Universidade Federal de São João del Rei

Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Thiago do Carmo Azevedo

Sequências de Fibonacci e Tribonacci: uma apresentação geométrica

São João del Rei

2018

Thiago do Carmo Azevedo

Sequências de Fibonacci e Tribonacci: uma apresentação geométrica

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de São João del Rei, na área de concentração em Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Fábio Alexandre de Matos

São João del Rei

2018

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à Deus e Nossa Senhora Aparecida, por todo amparo para que esse objetivo pudesse se tornar realidade.

Aos meus pais, por serem meus referenciais de vida, pelo incentivo e por tanto me apoiarem em meus projetos. Meus irmãos, em especial a Priscilla, por nunca deixar desistir desse mestrado.

A minha namorada, Nathália, por todo incentivo dado nesses dois anos e acima de tudo, por ter sido tão compreensiva e colaborativa.

Aos meus amigos e referenciais dentro da educação, Ana Lucia, Lívia e Wagner, por tanto me ajudarem e auxiliarem neste trabalho.

Meus amigos e incentivadores no mestrado, Linderson e Tiago, por todas palavras de incentivo e motivação. A professora Maria Helena por organizar meus horários, para que, esse mestrado pudesse ser concretizado. Ao professor doutor Fábio, pelas orientações recebidas.

Enfim, a todos que diretamente ou indiretamente participaram e me incentivaram, o meu mais sincero: **muito obrigado!**.

RESUMO

Analogamente à sequência de Fibonacci podemos definir a sequência de Tribonacci, (T_n), $n \geq 1$, onde $T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$ e $T_1 = F_1$, $T_2 = F_2$ e $T_3 = F_3$. Neste trabalho, temos por objetivo caracterizar os elementos da sequência de Tribonacci, (T_n), utilizando elementos da geometria plana. Mais especificamente, associaremos cada elemento da sequência de Tribonacci com soluções não negativas de equações diofantinas lineares de três variáveis.

Palavras-chave: Sequência de Tribonacci. Pirâmide de Pascal. Equações Diofantinas. Coeficientes Trinomiais.

ABSTRACT

Analogously to the Fibonacci sequence we can define the Tribonacci sequence, (T_n), $n \geq 1$, with $T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$, $T_1 = F_1$, $T_2 = F_2$ and $T_3 = F_3$. In this work, we aim to characterize the elements of the Tribonacci sequence, (T_n), using elements of the geometry. More specifically, we will associate each element of the Tribonacci sequence with non-negative solutions of three-variable linear diophantine equations.

Key-words: Tribonacci Sequence. Pascal's Pyramid. Diophantine Equations. Trinomial Coefficients.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 Introdução

Este trabalho tem como objetivo relacionar geometricamente a sequência de Tribonacci, as equações diofantinas, os coeficientes trinomiais e a Pirâmide de Pascal. Esse conjunto de temas matemáticos propicia uma base para o ensino médio.

Dentre as atribuições de um professor, está, a de explorar o ensino de matemática em situações cotidianas, que incentivem o aluno a desenvolver seu pensamento, com problemas que permitam ao mesmo elaborar uma forma particular de pensar. Encontrar uma solução e compará-la com soluções já existentes, é uma delas.

Inicialmente no segundo capítulo apresentaremos conceitos de sequências matemáticas enfatizando a Sequência de Fibonacci e a Sequência de Tribonacci, apresentando-as sob uma perspectiva geométrica, diferentemente de como é vista no Ensino Médio. É imprescindível a abordagem do celebre problema do crescimento de uma população de coelhos, introduzido por Leonardo de Pisa no século XII. O problema busca encontrar a quantidade de casais de coelhos nascidos de um único casal, sob certas condições ao final de um ano. A quantidade de casais de coelhos revela a Sequência de Fibonacci. Ainda nesse capitulo iremos apresentar uma variedade de aplicações dessa sequência.

No terceiro capítulo apresentaremos um método para encontrar soluções de equações, chamadas de equações diofantinas lineares, que foram estudadas por Diofanto, e em sua homenagem receberam o nome de equações diofantinas. Diofanto foi um matemático e filósofo grego, teve uma influência maior sobre a teoria moderna dos números do que qualquer outro algebrista grego não geométrico. Um inovador com notações, o primeiro a usar símbolos na resolução de problemas algébricos. Criador de um método para encontrar soluções para determinadas equações algébricas. Mostraremos neste trabalho, como resolver no conjunto dos números inteiros as equações diofantinas lineares com duas variáveis e com três variáveis.

No quarto capitulo iremos enfatizar alguns conceitos históricos e algébricos da Análise Combinatória, campo da matemática com um vasto ramo de aplicações. Não é difícil deparar com problemas probabilísticos que utilizam a Análise combinatória em sua resolução, encontramos também, análise combinatória em teoria dos Grafos. Em nosso trabalho iremos concentrar nosso foco em números binomiais e trinomiais. De um modo geral a definição de números binomiais é facilmente encontrada em livros didáticos do ensino médio, visto que se encontra na matriz curricular do mesmo. Através dos coeficientes binomiais, iremos abordar o Triangulo de Pascal. Apresentaremos brevemente um pouco de sua história e suas propriedades, sendo imprescindível a relação de Stifel e sua demonstração. Neste mesmo capitulo iremos apresentar a definição de coeficientes trinomiais e uma breve análise da Pirâmide de Pascal. Infelizmente conceitos pouco encontrados em livros do ensino médio, portanto, este trabalho pode servir de base para a preparação de ricas aulas de matemática no ensino básico.

Finalmente, no quinto capitulo atingiremos nosso objetivo principal que é relação geométrica existente entre as sequencias citadas, as equações diofantinas, os coeficientes trinomiais, o triangulo e a pirâmide de Pascal.

2 Sequências Numéricas

Este capítulo destina-se ao desenvolvimento da teoria sobre as *sequências numéricas*. Nesta perspectiva, tratamos inicialmente das sequências numéricas de forma geral e, posteriormente, de dois casos particulares, a saber, a sequência de Fibonacci e a sequência de Tribonacci, apresentando uma aplicação geométrica que é nosso objetivo principal.

Ao analisarmos as sequências, nos deparamos com um dos conteúdos matemáticos mais amplos de conhecimento, pois existem vários casos a serem analisados, devido aos diversos tipos de sequências que podem existir. De acordo com o dicionário de português on-line *Michaelis* (2009), define-se como sequência um "Número de coisas ou eventos que se seguem um após outro; série, sucessão, ordem". Assim, pode-se haver vários tipos de sequências: sequência alfabética de uma lista de autores, sequência musical, etc.

Em matemática uma sequência numérica é definida como sendo toda função cujo domínio é o conjunto dos números naturais e que tem como contradomínio o conjunto dos números reais.

Alguns exemplos de sequências são: sequência dos cinco primeiros números naturais (1, 2, 3, 4, 5); sequência dos números ímpares (..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...) .

Definição 1. *Uma sequência ou sucessão de números reais é uma função que associa a cada número natural n um número real a_n. Simbolicamente,*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto f(n) \end{aligned}$$

O elemento $f(n)$, o n-ésimo termo da sequência, é usualmentedenotado por a_n e a sequência por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemplo 1. $(2, 3, 5, 7, 11, ...)$ *é a sequência, infinita, dos números primos.*

Na matemática, de modo geral, as sequências mais interessantes são aquelas em que os termos se sucedem obedecendo a certa regra, isto é, que têm uma lei de formação. Esta pode apresentada de três maneiras: por fórmula de recorrência, pela expressão de cada termo em função de sua posição (termo geral) e pela propriedade dos termos. Em nosso estudo, vamos enfatizar a recorrência e o termo geral.

2.1 Recorrências

Muitas sequências são definidas recursivamente (isto é, por recorrência), ou seja, por intermédio de uma regra que permite calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s).

Exemplo 2. *A sequência* (x_n) *dos números naturais ímpares* $1, 3, 5, 7...$ *pode ser definida por*

$$x_{n+1} = x_n + 2$$

com $n \geq 1$ *,e* $x_1 = 1$*.*

Exemplo 3. *A sequência* (x_n) *definida por*

$$x_{n+1} = x_n + r,$$

onde r *é uma constante,* $x_1 = a$ *e* $n \geq 1$ *é conhecida como progressão Aritmética de razão* r*.*

Notemos que uma recorrência, por si só, não define a sequência. Uma exemplificação é a recorrência do Exemplo 2, $x_{n+1} = x_n + 2$, a qual é satisfeita não apenas pela sequência de números ímpares, mas sim por qualquer progressão aritmética de razão 2. Para que uma recorrência fique completamente determinada é necessário também o conhecimento do(s) primeiro(s) termo(s).

A quantidade de termos antecessores imediatos que se apresentam de uma recorrência designa a ordem da mesma.

2.1.1 Recorrência Linear de 1ª Ordem

Uma recorrência de 1ª ordem, expressa por x_{n+1} em função de x_n é dita linear, se e somente se, essa função polinomial do 1º grau.

Exemplo 4. $x_{n+1} = 2x_n - n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 5. $x_{n+1} = nx_n$, $n \in \mathbb{N}$.

2.1.2 Recorrências Lineares de 2ª Ordem

Recorrências lineares de segunda ordem homogêneas, com coeficientes constantes, são recorrências da forma:

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$$

Exemplo 6. *A equação* $x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n = 0$*, sendo* $n \in \mathbb{N}$*,* p *e* q *constantes com* $q \neq 0$*.*

Consideremos sempre $q \neq 0$, pois, se $q = 0$ a recorrência é, na realidade, uma recorrência de primeira ordem. A cada recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, da forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, associamos uma equação do segundo grau $r^2 + pr + q$, chamada de equação característica.

Teorema 2. *Se as raízes da equação $r^2 + pr + q = 0$, com p e q constantes, são r_1 e r_2, então $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é uma solução da recorrência $x_{n+1} + px_{n+1} + qx_n = 0$, para quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.*

Demonstração. Substituindo $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, obtemos:

$$C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) = C_1 r_1^n 0 + C_2 r_2^2 0 = 0$$

□

2.2 Sequência de Fibonacci

Segundo Mol(2013), Leonardo de Pisa(1170-1250), também conhecido como Fibonacci é considerado o mais importante matemático da europa medieval. Além disso, Eves(2011) também afirma que Fibonacci foi um matemático inegavelmente capaz, sem rivais nos nove séculos da idade Média.

Figura 1 – Leonardo de Pisa

Fonte: https://www.fibonicci.com/fibonacci/

Segundo Barco (1987), a sequência de Fibonacci torna-se interessante pela frequência e variedade de suas aparições na natureza e na arte, por exemplo, o número de pequenas flores que formam o miolo do girassol é um dos números da sequência de Fibonacci e alguns poetas romanos, como Virgílio, escreveram poemas nos quais a métrica está definida conforme a regra da sequência de Fibonacci.

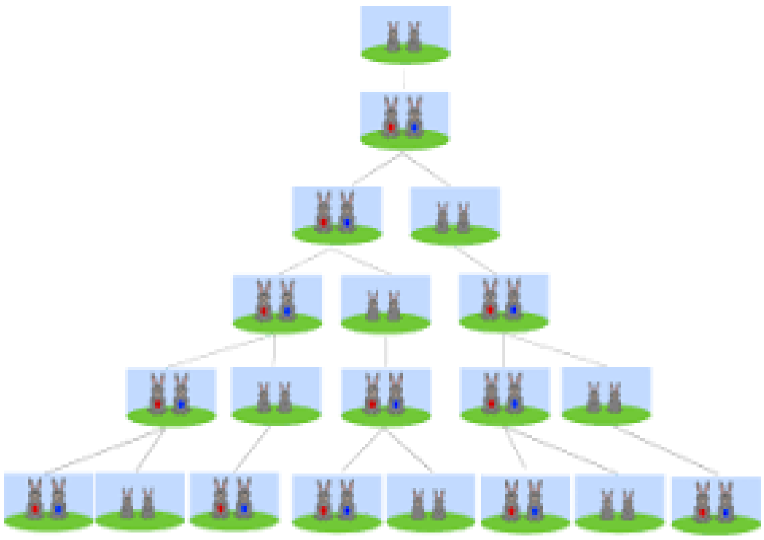
Apesar das notórias contribuições de Fibonacci para a matemática nas mais diversas áreas, ele é hoje, no entanto, mais conhecido pela chamada sequência de Fibonacci, apresentada no Liber Abaci como resposta para um problema envolvendo o crescimento de uma população de coelhos.

Vejamos o problema proposto por Fibonacci. *Quantos casais de coelhos teriam ao final de 1 ano se:*

- *No primeiro mês temos um coelho macho e um coelho fêmea. Estes dois coelhos acabaram de nascer.*
- *Um coelho só atinge a maturidade sexual ao final de um mês.*
- *O período de gestação de um coelho dura um mês.*
- *Ao atingirem a maturidade sexual, a fêmea irá dar à luz todos os meses.*
- *A mãe irá dar à luz todos os meses um coelho macho e um coelho fêmea.*
- *Os coelhos nunca morrem.*

Este problema pode ser representado segundo o diagrama abaixo:

Figura 2 – Ilustração do Problema dos Coelhos



Fonte: http://recordandomatematica.blogspot.com.br/2014/09/arte-matematica-e-sequencia-de-fibonacci.html

Assim a solução para o problema anterior é:

$$(1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144).$$

Fibonacci em suas observações percebeu que cada termo da sequência a partir do terceiro termo é obtido através da soma dos dois termos antecessores. A sequência supracitada será essencial para nosso objetivo final.

Definição 3. *Chama-se sequência de Fibonacci a sequência (x_n) definida por*

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}, \forall\, n \geq 2 \text{ onde } x_1 = x_2 = 1$$

Através da definição da sequência de Fibonacci, podemos calcular seu termo geral.

Segundo Hefez (2011) "é notável que seja necessário recorrer a fórmulas envolvendo números irracionais para representar os elementos da sequência de Fibonacci que são números naturais".

Proposição 4. *O n-ésimo termo da sequência de Fibonacci pode ser dado por:*

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Demonstração. A Definição 3 é um recorrência de segunda ordem, pois um dos termos é definido em função dos dois termos antecessores.

A recorrência $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ possui equação característica $r^2 - r - 1 = 0$. Resolvendo essa equação encontramos as raízes $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Segundo Lima, se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = C_1{r_1}^n + C_2{r_2}^n$, C_1 e C_2 constantes.

A demonstração dessa afirmação encontra-se no próprio livro, mas aqui nós omitiremos a demonstração. Utilizando essa idéia, a solução é dada por:

$$a_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1},$$

com C_1 e C_2 constantes é a solução da equação $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$.

Tomando $n = 1$ e $n = 2$, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_1 = C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1-1} + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1-1} \\ a_2 = C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2-1} + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2-1} \end{cases}$$

Como $a_1 = a_2 = 1$ temos:

$$\begin{cases} 1 = C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{0} + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{0} \\ 1 = C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1} + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1} \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 1 = C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos:

$$C_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \text{ e } C_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$$

Substituindo na equação

$$a_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

obtemos

$$a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}.$$

Portanto,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right].$$

□

2.3 Sequência de Tribonacci

A sequência de **Tribonacci** é análoga à sequência de Fibonacci, porem cada termo da sequência a partir do quarto termo é obtido através da soma dos três termos antecessores.

Definição 5. *Chama-se sequência de Tribonacci à sequência* (X_n) *definida por*

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}, \forall n \geq 4,\ n \in \mathbb{N},\ \textit{onde } x_1 = x_2 = 1 \textit{ e } x_3 = 2.$$

Temos então a sequência

$$1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44...$$

3 Equações Diofantinas

Nesta seção iremos apresentar as Equações Diofantinas, tema fundamental para nosso objetivo final. Iremos analisar as equações diofantinas de duas e três variáveis. Infelizmente pouco se analisa no Ensino Médio sobre esse tema, principalmente as de três variáveis. Equações diofantinas de duas variáveis podem ser abordadas ao estudar equações de retas na 3ª série do ensino médio. Nosso objetivo além de relacionar as equações diofantinas com a sequências de Fibonacci e Tribonacci é criar um texto que possa ser utilizado como preparação para planos de aulas no ensino médio.

3.1 Equações Diofantinas de duas variáveis

Uma equação diofantina linear de duas variáveis é uma equação da forma

$$ax + by = k$$

com $a, b, k \in \mathbb{Z}$ sendo a e b são inteiros simultaneamente não nulos.

Para determinar uma solução da equação $ax + by = k$, devemos procurar inteiros x_0 e y_0 que tornem verdadeira a equação $ax_0 + by_0 = k$.

Se $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ for solução de uma Equação Diofantina então vale a igualdade $ax_0 + by_0 = k$. Seja $d = mdc(a, b)$ então, $d \mid a$ e $d \mid b$. Logo, $d \mid (ax_0 + by_0)$, ou seja, $d \mid k$. Como $d = mdc(a, b)$ então $d = ax_0 + by_0$ para um conveniente $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Mas da hipótese que $d \mid k$ segue que $k = dt$, para algum $t \in \mathbb{Z}$. Assim, $k = dt = (ax_0 + by_0)t = ax_0t + by_0t$, o que mostra que $(x_0t; y_0t)$ é solução da equação.

Proposição 6. *Uma Equação Diofantina $ax + by = k$, em que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, admite solução se, e somente se, $d = mdc(a, b)$ divide k.*

Se (x_0, y_0) é uma solução articular da equação $ax + by = k$ e (x_1, y_1) uma solução qualquer desta equação, então

$$ax_1 + by_1 = k = ax_0 + by_0$$

Dessa igualdade temos:

$$a(x_1 - x_0) = b(y_0 - y_1)$$

Vamos supor que $d = mdc(a, b) \mid k$, então existem inteiros r e s tais que $a = dr$ e $b = ds$, com $mdc(r, s) = 1$. Assim temos:

$$r(x_1 - x_0) = s(y_0 - y_1) \Rightarrow r \mid s(y_0 - y_1)$$

Logo $r \mid (y_0 - y_1)$ e portanto $(y_0 - y_1) = rt$ para algum $t \in \mathbb{Z}$. Daí temos:

$$y_1 = y_0 - rt = y_0 - \frac{bt}{d}$$

Observando agora que

$$r(x_1 - x_0) = s(y_0 - y_1) = rst$$

Obtemos

$$x_1 = x_0 + st = x_0 + \frac{at}{d}$$

Então, para todo $t \in \mathbb{Z}$, o par $\left(x_0 + \dfrac{bt}{d}, y_0 - \dfrac{at}{d}\right)$ é solução da equação dada.

Proposição 7. *Seja (x_0, y_0) uma solução particular da equação diofantina $ax + by = k$, em que $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Então qualquer solução dessa equação é dada pelo par de inteiros:*

$$S = \left\{\left(x_0 + \frac{bt}{d}, y_0 - \frac{at}{d}\right); t \in \mathbb{Z}\right\}, \ \ onde\ d = mdc(a, b)$$

Corolário 8. *Se $d = mdc(a, b) = 1$ e $(x_0; y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é uma solução particular da equação diofantina linear $ax + by = k$, então todas as outras soluções dessa equação são dadas por*

$$S = \{(x_0 + bt, y_0 - at)/t \in \mathbb{Z}\}$$

Esse resultado será muito importante para a conclusão do nosso trabalho.

Nesse momento podemos fazer uma analogia importante na matriz curricular na 3ª série do Ensino Médio, as equações de retas. Sabemos que toda equação de reta possui forma algébrica $ax+by = c$, os pontos que satisfazem a equação citada, são soluções de uma equação diofantina. Infelizmente o conteúdo é apenas abordado no âmbito da resolução geométrica da reta. Neste momento é uma excelente oportunidade para introduzir as equações diofantinas no Ensino Médio.

3.2 Equações Diofantinas de três variáveis

Uma equação diofantina linear de três variáveis é uma equação da forma

$$ax + by + cz = k$$

com $a, b, c, k \in \mathbb{Z}$ sendo a, b e c são inteiros simultaneamente não nulos.

Consideremos a equação $a_1x + a_2y + a_3z = k$, onde cada a_i, com $i = 1, 2, 3$, sejam inteiros não nulos simultaneamente.

Se a equação possui solução então $d = mdc(a_1, a_2, a_3) \mid k$. Reduzindo essa equação para duas variáveis, considerando que $a_1x + a_2y = p$ com

$$p + a_3z = k$$

que possui solução, pois $mdc(1, a_3) = 1$ e $1|k$, e tem solução geral como vimos anteriormente,

$$S = \left\{ \left(p_0 + \frac{a_3t_1}{1}, z_0 - \frac{t_1}{1} \right); t_1 \in \mathbb{Z} \right\}$$

Como o $mdc(1, a_3) = 1$, segue que

$$S = \{(p_0 + a_3t_1, z_0 - t_1); t_1 \in \mathbb{Z}\}$$

Daí, a partir dessa solução geral encontrada, escolhemos um valor conveniente para t_1, que satisfaça:

$$d_2 = mdc(a_1, a_2) \mid (p_0 + a_3t_1)$$

E daremos continuidade para encontrar a solução geral da equação

$$a_1x + a_2y = p = p_0 + a_3t_1$$

que tem como solução geral

$$S = \left\{ \left(x_0 + \frac{a_2t_2}{d_2}, y_0 - \frac{a_1t_2}{d_2} \right); t_2 \in \mathbb{Z} \right\}$$

Logo, a solução geral da equação original é:

$$S = \left\{ \left(x_0 + \frac{a_2t_2}{d_2}, y_0 - \frac{a_1t_2}{d_2}, z_0 - t_1 \right); t_1, t_2 \in \mathbb{Z} \right\}$$

Que é gerada a partir de um valor apropriado, atribuído para o parâmetro t_1 no processo de descoberta dessa solução.

Vamos encontrar as soluções inteiras positivas da equação diofantina $x+2y+3z = k$ para qualquer k. Temos uma equação diofantina de 3 variáveis, tomando $p = x + 2y$, temos:

$$p + 3z = k \Rightarrow \begin{cases} p = p_0 + 3t \\ z = z_0 - t \end{cases}$$

Tomando $p_0 = k$ e $z_0 = 0$, tem-se $p = k + 3t$ e $z = -t$, $t \in \mathbb{Z}$. Como as soluções são inteiras e positivas temos que:

$$k + 3t \geq 0 \Rightarrow t \geq -\frac{k}{3}$$

De forma análoga temos que $z \geq 0 \Rightarrow t \leq 0$.

Logo temos que $t \in \left[-\frac{k}{3}, 0\right] \cap \mathbb{Z}$:

$$x + 2y = p \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + 2r \\ y = y_0 - r \end{cases}$$

Tomando $x_0 = p$ e $y_0 = -r$, temos:

$x = p + 2r$ e $y = r$

$x = k + 3t = 2r$ e $y = -r$

Como $x \geq 0$, então $k + 3t + 2r \geq 0$.

Logo: $2r \geq -t - k$. Assim, se $y \geq 0$ temos $r \leq 0$.

Solução geral: $\begin{cases} x = 3t + 2r + k \\ y = -r \\ z = -t \end{cases}$.

Para exemplificar a resolução de uma equação diofantina de três variáveis, vamos resolver a equação $x + 2y + 3z = 5$, cujo resultado será utilizado no quinto capitulo. Neste caso, temos $k = 5$. Assim:

$t \in \left[-\frac{k}{3}, 0\right]$ e $r \in \left[\frac{-3t - k}{2}, 0\right]$

Logo $t = \{-1, 0\}$.

- Se $t = -1 \Rightarrow r \in \{-1, 0\}$.
- Se $t = 0 \Rightarrow r \in \{-2, -1, 0\}$.

t	r	$x = 3t + 2r + k$	$y = -r$	$z = -t$	(x, y, z)	$\binom{x+y+z}{x \quad y \quad z}$
-1	-1	0	1	1	$(0, 1, 1)$	$\binom{2}{0 \quad 1 \quad 1} = 2$
-1	0	2	0	1	$(2, 0, 1)$	$\binom{3}{2 \quad 0 \quad 1} = 3$
0	-2	1	2	0	$(1, 2, 0)$	$\binom{3}{1 \quad 2 \quad 0} = 3$
0	-1	3	1	0	$(3, 1, 0)$	$\binom{4}{3 \quad 1 \quad 0} = 4$
0	0	5	0	0	$(5, 0, 0)$	$\binom{5}{5 \quad 0 \quad 0} = 1$

4 Números binomais e trinomiais

Neste capitulo, iremos apresentar os números binomiais e trinomiais. Primeiramente iremos analisar os números binomiais e em seguida os números trinomiais. Posteriormente retomaremos os conceitos de números fatoriais para embasar nosso estudo de números binomiais e trinomiais.

4.1 Um pouco de história

A Análise Combinatória é um ramo da Matemática que visa desenvolver métodos que permitam contar de uma forma direta ou indireta o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas condições.

Embora o homem tenha feito agrupamentos de elementos de conjuntos desde a época pré-histórica, de maneira formal e de acordo com dados históricos podemos dizer que a Análise Combinatória se originou ainda na antiguidade, quando o matemático grego Arquimedes de Siracusa (287 - 212 a.c.) propôs um problema geométrico que se tornou famoso, chamado Stomachion (palavra derivada do grego *stomachos*, em português, estômago), que consistia em determinar de quantos modos poderiam ser reunidas 14 peças planas, de diferentes formatos e tamanhos, para formar um quadrado.

Figura 3 – Stomachion de Arquimedes

Fonte: http://www.math.cornell.edu/ mec/GeometricDissections/1.220Archimedes%20Stomachion.html

A análise combinatória apareceu no final do século XVII e em poucos anos surgiram três notáveis obras: Dissertatio de Arte Combinatória (1666,) de Leibniz e Ars, Magna Sciendisive Combinatória (1669), de Athanasius Kircher, Traité du triangle Arithmétique de Pascal (escrito em 1654 e publicado em 1665) e Trabalhos de Wallis (1673), Frénicle de Bessy (1693), J. Bernoulli (1713) e De Moivre (1718). O matemático francês Frénicle (1693) apresentou todos os 880 quadrados de ordem 4, e nesta mesma época seu compatriota, De La Loubére (1691) descreveu um método de construção de quadrados de ordem ímpar conhecido como método de fronteira que aprendeu com o povo de Sião.

Leibniz descreveu em 1666 a combinatória como sendo o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos, enquanto Nicholson em 1818 definiu-a como o ramo da matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado numero de objetos podem ser associados e misturados entre si. Segundo Berge (1971) a definição de combinatória depende de conceitos de configurações, pois os matemáticos acreditam que certos problemas são de natureza combinatória e que os m'métodos para resolvê-los devem ser estudados.

Para Biggs (1979) há dois princípios de contagem: o princípio aditivo e o princípio multiplicativo. O 1º diz que quando quisermos contar um conjunto de objetos, podemos dividir em casos, contar as partes separadamente, e somar os resultados. Já no 2º princípio temos que se uma decisão pode ser tomada de x maneiras e a partir dessa, outra decisão pode ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras possíveis será o produto entre x e y.

A análise combinatória está fundamentada nas contagens e propriedades dos agrupamentos diferenciando em 3 categorias: arranjos, permutações e combinações. No início do século XIX os termos arranjo e permutação não apresentavam significado preciso. Leibniz dizia que as permutações tinham significado de variações, que é hoje utilizada por alguns autores para indicar arranjo.

Durante muito tempo, diversos matemáticos adotaram diferentes simbologias no estudo da Análise Combinatória. O símbolo $n!$ foi definido por Gauss (1777-1855) com o intuito de representar o produto dos n primeiros números naturais (fatorial de n), A. M. Legendre (Paris, 1811) utilizava o símbolo $\tau(n+1)$. O símbolo $n!$ é devida a Cristian Kramp (Colônia, 1808) e $|n$ é utilizada por outros autores. O termo fatorial se deve a Arbogast (Strasburgo, 1800). Em 1654, surge a Probabilidade, que inicialmente era considerada como um ramo da Análise Combinatória, no Problema dos Pontos colocado a Pascal por Chevalier de Méré e resolvido nas trocas de cartas entre Pascal e Fermat.

4.2 Números binomiais

Nesse momento iremos retomar conceitos básicos de análise combinatória que servirão de base para nosso estudo. Nesse universo extraordinário da contagem iremos iniciar com a definição principal que é analisada com grande ênfase no ensino médio.

Definição 9. *Seja r um numero natural inteiro não negativo. Definimos fatorial de r, denotado por $r!$, por meio da relação:*

I. $r! = r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ *para* $r \geq 2$.

II. $1! = 1$.

III. $0! = 1$.

Definição 10. *Para n e k naturais, com $n \geq k$, o número binomial de n sobre k é definido por*

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Para nosso estudo iremos adotar a notação $\binom{n}{r} = \binom{n}{s \quad r} = \dfrac{n!}{s!r!}$, onde $r + s = n$.

O triângulo de Pascal é um triângulo aritmético formado por números que têm diversas relações entre si. O triângulo de Pascal não foi uma invenção de Pascal, porque onze séculos antes dele, Al-Karkhi conseguiu as primeiras soluções numéricas do triângulo, mas foi Pascal quem descobriu a maioria de suas propriedades e relações, o que justifica o nome que é dado ao triângulo.

A denominação desse triângulo varia muito ao longo do mundo. Os franceses o chamam de triângulo de Pascal, os chineses chamam-no de triângulo de Yang Hui, os italianos chamam-no de triângulo de Tartaglia e encontramos outras denominações como triângulo de Tartaglia- Pascal ou simplesmente triângulo aritmético ou triângulo combinatório. O triângulo aritmético de Pascal é formado por uma tabela onde podemos dispor ordenadamente os coeficientes binomiais $\binom{n}{r}$.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \binom{n}{5} & \binom{n}{6} \cdots & \binom{n}{n}
\end{array}$$

Isto é:

- A 1ª linha contém os coeficientes binomiais com $n = 0$.

- A 2ª linha contém os coeficientes binomiais com $n = 1$.
- A 3ª linha contém os coeficientes binomiais com $n = 2$.
- A kª. Linha contém os coeficientes binomiais com $n = k - 1$.

Se substituirmos cada número binomial pelo seu valor numérico, obtemos outra versão do triângulo de Pascal, ilustrada a seguir.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Na construção do triangulo de Pascal, não é necessário calcular os coeficientes binomiais um a um. Basta usarmos algumas de suas propriedades.

I. Em cada linha do triângulo, o primeiro elemento vale 1, pois, qualquer que seja a linha, o primeiro elemento é $\binom{n}{0} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

II. Em cada linha do triângulo, o último elemento vale 1, pois, qualquer que seja a linha, o último elemento é $\binom{n}{0} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

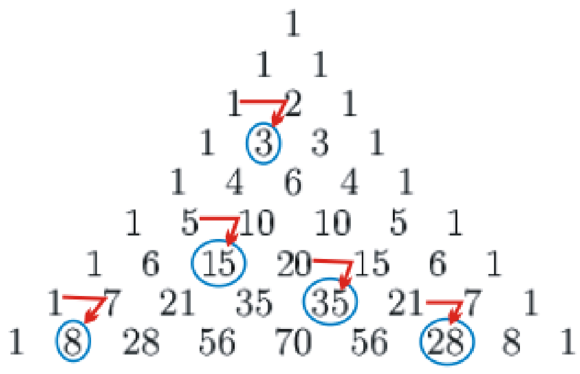
III. Numa linha, dois coeficientes binomiais equidistantes dos extremos são iguais.

IV A partir da 3ª linha, cada elemento (com exceção do primeiro e do último) é a soma dos elementos da linha anterior, imediatamente acima dele. Essa propriedade é conhecida como relação de Stifel e afirma que:

Proposição 11 (**Relação de Stifel**).

$$\binom{n-1}{r-1 \quad s} + \binom{n+1}{r \quad s-1} = \binom{n}{r \quad s}, n \geq 2$$

Figura 4 – Relação de Stifel



Fonte: https://metacerta.wordpress.com/2013/10/26/triangulo-de-pascal/.

Demonstração.

$$\binom{n-1}{r-1\quad s}+\binom{n-1}{r\quad s-1}=\frac{(n-1)!}{(r-1)!s!}+\frac{(n-1)!}{r!(s-1)!}=\frac{(n-1)!r+(n-1)!s}{r!s!}=\frac{(n-1)!(r+s)}{r!s!}$$

Como $r+s=n$ temos:

$$\frac{(n-1)!n}{r!s!}=\frac{n!}{r!s!}$$

Então temos a igualdade:

$$\binom{n-1}{r-1\quad s}+\binom{n-1}{r\quad s-1}=\binom{n}{r\quad s}$$

$\square$

Podemos destacar ainda que para $n\in\mathbb{N}$, os números binomiais $\binom{n}{0\ \ n}, \binom{n}{1\ \ n-1}\cdots\binom{n}{n\ \ 0}$ aparecem como coeficientes na expansão do binômio de Newton, isto é,

$$(a+b)^n=\binom{n}{0\quad n}a^0b^n+\binom{n}{n-1\quad 1}a^{n-1}b^1+\cdots\binom{n}{r\quad t}a^rb^t+\cdots+\binom{n}{n\quad 0}a^nb^0=\sum_{r+t=n}\binom{n}{r\quad t}a^rb^t.$$

4.3 Números trinomiais

Os *números trinomiais* não aparecem em livros didáticos do ensimo médio como os binomiais, seu estudo é mais raro, mas não menos importante. Para nosso estudo é fundamental a definição dos números trinomiais.

Definição 12 (Números Trinomiais)**.** *Os números trinomiais são definidos como sendo*

$$\binom{n}{r\ s\ t}=\frac{n!}{r!s!t!}$$

onde $r+s+t=n$.

Exemplo 7.

$$\binom{3}{2\ 1\ 0} = \frac{3!}{2!1!0!} = \frac{6}{2\cdot 1\cdot 1} = 3.$$

Analogamente à relação de Stifel, temos para os números trinomiais

Lema 13 (Identidade de Pascal)**.** *Para* $n, r, s, t \in \mathbb{N}$, $n = r+s+t$, *temos que*

$$\binom{n}{r\quad s\quad t} = \binom{n-1}{r-1\quad s\quad t} + \binom{n-1}{r\quad s-1\quad t} + \binom{n-1}{r\quad s\quad t-1}.$$

Demonstração.

$$\binom{n-1}{r-1\quad s\quad t} + \binom{n-1}{r\quad s-1\quad t} + \binom{n-1}{r\quad s\quad t-1} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!s!t!} + \frac{(n-1)!}{r!(s-1)!t!} + \frac{(n-1)!}{r!s!(t-1)!} =$$

$$\frac{(n-1)!r + (n-1)!s + (n-1)!t}{r!s!t!} = \frac{(n-1)!(r+s+t)}{r!s!t!} = \frac{n!}{r!s!t!},$$

pois $r+s+t=n$. □

Os números Trinomiais, assim como os binomiais, estão associados à expansão de uma potência positiva da soma de termos. Mais especificamente, temos que

$$(a+b+c)^n = \sum_{r+s+t=n} \binom{n}{r\quad s\quad t} a^r b^s c^t.$$

Aqui assumimos que a, b, c pertencem a um conjunto cujas operações de $+$ e $\cdot$ estão bem definidas e são comutativas.

De fato, para r, s, t tais que $r+s+t=n$, temos que o termo $a^r b^s c^t$ aparece tantas quantas forem as permutações de n elementos, com r repetições de a, s repetições de b e t repetições de c. Desta maneira temos que o coeficiente de $a^r b^s c^t$ será $\frac{n!}{r!s!t!} = \binom{n}{r\ s\ t}$.

A demonstração deste fato segue do fato que na expansão $(a+b+c)^n$, aparecem todas as possiveis permutações com n elementos.

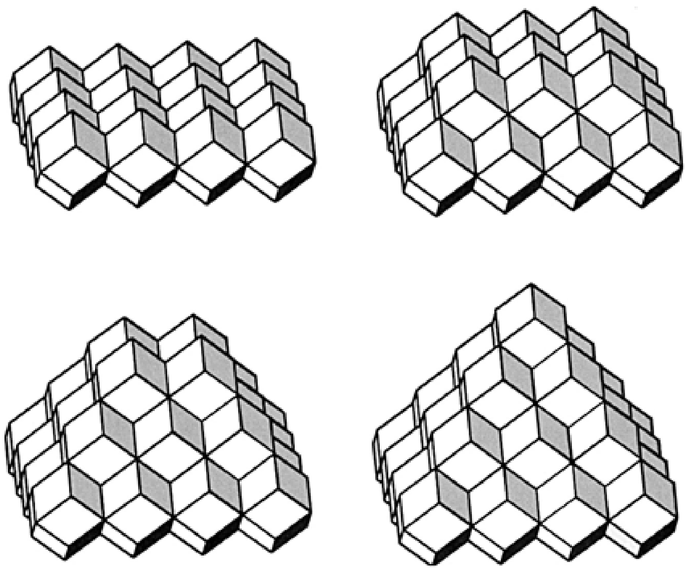
Exemplo 8. *Para* $a, b, c \in \mathbb{Z}$, *temos que* $(a+b+c)^2 = \sum_{r+s+t=2} \binom{2}{r\ s\ t} a^r b^s c^t$, *isto é,*

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= \binom{2}{2\ 0\ 0}a^2 + \binom{2}{0\ 2\ 0}b^2 + \binom{2}{0\ 0\ 0}c^2 + \binom{2}{1\ 1\ 0}ab + \binom{2}{1\ 0\ 1}ac + \binom{2}{0\ 1\ 1}bc \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.\end{aligned}$$

5 Números Trinomais e Equações Diofantinas

Nesse momento vamos analisar a relação da Pirâmide de Pascal com a sequência de Tribonacci. Antes de analisarmos a sequência vamos analisar a Pirâmide de Pascal. Essa pirâmide é formada por dodecaedros rômbicos regulares (poliedro formado por 12 faces em formato de paralelogramo), como podemos analisar na figura abaixo:

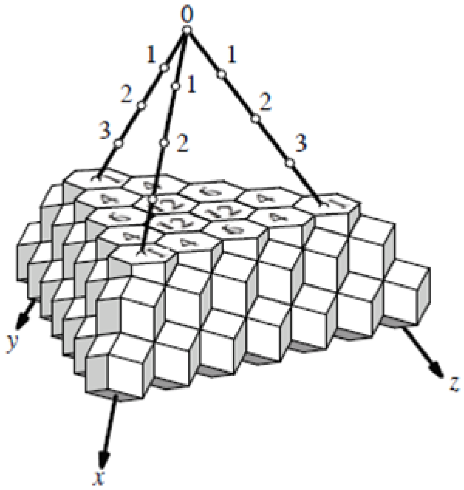
Figura 5 – Pirâmide de Pascal



Fonte: https://www.ems-ph.org/journals/showabstract.php?issn=0013-6018vol=71iss=1rank=1.

É possível implementar um sistema não ortogonal de coordenadas (x, y, z) na Pirâmide de Pascal

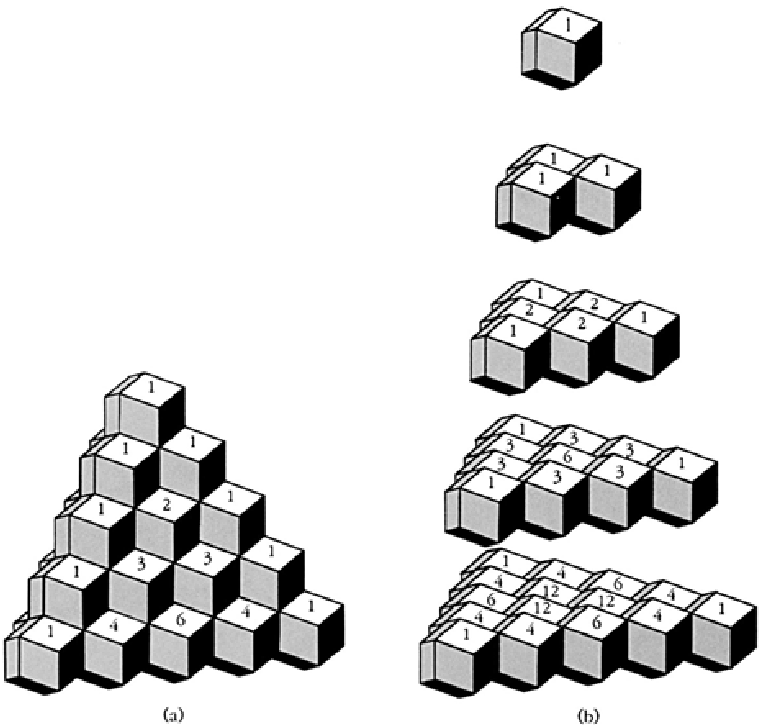
Figura 6 – Pirâmide de Pascal com sistema de coordenadas não-ortogonal



Fonte: https://www.ems-ph.org/journals/showabstract.php?issn=0013-6018vol=71iss=1rank=1.

Como vimos no Capítulo 4, os números trinomiais são definidos como $\binom{n}{r\ \ s\ \ t} = \dfrac{n!}{r!s!t!}$. Podemos agora relacionar a pirâmide de Pascal acoplada ao sistema não ortogonal com os resultados desses números trinomiais. Cada face do dodecaedro rômbico apresenta um coeficiente trinomial $\binom{x+y+z}{x\ \ y\ \ z}$, referente as suas coordenas (x, y, z).

Figura 7 – Pirâmide formada por Números Trinomiais



Fonte: https://www.ems-ph.org/journals/showabstract.php?issn=0013-6018vol=71iss=1rank=1

Por exemplo, quando analisamos a quarta camada da pirâmide, ou seja, as combinações inteiras positivas que são soluções de $x + y + z = 4$, encontramos os coeficientes trinomiais de $\binom{4}{x\ \ y\ \ z}$.

Cada ponto de coordenas inteiras positivas corresponde a um coeficiente trinomial, ou seja, através das coordenas ponto (x, y, z) com $x, y, z \geq 0$ é possível calcular seu coeficiente trinomial $\binom{x+y+z}{x\ \ y\ \ z}$.

Podemos seccionar essa pirâmide por infinitos planos. Em particular, iremos analisar os planos que possuem equação $x + 2y + 3z = k$, onde $k \geq 0$. Como vimos no Capítulo 3 essa equação é conhecida como equação diofantina linear de 3 variáveis. Além disso as soluções dessa equação são dadas por

$$\begin{cases} x = 3t + 2r + k \\ y = -r \\ z = -t \end{cases}$$

onde $t \in \left[-\frac{k}{3}, 0\right]$ e $r \in \left[\frac{-3t-k}{2}, 0\right]$.

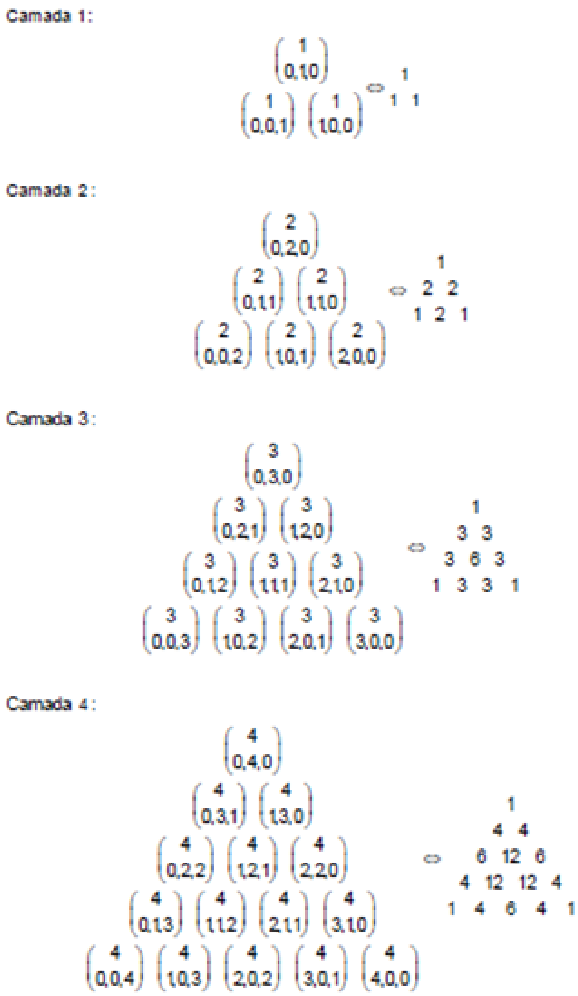
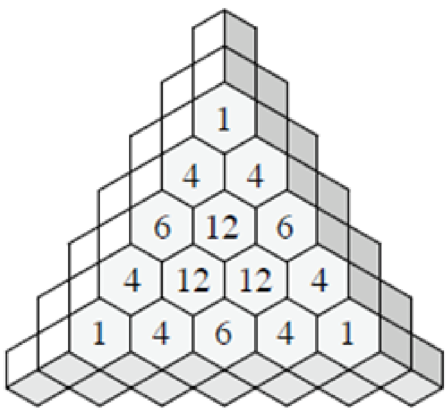


Figura 8 – Esboço Geométrico da 4ª Camada da Pirâmide de Pascal



Fonte:
https://www.ems-ph.org/journals/showabstract.php?issn=0013-6018vol=71iss=1rank=1.

Denotaremos por $N(k)$ o conjunto solução $\{(x, y, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + 2y + 3z = k\}$, ou seja, $N(k)$ é o conjunto das ternas naturais que são soluções da equação diofantina

Tabela 1 – Conjunto de Soluções Inteiras Não-negativas

t	r	$x = 3t + 2r + k$	$y = -r$	$z = -t$	(x, y, z)	$\binom{x+y+z}{x\ \ y\ \ z}$
-1	-1	0	1	1	$(0, 1, 1)$	$\binom{2}{0\ 1\ 1} = 2$
-1	0	2	0	1	$(2, 0, 1)$	$\binom{3}{2\ 0\ 1} = 3$
0	-2	1	2	0	$(1, 2, 0)$	$\binom{3}{1\ 2\ 0} = 3$
0	-1	3	1	0	$(3, 1, 0)$	$\binom{4}{3\ 1\ 0} = 4$
0	0	5	0	0	$(5, 0, 0)$	$\binom{5}{5\ 0\ 0} = 1$

$x + 2y + 3z = k$. Iremos denotar por S_k a soma

$$S_k = \sum \binom{x + y + z}{x \quad y \quad z}$$

ou seja, a soma dos coeficientes trinomiais obtidos através das ternas inteiras positivas obtidas na equação diofantina $x + 2y + 3z = k$.

Por exemplo, a equação $x + 2y + 3z = 5$ possui as seguintes soluções como vimos num exemplo resolvido no Capítulo 3.

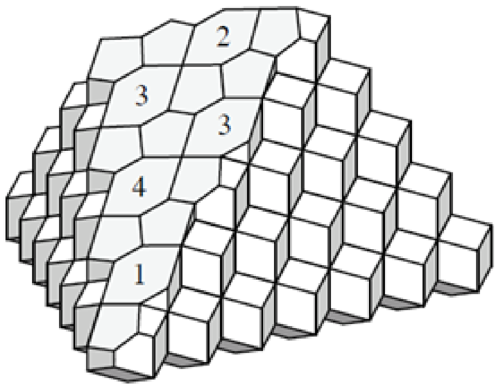
Temos seguintes soluções $(0, 1, 1), (2, 0, 1), (1, 2, 0), (3, 1, 0), (5, 0, 0)$.

Calculando a soma dos coeficientes trinomiais temos:

$$S_5 = \binom{2}{0\ \ 1\ \ 1} + \binom{3}{2\ \ 0\ \ 1} + \binom{3}{1\ \ 2\ \ 0} + \binom{4}{3\ \ 1\ \ 0} + \binom{5}{5\ \ 0\ \ 0}$$

$$S_5 = 2 + 3 + 3 + 4 + 1 = 13$$

Figura 9 – Ilustração Geométrica de S_5



Fonte: https://www.ems-ph.org/journals/showabstract.php?issn=0013-6018vol=71iss=1rank=1.

Com o mesmo processo, para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ temos que:

$$S_0 = 1$$
$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 2$$
$$S_3 = 4$$
$$S_4 = 7$$
$$S_5 = 13$$
$$S_6 = 24$$

Observe que $S_0 = T_1$, $S_1 = T_2$, $S_2 = T_3, S_3 = T_4, \cdots S_6 = T_7$ são os seis primeiros termos da sequência de Tribonacci. Nosso objetivo é mostrar que essa propriedade vale em geral.

Teorema 14. *Para todo $k \geq 1$, temos que $T_k = S_{k-1}$, onde T_k denota o $k-$esimo termo da seqência de Tribonacci e $S_j = \sum_{(x,y,z)\in N(j)} \binom{x+y+z}{x \;\; y \;\; z}$.*

Demonstração. Observe inicialmente que se $(x, y, z) \in N(k)$, isto é, (x, y, z) é uma solução não negativa da equação $x + 2y + 3z = k$, então valem

(i) $(x - 1, y, z) \in N(k - 1)$

(i) $(x, y - 1, z) \in N(k - 2)$ e

(i) $(x, y, z - 1) \in N(k - 3)$.

Desta maneira, temos que para cada solução $(x, y, z) \in N(k)$, produzimos soluções das equações $x+2y+3z = k-1$, $x+2y+3z = k-2$ e $x+2y+3z = k-3$, respectivamente. Além disso, usando o **Lema 13**, para $(x, y, z) \in N(k)$, temos que

$$\binom{x+y+z}{x \;\; y \;\; z} = \binom{(x-1)+y+z}{x-1 \;\; y \;\; z} + \binom{x+(y-1)+z}{x \;\; y-1 \;\; z} + \binom{x+y+(z-1)}{x \;\; y \;\; z-1}.$$

Daí, podemos concluir que cada elemento do somatório S_k pode ser decomposto em três parcelas $s_{k-1} + s_{k-2} + s_{k-3}$, onde $s_j \in S_j$. (Aqui vale ressaltar que se $x = 0$-analogamente $y = 0$ e $z = 0$-, então $\binom{(x-1)+y+z}{x-1 \;\; y \;\; z}$-analogamente $\binom{x+(y-1)+z}{x \;\; y-1 \;\; z}$ e $\binom{x+y+(z-1)}{x \;\; y \;\; z-1}$-serão considerados iguais a 0.)

Como cada solução $(x, y, z) \in N(k)$ é unicamente decomposta em soluções pertencentes a $N(k-1)$, $N(k-2)$ e $N(k-3)$, temos que

$$S_k = S_{k-1} + S_{k-2} + S_{k-3}.$$

E como $T_1 = S_0$, $T_2 = S_1$ e $T_3 = S_2$, temos que $T_k = S_{k-1}$ para todo $k \geq 4$.

$\square$

Com o resultado acima e a caracterização das soluções não negativas das equações diofantinas da forma $x + 2y + 3z = k$,

$$\begin{cases} x = 3t + 2r + k \\ y = -r \\ z = -t \end{cases}$$

com $t \in \left[-\frac{k}{3}, 0\right]$ e $r \in \left[\frac{-3t-k}{2}, 0\right]$ podemos encontrar qualquer elemento da sequência de Tribonacci, como já foi feito acima. É claro que encontrar todas os elementos de $N(k)$ é bastante trabalhoso! Mas é interessante visto que não temos, em geral, como determinar os termos de uma sequeência definida por recorrência de grau 3, como é o caso. Vamos, por exemplo, encontrar o elemento T_8.

Poderíamos, conhecendo T_5, T_6 e T_7 determinar T_8 usando a relação de recorrência. Mas aqui utilizaremos o teorema acima, isto é, que $T_8 = S_7$ e encontraremos S_7 com o modelo definido para as soluções não negativas da equação $x + 2y + 3z = 7$. Desta maneira, devemos inicialmente encontrar todos os elementos do conjunto $N(7)$, isto é, todas as triplas (x, y, z) tais que

$$\begin{cases} x = 3t + 2r + 7 \\ y = -r \\ z = -t \end{cases}$$

com $t \in [-2, 0]$ e $r \in \left[\frac{-3t-7}{2}, 0\right]$

Note que

(iv) $t = -2$ implica que $r \in [0, 0]$

(v) $t = -1$ implica que $r \in [-2, 0]$

(vi) $t = 0$ implica que $r \in [-3, 0]$

Desta forma temos que:

Tabela 2 – Tabela de Soluções Inteiras Não-negativas

t	r	$x = 3t + 2r + 7$	$y = -r$	$z = -t$	(x, y, z)	$\binom{x+y+z}{x \;\; y \;\; z}$
-2	0	1	0	2	$(1, 0, 2)$	$\binom{3}{1 \;\; 0 \;\; 2} = 3$
-1	-2	0	2	1	$(0, 2, 1)$	$\binom{3}{0 \;\; 2 \;\; 1} = 3$
-1	-1	2	1	1	$(2, 1, 1)$	$\binom{4}{2 \;\; 1 \;\; 1} = 12$
-1	0	4	0	1	$(4, 0, 1)$	$\binom{5}{4 \;\; 0 \;\; 1} = 5$
0	-3	1	3	0	$(1, 3, 0)$	$\binom{4}{1 \;\; 3 \;\; 0} = 4$
0	-2	3	2	0	$(3, 2, 0)$	$\binom{5}{3 \;\; 2 \;\; 0} = 10$
0	-1	5	1	0	$(5, 1, 0)$	$\binom{6}{5 \;\; 1 \;\; 0} = 6$
0	0	7	0	0	$(7, 0, 0)$	$\binom{7}{7 \;\; 0 \;\; 0} = 1$

Portanto temos que $S_7 = 3 + 3 + 12 + 5 + 4 + 10 + 6 + 1 = 44$ o que implica que $T_8 = 44$.

6 Considerações finais

O desenvolvimento do conhecimento matemático, tem em suas origens, a busca de respostas a problemas oriundos de práticas sociais. Ao se estabelecer como ciência, a matemática proporciona uma linguagem sintética, com menor grau de ambiguidades, métodos rigorosos de validação interna e desenvolvimento de diferentes tipos de raciocínios para compreender os fenômenos que nos cercam.

A finalidade da matemática escolar é desenvolver a lógica do pensamento matemático e a compreensão de suas representações. É fundamental a articulação dialética, ao longo de toda educação básica, assim como o incentivo ao fazer matemática, registrar as representações pessoais para apropriar dos registros formais. Nesse sentindo, destaca-se a resolução de problemas como uma metodologia que instiga e potencializa raciocínios próprios dessa área de conhecimento.

> Cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. Saber aprender é a condição básica para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida. Sem dúvida, cabe a todas as áreas do Ensino Médio auxiliar no desenvolvimento da autonomia e da capacidade de pesquisa, para que cada aluno possa confiar em seu próprio conhecimento. (PCN,1997, p 41).

Ao introduzir os conceitos e aplicações de equação de reta em Geometria Analítica na 3ª série do ensino médio, surge a oportunidade de apresentar ao aluno o conceito de equações diofantinas. A interpretação geométrica dos valores que satisfazem as equações diofantinas, pode ser explicada pelos pontos que compõem a reta. Apresentando ao aluno mais um instrumento para conhecimentos futuros.

A riqueza da matemática se faz presente em relacionar conteúdos oriundos de séries anteriores com novos conhecimentos, nesse sentindo vale ressaltar, o conceito de sequências de Fibonacci e Tribonacci, introduzidos na 2ª série do ensino médio, atrelados a resolução de equações diofantinas e coeficientes binomiais e trinomiais. Este trabalho serve como base, para auxiliar o planejamento, de uma contextualização e da interdisciplinaridade, afim de permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.

REFERÊNCIAS

[1] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática*. Brasília: MEC, SEF, 1997.

[2] PENDERSEN, J.; WALSER, H. *Pascal, Fibonacci, and Geometry*. Elem. Math 71 (2016). p. 1 - 6.

[3] PENDERSEN, J.; HILTON, P. *Mathematics, Models and Magz, Part I:* Patterns in Pascal's Triangle and tetrahedron. Mathematics Magazine, Vol. 85, N. 2. Abr. 2012. p. 97 - 109.

[4] LIMA, Elon Lages; et. all. *A Matemática do Ensino Médio - Volume 2*. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[5] HEFEZ, Abramo. *Iniciação à Aritmética*. Rio de Janeiro, IMPA, 2015.