encontrado nos cálculos é a razão de semelhança entre os segmentos.

Figura 44 – Cálculo das razões entre os lados dos triângulos - grupo 3

| | Razão 1 | Razão 2 | Razão 3 |
|---|---|---|---|
| Triângulo 1/Triângulo padrão | $\frac{15}{10} = 1{,}5$ | $\frac{18}{12} = 1{,}5$ | $\frac{12}{8} = 1{,}5$ |
| Triângulo 2/Triângulo padrão | $\frac{5}{10} = 0{,}5$ | $\frac{6}{12} = 0{,}5$ | $\frac{4}{8} = 0{,}5$ |

Que os resultados são sempre iguais para os pares de triângulo. Dá-se o nome de razão de semelhança

Fonte: dados da pesquisa

O passo seguinte da sequência didática trata da obtenção da razão de semelhança através das medidas do perímetro e altura dos triângulos.

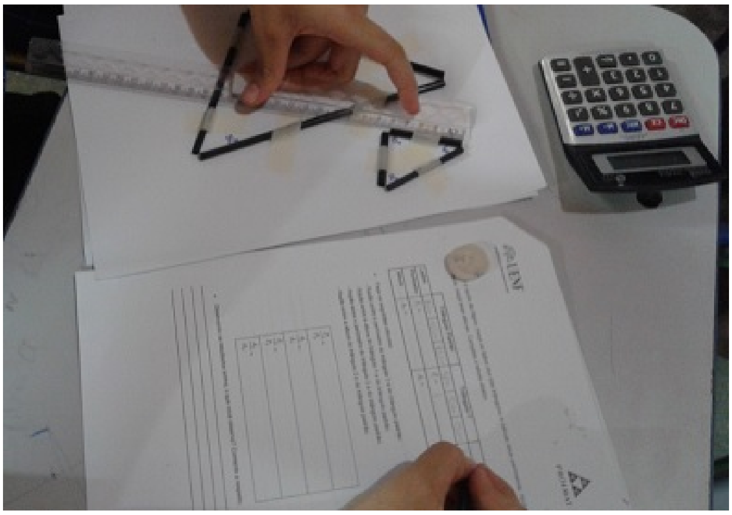
Foi solicitado aos grupos que calculassem os perímetros dos três triângulos, bem como medissem suas alturas (Figuras 45 e 46).

O questionamento de um dos alunos a respeito da definição de perímetro, fez com que outros alunos também revelassem o desconhecimento do assunto. O professor, então, perguntou quantos alunos sabiam o que era o perímetro de um polígono e constatou que, dos 20 alunos, apenas 5 sabiam. Assim, esclareceu aos demais a definição de perímetro de um polígono:

| O perímetro de um polígono é a soma das medidas de seus lados. |
|---|

O professor também orientou os alunos quanto à medição das alturas. Esclareceu que deveriam tomar como bases dos triângulos, lados correspondentes, bem como deveriam posicionar a régua perpendicularmente às bases, ainda que visualmente.

Figura 45 – Medições dos lados e alturas dos triângulos - grupo 4



Fonte: autoria própria

Figura 46 – Cálculo do perímetro e altura dos triângulos - grupo 1

| | Triângulo Padrão | | | Triângulo 1 | | | Triângulo 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Lados** | 8 | 10 | 12. | 15 | 18 | 12 | 4 | 5 | 6. |
| **Perímetro** | $P_P =$ 30 | | | $P_1 =$ 45 | | | $P_2 =$ 15 | | |
| **Altura** | $A_P =$ 9,8 | | | $A_1 =$ 15 | | | $A_2 =$ 5 | | |

Fonte: dados da pesquisa

Após calcularem os perímetros e medirem as alturas dos triângulos, os grupos fizeram os seguintes cálculos (Figura 47):

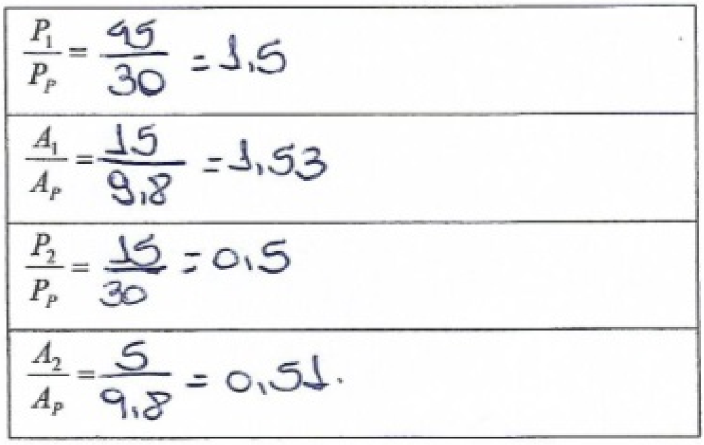
- Razão entre o perímetro do triângulo 1 e do triângulo padrão

- Razão entre a altura do triângulo 1 e do triângulo padrão

- Razão entre o perímetro do triângulo 2 e do triângulo padrão

- Razão entre a altura do triângulo 2 e do triângulo padrão

Figura 47 – Cálculo das razões entre perímetros e alturas dos triângulos - grupo 1



$$\frac{P_1}{P_P} = \frac{45}{30} = 1,5$$

$$\frac{A_1}{A_P} = \frac{15}{9,8} = 1,53$$

$$\frac{P_2}{P_P} = \frac{15}{30} = 0,5$$

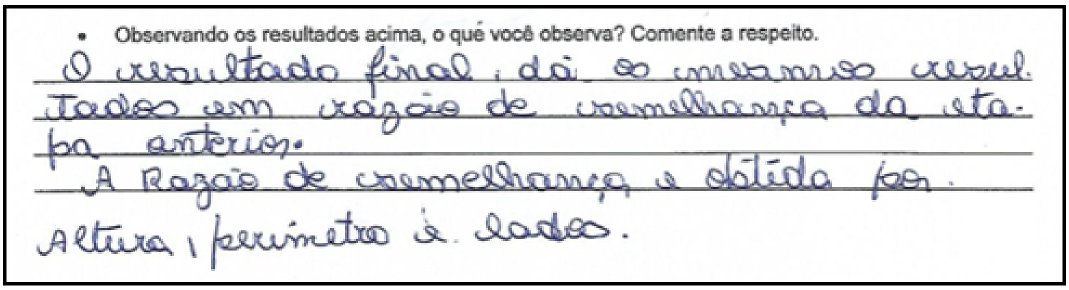
$$\frac{A_2}{A_P} = \frac{5}{9,8} = 0,51.$$

Fonte: dados da pesquisa

Os grupos observaram que os resultados obtidos eram iguais, ou aproximadamente iguais, aos resultados obtidos com o cálculo das razões entre as medidas dos lados correspondentes dos triângulos, efetuados no início da sequência didática. Mais uma vez, o professor esclareceu que a pequena diferença entre os resultados, em alguns casos, deve-se à imprecisão nas medidas.

Os grupos 1, 2 e 4 concluíram que a razão de semelhança entre triângulos pode ser calculada utilizando-se medidas de lados, perímetros ou alturas, como mostra a Figura 48. Apesar dos grupos 3 e 5 observarem a igualdade entre os resultados, não chegaram à mesma conclusão dos outros grupos.

Figura 48 – Conclusão da etapa 2 - grupo 1



- Observando os resultados acima, o quê você observa? Comente a respeito.

O resultado final, dá os mesmos resul-
tados em razão de semelhança da eta-
pa anterior.
A Razão de semelhança é obtida por.
Altura, perimetro e lados.

Fonte: dados da pesquisa

## 3.3 Pós-teste

Após a aplicação das sequências didáticas, os alunos responderam novamente à lista de oito questões aplicada anteriormente (Pré-teste), denominada agora de Pós-teste, com o intuito de se verificar a eficácia da intervenção pedagógica realizada.

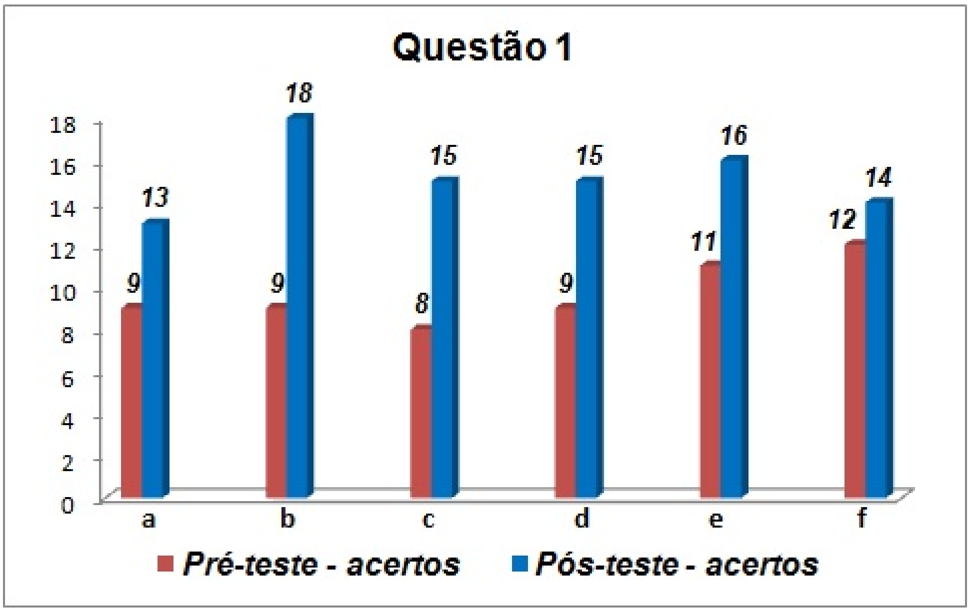
Deve-se ressaltar que o Pós-teste foi aplicado algumas semanas após o término da intervenção pedagógica, de maneira a fazer com que o desempenho dos alunos retratasse, o mais fiel possível, seu real aprendizado.

Assim, será feita uma comparação quantitativa em relação ao número de acertos de cada questão do Pré-teste e do Pós-teste.

**Questão 1**

A questão, composta por seis itens do tipo Verdadeiro ou Falso e que trata da análise de proporções de segmentos em um feixe de retas paralelas, apresentou uma melhora significativa nos itens *b*, *c* e *d*. Os items *a* e *e* apresentaram uma melhora razoável e o item *f* praticamente não teve alteração em relação aos acertos (Figura 49).

Figura 49 – Comparativo de acertos - Pré-teste e Pós-teste - questão 1



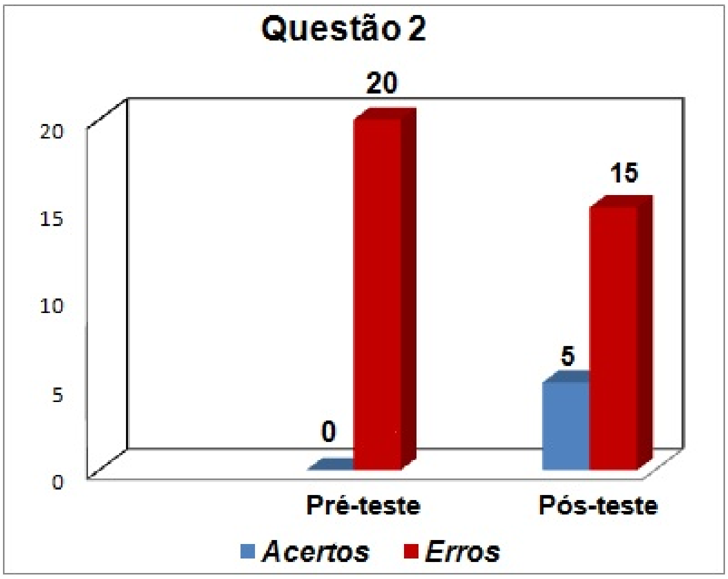

Fonte: dados da pesquisa

Dessa forma, percebe-se uma evolução dos alunos no que diz respeito à identificação de segmentos proporcionais em um feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais.

**Questão 2**

A questão 2, que trata de paralelismo entre retas, foi respondida corretamente por apenas 5 alunos. Porém, pode-se considerar uma razoável melhora no desempenho, tendo em vista que no Pré-teste, essa questão não obteve acertos, como mostra a Figura 50. A maior parte dos alunos continua justificando o não paralelismo entre as retas de forma incorreta.

Figura 50 – Comparativo de acertos/erros - Pré-teste e Pós-teste - questão 2

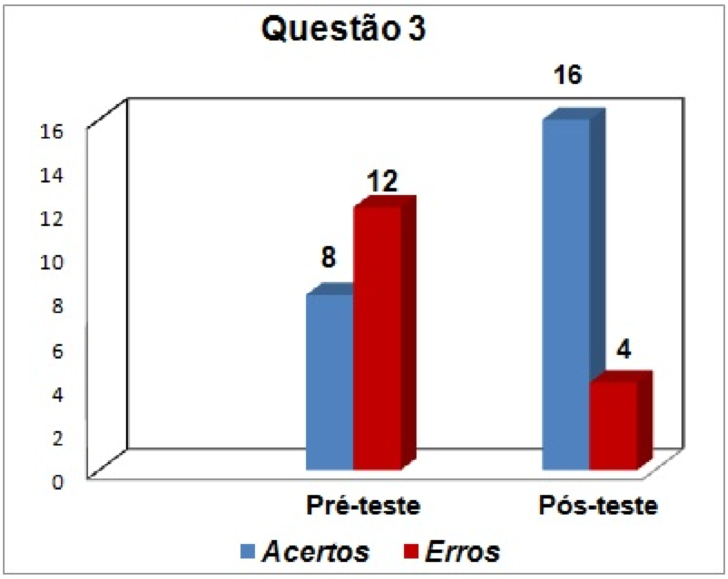



Fonte: dados da pesquisa

**Questão 3**

A questão 3, bastante comum em livros didáticos, obteve uma melhora significativa no desempenho dos alunos. A questão, que apresenta um feixe de 4 retas paralelas cortadas por duas transversais, onde o aluno deveria calcular as medidas de dois segmentos, foi respondida corretamente por 8 alunos no Pré-teste, enquanto no Pós-teste, 16 alunos acertaram a questão (Figura 51).

Figura 51 – Comparativo de acertos/erros - Pré-teste e Pós-teste - questão 3




Fonte: dados da pesquisa

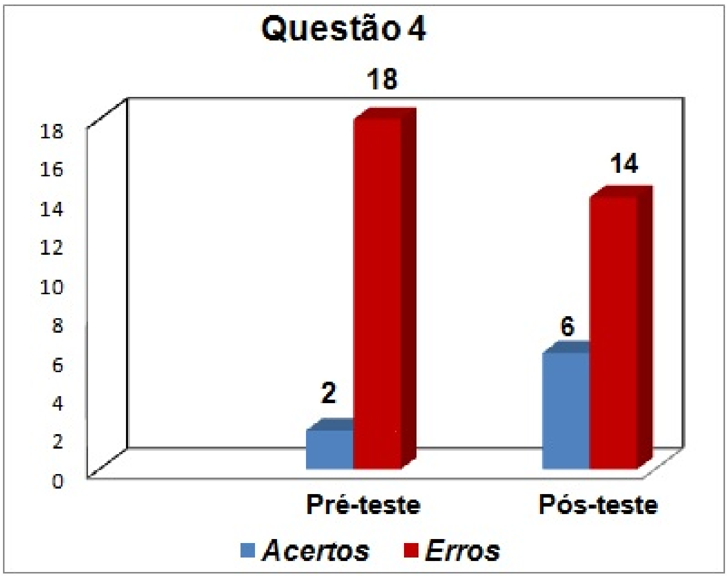
Nota-se nessa questão, uma significativa melhora no desempenho dos alunos, indicando assim, uma evolução na compreensão e aplicação do Teorema de Tales.

**Questão 4**

Essa questão, que apresenta um problema contextualizado, não apresentou melhora significativa. Apenas 6 alunos responderam corretamente no Pós-teste, 4 a mais que no Pré-teste, como mostra a Figura 52.

Fica evidenciado então, através dos resultados obtidos nessa questão, a grande dificuldade que os alunos têm ao se deparar com problemas contextualizados, considerando-se o bom desempenho na questão 3, não contextualizada, mas igual de forma teórica. Nota-se uma deficiência no que diz respeito à interpretação textual, habilidade de grande importância na resolução de problemas matemáticos.

Figura 52 – Comparativo de acertos/erros - Pré-teste e Pós-teste - questão 4



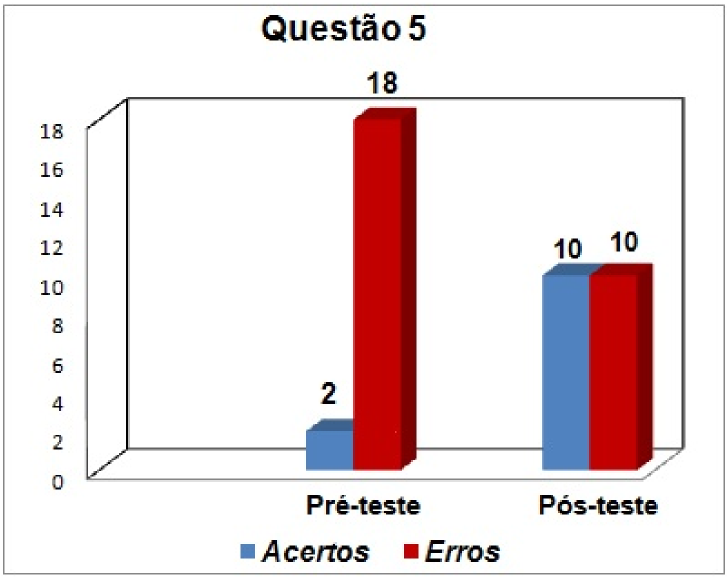

Fonte: dados da pesquisa

**Questão 5**

O desempenho dos alunos nessa questão, cujo objetivo era identificar triângulos semelhantes a um determinado triângulo através das medidas dos lados, apresentou uma melhora bastante significativa (Figura 53).

Na aplicação do Pré-teste, apenas 2 alunos identificaram corretamente os 3 triângulos semelhantes (12 identificaram apenas 2). Após a intervenção pedagógica, 10 alunos conseguiram identificar todos os triângulos semelhantes e 6 alunos identificaram 2 deles.

Figura 53 – Comparativo de acertos/erros - Pré-teste e Pós-teste - questão 5

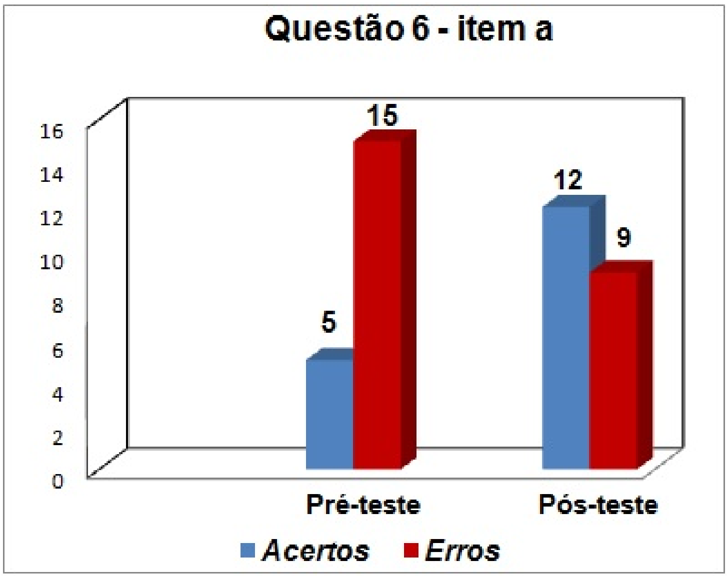



Fonte: dados da pesquisa

**Questão 6**

A questão 6, que apresentava um quadrado inscrito em um triângulo, era formada por dois itens, a e b. O item a, que tratava da identificação de triângulos semelhantes entre si apenas pela observação de ângulos correspondentes congruentes, obteve uma melhora razoável: de 5 acertos no Pré-teste, passou para 12 no Pós-teste (Figura 54). Vale ressaltar que no Pós-teste, 5 alunos concluíram com base na identificação de 2 pares de ângulos congruentes. No Pré-teste, apenas 1 aluno havia concluído dessa forma.

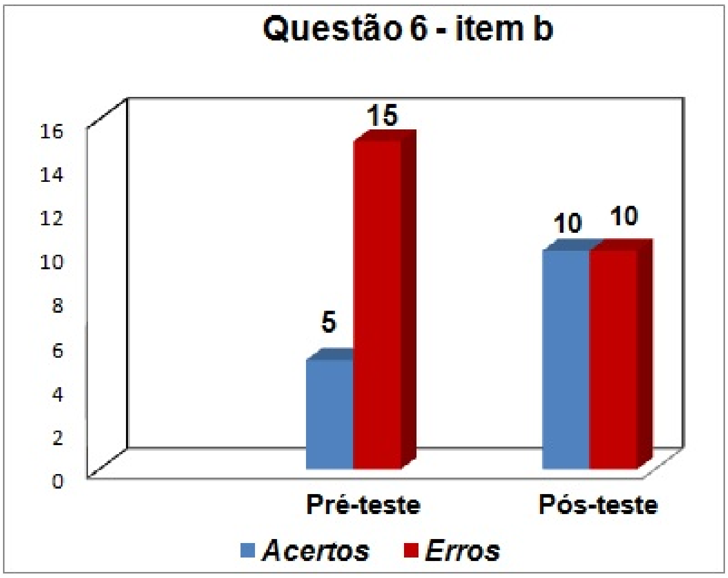
Figura 54 – Comparativo de acertos/erros - Pré-teste e Pós-teste - questão 6 - item a




Fonte: dados da pesquisa

O item b, cujo objetivo era determinar a medida do lado do quadrado, obteve 10 acertos no Pós-teste, contra 5 no Pré-teste (Figura 55). Ao contrário do primeiro teste, onde todos que acertaram o item a também acertaram o item b, 2 alunos que identificaram corretamente os triângulos semelhantes, não conseguiram responder de forma correta este item.

Figura 55 – Comparativo de acertos/erros - Pré-teste e Pós-teste - questão 6 - item b



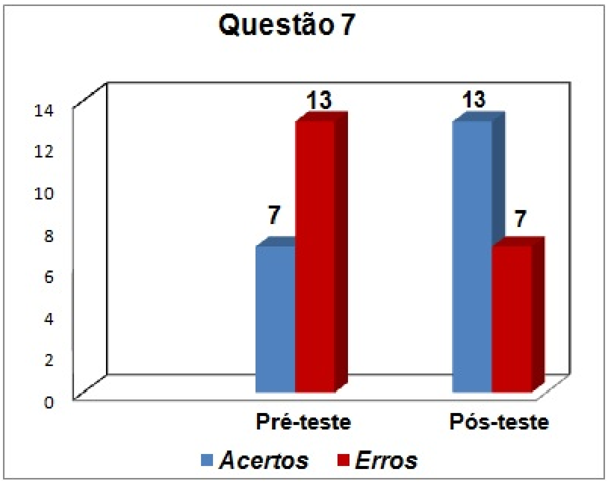

Fonte: dados da pesquisa

**Questão 7**

Essa questão apresentava um triângulo ABC, cortado por uma reta paralela à sua base $\overline{BC}$ nos pontos E, pertencente ao lado $\overline{AB}$, e ponto D, pertencente ao lado $\overline{AC}$. O aluno deveria determinar a medida do segmento $\overline{ED}$.

Treze alunos responderam corretamente, percebendo que os triângulos ABC e AED são semelhantes. No Pré-teste, apenas 7 alunos acertaram a questão (Figura 56).

Figura 56 – Comparativo de acertos/erros - Pré-teste e Pós-teste - questão 7




Fonte: dados da pesquisa

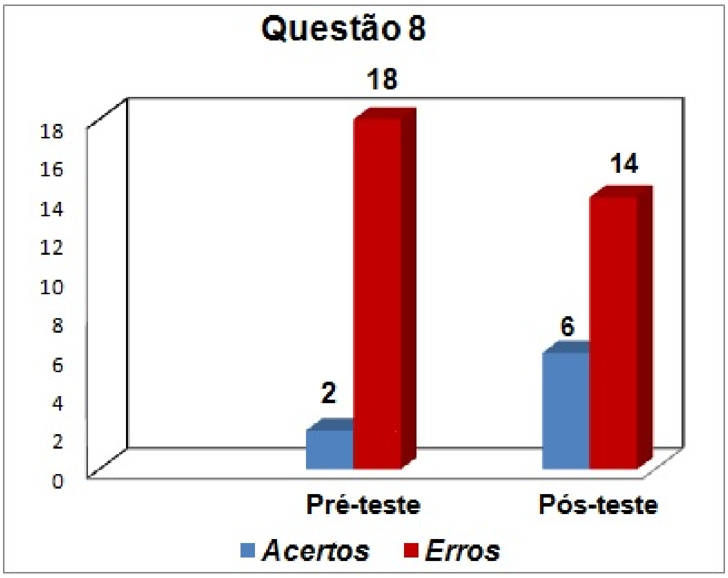
Percebe-se, então, uma evolução na percepção dos alunos quanto à identificação da semelhança entre triângulos, confirmando os resultados obtidos na questão 5, que tratava explicitamente do assunto.

**Questão 8**

Na questão 8, contextualizada, comparando-se com a quantidade de acertos obtidos no Pré-teste, pode-se considerar uma razoável evolução, ainda que em relação ao total de alunos, a número de acertos seja pequeno. Dois alunos obtiveram êxito no primeiro teste, enquanto que no segundo teste, 6 alunos acertaram a questão, como mostra a Figura 57.

Mais uma vez, evidencia-se a dificuldade que os alunos têm em lidar com problemas contextualizados, como ocorreu na questão 4, também contextualizada.

Figura 57 – Comparativo de acertos/erros - Pré-teste e Pós-teste - questão 8




Fonte: dados da pesquisa

# Capítulo 4

# Conclusão

Após a aplicação das sequências didáticas apresentadas neste trabalho, foi possível perceber uma grande evolução dos alunos em relação aos temas propostos. Ao se valorizar e utilizar os conhecimentos prévios dos alunos a respeito da ideia de proporcionalidade, o aprendizado foi favorecido, ocorrendo de forma natural, significativa.

A análise dos resultados do Pré-teste deixou claro a grande dificuldade que os alunos apresentavam com relação aos assuntos abordados, apesar de ser um conteúdo já estudado no semestre anterior.

Nas questões relativas ao tema Teorema de Tales, notou-se um desconhecimento por parte da maioria dos alunos com relação à proporcionalidade entre segmentos correspondentes em um feixe de retas paralelas cortadas por uma transversal (questão 1) e, consequentemente, sua aplicação em questões teóricas e conceituais, obteve um baixo índice de acertos (questões 2 e 3). Esse quadro se agrava quando se apresenta uma questão contextualizada (questão 4).

Com relação ao tema Semelhança de Triângulos, notou-se com o Pré-teste uma grande dificuldade na identificação de triângulos semelhantes (questões 1 e 2), além do relacionamento entre lados homólogos de dois triângulos semelhantes (questões 2 e 3). Em relação à contextualização, as dificuldades aumentam ainda mais (questão 4).

No início da intervenção pedagógica, as respostas às situações-problema apresentadas deixaram evidente a existência do subsunçor proporcionalidade na estrutura cognitiva dos alunos, fator essencial para a eficácia das sequências didáticas aplicadas. Percebeu-se então, que os alunos possuíam a noção de proporcionalidade, sabendo aplicá-la em situações de seu dia-a-dia, não relacionadas à matemática.

Após a intervenção pedagógica, verificou-se através dos resultados obtidos no Pós-teste, um significativo avanço dos alunos em relação aos temas propostos.

De acordo com Moreira e Masini (1982, p.15), para que se evidencie a aprendizagem significativa, devem ser utilizadas questões e problemas que "requeiram máxima transformação do conhecimento existente". Ainda segundo Moreira e Masini (1982, p.15), com relação à verificação da ocorrência da aprendizagem significativa, "testes de compreensão devem, no mínimo, ser fraseados de maneira diferente e apresentados num contexto de alguma forma diverso daquele originalmente encontrado no material instrucional".

Assim, tendo em vista que o tipo de sequência didática executada (de caráter investigativo, levando o aluno à observação e conclusão dos conceitos envolvidos) e as questões apresentadas no Pós-teste (questões objetivas e discursivas, contextualizadas e não contextualizadas, que necessitavam da aplicação de conceitos e cálculos) diferem em sua forma e objetivos, fica evidenciada a aprendizagem significativa dos temas Teorema de Tales e Semelhança de triângulos.

Dessa forma, cabem algumas observações referentes às etapas do processo de efetivação da aprendizagem significativa, quando da execução das sequências didáticas:

• Na sequência didática sobre o Teorema de Tales, ao realizarem as construções, efetuarem as medições e os cálculos, e observarem os resultados, estima-se que o subsunçor *proporcionalidade*, de caráter mais geral, desenvolve-se e dá origem ao ***subsunçor segmentos proporcionais***, mais específico, fixando-se na estrutura cognitiva do aluno.

• Na sequência didática sobre Semelhança de Triângulos, ao calcularem as razões entre os lados correspondentes dos triângulos, compararem os resultados e observarem que eram iguais, estima-se que o subsunçor *segmentos proporcionais* dá origem ao ***subsunçor razão de semelhança***, ainda mais específico, tomando lugar na estrutura cognitiva do aluno.

De acordo com a teoria de Ausubel, a utilização de atividades que levem o aluno à investigação e construção de conceitos e ideias que estejam ancoradas em subsunçores apropriados, facilita o processo de ensino-aprendizagem, fazendo com que a aprendizagem seja realmente significativa. Assim, percebe-se que a compreensão e aprendizado do tema Teorema de Tales foram favorecidos pela existência do subsunçor **proporcionalidade** na estrutura cognitiva dos alunos, bem como a compreensão e aprendizado do tema Semelhança de Triângulos, foram favorecidos pela existência do **subsunçor segmentos proporcionais** na estrutura cognitiva dos alunos, obtido com a sequência didática anterior, sobre Teorema de Tales.

Deve-se ressaltar também que, durante a intervenção pedagógica, foi possível notar o interesse dos alunos em executar as sequências didáticas e chegar às conclusões acerca dos questionamentos feitos. Isso mostra a disposição por parte dos alunos em aprender.

A partir da observação e dos resultados obtidos nesse trabalho, conclui-se que as sequências didáticas elaboradas segundo a Teoria da Aprendizagem Significativa, favoreceram consideravelmente a assimilação e aprendizado dos temas propostos, pelos alunos da Educação de Jovens e Adultos, em sua maioria carente de conhecimentos prévios e fora dos bancos escolares há alguns anos. Porém, o baixo índice de acertos nas questões contextualizadas quando da aplicação do Pós-teste, aponta para a necessidade da utilização também de sequências didáticas com essa característica, procurando estimular no aluno a percepção de como proceder em questões desse tipo. Considera-se também benéfico para uma aprendizagem significativa, a utilização, quando possível, de recursos tecnológicos, presentes no dia-a-dia da maioria dos alunos.

Por fim, espera-se que esse trabalho possa sinalizar a professores que atuam na Educação de Jovens e Adultos a necessidade de se utilizar formas de ensino adequadas para essa modalidade, bem como mostrar que atividades pautadas na teoria de Ausubel podem alcançar resultados satisfatórios, promovendo, realmente, uma aprendizagem significativa para os alunos da EJA, tendo em vista que o conteúdo a ser aprendido ancora-se em conhecimentos que os alunos já possuem, naturalmente, em sua estrutura cognitiva. Além disso, despertam o interesse e motivação pelo aprendizado, vindo a diminuir, consequentemente, o alto índice de evasão escolar existente nessa modalidade de ensino.

# Referências


ANJOS, R. V. dos; SILVEIRA, D. N. Aprendizagem significativa na educação de jovens e adultos: as possibilidades da modelagem matemática. 2013. Disponível em: <http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/1014.pdf>. Citado na página 31.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. *Psicologia Educacional*. 2. ed. [S.l.: s.n.], 1980. Citado na página 30.

BONGIOVANNI, V. O teorema de tales: uma ligação entre o geométrico e o numérico. *Revista Eletrônica de Educação Matemática - Universidade Federal de Santa Catarina*, Vol.2, n. 1, 2007. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12993/12094>. Citado na página 32.

BRAATHEN, P. C. Aprendizagem mecânica e aprendizagem significativa no processo de ensino-aprendizagem de química. *Revista Eixo*, Vol. 1, n. 1, p. 63–69, 2012. Citado na página 29.

BRASIL. *Parecer CNE/CEB n 11/2000. Ministério da Educação / Conselho Nacional de Educação*. Brasilia, DF, 2000. Citado na página 24.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília, DF, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 25.

BRASIL. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Ministério da Educação e Cultura*. Brasilia, DF, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 23.

BRUM, W. P.; SCHUHMACHER, E. O teorema de tales por meio da utilização de maquetes sob a ótica da teoria da aprendizagem significativa: contribuições para o ensino de matemática. 2012. Citado na página 32.

FERNANDES, E. *David Ausubel e a aprendizagem significativa*. 2011. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/262/david-ausubel-e-a-aprendizagem-significativa>. Citado na página 26.

LEMOS, E. dos S. A aprendizagem significativa: estratégias facilitadoras e avaliação. *Aprendizagem Significativa em Revista*, p. 25–35, 2011. Citado na página 28.

MATOS, M. do R. M. Educação de jovens e adultos: uma prática educativa na diversidade. 2009. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1559-8.pdf>. Citado na página 17.

MONTESSORI, I. 2013. Disponível em: <http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:4c7RlisCSPoJ:institutomontessoripn.com.br/professor/wp-content/uploads/2015/03/LISTA-SEMELHANCA-DE-TRIANGULOS-E-TEOREMA-DE-PITAGORAS.doc+&cd=8&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br>. Citado na página 52.

MOREIRA, M. A. *A Teoria da Aprendizagem Significativa e sua implementação em sala de aula*. [S.l.]: Editora Universidade de Brasília, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 53.

MOREIRA, M. A. O que é afinal aprendizagem significativa? 2010. Disponível em: <http://moreira.if.ufrgs.br/oqueeafinal.pdf>. Citado 3 vezes nas páginas 25, 28 e 29.

MOREIRA, M. A. Mapas conceituais e aprendizagem significativa. p. 41–54, 2012. Disponível em: <http://www.faatensino.com.br/wp-content/uploads/2014/04/Aprendizagem-significativa-Organizadores-pr%C3%A9vios-Diagramas-V-Unidades-de-ensino-potencialmente-significativas.pdf#page=41>. Citado na página 30.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. F. S. *Aprendizagem Significativa - A Teoria de David Ausubel*. [S.l.]: Editora Moraes Ltda, 1982. Citado 4 vezes nas páginas 25, 30, 71 e 72.

OLIVEIRA, R. L. P. Educação de jovens e adultos: o direito à educação. In: *X Seminário de Educação de Jovens e Adultos*. Campinas-SP: [s.n.], 2007. Disponível em: <http://alb.org.br/arquivo-morto/edicoes_anteriores/anais16/prog_pdf/prog01_01.pdf>. Citado na página 22.

PAULA, G. M. C. de; BIDA, G. L. A importância da aprendizagem significativa. 2015. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1779-8.pdf>. Citado na página 17.

PESCO, D. U.; ARNAUT, R. G. T. *Geometria Básica*. 4ª. ed. [S.I.]: Fundação CECIERJ, 2009. Vol.1. Citado 11 vezes nas páginas 32, 33, 34, 35, 36, 90, 92, 93, 95, 96 e 98.

PIERRO, M. C. D.; JOIA, O.; RIBEIRO, V. M. ao. Visões da educação de jovens e adultos no brasil. *Caderno Cedes, ano XXI*, n. 55, p. 58–77, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.

PINTO Álvo V. *Sete lições sobre educação de adultos*. 8ª. ed. [S.I.]: Cortez Editora - São Paulo, 1993. Citado na página 31.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. de. *Metodologia do Trabalho Científico: Métodos e Técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico*. 2ª. ed. Novo Hamburgo-RS: Universidade FEEVALE, 2013. Citado na página 37.

RIBEIRO, E. da C. *Material Concreto para o ensino de Trigonometria*. [S.l.], 2011. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/bitstream/handle/1843/BUOS-94QP5J/material_concreto_para_o_ensino_de_trigonometria.pdf?sequence=1>. Citado na página 55.

RIO DE JANEIRO. *Matemática e suas tecnologias - Módulo I*. Governo do Estado do Rio de Janeiro: Secretaria de Estado de Educação, 2012. v. 2. Citado na página 39.

RIO DE JANEIRO. *Nova EJA: Manual de Orientações*. Governo do Estado do Rio de Janeiro, 2013. Citado na página 23.

RODRIGUES, F. C.; GAZIRE, E. S. Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 07, n. nº 2, 2012. Citado na página 55.

SALLE, R. L. 2013. Disponível em: <http://www.lasalle.edu.br/public/uploads/publications/sobradinho/ffaac4d0af89eda3d7680b14f2f97cff.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 47.

SILVA, H. T. R. da; MOURA, T. M. S. Educação de jovens e adultos - eja: Desafios e práticas pedagógicas. *Revista eletrônica interdisciplinar da Univar, p. 31-36.*, Vol. 3, n. 9, p. 31–36, 2013. Disponível em: <http://revista.univar.edu.br/index.php/interdisciplinar/article/view/53>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.

SILVA, J. A. F. da. Refletindo sobre as dificuldades de aprendizagem na matemática: algumas considerações. *Universidade Católica de Brasília - UCB*, Monografia, 2005. Nenhuma citação no texto.

SILVA, W. S. da. *Uma Proposta Didática para o Ensino das Cônicas à luz da Aprendizagem Significativa de David Ausubel*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Campina Grande, 2017. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150200671>. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.

SOARES, L. H. *Aprendizagem Significativa na Educação Matemática: uma proposta para a aprendizagem de Geometria Básica.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, 2009. Citado na página 30.

STRELHOW, T. B. Breve historia sobre a educação de jovens e adultos no brasil. Revista HISTEDBR On-line, Campinas, n. 38, p. 49–59, 2010. Acesso em 12 de fev. de 2017. Citado 4 vezes nas páginas 20, 21, 22 e 23.

TAVARES, R. (Ed.). *Aprendizagem significativa, codificação dual e objetos de aprendizagem*. 2010. (Revista Brasileira de Informática na Educação, nº 2). Disponível em: <http://www.br-ie.org/pub/index.php/rbie/article/view/1205/1114>. Citado na página 31.

VALADARES, J. A teoria da aprendizagem significativa como teoria construtivista. *Aprendizagem Significativa em Revista*, p. 36–57, 2011. Citado na página 28.

# Apêndices

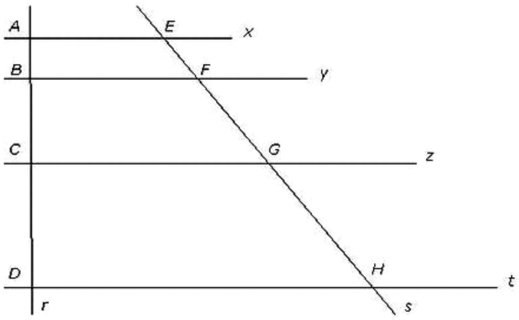
# APÊNDICE A

# Pré-teste / Pós-teste

**Teorema de Tales e Semelhança de Triângulos - PRÉ-TESTE**

Aluno: ____________________________________________________________

1) Analisando a figura abaixo, classifique as afirmações como V(verdadeiro) ou F (falso).




x // y // z // t

a) (   ) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{FG}}$

b) (   ) $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{FG}}{\overline{GH}}$

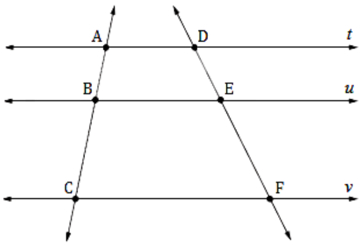
c) (   ) $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{EG}}{\overline{GH}}$

d) (   ) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{FG}}$

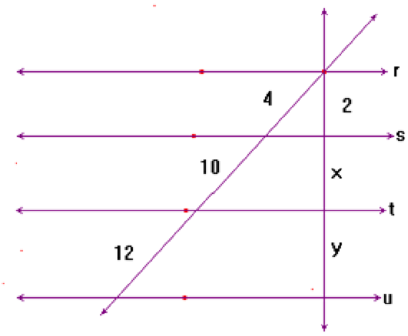
e) (   ) $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{FG}}{\overline{EH}}$

f) (   ) $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{FH}}{\overline{GH}}$

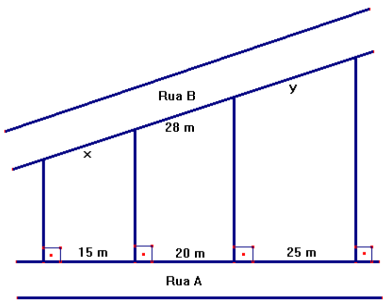
2) Sendo $\overline{AB} = 8$, $\overline{DE} = 10$, $\overline{BC} = 20$ e $\overline{EF} = 24$, podemos afirmar que as retas t, u e v são paralelas? Justifique.



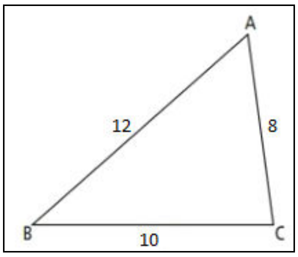

3) Determine x e y, sendo as retas r, s, t e u paralelas.

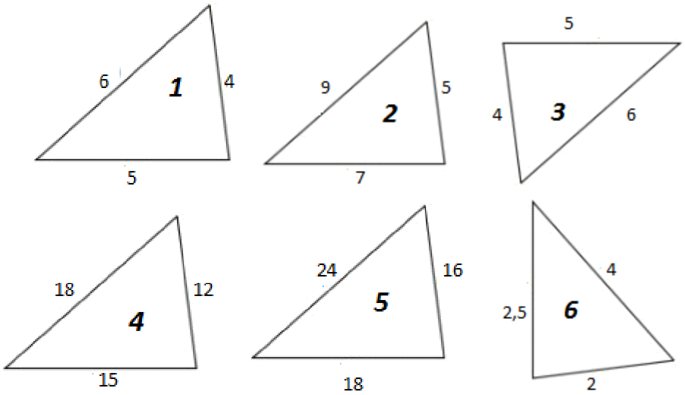



4) A figura indica três lotes de terreno com frente para a rua A e para rua B. As divisas dos lotes são perpendiculares à rua A. As frentes dos lotes 1, 2 e 3 para a rua A, medem, respectivamente, 15 m, 20 m e 25 m. A frente do lote 2 para a rua B mede 28 m. Qual é a medida da frente para a rua B dos lotes 1 e 3?



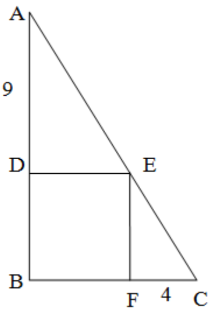
5) Seja o triângulo ABC abaixo. Identifique quais triângulos são semelhantes ao triângulo ABC.




Resposta: ______________________________________________________________

6) O triângulo ABC é retângulo em B e o quadrilátero DEFB é um quadrado. Sabendo que $\overline{AD} = 9$ cm e $\overline{CF} = 4$ cm, faça o que se pede:



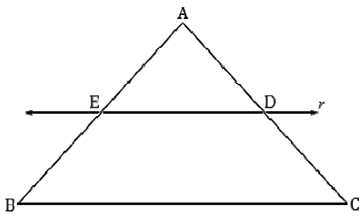

a) Existem triângulos semelhantes na figura? Se existirem, diga quais são, justificando.

______________________________________________________________

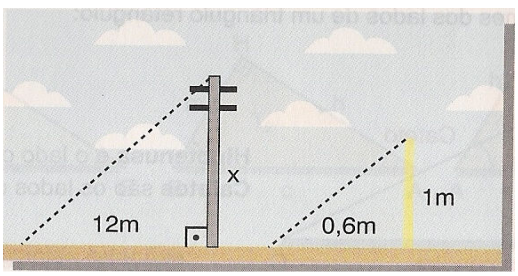
______________________________________________________________

b) Determine a medida do lado do quadrado.

7) Na figura $\overline{ED} // \overline{BC}$. Se $\overline{AB} = 12$ cm, $\overline{BC} = 14$ cm e $\overline{BE} = 6$ cm, qual é o valor de $\overline{ED}$ ?




8) A sombra de um poste vertical, projetada pelo sol sobre um chão plano, mede 12 m. Nesse mesmo instante, a sombra de um bastão vertical de 1 m de altura mede 0,6 m. A altura do poste é:



# APÊNDICE B

# Sequência Didática 1 - Teorema de Tales

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

PROFMAT

Grupo _____

Alunos: ______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________________

**Sequência Didática 1 - Teorema de Tales**

Cada grupo está recebendo o seguinte material:

1) Duas folhas pautadas;
2) Uma régua;
3) Uma calculadora.

Agora, faça o que se pede:

**Primeira construção**

- Na folha pautada, trace três retas paralelas, r, s e t, sobre as linhas da folha.

- Trace duas retas transversais às retas r, s e t, marcando os pontos de intersecção $A$ e $A'$ sobre a reta r, os pontos $B$ e $B'$ sobre a reta s, e os pontos $C$ e $C'$ sobre a reta t.

- Meça os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$. Complete a tabela:

| | | |
|---|---|---|
| $\overline{AB}$ = | $\overline{BC}$ = | $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ = |
| $\overline{A'B'}$ = | $\overline{B'C'}$ = | $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$ = |

**Tabela 1**

- Analisando os resultados de $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ e de $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$ na tabela 1, o que você observa?

______________________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________________

**Segunda construção**

- Aumente os espaços entre as retas paralelas, repita os passos anteriores e complete a tabela abaixo:

| | | |
|---|---|---|
| $\overline{AB}$ = | $\overline{BC}$ = | $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ = |
| $\overline{A'B'}$ = | $\overline{B'C'}$ = | $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$ = |

**Tabela 2**

- Analisando os resultados de $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ e de $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$ na tabela 2, o que você observa?

___

___

___

- Comente a respeito dos resultados obtidos nas etapas 1 e 2. Se você mudar novamente as distâncias entre as retas paralelas e refizer as medições e cálculos, o que você acha que irá ocorrer? Justifique.

___

___

___

___

___

___

___

# APÊNDICE C

# Sequência Didática 2 - Semelhança de Triângulos

Grupo _____

Alunos: ____________________________________________________________________________

____________________________________________________________________________

**Sequência Didática 2 - Semelhança de Triângulos**

Cada grupo está recebendo o seguinte material:

1) Uma folha com um triângulo desenhado, denominado triângulo padrão;
2) Nove canudos de tamanhos diversos;
3) Uma régua;
4) Um transferidor.
5) Duas folhas tamanho A4.
6) Um rolo de fita crepe

Agora, faça o que se pede:

- Com os canudos recebidos, monte sobre a folha A4 dois triângulos (triângulo 1 e triângulo 2), com medidas proporcionais ao triângulo da figura (triângulo padrão).
- Com o auxílio do transferidor, meça os três ângulos internos dos triângulos 1 e 2 e complete a tabela abaixo. Comparando os resultados com os ângulos internos do triângulo padrão, o que você observa?

| | **Ângulo 1** | **Ângulo 2** | **Ângulo 3** |
|---|---|---|---|
| **Triângulo 1** | | | |
| **Triângulo 2** | | | |

____________________________________________________________________________

____________________________________________________________________________

- Calcule a razão entre os lados correspondentes do triângulo 1 e do triângulo padrão, bem como do triângulo 2 e do triângulo padrão e complete a tabela. O que você observa? Que nome damos aos resultados obtidos?

| | **Razão 1** | **Razão 2** | **Razão 3** |
|---|---|---|---|
| **Triângulo 1/Triângulo padrão** | | | |
| **Triângulo 2/Triângulo padrão** | | | |

____________________________________________________________________________

____________________________________________________________________________

____________________________________________________________________________

____________________________________________________________________________

- Com a ajuda da régua, meça os lados dos três triângulos e calcule seus perímetros. Ainda com a régua, meça suas alturas. Complete a tabela abaixo.

| | **Triângulo Padrão** | | | **Triângulo 1** | | | **Triângulo 2** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Lados** | | | | | | | | | |
| **Perímetro** | $P_P =$ | | | $P_1 =$ | | | $P_2 =$ | | |
| **Altura** | $A_P =$ | | | $A_1 =$ | | | $A_2 =$ | | |

- Faça os seguintes cálculos:
  - Razão entre o perímetro do triângulo 1 e do triângulo padrão;
  - Razão entre a altura do triângulo 1 e do triângulo padrão;
  - Razão entre o perímetro do triângulo 2 e do triângulo padrão;
  - Razão entre a altura do triângulo 2 e do triângulo padrão;

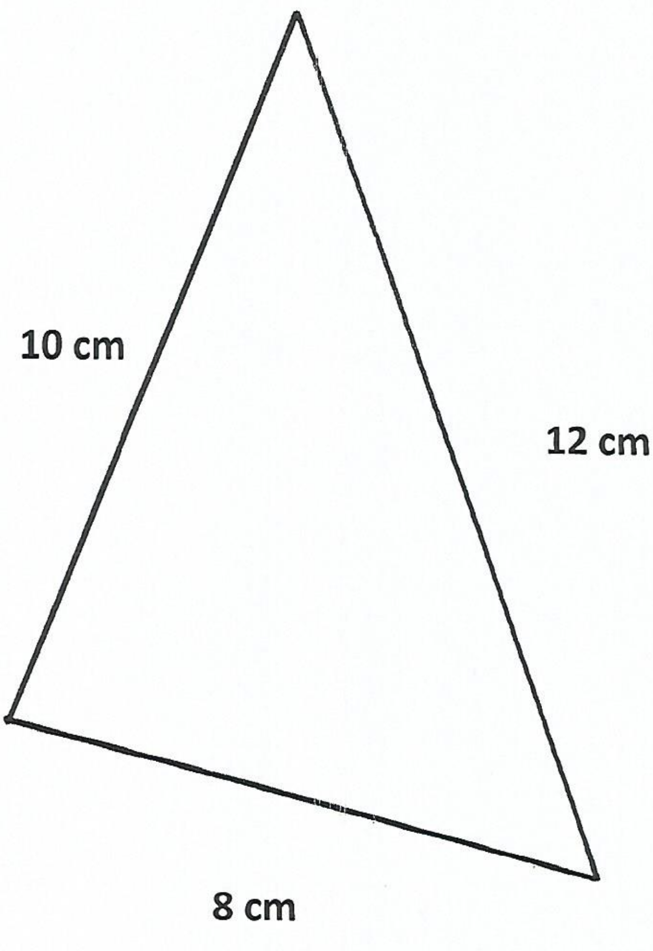
| |
|---|
| $\frac{P_1}{P_P} =$ |
| $\frac{A_1}{A_P} =$ |
| $\frac{P_2}{P_P} =$ |
| $\frac{A_2}{A_P} =$ |

- Observando os resultados acima, o que você observa? Comente a respeito.

# APÊNDICE D

# Triângulo Padrão

# Triângulo Padrão



# Anexos

# ANEXO A

# TEOREMA DE TALES - demonstração do Teorema 1

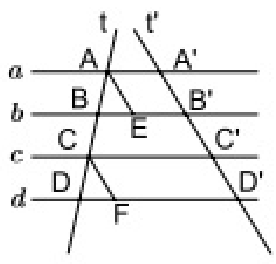
**Teorema 1:**

*Se um feixe de paralelas tem duas transversais, então os segmentos congruentes de uma tem como correspondentes segmentos congruentes na outra.*

**Demonstração**

Seja um feixe de retas paralelas com duas transversais (Figura 58). Temos que *a // b // c // d* e AB $\equiv$ CD (hipótese). Tracemos pelos pontoas A e C os segmentos AE e CF, tal que *AE // t'* e *CF // t'*. Temos que AE $\equiv$ A'B' e CF $\equiv$ C'D' (1), ja que são lados opostos do paralelogramo AEB'A' e CFD'C'.

Figura 58 – Teorema 1 - demonstração




Fonte: (PESCO; ARNAUT, 2009, p.144)

Então:

$$\Delta \text{ ABE} \equiv \Delta \text{ CDF}$$

pois

$$\begin{cases} AB \equiv CD \\ A\widehat{B}E \equiv C\widehat{D}F \\ B\widehat{A}E \equiv D\widehat{C}F \end{cases}$$

(caso ALA) o que implica,

$$\text{AE} \equiv \text{CF}$$

de (1)

$$\text{A'B'} \equiv \text{C'D'}$$

# ANEXO B

# SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS - Provas

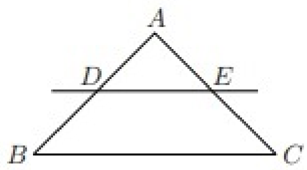
**Teorema Fundamental:**

*Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e encontra os outros dois lados em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.*

**Prova:**

Seja $\overleftrightarrow{DE}$ a reta paralela ao lado *BC* do triângulo *ABC* (Figura 59). Vamos provar que $\Delta$*ADE*$\equiv\Delta$*ABC*.

Figura 59 – Triângulo cortado por uma reta paralela a um dos lados

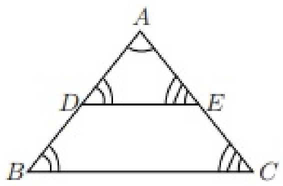



Fonte: (PESCO; ARNAUT, 2009, p.155)

Para provarmos essa semelhança, precisamos provar que eles têm ângulos ordenadamente congruentes e lados homólogos proporcionais.

1) Os três ângulos ordenadamente congruentes (Figura 60).

Figura 60 – Ângulos ordenadamente congruentes



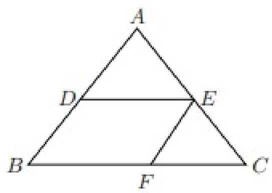

Fonte: (PESCO; ARNAUT, 2009, p.156)

De fato,

$$\begin{cases} \widehat{A} \equiv \widehat{A} \text{ (comum)} \\ \widehat{D} \equiv \widehat{B} \text{ (correspondentes)} \\ \widehat{E} \equiv \widehat{C} \text{ (correspondentes)} \end{cases}$$

2) Os lados homólogos são proporcionais (Figura 61).

Figura 61 – Lados homólogos proporcionais




Fonte: (PESCO; ARNAUT, 2009, p.156)

De fato, pela hipótese, temos

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} (1)$$

Tracemos *EF // AB*. Temos:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}} (2)$$

Temos que o quadrilátero *DBFE* é um paralelogramo e, portanto, $\overline{BF} = \overline{DE}$ (3). Substituindo (3) em (2), vem:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} (4)$$

Das relações (1) e (4), temos:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$$

e os lados homólogos são proporcionais. Logo, os triângulos *ADE* e *ABC* são semelhantes.

**Casos de Semelhança entre triângulos - Provas**

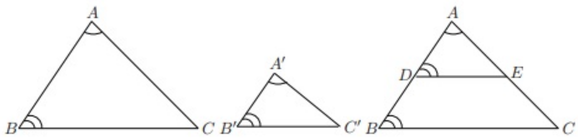
**Primeiro caso: AA $\sim$**

Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes.

*Prova:*

Considere os triângulos *ABC* e *A'B'C'* com $\widehat{A}$ = $\widehat{A'}$ e $\widehat{B}$ = $\widehat{B'}$ (Figura 62). Vamos provar que $\Delta$*ABC*$\sim$ $\Delta$*A'B'C'*.

Figura 62 – Caso de semelhança AA




Fonte: (PESCO; ARNAUT, 2009, 159)

Se o lado *A'B'* fosse congruente ao lado *AB*, os dois triângulos seriam congruentes pelo caso ALA, já que $\widehat{A}$ = $\widehat{A'}$, $\widehat{B}$ = $\widehat{B'}$, $\overline{A'B'}$ = $\overline{AB}$, e a semelhança estaria verificada (K = 1).

Supondo que *AB* não seja congruente a *A'B'*:

Seja $\overline{A'B'}$ < $\overline{AB}$. Tomenos $\overline{AD}$ = $\overline{A'B'}$ sobre o lado *AB* e tracemos *DE* // *BC*. Pelo Teorema Fundamental, vem:

$$\Delta ABC \sim \Delta ADE \ (1)$$

Vamos provar que $\Delta$*ABC* $\equiv$ $\Delta$*A'B'C'*. Temos que:

$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'} \text{ (hipótese)} \\ \overline{AD} = \overline{A'B'} \text{ (construção)} \\ \widehat{D} = \widehat{B} \text{ (correspondentes)} \end{cases}$$

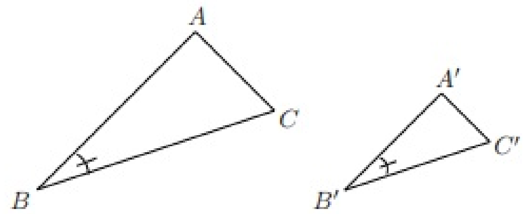
o que implica (ALA) que $\Delta$*ADE* $\equiv$ $\Delta$*A'B'C'* (2).

De (1) e (2), $\Delta$*ABC* $\sim$$\Delta$*A'B'C'*.

**Segundo caso: LAL $\sim$**

Se dois triângulos possuem dois lados correspondentes ordenadamente proporcionais e os ângulos compreendidos entre esses lados são congruentes, então os triângulos são semelhantes. Sejam os triângulos *ABC* e *A'B'C'* (Figura 63).

Figura 63 – Caso de semelhança LAL




Fonte: (PESCO; ARNAUT, 2009, p.160)

Então:

$$\begin{cases} \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \end{cases}$$

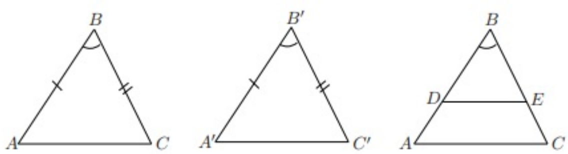
e

$\Delta$*ABC* $\sim\Delta$*A'B'C'*.

*Prova:*

Sejam os triângulos *ABC* e *A'B'C'*. Se *AB*$\equiv$*A'B'*, *BC*$\equiv$*B'C'* e $\widehat{B}$ = $\widehat{B'}$, então (LAL) $\Delta$*ABC* $\sim\Delta$*A'B'C'* (Figura 64).

Figura 64 – Prova: caso LAL




Fonte: (PESCO; ARNAUT, 2009, 160)

Vamos supor que *AB* e *A'B'* não são congruentes e seja $\overline{A'B'}$ < $\overline{AB}$. Tomemos *BD*$\equiv$*A'B'* sobre o lado *AB* e tracemos *DE* paralela ao lado *AC*. Pelo Teorema Fundamental, temos:

$\Delta$*ABC* $\sim\Delta$*A'B'C'* ($*$)

Vamos provar que $\triangle$*BDE* $\equiv\triangle$*A'B'C'*.

De fato, Se *DE* // *AC*, então $\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$ (1).

Por construção, $\overline{BD}$ = $\overline{A'B'}$ (2).

De (1) e (2) $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$ (3), mas, por hipótese, $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ (4).

De (3) e (4) $\frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \Rightarrow \overline{BE}$ = $\overline{B'C'}$.

Logo:

$$\begin{cases} \overline{BD} \equiv \overline{A'B'} \\ \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \\ \overline{BE} \equiv \overline{B'C'} \end{cases}$$

e $\triangle$*BDE* $\equiv\triangle$*A'B'C'* $(**)$

De $(*)$ e $(**)$ vem que: $\triangle$*BDE* $\sim\triangle$*A'B'C'*.

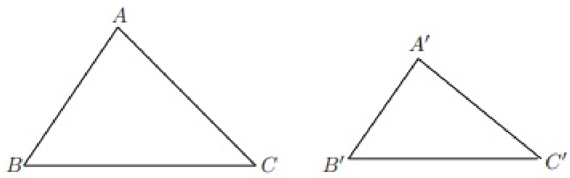
**Terceiro caso: LLL $\sim$**

Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes.

Sejam os triângulos *ABC* e *A'B'C'* (Figura 65) tal que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Figura 65 – Triângulos semelhantes



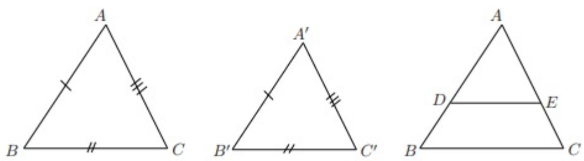

Fonte: (PESCO; ARNAUT, 2009, p.161)

*Prova:*

Considere os triângulos *ABC* e *A'B'C'*, tal que $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ (1). Se os lados *AB* e *A'B'* são congruentes, de (1) que *AC*$\equiv$*A'C'* e *BC*$\equiv$*B'C'*. Daí, $\Delta$*ABC* $\equiv$ $\Delta$*A'B'C'* (LLL) e o teorema está provado.

Vamos supor que *AB* e *A'B'* não são congruentes. Seja então $\overline{A'B'} < \overline{AB}$. Tomemos $\overline{AD} = \overline{A'B'}$ sobre o lado *AB* e tracemos *DE* // *BC* (Figura 66).

Figura 66 – Caso de semelhança LLL




Fonte: (PESCO; ARNAUT, 2009, p.161)

Pelo Teorema Fundamental, temos:

$$\Delta ABC \sim \Delta ADE \text{ (1)}$$

Vamos provar que $\Delta$*ADE* $\equiv\Delta$*A'B'C'*.

De (1), vem que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} \text{ (2)}$$

Por construção, $\overline{AD}$ = $\overline{A'B'}$ (3).

De (2) e (3), vem:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} \text{ (4)}$$

Mas, por hipótese, $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ (5)

De (4) e (5), vem: $\overline{AE}$ = $\overline{A'C'}$ (6) e $\overline{DE}$ = $\overline{B'C'}$ (7), então

$$\begin{cases} \overline{AD} \equiv \overline{A'B'} \text{ (construção)} \\ \overline{AE} \equiv \overline{A'C'} \text{ (6)} \\ \overline{DE} \equiv \overline{B'C'} \text{ (7)} \end{cases}$$

Assim, por LLL, temos $\triangle$*ADE* $\equiv\triangle$*A'B'C'* (8)

De (1) e (8), vem que: $\triangle$*ABC* $\equiv\triangle$*A'B'C'*, caso de congruência LLL.