

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA



MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA



**O CUBO MÁGICO DE RUBIK: TEORIA, PRÁTICA E ARTE.**

FERNANDO VIEIRA BARBOSA

BRASÍLIA-DF

2018

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA**

**O CUBO MÁGICO DE RUBIK: TEORIA, PRÁTICA E  
ARTE.**

**FERNANDO VIEIRA BARBOSA**

**BRASÍLIA-DF**  
**JANEIRO/2018**

**FERNANDO VIEIRA BARBOSA**

**O CUBO MÁGICO DE RUBIK: TEORIA, PRÁTICA E ARTE.**

Dissertação apresentada ao programa de mestrado profissional em Matemática da Universidade de Brasília (UnB) como requisito parcial para obtenção do grau de Mestrado, sob orientação do Prof. Dr. Theo Allan Darn Zapata.

**BRASÍLIA-DF  
JANEIRO/2018**

Dedico este trabalho a minha família, meus pais, minha irmã e minha esposa, por sempre me apoiar em minhas decisões. Em especial aos meus pais, toda conquista atingida por mim até hoje devo a eles.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pelas oportunidades que a vida me proporciona.

A minha mãe, Edy das Graças Vieira, por sempre me encorajar a buscar meus sonhos, pelo apoio em todos os sentidos da minha vida e por ser um exemplo em minha vida.

A meu pai, João Batista Barbosa – Seu João – pelo exemplo que sempre foi, por me alertar que a vida não seria fácil em momento algum e por me preparar para cada momento que vier.

A minha irmã, Juliana Viera Barbosa, pela ajuda na revisão gramatical deste trabalho e por ser meu porto seguro.

A minha esposa, Samantha da Silveira, que, ao longo destes 10 anos, sempre esteve ao meu lado, por seus conselhos, pela sua paciência e por me fazer crescer como pessoa diariamente.

Aos meus amigos de infância pelo apoio, incentivo e pelos momentos de descontração.

Ao meu orientador Prof. Dr. Theo Allan Darn Zapata, pela ajuda imensurável na execução do trabalho, por respeitar minhas ideias, por oferecer disposição até aos finais de semana e pela compreensão apresentada diante da minha falta de tempo.

Aos amigos do PROFMAT, por estes 2 anos de luta.

Aos meus alunos, principalmente os que participaram direta e indiretamente deste trabalho, pela troca de conhecimento diária, por comprarem as minhas ideias até mesmo as que de início não fazem nenhum sentido e por tornar meu trabalho mais gratificante.

Ao ex-aluno e amigo, Bruno Rodrigues Santos, pela colaboração na edição das imagens e pelo apoio disponibilizado.

Por fim a meus professores, pelas aulas apresentadas.

## RESUMO

Este trabalho constitui-se de uma proposta de ensino utilizando o cubo mágico de Rubik. Inicialmente relata-se a história do “brinquedo” para que o leitor perceba que irá trabalhar com um instrumento clássico que será conhecido por anos e anos e não um recurso que se tornará obsoleto. Seguido de manuais que apresentam o cubo mágico ao leitor e o ensina a desembaralhar suas peças de uma forma simples e acessível. Já no contexto acadêmico, voltado para o ensino superior, foi elaborado um capítulo que mostra uma possibilidade de materializar o tão abstrato conteúdo de teoria de grupos. Visando o ensino básico, apresento uma proposta de projeto, que foi realizada com alunos do ensino médio, a confecção de um mosaico utilizando 500 cubos mágicos. Uma proposta interdisciplinar que desperta o interesse, mesmo de estudantes com dificuldade em matemática. Por fim, manuais de derivados do cubo – 4x4x4 e 5x5x5 - desta forma o docente pode dar continuidade ao projeto com cubos maiores.

**Palavras-chaves:** cubo de Rubik, cubo mágico; mosaico; teoria de grupos; ensino médio.

## **ABSTRACT**

This work consists of a teaching proposal using the magic cube of Rubik. Initially telling the story of the "toy" so the reader can realize that he is going to work with a classic instrument that will be known throughout years and not only a resource that is becoming obsolete. Followed by manuals that introduce the magic cube to the reader and teach to unscramble its pieces in a simple and accessible way. Moreover, in the academic context, focused on higher education, has been created a chapter that shows a possibility to materialize such an abstract content from the theory of groups. Aiming at basic education, I present a project proposal, which was carried out with high school students, developing a mosaic using 500 magic cubes. An interdisciplinary proposal that arouses interest, even of students with difficulty in mathematics. Finally, derivatives manuals of the cube -  $4 \times 4 \times 4$  and  $5 \times 5 \times 5$  – in this way the teacher can follow through this project with larger cubes.

Keywords: Rubik's cube, magic cube; mosaic; group theory; high school

## INTRODUÇÃO

No decorrer da prática docente em sala de aula, na cátedra matemática para alunos da mais tenra infância, passando por adolescentes e até idosos, é muito comum a manifestação de antipatia à matéria, refletida na dificuldade de inteligência dos assuntos e prejudicando o resultado da aprendizagem. Muitas vezes este é um comportamento motivado pelo círculo social do indivíduo, sendo cada vez mais desestimulado e tornando o trabalho do docente mais árduo.

Diante deste cenário, toda ordem de interdisciplinaridade é válida e acresce na riqueza do que se propõe, objetivando sempre alcançar os melhores saldos pedagógicos. Para isso mesclar disciplinas mais carismáticas, como artes, ou até mesmo brincadeiras, é uma boa alternativa para prender atenção dos alunos e aguçar melhor seu interesse.

Para a ampliação das prerrogativas essenciais de aprendizagem de temas matemáticos são de suma importância a concentração, memória, paciência e raciocínio. E é vasta a gama de instrumentos alheios à matemática que podem ser usados para o treinamento paralelo dos pontos essenciais que permitem o aprendizado dos títulos mais simples aos mais complexos da área de exatas com melhor fluidez, consequentemente atribuindo prazer ao processo de aprendizagem. Com o uso de objetos e utensílios mais populares a proximidade com o aluno é alcançada, uma vez que ele passa a ver o professor como um parceiro, ao invés da figura de superioridade que normalmente se tem. Uma relação de confiança e afinidade é construída e a aprendizagem acontece de maneira mais suave.

Durante os anos de docência tive a oportunidade de trazer algumas atividades lúdicas para a sala de aula. Para abordar geometria espacial, por exemplo, apresentei experimentos usando um aquário e figuras geométricas de formas não definidas para demonstrar o princípio de Arquimedes (corpos submersos). Ainda dentro deste tema construí um cubo de aresta 10cm para definir com os alunos o que é 1 litro. Também criei um boneco em tamanho real todo feito de figuras espaciais comparando-o com partes do corpo humano fazendo com que os discentes memorizassem mais facilmente. Para o estudo da trigonometria construímos um teodolito caseiro, instrumento utilizado por engenheiros e topógrafos para medir distâncias inalcançáveis, estudando, assim, as leis de senos e cossenos. Apesar de todas essas atividades terem sido bem



aceitas em sala de aula, o interesse dos alunos foi aguçado puramente pela dinâmica e não pelo conhecimento matemático envolvido nas práticas.

O cubo de Rubik, popularmente conhecido como cubo mágico, foi uma dessas abordagens. Por se tratar de um quebra cabeça conhecido há muitos anos, passando por gerações, sempre foi visto como um desafio quase impossível de ser desvendado. Assim o objeto foi facilmente aceito, pois, sua primeira impressão é a de um brinquedo clássico e não de um instrumento para ensino de matemática. Desta maneira os alunos dominaram o brinquedo, e o contexto matemático foi absorvido naturalmente.

Após várias experiências, a oficina de cubo foi o que mais despertou interesse e provocou o desafio nos alunos, refletindo diretamente nos resultados finais. Percebi melhora em vários aspectos da minha relação com os estudantes. Minha proximidade com eles aumentou significativamente, facilitando o trabalho em sala. A autoconfiança aumentou, entendendo que são capazes de solucionar problemas que julgavam difíceis, quebrando o comportamento vicioso de tratar matemática como uma matéria incompreensível. Foram demonstrando animação e interesse constantes em buscar maiores desafios dentro do tema. A solidariedade no grupo também aumentou, uma vez que passaram a ajudar uns aos outros sem a necessidade do meu intermédio direto. A oficina de montagem de cubo foi de participação voluntária, todos os inscritos foram sabendo que ganhariam apenas conhecimento cultural e intelectual e mesmo assim teve adesão satisfatória.

Ainda que com tantas opções lúdicas disponíveis principalmente no meio tecnológico, quem nunca se viu instigado a ordenar as peças de um cubo mágico? Com um destes na mão provavelmente você já pensou em alguma solução, digamos, mais prática, porém desvirtuada para atingir a proposta final da peça, tal como atirá-lo ao chão ou até mesmo descolar e colar os adesivos no lugar certo. A verdade é que todos que montam o cubo mágico, até mesmo o mais ágil de todos, já devem ter passado pela mesma situação.



Figura extraída de Pépin (2014).

Posso afirmar que qualquer pessoa que tenha vontade é capaz de montá-lo sem precisar burlar as regras ao se valer de alternativas marginais para tanto; claro, uns com mais facilidades outros com um pouco mais de dificuldade, mas todos são capazes. E o melhor, esta experiência recreativa pode ser trazida para aprimorar o ensino da matemática, justamente por desenvolver os quesitos básicos para o estudo da matéria: a concentração, memória, paciência, raciocínio e algoritmos (fórmulas).

Outros professores dentro do programa de mestrado profissional – PROFMAT – já usaram o cubo de Rubik como objeto de estudo. MOYA (2015) inicia o estudo de grupo de permutações, SILVA (2017) apresentou conceitos matemáticos pertinentes a geometria espacial no ensino médio dando ênfase ao jogo do cubo mágico. GRIMM (2016), SILVA JÚNIOR (2016) e GUIMARÃES (2016) utilizaram o cubo mágico para aplicar a teoria de grupos; todos os autores tomaram como referência *Group Theory and the Rubik's Cube*, CHEN (2014), Janet. Diferentemente deles utilizei o livro *Groups and Geometry*, NEUMANN P.M., STORY, G. A. e THOMPSON, E.C para abordar o tema teoria de grupos, e de uma forma mais simples, e interagindo com os leitores, concluiu-se a quantidade total de movimentos possíveis no cubo mágico.

Neste trabalho, apresento manuais de montagem detalhados dos cubos 3x3x3, 4x4x4 e 5x5x5 em que tive o cuidado de escreve-los com o linguajar acessível a todos os públicos. Rico em ilustrações, criadas com a preocupação de exemplificar cada passo que possa gerar dúvidas e de forma didática - com setas de orientação, fotos em ângulos diversos, cores chamativas e alertas em situações comuns de ocorrência de erro - os manuais foram testados com os próprios alunos e correções foram sendo feitas de acordo com as dificuldades de compreensão apresentadas. Tal cooperação resultou em um material moldado de forma objetiva e de fácil entendimento ao cubista iniciante. Por fim, a descrição de uma proposta de atividade interdisciplinar desenvolvida com alunos de ensino médio, a montagem de mosaicos/pixel art construída com 500 cubos de Rubik.

Defendo nesta dissertação o desenvolvimento intelectual unido três fatores. A *prática* com o cubo de Rubik, abordando no Capítulo 1 o contexto histórico no qual este quebra cabeça é inserido, bem como seus movimentos e no Capítulo 2 um método de solução do cubo de Rubik para iniciantes - a *arte* - no Capítulo 4, tem-se fotos e relatos da oficina de montagem de cubos e a utilização da peça para manifestação artística bem com a confecção de mosaicos em pixel – e a *teoria matemática* - no Capítulo 3 fez-se um estudo de teoria de grupos aplicada aos

movimentos do cubo. Além disso, no Apêndice A encontra-se manuais de montagem de derivados do cubo de Rubik (4x4x4 e 5x5x5), sendo uma opção de continuidade do trabalho.

# SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>06</b>
<b>CAPÍTULO 1 – Conhecendo o cubo mágico de Rubik e seus movimentos .....</b>	<b>11</b>
1.1 – Histórico.....	11
1.2 – As peças do cubo de Rubik.....	14
1.3 – Os seus movimentos.....	15
<b>CAPÍTULO 2 – Método de solução do cubo de Rubik para iniciantes .....</b>	<b>17</b>
2.1 – Camada 1.....	17
2.2 – Camada 2.....	22
2.3 – Camada 3.....	24
<b>CAPÍTULO 3 –Teoria de grupos e o grupo de Rubik.....</b>	<b>29</b>
3.1 Fundamentos de Teoria dos Grupos .....	29
3.2 Ações de grupo sobre o cubo de Rubik.....	34
<b>CAPÍTULO 4 – Mosaicos / Pixel Art com cubos mágicos.....</b>	<b>39</b>
4.1 – 1º Encontro.....	40
4.2 – 2º Encontro.....	41
4.3 – 3º Encontro.....	42
4.4 – 4º Encontro.....	43
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>44</b>
<b>APÊNDICE A – Derivados do cubo de Rubik.....</b>	<b>45</b>
A.1 – Como solucionar o cubo 4x4x4.....	45
A.2 – Como solucionar o cubo 5x5x5.....	54
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>60</b>

## CAPÍTULO 1.

### Conhecendo o cubo de Rubik e seus movimentos.

#### 1.1 - Histórico

Criado em 19 de maio de 1974, pelo escultor e professor de arquitetura, o húngaro Ernő Rubik, com o objetivo de trabalhar com seus alunos conceitos da geometria espacial. O cubo mágico, como era chamado pelo seu criador e assim ficou conhecido no Brasil, começou a ser comercializado em 1980 pela empresa *Ideal Toys* com o nome de “Cubo de Rubik”.



*Fonte: Google imagens - Ernő Rubik*

Inicialmente, Ernő Rubik tentou usar elásticos para segurar cada uma das 26 peças do cubo mágico, mas não obteve êxito nesta forma. Só conseguiu enfim construir a peça quando esculpiu cada um de seus componentes de tal forma que seus encaixes sustentassem a estrutura do cubo sem deforma-lo e de maneira independente do giro de cada face. Materializado o cubo na forma esboçada, seu idealizador requereu o registro de patente em 1975, a qual só foi deferida em 1977. Daí em diante foi questão de tempo para que o “brinquedo” conquistasse o mundo todo.

Com o objetivo simples de embaralhar e desembaralhar as cores do cubo de Rubik, já nos dois primeiros anos de comercialização do brinquedo (1980 – 1981), o cubo ganhou o prêmio “Toy of year” (“*brinquedo do ano*”) promovido pela Associação Internacional da Indústria de Brinquedos.

Alguns livros e artigos foram escritos sobre o cubo de Rubik, o primeiro e talvez o mais famoso seja o “*You can do the cube*” (“*Você consegue resolver o cubo*”), escrito por Patrick Bossert. O livro lançado em 1981 trazia instruções passo a passo de como resolver o cubo mágico e vendeu cerca de 1,5 milhão de cópias. Hoje em dia encontramos facilmente na *internet* arquivos de leitura ou de vídeos ensinando a montar o cubo de Rubik; por exemplo no site: <http://www.cubovelocidade.com.br/> - desenvolvido pelo cubista Renan Cerpe.



Fonte: Google imagens - Capa do livro *You can do the cube*

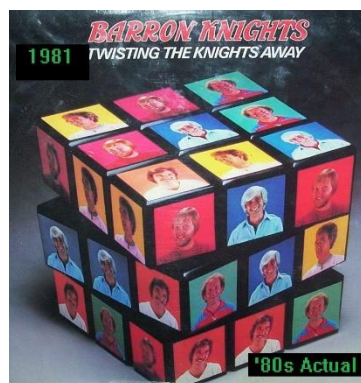
Existem variações do cubo tradicional (3x3x3) onde os mais encontrados são os cubos nas versões 2x2x2, 4x4x4 e 5x5x5. Além disso, existem também campeonatos de nível internacional donde vemos números simplesmente impressionantes como o feito do garoto estado unidense, Lucas Etter, de apenas 14 anos de idade que em 2015 ordenou todas as faces do cubo em extraordinários 4,904 segundos (link do vídeo: <https://www.youtube.com/watch?v=vh0W8E4cNkQ> – acessado em 27/01/2017) ou ainda o atual recordista mundial, do cubista coreano de 23 anos Seung Beom Cho, que na competição ChicaGhosts 2017 solucionou o cubo de Rubik em impressionantes 4,591 segundos (link do vídeo: <https://www.youtube.com/watch?v=5x8jgGX3iNM> – acessado em 27/01/2012); sem falar de robôs que desembaralham o cubo em menos de 1 segundo sendo o tempo recordista mundial de 0,637 segundos (link do vídeo:

[https://www.youtube.com/watch?time\\_continue=57&v=iBE46R-fD6M](https://www.youtube.com/watch?time_continue=57&v=iBE46R-fD6M) – acessado em 27/01/2017), pessoas que resolvem o cubo com os olhos vendados, enfim, para os que se apaixonam por esta brincadeira os limites estão por ser descobertos.



Fonte: Google imagens - Seung Beom Cho - coreano recordista mundial

Uma curiosidade sobre o cubo mágico vem da comum vontade de se optar por alternativas nada ortodoxas para chegar à solução da peça. Até mesmo o próprio criador do cubo mágico levou meses para solucioná-lo da maneira correta. Em 1981 um grupo pop britânico - *The Barron Knights* – lançou a música “*Mr. Rubik*” que conta a história de uma pessoa que morre enlouquecida tentando desembaralhar seu cubo mágico. O compositor da música - Graham Parker – levou longos 26 anos para conseguir ordenar as faces de seu cubo (<https://www.youtube.com/watch?v=XXKewhUMDqJY> – acessado em 27.01.2018).



Fonte: google imagens - Foto do álbum da banda The Barron Knights

## 1.2 - As peças do cubo de Rubik.

Existem várias maneiras de montar o cubo mágico, mas antes de iniciar qualquer um dos métodos de solução, é necessário conhecer a peça.

- Centros das faces

As peças dos centros das faces do cubo de Rubik talvez sejam as mais importantes do cubo, visto que, sua combinação é imóvel, elas determinam quais serão as cores de cada face. Sendo assim, se a peça do centro de uma face é amarela, toda ela deverá ser da mesma cor ao fim da montagem clássica do cubo.



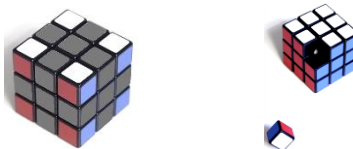
- Meios das arestas

O cubo mágico possui 12 peças localizadas nos meios das arestas cada uma delas com duas cores aparentes. Vejamos:



- Quinas

O cubo possui 8 peças nas quinas. Cada uma dessas peças é formada por três cores aparentes. E da mesma forma que as demais peças (centro das faces e meios das arestas), é fisicamente impossível que uma peça de quina ocupe outra posição que não a de quina. Observe:



**Observação:** Caso o seu cubo venha a desmontar por algum acidente ou você mesmo o desmonte para limpeza e lubrificação, ao remontá-lo as peças não podem ser encaixadas aleatoriamente, mas sim com as cores certas em cada lugar; caso contrário seu cubo restará insolucionável.



### 1.3 - Os seus movimentos.

Para iniciarmos, usaremos somente movimentos básicos. A anotação mais usual destas coordenadas entre os cubistas é em inglês, abaixo temos movimentos:

**Face Direita – Sentido Horário**



*R*

**Face Direita – Sentido Anti-Horário**



*R'*

**Face Esquerda – Sentido Horário**



*L*

**Face Esquerda – Sentido Anti-Horário**



*L'*

**Face Superior – Sentido Horário**

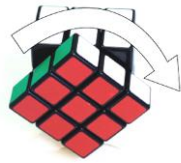


*U*

**Face Superior – Sentido Anti-Horário**



*U'*

**Face Inferior – Sentido Horário***D***Face Inferior – Sentido Anti-Horário***D'***Face Frontal – Sentido Horário***F***Face Frontal – Sentido Anti-Horário***F'***Face Traseira – Sentido Horário***B***Face Traseira – Sentido Anti-Horário***B'*

## CAPÍTULO 2

### Método de solução do cubo de Rubik para iniciantes.

Conhecidos os componentes e movimentos do cubo mágico, passamos agora para a solução deste. Se durante a execução perceber que algo está errado, analise o cubo e buque a melhor saída se preciso for retome a montagem do início. Não desista!

Para iniciantes, proponho que a melhor maneira para ordenar um cubo mágico é pelo método de camadas (i.e., três andares do cubo); a qual consiste, como o próprio nome diz, desembaralhar o cubo camada por camada, estas que chamaremos de camada 1, 2 e 3 – Inferior, intermediária e superior. O método abordado e de origem desconhecida.

#### 2.1 - Camada 1

- 1º passo – Forme a “Cruz”.

Inicie a montagem da camada 1 formando uma “cruz” (**Figura 1**).

Escolha uma das 6 cores de seu cubo mágico para a cruz; lembre-se que a peça do centro determina a cor de cada uma das faces, na demonstração, escolheu-se a cor branca.

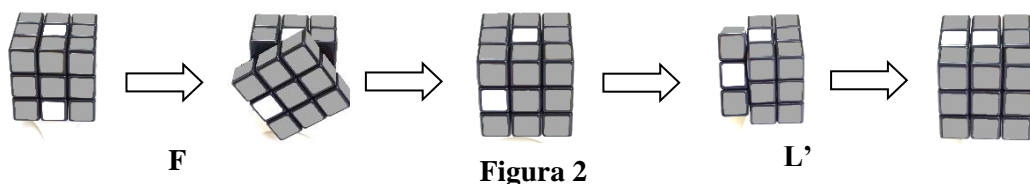


Figura 1

Podem ser seguidas algumas dicas para a formação da cruz inicial, seguem:

- ✓ **Dica 1 – Peças nas faces laterais.**

Observe a sequência de figuras abaixo:



A peça que está destacada deverá subir para iniciar a formação da cruz.



Com estas três dicas você será capaz de construir sua cruz.

- **2º passo – Oriente as peças da cruz.**

Formada a cruz, deve-se orientar **todas** as peças de meio de aresta com as suas respectivas peças de centro de face. Repare na figura ao lado (**Figura 4**) em que a peça “branca - verde” está alinhada com o centro Laranja, quando a posição correta é seu alinhamento com o centro verde.



Figura 4

Mas atenção: na maioria dos casos, não basta apenas rotacionar a camada em que se localiza a peça bicolor em direção ao seu centro correspondente, porque todas as peças de meio de aresta precisam estar alinhadas com seus respectivos centros de face **ao mesmo tempo**, para isso, realize os seguintes movimentos:

- ✓ Gire a face frontal a 180°. (**F2**)



- ✓ Movimento seguinte, gire as duas camadas superiores até alinhar as cores.



- ✓ Finalize girando a face frontal a 180° (**F2**)



Agora, repare que ao volver pela segunda vez a face frontal  $180^\circ$ , colocamos a peça branca-verde em seu lugar, mas ao mesmo tempo, move uma das peças da cruz branca para a parte inferior (**Figura 5**).



Figura 5

✓ Para voltar a peça deslocada da cruz branca para o seu lugar, repita a rotação das duas camadas superiores até que as cores do centro fiquem alinhadas.



✓ E novamente movendo a face frontal a  $180^\circ$  (**F2**)



✓ Repita este processo até que todos os meios de aresta estejam alinhados com seus respectivos centros de face. Pronto, a cruz está formada novamente e agora com seus meios e centros alinhados corretamente!



• **3º passo – Coloque as quinas em seus devidos lugares.**

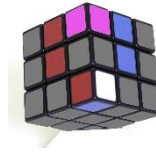
Para colocar as quinas brancas em seus lugares, e assim finalizar a camada 1, siga as seguintes instruções:

✓ Identifique a cor da peça que deverá ser posicionada em cada uma das quinas. Observe a figura ao lado (**Figura 6**), para decidir qual peça deverá ficar na quina destacada em roxo, por exemplo, basta observar a cor dos centros que a tocam, no caso tem-se que peça correta para este local é uma quina azul – branca – vermelha.



Figura 6

✓ Após identificar a cor da peça, mova-a, sem desfazer a cruz, para a camada oposta na posição abaixo da quina destacada.

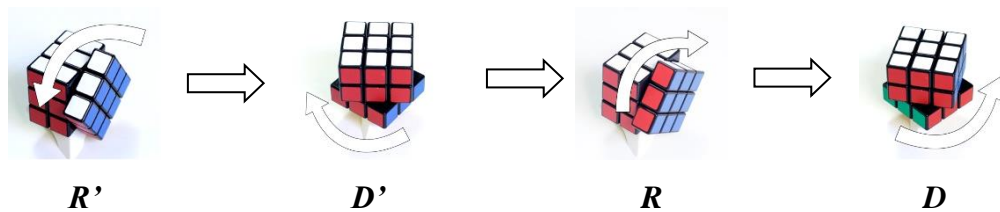


✓ Em seguida, oriente o cubo de tal forma que a quina destacada fique de frente para você e na sua mão direita.



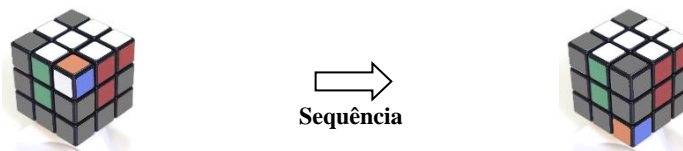
Depois repita a **Sequência 1** abaixo demonstrada até que a peça fique orientada em seu lugar correto. (Observação: a sequência será repetida em máximo seis vezes.)

#### Sequência 1 – Orientação das quinas



✓ Caso a peça a ser movida não esteja na camada inferior do cubo, realize a **sequência 1** apenas uma vez, deste modo você a moverá para a camada inferior na posição oposta (**Figura 7**). A partir daí, poderá ser realizado os atos de identificação e movimentos da sequência 1.

Figura 7



✓ Repita este processo com cada uma das quatro quinas até completar a camada 1.



## 2.2 - Camada 2

Nesta etapa iremos colocar até quatro peças em seus respectivos lugares. Com seu cubo posicionado de tal forma que a camada 1 fique voltada para baixo, tem-se duas possíveis situações:

### Mover para a diagonal direita



Figura 8

### Mover para a diagonal esquerda



Figura 9

- ✓ Primeiramente devemos posicionar a peça antes de move-la:

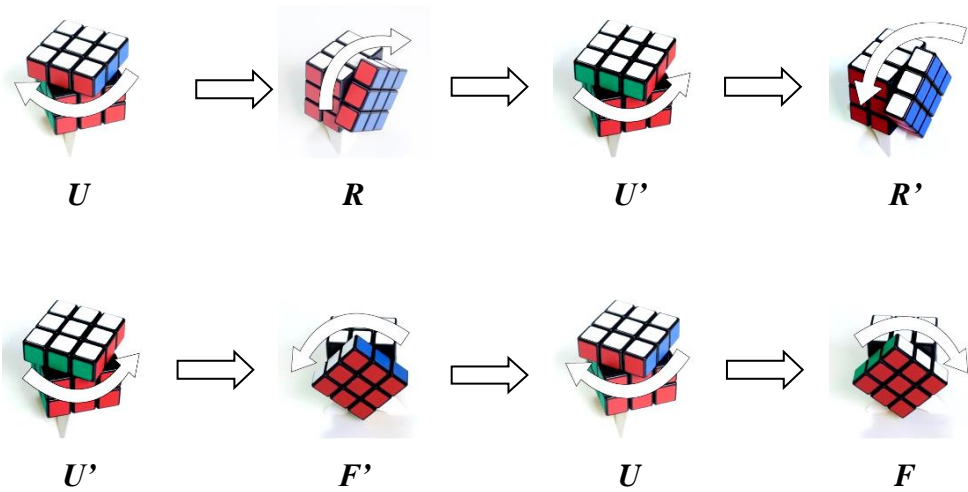
Observe na **Figura 8**, temos como exemplo, a peça azul – laranja que está alinhada com o centro laranja e deve ser posicionada também com o centro azul (**mover para a diagonal direita**).

Da mesma maneira que na **Figura 9** temos a peça azul – vermelha devidamente alinhada com o centro vermelho e vamos posicioná-la também junto ao centro azul (**mover para a diagonal esquerda**).

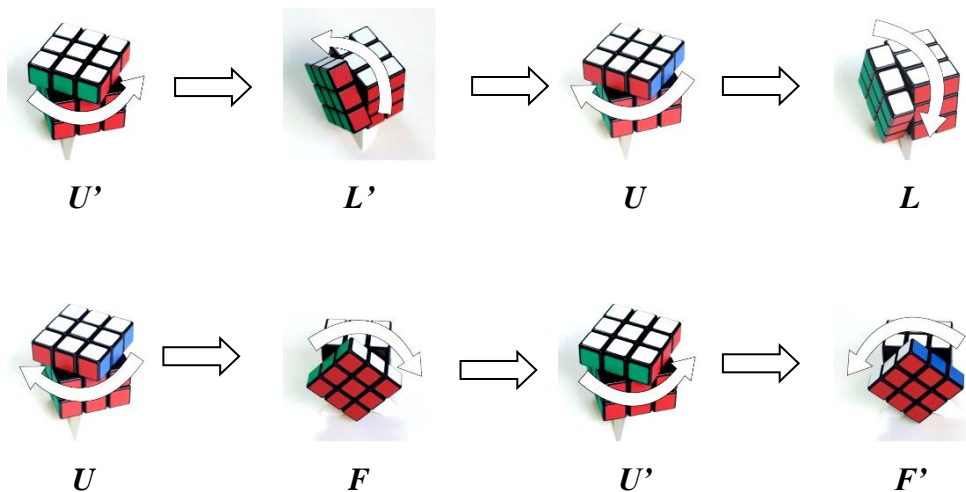
- ✓ Depois de realizado o alinhamento, segure o cubo de forma que a peça a ser movida para uma das diagonais esteja na face frontal e depois realize a **Sequência 2** ou a **Sequência 3**, de acordo com a direção escolhida.



### Sequência 2 - Mover para a diagonal direita



### Sequência 3 – Mover para a diagonal esquerda.



✓ É possível que ainda com o cubo desordenado você encontre peças já na posição correta, porém em ordem invertida (**Figura 10**). Neste caso, basta mover qualquer peça para esta posição, o que obviamente fará com que a peça invertida se reposicione na camada superior, podendo daí ser realizada uma das sequências acima para ordenação desta.



Figura 10

✓ Faça isso com todas as peças até que a camada 2 esteja terminada. Teremos nesta fase, a camada 1 e a camada 2 prontas!



## 2.3 - Camada 3

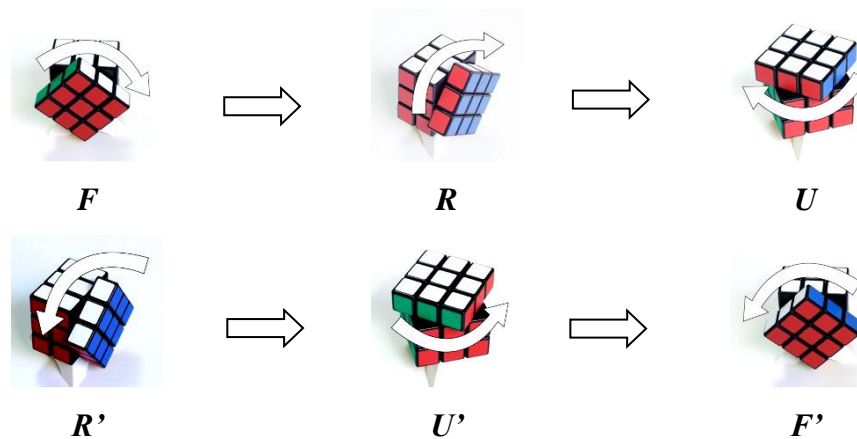
- 1º Passo - Cruz na camada 3

Neste ponto, nos resta apenas a camada 3 para ordenação.

Virando o cubo de cabeça para baixo, a camada 3 fica aparente na superfície de cima do brinquedo, onde deve ser então formada outra cruz de forma semelhante à cruz inicial.

Contudo, a maneira de formar esta segunda cruz difere daquela primeira formada inicialmente; para esta, ignoram-se as peças das quinas, focando apenas nas peças dos meios das arestas. Oportunamente executaremos a seguinte sequência:

### Sequência 4 – Cruz superior



Pois bem, finalizadas as camadas 1 e 2, haverá somente quatro possibilidades de posições dos meios de arestas a se apresentar na camada 3:



✓ Caso o formato apresentado seja o **Ponto** realize a **Sequência 4** com o cubo na posição que desejar. Feito isso, você terá a posição **J**.

✓ Evidenciada a posição **J**, posicione o cubo de forma que uma das pontas do “J” esteja no meio da aresta esquerda e a outra na aresta superior, conforme a figura “**J**” (**Jota**); assim posicionado, faça a **Sequência 4**. Com isso terá formado a posição **Linha**.

✓ Diante da posição **Linha**, disponha o cubo de forma que ela fique no sentido horizontal, repita então a **sequência 4**. Alcançando assim a formação da segunda **Cruz** pretendida.

• **2º Passo - Oriente a segunda cruz**

Feita a segunda cruz, pode-se encontrar três possíveis casos:

**Dois meios opostos corretos**



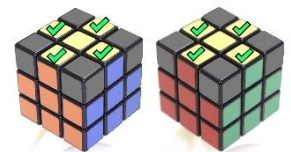
(Fotos tiradas em ângulos diferentes)

**Dois meios adjacentes corretos**



(Fotos tiradas em ângulos diferentes)

**Quatro meios corretos**

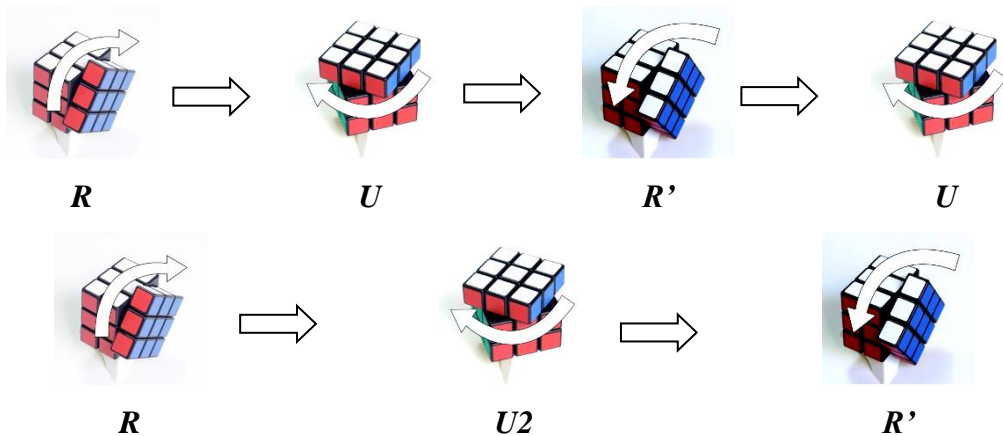


(Fotos tiradas em ângulos diferentes)

**Observação:** Às vezes parece que não temos nenhuma das situações acima, porém basta girar a camada 3 até encontrar um desses três casos.

Em qualquer um dos casos que se apresente, resolveremos com a realização da sequência que segue.

**Sequência 5**



✓ Tendo **dois meios opostos corretos**, posicione o cubo de tal maneira que um meio correto esteja na aresta inferior e o outro na aresta superior, daí faça a **sequência número 5**. Feito isso você certamente encontrará a posição **dois meios adjacentes corretos**.

✓ A partir de **dois meios adjacentes corretos**, coloque o cubo com um meio correto na aresta direita e o outro na aresta superior, seguindo para a **sequência número 5** e após dê mais um giro de  $90^\circ$  nesta camada 3 no sentido horário para obter os **quatro meios corretos**.

• **3º Passo – Posicione as peças de quinas**

Ao terminar de posicionar e orientar as peças de meio (formar a cruz) deve-se alocar as peças de quinas em seus devidos lugares, e logo após orientá-las. Para determinar se uma quina está em seu lugar correto basta olhar para os centros adjacentes.

Mais uma vez, teremos três possíveis situações:

**Quatro quinas em posições erradas**



**Uma quina posicionada corretamente e três em posições erradas.**

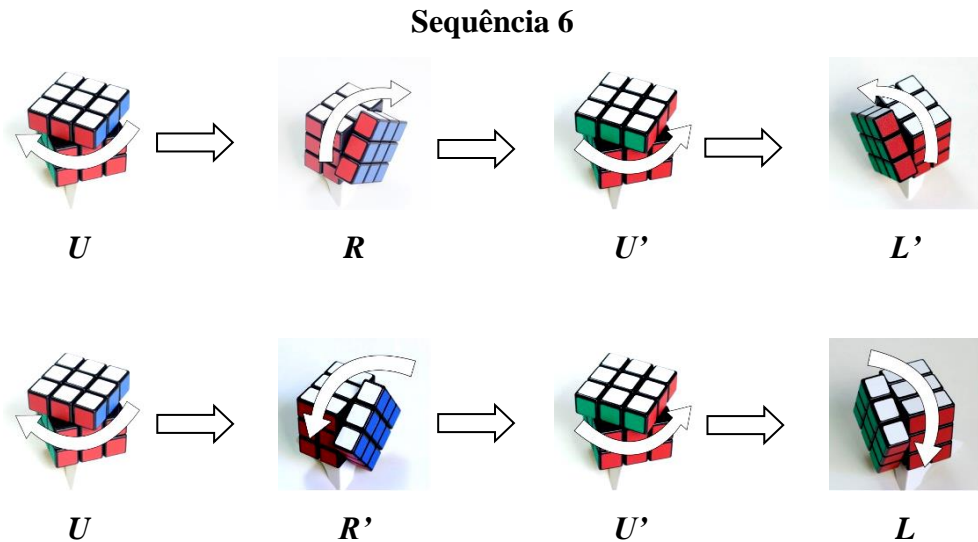


**Quatro quinas posicionadas corretamente**



Lembre-se que dizer que a peça está **posicionada** corretamente não quer dizer que ela está **orientada** corretamente. Estar posicionada significa dizer que a peça está no lugar certo, mas não necessariamente com a cor correta aparente no lado correto, se assim estivesse, ela também estaria orientada.

Independente da formação que se tenha, a movimentação para solução a partir daqui sempre será a:



✓ Caso o formato encontrado seja **quatro quinas em posições erradas**, coloque o cubo da maneira que preferir e siga a movimentação da **Sequência 6**. Depois de feito o movimento observe as posições das quinas, certamente você terá **uma quina posicionada corretamente e três em posições erradas**.

✓ Tendo **uma quina posicionada corretamente e três em posições erradas**, segure o cubo de tal maneira que se tenha a quina correta no lado direito inferior (como a ilustração) para então realizar a **Sequência 6** e alcançar as quatro quinas posicionadas corretamente. Caso não atinja esta condição, repita a **Sequência 6** mais uma vez para enfim organizar as **quatro quinas posicionadas corretamente**.

• **4º Passo – Oriente as peças de quinas (Finalização da montagem)**

Com as quinas devidamente posicionadas, nos resta agora apenas orientá-las corretamente, se necessário.

Observe na **Figura 11** em que a peça assinalada com um “x” precisa ser orientada corretamente; para isso, com o cubo posicionado conforme mostra tal figura e realize a **Sequência 1** por completo quantas vezes for necessário (duas quatro ou seis vezes) até que a peça fique orientada corretamente com a cor amarela voltada para cima (**Figura 12**).



Figura 11



Figura 12

**Observação:** Neste momento é comum termos a sensação que estamos desmanchando todas as camadas e suas peças já justapostas, mas é então que a “mágica” acontece. Ao final, em um último movimento todas as faces do cubo irão se organizar.

ATENÇÃO, tenha cuidado nesta parte; NÃO ROTACIONE O CUBO!

Com o cubo aparentemente desorganizado, gire a face superior até encontrar outra peça que precise ser orientada de modo a deixá-la na posição onde encontra-se o “x”, conforme ilustração:



Feito isto, siga novamente a **Sequência 1** por completo quantas vezes for necessário para que a superfície amarela fique voltada para cima (ver **Figura 13**).

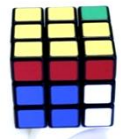
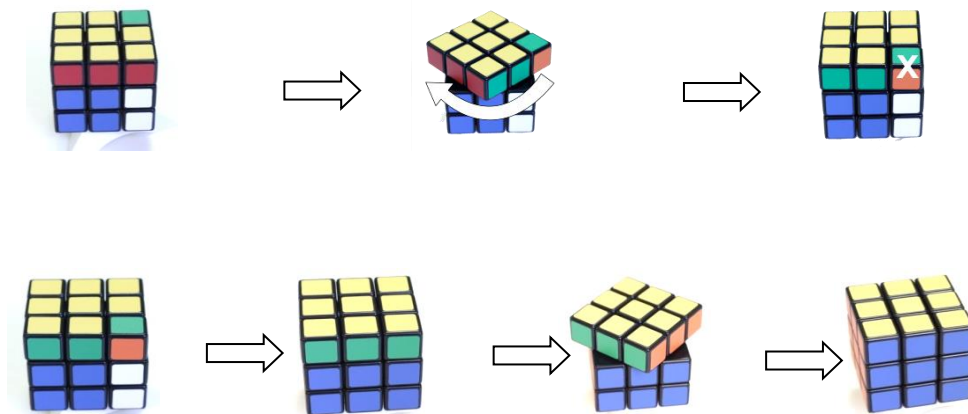


Figura 13

Novamente gire a camada superior até encontrar outra quina que precise ser orientada corretamente e assim sucessivamente até uniformizar a cor da camada.



Atingido o objetivo do cubo mágico de Rubik.

## CAPÍTULO 3

### Teoria de grupos e o grupo de Rubik.

Neste capítulo veremos a teoria de grupos e sua aplicação no cubo mágico. Tal capítulo foi escrito pensando em uma leitura dinâmica, onde o leitor deve interagir com o trabalho. Exercícios são sugeridos durante toda a seção 3.1, que está voltada para a teoria de grupo. Já na seção 3.2 é encontrado a ação de grupos sobre o cubo mágico, esta parte se torna mais compreensível quando o leitor já compreende os movimentos do cubo de Rubik.

#### 3.1 - Fundamentos de Teoria dos Grupos

**Definição 3.1.1.** Um conjunto  $G$  juntamente com uma operação (binária)  $*$ :  $G \times G \rightarrow G$ , é um **grupo** se as seguintes condições são satisfeitas:

**G1.** (associatividade)  $a * (b * c) = (a * b) * c$ , para quaisquer  $a, b$  e  $c$  em  $G$ ;

**G2.** existe um elemento  $e$  em  $G$ , chamado elemento identidade, tal que

$$a * e = a$$

para cada  $a$  em  $G$ ;

**G3.** Para cada  $a$  em  $G$ , existe um elemento  $a^{-1}$  em  $G$  tal que  $a * a^{-1} = e$ ; tal elemento é chamado inverso de  $a$ .

**Exemplos 3.1.2.** – São exemplos de grupo:

- 1) O conjunto  $\mathbb{Z}$  de todos os números inteiros com a adição usual.
- 2) O conjunto  $\mathbb{R} - \{0\}$  de todos os números reais não nulos com a multiplicação usual.
- 3) O conjunto constituído dos números 1 e  $-1$  com a multiplicação usual.

**Exercício 3.1.3.**

(1) Se  $G$  e  $H$  são grupos, verifique que o conjunto  $G \times H$ , consistindo de todos os pares  $(g, h)$ , onde  $g$  é um elemento de  $G$  e  $h$  é um elemento de  $H$ , torna-se um grupo com a operação

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$$

onde o produto  $g_1 g_2$  é tomado em  $G$  e o produto  $h_1 h_2$  é tomado em  $H$ .

(2) Prove que o conjunto  $S_3$  de todas as permutações (*i.e.*, bijeções<sup>1</sup>)  $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$  é um grupo com a operação de composição (para quaisquer  $f$  e  $g$  em  $S_3$  e  $j$  em  $\{1, 2, 3\}$ , tem-se  $(g \circ f)(j) = g(f(j))$ ). Escrevendo uma permutação na forma  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}$  temos:

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Verifique que o elemento inverso da permutação  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  é  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ; e calcule o produto  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

Seja  $X$  um conjunto qualquer. À luz do Exercício 3.1.3(2), o conjunto de todas as permutações de  $X$  em  $X$  juntamente com a composição de funções forma um grupo, o qual será denotado por  $Perm(X)$ . Tradicionalmente, quando  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  tal grupo é simplesmente denotado por  $S_n$ .

Considere um subconjunto  $H$  de um grupo  $G$ . Se acontecer de  $H$  se tornar um grupo sob a mesma operação de  $G$ , dizemos que  $H$  é um **subgrupo** de  $G$ . Em outras palavras, um subconjunto não vazio de  $G$  é um subgrupo se e somente se ele é fechado com relação as operações  $(x, y) \mapsto x * y$  e  $x \mapsto x^{-1}$  em  $G$ . Neste caso, escrevemos  $H \leq G$ .

#### Exemplos 3.1.4.

1) O conjunto dos números pares (incluindo os pares negativos) é um subgrupo do grupo aditivo  $\mathbb{Z}$ . Mais geralmente, o conjunto de todos os múltiplos de um inteiro  $m \geq 0$  é um subgrupo de  $\mathbb{Z}$ .

2) Sob a multiplicação usual, o conjunto  $\{-1, 1\}$  possui exatamente dois subgrupos, a saber,  $\{1\}$  e  $\{-1, 1\}$ .

---

<sup>1</sup>Relembre que uma bijeção  $f: X \rightarrow Y$  é uma relação entre os elementos de  $X$  e elementos de  $Y$  tal que  $f$  relaciona a cada  $x$  em  $X$  um único  $y$  em  $Y$  e a cada  $y$  em  $Y$  em um único  $x$  em  $X$ .



3) O conjunto das permutações  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  forma um subgrupo de três elementos de  $S_3$ .

Doravante, salvo menção contrária  $G$  será um grupo multiplicativo.

### Exercícios 3.1.5.

(1) Um **homomorfismo** entre dois grupos  $G$  e  $G'$  é uma função  $f: G \rightarrow G'$  tal que:

$f(xy) = f(x)f(y)$  para quaisquer  $x$  e  $y$  em  $G$  (onde o produto  $xy$  ocorre em  $G$  e  $f(x)f(y)$  em  $G'$ ). Verifique que de um tal homomorfismo obtém-se que:

- a)  $\text{Ker}(f) = \{x \in G \mid f(x) = e'\}$  é um subgrupo de  $G$  (chamado **núcleo** de  $f$ );
- b)  $\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in G\}$  é um subgrupo de  $G'$  (chamado **imagem** de  $f$ ).

(2) Se  $A$  e  $B$  são subgrupos de um grupo  $G$  com as seguintes propriedades

**P1.** cada elemento  $g$  em  $G$  pode ser escrito, de modo único, como  $g = ab$  com  $a$  em  $A$  e  $b$  em  $B$ .

**P2.** para quaisquer  $a$  em  $A$  e  $b$  em  $B$  vale  $ab = ba$ ;  
então a função

$$G \rightarrow A \times B$$

$$g = ab \mapsto (a, b)$$

é uma bijeção e um homomorfismo se a operação  $A \times B$  for como a do Exercício 3.1.3(1) (Nestas condições, dizemos que  $G$  é o **produto direto**  $A \times B$ ).

As definições de grupo e subgrupo tornam clara que a interseção de qualquer coleção de subgrupos de  $G$  é novamente um subgrupo de  $G$ . De fato, o elemento identidade pertence à interseção, e se  $g_1$  e  $g_2$  pertencem à interseção, então também pertencem  $g_1g_2$  e  $g_1^{-1}$ .

**Definição 3.1.6.** Seja  $S$  um subconjunto de elementos de  $G$ . Dizemos que a interseção  $\langle S \rangle$  de todos os subgrupos de  $G$  (incluindo o próprio  $G$ ) que contêm  $S$  é o **subgrupo gerado** por  $S$ .

Em outros termos,

$$\langle S \rangle = \{s_1^{u_1} \dots s_m^{u_m} \mid s_i \in S, u_i \in \{\pm 1\}, m \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}\}.$$

**Exemplos 3.1.7.**

1) No grupo aditivo  $\mathbb{Z}$ , o subgrupo gerado pelo conjunto  $\{2\}$  consiste dos números pares; já o subgrupo gerado por  $\{2, 3\}$  é todo o  $\mathbb{Z}$ .

2) O grupo multiplicativo  $\{-1, 1\}$  possui um elemento que o gera.

**Exercício 3.1.8.** Seja  $n$  um inteiro  $> 1$ . Dizemos que uma permutação  $f$  em  $S_n$  é um **r-ciclo** se existem  $i_1, i_2, \dots, i_r$  em  $\{1, 2, \dots, n\}$  tais que

$$f(i_1) = i_2, f(i_2) = i_3, \dots, f(i_{r-1}) = i_r, f(i_r) = i_1 \text{ e } f(j) = j \text{ para cada } j \notin \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$$

É comum denotar tal  $f$  por  $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ .

(a) Note que  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)(4)(5\ 7)(6\ 8)$ .

Agora escreva  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  como um produto de ciclos.

(b) Usando o fato que cada permutação de  $S_n$  é um produto de ciclos, mostre que cada permutação de  $S_n$  é um produto de 2-ciclos.

(c) Dizemos que uma permutação de  $S_n$  é **par** se ela é um produto de um número par de 2-ciclos; caso contrário, ela é **ímpar**. Verifique que o subconjunto  $A_n$  das permutações pares é um subgrupo de  $\frac{n!}{2}$  elementos.

(d) Prove que  $A_n$  é gerado por todos os 3-ciclos de  $S_n$ .

(Dica: Temos  $(i_1, i_2, \dots, i_r) = (i_1\ i_r)(i_1\ i_{r-1}) \dots (i_1\ i_2)$ ,  $(i\ j)(k\ l) = (j\ l\ k)(i\ k\ j)$  e  $(i\ j)(i\ l) = (i\ l\ j)$ ).

### Teorema de Lagrange

Seja  $H$  um subgrupo de um grupo multiplicativo  $G$ . Para cada  $x$  em  $G$ , escrevemos  $xH$  para o conjunto de todos os elementos  $xh$  com  $h \in H$ .

Para estabelecermos a mais célebre proposição desta seção fazemos duas observações:

1. Temos que a função  $h \mapsto xh$  de  $H$  em  $xH$  é uma bijeção. (De fato, isto segue da definição de grupo).

2. Se  $xH$  e  $yH$  possuem um elemento em comum, então  $xH = yH$ . (Com efeito, se  $xh = yh'$  com  $h$  e  $h'$  em  $H$ , então  $xH = y(h'h^{-1})H = yH$ ).

O número de elementos de um grupo finito  $G$  é chamado de **ordem** do grupo, a qual será denotada por  $|G|$ .

**Proposição 3.1.9.** (“Teorema de Lagrange”). Se  $H$  é um subgrupo de um grupo finito  $G$ , então a ordem de  $H$  divide a ordem de  $G$ .

**Demonstração:** Cada elemento  $x$  de  $G$  pertence a  $xH$ , e, pela observação 2, pertence apenas a um conjunto da forma  $yH$ . Como o número de elementos de  $xH$  é igual à ordem de  $H$  (observação 1), temos que a ordem de  $G$  deve ser um múltiplo da ordem de  $H$ .

O número de subconjuntos distintos da forma  $xH$  em  $G$  é chamado de **índice** de  $H$  em  $G$ . Por exemplo, o Exercício 3.1.8 diz que o índice de  $A_n$  em  $S_n$  é 2.

**Exercício 3.1.10.** Sob as notações do Exercício 3.1.5(1), prove que se  $G$  é finito então

$$|G| = |Ker(f)| \cdot |Im(f)|.$$

**Definição 3.1.11.** Uma **ação** de um grupo  $G$  sobre um conjunto  $X$  consiste de um homomorfismo

$$\rho: G \rightarrow Perm(X).$$

Neste contexto é comum escrevermos  $g \cdot x$  em vez de  $\rho(g)(x)$ . Além disso, para cada  $x$  em  $X$  chamamos o conjunto de todos os elementos  $g \cdot x$ , com  $g$  percorrendo  $G$ , de a **órbita** de  $x$ .

### Exemplos 3.1.12.

1) Uma ação do grupo multiplicativo  $\{-1, 1\}$  sobre o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  é dada por  $1 \cdot x = x$  e  $(-1) \cdot x = -x$  para cada  $x$  em  $\mathbb{R}$ . A órbita do número  $\pi$  sob essa ação é  $\{\pm\pi\}$ .

2) O grupo aditivo  $\mathbb{Z}$  age sobre  $\mathbb{R}$  por  $n \cdot x = x + n$ . A órbita de  $\sqrt{2}$  é  $\{\sqrt{2} + n | n \in \mathbb{Z}\}$ ; as órbitas de 0 e 2018 coincidem.

## 3.2 - Ações de grupos sobre o cubo de Rubik

O cubo mágico de Rubik é formado por 27 pequenos cubos dispostos em camadas  $3 \times 3 \times 3$  e tem suas faces coloridas em: amarelo (yellow), azul (blue), branco (white), laranja (orange), verde (green) e vermelho (red). Usaremos nesta seção as notações Y, B, W, O, G e R, respectivamente, para representar os 6 movimentos básicos de cada uma dessas faces: por exemplo, Y é o movimento em  $90^\circ$  no sentido horário da face de centro amarelo, B é o movimento em  $90^\circ$  no sentido horário da face azul, etc.

Vamos aqui estudar o que acontece quando realizamos uma sucessão de movimentos básicos; portanto consideremos o grupo  $M$  gerado pelos movimentos básicos.

Dos 27 pequenos cubos que formam nossa peça, os centrais de cada face permanecem em seu devido lugar independente do movimento que se realiza, além do que o pequeno cubo central, aquele que não conseguimos ver, também é imóvel. Então vamos denotar por  $C$  o conjunto formado pelos 20 pequenos cubos móveis; sendo assim, qualquer movimento básico age permutando  $C$ , logo temos uma ação de  $M$  sobre  $C$ .

Ademais, no nosso conjunto  $C$  temos 8 cubos de quina e 12 cubos de meio de aresta, e, de fato, qualquer elemento de  $M$  age sobre  $C$  levando peças de quina para quina e peças de meio de aresta para meio de aresta; nunca teremos um elemento de  $M$  que leva uma peça de quina para meio de aresta e vice-versa. Dessa forma:

**Lema 3.2.1:** O grupo  $M$  possui duas órbitas sobre  $C$ , nomeadamente o conjunto  $C_q$  dos 8 cubos de quina e o conjunto  $C_a$  dos 12 cubos de meio de aresta.

Com o objetivo de entender o grupo  $M$ , iremos responder duas perguntas:

- a) qual é a imagem  $P$  da ação de  $M$  sobre  $C$ ;
- b) qual é o núcleo da ação  $N$  de  $M$  sobre  $C$ ?

Para obter tais respostas vamos a uma série de observações e exercícios.

Seja  $P$  a imagem da ação de  $M$  sobre  $C$  (*i.e.*, as permutações de  $C$  induzidas pelos elementos de  $M$ ) o grupo de todas as permutações  $C$  que permutam os cubos de quinas entre si e os cubos de meio de aresta entre si é o produto direto  $Perm(C_q) \times Perm(C_a)$ , identificado com  $S_8 \times S_{12}$  para simplificar a notação. Portanto,  $P \leq S_8 \times S_{12}$ .

**Observação 3.2.2.** Sendo  $E$  e  $F$  movimentos básicos associados a um par de faces adjacentes do cubo e  $E'$  e  $F'$  os respectivos movimentos básicos no sentido anti-horário, então o movimento comutador  $E' F' E F$  age como um 3-ciclo de  $C_a$ , permutando três cubos de meio de arestas ciclicamente e deixando os 9 restantes fixos. Além disso, ele age permutando dois pares de cubos de quina e deixando outros quatro cubos de quina fixos, ou seja age como uma “transposição dupla” sobre os cubos de quina.

Daí, tem-se que  $(E' F' E F)^2$  age como um 3-ciclo sobre  $C_a$  enquanto regressa todos os cubos de quina para sua posição original (porém não orientados como antes); e  $(E' F' E F)^3$  retorna os cubos de meio de aresta para sua posição original (corretamente orientado) e age como uma dupla transposição sobre  $C_q$ .

**Exercício 3.2.3.** Mostre que os 3-ciclos obtidos no comutador  $E' F' E F$  gera o grupo  $A_{12}$  de todas permutações pares de  $C_a$ . Mostre também que as transposições duplas obtidas desse modo a partir de movimentos comutadores geram o grupo  $A_8$  de todas as permutações pares de  $C_q$ .

(Dica. Considere o grupo gerado por dois 3-ciclos que têm apenas uma peça em comum. Você deve ser capaz de mostrar que ele é  $A_5$ . Considere então o grupo gerado por ele juntamente

com mais um 3-ciclo que tem apenas uma peça em comum com as outras cinco; e compreenda o grupo todo gerado pelos 3-ciclos disponíveis).

Pelo Exercício 3.2.3,  $P$  contém todos os elementos de  $A_8 \times A_{12}$ . Além disso, qualquer movimento básico, como por exemplo  $W$  (movimento em  $90^\circ$  no sentido horário da face de centro branco) age como um 4-ciclo sobre  $C_q$  que é uma permutação ímpar. Dessa forma, cada uma das permutações de  $C_q$  pode ser obtida por algum elemento de  $M$ . De maneira análoga, qualquer permutação de  $C_a$  pode ser obtida através de um movimento adequado. Por outro lado, cada movimento básico age como um 4-ciclo sobre cada um dos conjuntos  $C_q$  e  $C_a$ , portanto, age como uma permutação par de  $C$ . Temos então que cada movimento nos dá uma permutação par de  $C$ , isto é:

$$A_8 \times A_{12} \leq P \leq (S_8 \times S_{12}) \cap A_{20}$$

Agora o grupo  $(S_8 \times S_{12}) \cap A_{20}$  consiste das permutações pares em cada um dos conjuntos  $C_q$  e  $C_a$  ou ímpares em cada um  $C_q$  e  $C_a$ ; ele contém  $A_8 \times A_{12}$  como um subgrupo de índice 2. Estas afirmações são suficientes para provar o seguinte resultado.

**Lema 3.2.4:** O grupo  $P$  é  $(S_8 \times S_{12}) \cap A_{20}$ ; consiste em todas as permutações de  $C$  que têm a mesma paridade em  $C_q$  e  $C_a$ ; sua ordem é  $\frac{1}{2} \cdot 8! \cdot 12!$

Isto responde a questão a); passemos à questão b).

Investigaremos agora o núcleo  $N$  de ação de  $M$  sobre  $C$ ; ele consiste de todos os movimentos que deixam cada pequeno cubo em seu lugar original (não necessariamente orientado corretamente).

Considere então, o efeito dos movimentos sobre cada um dos 54 quadradinhos visíveis no cubo mágico, 9 em cada uma das faces, sendo 6 deles fixos. Daí tem-se o conjunto  $D$  formado pelos 48 quadradinhos móveis, portanto temos que  $M$  age sobre  $D$ .

Dentre os 48 quadradinhos de  $D$  note que os quadradinhos de quina permutam entre si e os quadradinhos de meio de aresta também permutam entre si, denotados respectivamente por  $D_q$  e  $D_a$ . Desta maneira, o conjunto  $D$  pode ser representado pela união disjunta  $D_q \cup D_a$ .

**Observação 3.2.5.** O grupo  $M$  tem duas órbitas sobre  $D$ , nomeadamente  $D_q$  e  $D_a$ .

Vamos agora considerar um grupo auxiliar maior do que  $M$ . Imagine que você possa desencaixar cada um dos 27 cubinhos de seu cubo mágico e remontá-lo da maneira que quiser; todas as manobras desse modo formam o grupo que chamaremos de  $Q$ . Além disso podemos perceber que  $Q$  possui duas órbitas  $Q_q$  e  $Q_a$  que são, respectivamente: as dos pequenos cubos em posições de quina e os pequenos cubos em posições de meio de aresta.

Tendo definido  $Q$  desta maneira, fica claro que qualquer movimento do cubo em  $M$  pertencerá ao grupo  $Q$ , ou seja  $M \leq Q$ .

**Exercício 3.2.6:** Verifique que  $Q$  é o produto direto  $Q_q \times Q_a$ , onde  $|Q_q| = 8! \cdot 3^8$  e  $|Q_a| = 12! \cdot 2^{12}$ . E conclua que  $Q$  possui ordem  $8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12}$ .

Observe agora que  $Q_q$  age sobre  $C_q$  como todo grupo simétrico  $S_8$ , e observe também que cada um dos 8 pequenos cubos pode ser rotacionado de três maneiras por meios dos ângulos  $0^\circ$ ,  $120^\circ$  ou  $240^\circ$ . Desta forma, o núcleo  $K_q$  dessa ação é o produto direto de 8 cópias de um grupo de ordem 3.

De maneira análoga,  $Q_a$  age sobre  $C_a$  como todo o grupo simétrico  $S_{12}$  e como cada um dos 12 pequenos cubos podem ser posicionados de duas maneiras, o núcleo  $K_a$  dessa ação é o produto direto de 12 cópias de um grupo de ordem 2.

De volta ao grupo  $N$ , que é formado por todos os movimentos compostos que retornam as peças do cubo de Rubik ao seu lugar original, denotaremos por  $N_q$  e  $N_a$  as imagens das ações de  $N$  sobre  $D_q$  e  $D_a$ , respectivamente. Notemos que  $N_q \leq K_q$  e  $N_a \leq K_a$ .

**Exercício 3.2.7:** Prove que  $N = N_q \times N_a$ .

Vamos por um momento, imaginar nas quinas do nosso cubo que ao invés de cores cada cubo de quina fosse numerado com 0, 1 ou 2, marcados no sentido horário quando se olha diretamente para a quina. Então, a cada manobra de  $Q$  pode ser associada um número em módulo  $\{0, 1, 2\}$ , conforme a peça vai sendo girada nos ângulos  $0^\circ$ ,  $120^\circ$  ou  $240^\circ$ . Quando somamos todos os ângulos de rotação dos 8 pequenos cubos de quina encontramos módulo  $360^\circ$ , o ângulo de  $120^\circ$  multiplicado por  $k$ , onde  $k$  pertence a  $\{0, 1, 2\}$ .

**Exercício 3.2.8:** Mostre que para qualquer movimento de  $M$ ,  $k$  é 0.

(Dica: primeiro verifique que  $k$  é 0 para todo movimento básico).

**Lema 3.2.9.** O grupo  $N_q$  consiste dos elementos de  $K_q$  que, com as rotações de 8 cubos de canto, têm soma angular total igual a 0 módulo  $360^\circ$ . Assim  $N_q$  tem índice 3 em  $K_q$ , e  $|N_q| = 3^7$ .

*Demonstração.* Cada um dos elementos de  $N_q$  age simplesmente rotacionando cada cubo de canto individualmente por meio dos ângulos  $0^\circ$ ,  $120^\circ$  ou  $240^\circ$  sobre o eixo que é a diagonal do cubo mágico através das quinas relevantes, e temos do Exercício 3.2.8 que a soma desses 8 ângulos deve ser 0 módulo  $360^\circ$ .

Agora vejamos um exemplo. Segure seu cubo de forma que tenhamos as faces amarela, azul e vermelha se encontrando num mesmo vértice, realize então a seguinte sequência:  $(R Y' R' Y)^3 (Y B' Y' B)^3 (B R' B' R)^3$  perceba que ao realizar este movimento composto, 5 peças de quina permanecem em seu devido lugar e outras 3 quinas em seus devidos lugares, porém rotacionadas no sentido horário sob um ângulo de  $120^\circ$ ; portanto essa sequência de movimentos está no grupo  $N_q$ .

**Lema 3.2.10.** O grupo  $N_a$  consiste nos membros de  $K_a$  que rotacionam um número par dos cubos de meio de aresta por de um ângulo de  $180^\circ$ . Assim  $N_a$  tem índice 2 em  $K_a$ , e  $|N_a| = 2^{11}$ .

A demonstração desse fato pode ser ajudada ao se observar que o movimento  $(W Y') R (W Y') G (W Y') O (W Y') B (W Y') R' (W Y') G' (W Y') O' (W Y') B'$  de  $N_a$  gira apenas 2 cubos de meio de aresta.

Para a conveniência do leitor vamos resumir o que fizemos nesta seção. Para entendermos o grupo  $M$  dos movimentos do cubo, investigamos a ação de  $M$  sobre o conjunto  $C$  dos 20 cubinhos móveis. Por um lado, começamos descrevendo a imagem  $P$  da ação de  $M$  sobre  $C$  (Lema 3.2.4). Por outro lado, a descrição do núcleo de  $N$  da ação de  $M$  sobre  $C$  é mais trabalhosa (Exercício 3.2.7, Lema 3.2.9, e 3.2.10): usamos da possibilidade de desencaixar do cubo os cubinhos móveis e da ação de  $N$  sobre o conjunto  $D$  dos 48 quadradinhos móveis nas faces do cubo. A conclusão é que  $|P| = \frac{1}{2} \cdot 8! \cdot 12!$ ,  $|N| = 3^7 \cdot 2^{11}$  donde,

$$|M| = \frac{1}{2} \cdot 8! \cdot 3^7 \cdot 12! \cdot 2^{11}$$

é o número de movimentos do cubo de Rubik.



## CAPÍTULO 4

### Mosaicos / Pixel Art com cubos mágicos

Trazendo a montagem do cubo de Rubik para atividades interativas e interdisciplinares, temos a interessante experiência de confeccionar mosaicos e/ou pixel art compostos por vários cubos mágicos.

Mosaico é uma coleção de pequenas peças de vários formatos e cores que ordenadas formam uma imagem maior. No caso do mosaico com cubos de Rubik, por se tratar de uma peça patenteada e padronizada, as cores disponíveis são apenas: amarela, azul, branca, laranja, verde e vermelha; bem como sua composição é feita a partir de superfícies aparentes quadradas.

Pelo seu formato, os mosaicos construídos com cubos mágicos, remetem-se à um estilo de arte mais recente, chamados de *pixel art* - mais comuns no meio digital. Tal estilo é facilmente visualizado em computadores e jogos de vídeo games antigos, que tinham sua qualidade de imagem relativamente limitadas.

Atualmente, o mosaico mais conhecido foi construído pelo artista americano *Pete Fecteau* em homenagem a Martin Luther King; composto por 4.242 peças e levando cerca de um ano para sua finalização, o projeto foi intitulado “*Dream big*” (Sonhe Grande) trazendo o desenvolvimento artístico, histórico e matemático.



Fonte: Google imagens -Dream Big

Diante desta alternativa de interdisciplinaridade, e principalmente para trabalhar no corpo discente a concentração, memória, paciência e raciocínio, fatores importantes para o amplo desenvolvimento acadêmico em toda e qualquer área do conhecimento; esta proposta foi levada para sala de aula e realizada em um grupo de quinze alunos voluntários. Os encontros aconteceram em quatro oportunidades com duração de duas horas e trinta minutos cada um e

aconteciam uma vez por semana, tendo como objetivo aprender a montar o cubo de Rubik e com este criar um mosaico com 500 cubos mágicos.

## 4.1 – 1º Encontro

No primeiro encontro foi apresentada a história do cubo de Rubik e outras curiosidades acerca deste, como, por exemplo: uma cena do filme *“Em busca da felicidade”* em que o ator Will Smith desembaralha um cubo; recordes de solução; campeonatos que acontecem ao redor do mundo; robôs que são construídos para resolver o enigma em menos de um segundo; etc.:

Após a transmissão do histórico da peça, é colocado aos alunos a forma de desenvolvimento do projeto: o que será trabalhado em cada um dos encontros e como deverá ser apresentado o mosaico.

No primeiro contato que os alunos têm com a peça, estes dispõem tão somente do manual que sugere uma das formas de solução elaborado pelo autor (capítulos 2 e 4 desta dissertação) e da troca de ideias entre seus colegas de projeto. Não acontece nesta fase qualquer auxílio direto do professor.



## 4.2 – 2º Encontro

No segundo encontro, realizado na segunda semana, com o objetivo de auxiliar os alunos que ainda não tinham conseguido desembaralhar o cubo mágico, foi feita a leitura do manual em conjunto com todos os alunos, ajudando-os assim a interpretar, compreender e aplicar suas orientações.

Destacou-se na atividade a iniciativa de auxílio mútuo entre os alunos, aqueles com maior facilidade auxiliavam os que ainda não haviam atingido o patamar de desenvolvimento de compreensão e realização dos movimentos e reflexos nas peças. Neste momento o professor apenas intervia em última instância, ou seja, quando ainda notava que mesmo com o auxílio de um igual, o aluno permanecia com alguma dificuldade no desenvolvimento da proposta.

Ao final, logrando êxito, todos os participantes conseguiram organizar as faces do cubo de Rubik, porém ainda acompanhando simultaneamente os apontamentos do manual. Nesta etapa, a meta a ser superada era repetir a montagem do cubo até se tornar algo “automático”, onde o aluno não precisaria do auxílio do manual. O que obviamente pelo tempo disponível foi levado para treino extra encontros.



### 4.3 – 3º Encontro

Nesta ocasião, com todos os alunos já sabendo montar o cubo mágico, o novo alvo rumo ao objetivo final é elucidar o processo de formação de mosaicos. Para auxiliar na atividade e orientar na formação do desenho pretendido, alguns alunos se anteciparam e criaram manualmente o esboço deste em papel quadriculado, enquanto outros levaram delinearam sua ideia em formato digital.

Dividida a turma em dois grupos, com seus respectivos esboços projetados em imagem aumentada no quadro da sala e com mapas menores de orientação, iniciou-se a montagem dos mosaicos; e já em pouco mais de 40 minutos os dois primeiros mosaicos estavam totalmente terminados. No total desta fase, foram montados quatro pequenos mosaicos utilizando-se em média 110 cubos mágicos cada um.



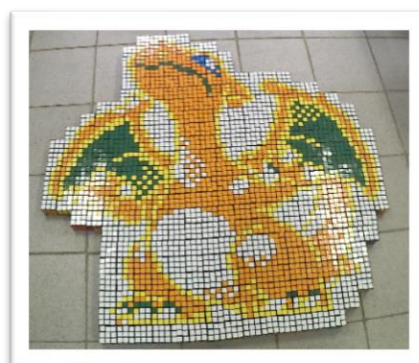
#### 4.4 – 4º Encontro

Neste encontro final a meta era a montagem de um mosaico maior, com aproximadamente 500 cubos. Para tanto, os processos de preparação e nivelamento foram os mesmos utilizados na confecção dos mosaicos menores, mas desta vez sem a divisão da turma em grupos e sendo trabalhada uma figura por vez.

Vale ressaltar que neste encontro o professor se tornou apenas um espectador, sendo o trabalho realizado exclusivamente pelos alunos. Desta maneira notou-se um grande trabalho de cooperação.

Inicialmente tiveram dificuldades para a confecção do mosaico, até perceberem que faltava um trabalho em grupo. Nota-se alguns alunos com espírito de liderança que organizaram o trabalho e traçaram planos para o desenvolver da atividade.

Após organizados com pouco menos de duas horas e meia, cada uma das figuras escolhidas se revelava nos grandes mosaicos exatamente da maneira esperada; para efusiva satisfação geral do professor e dos alunos envolvidos no projeto.



## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta dissertação foi apresentada uma proposta de trabalho com o auxílio do Cubo mágico de Rubik, para ensino básico e superior. Foi proposto um estudo sobre os movimentos do cubo mágico de Rubik utilizando a teoria de grupos, onde foi concluído a quantidade total de movimentos. É interessante para este estudo conhecer o cubo e saber resolvê-lo, assim o leitor poderá tirar suas próprias conclusões. Segue questionamentos do projeto para a continuidade:

i) Seja  $n(X)$  o menor possível inteiro  $> 0$  tal que o movimento  $X$  em  $M$  sucessivamente realizado  $n(X)$  vezes produz o efeito de retornar à configuração dada. Quando  $X$  percorre todos os movimentos em  $M$ , qual é o maior valor de  $n(X)$ ?

Resposta: 1260 – disponível em: Cf. JOYNER - page 93 - Example 5.5.5

ii) Qual o número máximo de movimentos básicos para resolver qualquer configuração resolvível do cubo?

Um manual de montagem do cubo mágico de Rubik com linguagem acessível a qualquer público que queira desembaralhá-lo, disponibilizando para uso do docente que vier a trabalhar o projeto em sala de aula. O relato da experiência com os alunos, trazendo ao leitor um pouco do que foi vivido durante a realização deste projeto. Um resultado bonito, gratificante e recompensador.

Como sugestão de continuação do trabalho, o leitor poderá aumentar o desafio, seguindo o manual de montagem 4x4x4 e 5x5x5. Além disso, fica a dica para a continuidade do trabalho, utilizando mosaicos e a realização de um vídeo em stop motion utilizando várias configurações, como no vídeo clipe da música “Thank you” do cantor Taiwanês Jason Chen - Segue o link para ilustrar a ideia <https://www.youtube.com/watch?v=2PPqksx-fHM> (acessado em 13/02/2018).

## APÊNDICE A

### Derivados do cubo de Rubik

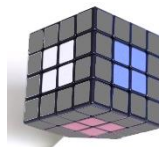
Como já situado, o cubo de Rubik, o cubo mágico original, patenteado nos anos 70 por Ernő Rubik é o cubo 3x3x3. Mas, diante da sua ideia e fundamentos, surgiram outras dimensões de cubos, como os de 4x4x4 e 5x5x5, que igualmente apresentam diferenciação em detalhes para suas resoluções.

Este capítulo apresenta propostas de métodos resolutivos para tais variações; que nada mais é que a transformação destes em um cubo 3x3x3. Além disso, será dado destaque à situações extraordinárias que não ocorrem no cubo tradicional em razão da quantidade de componentes que cada um tem.

A numeração de cada uma das sequências deste capítulo seguirá a continuação do capítulo 2, visto que as sequências serão utilizadas novamente.

#### A.1 – Como solucionar o cubo 4x4x4.

Partindo da sugestão inicial, a aplicação de algumas sequências é necessária para transformar um cubo 4x4x4, em um de 3x3x3. A primeira delas é organizar os centros de cada uma das faces.



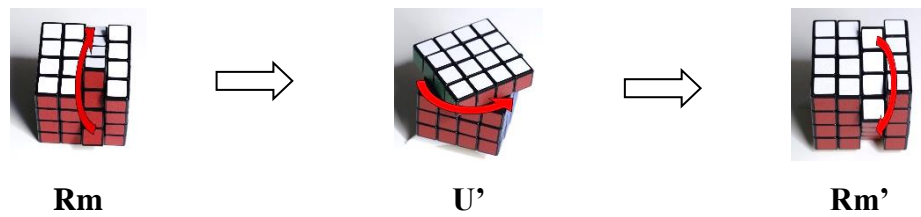
- **1º. Passo - Organize os centros**

✓ Primeiro, escolha uma das seis cores do cubo mágico, neste manual a cor escolhida foi a branca, então, com o cubo posicionado conforme a **Figura 14**, desenvolva a **Sequência 7**:



**Figura 14**

### Sequência 7



15. A configuração a ser atingida após a realização da sequência 7 é análoga à **Figura 15**



✓ Ato seguinte, posicione as peças conforme a **Figura 16**, e realize novamente a **Sequência 7** para então obter a formação idêntica à **Figura 17**.



✓ Para obter o centro branco **Figura 19**, posicione as peças conforme a **Figura 18** e realize mais uma vez a **Sequência 7**.]



Diferentemente do cubo 3x3x3, que tem sua combinação de centro imóvel, as peças do centro do cubo 4x4x4 podem variar de face, por isso, devemos ter cuidado ao montar o centro da face vizinha à face branca.

Uma maneira de nortear a montagem dos demais centros além do branco é posicionando uma peça de quina usando a **Sequência 1** do cubo 3x3x3. Veja os exemplos:





➤ Após posicionar a peça de quina com a face branca voltada para a face de centro branco, as demais faces apontarão qual a cor a ser montada naqueles centros.



➤ Da mesma forma, nesta outra figura a peça de quina determina que em uma das faces o centro será vermelho e o outro azul.

Determinada a cor do centro a ser montado, prossiga nas coordenadas dadas pela **Sequência 7** para formar os demais centros do seu cubo, um de cada vez, e assim finalizar a primeira parte do cubo 4x4x4.



**Observação:** Nunca deixe para o final a ordenação de dois centros opostos, pois isso refletirá na complexidade para a montagem dos mesmos.

- **2º. Passo - Forme pares nos meios.**

Seguindo na “transformação” do seu cubo 4x4x4 em um cubo 3x3x3 será formar os pares nas peças de meio das arestas; veja bem, o procedimento é apenas formar os pares, a sua colocação em seus lugares corretos será priorizada mais adiante. Veja na **Figura 20** os pares do meio já formados.



Figura 20

✓ Posicione duas peças idênticas em uma mesma face, porém em arestas laterais opostas, conforme a **Figura 21**.

(Mesmo cubo visto por dois ângulos diferentes)

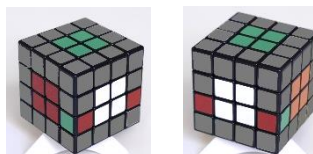
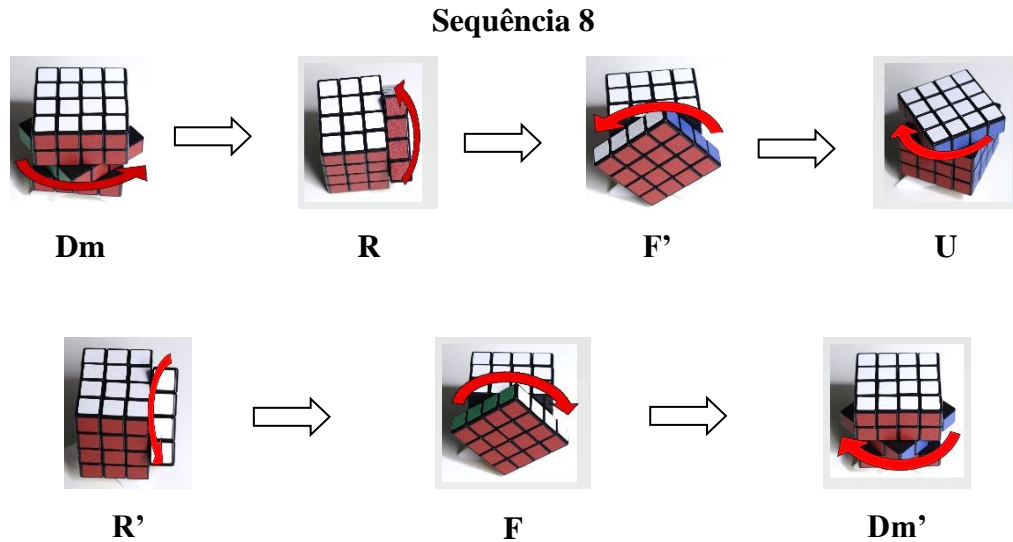


Figura 21

✓ Após aloca-las, segure o cubo de forma que as peças idênticas fiquem de frente para você e realize a **Sequência 8**:



Concluída a movimentação da **Sequência 8**, você deverá encontrar as peças posicionadas conforme a **Figura 22**. Note que os centros que foram montados anteriormente continuarão nos mesmos lugares.



**Figura 22**

Refaça a **Sequência 8** até completar todos os pares do seu cubo 4x4x4 e você terá um semelhante ao cubo de Rubik 3x3x3.

Antes de prosseguir, entenda a semelhança que deve ser notada em relação ao 3x3x3. Daqui em diante vamos considerar como:

#### Peças dos centros



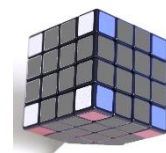
As peças que foram organizadas inicialmente serão tratadas como peça única.

#### Peças do meio

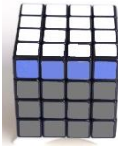


Os pares formados também serão encaradas como peças únicas.

#### Peças de quina



Assim como no cubo 3x3x3, estas serão chamadas de peças de quinas.

**Camada 1****Camada 2****Camada 3**

Agora podemos trabalhar nas duas primeiras camadas conforme faz-se no cubo 3x3x3.

- **Camada 1**

Da mesma forma como é desenvolvido no cubo 3x3x3, iniciaremos a montagem do cubo 4x4x4 pela camada 1: elegendo uma cor para delinear a cruz, orientando seus centros e por último posicionando as peças de quinas a partir da **Sequência 1** abordada anteriormente.



- **Camada 2**

Invertendo o cubo, de forma que a camada 1 fique na base do brinquedo, passamos à orientação para ordenar a camada 2: em função da direção determinada pelos centros, utilizaremos as mesmas **Sequência 2** (quando à direita) ou **Sequência 3** (quando à esquerda) que se aplica no cubo 3x3x3.

**Mover para a diagonal direita****Mover para a diagonal esquerda**

Posicione todas as peças de meios em seus devidos lugares e conclua a camada 2.



### Camada 3

Análogo ao cubo 3x3x3, a montagem da camada 3 do cubo 4x4x4 é iniciada pela formação da cruz. Todavia, aqui há um detalhe importante que difere os dois modelos.

Finalizada a camada 2, você visualizará uma das seis formações abaixo:

**Ponto**



**Jota**



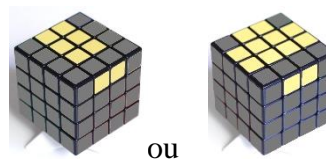
**Linha**



**Cruz**

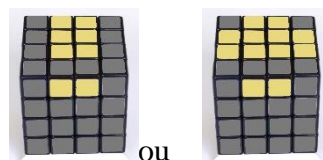


**Peça na lateral**



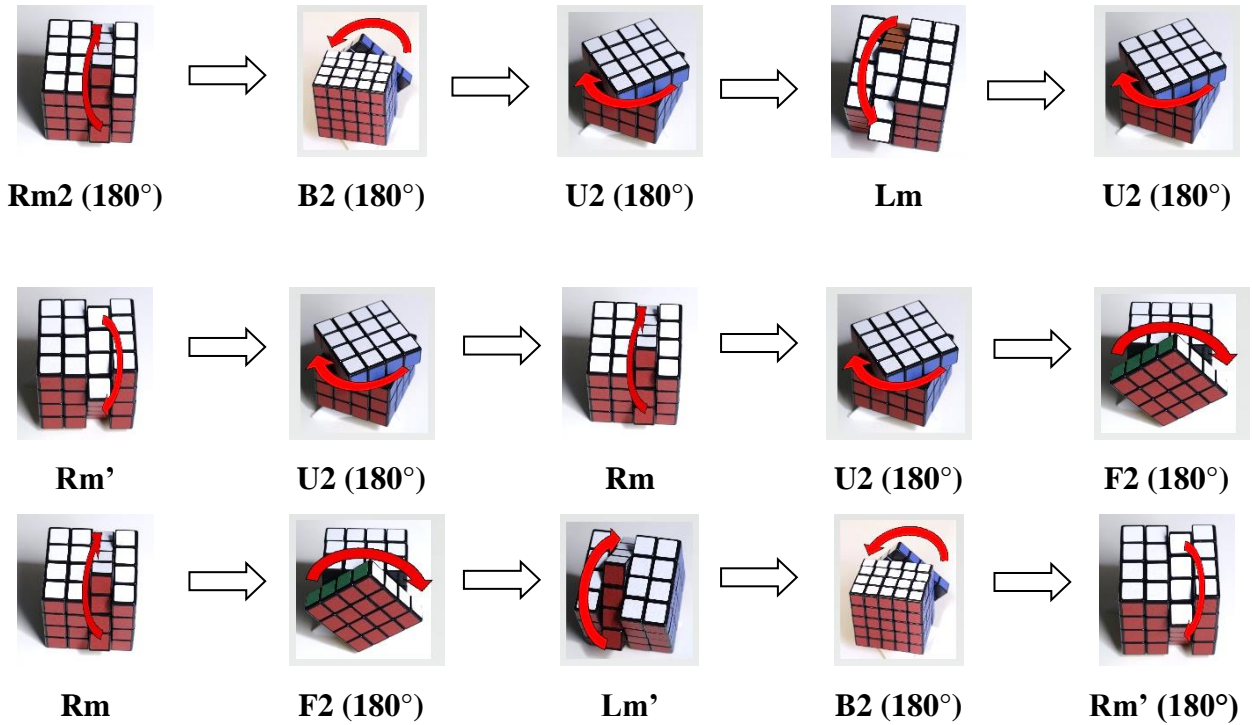
Das seis possibilidades acima, a única que não acontece no cubo 3x3x3 é a formação **Peça na lateral** - situação extraordinária. Por isso, devemos nos ater à movimentação para girar a peça da lateral em seu lugar.

- ✓ Segure o cubo na posição indicada na figura abaixo:



- ✓ Realize a **Sequência 9** para obter a formação em linha ou em cruz.

**Sequência 9**



Caso esteja diante de qualquer uma das outras formações acima indicadas (ponto, jota, linha ou cruz), siga as instruções do cubo 3x3x3 para compor e orientar sua cruz, conforme a figura abaixo:



Realizada a cruz, organize as peças da quina e finalize o cubo 4x4x4.

Neste ponto, é possível encontrar 4 formações:

- **Quatro quinas em posições erradas:**



(Mesmo cubo visto de ângulos diferentes)

- **Uma quina em posição correta e três em posições erradas**



Note que na figura acima temos: três peças em posições equivocadas e uma peça na posição correta com a orientação errada.

Nesta parte vamos nos atentar apenas nas posições e não nas orientações.

- **Quatro quinas em posição correta com ou sem orientação**



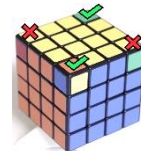
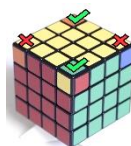
(Mesmo cubo visto de ângulos opostos)

Repare aqui que na situação acima temos duas quinas posicionadas e orientadas de forma correta e duas quinas posicionadas de maneira correta, mas não orientadas.

Durante o desenvolvimento deste passo, o cubo 4x4x4 poderá apresentar variações no tocante à quantidade de peças que se apresentam posicionadas e orientadas ao mesmo.

- **Duas quinas em posições corretas e duas quinas em posições erradas**

- **Situação extraordinária**



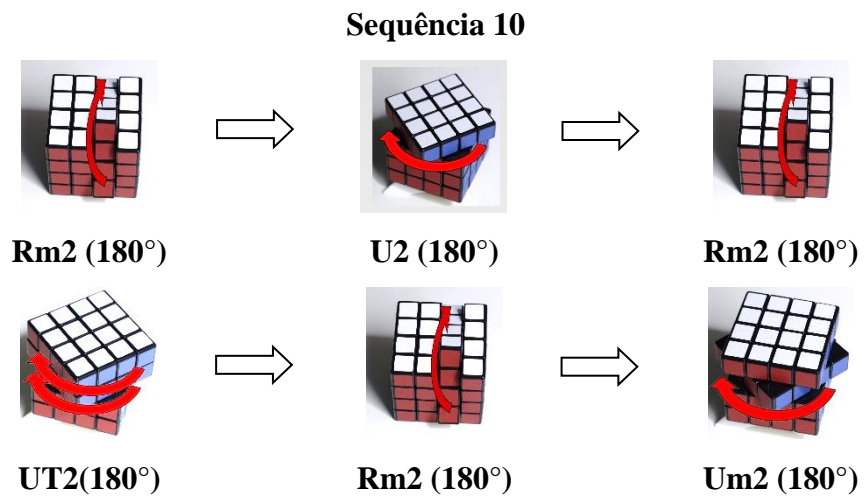
(Mesmo cubo visto de ângulos opostos)

Nas fotos acima é possível notar duas quinas posicionadas corretamente e sem orientação e duas quinas posicionadas incorretamente. Mas atenção, no decorrer

da montagem do cubo 4x4x4, este poderá apresentar suas quinas lado a lado e não em lados opostos, como na figura.

A apresentação de duas quinas em posições corretas e duas quinas em posições erradas só é possível em cubos de formação par como é o 4x4x4. Diante desta situação os movimentos a serem realizados são:

- ✓ Com o cubo em qualquer posição, realize a **Sequência 10**:



- ✓ A finalização da **sequência 10**, naturalmente desorientará os meios das arestas da cruz. Por isso, antes de prosseguir, estes devem ser retornados às suas posições corretas;

- ✓ Reordenado os meios das arestas da cruz, o cubo lhe apresentará uma das possibilidades acima apresentadas, quais sejam: quatro quinas em posições erradas; ou uma quina em posição correta e três em posições erradas; ou quatro quinas em posição correta com ou sem orientação.

- ✓ Para o acabamento do cubo 4x4x4, nada mais resta neste momento a não ser posicionar e orientar as peças de quina desta camada 3, tal qual se procede com o cubo 3x3x3.



## A.2 – Como solucionar o cubo 5x5x5.

Com esta peça, deve ser levada em consideração algumas técnicas para a “transformação” do cubo 5x5x5 em um cubo 3x3x3.

Relembrando, no cubo 3x3x3 os centros são fixos e organizado. No cubo 4x4x4 os centros não são fixos; por isso é necessário organizar os centros e manter atenção nas suas cores. Agora, no cubo 5x5x5, a peça central de cada face é fixa e sua cor determinará quais peças a rodeará por todos os seus lados para a formação do centro, ou seja, no cubo 5x5x5 o centro de cada face é composto por uma peça central fixa e oito peças móveis que a rodeiam. (Figura 23).



Figura 23

Passamos então à explanação das etapas a serem vencidas neste tipo de cubo:

- **Organize os centros**

Para iniciar o método de solução por camadas no cubo 5x5x5, assim como em quaisquer cubos de formação ímpar, deve-se organizar um centro de face por vez, com os seguintes procedimentos:

- ✓ Forme uma cruz no centro:

Eleja uma das seis cores possíveis em seu cubo (na demonstração, a cor escolhida foi a branca) - **Figura 24**.



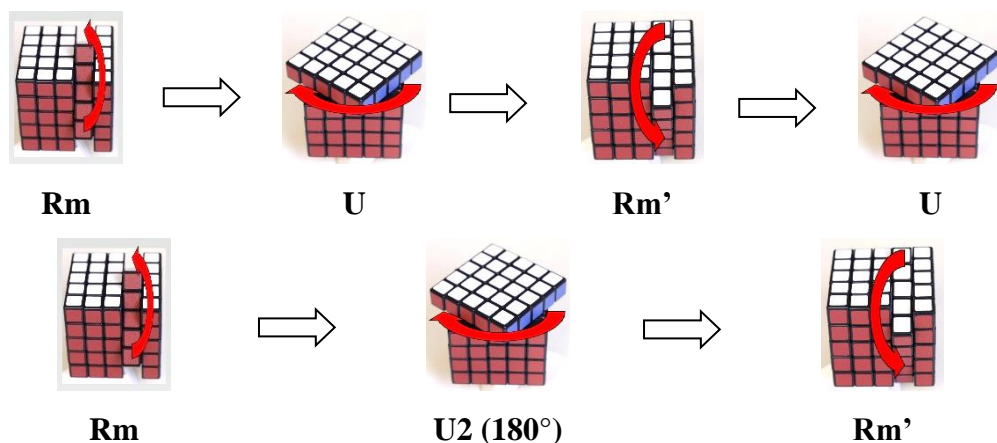
Figura 24

- ✓ Ato seguinte, oriente as demais peças do centro: posicione o cubo conforme a **Figura 25** e proceda conforme a **Sequência 11**.



Figura 25

### Sequência 11





✓ Em seguida, posicione o cubo conforme a **Figura 26** e refaça a **Sequência 11**. É importante frisar que a peça destacada em roxo na figura não pode conter peças de cor coincidente com a da cruz (no caso da demonstração trazida pela figura 26, branca).



Figura 26

✓ Continuando, disponha o cubo igual demonstra a **Figura 27**, e remaneje de acordo com a **sequência 11**. Consecutivamente, com o cubo na posição proposta pela **Figura 28**, proceda mais uma vez com a movimentação da **sequência 11** finalizando assim o primeiro centro (**Figura 29**).



Figura 27

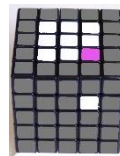
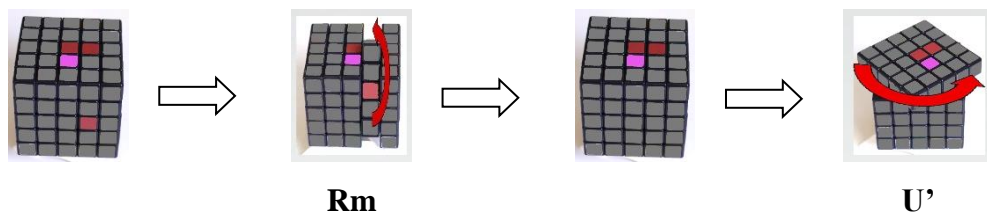


Figura 28



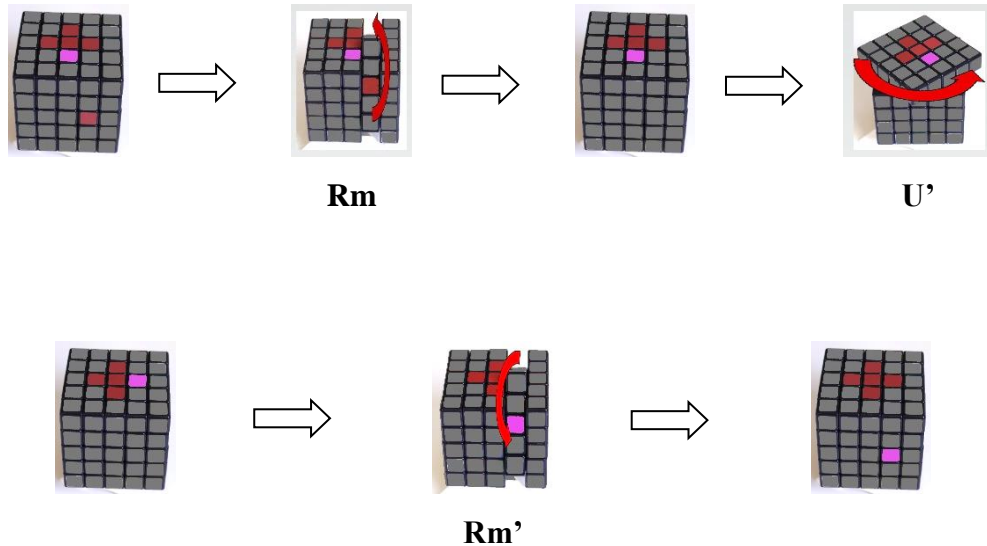
Figura 29

Temos agora um segundo centro para configurar. Para que não haja interferência final no centro inicialmente montado (no exemplo, branco), observe a seguinte sugestão de movimento demonstrada em um centro vermelho (considere a peça destacada em roxo como sendo qualquer uma de cor não-vermelha):

**Rm****U'****Rm'**

Perceba em seu cubo que a movimentação explanada desorganiza o centro branco logo após **Rm**, porém é automaticamente reorganizado com **Rm'**.

✓ Segue outra ilustração para corroborar a forma de organizar a cruz do segundo centro:



Formada a segunda cruz, oriente as demais peças do centro conforme apontado pela **Sequência 11** com o intuito de finalizar a primeira etapa do seu cubo 5x5x5.

Nesse modelo, para não atribuir dificuldade evitável, o cubista também deve manter a atenção para que nunca deixe para o final a organização de dois centros opostos.



Com seus centros devidamente organizados, da mesma forma que se age com o cubo 4x4x4, é hora de reorganizar os meios das arestas para que estes em composição tripla formem uma única peça. **Figura 30**



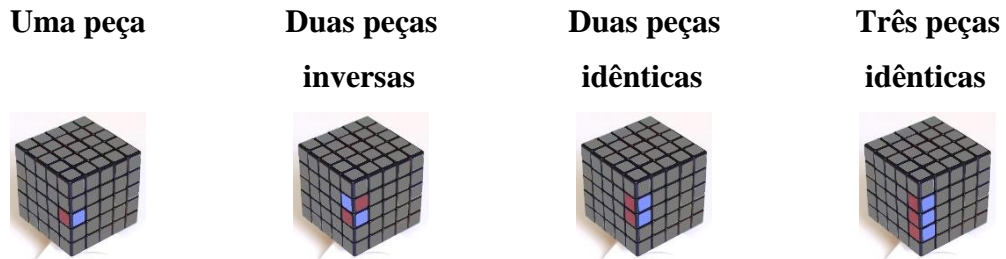
Figura 30

Para organizar os meios de arestas, há que se perceber que a peça central deste, definirá quais cores irão compor a trinca. Isto quer dizer que: na **Figura 31**, por exemplo em que a peça central da trinca é azul - branca, significa que as demais peças, apresentadas nas posições destacadas em roxo também serão azul - branca, obedecendo sua cor de alinhamento.



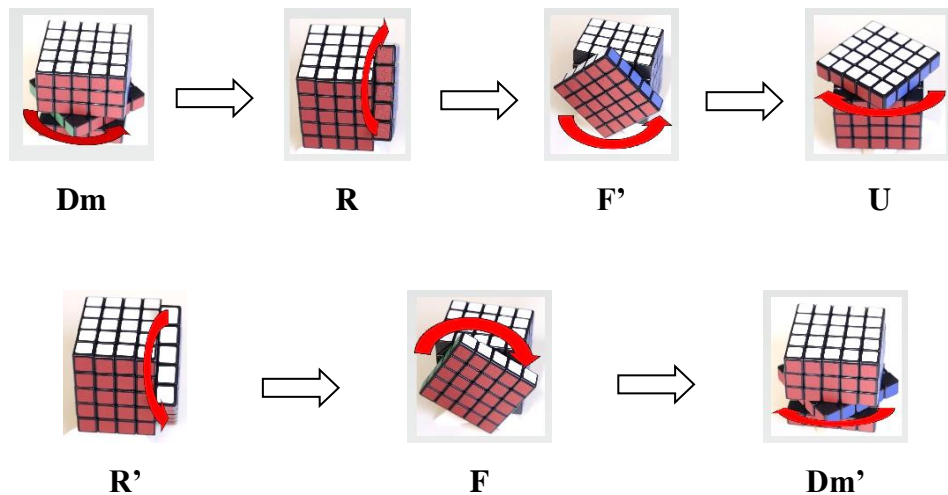
Figura 31

Este alinhamento será alcançado com uma série de movimentos muito semelhante a **Sequência 8**, porém deve-se prestar mais atenção às posições das peças e a recolocação destas será feita uma a uma, onde basicamente serão encontradas quatro posições:



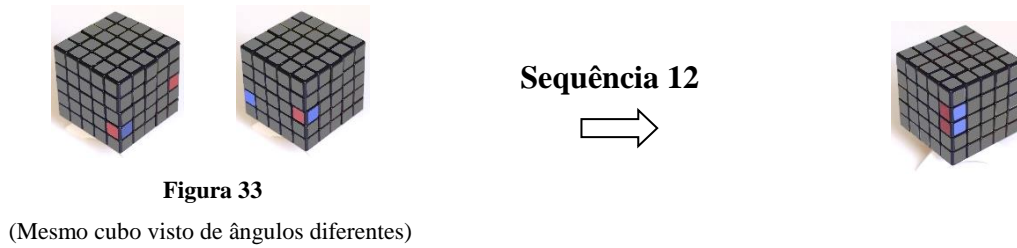
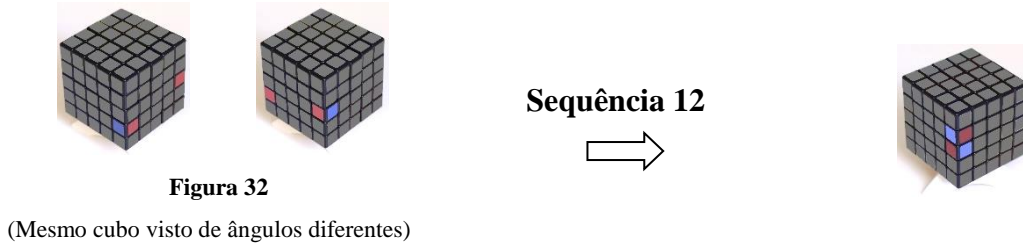
Nos três primeiros casos, realizaremos a **Sequência 12** de acordo com a sua respectiva apresentação.

### Sequência 12



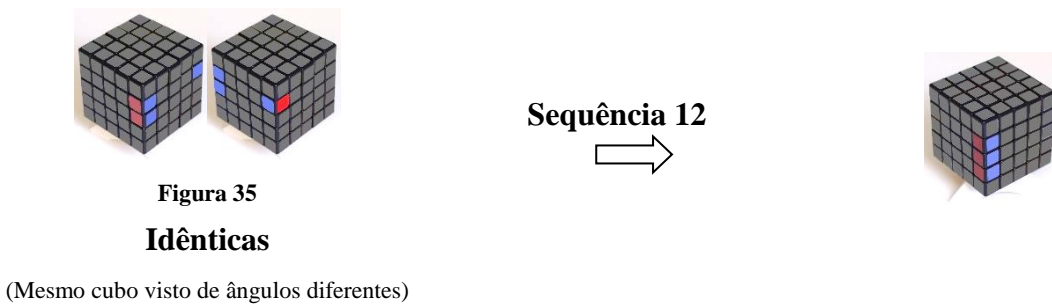
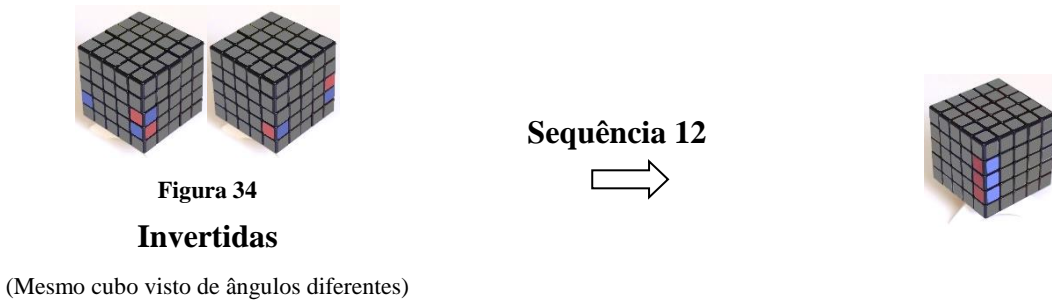
✓ **Uma peça:**

Existe duas possibilidades de posicionamento do cubo: como na **Figura 32** ou como na **Figura 33**. Após posicionar as peças conforme as ilustrações, oriente o cubo de forma que as peças fiquem na face frontal para que então possa realizar a **sequência 12** e obtenha um dos dois casos de duas peças.



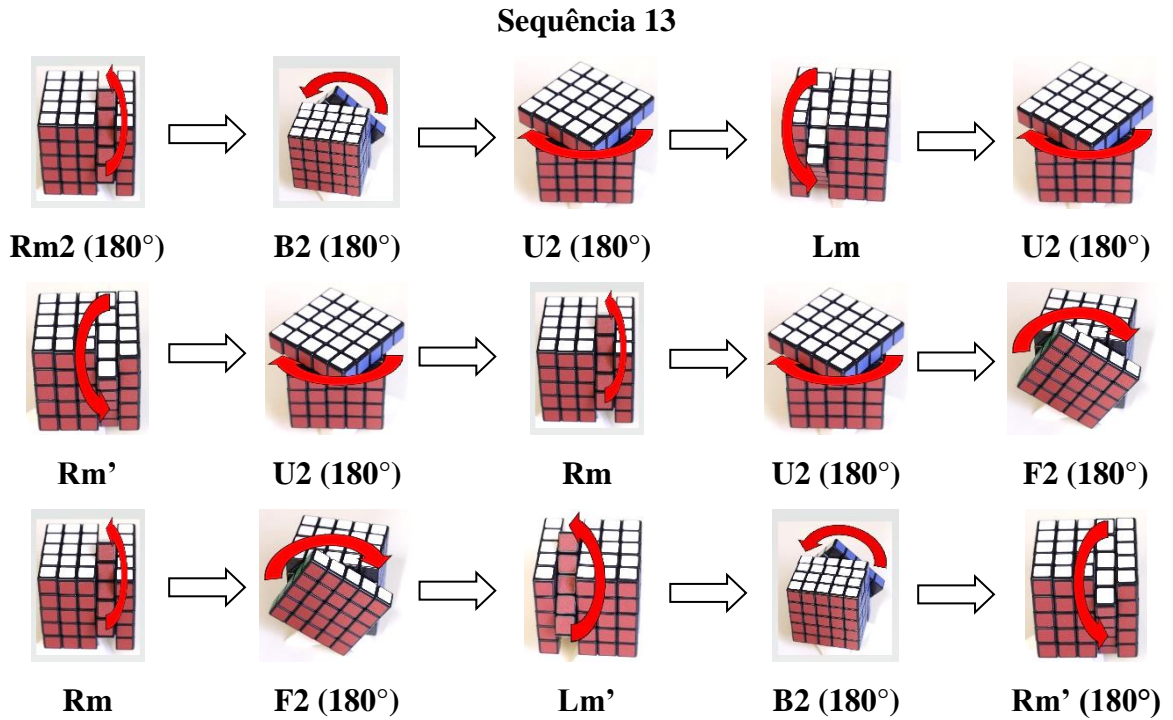
✓ **Duas peças:**

Existem dois casos nesta situação: inversas ou idênticas. A **Sequência 12** será aplicada em ambos os casos, contudo as peças devem ser posicionadas de formas diferentes, veja:

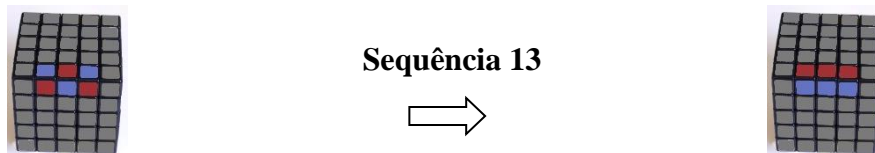


Durante o processo é muito comum a última trinca ficar com suas peças invertidas (**Figura 36**), chamaremos este de caso especial. Para solucioná-lo deve ser aplicada uma série de movimentos muito semelhante à **Sequência 9**, que denominaremos **Sequência 13**, veja:





✓ Com o cubo posicionado conforme a ilustração abaixo, aplique a **sequência 13** para orientar a trinca corretamente:



Pronto! Completada todas as trincas do cubo 5x5x5 haverá em suas mãos um cubo aproximado ao cubo 3x3x3, logo, o aproveitamento do método de solução por camadas será eficaz para o objetivo pretendido.

Comece tendo em mente quais são as camadas que devem ser consideradas:

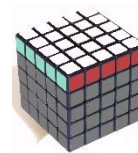
**Camada 1**



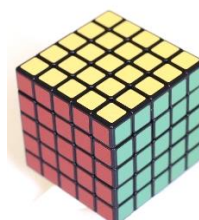
**Camada 2**



**Camada 3**



Siga agora os passos de montagem do seu cubo 3x3x3 para enfim finalizar a peça.



## REFERÊNCIAS

### Teoria

1. NEUMANN, P.M., STORY, G. A. and THOMPSON, E.C., *Groups and Geometry.*, Oxford University Press, Oxford, 1994.
2. JOYNER David, *Adventures in Group Theory Rubik's Cube, Merlin's Machine, and Other Mathematical Toys.* Johns Hopkins University Press, 2nd edition, 2008.
3. GONÇALVES, Adilson. *Introdução à álgebra.* 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
4. CHEN, Janet. *Group Theory and the Rubik's Cube*, Harvard University, <http://www.math.harvard.edu/~jjchen/docs/Group%20Theory%20and%20the%20Rubik's%20Cube.pdf>, 2014.
5. MOYA, Cláudia S., *Uma visão Matemática do Cubo Mágico.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do ABC, 2015.
6. BEZERRA, Jeferson. *Tópicos em Teoria de Grupos: O Desafio do Cubo de Rubik.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2016.
7. SILVA JÚNIOR, Jocemar Esteves da. *Teoria de grupo e o cubo mágico.*, Dissertação de Mestrado, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.
8. LARA, Robson Guimarães de Miranda. *Álgebra e o Cubo de Rubik.*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2016

9. *SILVA, Huérlren Vicente Lemos e. O uso do cubo mágico para o ensino da geometria plana e espacial no ensino médio., Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Piau, Teresina, 2017.*

10. *TED – Ideas Worth Spreading. Disponível em: <[https://www.ted.com/talks/marcus\\_du\\_sautoy\\_symmetry\\_reality\\_s\\_riddle](https://www.ted.com/talks/marcus_du_sautoy_symmetry_reality_s_riddle)>. Acesso em: 27/01/2018*

## **Prática**

11. *40 CURIOSIDADES DOS 40 ANOS DO CUBO MÁGICO. UOL. Disponível em: <<http://guiadoscuriosos.uol.com.br/blog/2014/05/19/40-curiosidades-dos-40-anos-do-cubo-magico/>>. Acesso em: 22 jan 2018.*

12. *GAROTO RESOLVE CUBO MÁGICO EM 49 SEGUNDOS E QUEBRA RECORDE MUNDIAL. UOL. Disponível em: <<http://www.redetv.uol.com.br/jornalismo/da-para-acreditar/garoto-resolve-cubo-magico-em-49-segundos-e-quebra-recorde-mundial/>>. Acesso em: 22 jan 2018*

13. *WORD CLUBE ASSOCIATION – RESUTS Disponível em: <<https://www.worldcubeassociation.org/results/regions.php>>. Acesso em: 27 jan 2018*

14. *GUINNESS WORLD RECORDS – ROBOT BREAKS WORLD RECORD SOLVING RUBIK'S CUBE IN 0.637 SECONDS Disponível em: <<http://www.guinnessworldrecords.com/news/2017/3/video-robot-breaks-world-record-solving-rubiks-cube-in-0-637-seconds-464392>>. Acesso em: 27 jan 2018*

15. *GOOGLE – DOODLES, CUBE RUBIK Disponível em: <<https://www.google.com/doodles/rubiks-cube>>. Acesso em: 27 jan 2018*

16. *CUBO VELOCIDADE – GUIA BÁSICO Disponível em: <<http://www.cubovelocidade.com.br/basico/>>. Acesso em: 27 jan 2018*

## Arte

17. PÉPIN, Charles. *O planeta dos sábios: Enciclopédia de filósofos e filosofias*. Companhia das Letras, 2014.

18. O QUE É MOSAICO. TODA MATÉRIA. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/o-que-e-mosaico/>>. Acesso em: 22 jan 2018.

19. ARTISTA CRIA MOSAICO GIGANTE COM CUBOS MÁGICOS. GLOBO. Disponível em: <<http://revistagalileu.globo.com/Revista/Common/0,,EMI268047-17770,00-ARTISTA+CRIA+MOSAICO+GIGANTE+COM+CUBOS+MAGICOS.html>>. Acesso em: 22 jan 2018.