Letícia Verdinelli Navarro Fagundes

A Espiral Logarítmica como motivação para o aprendizado do logaritmo

Santo André, 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

LETÍCIA VERDINELLI NAVARRO FAGUNDES

A ESPIRAL LOGARÍTMICA COMO MOTIVAÇÃO PARA O APRENDIZADO DO LOGARITMO

Orientador: Prof. Dr. Armando Caputi

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA LETÍCIA VERDINELLI NAVARRO FAGUNDES, E ORIENTADA PELO PROF. DR. ARMANDO CAPUTI.

SANTO ANDRÉ, 2018

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 01 **de** fevereiro **de 20**18**.**

Assinatura do autor: Letícia Verdinelli Massumo Fagundes

Assinatura do orientador: ______________________________

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017
profmat@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Leticia Verdinelli Navarro Fagundes, realizada em 1 de novembro de 2017:

Prof.(a) Dr.(a) **Armando Caputi** (Universidade Federal do ABC) – Presidente

Márcio Fabiano da Silva

Prof.(a) Dr.(a) **Márcio Fabiano da Silva** (Universidade Federal do ABC) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves** (Universidade de São Paulo) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Rafael de Mattos Grisi** (Universidade Federal do ABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Barbara Corominas Valerio** (Universidade de São Paulo) – Membro Suplente

Dedico este trabalho aos meus amados, filho e marido.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador professor Armando Caputi pelas sugestões que contribuíram muito para a realização desse trabalho, aos docentes que ministraram as disciplinas do curso e a minha amiga Thais que ajudou muito para a finalização desta dissertação.

Em especial agradeço ao meu amado marido pela colaboração, incentivo e paciência durante todo o mestrado.

"Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre."

(Paulo Freire)

RESUMO

Neste trabalho, utilizamos a Espiral Logarítmica como motivação para a aprendizagem do logaritmo, um assunto em que os educandos costumam ter muita dificuldade. Apresentamos uma breve história sobre o estudo da Espiral Logarítmica e os Logaritmos, além de algumas manifestações da Espiral Logarítmica na natureza e na arte. No tratamento matemático, conceituamos o logaritmo como a integral da função $1/x$ - isto é, como área sob a hipérbole equilátera - e utilizamos o cálculo diferencial e integral para provar suas principais propriedades. Fazemos um comparativo com a conceituação do logaritmo como inversa da exponencial, que é a abordagem usual no Ensino Médio. Após explorarmos algumas das propriedades mais interessantes da Espiral Logarítmica, concluimos o trabalho propondo uma sequência didática que busca aplicar os conceitos vistos em contextos que façam parte da realidade do aluno, de modo a estimular o interesse pelo conhecimento do assunto tratado.

Palavras-chave: Logaritmo, Espiral Logarítmica, Sequência Didática.

ABSTRACT

In this paper we use the Logarithmic Spiral as a motivation to learn the logarithm, an issue that the students always have a lot of difficulties. We present a brief story about the study of Logarithmic Spiral and the Logarithms as well as some Logarithmic Spiral manifestations in the nature and art. In the Math handling we conceptualize the logarithm as the integral of the function $1/x$ - it means, as the area beneath the equilateral hyperbole - and we use the integral and diferential calculus to prove its main effects. We compare the logarithm concept as the reverse of the exponencial , which is the usual approach in High School. After exploring some very interesting effects of the Logarithmic Spiral we accomplish the paper purposing a following teaching that demands to apply the viewed concepts in contexts which make part of the student reality in a way that it can encourage the interest in knowing the given subject.

Keywords: Logarithm, Logarithmic Spiral, Didactic Sequence.

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

Ao longo de nossa experiência de 12 anos de docência no Ensino da Matemática na Educação Básica, identificamos que existe um pré-conceito das pessoas em geral em relação à matemática. Foi cultuado que a matemática é para poucos, para os melhores, que é algo muito difícil. Assim antes mesmo do aluno entrar em contato com o conteúdo, já existe uma barreira fixada, com isso a aprendizagem se torna bem mais difícil do que deveria ser. O(A) professor(a) antes de começar qualquer conteúdo precisa derrubar essas barreiras e mostrar para os alunos que a matemática não é esse monstro que dizem.

A partir disso, elaboramos este trabalho para sugerir uma abordagem diferente para o ensino do logaritmo, que é um tema polêmico e temido pela maioria dos alunos, geralmente o logaritmo é ensinado como um amontoado de regras que devem ser decoradas e aplicadas de forma mecânica, assim o aluno perde o interesse rápido, pois não vê sentido para aquilo que está sendo ensinado.

Hoje o grande atrativo dos jovens são as redes sociais e a internet, tudo acontece muito rápido e de forma interativa, ao apresentar um conteúdo que fica preso a regras e execução mecânica para resolução de exercícios sem contexto, o aluno perde o interesse e como consequência a aprendizagem não acontece.

O intuito deste trabalho é usar a espiral logarítmica como inspiração para a aprendizagem do logaritmo e suas propriedades. A história da matemática é muito importante para contextualizar e mostrar as motivações da época para criação e estudos, nesse caso, sobre o logaritmo. Foi colocado no primeiro capítulo uma breve história da espiral logarítmica e dos logaritmos e algumas aplicações dos mesmos. No Capítulo 2 temos a demonstração das propriedades do logaritmo usando o Cálculo Integral, uma abordagem da definição de logaritmo usada na Educação Básica e as características e propriedades da Espiral Logarítmica.

A motivação para aprendizagem de algo é muito importante, pois se cria o interesse em conhecer e estudar sobre o assunto. Assim o Capítulo 3 refere-se a sugestões de atividades, ou seja, uma sequência didática, para motivar o aluno sobre o tema abordado, fazendo com que este crie o interesse em aprender sobre os logaritmos.

Com a sugestão dessa sequência didática, acreditamos que o aluno irá ver o logaritmo com outros olhos, percebendo que é um assunto que se relaciona com diversas áreas do conhecimento e tem várias aplicações no nosso dia a dia. Por mais que ele não use este conteúdo na sua vida futura é importante que ele tenha a vontade e curiosidade de aprender e de obter conhecimento sobre esse assunto.

1

UM POUCO DE HISTORIA

1.1 ESPIRAL LOGARÍTMICA

A espiral logarítmica foi estudada por diversos matemáticos, e é conhecida ao longo da história de várias maneiras, como por exemplo, Espiral Áurea, Espiral Equiangular e Spira Mirabilis (Espiral Maravilhosa). Umas das motivações para o estudo dessa espiral é a observação de suas características presentes em diversos lugares na natureza e até mesmo no Universo. Por essa razão estudiosos começaram a se interessar e estudar suas propriedades. Algumas delas são:

- Cada linha reta que atravessa o centro da espiral forma, com esta última, sempre o mesmo ângulo, por isso essa espiral também é conhecida como espiral equiângular.
- Ao percorrer a espiral por arcos iguais em uma mesma reta radial, a distância ao centro aumenta através de uma mesma razão, isto é, seu raio aumenta em uma progressão geométrica.

Nesse capítulo contaremos um pouco da história dessa espiral e dos matemáticos que se dedicaram a estudá-la.

René Descartes (1596-1650) matemático e filosofo, foi talvez o pensador mais influente da modernidade, atuando de maneira engajada na produção de conhecimento de grande valor para a sociedade, tanto em sua época quanto para a posteridade, Descartes se dedicou a buscar a verdade por meio de um método seguro e confiável capaz de produzir conhecimentos claros e distintos, ou seja, evidentes. Para Descartes, a "qualidade" do conhecimento produzido era primordial para ser chamado de científico e só através do método cartesiano era possível produzir ciência. Na matemática, uma de suas principais contribuições foi o sistema cartesiano, que possibilita a junção entre a álgebra e a geometria.

Em 1638, Descartes observou e estudou a espiral logarítmica, que intitulou "espiral equiangular", estudando suas propriedades relacionadas à curva secante a todas as retas que estão no mesmo plano e partem de um mesmo ponto, formando com elas um ângulo constante. Essa descoberta foi compartilhada nas cartas escritas por Descartes a Mersenne.

Torricelli (1608–1647) também deu sua contribuição em 1640, determinando o comprimento do arco dessa espiral. Mais tarde Jacques Bernoulli (1654–1705) foi o matemático que mais avançou no estudo dessa espiral, em 1691 e 1692, publicou na Acta Eruditorum (Opera, t.I, p.442 e p.491) o lema que descreve uma propriedade: A espiral logarítmica não altera seu formato à medida que seu tamanho aumenta. Segundo [13] essa característica é conhecida como auto-similiaridade. Bernoulli escreveu sobre a espiral: “pode ser usada como um símbolo tanto de vigor e constância na adversidade quanto do corpo humano, o qual, após todas as mudanças, até mesmo após a morte, será restaurado ao seu exato e perfeito ser”.

Devido à sua admiração pelo comportamento da espiral logarítmica, Bernoulli pediu que fosse gravada em seu túmulo a inscrição “Eadem mutata resurgo” (“Embora transformada, reapareço igual”). Infelizmente, ao se propor a desenhar a espiral logarítmica a pessoa encarregada desenhou uma espiral arquimediana.

Esse fascínio e entusiasmo de Jacques Bernoulli por esta curva é inteiramente compreensível, pois ao observarmos alguns fenômenos da natureza, encontramos a espiral logarítmica. Por exemplo, a concha de um molusco que ao crescer continua na mesma forma, o chifre de carneiro que embora não esteja no plano, também segue as propriedades da espiral logarítmica; as galáxias, as sementes de girassol entre outros exemplos. Podemos encontrar a espiral logarítmica também na arte; Leonardo da Vinci em uma de suas obras desenha o cabelo de Leda de forma parecida com espiral logarítmica. Em seus estudos sobre espirais repete essa forma muitas vezes nos esboços para sua obra o “Dilúvio”. No século XX, Edward B. ilustrador e designer, desenvolveu centenas de desenhos utilizando a espiral logarítmica.

A espiral logarítmica está associada de certa forma à Razão Áurea. Na Figura 1, abaixo, apresenta-se, encerrada num encadeamento de retângulos áureos, uma aproximação da espiral logarítmica por arcos circulares consecutivos cujos raios crescem em progressão geométrica.

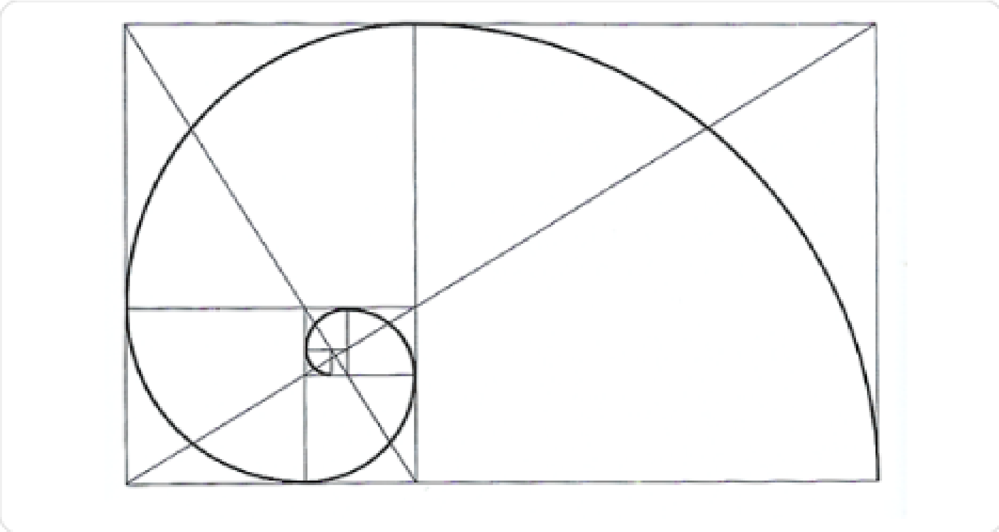


Figura 1: Retângulo Áureo retirado de [13]

O Retângulo Áureo é o único retângulo com a propriedade a seguir: ao cortar um quadrado, a partir do menor lado, a área restante forma outro retângulo semelhante. Ao se desenhar duas diagonais, como na figura acima, em qualquer par de retângulos, elas sempre irão se cruzar no mesmo ponto.Também é uma característica dessa curva não possuir ponto terminal, ou seja, ela pode crescer para fora ou para dentro indefinidamente, mantendo seu formato.

Isso assegura que a série de retângulos continuamente decrescentes associados à curva converge para um mesmo ponto, o qual Clifford A. Pickover chama de “O Olho de Deus”. É esse termo que remete às propriedades atribuídas como “divinas” da Razão Áurea.

1.2 LOGARITMO

Napier (1550-1617) estudioso escocês, conhecido pelas suas invenções, algumas relacionadas com armas de guerra, ainda na Escócia no século XVI publicou uma de suas maiores invenções: Barras de Napier ou Ossos de Napier como podemos observar nas figuras a seguir:

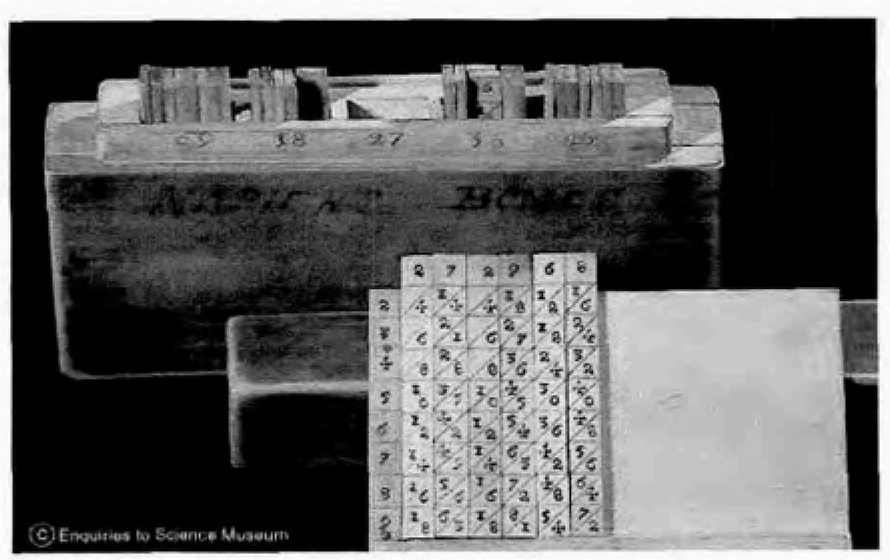


Figura 2: Ossos de Napier, em madeira, na forma de barras, Science Museum - London - retirada de [12]

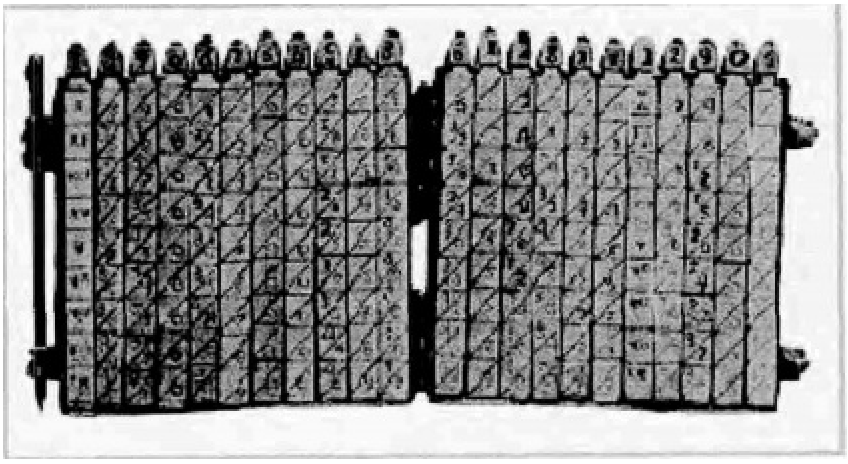


Figura 3: Ossos de Napier na forma de paralelepípedo - retirada de [12]

Segundo Collete [2]:

> No final do século XVI, Napier, preocupado porque os cálculos eram grandes e difíceis, e freavam o progresso científico, concentrou todos os seus esforços em desenvolver métodos que pudessem simplificá-los. Com este fim, escreveu em sua Rabdologia, onde descreve a utilização de barras e quadradinhos para efetuar somas de parcelas parciais. Os quadrinhos de

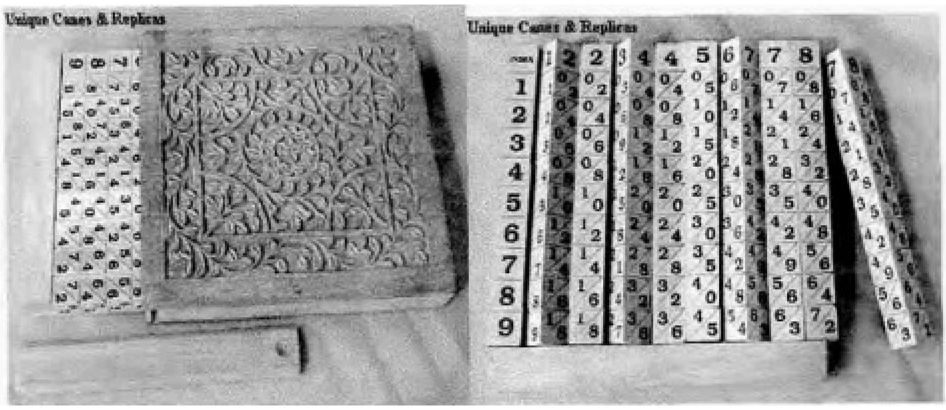


Figura 4: Estojo com Ossos de Napier em madeira (Unique Canes & Replicas) - retirada de [12].

> Napier eram tábuas de multiplicações montadas sobre barras de secções quadradas (Collete, 1985, p.303).

Essa descoberta, das barras e quadrinhos, foi elogiada por alguns cientistas da época, pois facilitou os cálculos que freavam alguns estudos científicos. Napier dedicou 20 anos de sua vida estudando o Logarítmo para facilitar os cálculos da época. Em 1614 publicou duas obras no tratado "Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio"(Uma Descrição da Maravilhosa Regra dos Logartimos) que descrevia o sistema e o modo de utilizá-lo. Napier estudou as progressões aritmética e geométrica e suas relações para conceituar o logarítmo

Segundo Horsburgh [8], se Napier não tivesse se dedicado ao estudo dos logaritmos, talvez os estudos de Kepler não tivessem avançado, pois os cálculos astronômicos eram grandes e difíceis, assim a ciência moderna poderia ter tomado outro rumo.

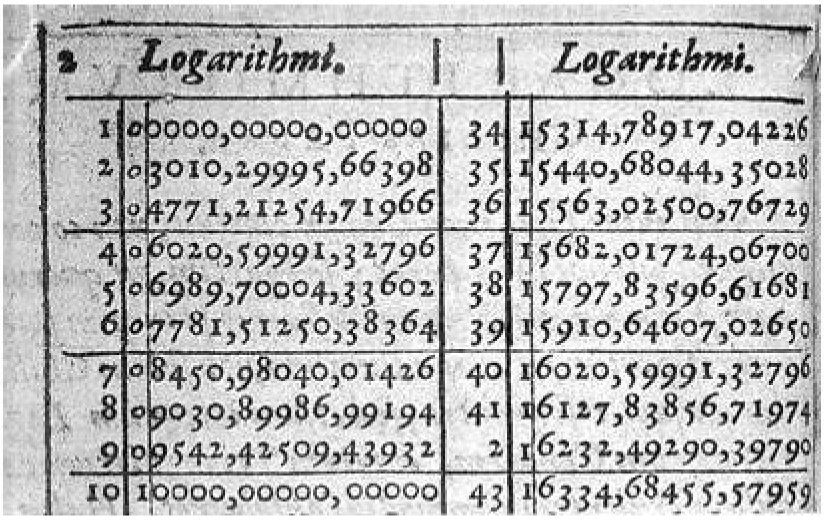
Logo após a publicação, em 1615, Napier recebeu a visita de Briggs para discutir possíveis mudanças no método dos logarítmos, como relata Horsburgh (1914):

> Na primeira visita Napier e Briggs discutiram algumas alterações no sistema de logaritmos. Em uma carta a Napier antes da primeira visita, Briggs havia sugerido que seria mais conveninte, ao passo que o logarítmo de todo o seno ainda era tido como zero, para tomar o logaritmo da décima parte do seno como potência de 10 e eles tinham iniciado o cálculo das tábuas de seu sistema proposto. Napier concordou que a mudança era desejável, e afirmou que ele tinha anteriormente desejado fazer uma mudança, mas ele preferiu a publicar as tábuas já preparadas, como ele não poderia concluí-lo por motivo da falta de saúde, comprometendo a construção de

> novas tábuas. Ele propôs, contudo, um pouco diferente da sugerida pelo sistema Briggs, a saber, que logarítmo de 1 deve ser zero, mas não para toda a condição de unidade , mas, ao mesmo tempo , tal como sugerido por Briggs, o logarítmo da décima parte da condição deve ser uma potência de 10. Briggs e Napier admitiram de uma única vez que esse método decidido era o melhor e colocou sobre o cálculo das tábuas o novo sistema que é essencialmente o sistema de logaritmos já em uso. (Horsburgh, 1914, p.11). (Tradução Soares).

Como Napier já não estava tão bem de saúde, coube a Briggs realizar a mudança das tábuas, usando base 10 para os logarítmos e considerando $log 1 = 0$ e $log 10 = 1$. Assim, em 1619, Briggs publicou a mais nova obra de Napier com a tábua dos logarítmos entre 1 e 1000. Infelizmente Napier não conseguiu acompanhar o desenvolvimento, pois veio a falecer em 1617. Graças as descobertas e interesse pelos estudos referentes aos logarítmos, muitos cálculos foram simplificados, gerando assim várias descobertas no mundo da astronomia e navegações.

Na Figura 5 podemos observar uma parte da tábua dos logaritmos entre 1 a 1000 contendo 14 casas decimais.



2	Logarithmi.				Logarithmi.
1	0	0000,00000,00000	34	1	5314,78917,04226
2	0	3010,29995,66398	35	1	5440,68044,35028
3	0	4771,21254,71966	36	1	5563,02500,76729
4	0	6020,59991,32796	37	1	5682,01724,06700
5	0	6989,70004,33602	38	1	5797,83596,61681
6	0	7781,51250,38364	39	1	5910,64607,02650
7	0	8450,98040,01426	40	1	6020,59991,32796
8	0	9030,89986,99194	41	1	6127,83856,71974
9	0	9542,42509,43932	2	1	6232,49290,39790
10	1	0000,00000,00000	43	1	6334,68455,57959

Figura 5: Parte da Tábua dos logarítmos feita por Briggs em 1617 - retirada de [12].

Em decorrência do trabalho, novos olhares atentos a outros fenômenos e padrões que ocorrem na natureza aconteceram, como por exemplo o fascínio de Bernoulli pela Espiral Logarítmica.

1.3 ESPIRAL LOGARÍTMICA NA NATUREZA E NA ARTE

Ao observarmos o universo e nosso planeta, percebemos vários padrões e formas que podem ser explicados pela matemática. A partir desses fenômenos alguns artistas apropriaram-se desses padrões e formas para criar grandes obras de arte. Nesta seção serão mostrados alguns exemplos da espiral logarítmica na natureza e na arte.

1.3.1 *Nautilus*

Um exemplo clássico de espiral logarítmica é o crescimento de um molusco em sua concha, o que ficou conhecido por Nautilus. Ao observamos o crescimento desses moluscos em suas conchas percebemos a construção de câmaras maiores para adequar ao seu tamanho e fechamento das câmaras menores, que serão inutilizadas por ele. Este crescimento acontece de forma regular, de modo que a forma da concha não se altera, garantindo ao molusco uma concha no mesmo formato em torno do seu ciclo de vida, sem a necessidade de ajustar o seu equilíbrio à medida que amadurece. Assim enquanto o molusco cresce, sua concha cresce seguindo os padrões e propriedades da espiral logarítmica.

Figura 6: Nautilus com concha vazia - retirada de http://www.blog.mcientifica.com.br/wp-content/uploads/2012/05/Nautilus-Seccao.jpg. Acessado em 07/07/2017.

Figura 7: Secção da concha do Nautilus - retirada de http://www.blog.mcientifica.com.br/wp-content/uploads/2012/05/Nautilus-Seccao.jpg. Acessado em 07/07/2017.

1.3.2 *Números de Fibonacci e a Espiral logarítmica*

Existem padrões na natureza que se relacionam-se aos números de Fibonacci que foi criado por Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, que consiste em uma sequência de números que obedecem ao seguinte padrão: para obter cada número da sequência devemos somar os dois imediatamente anteriores (os dois primeiros são escolhidos arbitrariamente). A sequência clássica de Fibonacci é dada por:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 \dots$$

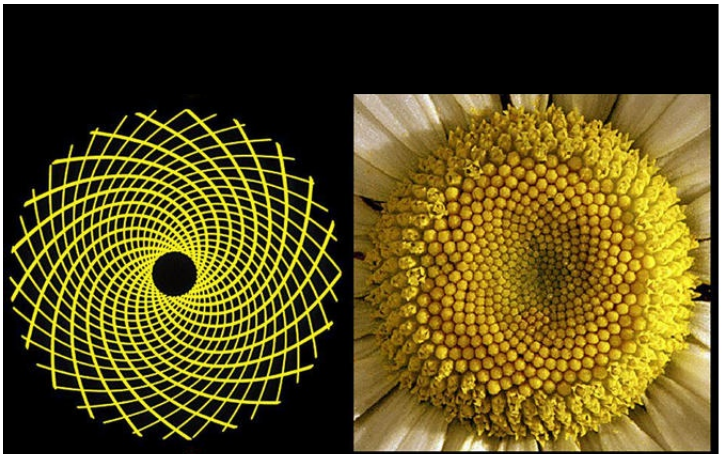


Figura 8: Girassol e a espiral logarítmica -retirada de Ramos 2013, p.60

A filotaxia, que é o estudo e classificação das diversas formas de disposição e organização das folhas em uma planta - como, por exemplo, o girassol, pinhas, abacaxi, entre outros - mostra a relação dos números de Fibonacci com a espiral logarítmica. Por exemplo, na Figura 8 observa-se que o girassol tem seus flósculos organizados em espirais logarítmicas que se cruzam, algumas no sentido horário outras no anti-horário. Segundo Livio [13], o mais comum é existirem 34 espirais em um sentido e 55 no outro, mas esse número varia de acordo com o tamanho do girassol.

No caso do abacaxi, a filotaxia se comporta de uma outra forma, mas também é baseada em Fibonacci, formando espirais logarítmicas. Como Livio [13] explica:

> Cada camada hexagonal na superfície de um abacaxi é parte de três espirais diferentes. Você pode ver uma de oito linhas paralelas subindo suavemente da esquerda inferior para a direita superior, uma das treze linhas paralelas que sobem de forma mais inclinada da direita inferior até a esquerda superior, e uma das vinte e uma linhas paralelas que são bastante inclinadas (da esquerda inferior até a direita superior). A maioria dos abacaxis tem cinco, oito, treze ou vinte e uma espirais de inclinação crescente na superfície.

Na figura 9 podemos observar o que Livio [13] explicou acima.

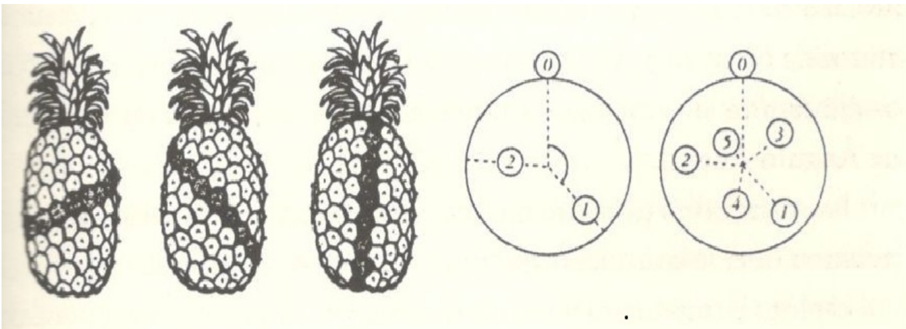


Figura 9: Abacaxi e a espiral logarítmica - retirada de [13]

1.3.3 *Galáxias*

Podemos encontrar a espiral logarítmica também em sistemas de estrelas agrupadas em uma mesma galáxia, como por exemplo as da Via Láctea. Danver (1942) estudou uma amostra de 98 galáxias e concluiu que a melhor aproximação para os braços de uma galaxia (começam perto do centro da galáxia e se estendem para fora por quase todo o disco) seria a espiral logarítmica. Segundo Kennicut [11] a forma dos braços pode ser razoavelmente bem aproximada por uma forma logarítmica e utiliza esta descrição para verificar a relação entre o ângulo de inclinação. A Figura 10 ilustra essa observação.

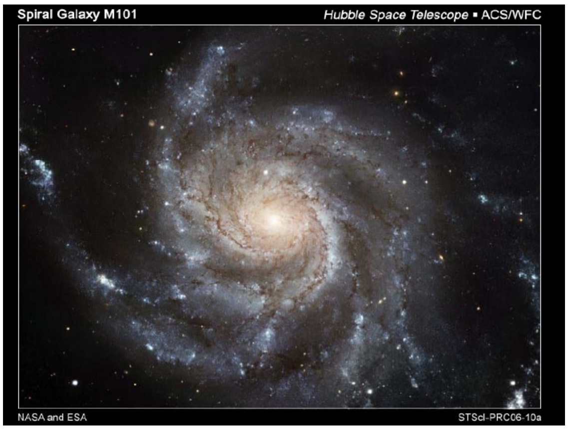


Figura 10: Galaxia - retirada de [11]

Segundo Livio [13] as galáxias exibem a forma de um disco relativamente fino (como uma panqueca), composto de gás, pó e estrelas. Esse disco inteiro gira em torno de seu centro com velocidades diferentes, ou seja, velocidade maior perto do centro e velocidade menor afastada do centro. Essas observações foram feitas com o telescópio espacial Hubble. A citação do poema do inglês William Blake (1757-1827) retrata bem essa manifestação maravilhosa da natureza.

> Para ver um Mundo em um Grão de Areia,
>
> E um céu em uma Flor Selvagem,
>
> Pegue o Infinito na Palma de sua mão,
>
> E a Eternidade em uma hora.

1.3.4 *Falcão Peregrino*

O Falcão Peregrino é uma das aves mais rápidas que existe e, consegue atingir sua vítima, em cerca de segundos, com alta velocidade, devido ao fato de usar a trajetória de uma espiral logarítmica até a presa. Segundo o biólogo Vance A. Tucker da Universidade de Duke, na Carolina do Norte, EUA, os olhos dos falcões ficam nas laterais de suas cabeças e, assim, para ter um maior aproveitamento de sua visão, o animal precisa inclinar sua cabeça 40 graus para um lado ou para o outro, o que o faria perder velocidade. Tucker conclui que o falcão peregrino mantém o ângulo entre sua tragetória e a sua linha de visão, ou seja, permanece com cabeça reta e segue a trajetória de uma espiral logarítmica, segundo sua pesquisa publicada em novembro de 2000, no Journal of Experimental Biology.

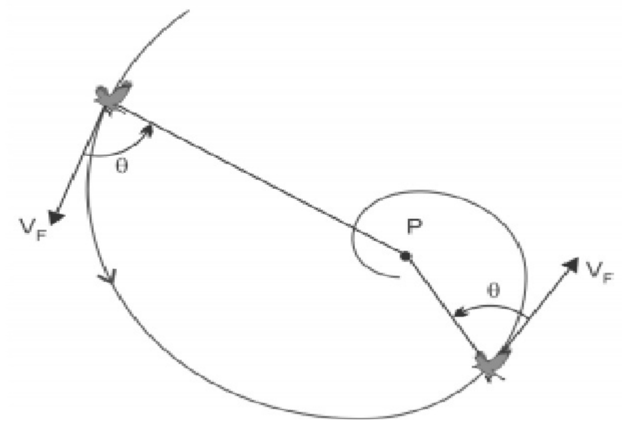


Figura 11: Trajetória do Falcão Peregrino - retirada de [13]

1.3.5 *Arte: Quadro de Leonardo da Vinci*

Leonardo da Vinci dedicou vários anos de sua vida para estudar a razão áurea e a manifestou em diversas obras, como, por exemplo, o homem Vitruviano, em seu quadro Monalisa, em sua outra obra de arte, Leda e o Cisnei, em O Díluvio, entre outras. Todas essas obras têem alguma relação com a razão áurea e, como consequencia pode aparecer a espiral logarítmica. Podemos observar na Figura 12 que o penteado do cabelo de Leda é, aparentemente, uma aproximação da espiral logarítmica.

Figura 12: Leda e o cisne

Figura 13: Cabelo da Leda, uma aproximação da espiral logarítmica

No quadro O Dilúvio é possível observar que há diversas representações da Espiral Logarítmica.

- O Dilúvio

Figura 14: Dilúvio

2

CONCEITOS SOBRE LOGARITMO E A ESPIRAL LOGARITMICA

Neste capítulo iremos apresentar o conceito de logarítmo no âmbito do cálculo diferencial e integral, uma abordagem mais compatível com o Ensino Superior. Faremos também um comparativo com a abordagem típica do Ensino Médio, isto é, o logaritmo como a inversa da exponencial. Após, iremos explorar algumas das propriedades mais interesantes das espirais logarítmicas.

2.1 LOGARITMO DEFINIDO COMO UMA INTEGRAL

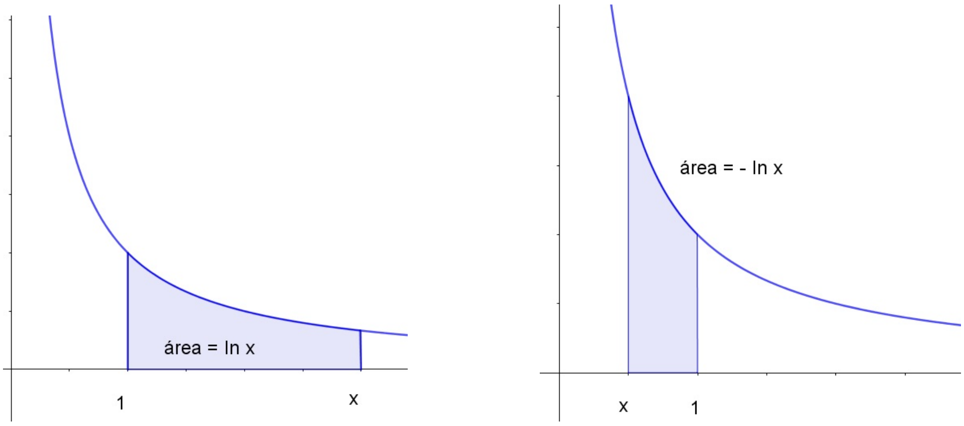
2.1.1 *Logaritmo Natural*

Definição 2.1. Função logaritmo natural é definida por

$$lnx = \int_1^x \frac{1}{t}dt, \; x > 0.$$

O Teorema Fundamental do Cálculo garante a existência da função acima definida. Se $x > 1$, então lnx pode ser interpretada, geometricamente, como a área sob a hipérbole $y = \frac{1}{t}$ de $t = 1$ até $t = x$, conforme podemos observar na figura 15(a).

Para $x = 1$, temos $ln1 = \int_1^1 \frac{1}{t}dt = 0$ e para $0 < x < 1$, $lnx = \int_1^x \frac{1}{t}dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}dt < 0$. Assim, de modo semelhante ao observado quando $x > 1$, no caso que em $0 < x < 1$, lnx é negativo e $-lnx$ representa a área sob a hipérbole, como podemos observar na figura 15(b).

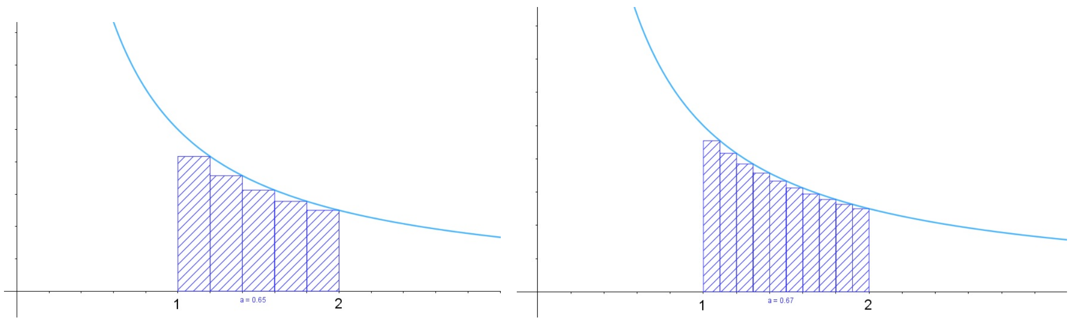


(a) Caso $x > 1$ (b) Caso $0 < x < 1$

Figura 15: Representação Geométrica de $\ln x$

Para fins de ilustração, segue um exemplo sobre o cálculo do valor do $ln2$ utilizando aproximações por retângulos inferiores e superiores à curva. Pode ser observado nos gráficos a seguir que quanto maior for a quantidade de retângulos que se tem, melhor é a aproximação.

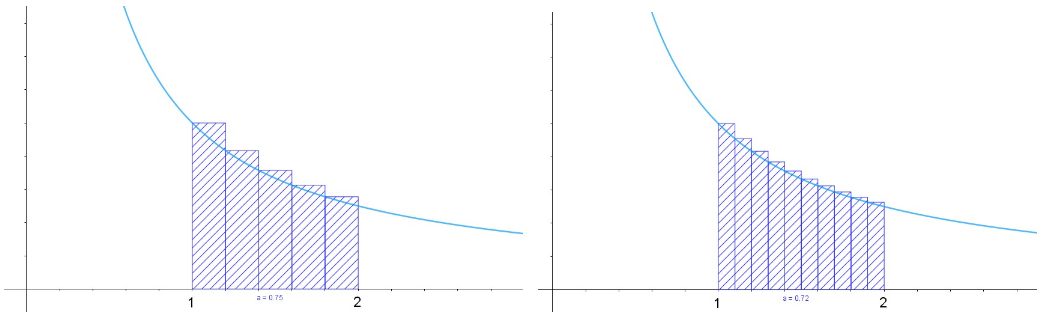
Aproximando o valor do $ln2$ utilizando a soma de Riemann com 5 e 10 partições de retângulos inferiores à curva, obtemos respectivamente as áreas 0,65 e 0,67 (figuras 16(a) e 16(b)).



(a) Com 5 partições (b) Com 10 partições

Figura 16: Cálculo de $\ln 2$ utilizando retângulos inferiores

Aproximando o valor do $ln2$ utilizando a soma de Riemann com 5 e 10 partições de retângulos superiores à curva, obtemos respectivamente as áreas 0,75 e 0,72 (figuras 17(a) e 17(b)).



(a) Com 5 partições (b) Com 10 partições

Figura 17: Cálculo de $\ln 2$ utilizando retângulos superiores

Para continuarmos vale a pena lembrar o Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema 2.2. *Teorema Fundamental do Cálculo, Parte1: Se f for contínua em $[a,b]$, então a função g definida por*

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \; a \leq x \leq b$$

é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b) e $g^{'}(x) = f(x)$.

Teorema 2.3. *Teorema Fundamental do Cálculo, Parte2: Se f for contínua em $[a,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \; a \leq x \leq b$$

onde F é qualquer antiderivada de f, isto é, uma função tal que $F^{'} = f$.

Assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, a função logaritmo natural é diferenciável em seu domínio e temos:

$$\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}dt = \frac{1}{x},$$

ou seja

$$\frac{d}{dx}(lnx) = \frac{1}{x}.$$

Uma primeira propriedade de $\ln x$ que podemos extrair do cálculo acima é que trata-se de uma função crescente, uma vez que

$$\frac{d}{dx}(lnx) = \frac{1}{x} > 0.$$

Essa regra de diferenciação será também usada para demonstrar as seguintes propriedades da função logarítmica.

Propriedade 2.4. *Leis dos Logaritmos: Se x e y forem números positivos e r for um número racional, então:*

1. $ln(xy) = lnx + lny$
2. $ln\left(\frac{x}{y}\right) = lnx - lny$
3. $lnx^r = rlnx$

Demonstração. 1. Seja $f(x) = ln(yx)$, onde y é uma constante positiva. Então, usando a Regra de Diferenciação definida acima e a Regra da Cadeia temos:

$$f'(x) = \frac{1}{yx}\frac{d}{dx}(yx) = \frac{1}{yx} \cdot y = \frac{1}{x}$$

Portanto, $f(x)$ e lnx têm a mesma derivada, e diferem por uma constante, ou seja, $ln(yx) = lnx + C$.

Fazendo $x = 1$ nessa equação, obtemos $lny = ln1 + C = 0 + C = C$. Assim $ln(xy) = lnx + lny$

2. Usando a primeira propriedade demonstrada acima e fazendo $x = \frac{1}{y}$, temos:

$$ln\left(\frac{1}{y}\right) + lny = ln\left(\frac{1}{y} \cdot y\right) = ln1 = 0$$

e, portanto, segue $ln\left(\frac{1}{y}\right) = -lny$.

Assim temos

$$ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = lnx + ln\left(\frac{1}{y}\right) = lnx - lny$$

3. Seja $f(x) = ln(x^r)$, usando a Regra da Cadeia e Regra de Diferenciação temos:

$$f'(x) = \frac{1}{x^r} \cdot \frac{d}{dx}(x^r) = \frac{1}{x^r}rx^{r-1} = r \cdot \frac{1}{x}$$

e como $\frac{d}{dx}r\,lnx = r \cdot \frac{1}{x}$ temos que $f(x)$ e lnx têm a mesma derivada, e diferem por uma constante, ou seja, $ln(x^r) = rlnx + C$.

Fazendo $x = 1$ nessa equação, obtemos $ln1 = rln1 + C = 0 + C = C$. Assim temos que, $f(x) = r\,lnx$.

Portanto

$$lnx^r = rlnx.$$

□

2.1.2 *Base de um Logaritmo*

O conceito de logaritmo é usualmente associado a uma base. Para recuperar essa elemento lançamos mão da seguinte

Definição 2.5. Se $a > 0$ e $a \neq 1$, definimos a função logarítmica de base a como sendo

$$log_a x = \frac{lnx}{lna}$$

Tal função tem mesmo domínio da função $\ln x$, isto é, o conjunto dos reais positivos. Diferenciando tal função, obtemos:

$$\frac{d}{dx}(log_a x) = \frac{d}{dx}\frac{lnx}{lna} = \frac{1}{lna}\frac{d}{dx}(lnx) = \frac{1}{xlna}$$

Portanto

$$\frac{d}{dx}(log_a x) = \frac{1}{xlna}$$

Em particular, concluímos que $\log_a x$ é uma função crescente quando $a > 1$ (pois nesse caso $\ln a > 0$) e decrescente quando $0 < a < 1$ (quando $\ln a < 0$).

Dentre as bases, a mais importante é a chamada base natural: e. Podemos definir o número e como sendo o valor de x tal que $lnx = 1$. Para verificar que este número existe usaremos o Teorema do Valor Intermediário.

Teorema 2.6. *Suponha que f seja contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e seja N um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, onde $f(a) \neq f(b)$. Então existe um número c em (a, b) tal que $f(c) = N$.*

A função lnx é contínua e, como vimos, $ln1 = 0$. Além disso, observando a Figura 18, temos que

$$ln4 > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1$$

Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe x tal que $\ln x = 1$

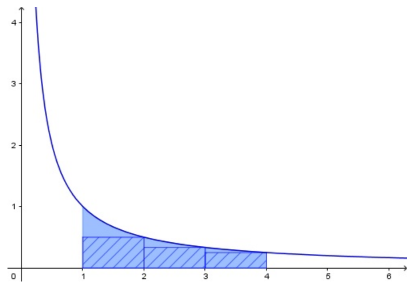


Figura 18: Gráfico

A Figura 19 ilustra essa situação.

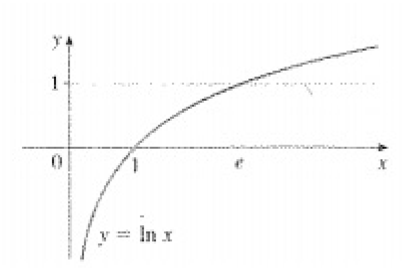


Figura 19: Gráfico $y = lnx$, retirado de [18]

Observemos que o logaritmo natural coincide com o logaritmo de base e:

$$log_e x = \frac{lnx}{lne} = lnx$$

De modo geral o número e é definido pelo $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$, mas como foi definido de outra maneira provaremos esta igualdade. Observe que, como a função lnx é injetora, temos que:

$e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \iff lne = ln(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}})$

Assim,

$$ln(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}) = (\lim_{x\to 0} ln(1+x)^{\frac{1}{x}}) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} ln(1+x)$$

Para resolvermos esse limite podemos usar a seguinte desigualdade, válida para $0 < x < 1$ (conforme figura 20):

$$\frac{x}{x+1} < ln(1+x) < x$$

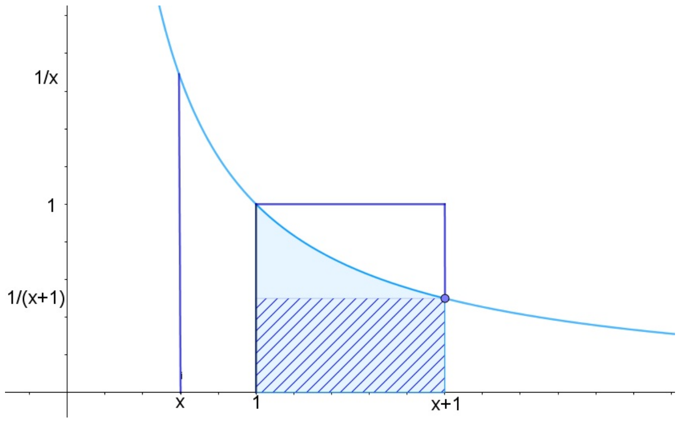


Figura 20:

Temos então

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{x+1} < \frac{1}{x} \cdot ln(1+x) < \frac{1}{x} \cdot x$$

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x} \cdot ln(1+x) < 1$$

Fazendo o $\lim_{x \to 0}$ para os extremos da desigualdade, temos que o resultado é 1. Então pelo Teorema do Confronto temos:

$$ln(\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} ln(1+x)) = 1 \Longrightarrow lne$$

Portanto

$$e = \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

2.1.3 *Função Exponencial como Inversa do Logaritmo*

Função Exponencial Natural

Definiremos a função exponencial natural como inversa da função logarítmica natural. Como lnx é uma função crescente, temos uma função inversa, que chamaremos de exponencial e^x.

Assim, pela definição da função inversa temos:

$$e^x = y \Longleftrightarrow lny = x$$

Como consequência, segue

$$e^{lnx} = x \text{ e } lne^x = x$$

Observemos que a função e^x é definida para todo x real, é crescente e positiva, e $e^0 = 1$.

2.1.4 *Funções Exponenciais Gerais*

Sejam $a > 0$ e r um número racional qualquer, então $a^r = (e^{lna})^r = e^{rlna}$. Isso motiva a seguinte definição:

$$a^x = e^{xlna}, \; x \in \mathbb{R}.$$

Temos que a função $f(x) = a^x$ é chamada função exponencial com base a. Note que a^x é positiva para qualquer x, pois e^x é positiva para qualquer x.

Podemos estender a propriedade dos logarítmos $ln(a^r) = rlna$, quando $r \in \mathbb{Q}$ para $r \in \mathbb{R}$. Desse modo temos:

$$lna^r = ln(e^{rlna}) = rlna$$

Se $a > 1$, então $lna > 0$, logo pela diferenciação de funções exponenciais temos $\left(\dfrac{d}{dx}\right) a^x = a^x lna > 0$. Isso mostra que $y = a^x$ é crescente. Se $0 < a < 1$, então $lna < 0$, e portanto $y = a^x$ é decrescente como podemos observar na figura 21:

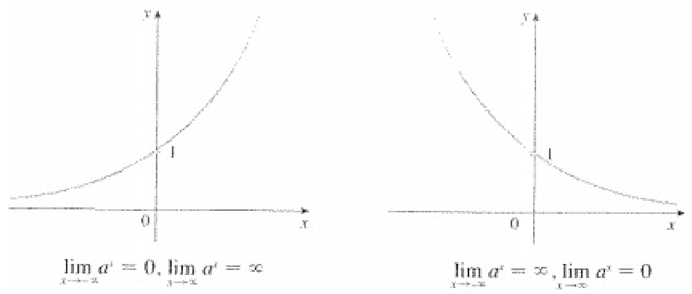


Figura 21: Gráfico da função exponecial crescente e decrescente

Assim, podemos observar que a Exponencial assim definida é a inversa do Logaritmo da seguinte maneira:

$$log_a a^x = log_a e^{xlna} = \frac{lne^{xlna}}{lna} = \frac{xlna \cdot lne}{lna} = x$$

2.2 DEFINIÇÃO DE LOGARÍTMO ABORDADA NO ENSINO MÉDIO

Nessa seção veremos o conceito de logarítmo e uma sugestão de como abordar o logaritmo de um número irracional, na perspectiva da Educação Básica.

No Ensino Médio definimos primeiro a Função Exponencial e depois a Função Logarítmica como inversa da Exponencial. No Ensino Superior a abordagem desse assunto pode ser diferente, como foi visto na seção anterior.

2.2.1 *Conceito de Logaritmo*

Definição 2.7. Sendo a e b números reais positivos, com $a \neq 1$, chama-se logarítmo de b na base a, o expoente que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b. Ou seja,

Se $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$, então

$$\log_a b = x \Longleftrightarrow a^x = b,$$

onde a é a base, b é o logaritmando e x o logarítmo.

É importante ressaltar que apesar de x ser o logarítmo e pertencer ao conjunto dos números reais, no Ensino Médio é raro usar o x como um número irracional, isso pode ser feito por aproximação como veremos no exemplo a seguir:

Seja $f(x) = 2^x$, onde queremos saber qual o valor da f para $x = \sqrt{2}$.

Para resolver isso usaremos aproximações de números racionais, tanto maiores quanto menores que $\sqrt{2}$, ou seja,

$$1,4 < 1,41 < 1,414 < 1,4142 < 1,41421 < \sqrt{2}$$

e

$$\sqrt{2} < 1,41422 < 1,4143 < 1,415 < 1,42 < 1,5$$

Assim temos,

$$\begin{gathered}
1,4 < \sqrt{2} < 1,5 \\
1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \\
1,414 < \sqrt{2} < 1,415 \\
1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143 \\
1,41421 < \sqrt{2} < 1,41422
\end{gathered}$$

Podemos observar que os números da coluna da direita se aproximam de $\sqrt{2}$ por valores maiores que $\sqrt{2}$ e os números da coluna da esquerda se aproxima de $\sqrt{2}$ por valores menores que $\sqrt{2}$.

Ao elevarmos essas desigualdades, utilizando como base 2 temos,

$$\begin{gathered}
2^{1,4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5} \\
2^{1,41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42} \\
2^{1,414} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,415} \\
2^{1,4142} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,4143} \\
2^{1,41421} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,41422} \\
\cdots < 2^{\sqrt{2}} < \cdots
\end{gathered}$$

Logo conseguimos obter o valor de $2^{\sqrt{2}}$ por uma aproximação de potências de números racionais.

É interessante, como curiosidade, mostrar para o aluno que o calculo de potências com números irracionais existe e que pode ser feito por aproximações de potências com números racionais.

2.3 ESPIRAL LOGARÍTMICA E SUAS PROPRIEDADES

Estudaremos nessa seção as caracteristicas da Espiral Logarítmica, comparando-as com as características da Espiral de Arquimedes.

2.3.1 *Espiral Logarítmica*

Segundo Maor [14], uma espiral é uma curva que gira em torno de um ponto central(centro), afastando ou aproximando deste ponto, dependendo do sentido que a curva percorre, segundo uma lei determinada, ou seja, as caracteristicas predominantes de cada espiral.

A equação da Espiral Logarítmica pode ser encontrada através da inclinação da espiral em relação ao raio vetor (módulo do vetor posição), ou seja, podemos definir essa equação da seguinte maneira, em coordenadas polares:

Definição 2.8. Espiral logarítmica plana de centro no ponto A é o lugar geométrico de todos os pontos $P = (\rho, \theta)$ que obedecem à equação:

$$\rho = \rho_0 e^{k\theta},$$

onde, θ varia nos reais, k e ρ_0 são constantes positivas. Assim $k\theta$ é o logaritmo da relação entre o raio vetor ρ para um giro θ e o raio vetor inicial ρ_0 (para $\theta = 0$).

A seguir temos algumas características da espiral logarítmica que a destacam entre as curvas planas.

- Cada linha reta que atravessa o centro da espiral forma, com esta última, sempre o mesmo ângulo.

  Derivando a equação $\rho = \rho_0 e^{k\theta}$ em relação a θ, temos $\rho^{'} = \rho_0 k e^{k\theta}$.

Observe que:

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\rho_0 k e^{k\theta}}{\rho_0 e^{k\theta}} = k.$$

Usando coordenadas retangulares e parametrizando a curva temos:

$x = \rho cos\theta$

$y = \rho sen\theta$

Assim,

$$p = (x, y) = (\rho cos\theta, \rho sen\theta), \text{ onde p é o vetor posição.}$$

Ao derivarmos as coordenadas de p, obtemos que o vetor tangente à curva é dado por:

$$t = (\rho' cos\theta - \rho sen\theta, \rho' sen\theta + \rho cos\theta),$$

Se β denota o ângulo entre a reta radial por p e a espiral, temos

$$cos\beta = \frac{p \cdot t}{||p|| \cdot ||t||} = \frac{\rho cos\theta \cdot (\rho' cos\theta - \rho sen\theta) + \rho sen\theta \cdot (\rho' sen\theta + \rho cos\theta)}{\rho\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} = \frac{\rho \cdot \rho'}{\rho\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} = \frac{\rho'}{\rho'\sqrt{(\frac{\rho}{\rho'})^2 + 1}}$$

Como $\frac{\rho}{\rho'} = \frac{1}{k}$, então:

$$cos\beta = \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{k})^2 + 1}}$$

Assim, β é constante, como afirmado anteriormente. Foi essa característica que despertou o interesse de Descartes pelo estudo dessa espiral, por isso nomeou-a de Espiral Equiangular.

- Ao tomarmos pontos da espiral em uma mesma reta radial, a distância ao centro aumenta através de uma mesma razão, isto é, seu raio aumenta por uma progressão geométrica.

  De fato, a partir de um ponto (ρ, θ) da espiral, $\rho = \rho_0 e^{k\theta}$, os pontos sucessivos da mesma reta radial, para θ crescente, são da forma (ρ_n, θ_n) onde $\theta_n = \theta + 2\pi n$ e $\rho_n = \rho_0 e^{k(\theta_0 + 2n\pi)}$. Logo, a razão entre dois raios vetores consecutivos é dada por

$$\frac{\rho_0 e^{k(\theta_0+2(j+1)\pi)}}{\rho_0 e^{k(\theta_0+2j\pi)}} = e^{k\theta_0}$$

Podemos observar esse processo na figura a seguir.

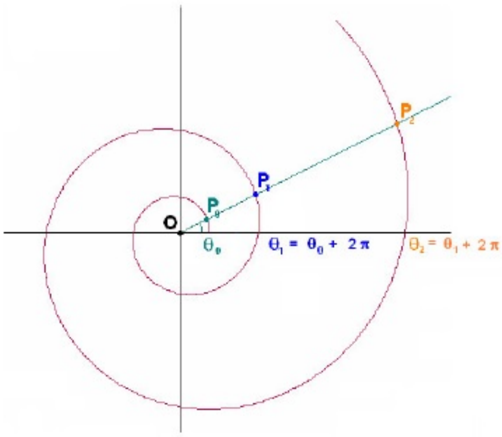


Figura 22: Espiral Geométrica - retirada de [6]

2.3.2 *Espiral de Arquimedes*

Para fins de comparação, falaremos brevemente da Espiral de Arquimedes. Esta é definida como o lugar geométrico no plano descrito por um ponto que se desloca com uma velocidade uniforme ao longo de uma semi-reta, a partir da origem, quando esta, por sua vez, roda com velocidade angular uniforme em torno da origem. A origem da semi-reta vai corresponder ao centro da espiral.

Definição 2.9. Um ponto $P = (\rho, \theta)$ pertence à espiral de Arquimedes se suas coordenadas polares ρ e θ satisfazem a equação.

$$\rho = a\theta,$$

onde a é uma constante positiva e determina o crescimento da espiral.

Pode-se provar, de modo semelhante ao feito para a espiral logarítmicas, que a Espiral de Arquimedes, ao ser percorrida por arcos iguais (distância do centro da espiral), tem seu comprimento aumentado em uma progressão aritmética (P.A.).

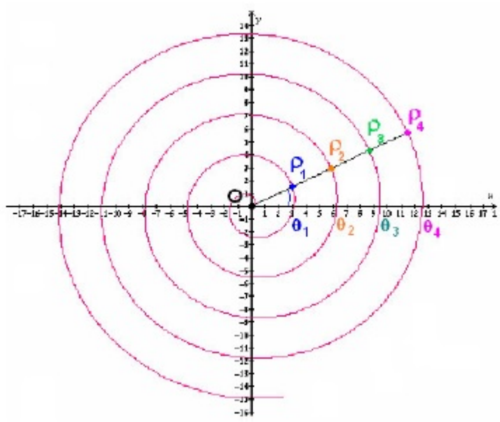


Figura 23: Espiral de Arquimedes - retirada de [6]

2.3.3 *Construção de uma poligonal com o comportamento de uma Espiral Logarítmica*

Podemos ilustrar a equação da Espiral Logarítmica através da construção de sucessivos triângulos retângulos com o mesmo ângulo no centro. Essa abordagem pode ser usada na Educação Básica, pois está mais próxima do conteúdo abordado no Ensino Médio.

Começaremos a construção pelo triângulo retâgulo OA_0A_1, onde o vértice A_0 corresponde ao ângulo reto e o vértice O será o centro da aproximação da construção da Espiral Logarítmica e ρ_0 é o lado OA_0 do triângulo. O ângulo θ é a inclinação constante a ser acrescentada em todo triângulo, que está no vértice O e ρ_1 é a distância do centro O ao vértice A_1, como podemos visualizar na figura 24.

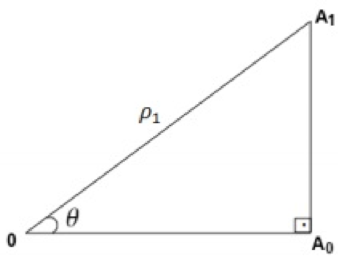


Figura 24: Triângulo Retângulo OA_0A_1

Pelas relações métricas no triângulo retângulo temos:

$$cos\theta = \frac{OA_0}{\rho_1} \Longrightarrow \rho_1 = \frac{OA_0}{cos\theta} \Longrightarrow \rho_1 = OA_0 \cdot \frac{1}{cos\theta}$$

Assim temos,

$$\rho_1 = \rho_0 \cdot \frac{1}{cos\theta}$$

Seja OA_1A_2 o triângulo retângulo obtido pela variação de θ a partir do triângulo OA_0A_1, como podemos verificar na figura 25.

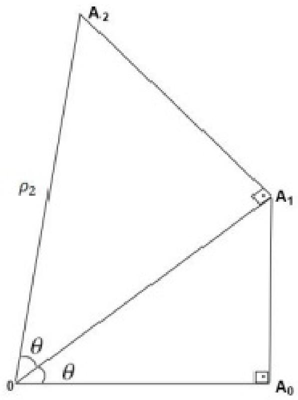


Figura 25: Triângulo Retângulo OA_0A_1 e OA_1A_2

Observe que a distância $\rho_2 = OA_2$ será obtida pela aplicação da razão trigonométrica $cos\theta$ assim temos:

$$cos\theta = \frac{OA_1}{OA_2} \Longrightarrow cos\theta = \frac{\rho_1}{\rho_2} \Longrightarrow \rho_2 = \frac{\rho_1}{cos\theta} \Longrightarrow \rho_2 = \rho_1 \cdot \frac{1}{cos\theta}$$

Então,

$$\rho_2 = \rho_0 \cdot \frac{1}{cos\theta} \cdot \frac{1}{cos\theta} \Longrightarrow \rho_2 = \rho_0 \cdot (\frac{1}{cos\theta})^2$$

Seguindo o mesmo processo temos:

Seja o triângulo $OA_{n-1}A_n$ obtido através de n variações angulares de medida θ, a partir da distância inicial $\rho_0 = OA_0$.A distância $\rho_n = OA_n$ será determinada através de n aplicações da razão trigonométrica $cos\theta$, ou seja:

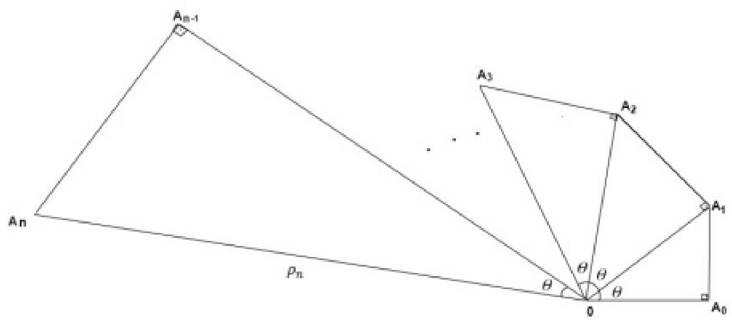


Figura 26: Sequência de Triângulos Retângulos

$$cos\theta = \frac{OA_{n-1}}{OA_n} \Longrightarrow cos\theta = \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n} \Longrightarrow \rho_n = \frac{\rho_{n-1}}{cos\theta} \Longrightarrow \rho_n = \rho_{n-1} \cdot \frac{1}{cos\theta}$$

Aplicando n vezes o processo regressivo sobre a distância ρ teremos:

$$\rho_n = \rho_0 \cdot \frac{1}{cos\theta} \cdot \frac{1}{cos\theta} \cdot \frac{1}{cos\theta} \cdots \frac{1}{cos\theta} = \rho_0 \cdot (\frac{1}{cos\theta})_n$$

Considere a função $\rho : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por ρ_i = distância do pólo O ao vértice A_i. Note que a função ρ_i é crescente, ou seja, dados $x, y \epsilon \mathbb{R}$, com $x < y$, tem-se $\rho_x < \rho_y$. Tomando uma progressão aritmética $(0, \theta, 2\theta, 3\theta, \cdots, n\theta, (n+1)\theta, \cdots)$ como sendo as variações angulares, desde o segmento inicial OA_0 ao OA_i, a função ρ_i calcula a distância do pólo O ao respectivo vértice A_i, assim a nova sequência $(\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \cdots, \rho_n, \cdots)$ representada por

$$(\rho_0, \rho_0 \cdot \frac{1}{cos\theta}, \rho_0 \cdot \left(\frac{1}{cos\theta}\right)^2, \rho_0 \cdot \left(\frac{1}{cos\theta}\right)^3, \cdots, \rho_0 \cdot \left(\frac{1}{cos\theta}\right)^n, \cdots)$$

é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{cos\theta}$.

Em particular, se $\theta = \frac{2\pi}{n}$, os vértices dessa poligonal estão na Espiral Logarítmica de equação $\rho = \rho_0 e^{k\alpha}$, em que $k = \frac{1}{2\pi} ln(\frac{1}{cosn\theta})$. Nesse sentido, a poligonal é uma aproximação de tal espiral.

3

UM OLHAR PARA EDUCAÇÃO BÁSICA

Neste capítulo proporemos uma sequência didática que tem o intuito de motivar o aluno a aprender logaritmo, um assunto que a maioria dos alunos rejeita, devido à fama de ser um conteúdo de difícil entendimento. É possível que esta fama se dê pela abordagem que é feita, na educação básica, do logaritmo, de uma forma desconectada com a realidade, apresentando apenas definições e exercícios de fixação e fazendo com que o aluno tenha a visão do logaritmo como algo mecânico e sem importância para o entendimento do mundo em que vive. Ressalto isso por minha experiência como docente e conhecimento de materiais didáticos que apresentam essa abordagem.

De acordo com a parte II dos Parâmetros Curriculares Nacionais, elaborados em 2000, que contém considerações sobre o ensino de Matemática é importante enfatizar o uso da Matemática na vida das pessoas para resolução de problemas do dia a dia e tomada de decisão, além de ajudar a estruturar o pensamento. Como pode se ver na citação a seguir:

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. No que diz respeito ao ca-

> ráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. Não se trata de os alunos possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as adequadamente no momento oportuno. (P.C.N. Parte II, 2000).

Assim existe a importância de sempre relacionar o conteúdo formal com a realidade do aluno, para que o mesmo veja a aplicação do que está sendo abordado em sala de aula, fazendo com que o que está sendo aprendido não seja um amontoado de cálculos sem importância e sequências de listas de exercícios.

Vale destacar os objetivos do Ensino da Matemática estabelecidos pelo (P.C.N., Parte II 2000):

> As finalidades do ensino de Matemática no nível médio indicam como objetivos levar o aluno a:
>
> - compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
> - aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
> - analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
> - desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
> - utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
> - expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;

- estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
- reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
- promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

Esses objetivos citados acima sobre o Ensino de Matemática, serão um caminho a seguir para o ensino e aprendizagem dos logaritmos que se estruturarão em conhecimentos prévios de potências, progressão geométrica e funções exponenciais.

3.1 CONHECIMENTOS PRÉVIOS

No processo de ensino é importante, ao começar um novo conteúdo, verificar o domínio dos alunos sobre conhecimentos prévios necessários. Na próxima seção serão apresentadas atividades para motivação da aprendizagem sobre logaritmos que envolvem conhecimentos prévios como, potenciação, progressão geométrica e função exponencial. Se os alunos não tiverem domínio sobre esses temas, ficaria muito difícil o entendimento sobre tal conteúdo e a proposta motivadora não surtiria o efeito desejado. Por isso é importante prever a retomada e consolidação desses conceitos.

Usando o caderno do professor volume II do Ensino Médio da Rede Estadual de Ensino, observamos, na figura a seguir, a situação aprendizagem I que prevê a retomada de potenciação para o ensino das funções exponenciais.

> SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 1:
> AS POTÊNCIAS E O CRESCIMENTO/DECRESCIMENTO EXPONENCIAL: A FUNÇÃO EXPONENCIAL
>
> Conteúdos e temas: significado da potenciação com expoentes naturais, inteiros, racionais e reais; função exponencial, a construção de seu gráfico e ênfase nas suas propriedades relativas ao crescimento e decrescimento: função exponenciais em diferentes contextos. Competências e habilidades: expressar e modelar diversos fenômenos naturais envolvendo potências, compreendendo-os nos diversos contextos em que eles surgem; enfrentar e resolver situações-problemas envolvendo expoentes e funções exponenci-

ais. Sugestão de estratégias: articulação das noções sobre potências já estudadas em séries/anos anteriores; destaque de alguns fatos fundamentais, considerados especialmente importantes para a compreensão da natureza da função exponencial; apresentação de exemplos ilustrativos e proposição de exercícios exemplares.

Assim ao consolidar o conhecimento sobre os conceitos de potenciação e funções exponenciais a aprendizagem sobre logaritmos ficará mais fácil, pois a função logarítmica é a função inversa da exponencial.

3.2 SUGESTÃO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática a seguir é composta de 4 atividades. Para fins deste trabalho detalharemos somente a Atividade 2, apresentando as demais de forma geral.

3.2.1 *Público Alvo*

Essa sequência didática foi preparada visando à aplicação para alunos do primeiro ano do Ensino Médio de Escolas Estaduais do Estado de São Paulo.

3.2.2 *Duração*

Esta sequência didática esta prevista para aplicação no terceiro bimestre, ou seja, aproximadamente dois meses.

3.2.3 *Objetivos Gerais*

Fazer com que os alunos tenham interesse pelo tema abordado, e que observem o mesmo com uma nova perspectiva, permitindo assim que a aprendizagem aconteça.

3.2.4 *Objetivos Específicos*

Identificar a Espiral Logarítmica no mundo em que vivemos e a partir dela conhecer as funções exponenciais e logarítmicas e suas diversas aplicações e manipular suas propriedades.

3.2.5 *Roteiro Geral*

- Atividade 1: Introduzir o assunto utilizando imagens de manifestações da espiral logarítmica na natureza e na arte atrelando a sua história. Neste momento é interessante abordar a história dos logaritmos, contando sobre a tábua de Napier e suas motivações para sua construção. Essa parte histórica pode-se encontrar no primeiro capítulo. Para finalizar essa atividade pode ser realizado, como sugestão, uma roda de conversa em outro espaço que não seja a sala de aula, fazendo alguns questionamentos para instigar a busca pelo conhecimento desse novo conteúdo.
- Atividade2 : apresentar o problema do rato, que consiste em uma curva de perseguição, que gera uma espiral logarítmica. A proposta dessa atividade é a aproximação do conteúdo através da interação do aluno com o problema. Consiste em uma reprodução da trajetória de perseguição feita pelos alunos, gerando assim uma espiral logarítmica.
- Atividade 3: construir uma aproximação da Espiral Logarítmica utilizando compasso e régua, que foi apresentada em diversas manifestações na natureza e na arte. Através dessa construção mostrar algumas características e propriedades dessa espiral usando o Capítulo2. Assim para concluir essa atividade pode ser usado a situação de aprendizagem 1, que prevê uma retomada de conceitos sobre potenciação e a apresentação da função exponencial, além disso, parte da situação de aprendizagem 2 do caderno do aluno, que mostra a construção da tabela de Napier.
- Atividade 4: conhecer diversas aplicações da função exponencial e logarítmica, tais como, crescimento populacional, cálculo de terremoto na escala Richter, aplicações na química, entre outras. Para finalizar essa atividade pode ser utilizado a situação de aprendizagem 2, do caderno do aluno do 1ºano do Ensino Médio volume2.

3.3 DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE 2

Nessa seção iremos detalhar a sugestão de Atividade 2.

O problema das curvas de perseguição começou a ser investigado na época de Leonardo da Vinci, até pode ter sido sugerido por ele pois, como já vimos no capítulo 1 Leonardo usou a espiral logarítmica em algumas de suas obras. Em 1732, Pierre Bouguer utilizou os cálculos de Newton para solucionar tal problema, que imaginou um navio pirata interceptando um navio mercante, em alto mar. O termo curva de perseguição surgiu em 1859 e foi definido por George Boole. Essas curvas de perseguição pode ser utilizada em várias situações, como por exemplo, em obras de arte, diversas perseguições e em táticas de guerra.

O problema consiste em: seja um polígono regular de n lados e um ponto material em cada um de seus vértices. Cada ponto material irá se deslocar com velocidade constante na direção do ponto material seguinte. Ao final todos pontos materiais irão se encontrar no centro (baricentro) do polígono, onde realizaram uma trajetória formada por arcos de espiral logarítmica.

Objetivo

- Despertar o interesse sobre o assunto abordado, logaritmo, através da atividade interativa.
- Contextualizar a espiral logarítmica no dia a dia do aluno.

Materiais Utilizados

- giz, régua de madeira de 1 metro, transferidor de madeira (usado pelos professores em sala de aula), barbante.
- Imagens das curvas de perseguição para polígonos de 3,4 e 6 lados.

Duração

Esta atividade tem sugestão de duração de 4 aulas.

Descrição da Atividade

O problema do rato consiste em um pega-pega, onde cada participante estará no vértice de um polígono regular. Seja um triângulo equilátero com vértices P, Q, R, o objetivo do participante que está em P é pegar quem está em Q, por sua vez quem esta em Q deve pegar quem esta em R e, por fim, quem esta em R deve pegar P.

Todos os participantes devem ter a mesma velocidade e com isso a trajetória que irão percorrer é uma Espiral Logarítmica.

Separe a turma em grupos (o número de pessoas em cada grupo é de acordo com a realidade de sua escola), leve-os para a quadra ou pátio da escola, é importante um local onde os alunos tenham espaço para realizar a atividade.

Primeiro utilizando giz, régua de madeira e um transferidor de madeira desenhe um triangulo equilátero de lado 10 metros no chão, depois cada par de alunos ficará em um dos vértices, um para percorrer a trajetória e o outro para marcar seus passos com giz e barbante, os alunos tem que ter a mesma velocidade para que a atividade de certo, para isso use o mesmo deslocamento e intervalo de tempo para todos os alunos de um mesmo triângulo. Antes de começar o pega-pega, cada aluno marcador deve medir, com a régua de madeira um pedaço de barbante de 80 cm para marcar a trajetória.

Situe cada aluno no vértice do triângulo equilátero à distância de 10 metros uns dos outros, que irão se mover com velocidade constante simultaneamente, podemos utilizar um deslocamento de 80 cm em um intervalo de tempo.

Esse intervalo de tempo pode ser feito da seguinte maneira, escolha um aluno de cada grupo para ser o relógio, esse aluno irá fazer um som (é importante que os alunos de cada grupo realizem um som diferente para não confundir os participantes que estão realizando a trajetória). Depois que os alunos marcarem a trajetória de cada grupo, o aluno relógio fará o ruído e os alunos que estão na perseguição irão fazer o deslocamento de 80 cm, lembrando que esse trajeto é sempre retilíneo.

O objetivo de P é atingir Q, Q dirige-se para R e R deve atingir P. Em intervalos regulares (1 segundo), os alunos corrigem a trajetória, de acordo com a nova posição de seus alvos. Na figura a seguir está representado como deve ficar a poligonal feita por cada aluno.

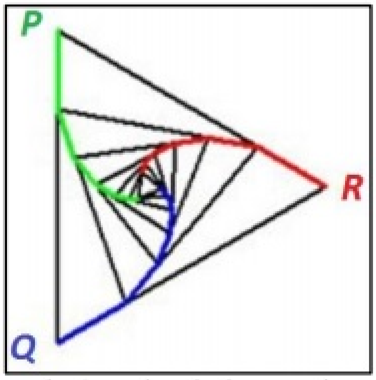


Figura 27: Trajetória dos alunos.Imagem retirada de [17]

No final da trajetória o (a) professor (a), pode tirar fotos das trajetórias realizadas por cada grupo para discussões posteriores. Dentre essas discussões é possível verificar que o ângulo formado entre os lados dos polígonos formados e as polígonais traçadas é o mesmo, justificando a propriedade da Espiral Logarítmica observada por Descartes.

Esse mesmo procedimento pode ser realizado para um quadrado e um hexágono regular, só será necessário reorganizar os alunos para poder marcar a trajetória de forma adequada.

Na figura 28 estão as possíveis trajetórias para o quadrado e o hexágono regular.

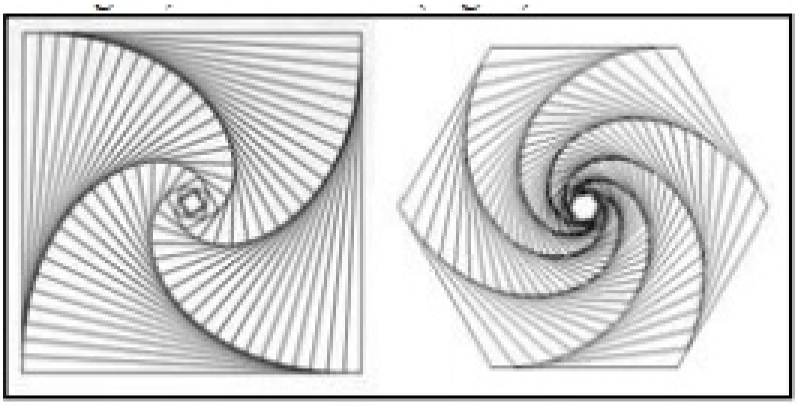


Figura 28: Trajetória dos alunos. Imagem retirada de [17]

Conclusão

Depois de realizada a atividade com os alunos, como sugestão, é interessante fazer uma roda de conversa para escutar o que os alunos acharam da atividade e o que entenderam sobre a mesma, isso pode ser feito fora da sala de aula, em um espaço que o(a) professor(a) ache adequada para sua turma.

A partir disso faça a ligação do problema do rato (curva de perseguição) com a espiral logarítmica. Aproveite nesse momento para introduzir os conceitos de logarítmos.

Construa com os alunos um mural com as fotos tiradas das trajetórias feitas pela turma. Uma sugestão de como isso pode ser feito é: Cada grupo deve fazer um painel com as fotos de suas trajetórias e escrever um breve resumo sobre o problema do rato (curva de perseguição) e a ligação com a espiral logarítmica.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOYER, C.B., tradução Elza F. Gomide; *História da Matemática* , Editora Edgard Blücher, São Paulo, 2012.

[2] COLLETE, J. P.; *El Comienzo de las Matemáticas Modernas*, Editora Siglo XXI, Espanha, 1985.

[3] CONTADOR, P. R. M.; *A Matemática na arte e na vida*, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2011.

[4] COOK, T. A.; *The Curves of life*, Dover Publications, New York, 1979.

[5] EVES, H., tradução Hygino H. Domingues; *Introdução à história da matemática*, Editora Unicamp, 2011.

[6] FIGUEIRA, A. N.; SILVA, M. L. A.; *Espirais*, Artigo, Universidade Estadual de São Paulo,2007.

[7] IEZZI, G., DOLCE, O., MURAKAMI, C; *Fundamentos da Matemática Elementar, Vol 2*, Editora Atual, São Paulo, 1977.

[8] HORSBURGH, E. M; *Modern instruments and methods of calculation; a handbook of the Napier tercentenary exhibition*, Royal Society of Edinburgh, Edinburg, 1914.

[9] HUNTLEY, H.E, tradução Luís Carlos Ascêncio Nunes; *A Divina Proporção*, Editora Universidade de Brasília, Brasília, 1985.

[10] JANOS, M.; *Matemática e Natureza* , Editora Livraria da Física, São Paulo, 2009.

[11] JUNQUEIRA, C. T.; *Estrutura Espiral da Galáxia baseada no estudo de órbitas estelares*,Dissertação (Mestrado), Universidade de São Paulo Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas Departamento de Astronomia, 2013

[12] LANZARIN, B. Z.; *Ossos de Napier e Réguas de Genaille-Lucas*, Dissertação(Mestrado), Universidade Federal de Santa Catarina, 2004.

[13] LIVIO, M., tradução de Marco Shinobu Matsumura, *Razão Áurea: A história de*

Fi, um número surpreendente , Editora Record, São Paulo, 2009.

[14] MAOR, E.,tradução de Jorge Calife; *e: A História de um Número*,Editora Record. Rio de Janeiro, 2003.

[15] PUPIM, C.E.; *A MATEMÁTICA NA NATUREZA* , Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul, 2013.

[16] SOARES, E. C; *Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula*, Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2011.

[17] SOLDATELLI, A.; *A Matemática do pega-pega*, SCIENTIA CUM INDUSTRIA, V.4, N.4, 232—236, Universidade de Caxias do Sul-RS, 2016, Disponível em: http://dx.doi.org/10.18226/23185279.v4iss4p232.

[18] STEWART, J., tradução Antonio Carlos Moretti; *Cálculo Volume I*, Cengage Learning, São Paulo, 2008.