



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Adolfo Luiz Braucks Vianna

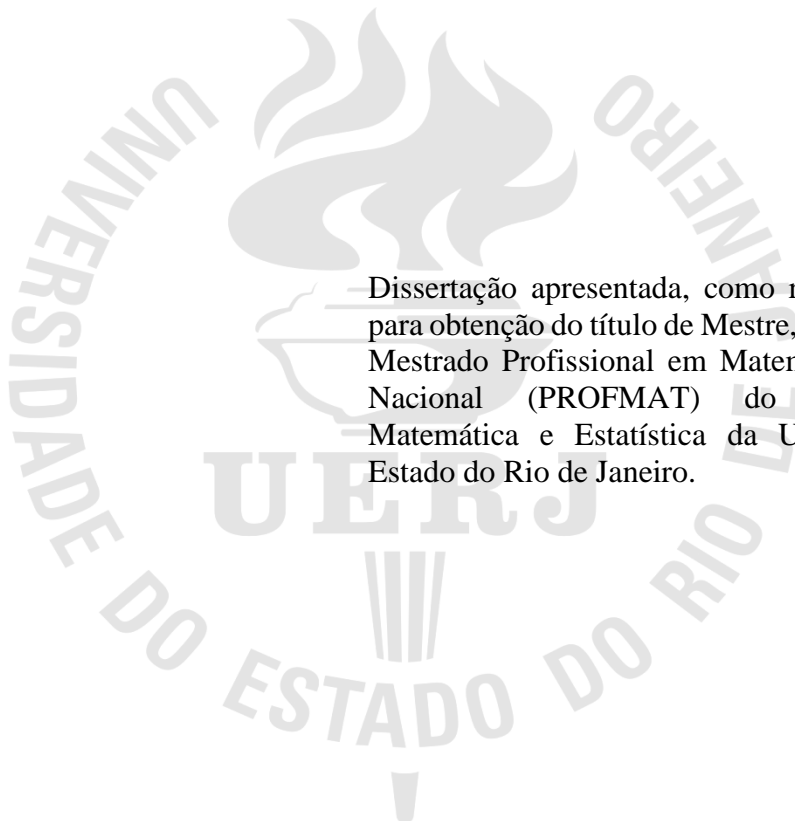
**O problema das quatro guaritas: uma oportunidade para o estudo dos
quadriláteros bicêntricos**

Rio de Janeiro

2017

Adolfo Luiz Braucks Vianna

**O problema das quatro guaritas: Uma oportunidade para o estudo dos
quadriláteros bicêntricos**



- Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Augusto Cesar de Castro Barbosa

Coorientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius Tovar

Rio de Janeiro

2017

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

V617 Vianna, Adolfo Luiz Braucks.
O problema das quatro guaritas: uma oportunidade para o estudo dos quadriláteros bicêntricos / Adolfo Luiz Braucks Vianna. – 2017.
138f. : il.

Orientador: Augusto Cesar de Castro Barbosa.
Coorientador: Marcus Vinicius Tovar.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Geometria plana - Estudo ensino - Teses. 2. Ensino auxiliado por computador - Teses. 3. Geometria plana - Brasil - Historia - Teses. I. Barbosa, Augusto Cesar de Castro. II. Tovar, Marcus Vinicius. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 514.112

Autorizo, para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Adolfo Luiz Braucks Vianna

**O problema das quatro guaritas: uma oportunidade para o estudo dos quadriláteros
bicêntricos**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 22 de agosto de 2017.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Augusto Cesar de Castro Barbosa (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística- UERJ

Prof. Dr. Marcus Vinicius Tovar (Coorientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof.^a Dra. Walcy Santos
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Jaime Velasco Câmara da Silva
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Rio de Janeiro

2017

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a Euclides, Descartes, Newton, Euler, Agnesi, Gauss, Germain, Darwin, Lovelace, Freud, Curie, Gödel, Beauvoir, Einstein, Silveira, Turing, Freire, Hawking e tantos outros gênios, homens e mulheres sem cujas obras a vida em sociedade, no nosso planeta, teria tomado rumos tortuosos, sobre os quais não se pode sequer especular. Que a luz da ciência e do saber triunfe sempre sobre as trevas da ignorância e do obscurantismo!

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Luiz Kardec Vianna e Solange de Sá Braucks, inclusive por terem inculcido desde sempre, em mim e meus irmãos, o gosto pela leitura, pela aquisição de cultura... e pelas Aventuras de Tintim e os discos dos Beatles!

Agradeço a minha mulher e amor da minha vida, Elizabeth Bastos Pereira da Silva, por ser quem é, por ter estado sempre ao meu lado quando precisei, pelo companheirismo, cumplicidade e por ter me dado os maiores presentes de minha vida.

Agradeço a meus filhos, Tatiana, Alexandre e Ingrid, porque sem eles nada disto faria o menor sentido. “Não conhece o amor mais pleno e verdadeiro de que se tem notícia, quem nunca embarcou na insólita e árdua viagem da geração de descendentes”.

Agradeço a tantos de meus antigos professores, como Carlos Roquette, Miguel Jorge, Maria Luiza Correa, Myriam Sertã, Gabriela Brião, Francisco Mattos, e aos meus orientadores, Augusto Cesar de Castro Barbosa e Marcus Vinicius Tovar, por manterem acesa a chama da busca pelo conhecimento e pela transcendência, que só assim se torna viável alcançar!

Agradeço a meus colegas de turma, em especial a Antonio Andrade, Cintia Dias, Emanuel Arcanjo, Pedro Tavares, Renata Paixão e Tancredo Duarte, pela amizade e pelas trocas, sempre tão proveitosas!

Agradeço aos ex-presidentes da República Federativa do Brasil, Luís Inácio Lula da Silva e Dilma Vana Rousseff, por terem tentado, com denodo e galhardia, fazer de nosso país uma nação mais irmã, menos desigual e injusta.

Agradeço a Deus por ter permitido que eu chegasse até aqui, com saúde, disposição férrea e motivação incessante.

A todos os supracitados, um sincero MUITO OBRIGADO!

EPÍGRAFE

A Matemática é a mais simples, a mais perfeita e a mais antiga de todas as ciências.

Jacques Hadamard

Quando a Educação não é libertadora, o sonho do oprimido é ser o opressor.

Paulo Freire

A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo.

Galileu Galilei

Puis que je doute, je pense; puis que je pense, j'existe.

René Descartes

Hay que endurecer, pero sin perder la ternura.

Ernesto Che Guevara

RESUMO

VIANNA, Adolfo Luiz Braucks. *O problema das quatro guaritas: Uma oportunidade para o estudo dos quadriláteros bicêntricos*. 2017. 136f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

Este trabalho parte de uma situação-problema original, inteiramente elaborada pelo autor, denominada “O problema das quatro guaritas”, para, a partir da discussão da sua solução, estudar os quadriláteros bicêntricos, figuras de grande beleza estética e que, devido às peculiaridades que os caracterizam, decorrentes do fato de serem a um só tempo cíclicos e tangenciais, possibilitam a recordação de alguns assuntos bastante importantes no contexto do ensino - aprendizagem da Geometria Euclidiana Plana, tais como a Semelhança de Triângulos, os Lugares Geométricos, o Teorema da Bissetriz Interna, as Leis dos Senos e dos Cossenos, os Teoremas de Pitot, Ptolomeu e Hiparco, as Fórmulas de Bretschneider e Brahmagupta e alguns outros. Oferecemos ao leitor uma perspectiva histórica do ensino da Geometria Plana no Brasil, inclusive no que se refere ao conteúdo dos livros-texto, principalmente dos séculos passado e atual. Fazemos uso tanto de ferramentas tradicionais do Desenho Geométrico Plano (régua e compasso), como de tecnologia digital, mais especificamente o software gratuito de geometria dinâmica Geogebra, para analisar os quadriláteros bicêntricos, e incluímos também uma série de atividades que poderão eventualmente ser adotadas por professores de Matemática em suas turmas do Oitavo e Nono Anos do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Quadriláteros. Círculo Inscrito. Círculo Circunscrito. Geogebra.

ABSTRACT

VIANNA, Adolfo Luiz Braucks. *O problema das quatro guaritas: Uma oportunidade para o estudo dos quadriláteros bicêntricos*. 2017.137f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

This work uses an original problem situation, entirely elaborated by the author, called "The problem of the four security cabins", and, from the discussion of its solution, intends to study the bicentric quadrilaterals, figures of great aesthetic beauty and that, due to the peculiarities characterized by the fact that they are both cyclical and tangential, make it possible to recall some very important subjects in the teaching - learning context of Euclidean Geometry, such as the Similarity of Triangles, the Loci, the Internal Bisector Theorem, Pitot's theorem, the Angles in a Circle, the Theorems of Ptolemy and Hipparchus, and a few others. We offer the reader an historical perspective of the teaching of Euclidian Geometry in Brazil, including what refers to the content of textbooks, especially of the past and present centuries. We use tools such as Manual Geometric Drawing (ruler and compass), and digital devices, more specifically free dynamic geometry software Geogebra, to analyze the bicentric quadrilaterals, and also include a series of activities that can eventually be adopted by Mathematics teachers in their classes of the Eighth and Ninth Years of Primary Education.

Keywords: Quadrilaterals. Inscribed Circle. Circumscribed Circle. Geogebra.

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	11
1	O PROBLEMA DAS QUATRO GUARITAS	14
2	ALGUNS CONCEITOS RELEVANTES	18
2.1	Semelhança de Triângulos	18
2.2	Lugares Geométricos no Plano	22
2.2.1	<u>O Par de Retas Paralelas</u>	22
2.2.2	<u>A Circunferência de Círculo</u>	23
2.2.3	<u>A Mediatriz</u>	24
2.2.4	<u>A Bissetriz</u>	25
2.2.5	<u>O Arco Capaz</u>	26
2.2.5.1	Ângulo inscrito.....	27
2.2.5.2	A Construção do Arco Capaz.....	28
2.3	Resultados Importantes	30
2.3.1	<u>Teorema da Bissetriz Interna</u>	30
2.3.2	<u>Teorema de Pitot</u>	31
2.3.3	<u>Teorema do Quadrilátero Inscritível</u>	35
2.3.4	<u>Teorema de Ptolomeu</u>	37
2.3.5	<u>Teorema de Hiparco</u>	39
2.3.6	<u>Fórmula de Bretschneider</u>	42
2.3.7	<u>Área de um quadrilátero bicêntrico em função dos lados</u>	45
3	QUADRILÁTEROS BICÊNTRICOS – CONCEITO, PROPRIEDADES, FÓRMULA DE FUSS, MÉTODOS DE CONSTRUÇÃO E CÁLCULO DA ÁREA	46
3.1	Conceito	46
3.2	Propriedades	47
3.2.1	<u>Ângulos opostos suplementares</u>	47
3.2.2	<u>Somas iguais dos lados opostos</u>	47
3.2.3	<u>Quadriláteros tangenciais (condições mediante as quais são também cíclicos)</u>	48
3.3	Fórmula de Fuss	54
3.4	Alinhamento de três pontos notáveis	56
3.5	Métodos para a construção de quadriláteros bicêntricos	59
3.5.1	<u>Utilizando ferramentas de Desenho Geométrico Plano (régua e compasso)</u>	60
3.5.2	<u>A partir de um triângulo e seu círculo circunscrito</u>	63
3.5.3	<u>A partir de duas cordas perpendiculares</u>	66
3.5.4	<u>A partir de um triângulo e seu círculo inscrito</u>	69
3.6	Cálculo da área do quadrilátero bicêntrico em função dos raios dos círculos inscrito e circunscrito e do ângulo formado por suas diagonais	71

3.6.1	<u>Área Máxima de um Quadrilátero Bicêntrico – Pipa Reta</u>	74
3.6.2	<u>Área Mínima de um Quadrilátero Bicêntrico – Trapézio Isósceles</u>	75
3.6.3	<u>Comparação entre as áreas da pipa reta e do trapézio isósceles bicíclicos</u>	78
4	SOLUÇÃO DO PROBLEMA DAS QUATRO GUARITAS	86
4.1	Solução do Problema das Quatro Guaritas – Ângulo de visada reto	87
5	ATIVIDADES PARA APLICAÇÃO EM SALA DE AULA	91
5.1	Primeira Atividade Proposta	91
5.2	Segunda Atividade Proposta	92
5.3	Terceira Atividade Proposta	94
5.3.1	<u>Atividade de cunho prático: construções de quadriláteros bicêntricos em madeira</u>	94
5.4	Outras Propostas de Atividades abordando o conceito de Quadriláteros Bicêntricos	96
5.4.1	<u>Construção teórica de um trapézio isósceles bicêntrico</u>	96
5.4.2	<u>Construção teórica de uma pipa reta</u>	97
5.4.3	<u>O Problema dos Quatro Herdeiros</u>	97
5.4.4	<u>O Problema das Quatro Retas</u>	98
6	O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA NO BRASIL E OS LIVROS DIDÁTICOS – UMA PERSPECTIVA CRÍTICA	99
6.1	O Ensino de Geometria no Brasil	100
6.1.1	<u>O Movimento da Matemática Moderna (MMM)</u>	100
6.1.2	<u>Os livros-texto de Matemática e a Geometria no Ensino Básico</u>	105
6.1.3	<u>Outros livros brasileiros de Geometria</u>	115
6.2	O quadrilátero pipa: por que o ignoramos, se amamos as pipas?	117
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	121
	REFERÊNCIAS	122
	APÊNDICE	124

INTRODUÇÃO

A Geometria Plana é uma das áreas do conhecimento humano cujo estudo remonta a épocas mais remotas de que se tem notícia. Escavações realizadas em diferentes sítios arqueológicos ao redor do planeta evidenciam que a grande maioria das antigas civilizações se ocupou de problemas geométricos em maior ou menor escala, devido a questões práticas que exigiam conhecimentos dessa natureza, nos campos da agrimensura, da construção civil, da astronomia, dentre outras. Não é senão por essa razão que qualquer estudioso da História da Matemática sempre dedica um ou mais capítulos de seu trabalho à Geometria Plana. Há quem inclusive tenha optado por fazer uma análise crítica dos tratados sobre o assunto escritos por historiadores e principalmente por matemáticos, como é o caso da professora Tatiana Roque, cujo ótimo livro é uma das fontes de consulta desse trabalho.

Por outro lado, o conhecimento geométrico, ainda que de forma rudimentar, se faz presente em nossas vidas desde a primeira infância, uma vez que todos lidamos ainda crianças com questões relativas a distâncias, posições e tamanhos de objetos, áreas e volumes. O currículo de Matemática do Ensino Fundamental no Brasil prevê a abordagem de assuntos de cunho geométrico já nos primeiros anos escolares. Entretanto, diversos são os especialistas, em Matemática e em Educação Matemática, que denunciam o grave esvaziamento desse conteúdo durante algumas das décadas do século passado, por força da prevalência, naquele período, dos paradigmas do que se convencionou chamar por aqui de “Matemática Moderna”. Felizmente, isto vem sendo corrigido desde os anos 1990, e uma análise do material didático produzido no século XX, entre as décadas de 50 e a última, aponta para o que acabamos de expor.

No âmbito do ensino-aprendizagem da Geometria Plana Euclidiana, nos parece correto afirmar que um dos mais importantes tópicos é o do Estudo dos Quadriláteros. São incontáveis as formas de quatro lados com que lidamos em nosso cotidiano: folhas de papel, cartões, telefones celulares, portas e janelas, faces de caixas e recipientes. Assim, procuramos em nosso trabalho propiciar um olhar mais atento para esses polígonos, por entendermos que a produção didática no Brasil não lhes dedica tempo proporcional à sua importância.

Tivemos ano passado a oportunidade de, em uma sessão de aulas particulares para um aluno do Nono Ano do Ensino Fundamental, lidar com uma Lista de Exercícios que ele trouxe ao nosso conhecimento, por ter a intenção de candidatar-se a seleções do tipo vestibular de algumas das mais prestigiosas escolas brasileiras de Nível Médio, especialmente aquelas sob a égide das Forças Armadas, como a Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEEx) e o

Colégio Naval (CN). Para nossa surpresa tal lista, de um dos mais renomados “cursinhos” especializados na preparação para aqueles exames, continha exercícios de nível de dificuldade bastante considerável, nos campos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria Plana. Chamou especialmente a nossa atenção o último deles, que versava sobre um conteúdo com que poucas vezes lidáramos antes, em vinte anos de prática docente: “Quadriláteros Bicêntricos”. Refeitos da surpresa, e um tanto encantados com a resolução que oferecemos ao jovem estudante, resolvemos nos deter mais sobre o àquela altura já apaixonante assunto, e constatamos que a literatura brasileira a respeito é parca, incipiente e, portanto, insuficiente para qualquer discente que resolva se aprofundar a respeito – seja por necessidade ou por mero diletantismo.

Cientes do desafio proporcionado pela empreitada, mas muito entusiasmados porque esse conteúdo possibilita lidar com vários conceitos da Geometria Plana, o que propomos nesse trabalho é examinar, sem a pretensão de esgotar o tema, o que seria praticamente inviável dada a sua riqueza (mesmo Euler se permitiu dedicar uma parte do seu precioso tempo a essas belas figuras!), os Quadriláteros Bicêntricos (ou Bicíclicos, um sinônimo de que faremos uso ocasionalmente, nas próximas páginas), a partir de um exercício que elaboramos: o “Problema das Quatro Guaritas”. Lecionamos, ao longo do ano de 2017, em dois estabelecimentos de ensino, em ambos dando aulas em turmas de preparação para os vestibulares de admissão a universidades, notadamente três: o Exame Nacional de Ensino Médio (ENEM), o vestibular da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) e a seleção de alunos da Fundação Cecierj (trata-se de órgão vinculado à Secretaria Estadual de Ciência, Tecnologia e Desenvolvimento Social. É formado por sete instituições públicas de ensino superior: CEFET, UENF, UERJ, UFF, UFRJ, UFRRJ e UNIRIO, e conta atualmente com mais de 40 mil alunos matriculados). Um desses pré-vestibulares é mantido pelo próprio Estado do Rio de Janeiro, e o outro é um projeto da iniciativa privada, em regime de cooperativa e mutirão, de cunho voluntário, numa comunidade de baixa renda situada na Zona Oeste da cidade do Rio de Janeiro. Os alunos dessas duas escolas constituíram o público com que pudemos trabalhar alguns dos conteúdos desse Trabalho de Conclusão de Curso, no nível de profundidade que nos pareceu adequado, dadas as especificidades de sua formação cultural e histórico escolar.

No primeiro capítulo desta dissertação explicitamos o “Problema das Quatro Guaritas” e delineamos com o nível de detalhamento desejado as condições impostas pelo enunciado, para que fique claro o suficiente que indicam a necessidade de que o quadrilátero a construir, de modo a atender ao que se pede, precisa ser a um só tempo cíclico (ou inscritível) e tangencial (ou circunscritível).

O segundo capítulo é dedicado à revisão de alguns tópicos importantes da Geometria Euclidiana Plana, aos quais se precisa recorrer para estudar com alguma profundidade os Quadriláteros Bicêntricos: Semelhança de Triângulos, Lugares Geométricos, Leis dos Senos e dos Cossenos, Áreas de Triângulos e Quadriláteros, além de teoremas como o da Bissetriz Interna, o de Pitot, o dos Quadriláteros Inscritíveis, o de Ptolomeu, o de Hiparco, e as Fórmulas de Bretschneider e Brahmagupta.

No terceiro capítulo conceituamos os quadriláteros bicíclicos, nos apoiando no fato de que há sempre infinitos deles, com os mesmos círculos inscrito e circunscrito, quando tais círculos atendam a uma condição conhecida como “Fórmula de Fuss”. Também mostramos o passo a passo de quatro possibilidades de obtenção dos quadriláteros bicêntricos genéricos, cada uma mediante ponto de partida diferente das demais, com régua e compasso e/ou por meio da utilização do Geogebra, e apresentamos suas propriedades particulares. Em seguida, conduzimos um raciocínio que leva ao cálculo da área de tais quadriláteros, não apenas a genérica, em função dos raios dos círculos circunscrito e inscrito e do ângulo formado pelas diagonais, mas também a máxima e a mínima, mostrando que correspondem respectivamente à da pipa reta e do trapézio isósceles bicêntricos.

Resolvemos no quarto capítulo o “Problema das Quatro Guaritas”, de forma detalhada e mostrando figura que ajuda no entendimento da solução e na elucidação da importância da correta compreensão do enunciado do exercício.

No quinto capítulo sugerimos algumas atividades para eventual utilização, em salas de aula dos dois últimos anos do Segundo Ciclo do Ensino Fundamental no Brasil. No Apêndice dessa dissertação se encontram anexadas digitalizações de propostas de solução das três primeiras atividades aqui elencadas, de alguns dos nossos alunos ao longo do ano de 2017.

Discorremos no sexto capítulo sobre a evolução do ensino de Geometria no Brasil ao longo das últimas décadas, sob uma perspectiva crítica, e incluindo as abordagens, de certos tópicos da Geometria Euclidiana Plana utilizados nessa dissertação, pelos livros didáticos nacionais.

Em seguida, apresentamos as nossas considerações finais.

1 O PROBLEMA DAS QUATRO GUARITAS

Enunciamos a seguir um exercício que elaboramos cuidadosamente, o “Problema das Quatro Guaritas”, que possibilita a abordagem dos quadriláteros bicêntricos, assunto que constitui o cerne desta dissertação:

“A empresa responsável pelo controle da segurança do acesso (entrada e saída) a um grande evento de natureza cultural contratará oito homens, divididos em quatro duplas, para trabalhar como vigilantes na noite da sua realização. O evento, consistindo de apresentações e performances de cunho artístico, circense e poético, será realizado em uma grande praça, cercada por um muro bem alto, e que tem o formato de um círculo, de raio 66 metros. Essa empresa cuidará apenas do aparato de segurança da área externa ao evento, não tendo nenhuma responsabilidade pelo interior da praça. Para otimizar o dispositivo de segurança, as duplas encarregadas da tarefa serão postadas em guaritas a serem montadas em quatro pontos fixos fora da praça, de tal modo que nenhuma das guaritas tenha contato visual com as demais, e que nenhum ponto do perímetro da praça fique fora do alcance visual de um dos postos. Além disso, questões de ordem financeira impõem que todas as quatro guaritas sejam montadas à mesma exata distância de uma Central de Comunicações, situada dentro do perímetro da praça, para o diálogo permanente da equipe por meio de equipamento de rádio. Sabe-se que a Central não ficará posicionada no centro do círculo murado que contorna a praça onde será o evento, mas num ponto fixo, que se situa a 21 metros do centro da praça.

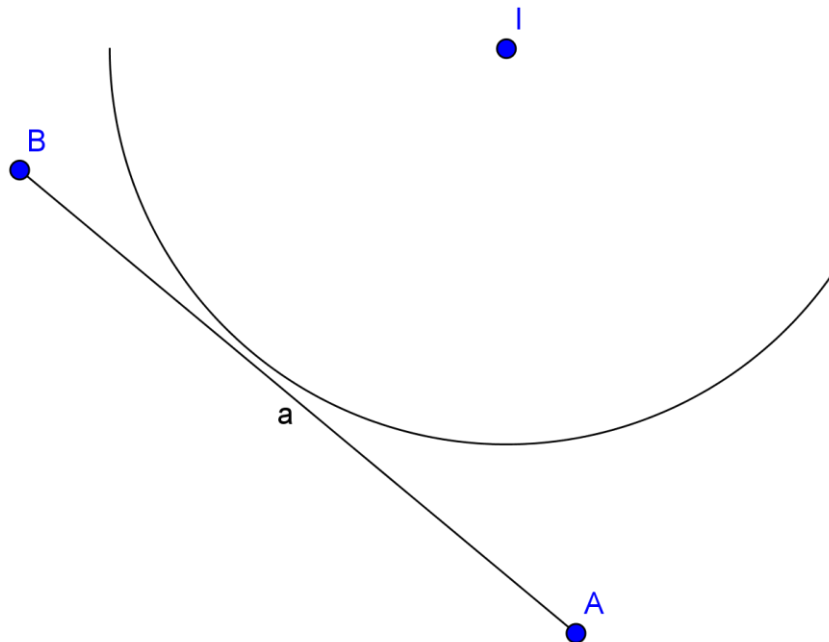
Chamando de **I** o centro do círculo onde fica a praça, de **O** a posição da Central de Comunicações e de **A**, **B**, **C** e **D** as posições respectivas das quatro guaritas, nesta ordem e no sentido horário, pede-se responder os seguintes itens:

- a) Esboçar em um desenho uma vista aérea do local, mostrando suas sugestões para as localizações destes seis pontos, de tal modo que sejam atendidas todas as condições estabelecidas pelo enunciado acima;
- b) responder, baseando-se no esboço construído no item anterior: as quatro guaritas podem ocupar os vértices de um quadrado? De um retângulo? De um losango? De um paralelogramo mais genérico? Justifique as suas respostas (*Sugestão: Chame de **a**, **b**, **c** e **d** as distâncias **AB**, **BC**, **CD** e **DA**, respectivamente; chame de **r** o raio do círculo da praça; chame de **d** a distância entre o seu centro e a Central de Comunicações – note que **r** e **d** podem ser imediatamente obtidos do enunciado! Finalmente, chame de **R** a distância entre a Central de Comunicação e cada uma das quatro guaritas!);*

- c) elaborar uma solução para o problema, isto é, determinar as localizações dos quatro postos de segurança (os pontos **A**, **B**, **C** e **D** no desenho do esboço), sabendo ainda que a dupla dentro da guarita **B** deverá enxergar a praça sob um ângulo de visada de 90° ;
- d) determinar qual será a distância entre a Central de Comunicações e cada guarita (*Sugestão: utilize para o cálculo a condição adicional estipulada pelo item anterior*);
- e) discutir a seguinte questão, eventualmente com o auxílio dos colegas e do professor: “Dentre as possíveis soluções para esse problema, qual deverá ser a preferida, se a empresa quiser que a área coberta pelas guaritas (isto é, a área do quadrilátero formado por suas quatro localizações) seja a maior possível? E qual deverá ser a solução adotada, se a empresa desejar que a soma das quatro distâncias entre as guaritas adjacentes (ou seja, o perímetro do quadrilátero **ABCD**) seja a menor possível?”

A correta leitura do enunciado obriga quem solucionar esse problema a passar pela construção de um quadrilátero que precisa ser a um só tempo tangencial e cíclico – como veremos adiante justamente a definição de quadrilátero bicêntrico (ou bicíclico). Porém consideramos oportuno, ao formular a questão em uma turma, seja de que nível for, acrescentar ao seu enunciado figuras, para reforçar a compreensão do que se quer dizer com “ (...) guaritas a serem montadas em quatro pontos fixos fora da praça, de tal modo que nenhuma das guaritas tenha contato visual com as demais, e que nenhum ponto do perímetro da praça fique fora do alcance visual de um dos postos (...)”. Isto é exemplificado pelas figuras 1, 2 e 3, onde mostramos respectivamente duas configurações que não servem ao enunciado e uma que o atende perfeitamente. Cremos que elas tornarão mais claro que o que se deseja, com esse trecho, é obrigar os segmentos de reta unindo as localizações de duas guaritas sucessivas (ou seja, \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA}), que constituem os lados do quadrilátero **ABCD**, a tangenciarem a circunferência do círculo que dá contorno à praça onde será realizado o evento, de centro no ponto **I** e raio 66 metros. Ou seja, que **ABCD** deve ser um quadrilátero tangencial. Além disso, como cada guarita deve ser construída a uma mesma distância fixa de uma Central de Comunicações, instalada dentro do perímetro da praça, num ponto **O** (distanto 21 metros de **I**, centro da praça), o quadrilátero deve também ser cíclico, pois seus vértices **A**, **B**, **C** e **D** têm que estar na circunferência de outro círculo, de centro em **O**. Desta forma, o quadrilátero deve ser bicíclico, mas não um quadrado (uma vez que o enunciado estipula claramente que os centros dos círculos inscrito e circunscrito ao quadrilátero **ABCD** não coincidam!).

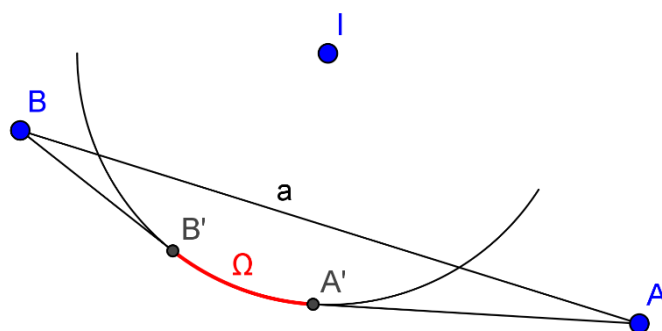
Figura 1 – Posição relativa de duas guaritas que não atende o enunciado.
 Situação inviável porque há contato visual entre as guaritas A e B



Fonte: Autor, 2017

Figura 2 – Posição relativa de duas guaritas que não atende o enunciado.

Situação inviável porque todos os pontos do arco Ω ficam fora do alcance da visão de ambas as guaritas A e B



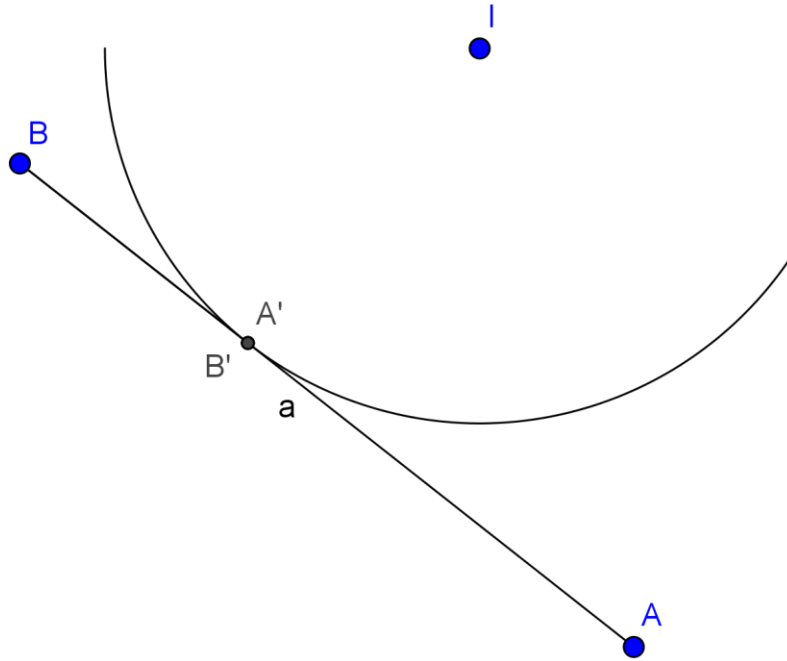
A': ponto limite do alcance da visão da guarita em A

B': ponto limite do alcance da visão da guarita em B

Fonte: Autor, 2017

Figura 3 – Posição relativa de duas guaritas que atende o enunciado.

Situação viável porque todos os pontos ficam visíveis por uma das guaritas A e B, e além disso elas não têm contato visual entre si



Fonte: Autor, 2017

2 ALGUNS CONCEITOS RELEVANTES

O arcabouço teórico dos assuntos concernentes à geometria que utilizamos nessa dissertação faz com que seja boa ideia recordarmos alguns fatos sem os quais seria impossível chegar a certas conclusões importantes, a respeito dos quadriláteros simultaneamente cíclicos e tangenciais. Assim, optamos por apresentá-los no corpo do trabalho, ressaltando que não temos a pretensão de esgotar as matérias a seguir, em suas abordagens que fazemos aqui.

2.1 Semelhança de triângulos

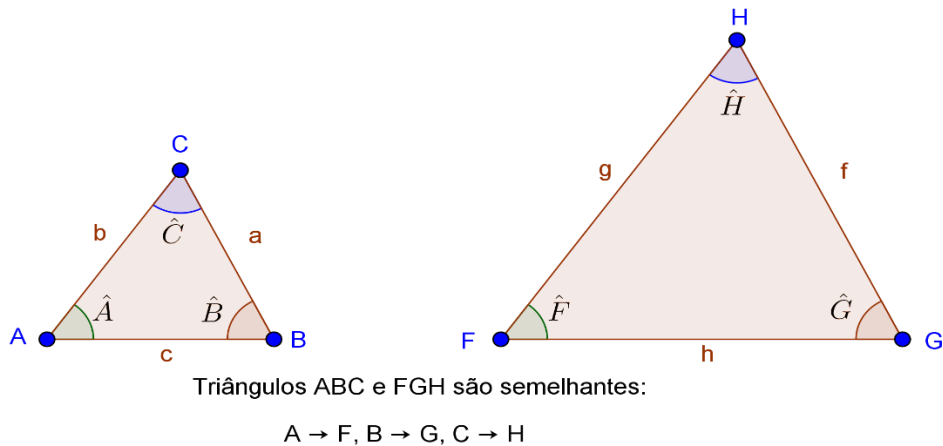
Dois triângulos são semelhantes quando há correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam congruentes e os lados correspondentes sejam proporcionais. Isto significa que, se os triângulos ABC e FGH são semelhantes, o que se representa pela notação $\Delta ABC \sim \Delta FGH$, e $A \rightarrow F, B \rightarrow G, C \rightarrow H$ é a correspondência que estabelece a semelhança, então valem simultaneamente as seguintes igualdades, levando em conta que $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$, $f = \overline{GH}$, $g = \overline{HF}$, $h = \overline{FG}$:

$$\hat{A} = \hat{F}, \hat{B} = \hat{G}, \hat{C} = \hat{H} \text{ e } \frac{a}{f} = \frac{b}{g} = \frac{c}{h}. \quad (2.1)$$

O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de razão de semelhança (proporcionalidade) entre os dois triângulos.

É interessante notar que dois triângulos congruentes são semelhantes com razão de proporcionalidade unitária, e que, inversamente, triângulos semelhantes, cuja razão de semelhança seja dada pela unidade, são congruentes. A figura 4 ilustra a semelhança entre dois triângulos, ABC e FGH .

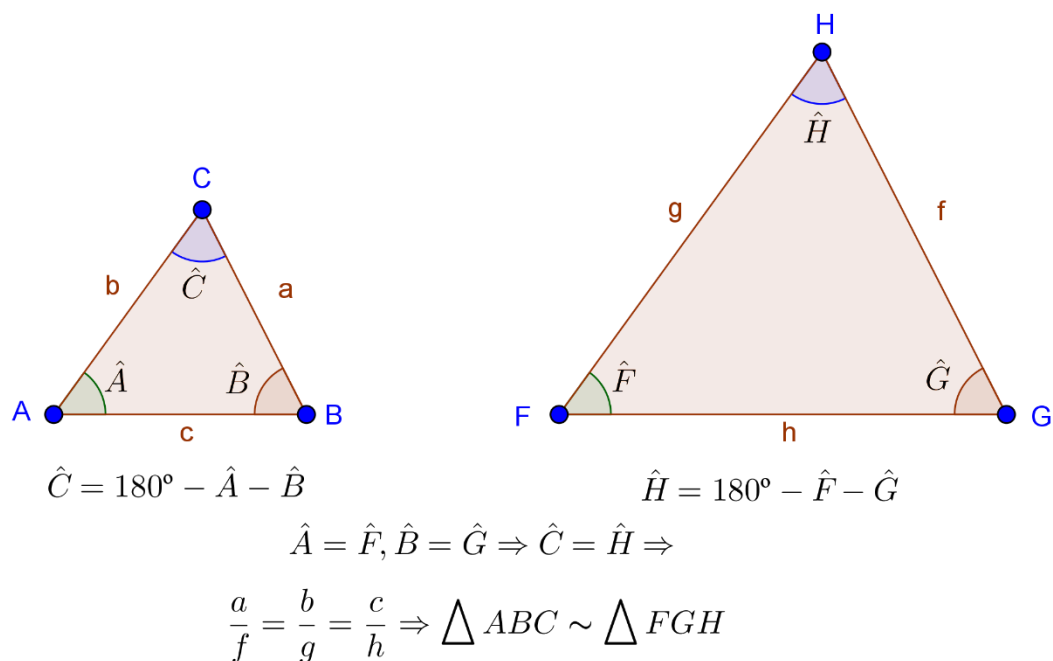
Figura 4 – Definição de Semelhança de Triângulos



Fonte: Autor, 2017

Dados dois triângulos ABC e FGH, basta que dois ângulos sejam congruentes para assegurar a semelhança. Veja a figura 5: de fato, como a soma dos ângulos internos em todo triângulo vale 180° , se os ângulos \hat{A} e \hat{F} são congruentes e os ângulos \hat{B} e \hat{G} também são, temos $180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (\hat{F} + \hat{G})$, ou seja $\hat{C} = \hat{H}$. Resta provar a proporcionalidade dos lados, que decorre do fato de que, se uma reta, paralela a um lado de um triângulo, corta os outros dois lados, ela os divide na mesma razão.

Figura 5 – Congruência de dois ângulos é suficiente para a semelhança de triângulos



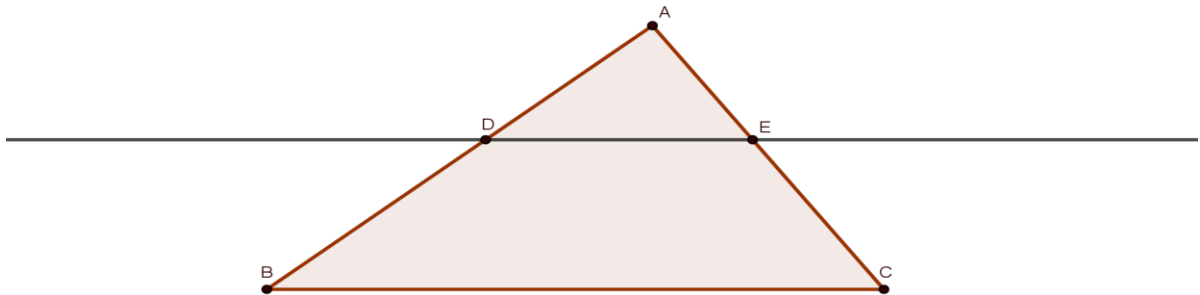
Fonte: Autor, 2017

Vamos provar isto: seja ABC um triângulo. Considere uma reta paralela ao lado BC que corte os lados AB e AC, respectivamente, nos pontos D e E, como se pode ver na figura 6.

Devemos provar que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}.$$

Figura 6 – Reta paralela a um dos lados do triângulo divide os outros dois na mesma razão



Fonte: Autor, 2017

Para isto, tomemos um pequeno segmento de reta AP_1 na semirreta AB de modo que as razões $\overline{AB} / \overline{AP_1}$ e $\overline{AD} / \overline{AP_1}$ não sejam números inteiros. Consideremos, nessa semirreta, os pontos $P_2, P_3, \dots, P_k, \dots$ tais que $k \cdot \overline{AP_1} = \overline{AP_k}$, para todo $k \geq 2$. Existem então dois números inteiros m e n tais que:

D está entre P_m e P_{m+1} e

B está entre P_n e P_{n+1}

Temos portanto: $m \cdot \overline{AP_1} < \overline{AD} < (m + 1) \cdot \overline{AP_1}$ e $n \cdot \overline{AP_1} < \overline{AB} < (n + 1) \cdot \overline{AP_1}$. Isso leva a:

$$\frac{m}{n+1} < \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} < \frac{m+1}{n}. \quad (2.2)$$

Tracemos agora, pelos pontos P_1, P_2, \dots, P_{n+1} , $n+1$ retas paralelas a BC. Elas cortam a semirreta AC em pontos Q_1, Q_2, \dots, Q_{n+1} que também satisfazem a $k \cdot \overline{AQ_1} = \overline{AQ_k}$, para todo k tal que $n + 1 \geq k \geq 2$. Além disso, o ponto E encontra-se entre Q_m e Q_{m+1} e o ponto C entre Q_n e Q_{n+1} . Ou seja, obtemos a seguinte expressão, análoga a (2.1):

$$\frac{m}{n+1} < \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} < \frac{m+1}{n}. \quad (2.3)$$

As desigualdades (2.2) e (2.3) permitem que concluamos que

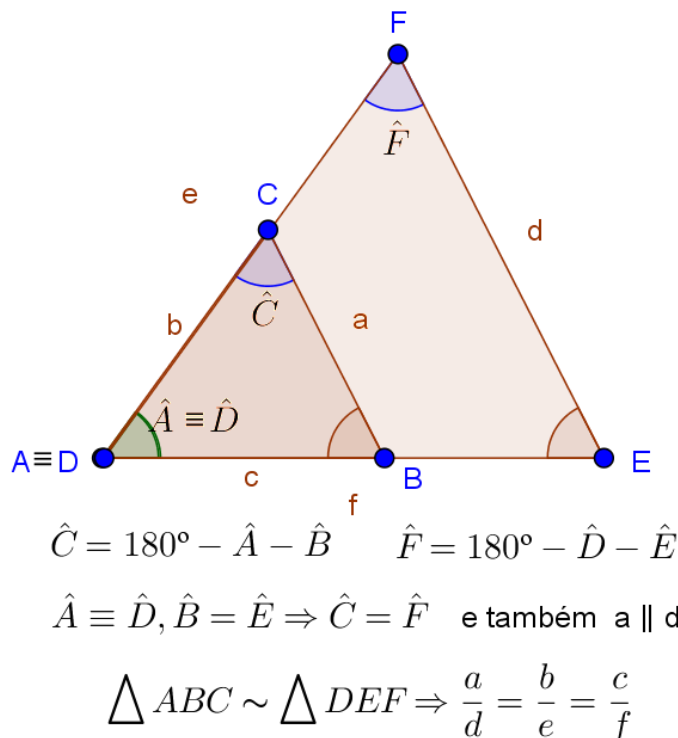
$$\left| \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} - \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \right| < \frac{m+1}{n} - \frac{m}{n+1} = \frac{m+n+1}{n(n+1)} < \frac{2n+2}{n(n+1)} = \frac{2}{n},$$

pois $m < n + 1$ (já que P_m é anterior a D, e P_{n+1} é posterior a B).

Assim, as razões $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$ e $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$ diferem por não mais do que $2/n$. Quanto menor o segmento AP_1 tanto maior é o número n , e tanto menor o quociente $2/n$. Como o lado esquerdo dessa última desigualdade independe de n , concluímos que os quocientes $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$ e $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$ são iguais, que é justamente o que queremos demonstrar. Então provamos que basta que dois triângulos tenham dois ângulos respectivamente congruentes, para que eles sejam semelhantes.

Cumpramos ressaltar que, quando dois triângulos são semelhantes, o fato de que seus ângulos são congruentes garante que, se ambos compartilham um ângulo comum, situação mostrada na figura 7, os lados opostos a esse ângulo nos dois triângulos são paralelos.

Figura 7 – Semelhança de triângulos: superposição implica paralelismo dos lados.



2.2 Lugares Geométricos no Plano

Dada uma propriedade P relativa a pontos do plano, o lugar geométrico (ou, abreviadamente, LG) dos pontos que gozam da propriedade P é o subconjunto \mathcal{L} do plano que satisfaz as duas condições seguintes:

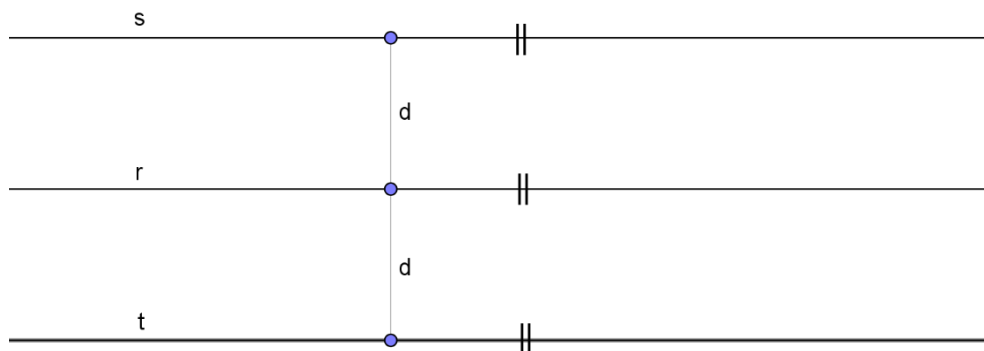
- (a) todo ponto de \mathcal{L} possui a propriedade P ;
- (b) todo ponto do plano que possui a propriedade P pertence a \mathcal{L} .

Os LG abordados aqui são: o par de retas paralelas, o círculo e sua circunferência, a mediatriz, a bissetriz e o arco capaz.

2.2.1 O Par de Retas Paralelas

Dada uma reta r em um plano, o lugar geométrico dos pontos desse mesmo plano que distam da reta um certo comprimento d é o par de retas s e t , paralelas a r , construídas de modo a guardar desta última uma distância exatamente igual a d , conforme o mostra a figura 8.

Figura 8 – Par de retas paralelas: s e t distam d unidades de comprimento de r .



Essa conclusão se vale do famoso Quinto Postulado de Euclides, na imortal obra que é um dos livros mais importantes da Ciência Humana, “Os Elementos” (300 AC):

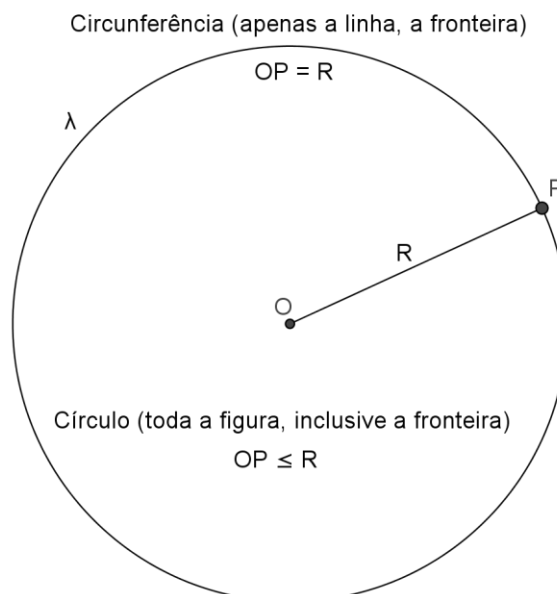
“É verdade que, se uma reta, ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.”

Vale observar: o Lugar Geométrico do Par de Retas Paralelas é consequência da proposição contrapositiva do Quinto Postulado, ou seja: se duas retas de um plano, ainda que continuadas o quanto se deseje, jamais se encontram, isto significa que uma reta que as corte pode formar, com tais retas, apenas ângulos internos, de um mesmo lado, cuja soma é exatamente igual a dois retos (isto é, ângulos suplementares). Então, as duas retas são paralelas e distam entre si de um comprimento constante.

2.2.2 A Circunferência de Círculo

Dado um ponto fixo O em um plano, o lugar geométrico dos pontos desse plano que guardam, do ponto O , uma distância igual a R , é a circunferência do círculo λ de centro em O e raio R , como mostra a figura 9.

Figura 9 – A circunferência de círculo: todos os seus pontos distam R do centro O



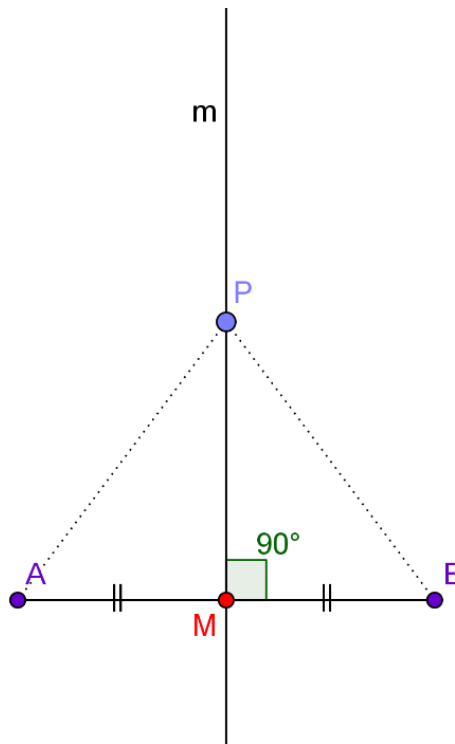
Fonte: Autor, 2017

2.2.3 A Mediatriz

Dados dois pontos A e B em um plano, o lugar geométrico dos pontos desse plano que são equidistantes de A e B é uma reta m , traçada perpendicularmente ao segmento AB e que contém o seu ponto médio M.

Vamos provar essa afirmação. Seja P ponto qualquer de m , distinto de M. Os triângulos retângulos PAM e PBM são congruentes, pois têm o ângulo reto e dois lados congruentes, PM (lado comum) e $AM = BM$ (por construção de M, ponto médio de AB), como mostra a figura 10. Logo, as hipotenusas são também congruentes e portanto $PA = PB$, para P pertencente à reta m . Além disso, se um ponto P do plano equidista de A e B, os triângulos PAM e PBM têm os três lados congruentes: PM é comum a ambos os triângulos, $AM = BM$ por construção e $PA = PB$ por hipótese. Logo, os ângulos PMA e PMB têm que ser congruentes, e portanto retos, o que implica que P pertença à reta que passa por M e corta o segmento AB segundo um ângulo reto. Então P é ponto de m , o que prova que tal reta é o lugar geométrico que afirmamos.

Figura 10 – A mediatriz m do segmento AB.



Fonte: Autor, 2017

2.2.4 A Bissetriz

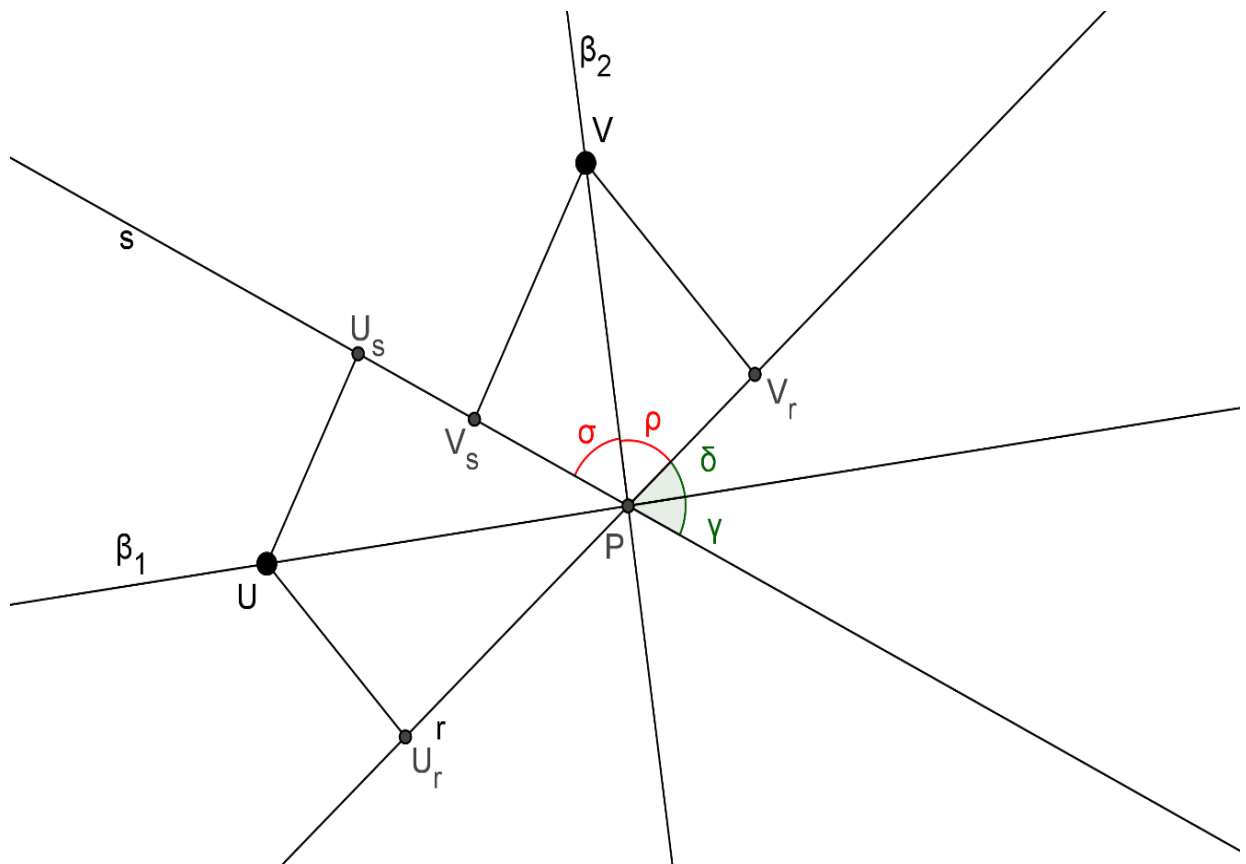
Dadas duas retas r e s não paralelas em um plano, o lugar geométrico dos pontos desse plano que equidistam das duas é o par de bissetrizes dos ângulos formados pelas retas r e s (recordando uma vez mais o Quinto Postulado de Euclides, como o fizemos no primeiro dos lugares geométricos que abordamos no âmbito desse trabalho, em não sendo paralelas tais retas são necessariamente concorrentes, em um ponto que chamamos de P). Sejam U e V dois pontos do plano de r e s , respectivamente pertencentes às bissetrizes β_1 e β_2 . Traçando as perpendiculares, por U e V , às retas r e s , sejam U_r, U_s, V_r, V_s os respectivos pontos de contato de tais perpendiculares com r e s . Como as bissetrizes, por construção, bissectam os ângulos para os quais são obtidas, temos: $\gamma = \delta$ e $\rho = \sigma$ (figura 11). Então, são congruentes os pares de triângulos: ΔUPU_r e ΔUPU_s , ΔVPV_r e ΔVPV_s , já que são retângulos e possuem hipotenusas comuns (respectivamente UP e VP). Logo,

$$UU_r = UU_s \text{ e } VV_r = VV_s,$$

e, assim, qualquer ponto, tanto pertencente a β_1 como a β_2 , equidista de r e s (uma vez que escolhemos U e V de forma arbitrária).

Agora, seja W um ponto do plano, e suponhamos iguais suas distâncias às retas r e s . Ora, baixando de W duas perpendiculares W_r e W_s àquelas retas, formamos dois triângulos retângulos, WPW_r e WPW_s , que têm congruentes o lado comum (a hipotenusa de ambos, WP), um dos catetos (por construção $WW_r = WW_s$) e o ângulo reto. Portanto o Teorema de Pitágoras garante a congruência dos segundos catetos de ambos, bem como dos ângulos internos. Logo são iguais os ângulos entre WP e cada uma das retas r e s , o que garante que W pertence a uma das bissetrizes dos ângulos formados por elas.

Figura 11 – As bissetrizes dos ângulos formados por r e s no ponto P.



Fonte: Autor, 2017

2.2.5 O Arco Capaz

Dado um segmento de reta \overline{AB} , o lugar geométrico dos pontos P do plano que são avistados sob um mesmo ângulo de visada α fixo por \overline{AB} (ou seja, dos pontos P com $\widehat{APB} = \alpha$) é um arco, denominado arco capaz de α , cujo centro se localiza na mediatriz do segmento \overline{AB} , e que passa por ambas as extremidades deste último.

Para que o entendimento do lugar geométrico e consequentemente de sua construção sejam os maiores possíveis, vamos antes recordar o conceito de ângulo inscrito em um círculo.

2.2.5.1 Ângulo Inscrito

Dado um círculo de centro O , denomina-se “ângulo inscrito” nesse círculo todo ângulo cujo vértice esteja sobre a circunferência do círculo e em que ambos os lados possuam mais um ponto (além do próprio vértice) em comum com o círculo. Vamos provar que, sendo A e B os pontos em que os lados do ângulo cortam a circunferência do círculo, o ângulo inscrito tem sempre o valor α , onde α é tal que $\widehat{AOB} = 2\alpha$. Para tal finalidade recorreremos ao auxílio da figura 12. Há três situações possíveis:

a) o ponto P na circunferência é tal que pertence também ao prolongamento de um dos lados do ângulo \widehat{AOB} . Na figura 12 esse é o caso de P_1 . Ora, examinemos o triângulo OAP_1 . Nesse triângulo vemos que \widehat{AOB} é ângulo externo, isto é, que $\widehat{AOB} = \widehat{OAP_1} + \widehat{OP_1A}$. Porém, o ΔOAP_1 é isósceles, uma vez que $AO = OP_1$ (são raios do círculo de centro O). Então, os ângulos opostos a esses dois lados são congruentes, ou seja, $\widehat{OAP_1} = \widehat{OP_1A}$. Portanto, concluímos que:

$$\widehat{AP_1B} = \widehat{OP_1A} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \alpha .$$

b) o ponto P na circunferência não se encontra no prolongamento de nenhum dos lados do ângulo \widehat{AOB} , mas está situado na região da circunferência simétrica do arco AB em relação ao ponto O . Na figura 12 é o caso do ponto P_2 . Assim, seja D_2 o ponto onde o prolongamento do segmento P_2O corta a circunferência. A localização de P_2 impõe portanto que D_2 se situe entre os pontos A e B , no menor arco determinado por ambos. Ora, então P_2 se enquadra na situação anterior (item a acima), tanto para o ângulo $\widehat{BP_2D_2}$ como para o $\widehat{AP_2D_2}$. Então:

$$\widehat{AP_2D_2} = \frac{\widehat{AOD_2}}{2}, \widehat{BP_2D_2} = \frac{\widehat{BOD_2}}{2} \Rightarrow \widehat{AP_2B} = \widehat{AP_2D_2} + \widehat{BP_2D_2} = \frac{\widehat{AOD_2}}{2} + \frac{\widehat{BOD_2}}{2} = \frac{\widehat{AOB}}{2} \therefore$$

$$\widehat{AP_2D_2} = \alpha .$$

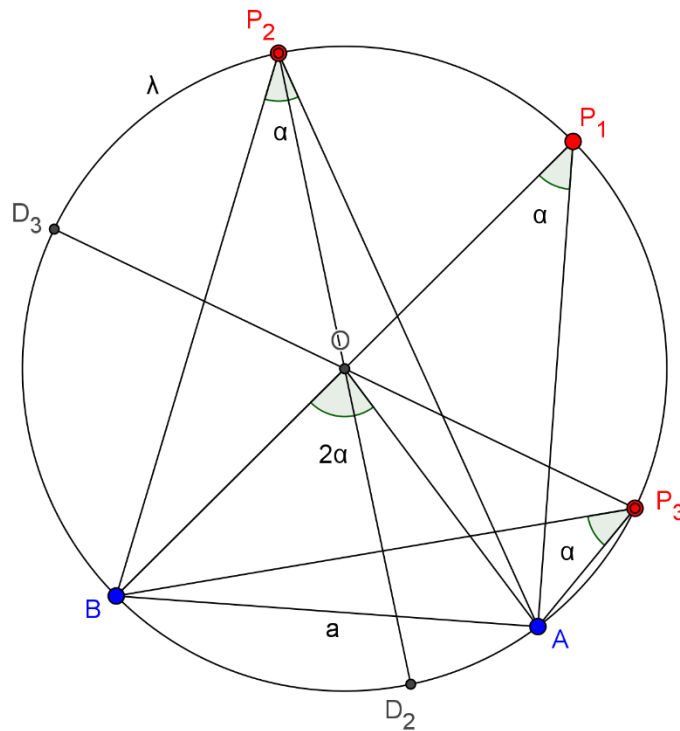
c) o ponto P na circunferência não se encontra no prolongamento de nenhum dos lados do ângulo \widehat{AOB} nem na região da circunferência simétrica do arco AB em relação ao ponto O . Na figura 12 é o caso do ponto P_3 . Assim, seja D_3 o ponto onde o prolongamento do segmento P_3O corta a circunferência. A localização de P_3 impõe portanto que D_3 se situe fora do menor arco determinado pelos pontos A e B . Ora,

$$A\hat{P}_3D_3 = \frac{A\hat{O}D_3}{2}, B\hat{P}_3D_3 = \frac{B\hat{O}D_3}{2} \Rightarrow A\hat{P}_3B = A\hat{P}_3D_3 - B\hat{P}_3D_3 = \frac{A\hat{O}D_3}{2} - \frac{B\hat{O}D_3}{2} = \frac{A\hat{O}B}{2} \therefore$$

$$A\hat{P}_3D_3 = \frac{A\hat{O}B}{2} = \alpha .$$

Podemos concluir que o ângulo inscrito vale sempre metade do ângulo central correspondente, comumente expresso como a medida do próprio arco.

Figura 12 – Ângulos inscritos em três situações distintas, mas com o mesmo valor.



Fonte: Autor, 2017

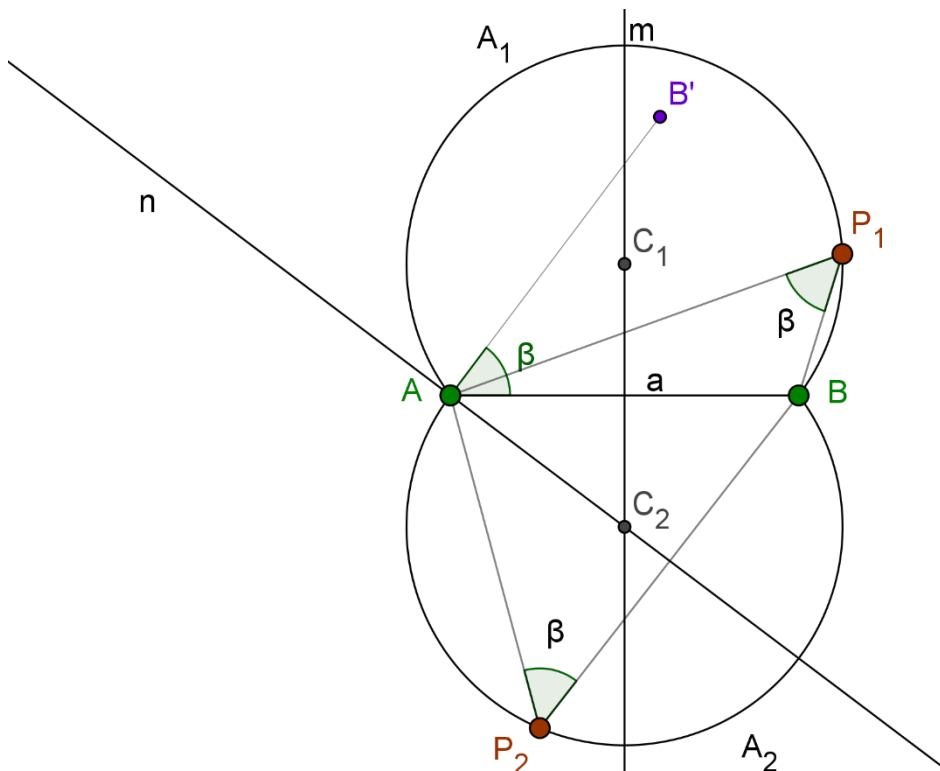
2.2.5.2 A Construção do Arco Capaz

Dado um segmento de reta de extremidades em dois pontos A e B, um arco capaz de β tem a sua construção efetuada conforme uma sequência de passos:

- traça-se a mediatriz m do segmento de reta \overline{AB} ;

- traça-se um ângulo igual a β partindo de um dos vértices (A, por exemplo e sem perda de generalidades) de \overline{AB} , sendo um dos lados do ângulo o próprio segmento;
 - obtém-se, a partir dessa mesma extremidade (A, no nosso caso), uma perpendicular n ao outro lado do ângulo β que se acabou de construir;
 - o ponto C, centro do arco capaz de β desejado, é a interseção das retas m e n .
- Vamos ilustrar a construção por meio da figura 13, em que construímos os dois arcos capazes de β sobre um segmento de reta \overline{AB} :

Figura 13 – Construção dos arcos capazes de β sobre o segmento de reta AB.



Fonte: Autor, 2017

O que justifica esse procedimento é que, na Figura 13, o triângulo AC_2B é isósceles, uma vez que C_2 é centro do círculo em cuja circunferência se encontram os pontos A e B, equidistando de ambos, e portanto são congruentes os ângulos $C_2\hat{A}B$ e $C_2\hat{B}A$. Logo se pode afirmar que

$$\widehat{AC_2B} = 180^\circ - 2 \cdot C_2\hat{A}B = 2 \cdot (90^\circ - C_2\hat{A}B) = 2 \cdot [90^\circ - (90^\circ - \beta)] = 2\beta.$$

Isto é, o ângulo inscrito que subtende \overline{AB} (que é justamente o ângulo que chamamos de β na figura 13) tem por medida metade daquela do ângulo central a ele correspondente, aliás também medida do próprio arco. Note que, para obter o outro arco capaz (o ângulo de β pode ser

desejado em qualquer dos semiplanos determinados pelo segmento de reta AB), basta obter o simétrico do primeiro centro, em relação ao segmento.

2.3 Resultados Importantes

Alguns teoremas também merecem nossa atenção e portanto integram esta dissertação, dado que é preciso recorrer a eles para chegar a alguns importantes resultados referentes aos Quadriláteros Bicêntricos. Optamos por não incluir o Teorema de Pitágoras, pois a sua imensa popularidade – é considerado o resultado matemático mais popular em todo o mundo! – torna desnecessário que o enunciemos e demonstremos. Todavia, um dos teoremas que listamos, o de Ptolomeu, é tão poderoso que pode ser aplicado à demonstração de Pitágoras. Isto será feito, como veremos mais à frente.

2.3.1 Teorema da Bissetriz Interna

Enunciado: “Os segmentos de reta determinados pela bissetriz interna de um dos ângulos de um triângulo, sobre o lado oposto a esse ângulo, são diretamente proporcionais aos lados do triângulo respectivamente adjacentes a cada um desses segmentos”.

Demonstração: Num triângulo ABC, sejam \overline{AD} , bissetriz interna relativa ao vértice A, D um ponto do lado BC, e o segmento de reta \overline{DE} , paralelo ao lado AB, tal que o ponto E pertence ao lado AC, conforme ilustrado pela figura 14.

Ora, temos então dois triângulos semelhantes, a saber: $\triangle ABC$ e $\triangle EDC$ (é o mesmo caso ilustrado pela Figura 7). Então,

$$\frac{BC}{DC} = \frac{AC}{EC} = \frac{AB}{ED} \Rightarrow \frac{ED}{EC} = \frac{AB}{AC}. \quad (2.4)$$

Aplicando razões e proporções à primeira igualdade:

$$\frac{BC - DC}{DC} = \frac{AC - EC}{EC} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AE}{EC}. \quad (2.5)$$

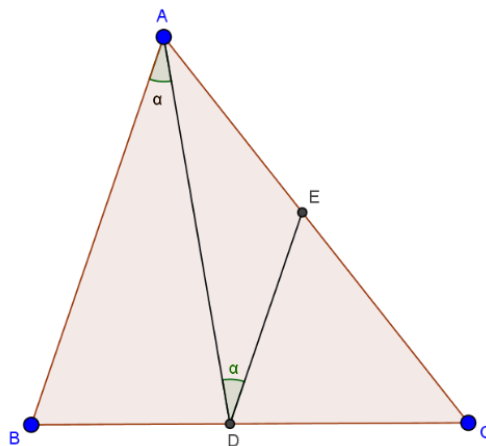
Mas o triângulo ADE é isósceles, pois, sendo ED segmento de reta paralelo ao lado AB, são congruentes os ângulos \widehat{ADE} e \widehat{DAB} (uma reta transversal determina sobre duas retas

paralelas ângulos iguais, denominados “alternos internos” e que na figura 14 têm α por valor). Por outro lado, como o segmento de reta AD é bissetriz de \hat{A} , $\widehat{DAB} \equiv \widehat{DAE}$. Então $\widehat{ADE} \equiv \widehat{DAE}$ e o $\triangle ADE$ é isósceles. Isso acarreta a igualdade dos seus lados AE e DE, que aparecem nos numeradores da segunda razão de (2.5) e da primeira razão de (2.4), respectivamente. Como em ambas o denominador é o segmento EC, podemos igualar a primeira razão de (2.5) e a segunda razão de (2.4):

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad (2.6)$$

Isto é justamente o que pretendíamos demonstrar.

Figura 14 – Triângulo ABC com bissetriz interna AE.



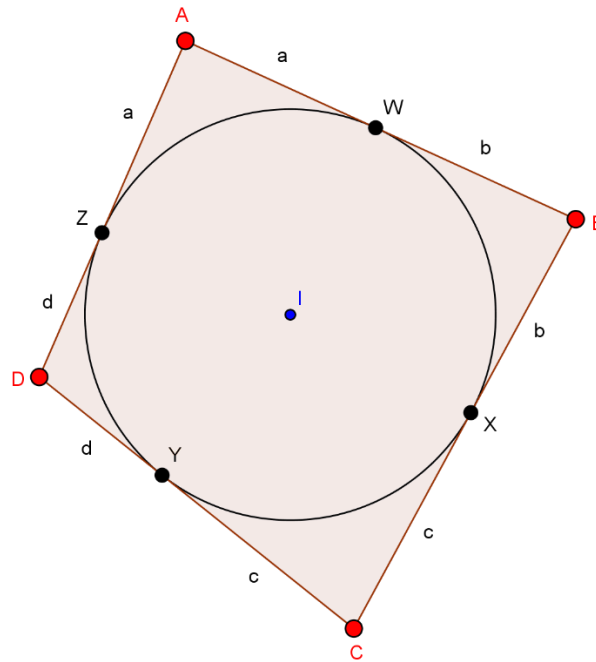
Fonte: Autor, 2017

2.3.2 Teorema de Pitot

Enunciado: “Um quadrilátero convexo ABCD é tangencial se e somente se são iguais as somas dos valores dos seus lados opostos”. O teorema de Pitot tem grande relevância em nosso trabalho, pois versa justamente sobre a condição necessária e suficiente para que um quadrilátero seja circunscritível, circunscrito ou tangencial, isto é, para que seja possível ter seus quatro lados simultaneamente tangentes a uma única circunferência de círculo.

Demonstração: Seja portanto ABCD um quadrilátero circunscrito a um círculo de centro I e sejam respectivamente W, X, Y e Z os pontos de tangência ao círculo dos seus lados AB, BC, CD e DA, como mostra a figura 15.

Figura 15 – Quadrilátero tangencial ABCD e pontos de tangência.



Fonte: Autor, 2017

Ora, sabemos que os segmentos das retas tangentes, traçadas a partir de um ponto exterior a um círculo, e compreendidos entre esse ponto e os pontos de contato (tangência) ao círculo, são congruentes (até mesmo por uma questão de simetria do arranjo proposto). Assim, sejam $AW = AZ = a$, $BW = BX = b$, $CX = CY = c$, $DY = DZ = d$. Por construção,

$$AB = AW + BW = a + b, \quad BC = BX + CX = b + c,$$

$$CD = CY + DY = c + d, \quad e \quad DA = DZ + AZ = d + a.$$

Logo,

$$AB + CD = a + b + c + d$$

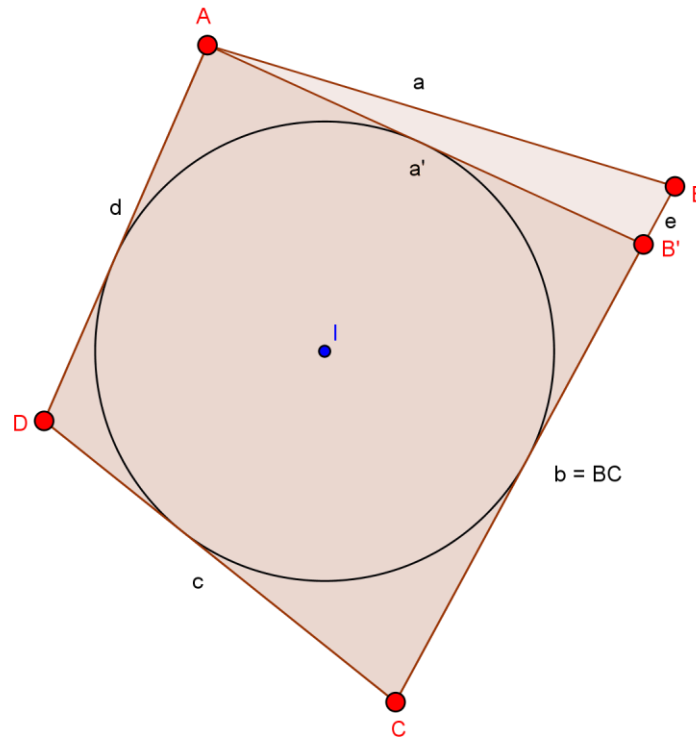
e

$$BC + DA = b + c + d + a,$$

donde as propriedades associativa e comutativa da adição nos permitem concluir que, se ABCD é quadrilátero tangencial, seus lados opostos têm somas iguais.

Provemos a recíproca: suponhamos agora ABCD, com vértices dispostos nessa ordem, um quadrilátero em que se dê a igualdade: $AB + CD = BC + DA$. Vamos mostrar que ABCD é circunscritível. Utilizamos a técnica da “Redução ao Absurdo”, popular entre matemáticos, especialmente os geômetras. Basicamente, tal artifício consiste em considerar inicialmente válida a negação da tese e, a partir da hipótese, construir raciocínio lógico que evidencie que ‘alguma coisa está errada’, obrigando assim à refutação da negação da tese. Então, a tese resulta provada: se a sua negação é falsa, a própria tese é necessariamente verdadeira.

Figura 16 – Quadrilátero ABCD com somas iguais dos lados opostos.



Fonte: Autor, 2017

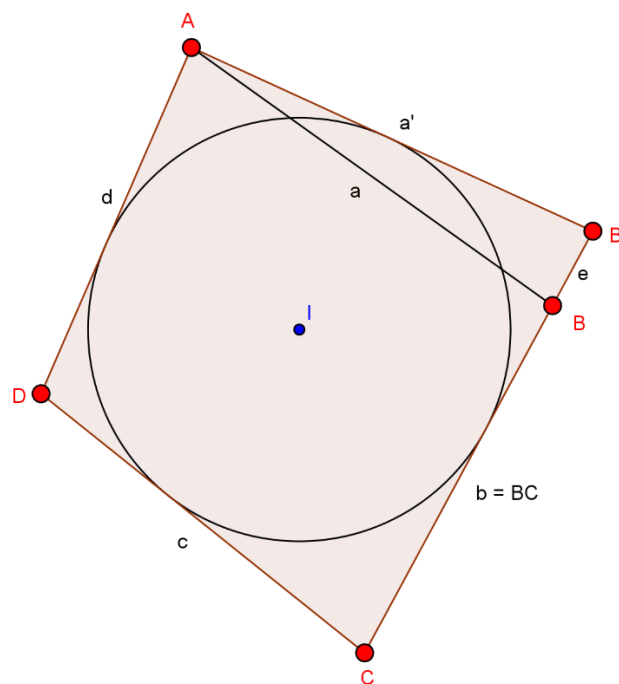
Consideremos então que, para o quadrilátero ABCD da figura 16, valha $a + c = b + d$, e que apesar disso a circunferência tangente a três de seus lados não tangencie também o quarto lado, sequer o interceptando. Construimos a partir de um dos vértices do lado não tangente (no caso, o vértice A) um segmento de reta tangente à circunferência, que corta o lado BC em um ponto B'. Então, temos um novo quadrilátero, AB'CD, que é tangencial, e podemos empregar a ida do Teorema de Pitot, isto é, $a' + c = b - e + d$ (na figura 16).

Ocorre que, por hipótese, $a + c = b + d$ e isso nos permite, calculando nas duas últimas expressões o valor de $b + d - c$, concluir que: $a' + e = a$, que implica em $e = a - a'$.

Mas isto é evidentemente impossível, uma vez que a figura 16 aponta para a existência do triângulo ABB' , cujos lados são justamente e , a' e a . Em um triângulo qualquer lado é sempre maior que a diferença entre os outros dois. Logo, B e B' coincidem e, portanto, nesse caso, a igualdade das somas dos lados opostos em um quadrilátero acarreta em que ele seja tangencial.

Uma outra possibilidade que temos que considerar é a de que, ao invés de sequer tocar o quarto lado, a circunferência tangente a três lados do quadrilátero $ABCD$ o intercepte não em apenas um, mas em dois pontos distintos. É a situação delineada pela figura 17.

Figura 17 – Quadrilátero $ABCD$ com somas iguais dos lados opostos.



Fonte: Autor, 2017

Imaginemos então que para o quadrilátero $ABCD$ da figura 17 se tenha $a + c = b + d$, e que apesar disso a circunferência tangente a três de seus lados corte também o quarto lado, mas em dois pontos. Construimos a partir de um vértice do lado não tangente (no caso, o vértice A) um segmento de reta tangente à circunferência, que corta o lado BC em um ponto B' . Temos então um novo quadrilátero, $AB'CD$, que é tangencial, e podemos empregar a ida do Teorema de Pitot, isto é, $a' + c = b + e + d$ (na figura 17).

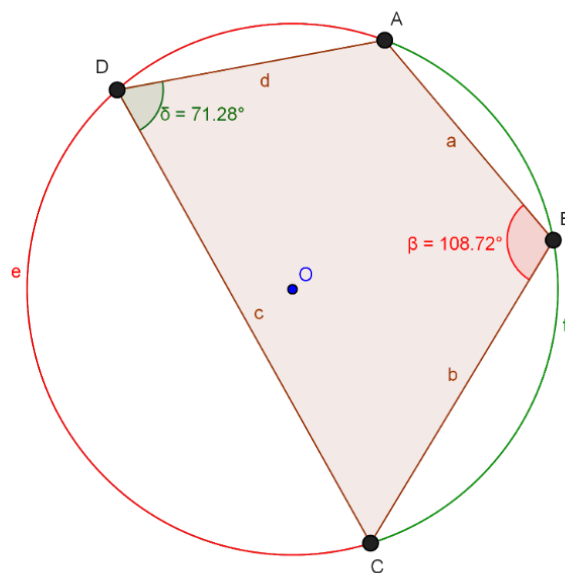
Ocorre que por hipótese $a + c = b + d$ e isso permite, calculando nas duas últimas expressões o valor de $b + d - c$, concluir que: $a' - e = a$.

Isto é novamente impossível, uma vez que a figura 17 indica a existência do triângulo ABB' , cujos lados são justamente e , a' e a . O mesmo argumento usado anteriormente leva à conclusão de que B e B' coincidem e portanto nesse caso a igualdade das somas dos lados opostos em um quadrilátero acarreta seja ele circunscritível. Provada a volta, resulta demonstrado o teorema.

2.3.3 Teorema do Quadrilátero Inscritível

Enunciado: “Um quadrilátero convexo $ABCD$ é cíclico se e somente seus ângulos opostos são suplementares”. Tal resultado, que não se atribui a geometria específico, também é enormemente relevante para a dissertação, e o demonstramos a seguir.

Figura 18 – Quadrilátero $ABCD$ inscritível com dois ângulos e seus respectivos arcos.



Fonte: Autor, 2017

Demonstração: Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico ou inscritível, como se pode ver na figura 18. Ora, o ângulo δ , relativo ao vértice D , sendo ângulo inscrito na circunferência de centro em O , tem por medida a metade do arco que seus lados compreendem, como vimos

anteriormente ao estudar o lugar geométrico do arco capaz de um ângulo. Pela mesma razão, o ângulo β , relativo ao vértice B, vale metade do arco correspondente. Ou seja, temos

$$\delta = \frac{\widehat{ABC}}{2} \text{ e } \beta = \frac{\widehat{ADC}}{2} \Rightarrow \delta + \beta = \frac{\widehat{ABC}}{2} + \frac{\widehat{ADC}}{2} = \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ADC}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ,$$

pois a soma dos arcos \widehat{ABC} e \widehat{ADC} corresponde a uma volta completa, o que equivale a 360° .

Por outro lado, como a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é 360° , isso implica que a soma dos ângulos relativos aos vértices A e C vale outros 180° . Então, podemos concluir que em um quadrilátero cíclico os ângulos opostos são sempre suplementares.

Para demonstrar que a recíproca também é verdadeira, suponhamos que em um quadrilátero ABCD de vértices nessa ordem se tenha

$$\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D}.$$

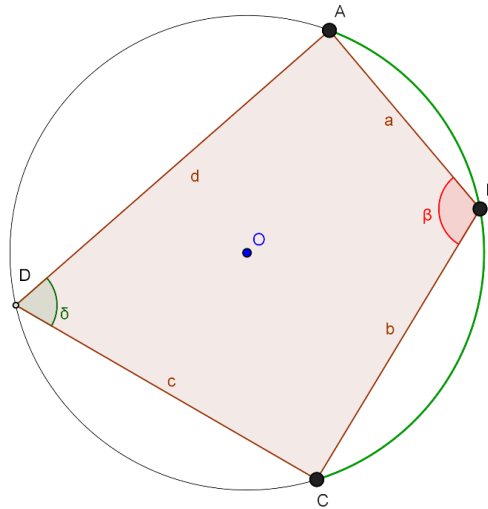
Note que essa igualdade tem por medida um ângulo raso ou 180° , posto que cada um dos membros é metade da soma dos ângulos internos de ABCD. Agora, se construirmos o círculo cuja circunferência passa pelos pontos não colineares A, B e C, o que é sempre possível dado que seu centro está na interseção das mediatrizes de AB e BC (todo triângulo é inscritível em um círculo), conforme o indica a figura 19 o arco \widehat{CA} (a porção da circunferência que se encontra entre os vértices A e C mas não contém o vértice B) é arco capaz do ângulo correspondente a $\frac{\widehat{ABC}}{2}$ (metade do arco f, o menor arco entre B e C). A priori não temos certeza sobre se D, quarto vértice do quadrilátero ABCD, se encontra sobre a circunferência. Por hipótese:

$$\widehat{D} = 180^\circ - \widehat{B} = 180^\circ - \frac{360^\circ - \widehat{ABC}}{2} = \frac{\widehat{ABC}}{2},$$

o que implica em que o vértice D esteja no arco capaz de $\frac{\widehat{ABC}}{2}$, portanto o ponto D se localiza sobre o arco \widehat{CA} e assim o quadrilátero ABCD está inscrito no círculo cuja circunferência contém os pontos A, B e C.

Então, mostramos que todo quadrilátero ABCD de ângulos opostos suplementares é inscritível. Portanto, resulta demonstrado o teorema.

Figura 19 – Quadrilátero ABCD com ângulos opostos suplementares.

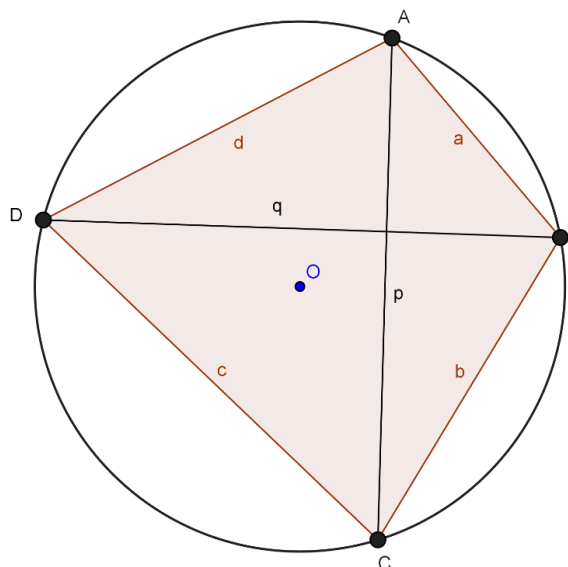


Fonte: Autor, 2017

2.3.4 – Teorema de Ptolomeu

Enunciado: “Em todo quadrilátero ABCD inscrito ou cíclico, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos”. Se nos reportamos à figura 20, o quadrilátero ABCD, com vértices nessa ordem, satisfaz $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$, ou $p \cdot q = b \cdot d + c \cdot a$.

Figura 20 – Quadrilátero cíclico com lados e diagonais.



Fonte: Autor, 2017

Demonstração: Recorrendo a uma construção auxiliar, traçamos na figura 21, a partir do vértice D, uma semirreta que faz com o lado CD um ângulo congruente ao ângulo \widehat{ADB} . Ela encontra a diagonal AC em um ponto E. Isto é, $\widehat{CDE} = \widehat{BDA}$.

Ora, $\widehat{ABD} = \widehat{ECD}$, são ângulos inscritos do arco AD. Daí, os triângulos ADB e EDC são semelhantes, pois têm dois ângulos congruentes. E:

$$\frac{EC}{AB} = \frac{DC}{DB} \quad \text{ou} \quad \frac{v}{a} = \frac{c}{q} \Rightarrow v \cdot q = a \cdot c.$$

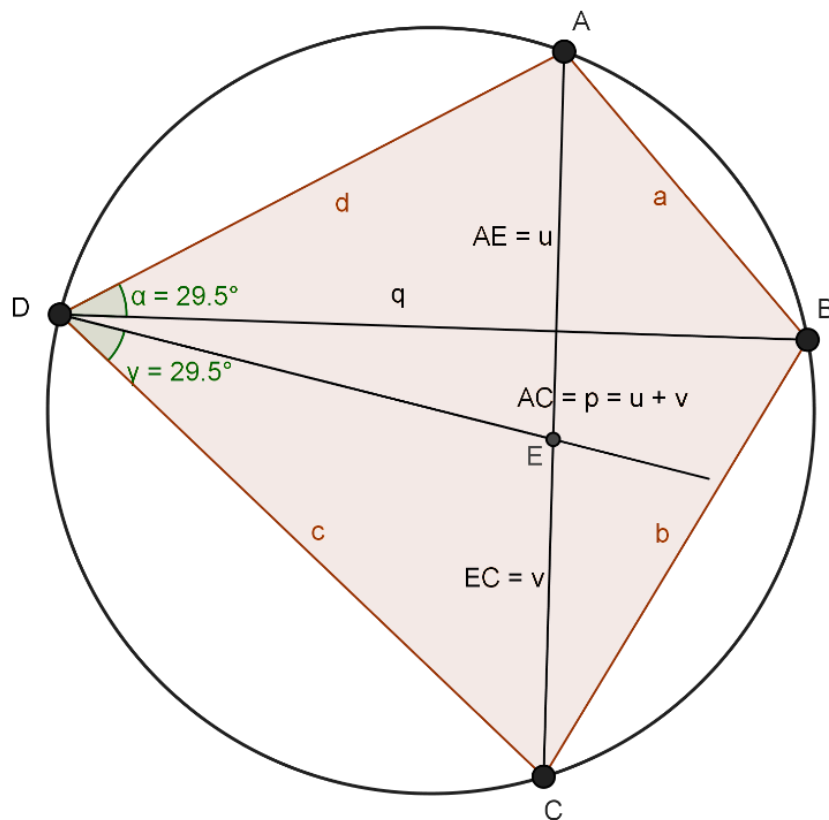
Por outro lado, também são semelhantes os triângulos ADE e BDC, já que $\widehat{ADE} = \widehat{BDC}$ (por construção de DE) e $\widehat{EAD} = \widehat{CBD}$ (ângulos inscritos do arco \widehat{CD}). E:

$$\frac{BC}{AE} = \frac{BD}{AD} \quad \text{ou} \quad \frac{b}{u} = \frac{q}{d} \Rightarrow u \cdot q = b \cdot d.$$

Temos então, somando os lados esquerdos das duas últimas expressões:

$$v \cdot q + u \cdot q = a \cdot c + b \cdot d \Rightarrow (v + u) \cdot q = a \cdot c + b \cdot d \Rightarrow p \cdot q = a \cdot c + b \cdot d, \text{ concluindo, com êxito, a prova.}$$

Figura 21 – Quadrilátero cíclico ABCD munido de construção auxiliar.



2.3.5 – Teorema de Hiparco

Enunciado: “Em todo quadrilátero cíclico ABCD, se $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = p$ e $BD = q$ são as medidas dos quatro lados e das duas diagonais, respectivamente, então as duas diagonais estão entre si na mesma razão das somas dos produtos dois a dois dos lados que concorrem em cada um dos seus vértices, isto é, $\frac{p}{q} = \frac{a.d + b.c}{a.b + c.d}$.”

Demonstração: recordemos a Lei dos Senos e uma propriedade de triângulos dela decorrente. A figura 22 mostra um triângulo qualquer ABC e seu círculo circunscrito ζ , de centro O e raio igual a R. Projetamos o ponto O sobre o lado $BC = a$, obtendo o ponto P. Qualquer perpendicular traçada pelo centro de um círculo a uma de suas cordas a divide em duas metades, por ser sua mediatriz, já que contém um ponto equidistante de suas extremidades e lhe é perpendicular, e sendo assim nos triângulos retângulos congruentes OPB e OPC temos que $\widehat{POB} = \widehat{POC}$, cada qual valendo metade do ângulo BOC. Mas o ângulo \hat{A} do vértice de mesmo nome é ângulo inscrito correspondente ao arco BC, e então concluímos que $\widehat{POB} = \widehat{POC} = \hat{A}$. Mas $PB = PC$ e, olhando para o triângulo retângulo OPC vemos que

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{PC}{OC} \Rightarrow PC = OC \cdot \text{sen } \hat{A} = R \cdot \text{sen } \hat{A} \Rightarrow a = 2 \cdot PC = 2R \cdot \text{sen } \hat{A}.$$

Portanto, repetindo esse raciocínio para os outros dois lados, concluímos que

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R, \quad (2.7)$$

igualdade conhecida em Geometria como a “Lei dos Senos”: Em qualquer triângulo é constante o valor da razão entre um lado e o seno do ângulo a ele oposto, sendo tal constante o diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo.

Vamos obter importante expressão para a área de um triângulo. Ainda nos valendo da figura 22, traçamos nela a altura AH relativa ao lado a do triângulo ABC. Ora, sabemos que a área de um triângulo é dada pelo semiproduto de um dos seus lados pela respectiva altura. Seja S_{ABC} a área do triângulo ABC da figura 22. Então,

$$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AH}{2}.$$

Mas ocorre que, no triângulo retângulo AHB,

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{AH}{AB},$$

e portanto a expressão da área que obtivemos no parágrafo anterior se torna

$$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AB \cdot \widehat{B}}{2}, \quad (2.8)$$

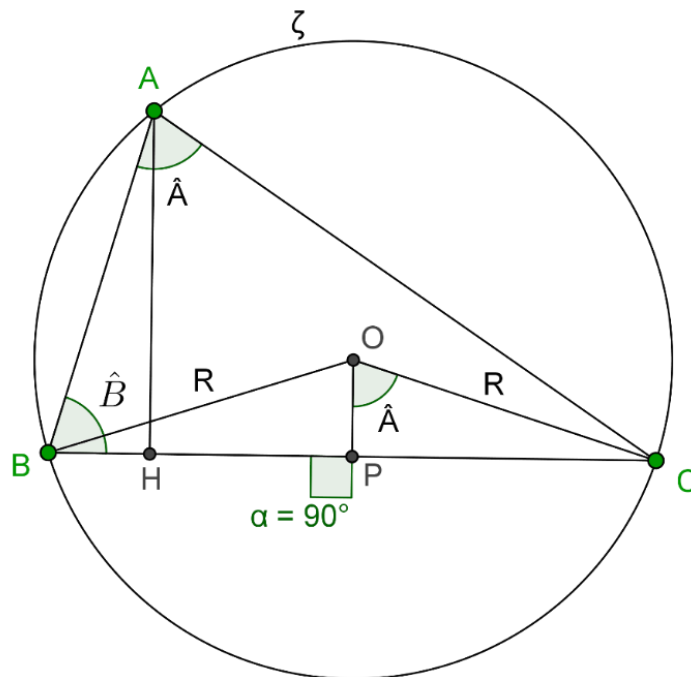
ou seja, a área de um triângulo é sempre dada pelo semiproduto de dois dos seus lados pelo seno do ângulo formado por eles.

Substituindo, nessa última igualdade, \widehat{B} por $b / 2R$, valor derivado da Lei dos Senos, chegamos finalmente a

$$S_{ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}, \quad (2.9)$$

expressando a área de um triângulo como função dos lados e do raio do seu círculo circunscrito. Agora estamos prontos para provar o Teorema de Hiparco.

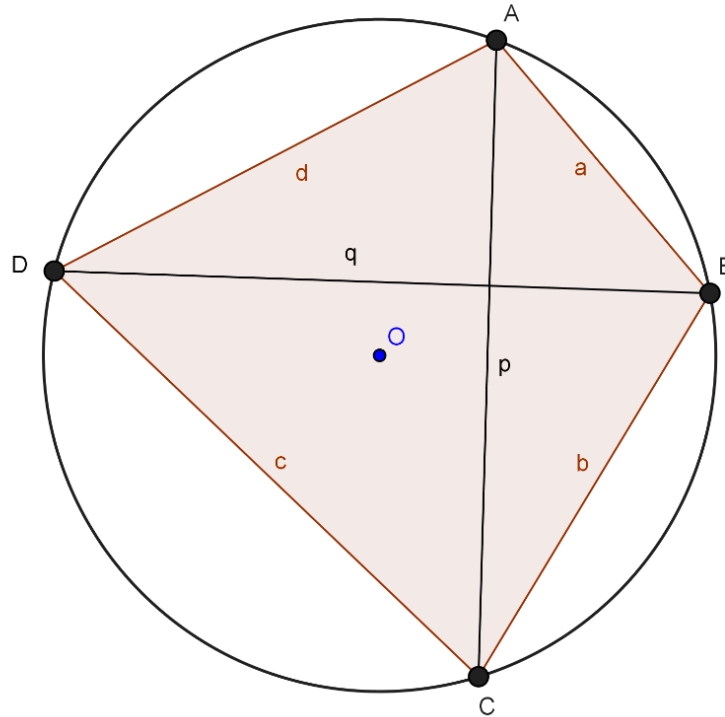
Figura 22 – Triângulo ABC com marcação de altura e raios do círculo circunscrito.



Fonte: Autor, 2017

Para tal usamos um quadrilátero ABCD cíclico genérico, dividido por suas diagonais AC e BD em dois triângulos, de lados que medem a, b, p e c, d, p, no primeiro caso, e de lados cujos valores são b, c, q e a, d, q, no segundo. A figura 23 auxilia o raciocínio a conduzir.

Figura 23 – Quadrilátero cíclico com lados e diagonais.



Fonte: Autor, 2017

A área K do quadrilátero $ABCD$ pode ser obtida de duas formas quando se visualiza a figura 23: pelas somas das áreas dos triângulos ABC e CDA ou pelas somas das áreas dos triângulos BCD e DAB . Como o círculo circunscrito aos quatro triângulos é o mesmo, de centro O e que circunscribe o próprio quadrilátero $ABCD$, é lícito escrever, utilizando a última expressão de área de triângulo obtida, que:

$$K = S_{ABC} + S_{CDA} = S_{BCD} + S_{DAB} = \frac{a \cdot b \cdot p}{4R} + \frac{c \cdot d \cdot p}{4R} = \frac{b \cdot c \cdot q}{4R} + \frac{d \cdot a \cdot q}{4R}.$$

Multiplicando toda a expressão por $4R$ e pondo p e q em evidência em cada lado,

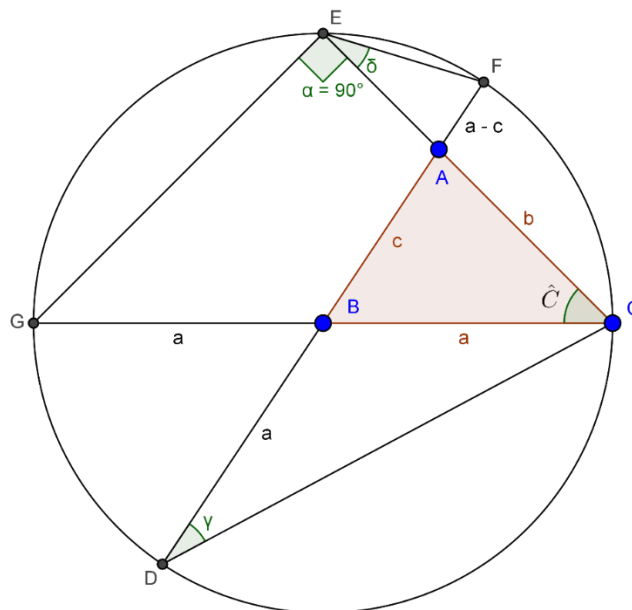
$$(a \cdot b + c \cdot d) \cdot p = (b \cdot c + a \cdot d) \cdot q \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{a \cdot b + c \cdot d}, \quad (2.10)$$

que é justamente o que pretendíamos demonstrar.

2.3.6 Fórmula de Bretschneider

Esta é uma proposição que visa o cálculo das áreas de quadriláteros genéricos. A partir dela se obtém expressão para áreas de quadriláteros cíclicos, conhecida como Fórmula de Brahmagupta. Em seguida, particularizamos ainda mais, posto que quadriláteros bicêntricos são casos particulares dos cíclicos (além de cíclicos são também tangenciais). Nosso primeiro passo aqui é obter a renomada Lei dos Cossenos. Para tanto, nos valem da figura 24. Seja um triângulo de lados a , b e c . Sem perda de generalidades, prolonguemos um de seus lados sobre a sua própria reta-suporte, de um comprimento exatamente igual a ele, formando assim um novo segmento de reta cuja medida é o dobro da do lado escolhido, por exemplo, o lado a , como vemos na figura 24. A seguir, com centro no ponto médio desse segmento recém-obtido, tracemos uma circunferência de raio igual ao lado a . Naturalmente o segmento de comprimento $2a$ é um diâmetro. Prolonguemos os dois outros lados do triângulo original até que se formem duas cordas do círculo que desenhamos. Tendo em mente que o diâmetro também é uma corda, temos agora os três lados do triângulo apoiados em três cordas do círculo. Finalmente, unamos as extremidades das cordas que passam pelo vértice A .

Figura 24 – Triângulo ABC para demonstração da Lei dos Cossenos.



Fonte: Autor, 2017

Ora, os ângulos γ e δ na figura 24 são congruentes, posto que são inscritos relativos ao mesmo arco. Os ângulos EAF e DAC também, porque são opostos pelo vértice. Então os triângulos AEF e ADC são semelhantes. Note que, no triângulo retângulo (seu maior lado é diâmetro de um círculo) ECG,

$$\cos \hat{C} = \frac{EC}{GC} \Rightarrow AE = GC \cdot \cos \hat{C} - b.$$

Podemos escrever então:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow \frac{2a \cdot \cos \hat{C} - b}{a + c} = \frac{a - c}{b} \Rightarrow (2a \cdot \cos \hat{C} - b) \cdot b = (a + c) \cdot (a - c).$$

Logo,

$$2ab \cdot \cos \hat{C} - b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}, \quad (2.11)$$

expressão conhecida em Geometria por “Lei dos Cossenos”: qualquer lado de um triângulo é dado pela raiz quadrada da soma dos quadrados dos outros dois lados, subtraída do seu duplo produto pelo cosseno do ângulo entre eles.

Tomando agora um quadrilátero genérico ABCD, vamos obter o resultado que dá título a esse tópico. Seja K a sua área. Ora, ABCD se encontra dividido em dois triângulos pela diagonal AC. Assim, podemos dizer que a soma das áreas deles nos fornece a área do quadrilátero. Mas vimos em (2.8) que a área de um triângulo é dada pelo semiproduto de dois de seus lados pelo seno do ângulo formado por eles. Isto é,

$$K = \frac{a \cdot b \cdot \sin \hat{B}}{2} + \frac{c \cdot d \cdot \sin \hat{D}}{2}.$$

Multiplicando por 2 e elevando ao quadrado essa expressão:

$$4K^2 = (a \cdot b)^2 \cdot \sin^2 \hat{B} + (c \cdot d)^2 \cdot \sin^2 \hat{D} + 2 \cdot abcd \cdot \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{D} \quad (2.12)$$

Agora aplicamos à diagonal AC a Lei dos Cossenos, nos triângulos ABC e ADC:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{B} = c^2 + d^2 - 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos \hat{D},$$

e, rearrumando a igualdade entre o segundo e terceiro membros, e elevando ao quadrado o que disso resulta:

$$\frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4} = (a \cdot b)^2 \cos^2 \hat{B} + (c \cdot d)^2 \cos^2 \hat{D} - 2 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{D}. \quad (2.13)$$

Somando agora (2.12) e (2.13), temos:

$$4K^2 + \frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4} = (a \cdot b)^2 + (c \cdot d)^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \cos(\hat{B} + \hat{D}),$$

uma vez que $\cos \hat{B} \cdot \cos \hat{D} - \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{D} = \cos(\hat{B} + \hat{D})$ e $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, para qualquer x real.

Somando e subtraindo $2 \cdot abcd$ ao segundo membro e multiplicando tudo por 4:

$$16K^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4 \cdot (a \cdot b + c \cdot d)^2 - 8 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot [1 + \cos(\hat{B} + \hat{D})] \text{ ou}$$

$$16K^2 + 8.a.b.c.d.[1 + \cos(\widehat{B} + \widehat{D})] = 4.(a.b + c.d)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 \quad (2.14)$$

Vamos fatorar o segundo membro isoladamente e depois retornar a (2.13). Trata-se de uma diferença de quadrados,

$$\begin{aligned} &4.(a.b + c.d)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = \\ &[2.(a.b + c.d) + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)].[2.(a.b + c.d) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)] = \\ &[2.a.b + a^2 + b^2 - (c^2 + d^2 - 2.c.d)].[2.c.d + c^2 + d^2 - (a^2 + b^2 - 2.a.b)] = \\ &[(a + b)^2 - (c - d)^2].[c + d)^2 - (a - b)^2]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

E, novamente fatorando as diferenças de quadrados, obtemos o seguinte para (2.15):

$$\begin{aligned} &[(a + b + c - d).(a + b - c + d)].[(c + d + a - b).(c + d - a + b)] = \\ &[(2s - 2d).(2s - 2c).(2s - 2b).(2s - 2a)] = 16.(s - a).(s - b).(s - c).(s - d), \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde fazemos $2s = a + b + c + d$, isto é, $2s$ é o perímetro do quadrilátero ABCD.

Podemos agora voltar a (2.14):

$$16K^2 = 4.(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 8abcd.[1 + \cos(\widehat{B} + \widehat{D})] = (2.16) - 8abcd.[1 + \cos(\widehat{B} + \widehat{D})]$$

Então,

$$16K^2 = 16.(s - a).(s - b).(s - c).(s - d) - 8.abcd.[1 + \cos(\widehat{B} + \widehat{D})].$$

Dividindo por 16 e igualando as raízes quadradas de ambos os membros, temos:

$$K = \sqrt{(s - a).(s - b).(s - c).(s - d) - \frac{abcd.[1 + \cos(B + D)]}{2}} \quad (2.17)$$

ou

$$K = \sqrt{(s - a).(s - b).(s - c).(s - d) - abcd.\cos^2\left[\frac{B + D}{2}\right]}, \quad (2.18)$$

onde nos valem da substituição $1 + \cos 2x = 2.\cos^2 x$.

Essa é a expressão da Fórmula de Bretschneider para a área de um quadrilátero qualquer. Note que não se perde generalidades ao trabalhar com os ângulos \widehat{B} e \widehat{D} , posto que o resultado seria exatamente o mesmo se o fizéssemos com \widehat{A} e \widehat{C} , já que a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é de 360 graus, e por essa razão,

$$\cos(\widehat{A} + \widehat{C}) = \cos[360^\circ - (\widehat{B} + \widehat{D})] = \cos(\widehat{B} + \widehat{D}).$$

O único cuidado a tomar ao empregar a fórmula é o de usar sempre ângulos opostos.

Quando se trata de quadriláteros cíclicos, como vimos, a condição necessária e suficiente para isto é que $\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$ (ângulos opostos suplementares). No entanto ocorre que $\cos 180^\circ = -1$, e sendo assim, na fórmula de Bretschneider, o segundo termo dentro da raiz quadrada no segundo membro se anula, posto que temos então:

$$1 + \cos(\widehat{B} + \widehat{D}) = 1 + \cos 180^\circ = 1 + (-1) = 0.$$

É o que se conhece como fórmula de Brahmagupta para a área de quadriláteros cíclicos:

$$K = \sqrt{(s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c) \cdot (s - d)} . \quad (2.19)$$

Essa expressão é semelhante à fórmula de Heron para a área de um triângulo qualquer, dados os seus lados. De fato, supondo por um instante que um triângulo é um “quadrilátero degenerado”, com um dos lados, por exemplo d , nulo (ou triângulos como sendo quadriláteros em que dois e apenas dois dos vértices coincidem), a fórmula de Brahmagupta se torna:

$$K = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)} ,$$

exatamente a fórmula de Heron da área de um triângulo de lados a , b e c , com $2s = a + b + c$. Não há perda de rigor matemático na aplicação de Brahmagupta a um triângulo (um quadrilátero “degenerado”), pois todo triângulo é cíclico (inscritível).

2.3.7 Área de um quadrilátero bicêntrico em função dos lados

Vamos agora utilizar a fórmula de Brahmagupta para o cálculo da área de quadriláteros cíclicos e aplicá-la ao caso ainda mais específico dos quadriláteros a um só tempo cíclicos e tangenciais. Ora, nesse caso, se os lados do quadrilátero $ABCD$ forem a , b , c e d e estiverem dispostos nessa ordem, a condição necessária e suficiente para que ele seja tangencial, o Teorema de Pitot, é que $a + c = b + d$. Mas então, fazendo novamente $2s = a + b + c + d$, vem: $a + c = b + d = s \Rightarrow s - a = c$; $s - b = d$; $s - c = a$; $s - d = b$.

Substituindo para K ,

$$K = \sqrt{(s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c) \cdot (s - d)} \Rightarrow K = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d} . \quad (2.20)$$

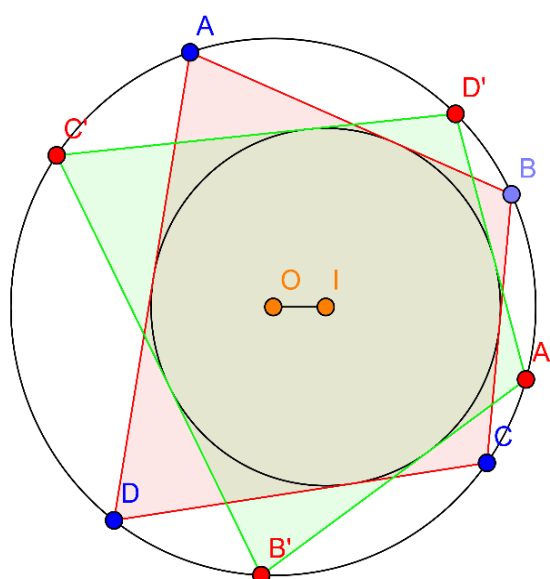
Essa expressão dá a área de um quadrilátero bicêntrico em função dos lados a , b , c e d , mas não é exclusiva deles, pois também é válida para retângulos, que, por não serem tangenciais (à exceção dos de lados iguais, os quadrados), não são bicíclicos. De fato, retângulos têm a área dada pelo clássico produto “base vezes altura”. Como há, por assim dizer, duas bases e duas alturas, uma vez que se trata de paralelogramos com os quatro ângulos retos, a raiz quadrada do produto de seus quatro lados fornece, também para retângulos, o valor de sua área. Concluimos assim que a fórmula da área de um quadrilátero como tendo valor igual à raiz quadrada do produto das medidas dos seus lados é condição necessária, mas não suficiente, para que esse quadrilátero seja bicêntrico.

3 QUADRILÁTEROS BICÊNTRICOS – CONCEITO, PROPRIEDADES, FÓRMULA DE FUSS, MÉTODOS DE CONSTRUÇÃO E CÁLCULO DA ÁREA

3.1 Conceito

Define-se rigorosamente quadrilátero bicêntrico ou bicíclico como “o polígono convexo de quatro lados a um só tempo cíclico (ou inscrito) e tangencial” (ou circunscritível) (nessa dissertação trabalhamos apenas com círculos, mas também se pode inscrever ou circunscrever um quadrilátero em e a elipses, por exemplo). Priorizamos os termos “bicêntrico”, “cíclico” e “tangencial”, por corresponderem aos empregados em inglês. A figura 25 ilustra o conceito.

Figura 25 - Quadriláteros bicêntricos circunscritos aos e inscritos nos mesmos círculos.



Fonte: Autor, 2017

O conceito de polígonos bicêntricos aparece com muita frequência na literatura matemática associado a um resultado conhecido como Porismo de Poncelet (Jean-Victor Poncelet, matemático e engenheiro francês, 1788 – 1867), e que basicamente consiste do enunciado seguinte: “Sempre que um polígono está inscrito em uma cônica e circunscrito a

outra, ele é parte de uma família infinita de polígonos com o mesmo número de lados, todos eles inscritos e circunscritos em relação às mesmas duas cônicas”. No âmbito do nosso trabalho lidamos apenas com quadriláteros, e sendo circunferências de círculo ambas as cônicas. A demonstração do Porismo de Poncelet pode ser realizada por intermédio de curvas elípticas, com um argumento que remete ao estudo da Geometria Projetiva, que sendo assim foge aos nossos objetivos exibir aqui. Entretanto fazemos questão de citar o Porismo para que esteja claro que, uma vez que exista um quadrilátero bicêntrico inscrito em um círculo e circunscrito a outro, se pode afirmar que há uma infinidade de quadriláteros nessa mesma condição.

3.2 Propriedades

A conceituação acarreta imediatamente as duas mais importantes propriedades, a rigor condições necessárias e suficientes para que quadriláteros sejam bicíclicos.

3.2.1 Ângulos opostos suplementares

Pelo Teorema do Quadrilátero Inscritível (item 2.3.3) a condição necessária e suficiente para que ABCD seja cíclico é que tenha ângulos internos opostos suplementares. Veja a figura 25:

$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ. \quad (3.1)$$

Essa primeira propriedade implica que paralelogramos genéricos, losangos (com exceção dos quadrados) e trapézios (com exceção dos isósceles) não podem ser bicêntricos, pois estes possuem ângulos suplementares que são adjacentes, não opostos. Quadrados são quadriláteros regulares e portanto bicêntricos, com coincidência de incentro e circuncentro.

3.2.2 Somas iguais dos lados opostos

Pelo Teorema de Pitot (item 2.3.2) a condição necessária e suficiente para que o quadrilátero ABCD seja tangencial é que seus lados opostos tenham somas iguais. Veja a figura 25:

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA} . \quad (3.2)$$

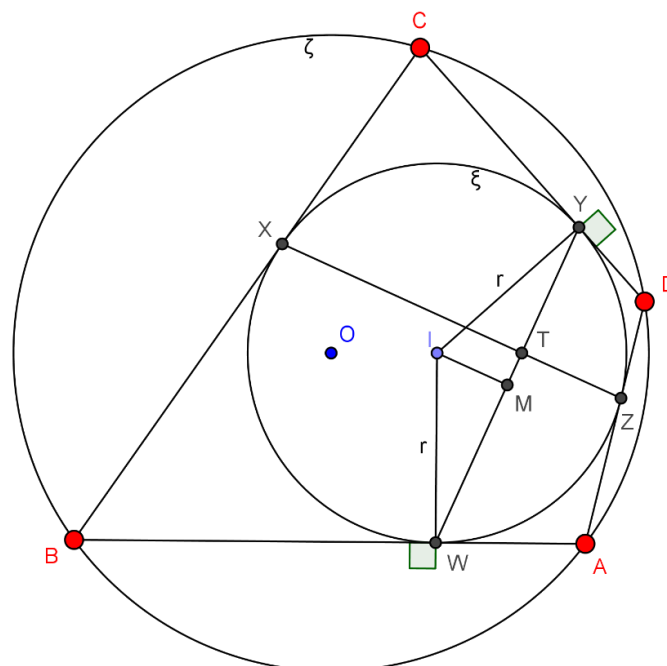
Cumpra-se notar que essa segunda propriedade implica que paralelogramos genéricos e retângulos (com exceção dos quadrados) não podem ser bicêntricos, uma vez que tais quadriláteros possuem somas iguais de pares de lados, mas eles são adjacentes, e não opostos. Como vimos, quadrados são sempre bicêntricos, tendo coincidência de incentro e circuncentro (seus círculos circunscrito e inscrito são concêntricos).

3.2.3 Quadriláteros tangenciais (condições mediante as quais são também cíclicos)

Há todavia outras condições mediante as quais quadriláteros convexos são bicêntricos. Mais especificamente, quando um destes polígonos é tangencial ou circunscritível, ele também é cíclico ou inscritível se e somente se se verificam todas as (e qualquer uma delas) próximas três propriedades. A primeira diz respeito à perpendicularidade das cordas determinadas, no círculo inscrito, pelos pontos de tangência dos lados opostos (ver figura 26):

$$\overline{WY} \perp \overline{XZ} . \quad (3.3)$$

Figura 26 – Quadrilátero tangencial e pontos de tangência.



Vamos demonstrá-la. Suponhamos que o quadrilátero ABCD é cíclico, além de tangencial. No círculo ξ , o ângulo entre os segmentos de reta WY e XZ é dado pela semissoma dos menores arcos entre os pontos W e X e Y e Z. Ocorre que tais arcos têm por medida ângulos (centrais) que são suplementos, respectivamente, de \widehat{B} e \widehat{D} (ângulos internos do próprio quadrilátero), uma vez que $IW \perp AB$ e $IX \perp BC$ (pois os raios de um círculo são sempre perpendiculares às suas tangentes nos pontos de tangência) e, sendo assim, a condição estabelecida em (3.1) obriga a que os arcos WX e YZ tenham por soma

$$180^\circ - \widehat{B} + 180^\circ - \widehat{D} = 360^\circ - (\widehat{B} + \widehat{D}) = 180^\circ.$$

Então, sua semissoma é 90° , o que comprova a perpendicularidade de WY e XZ. Por outro lado, para provar a volta, partindo agora do quadrilátero ABCD tangencial, suponhamos que as cordas WY e XZ, determinadas no círculo nele inscrito pelos pontos de tangência dos lados opostos, sejam perpendiculares. Traçamos o segmento IM, que une o centro do círculo inscrito ao ponto médio da corda WY. Como tanto I como M equidistam das extremidades da corda, IM está contido em sua mediatriz e sendo assim IM é perpendicular a WY. Logo os triângulos retângulos IMW e IMY são congruentes, donde $\widehat{IWM} = \widehat{IYM} \Rightarrow \widehat{MWA} = \widehat{MYD}$. Ou seja, isso mostra que os ângulos formados por uma corda com as tangentes ao círculo nas suas extremidades são congruentes. Vamos nos valer dessa propriedade: ora, no quadrilátero TYDZ temos por soma dos ângulos internos

$$\widehat{TYD} + \widehat{YDZ} + \widehat{DZT} + \widehat{ZTY} = \widehat{TWA} + \widehat{D} + \widehat{TXC} + 90^\circ = 180 - \widehat{TWB} + \widehat{D} + 180 - \widehat{TXB} + 90 = 360^\circ.$$

Entretanto, no quadrilátero TWBX temos por soma dos ângulos internos

$$\widehat{TWB} + \widehat{WBX} + \widehat{BXT} + \widehat{XTW} = \widehat{TWB} + \widehat{B} + \widehat{BXT} + 90^\circ = 360^\circ.$$

Somando as duas expressões que obtivemos resulta

$$180 + \widehat{B} + \widehat{D} + 180 + 90 + 90 = 360.$$

Então, \widehat{B} e \widehat{D} são suplementares e o quadrilátero ABCD é de fato cíclico, e portanto bicêntrico.

Outra condição necessária e suficiente para que um quadrilátero tangencial ABCD seja também cíclico é dada por uma proporção entre os segmentos das tangentes, traçadas ao círculo inscrito a partir de seus quatro vértices, qual seja:

$$\frac{AW}{WB} = \frac{DY}{YC}. \quad (3.4)$$

Vamos à demonstração. Dado ABCD um quadrilátero convexo, sejam $2\widehat{A}$, $2\widehat{B}$, $2\widehat{C}$ e $2\widehat{D}$ seus ângulos internos. Isso permite que se escreva: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 180^\circ$ sendo \widehat{A} , \widehat{B} , \widehat{C} e \widehat{D} ângulos agudos.

Para a igualdade (3.4), se ABCD é quadrilátero cíclico, então

$$\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = 90^\circ$$

e sendo ângulos complementares e agudos temos que

$$\text{sen } \widehat{A} = \text{cos } \widehat{C}, \text{sen } \widehat{C} = \text{cos } \widehat{A}, \text{sen } \widehat{B} = \text{cos } \widehat{D}, \text{sen } \widehat{D} = \text{cos } \widehat{B}.$$

Isto é, resulta válido (veja a figura 27) que:

$$\text{tg } \widehat{A} \cdot \text{tg } \widehat{C} = \text{tg } \widehat{B} \cdot \text{tg } \widehat{D} = 1 \Rightarrow \frac{r}{e} \cdot \frac{r}{g} = \frac{r}{f} \cdot \frac{r}{h} = 1 \Rightarrow \frac{e}{f} = \frac{h}{g}.$$

Por outro lado, se ABCD não é cíclico, uma das somas de metades dos ângulos opostos de ABCD, $(\widehat{A} + \widehat{C})$ ou $(\widehat{B} + \widehat{D})$, é maior que 90° e a outra é menor que esse valor. Ora, mas

$$\text{tg}(x + y) = \frac{\text{tg } x + \text{tg } y}{1 - \text{tg } x \cdot \text{tg } y}$$

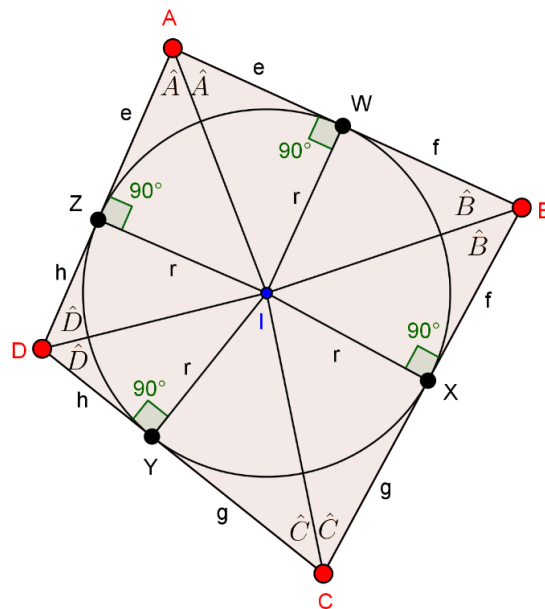
e os quatro ângulos \widehat{A} , \widehat{B} , \widehat{C} e \widehat{D} são agudos. Assim, os numeradores

de $\text{tg}(\widehat{A} + \widehat{C})$ e $\text{tg}(\widehat{B} + \widehat{D})$ são positivos, e os denominadores são de sinais opostos, mas nenhum

dos dois é nulo, então $\text{tg } \widehat{A} \cdot \text{tg } \widehat{C} \neq \text{tg } \widehat{B} \cdot \text{tg } \widehat{D}$ e portanto $\frac{e}{f} \neq \frac{h}{g}$. Isso prova que (3.4) é

condição necessária e suficiente para que um quadrilátero tangencial seja também cíclico.

Figura 27 – Quadrilátero tangencial e segmentos tangentes.



Fonte: Autor, 2017

Finalmente, a terceira condição necessária e suficiente para que um quadrilátero tangencial ABCD seja também cíclico é dada por uma proporção envolvendo as suas diagonais e os segmentos das tangentes, traçadas ao círculo inscrito a partir dos quatro vértices, isto é:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AW+CY}{BX+DZ} . \quad (3.5)$$

A prova disto parte da suposição de que ABCD seja também cíclico: nos valendo de uma variável auxiliar k para expressar a proporção obtida em (3.4) e aplicando-o ao Teorema de Hiparco, temos:

$$\frac{e}{f} = \frac{h}{g} = k \Rightarrow e = k.f, h = k.g,$$

e em

$$\frac{p}{q} = \frac{a.d + b.c}{a.b + c.d} .$$

Considerando a figura 28, vem:

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= \frac{(e+f).(h+e)+(f+g).(g+h)}{(e+f).(f+g)+(g+h).(h+e)} = \frac{(k.f+f).(k.g+k.f)+(f+g).(g+k.g)}{(k.f+f).(f+g)+(g+k.g).(k.g+k.f)} = \\ &= \frac{(k+1).f.k.(f+g)+(f+g).(k+1).g}{(k+1).f.(f+g)+(k+1).g.k.(f+g)} = \frac{(k+1).(f+g).(k.f+g)}{(k+1).(f+g).(f+k.g)} = \frac{(k.f+g)}{(f+k.g)} = \frac{e+g}{f+h} . \end{aligned}$$

Por outro lado, supondo seja ABCD um quadrilátero tangencial no qual seja verdade que

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AW+CY}{BX+DZ} ,$$

e lembrando que

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 180^\circ$, com \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} e \hat{D} ângulos agudos, temos

$$\text{tg}(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D}) = \text{tg}(180^\circ) = 0.$$

Além disso, aplicando por duas vezes $\text{tg}(x+y) = \frac{\text{tg } x + \text{tg } y}{1 - \text{tg } x . \text{tg } y}$, segue que:

$$\frac{\text{tg}(\hat{A}+\hat{B}) + \text{tg}(\hat{C}+\hat{D})}{1 - \text{tg}(\hat{A}+\hat{B}) . \text{tg}(\hat{C}+\hat{D})} = 0 \Rightarrow \text{tg}(\hat{A} + \hat{B}) + \text{tg}(\hat{C} + \hat{D}) = 0$$

e então

$$\frac{\text{tg } \hat{A} + \text{tg } \hat{B}}{1 - \text{tg } \hat{A} . \text{tg } \hat{B}} + \frac{\text{tg } \hat{C} + \text{tg } \hat{D}}{1 - \text{tg } \hat{C} . \text{tg } \hat{D}} = 0 \Rightarrow$$

$$(\text{tg } \hat{A} + \text{tg } \hat{B}).(1 - \text{tg } \hat{C} . \text{tg } \hat{D}) + (\text{tg } \hat{C} + \text{tg } \hat{D}).(1 - \text{tg } \hat{A} . \text{tg } \hat{B}) = 0 \Rightarrow$$

$$\text{tg } \hat{A} + \text{tg } \hat{B} + \text{tg } \hat{C} + \text{tg } \hat{D} = \text{tg } \hat{A} . \text{tg } \hat{B} . \text{tg } \hat{C} + \text{tg } \hat{A} . \text{tg } \hat{B} . \text{tg } \hat{D} + \text{tg } \hat{A} . \text{tg } \hat{C} . \text{tg } \hat{D} + \text{tg } \hat{B} . \text{tg } \hat{C} . \text{tg } \hat{D}$$

Tendo em mente que

$$\text{tg } \hat{A} = \frac{r}{e}, \text{tg } \hat{B} = \frac{r}{f}, \text{tg } \hat{C} = \frac{r}{g} \text{ e } \text{tg } \hat{D} = \frac{r}{h},$$

isto leva a

$$\frac{r}{e} + \frac{r}{f} + \frac{r}{g} + \frac{r}{h} = \frac{r}{e} \cdot \frac{r}{f} \cdot \frac{r}{g} + \frac{r}{e} \cdot \frac{r}{f} \cdot \frac{r}{h} + \frac{r}{e} \cdot \frac{r}{g} \cdot \frac{r}{h} + \frac{r}{f} \cdot \frac{r}{g} \cdot \frac{r}{h},$$

que acarreta

$$r^2 = \frac{e.f.g + e.f.h + e.g.h + f.g.h}{e + f + g + h}.$$

Além disso, aplicando a lei dos cossenos ao triângulo ABD, obtemos:

$$q^2 = (e + f)^2 + (e + h)^2 - 2.(e + f).(e + h). \cos 2\hat{A},$$

onde

$$\cos 2\hat{A} = \frac{\sin 2\hat{A}}{\operatorname{tg} 2\hat{A}} = \frac{2 \sin \hat{A} \cdot \cos \hat{A}}{\frac{2 \operatorname{tg} \hat{A}}{1 - \operatorname{tg}^2 \hat{A}}} = \cos^2 \hat{A} \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 \hat{A}) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \hat{A}}{\sec^2 \hat{A}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \hat{A}}{1 + \operatorname{tg}^2 \hat{A}}.$$

Logo,

$$q^2 = (e + f)^2 + (e + h)^2 - 2.(e + f).(e + h). \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \hat{A}}{1 + \operatorname{tg}^2 \hat{A}}, \text{ com } \operatorname{tg} \hat{A} = \frac{r}{e}.$$

Portanto,

$$q^2 = (e + f)^2 + (e + h)^2 - 2.(e + f).(e + h). \frac{e^2 - r^2}{e^2 + r^2}, \text{ onde } r^2 = \frac{e.f.g + e.f.h + e.g.h + f.g.h}{e + f + g + h}$$

e então

$$\frac{e^2 - r^2}{e^2 + r^2} = \frac{e^2.(e+f+g+h) - (e.f.g + e.f.h + e.g.h + f.g.h)}{e^2.(e+f+g+h) + (e.f.g + e.f.h + e.g.h + f.g.h)}$$

que, devido ao fato de que

$$e^2.(e + f + g + h) + (e.f.g + e.f.h + e.g.h + f.g.h) = (e + f).(e + g).(e + h),$$

leva a

$$\frac{e^2 - r^2}{e^2 + r^2} = \frac{e^2.(e+f+g+h) - (e.f.g + e.f.h + e.g.h + f.g.h)}{(e + f).(e + g).(e + h)}.$$

Desse modo, temos que:

$$q^2 = (e + f)^2 + (e + h)^2 - 2.(e + f).(e + h). \frac{e^2.(e+f+g+h) - (e.f.g + e.f.h + e.g.h + f.g.h)}{(e + f).(e + g).(e + h)}$$

e

$$q^2 = (e + f)^2 + (e + h)^2 - 2. \frac{e^2.(e+f+g+h) - (e.f.g + e.f.h + e.g.h + f.g.h)}{(e + g)}$$

e ainda

$$q^2 = \frac{(e+g).(2e^2+2e.f+2e.h+f^2+h^2) - 2e^2.(e+f+g+h) + 2.(e.f.g+e.f.h+e.g.h+f.g.h)}{e + g},$$

que se torna

$$q^2 = \frac{(e+g).(f^2+h^2) + 2.e.g.(f+h) + 2.(efg+efh+egh+fgh)}{e + g} = \frac{(e+g).(f+h)^2 + 4.(efg+egh)}{e + g},$$

e, simplificando,

$$q^2 = \frac{f+h}{e+g} \cdot ((e+g)(f+h) + 4.e.g).$$

Similarmente, chega-se a uma expressão para a outra diagonal:

$$p^2 = \frac{e+g}{f+h} \cdot ((e+g)(f+h) + 4.f.h).$$

Então,

$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{(e+g)^2}{(f+h)^2} \cdot \frac{(e+g)(f+h) + 4.f.h}{(e+g)(f+h) + 4.e.g}.$$

Ora, por hipótese:

$$\frac{p}{q} = \frac{e+g}{f+h} \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = \frac{(e+g)^2}{(f+h)^2}.$$

Logo, na expressão anterior

$$\frac{(e+g)(f+h) + 4.f.h}{(e+g)(f+h) + 4.e.g} = 1 \Rightarrow (e+g).(f+h) + 4.f.h = (e+g).(f+h) + 4.e.g \Rightarrow f.h = e.g.$$

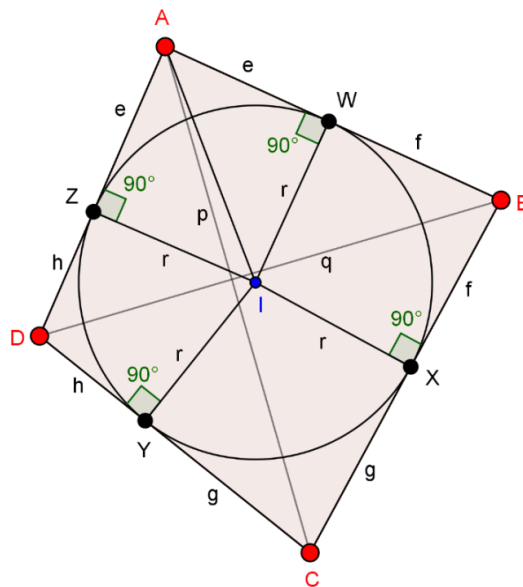
Como, de (3.4),

$$\frac{e}{f} = \frac{h}{g} \Rightarrow ABCD \text{ é quadrilátero cíclico, a igualdade } f.h = e.g \text{ obtida implica que}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{e+g}{f+h} \Rightarrow ABCD \text{ é quadrilátero cíclico,}$$

o que demonstra que (3.5) é de fato condição necessária e suficiente para que um quadrilátero tangencial seja também cíclico.

Figura 28 – Quadrilátero tangencial e diagonais e segmentos tangentes



3.3 Fórmula de Fuss

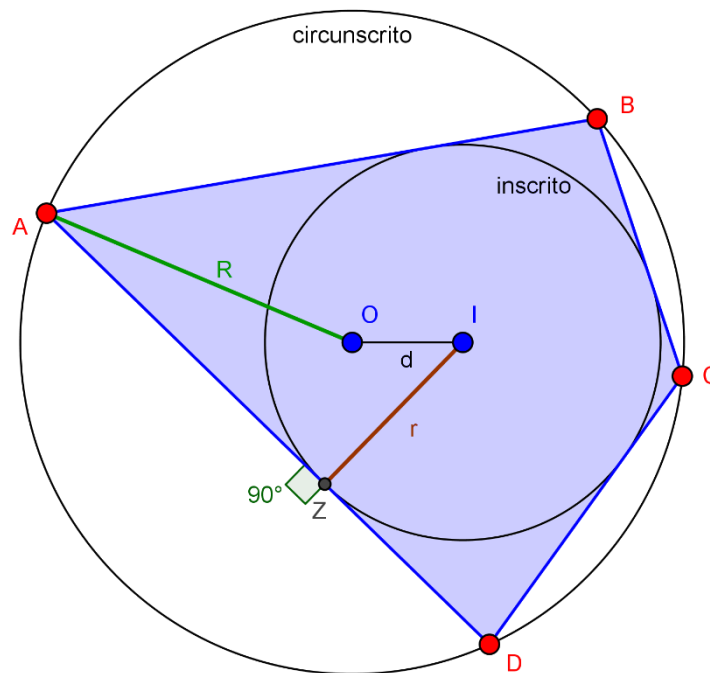
Nicolaus **Fuss**, matemático suíço que viveu boa parte de sua vida na Rússia, assistente e genro do célebre Leonhard Euler, estudou os quadriláteros bicêntricos e provou um importante resultado, conhecido por Fórmula de Fuss em sua homenagem:

“Em um quadrilátero bicíclico se verifica a relação

$$2.r^2.(R^2 + k^2) = (R^2 - k^2)^2, \quad (3.6)$$

onde r e R são os raios dos círculos inscrito e circunscrito e k a distância entre os seus centros”, conforme se vê na figura 29. Apresentamos a seguir uma demonstração dessa igualdade.

Figura 29 – Quadrilátero Bicíclico ABCD com raios e distância entre os centros.



Fonte: Autor, 2017

Para tanto, nos valem da Figura 30. Os ângulos α e β são respectivamente iguais à metade dos arcos AE e AF, e como são complementares (pois BI e DI são bissetrizes dos ângulos opostos do quadrilátero ABCD, que são suplementares porque ABCD é quadrilátero cíclico), o arco EF vale 180° , donde concluímos que o segmento de reta EF é diâmetro do círculo circunscrito a ABCD, isto é, ele passa pelo centro O de tal círculo. IJ e IK são respectivamente os segmentos perpendiculares aos lados BC e CD traçados a partir do incentro I, o que equivale

a dizer que $IJ = IK = r$. Ora, $\cos \alpha = \frac{r}{ID}$ e $\cos \beta = \frac{r}{IB}$ nos triângulos retângulos IKD e IJB. Mas vimos que

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta \text{ e } \left(\frac{r}{ID}\right)^2 + \left(\frac{r}{IB}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{IB^2} + \frac{1}{ID^2} = \frac{1}{r^2}. \quad (3.7)$$

Aplicando a Lei dos Cossenos duas vezes, aos triângulos IOE e IOF:

$$IE^2 = R^2 + k^2 - 2.R.k.\cos \widehat{IOE} \text{ e } IF^2 = R^2 + k^2 - 2.R.k.\cos \widehat{IOF}.$$

Somando membro a membro (sendo suplementares, ângulos \widehat{IOE} e \widehat{IOF} têm cossenos opostos):

$$IE^2 + IF^2 = 2.(R^2 + k^2). \quad (3.8)$$

A potência do ponto I em relação ao círculo circunscrito ao quadrilátero ABCD é dada por:

$$BI.IE = DI.IF = R^2 - k^2 \Rightarrow \frac{1}{IB^2} = \frac{IE^2}{(R^2 - k^2)^2} \text{ e } \frac{1}{ID^2} = \frac{IF^2}{(R^2 - k^2)^2}. \quad (3.9)$$

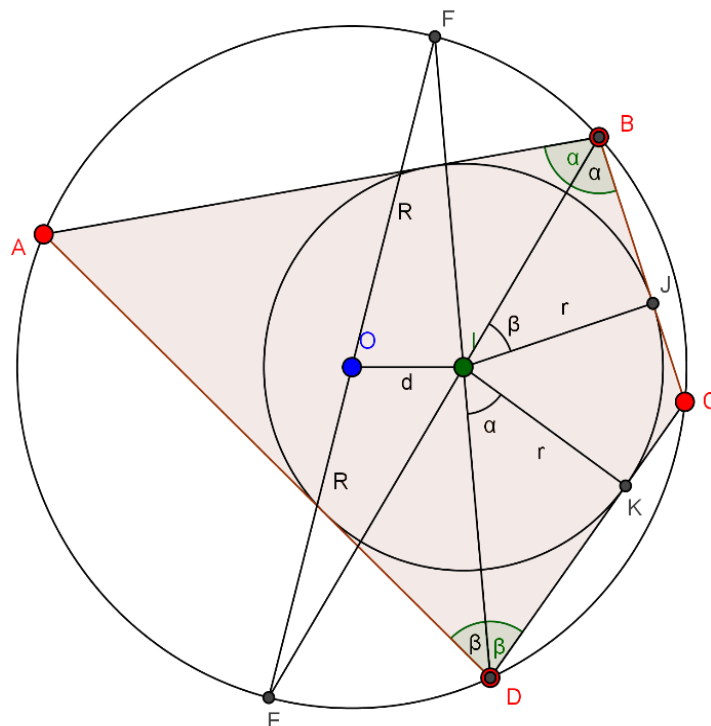
Combinando agora (3.7) e (3.9):

$$\frac{IE^2}{(R^2 - k^2)^2} + \frac{IF^2}{(R^2 - k^2)^2} = \frac{1}{r^2} \Rightarrow IE^2 + IF^2 = \frac{(R^2 - k^2)^2}{r^2}.$$

Aplicando (3.8),

$$2.(R^2 + k^2) = \frac{(R^2 - k^2)^2}{r^2} \Rightarrow 2.r^2.(R^2 + k^2) = (R^2 - k^2)^2, \text{ que é a Relação de Fuss.}$$

Figura 30 – Quadrilátero Bicêntrico ABCD com raios e distância entre os centros.

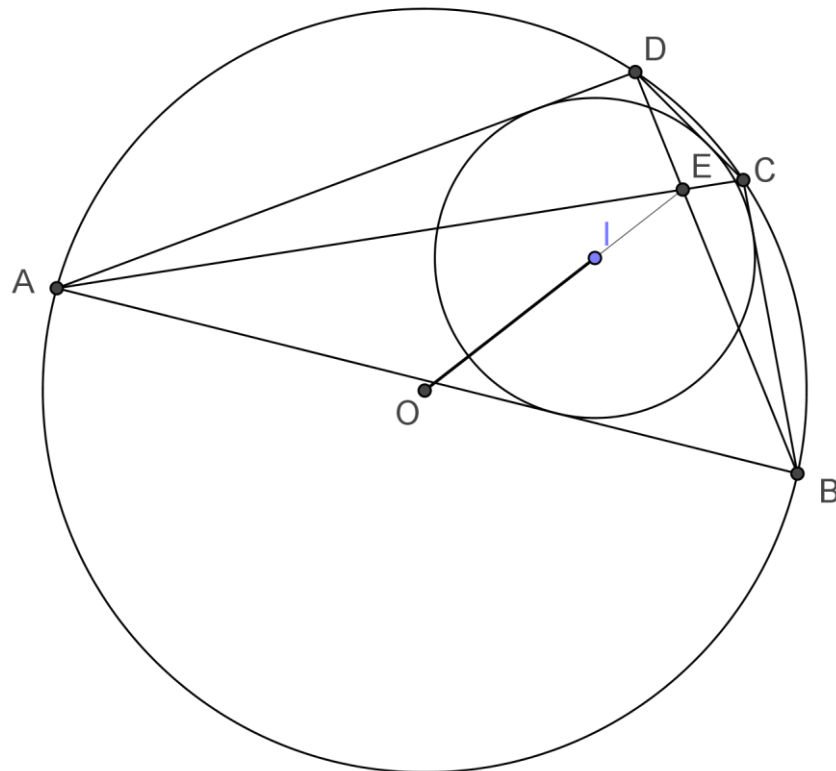


Fonte: o Autor

3.4 Alinhamento de três pontos notáveis

Uma interessante propriedade de que gozam os quadriláteros bicêntricos é o fato de que, neles, três pontos notáveis estão sempre necessariamente alinhados: o circuncentro O , o incentro I e o ponto de encontro das duas diagonais, que vamos denominar E (como se pode ver na figura 31). Demonstramos isto a seguir.

Figura 31 – Quadrilátero ABCD: circuncentro, incentro e encontro das diagonais.



Fonte: Autor, 2017

Para isto nos valem de uma propriedade dos quadriláteros tangenciais: os segmentos de reta que unem os pontos de tangência, dos lados opostos, ao círculo nele inscrito, passam pelo ponto de encontro das suas diagonais. Sejam, na figura 32, E , F , G e H os pontos de contato com a circunferência desse círculo, dos lados AB , BC , CD e DA , respectivamente. Então, os segmentos de reta EG e FH passam por M , ponto de encontro das suas diagonais.

Para provar isso, vamos considerar seja N o ponto de encontro de AC e EG . A propriedade mais básica que usaremos nesse raciocínio é o fato de que as retas tangentes a uma circunferência nas extremidades de uma de suas cordas formam ângulos iguais com a própria

corda, pela simetria. Assim, na figura 32, temos, por exemplo, que $\widehat{AEN} = \widehat{DGN}$. Além disso, ângulos suplementares têm o mesmo seno. Daí, $\widehat{AEN} = \widehat{DGN} = \widehat{CGN}$. Mas a área de um triângulo pode ser dada pelo semiproduto de dois lados pelo seno do ângulo formado por eles, como vimos no capítulo anterior. No triângulo AEN: $2 \cdot \text{área}(\triangle AEN) = AN \cdot EN \cdot \widehat{AEN} = AE \cdot EN \cdot \widehat{ANE}$. No triângulo CGN: $2 \cdot \text{área}(\triangle CGN) = CN \cdot GN \cdot \widehat{CNG} = CG \cdot GN \cdot \widehat{CGN}$. Ora, dividindo as duas últimas expressões membro a membro:

$$\frac{\text{área}(\triangle AEN)}{\text{área}(\triangle CGN)} = \frac{AN \cdot EN \cdot \widehat{ANE}}{CN \cdot GN \cdot \widehat{CNG}} = \frac{AE \cdot EN \cdot \widehat{AEN}}{CG \cdot GN \cdot \widehat{CGN}}$$

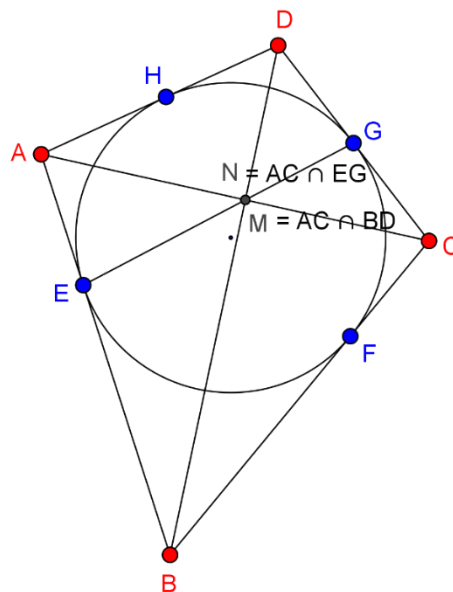
Daí vem (\widehat{ANE} e \widehat{CNG} são ângulos opostos pelo vértice e portanto congruentes) que:

$$\frac{AN \cdot EN}{CN \cdot GN} = \frac{AE \cdot EN}{CG \cdot GN} \Rightarrow \frac{AN}{CN} = \frac{AE}{CG}$$

Ou seja, EG divide a diagonal AC na razão AE/CG.

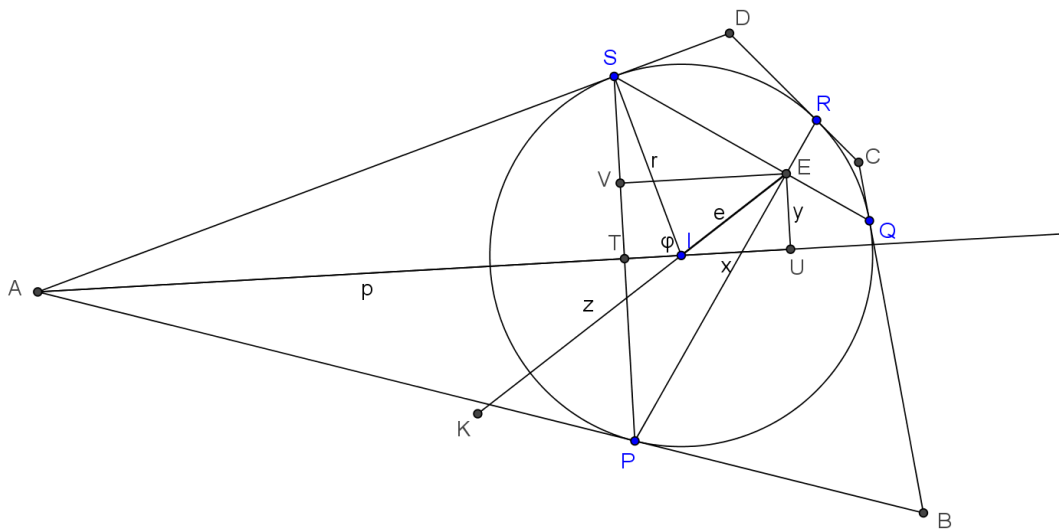
Analogamente, se considerarmos que AC e FH se cruzam em um ponto, digamos N', considerando os triângulos AHN' e CFN', concluiremos que FH divide AC na razão AH/CF. Contudo, AE = AH e CG = CF porque são, respectivamente, os pares de tangentes traçadas ao círculo pelos pontos A e C. Então, os segmentos EG e FH dividem AC na mesma razão. Em outras palavras, N e N' são na verdade um mesmo e único ponto. Isto é, a diagonal AC passa pelo ponto de interseção de EG e FH. Em novo raciocínio de similaridade, afirmamos que o mesmo é verdade para a outra diagonal, ou seja, que BD passa pelo ponto de contato entre EG e FH. Daí, os quatro segmentos de reta concorrem em N, ponto comum às diagonais AC e BD.

Figura 32 – Quadrilátero bicêntrico e pontos notáveis.



Provemos agora o argumento principal. Sejam I o incentro e E o ponto de encontro das diagonais do quadrilátero bicêntrico ABCD, onde a priori não indicamos onde se localiza o circuncentro O (figura 33). Dado que os pontos de tangência de AB, BC, CD e DA ao círculo inscrito são P, Q, R e S, seja T o ponto em que AI corta PS, baixemos perpendiculares EU e EV, respectivamente, a IT e TS, e sejam $IA = p$, $IE = e$, $\widehat{EIA} = \varphi$, $IU = x = -e \cdot \cos \varphi$, e $UE = y$. Então, estendamos o segmento de reta EI do comprimento z tal que $z = \frac{r^2 \cdot e}{r^2 - e^2}$ até um ponto K. Vamos mostrar que K na verdade coincide com o ponto O, circuncentro de ABCD.

Figura 33 – Quadrilátero ABCD e construções para prova de alinhamento.



Fonte: Autor, 2017

Evidentemente, as tangentes ao círculo inscrito em ABCD, traçadas a partir de A, sendo P e S os pontos de tangência, fazem de AI a mediatriz de segmento PS; logo, T é ponto médio desse segmento de reta e os ângulos em T são retos, o que implica na existência de dois triângulos retângulos, ASI e PES, em que as alturas relativas às hipotenusas são respectivamente ST e EV. Daí, utilizando as relações métricas nesses dois triângulos retângulos, podemos escrever que $IS^2 = IA \cdot IT$, isto é,

$$r^2 = p \cdot IT \quad (3.10)$$

e

$$EV^2 = PV \cdot VS. \quad (3.11)$$

Como AT é mediatriz de PS e EU e EV são respectivamente perpendiculares a PS e AI por construção, TUEV é um retângulo, e então temos $EV = TU = IT + IU = IT + x$, $PV = PT + TV = TS + TV$, e $VS = TS - TV$.

Então, de (3.11),

$$EV^2 = (IT + x)^2 = (TS + TV).(TS - TV),$$

ou seja,

$$IT^2 + 2x.IT + x^2 = TS^2 - TV^2 = TS^2 - EU^2 = TS^2 - y^2,$$

o que acarreta

$$IT^2 + 2x.IT + (x^2 + y^2) = TS^2. \quad (3.12)$$

Mas $x^2 + y^2 = e^2$, $TS^2 = r^2 - IT^2$ e $x = -e \cdot \cos \varphi$, e sendo assim (3.12) leva a

$$IT^2 + 2x.IT + e^2 = r^2 - IT^2 \Rightarrow 2.IT^2 - 2.IT.e \cdot \cos \varphi + e^2 = r^2.$$

Considerando, de (3.10), que $IT = r^2 / p$,

$$\frac{2r^4}{p^2} - \frac{2r^2}{p} e \cdot \cos \varphi + e^2 = r^2 \Rightarrow 2r^4 - 2r^2.p.e \cdot \cos \varphi + p^2.e^2 = r^2.p^2 \Rightarrow$$

$$2r^4 = p^2.(r^2 - e^2) + 2r^2.p.e \cdot \cos \varphi \Rightarrow \frac{2r^4}{r^2 - e^2} = p^2 + \frac{2r^2.e}{r^2 - e^2} \cdot (p \cdot \cos \varphi). \quad (3.13)$$

Agora, aplicando a Lei dos Cossenos ao triângulo KIA, chegamos a

$$KA^2 = z^2 + p^2 - 2.z.p \cdot \cos (180^\circ - \varphi) = z^2 + p^2 + 2.z.p \cdot \cos \varphi.$$

$$\text{Vimos em (3.13) que } p^2 + \frac{2r^2.e}{r^2 - e^2} \cdot (p \cdot \cos \varphi) = \frac{2r^4}{r^2 - e^2},$$

que indica que, quando atribuímos a z o valor $\frac{r^2.e}{r^2 - e^2}$ (que efetivamente ocorre), temos:

$$KA^2 = z^2 + p^2 + 2.z.p \cdot \cos \varphi = z^2 + \frac{2r^4}{r^2 - e^2} = \frac{r^4}{r^2 - e^2} \cdot \left(\frac{e^2}{r^2 - e^2} + 2 \right).$$

Uma vez que $\frac{r^4}{r^2 - e^2} \cdot \left(\frac{e^2}{r^2 - e^2} + 2 \right)$ é uma quantidade que depende apenas de r , raio do círculo inscrito no quadrilátero ABCD, e de e , distância do ponto E de encontro de suas diagonais ao centro I desse círculo (incentro), isso mostra que esse valor independe da posição do vértice A, e seria o mesmo se partíssemos de B, C ou D (ou seja, se calculássemos KB^2 , KC^2 ou KD^2 chegaríamos do mesmo modo a $\frac{r^4}{r^2 - e^2} \cdot \left(\frac{e^2}{r^2 - e^2} + 2 \right)$). Deste modo, $KA = KB = KC = KD$. Logo K equidista dos vértices de ABCD, ou seja, é na verdade seu circuncentro, isto é, $K \equiv O$. Portanto O se encontra no prolongamento de EI, provando o alinhamento desses três pontos.

3.5 Métodos para a construção de quadriláteros bicêntricos

Nesse tópico mostramos quatro modos diferentes de construir um quadrilátero bicíclico.

3.5.1 Utilizando ferramentas de Desenho Geométrico Plano (régua e compasso)

Utilizamos a **Fórmula de Fuss**, obtida em (3.6). Mostramos o caso mais fácil, pois examinando tal expressão vemos que isolar r é muito simples. Ou seja, dados R e k , descrevemos os passos a seguir para encontrar o valor de r . O objetivo é traçar quadrilátero bicêntrico o mais genérico possível. De (3.6): $2r^2 = \frac{(R^2 - k^2)^2}{R^2 + k^2}$, ou seja:

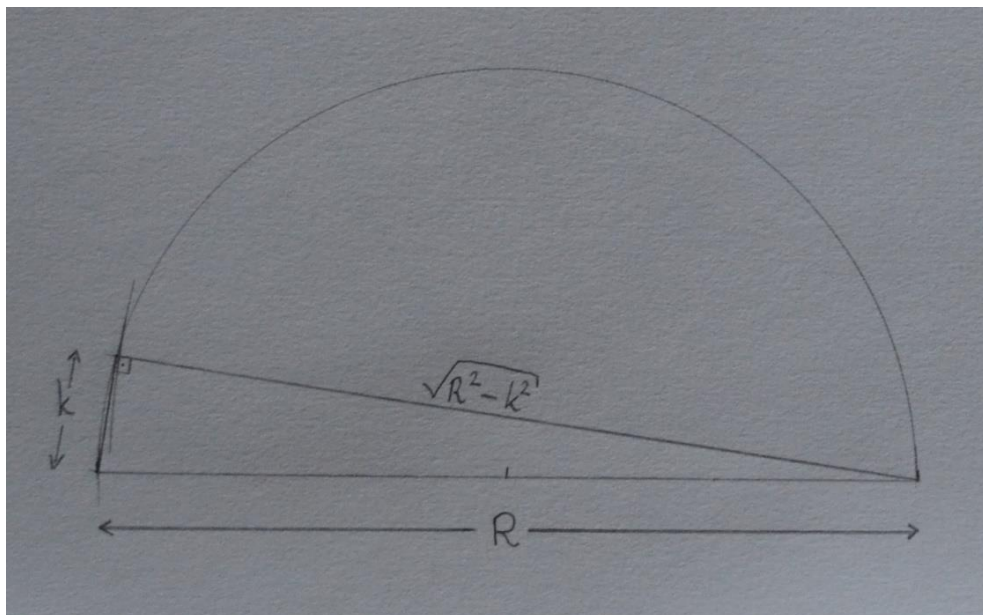
$$(r \cdot \sqrt{2})^2 = \frac{(R^2 - k^2)^2}{R^2 + k^2} \Rightarrow r \cdot \sqrt{2} = \frac{R^2 - k^2}{\sqrt{R^2 + k^2}} \Rightarrow \frac{r \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{R^2 - k^2}} = \frac{\sqrt{R^2 - k^2}}{\sqrt{R^2 + k^2}} \therefore r = \frac{(r \cdot \sqrt{2})^2}{2}.$$

Ora, todos esses passos têm construção relativamente fácil. Vamos obter:

- a) $\sqrt{R^2 - k^2}$: é o cateto do triângulo retângulo de hipotenusa e outro cateto iguais a R e k ;
- b) $\sqrt{R^2 + k^2}$: é a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos iguais a R e k ;
- c) $r \cdot \sqrt{2}$: é o primeiro antecedente da proporção $r \cdot \sqrt{2} : \sqrt{R^2 - k^2} :: \sqrt{R^2 - k^2} : \sqrt{R^2 + k^2}$;
- d) r : é o cateto do triângulo retângulo isósceles cuja hipotenusa vale $r \cdot \sqrt{2}$.

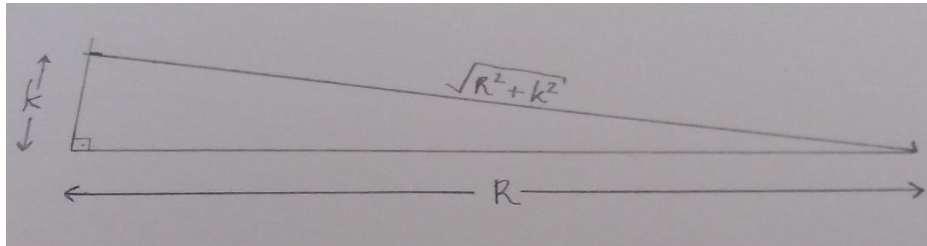
Assim, a) construímos arco de diâmetro R , marcamos a partir de uma de suas extremidades comprimento igual a k , obtendo, como comprimento do segmento de reta que une essa marcação à outra extremidade do diâmetro, o valor $\sqrt{R^2 - k^2}$ (figura 34);

Figura 34 – Obtenção de $\sqrt{R^2 - k^2}$ a partir de R e k .



b) marcamos, na perpendicular a segmento de medida R , por uma de suas extremidades, um comprimento igual a k , obtendo, como comprimento do segmento de reta que une a extremidade livre da perpendicular à extremidade livre do segmento, o valor $\sqrt{R^2 + k^2}$ (figura 35);

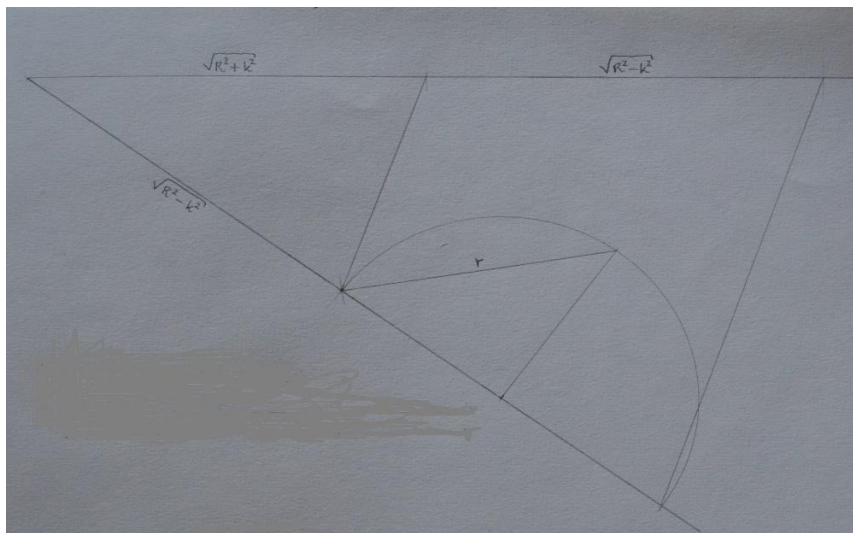
Figura 35 – Obtenção de $\sqrt{R^2 + k^2}$ a partir de R e k .



Fonte: Autor, 2017

c) e d) construímos duas retas concorrentes, marcando segmentos de reta de medidas $\sqrt{R^2 + k^2}$ e $\sqrt{R^2 - k^2}$, em uma, e $\sqrt{R^2 - k^2}$ na outra; traçamos segmento de reta unindo as segundas extremidades (as que não são coincidentes) das primeiras marcações em cada uma das retas, e então paralela a esse último segmento, pela segunda extremidade da segunda marcação. Esse procedimento garante que o segmento de medida x obtido, na segunda reta, atende a proporção $x : \sqrt{R^2 - k^2} :: \sqrt{R^2 - k^2} : \sqrt{R^2 + k^2}$, e sendo assim $r \cdot \sqrt{2} = x$; basta traçar arco de diâmetro $r \cdot \sqrt{2}$ e cortá-lo pela mediatriz do diâmetro, obtendo o segmento de medida r (figura 36).

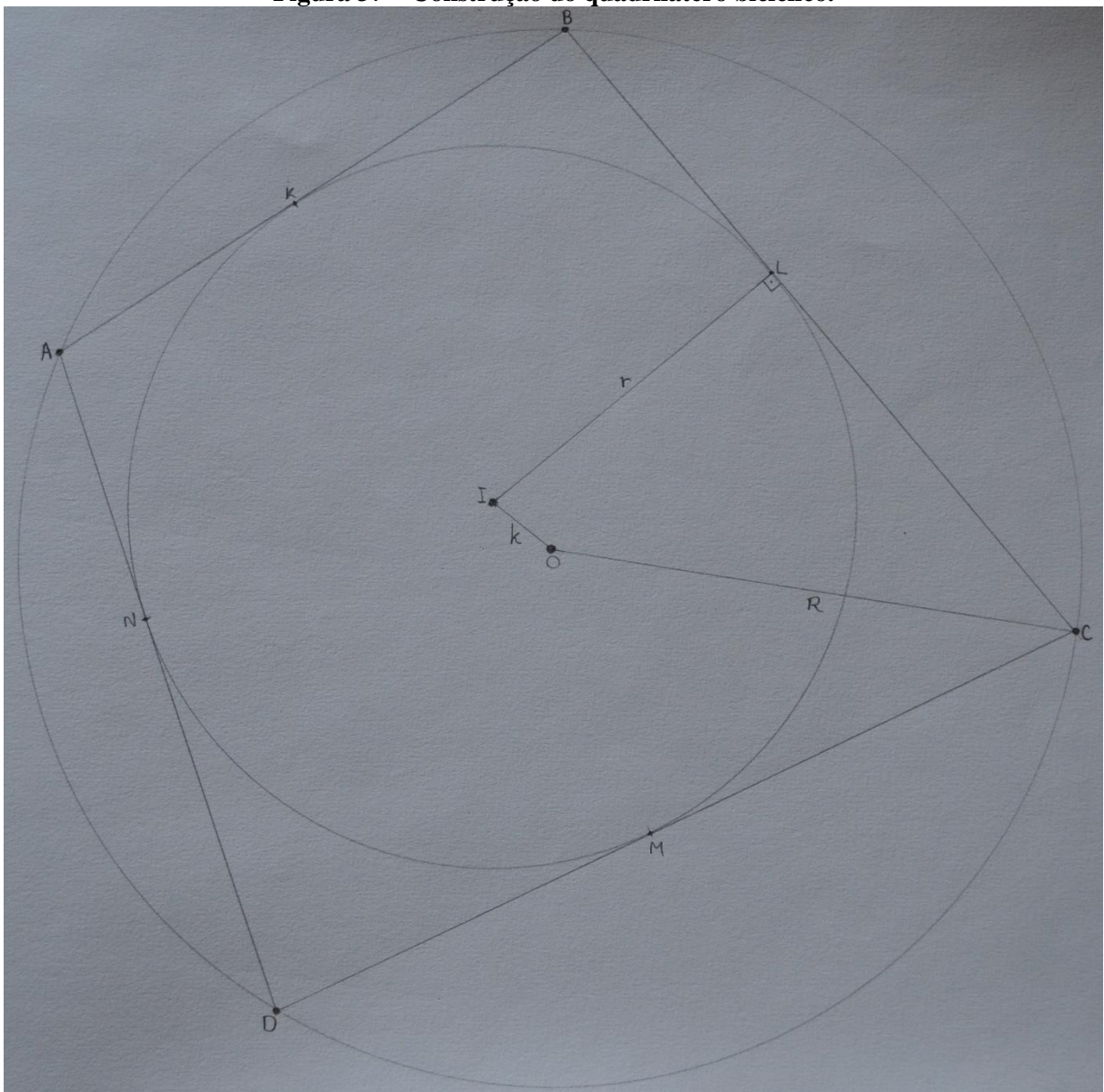
Figura 36 – Obtenção de $r \cdot \sqrt{2}$ a partir de $\sqrt{R^2 - k^2}$ e $\sqrt{R^2 + k^2}$.



Fonte: Autor, 2017

Uma vez que se tenha determinado a medida de r , traçamos, com centro em certo ponto O , um círculo de raio R , marcamos um ponto I arbitrário que diste k do ponto O , e com centro nesse ponto I um segundo círculo de centro r . Partindo de qualquer ponto A da circunferência do círculo exterior e maior, traçamos duas tangentes ao círculo interior e menor, que interceptam a circunferência maior em D e B . As tangentes ao círculo menor traçadas a partir desses dois pontos cortam o círculo maior no mesmo ponto, C , nos permitindo obter o quadrilátero bicêntrico $ABCD$ (figura 37).

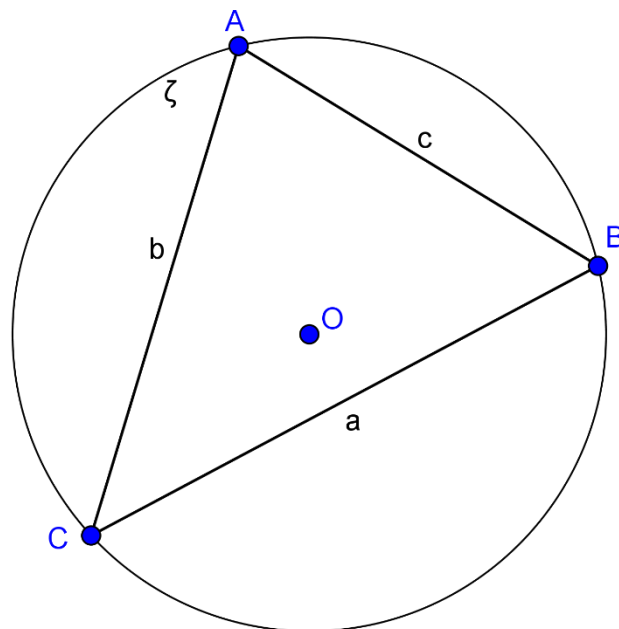
Figura 37 – Construção do quadrilátero bicíclico.



3.5.2 A partir de um triângulo e seu círculo circunscrito

Esse modo de determinação de um quadrilátero bicêntrico é muito útil porque torna claro que é sempre possível obter um quadrilátero bicíclico a partir de um triângulo qualquer. Vamos ilustrar o procedimento também em etapas, de forma sequencial, por meio das figuras 38 a 42. Primeiramente, temos um triângulo ABC e seu círculo circunscrito ζ de centro O.

Figura 38 – Ponto de partida: triângulo e círculo circunscrito.

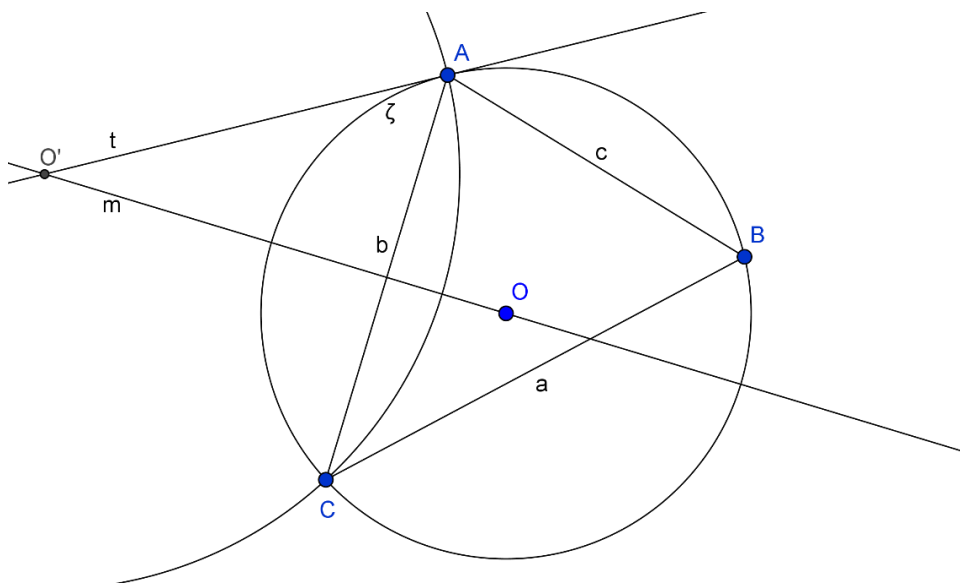


Fonte: Autor, 2017

O que vamos fazer é determinar o incentro I do quadrilátero bicêntrico ABCD. Note que desejamos que o ponto D se situe entre C e A, ou seja, no menor dos arcos determinados por esses dois pontos sobre o círculo ζ . Ora, imaginando o quadrilátero “pronto”, temos que AICD também é um quadrilátero, tendo portanto por soma dos seus ângulos internos 360° . Como AI é bissetriz do ângulo \widehat{A} e CI é bissetriz do ângulo \widehat{C} do quadrilátero ABCD (quando terminada a sua construção, naturalmente!), o fato de que ABCD é cíclico implica em que $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$, obtida de (1). Logo, $\widehat{DAI} + \widehat{ICD} = \frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} = 90^\circ$, e, por conseguinte, $\widehat{AIC} = 270^\circ - \widehat{D} = 270^\circ - (180^\circ - \widehat{B}) = 270^\circ - 180^\circ + \widehat{B} = 90^\circ + \widehat{B}$.

Desta forma, um dos lugares geométricos do incentro I do quadrilátero $ABCD$ é um arco capaz de $90^\circ + \widehat{B}$, construído sobre o segmento \overline{AC} . A figura 39 ilustra o procedimento de obtenção de tal arco capaz, no software Geogebra: traça-se, a partir de A , a tangente t ao círculo ζ , uma vez que, como \widehat{B} é ângulo inscrito relativo ao arco \widehat{AC} , essa tangente faz com o segmento \overline{AC} o ângulo \widehat{B} desejado. Basta agora obter a mediatriz m de \overline{AC} para, interceptando as duas retas recém construídas, determinar o centro O' do arco capaz requerido.

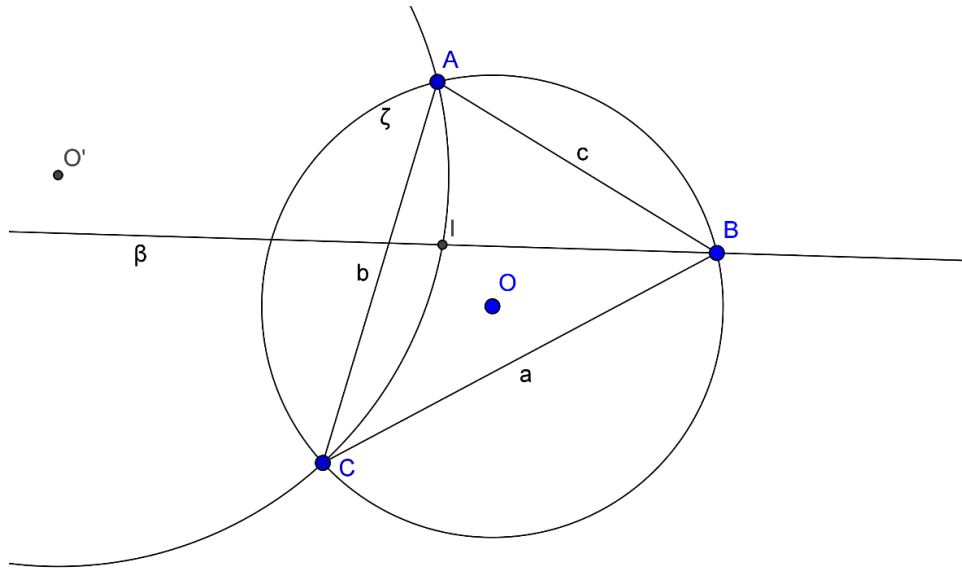
Figura 39 – Arco capaz de $90^\circ + \widehat{B}$ sobre o segmento \overline{AC} .



Fonte: Autor, 2017

Traçamos agora a bissetriz de \widehat{B} , que corta o arco capaz no ponto I , como indica a figura 40.

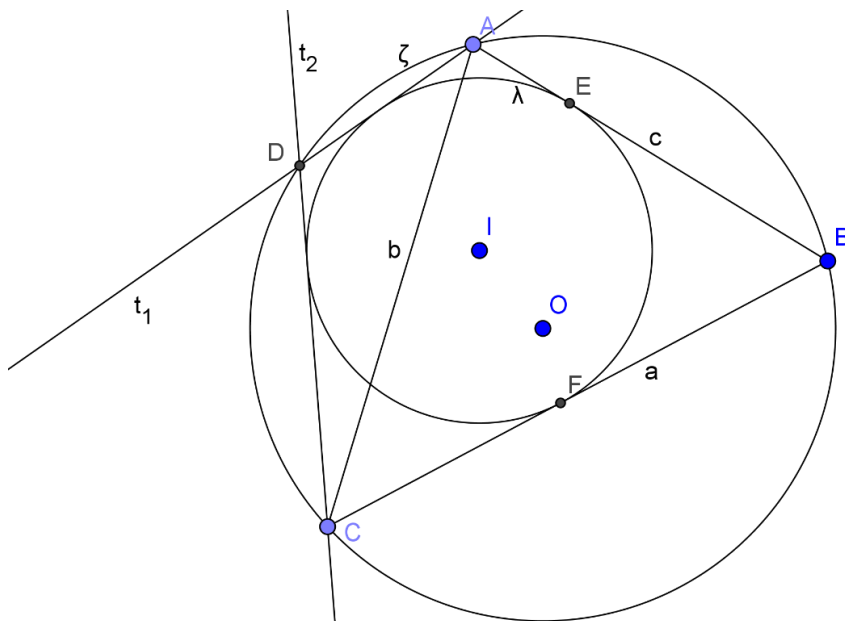
Figura 40 – Bissetriz do ângulo \widehat{B} , que corta o arco capaz no ponto I.



Fonte: Autor, 2017

A perpendicular, traçada do incentro I a um dos lados, AB, determina sobre ele o ponto E e o raio do círculo inscrito λ em ABCD. Traça-se então sua circunferência e, a partir de A ou C, reta t_1 ou t_2 tangente a ele, que intercepta o círculo ζ no vértice D, conforme a figura 41.

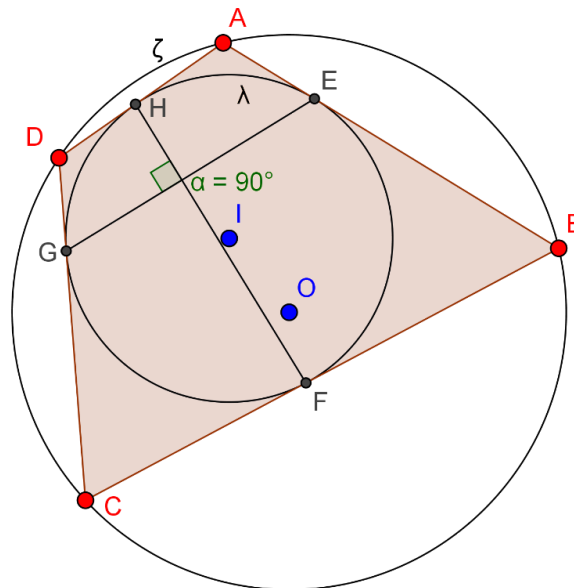
Figura 41 – Círculo λ e tangente por A ou C que corta o círculo maior em D.



Fonte: Autor, 2017

A figura 42 mostra tudo pronto: quadrilátero ABCD e círculos inscrito e circunscrito.

Figura 42 – O quadrilátero bicêntrico ABCD, pronto.

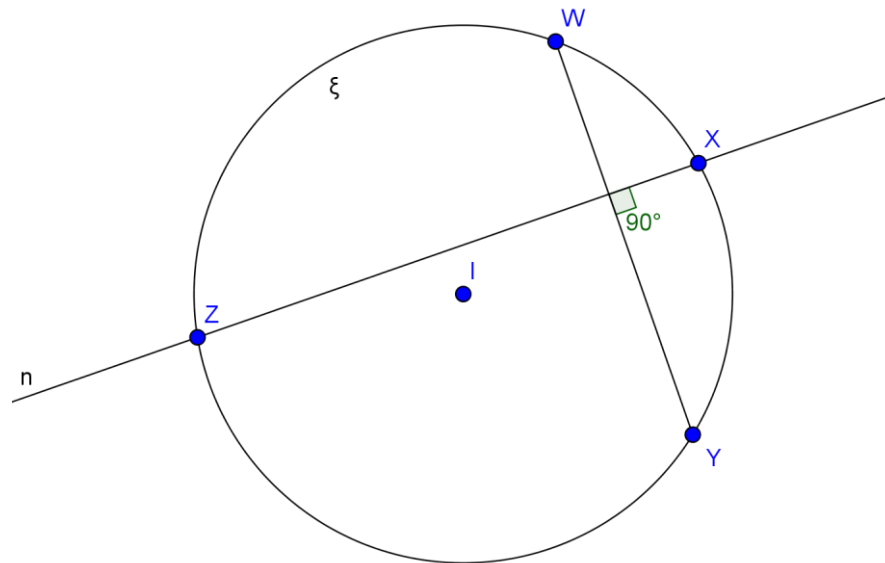


Fonte: Autor, 2017

3.5.3 A partir de duas cordas perpendiculares

Outra propriedade dos quadriláteros bicêntricos é a de que as cordas subtendidas pelos segmentos de reta que unem os pontos de tangência, ao círculo inscrito, dos dois pares de lados opostos do quadrilátero, se cortam segundo um ângulo reto. Isto é melhor entendido voltando à figura 42: o ângulo α , formado por \overline{EG} e \overline{FH} , é de 90° , como provamos no capítulo anterior. As figuras 43 a 45 mostram o passo a passo dessa terceira forma de obtenção de quadriláteros bicíclicos. Marcamos dois pontos W e Y na circunferência de um círculo ξ de centro em I, traçando então perpendicular à corda \overline{WY} , que corta a circunferência em X e Z (figura 43).

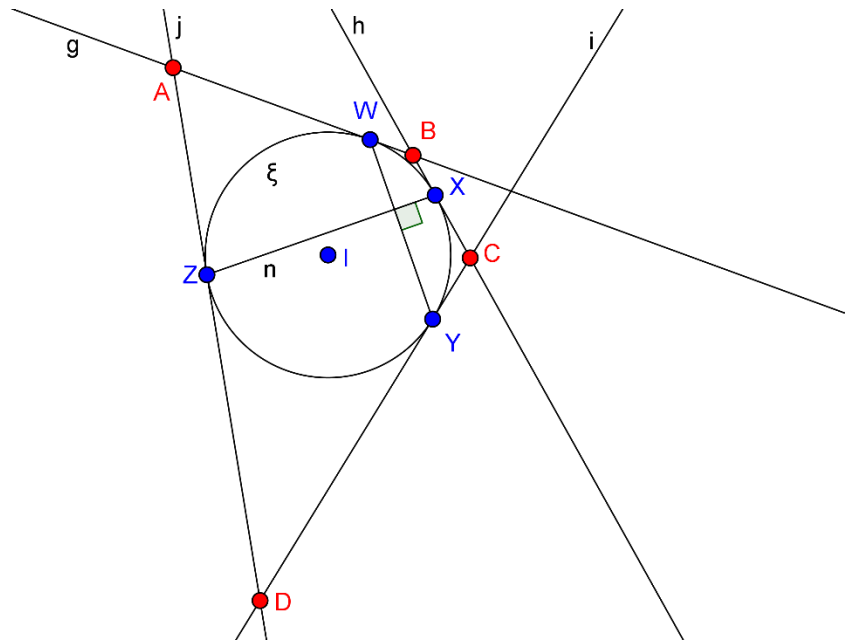
Figura 43 – Ponto de partida: duas cordas perpendiculares de um círculo, WY e XZ.



Fonte: Autor, 2017

Obtemos agora as quatro tangentes g, h, i e j ao círculo, pelos pontos de contato W, X, Y e Z . As quatro interseções de tangentes consecutivas determinam os quatro vértices A, B, C e D . Se unirmos tais pontos, nessa ordem, o que temos é um quadrilátero que, além de tangencial (afinal seus quatro lados tangenciam o círculo ξ , por construção), é também cíclico (conforme a figura 44).

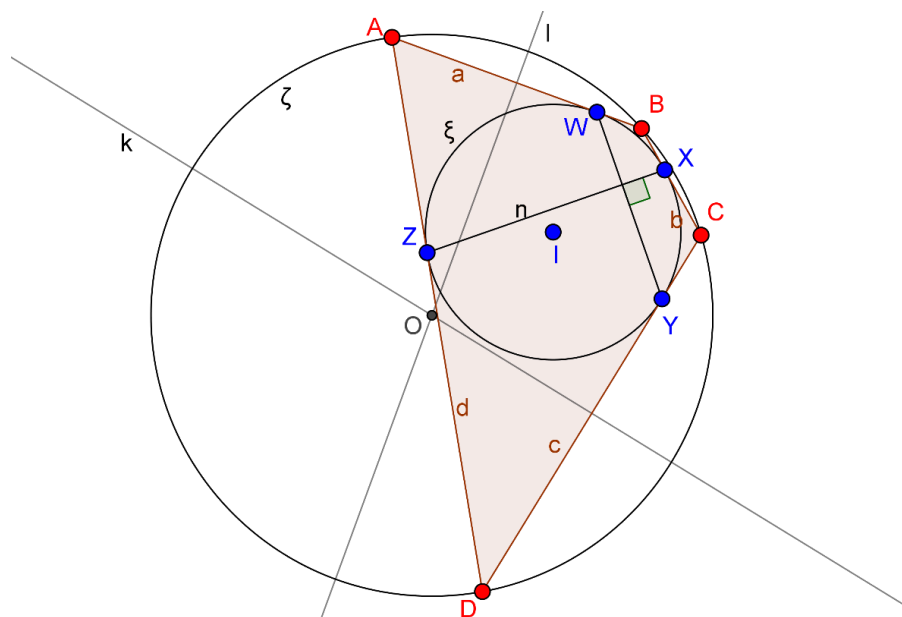
Figura 44 – Tangentes pelos pontos W, X, Y e Z se interceptam em A, B, C e D.



Fonte: Autor, 2017

A afirmação se sustenta na propriedade enunciada em (3.3) e demonstrada à página 53: um quadrilátero tangencial é também cíclico se e somente se $\overline{WY} \perp \overline{XZ}$. A figura 45 dá o quadrilátero ABCD pronto.

Figura 45 – O quadrilátero bicíclico ABCD e seus círculos inscrito e circunscrito.

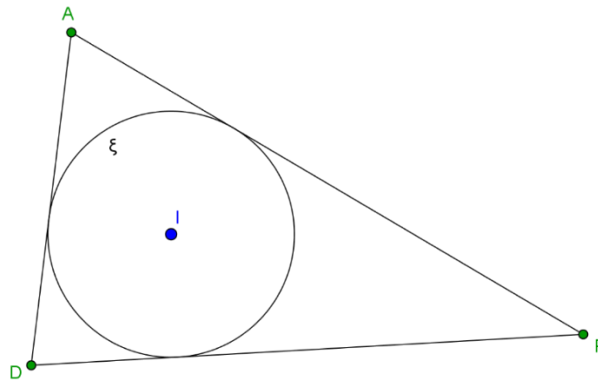


Fonte: Autor, 2017

3.5.4 A partir de um triângulo e seu círculo inscrito

Essa determinação de quadrilátero bicêntrico também parte de um triângulo. Usamos as figuras de 46 a 49. Temos o triângulo APD e seu círculo inscrito ξ de centro em I.

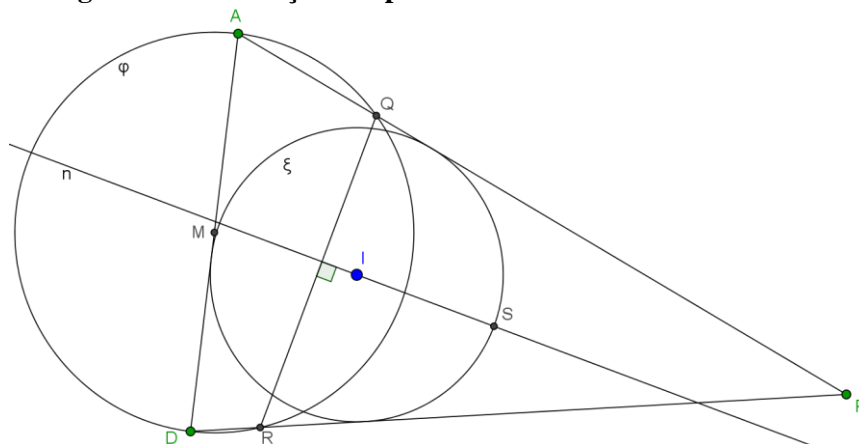
Figura 46 – Ponto de partida: triângulo e círculo inscrito.



Fonte: Autor, 2017

Vamos marcar os pés das alturas relativas aos lados AP e PD, respectivamente, nos pontos Q e R. Isto pode ser feito, por exemplo, obtendo o semicírculo de diâmetro AD e o interceptando com cada um daqueles lados, uma vez que todo ângulo inscrito em uma circunferência relativo a arco de 180° é reto. Assim, o que fazemos é traçar, com centro em M, ponto médio de AD, um círculo φ de raio AM (= MD), que vai cortar AP e PD em Q e R.

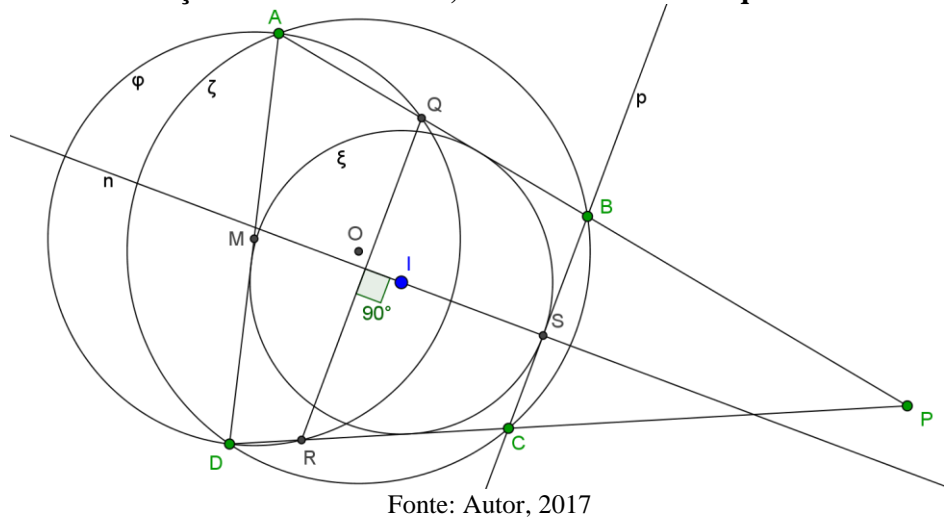
Figura 47 – Marcação dos pés das alturas relativas a AP e PD.



Fonte: Autor, 2017

Assinalados os pontos Q e R nos lados AP e PD, marcamos segmento BC tal que $B \in AP$, $C \in PD$, BC tangencie o círculo ξ e seja paralelo a QR. O quadrilátero ABCD é bicêntrico.

Figura 48 – Obtenção dos vértices B e C, formando com A e D quadrilátero bicêntrico.



Fonte: Autor, 2017

Vamos provar isto. Por construção temos $AR \perp PD$ e $DQ \perp AP$. Como a área do triângulo é o produto de qualquer um dos seus lados pela correspondente altura, isto leva a $AR \cdot PD = PA \cdot DQ \Rightarrow \frac{DQ}{AR} = \frac{PD}{PA}$.

Além disso, a tangente trigonométrica do ângulo formado pelas retas que concorrem em P é dada pela razão entre os catetos oposto e adjacente nos triângulos retângulos PQD e PRA:

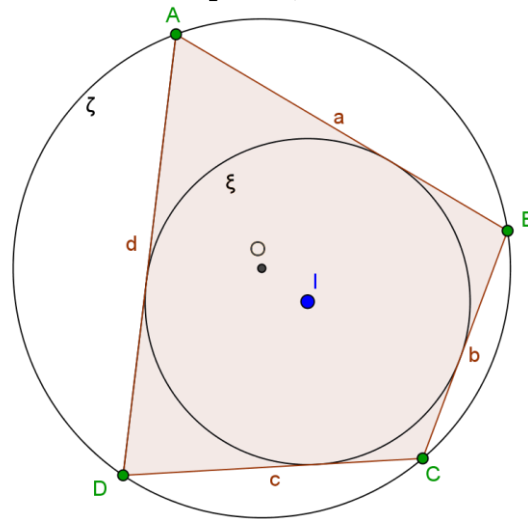
$$\frac{DQ}{PQ} = \frac{AR}{PR} \Rightarrow \frac{DQ}{AR} = \frac{PQ}{PR}.$$

Então, as duas proporções que montamos nos dão:

$$\frac{PQ}{PR} = \frac{PD}{PA} \Rightarrow \frac{PQ}{PD} = \frac{PR}{PA}.$$

Como o ângulo em P é comum aos dois, podemos agora concluir que são semelhantes os triângulos PQR e PDA. Como BC é um segmento de reta paralelo a QR, por construção, são também necessariamente semelhantes os triângulos PBC e PDA. Daí $\widehat{PBC} = \widehat{PDA}$ e $\widehat{PCB} = \widehat{PAD} \Rightarrow \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{PBC} = 180^\circ - \widehat{PDA} = 180^\circ - \widehat{CDA}$, e também $\widehat{DCB} = 180^\circ - \widehat{PCB} = 180^\circ - \widehat{PAD} = 180^\circ - \widehat{BAD}$. Desta forma, no quadrilátero ABCD, os ângulos opostos são suplementares, ou seja, ele é cíclico, logo bicêntrico (já que foi construído tangencial ao círculo ξ). Basta traçar as mediatrizes de dois lados, interceptando-as no ponto O, e o círculo de centro nele e raio suficiente para alcançar um dos pontos também passa pelos outros três (figura 49).

Figura 49 – Quadrilátero ABCD pronto, com círculos inscrito e circunscrito.

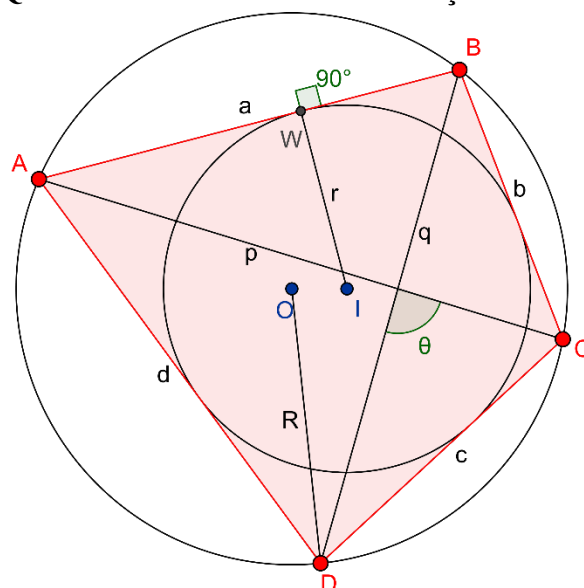


Fonte: Autor, 2017

3.6 Cálculo da área do quadrilátero bicêntrico em função dos raios dos círculos inscrito e circunscrito e do ângulo formado por suas diagonais

Sejam ABCD um quadrilátero bicêntrico de lados: $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$, e diagonais $p = AC$, $q = BD$, sendo ainda θ o ângulo entre elas, $2s = a + b + c + d$ seu perímetro, K sua área, e r e R os raios respectivos dos círculos inscrito e circunscrito (figura 50).

Figura 50 - Quadrilátero bicêntrico com marcação de seus elementos.



Fonte: Autor, 2017

Por ser quadrilátero bicêntrico, ABCD é um quadrilátero:

$$\text{a) tangencial} \Rightarrow a + c = b + d = s; \quad (3.14)$$

$$\text{b) cíclico} \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ, p \cdot q = a \cdot c + b \cdot d \text{ (Teorema de Ptolomeu)}. \quad (3.15)$$

Da Lei dos Senos aplicada aos triângulos em que cada uma das diagonais divide ABCD, temos:

$$p = 2R \cdot \widehat{\text{sen}} \widehat{B} \quad (= 2R \cdot \widehat{\text{sen}} \widehat{D}) \quad (3.16)$$

e

$$q = 2R \cdot \widehat{\text{sen}} \widehat{A} \quad (= 2R \cdot \widehat{\text{sen}} \widehat{C}). \quad (3.17)$$

Ora, a área de ABCD pode ser imaginada como a soma das áreas dos quatro triângulos em que as diagonais o dividem, e pensando nas expressões dessas quatro áreas como semiproductos de segmentos das diagonais p e q pelo seno de θ , obtemos:

$$K = \frac{1}{2} \cdot (p \cdot q \cdot \widehat{\text{sen}} \theta) \quad (3.18)$$

e, de (3.16) e (3.17), vem:

$$K = 2R^2 \cdot \widehat{\text{sen}} \widehat{A} \cdot \widehat{\text{sen}} \widehat{B} \cdot \widehat{\text{sen}} \theta. \quad (3.19)$$

Novamente, utilizando o fato de que cada uma das diagonais p e q divide ABCD em dois triângulos (a saber, respectivamente ABC e ADC, e BAD e BCD), temos também:

$$K = \frac{abp}{4R} + \frac{cdp}{4R} = \frac{bcq}{4R} + \frac{daq}{4R} \text{ (pois R é raio do círculo circunscrito aos quatro triângulos).}$$

$$\text{Logo, } p = \frac{4R}{ab + cd} K \text{ e } q = \frac{4R}{ad + bc} K, \text{ e de (3.15): } (4R \cdot K)^2 = (ab + cd) \cdot (ad + bc) \cdot (ac + bd)$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{4K} \sqrt{(ab + cd) \cdot (ad + bc) \cdot (ac + bd)}. \quad (3.20)$$

Mas

$$\widehat{\text{sen}} \widehat{A} = \widehat{\text{sen}} \widehat{C} = \frac{2K}{ad + bc} \quad (3.21)$$

(área em função do seno de um dos ângulos internos aplicada aos triângulos BAD e BCD) e, similarmente,

$$\widehat{\text{sen}} \widehat{B} = \widehat{\text{sen}} \widehat{D} = \frac{2K}{ab + cd}. \quad (3.22)$$

Então,

$$\frac{\sqrt{1 + \widehat{\text{sen}} \widehat{A} \cdot \widehat{\text{sen}} \widehat{B}}}{\widehat{\text{sen}} \widehat{A} \cdot \widehat{\text{sen}} \widehat{B}} = \frac{\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)+4K^2}}{\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)}} \cdot \frac{(ab+cd)(ad+bc)}{4K^2} = \frac{\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)}}{4K^2} \cdot \sqrt{4K^2 + (ad+bc)(ab+cd)}. \quad (3.23)$$

Mas

$$a + c = b + d = s \text{ (3.14) e } K = \sqrt{abcd} \Rightarrow K^2 = abcd \text{ (Fórmula de Brahmagupta).}$$

De volta a (3.23):

$$\sqrt{4K^2 + (ad + bc)(ab + cd)} = \sqrt{4abcd + a^2bd + acd^2 + ab^2c + bc^2d} =$$

$$\begin{aligned} \sqrt{bd.(a^2 + 2ac + c^2) + ac.(b^2 + 2bd + d^2)} &= \sqrt{bd.(a + c)^2 + ac.(b + d)^2} = \\ \sqrt{bd.s^2 + ac.s^2} &= s.\sqrt{ac + bd}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

De (3.23) e (3.24),

$$\frac{\sqrt{1+\text{sen } \hat{A} . \text{sen } \hat{B}}}{\text{sen } \hat{A} . \text{sen } \hat{B}} = \frac{\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)}}{4K^2} . s . \sqrt{ac + bd}. \quad (3.25)$$

Como a área de um polígono convexo tangencial é o produto do semiperímetro pelo raio do círculo inscrito (já que pode ser decomposto em triângulos cujas bases são seus lados, tendo todos o raio do círculo inscrito como altura), temos que

$$K = s.r \Rightarrow s = \frac{K}{r}. \quad (3.26)$$

Em (3.25),

$$\frac{\sqrt{1+\text{sen } \hat{A} . \text{sen } \hat{B}}}{\text{sen } \hat{A} . \text{sen } \hat{B}} = \frac{\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)}}{4K^2} . \frac{K}{r} . \sqrt{ac + bd} = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)}}{4K.r}. \quad (3.27)$$

Porém, (3.20) nos dá $\sqrt{(ab + cd) . (ad + bc) . (ac + bd)} = 4K.R$. Portanto (3.25) se torna

$$\frac{\sqrt{1+\text{sen } \hat{A} . \text{sen } \hat{B}}}{\text{sen } \hat{A} . \text{sen } \hat{B}} = \frac{4K.R}{4K.r} = \frac{R}{r}.$$

$$\text{Elevando ao quadrado: } \frac{1 + \text{sen } \hat{A} . \text{sen } \hat{B}}{\text{sen}^2 \hat{A} . \text{sen}^2 \hat{B}} = \left(\frac{R}{r} \right)^2.$$

Então,

$$R^2 . (\text{sen } \hat{A} . \text{sen } \hat{B})^2 - r^2 . (\text{sen } \hat{A} . \text{sen } \hat{B}) - r^2 = 0.$$

Resolvendo esta equação do segundo grau no produto de senos:

$$\text{sen } \hat{A} . \text{sen } \hat{B} = \frac{r^2 + r.\sqrt{r^2 + 4R^2}}{2R^2}. \quad (3.28)$$

Note-se que não aventamos a hipótese de utilizar o sinal de menos na frente da raiz quadrada, porque, sendo ângulos de um quadrilátero, A e B pertencem ao intervalo $(0, \pi)$, tendo portanto senos não negativos. E

$$4R^2 > 0 \Rightarrow r^2 + 4R^2 > r^2 \Rightarrow r . \sqrt{r^2 + 4R^2} > r^2 .$$

Voltando agora a (3.19),

$$K = 2R^2 . \text{sen } \hat{A} . \text{sen } \hat{B} . \text{sen } \theta.$$

E, substituindo $(\text{sen } \hat{A} . \text{sen } \hat{B})$ pelo que obtivemos em (3.28),

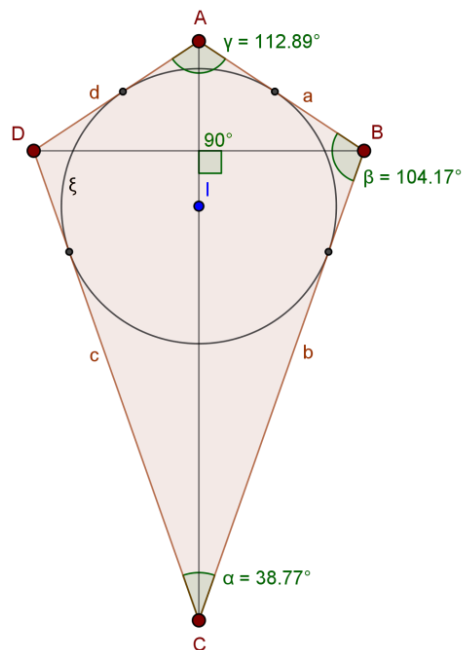
$$K = r . (r + \sqrt{r^2 + 4R^2}) . \text{sen } \theta, \quad (3.29)$$

expressão que dá a área do quadrilátero bicêntrico genérico de raios R e r, no qual as diagonais $p = AC$ e $q = BD$ se interceptam segundo um ângulo θ .

3.6.1 Área Máxima de um Quadrilátero Bicêntrico – Pipa Reta

Pipas são figuras geométricas pouco estudadas no Brasil, possivelmente inclusive como consequência de não constituírem, ao menos nas classificações dos quadriláteros com que se lida comumente aqui, uma categoria específica, como vem a ser o caso de paralelogramos e trapézios. Nos detemos mais sobre tal fato em um capítulo posterior. Uma pipa (“kite”, em inglês) se caracteriza por possuir dois pares de lados consecutivos congruentes. É importante notar que qualquer pipa é um quadrilátero tangencial, uma vez que por definição satisfaz a condição necessária e suficiente para que isto se dê, ou seja, que as somas das medidas dos lados opostos sejam iguais. Além disso, os dois ângulos (opostos) formados por lados de valores distintos são sempre congruentes, dada a simetria desse quadrilátero, que pode ser observada na figura 51. Portanto, se tais ângulos são retos está assegurada a soma, no valor de dois retos, dos pares de ângulos opostos, que é a condição necessária e suficiente para que qualquer quadrilátero seja cíclico. Isto equivale a dizer que pipas retas são sempre bicêntricas. Por último, ressaltamos que, assim como nos losangos, a existência de um eixo de simetria que passa por dois dos vértices das pipas implica em que suas diagonais sejam sempre perpendiculares.

Figura 51 – O quadrilátero pipa.



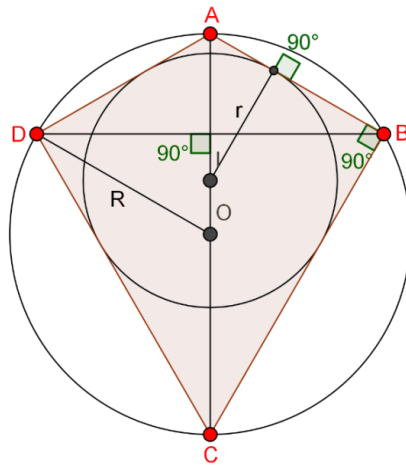
Fonte: Autor, 2017

Ora, como $\sin 90^\circ = 1$, o maior valor possível da função seno, isto equivale a dizer, graças à expressão obtida em (3.29), que a pipa reta (figura 52) é o maior quadrilátero bicêntrico possível que tem círculos inscrito e circunscrito de raios r e R que atendam a condição dada por (3.6).

Seja então $K_{\text{pipa-reta}}$ = área da pipa reta. Temos, recorrendo ao raciocínio do parágrafo anterior, que $K_{\text{pipa-reta}} = r \cdot (r + \sqrt{r^2 + 4R^2})$. Assim, chamando de $K_{\text{máx}}$ a área máxima de um quadrilátero bicêntrico com raios r e R dos círculo inscrito e circunscrito:

$$K_{\text{máx}} = K_{\text{pipa-reta}} = r \cdot (r + \sqrt{r^2 + 4R^2}). \quad (3.30)$$

Figura 52 - Pipa reta bicêntrica.



Fonte: Autor, 2017

3.6.2 Área Mínima de um Quadrilátero Bicêntrico – Trapézio Isósceles

Trapézios isósceles, que são quadriláteros sempre cíclicos porque têm ângulos opostos suplementares, podem ser também tangenciais – e portanto bicêntricos – desde que seus lados congruentes e não paralelos tenham por valor a média aritmética das bases (e portanto a altura seja igual à média geométrica destes dois lados do trapézio). Vamos mostrar que isso é verdade: sejam a e c as bases e $b = d$ os lados não paralelos de um trapézio isósceles. Os ângulos das bases são congruentes, e os ângulos adjacentes a cada um dos lados não paralelos são suplementares, então os ângulos opostos são também suplementares, o que garante que todo trapézio isósceles seja cíclico. Para ser tangencial, devemos ter $a + c = b + d \Rightarrow b = d = \frac{a+c}{2}$, o que implica que os lados não paralelos tenham por valor a média aritmética das bases.

Além disso a altura h é cateto de um triângulo retângulo em que a hipotenusa é o lado não paralelo, e o outro cateto é a semidiferença das bases. Sem perda de generalidades, sejam a e c os valores respectivos da menor e da maior base. Então $h^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{c-a}{2}\right)^2 = 4 \cdot \frac{a \cdot c}{4} = a \cdot c \Rightarrow h = \sqrt{a \cdot c}$, o que acarreta que a altura tenha por valor a média geométrica das bases.

Observemos portanto que trapézios bicíclicos têm em seus lados desiguais e em sua altura respectivamente as médias aritmética e geométrica de suas bases, algo bastante pitoresco.

Vamos provar agora que o trapézio isósceles (figura 53) satisfazendo a tais condições é sempre o menor quadrilátero bicêntrico possível. Não nos valeremos, todavia, da expressão em (3.29) para a tarefa, pois o ângulo entre as diagonais de um trapézio isósceles não pode ser obtido a priori, de forma genérica.

De (3.14) e (3.26) temos

$$K = r \cdot s = r \cdot (a + c) = r \cdot (b + d) \Rightarrow K^2 = r^2 \cdot (a + c) \cdot (b + d).$$

Usando (3.21) e (3.22),

$$K^2 = r^2 \cdot [(a \cdot d + b \cdot c) + (a \cdot b + c \cdot d)] = r^2 \cdot \left(\frac{2K}{\widehat{\text{sen}} \widehat{A}}\right) + r^2 \cdot \left(\frac{2K}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}}\right).$$

Então:

$$K = 2r^2 \cdot \left(\frac{1}{\widehat{\text{sen}} \widehat{A}} + \frac{1}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}}\right) = 2r^2 \cdot \left(\frac{\widehat{\text{sen}} \widehat{A} + \widehat{\text{sen}} \widehat{B}}{\widehat{\text{sen}} \widehat{A} \cdot \widehat{\text{sen}} \widehat{B}}\right). \quad (3.31)$$

Ora, sabemos que a média aritmética de dois números reais positivos é sempre maior que ou igual à sua média geométrica – só havendo igualdade se os dois números forem iguais. Daí,

$$\frac{\widehat{\text{sen}} \widehat{A} + \widehat{\text{sen}} \widehat{B}}{2} \geq \sqrt{\widehat{\text{sen}} \widehat{A} \cdot \widehat{\text{sen}} \widehat{B}} \Rightarrow \widehat{\text{sen}} \widehat{A} + \widehat{\text{sen}} \widehat{B} \geq 2 \cdot \sqrt{\widehat{\text{sen}} \widehat{A} \cdot \widehat{\text{sen}} \widehat{B}}$$

e, portanto, em (3.31):

$$K \geq 2r^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot \sqrt{\widehat{\text{sen}} \widehat{A} \cdot \widehat{\text{sen}} \widehat{B}}}{\widehat{\text{sen}} \widehat{A} \cdot \widehat{\text{sen}} \widehat{B}}\right) = 4r^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\widehat{\text{sen}} \widehat{A} \cdot \widehat{\text{sen}} \widehat{B}}}.$$

Desse modo, (3.28) nos dá

$$K \geq 4r^2 \cdot \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{r^2 + r \cdot \sqrt{r^2 + 4R^2}}}.$$

Multiplicando o lado direito por uma fração que equivale à unidade,

$$\sqrt{r \cdot \sqrt{r^2 + 4R^2} - r^2} / \sqrt{r \cdot \sqrt{r^2 + 4R^2} - r^2}, \text{ resulta que}$$

$$K \geq 4r^2 \cdot R\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{r \cdot \sqrt{r^2 + 4R^2} - r^2}}{\sqrt{r^2 \cdot (r^2 + 4R^2) - (r^2)^2}} = 4r^2 \cdot R\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{r \cdot \sqrt{r^2 + 4R^2} - r^2}}{\sqrt{4r^2 R^2}} = 4r^2 \cdot R\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{r \cdot \sqrt{r^2 + 4R^2} - r^2}}{2rR} =$$

$$2r \cdot \sqrt{2r \cdot (\sqrt{r^2 + 4R^2} - r)}.$$

Logo, a área mínima de um quadrilátero bicêntrico com raios dos círculos inscrito e circunscrito dados por r e R é dada por

$$2r \cdot \sqrt{2r \cdot (\sqrt{r^2 + 4R^2} - r)}. \quad (3.32)$$

Contudo, como o ponto de partida para esta conclusão foi a desigualdade das médias aritmética e geométrica dos senos de dois ângulos internos adjacentes do quadrilátero bicíclico genérico, e sabemos que essas médias só assumem o mesmo valor quando as duas quantidades são iguais, isto acarreta dizer que o valor mínimo da área, obtido na expressão acima, só vai se verificar quando tivermos

$$\widehat{A} = \widehat{B}.$$

Além disso, sabemos que, em um quadrilátero bicêntrico, os ângulos opostos têm senos iguais (conforme escrevemos em (3.21) e (3.22), como consequência imediata de (3.15)), pois estes ângulos são suplementares. E, para que os senos de dois ângulos adjacentes sejam iguais, é necessário e suficiente que tais ângulos sejam congruentes ou suplementares.

Vamos então trabalhar com as duas hipóteses em que se verifica que $\widehat{A} = \widehat{B}$:

- (i) se \widehat{A} e \widehat{B} são congruentes, (3.15) implica que \widehat{C} e \widehat{D} também tenham o mesmo valor, já que os dois últimos são ângulos respectivamente suplementares dos dois primeiros;
- (ii) se \widehat{A} e \widehat{B} são suplementares, (3.15) implica que $\widehat{A} = \widehat{D}$ e $\widehat{B} = \widehat{C}$.

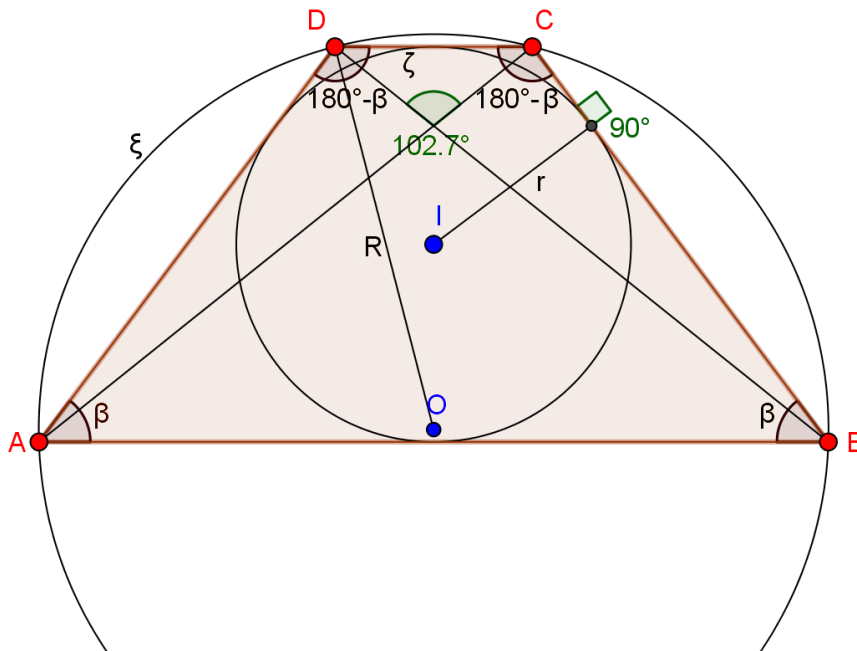
Em ambos os casos a conclusão irrefutável é a de que o polígono é um trapézio isósceles, que se caracteriza exatamente por ser o único quadrilátero com dois pares de ângulos iguais (e dois pares de ângulos suplementares) que pode ser cíclico – lembremos que paralelogramos também têm dois pares de ângulos, tanto congruentes como suplementares, mas nos paralelogramos os ângulos opostos são congruentes, e não suplementares, o que torna impossível que se os inscreva em um círculo, a não ser no caso especial do retângulo, que tem os quatro ângulos retos – porém retângulos não são tangenciais, como vimos anteriormente no início deste capítulo, à exceção dos quadrados, que também descartamos porque, tendo o ângulo entre as diagonais igual a um reto, não são quadriláteros bicêntricos de área mínima, devido a (3.29).

Seja então $K_{\text{trapézio}} =$ área do trapézio isósceles bicêntrico. Temos, nos valendo do raciocínio do parágrafo anterior, que $K_{\text{trapézio}} = 2r \cdot \sqrt{2r \cdot (\sqrt{r^2 + 4R^2} - r)}$.

Assim, chamando de $K_{\text{mín}}$ a área mínima de um quadrilátero bicêntrico com raios r e R dos círculo inscrito e circunscrito:

$$K_{\text{mín}} = K_{\text{trapézio}} = 2r \cdot \sqrt{2r \cdot (\sqrt{r^2 + 4R^2} - r)}. \quad (3.33)$$

Figura 53 - Trapézio isósceles bicêntrico.



Fonte: Autor, 2017

Ou seja, sendo K a área de um quadrilátero bicêntrico cujos círculos inscrito e circunscrito têm raios respectivamente iguais a r e R , vale sempre:

$$2r \cdot \sqrt{2r \cdot (\sqrt{r^2 + 4R^2} - r)} \leq K \leq r \cdot (r + \sqrt{r^2 + 4R^2}), \quad (3.34)$$

uma expressão que não é muito amigável quando se trata de termos uma boa ideia do quanto podem variar área e perímetro dos infinitos quadriláteros bicíclicos passíveis de construção, dados dois círculos que obedeçam à Fórmula de Fuss, que obtivemos em (3.6). Então nossa tarefa agora consiste em investigar essa variação: qual é o possível ganho máximo, de área e perímetro, quando comparamos todos os quadriláteros bicêntricos de uma configuração, ou seja, o quão maior é a pipa reta, quando comparada ao trapézio isósceles com que compartilha os círculos inscrito e circunscrito.

3.6.3 Comparação entre as áreas da pipa reta e do trapézio isósceles bicíclicos

É notório que, se dois quadriláteros têm o mesmo círculo inscrito, a razão entre seus perímetros é a mesma das suas áreas (uma vez que $S = p \cdot r$ em todo polígono circunscritível, com S , p e r sendo respectivamente: área, semiperímetro e raio do círculo inscrito).

Consideremos a figura 54, que mostra uma pipa reta ABCD e um trapézio isósceles EFGK bicêntricos. Na pipa destacamos apenas o ângulo agudo α formado pelos seus lados congruentes de maior comprimento. Já no trapézio temos destacados os elementos:

b' e b – bases maior e menor, respectivamente;

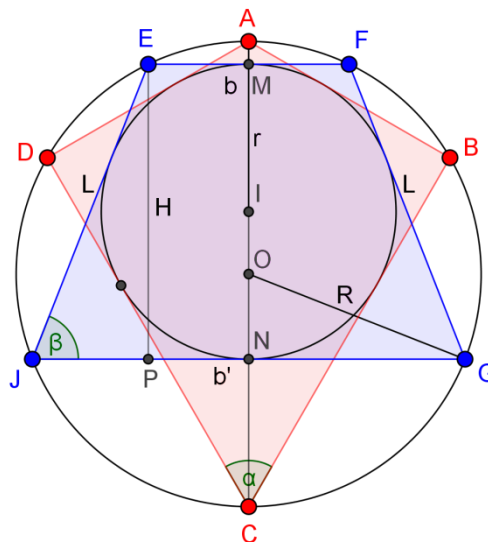
L – lados congruentes não paralelos;

H – altura;

β – ângulos da base maior com os lados desiguais.

Além disso, o incentro e o circuncentro de ambos os quadriláteros são os pontos I e O . Os círculos inscrito e circunscrito têm raios respectivamente iguais a r e R .

Figura 54 – Pipa reta e trapézio isósceles bicêntricos de mesmos círculos.



Fonte: Autor, 2017

Temos, em relação à pipa ABCD, que

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{IC} \text{ (a perpendicular a BC traçada a partir do incentro I é o próprio raio } r), \quad (3.35)$$

$$AB = 2R \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \text{ e } BC = 2R \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \text{ (o } \Delta ABC \text{ é retângulo no vértice B)}. \quad (3.36)$$

Além disso, BI é bissetriz do ângulo reto em B (incentro equidista dos lados AB e BC). Daí:

$$\frac{AI}{AB} = \frac{IC}{BC} = \frac{AI+IC}{AB+BC} = \frac{AC}{AB+BC} = \frac{2R}{2R \cdot (\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2})} \Rightarrow IC = 2R \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}} \text{ (de (3.36))}.$$

Então:

$$r = R \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}} \text{ (de (3.35))}. \quad (3.37)$$

Já para o trapézio temos:

$$r = \frac{H}{2} \text{ (altura é distância entre as bases, e também diâmetro do círculo inscrito).} \quad (3.38)$$

Outra relação importante, válida para qualquer trapézio isósceles bicêntrico e que estabelecemos em 3.6.2, expressa a altura desse quadrilátero como média geométrica de suas bases. Isto decorre do fato de que (aplicando o Teorema de Pitágoras ao ΔEPJ)

$$H^2 = L^2 - \frac{(b' - b)^2}{4} \text{ e}$$

$L = \frac{b' + b}{2}$ (sendo EFGJ quadrilátero circunscritível as somas de seus lados opostos devem ser iguais, segundo o Teorema de Pitot), o que leva a

$$H^2 = \left(\frac{b' + b}{2}\right)^2 - \frac{(b' - b)^2}{4} = 4 \cdot \frac{b' \cdot b}{4} = b' \cdot b. \quad (3.39)$$

Seja agora d a medida das diagonais do trapézio isósceles ($EG = FJ = d$). No ΔEJG temos:

$$d = 2R \cdot \text{sen } \beta \quad (3.40)$$

(Lei dos Senos, uma vez que tal triângulo está inscrito no círculo de raio R).

Também é verdade, pelo Teorema de Ptolomeu aplicado a quadriláteros inscritíveis, que:

$$d^2 = b' \cdot b + L^2 \Rightarrow d^2 = H^2 + L^2 \text{ (de (3.39)).} \quad (3.41)$$

Adicionalmente, no já referido ΔEPJ :

$$\text{sen } \beta = \frac{H}{L}. \quad (3.42)$$

$$\text{De (3.40) e (3.42), } \text{sen } \beta = \frac{d}{2R} = \frac{H}{L} \Rightarrow R = \frac{d \cdot L}{2H} = \frac{L}{2H} \sqrt{H^2 + L^2} \text{ (de (3.41)).} \quad (3.43)$$

Vamos agora encontrar o valor da razão $k = \frac{r}{R}$ para ambos os quadriláteros bicêntricos.

Ora, de (3.37) sabemos que, na pipa reta:

$$k = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Para encontrar k no trapézio, vamos dividir (3.38) por (3.43):

$$k = \frac{H^2}{L \cdot \sqrt{H^2 + L^2}}.$$

Invertendo as duas expressões para k e elevando-as ao quadrado para depois igualá-las:

$$\frac{L^2 \cdot (L^2 + H^2)}{H^4} = \frac{1 + \text{sen } \alpha}{\text{sen}^2 \alpha}, \text{ onde nos valemos do fato de que } \left(\text{sen } \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 = (1 + \text{sen } \alpha).$$

Rearrmando,

$$\frac{L^2}{H^2} \left(\frac{L^2}{H^2} + 1\right) = \frac{1}{\text{sen } \alpha} \left(\frac{1}{\text{sen } \alpha} + 1\right). \quad (3.44)$$

Vamos fazer: $u = \frac{L^2}{H^2}$ e $v = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$.

Ora, temos que:

$$u(u + 1) = v(v + 1) \Rightarrow u^2 - v^2 = v - u = -(u - v), \text{ isto é, } (u + v)(u - v) = -(u - v).$$

Aqui há então duas hipóteses. A primeira é que $u + v = -1$. Isto é impossível, pois leva a:

$$\frac{L^2}{H^2} + \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = -1.$$

Todavia, $\frac{L^2}{H^2}$ e $\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$ são ambos números estritamente positivos (pois α é menor que 180°).

Assim, a única possibilidade para a validade de (3.44) é $u = v$, que resulta em:

$$\frac{L^2}{H^2} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Voltando a (3.42) isso nos faz chegar a:

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}^2 \beta. \quad (3.45)$$

Mas a área da pipa é dada por

$$S_p = AB \cdot AC = (2R \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}) (2R \cdot \cos \frac{\alpha}{2}) = 2R^2 \cdot \operatorname{sen} \alpha, \text{ enquanto a área do trapézio é}$$

$$S_t = \left(\frac{b' + b}{2}\right) \cdot H = L \cdot H.$$

Então, para determinar a razão entre os perímetros e entre as áreas, basta encontrar o valor de

$$\frac{S_p}{S_t} = \frac{2R^2 \cdot \operatorname{sen} \alpha}{L \cdot H} = \frac{2R^2 \cdot \operatorname{sen} \alpha}{\frac{H^2}{\operatorname{sen} \beta}} \text{ (devido a (3.42))} =$$

$$\frac{2R^2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta}{H^2} = \frac{2R^2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta}{\frac{4R^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha}} \text{ (devido a (3.37) e (3.38))} =$$

$$\frac{\operatorname{sen} \beta \cdot (1 + \operatorname{sen} \alpha)}{2 \cdot \operatorname{sen} \alpha} = \frac{1 + \operatorname{sen}^2 \beta}{2 \cdot \operatorname{sen} \beta} \text{ (devido a (3.45)).} \quad (3.46)$$

Chegamos a interessante conclusão: a razão entre os perímetros (e também entre as áreas) de uma pipa reta e um trapézio isósceles, ambos bicíclicos de mesmos círculos, é função do ângulo agudo β que caracteriza o segundo (conforme a figura 54). E mais: o que obtivemos em (3.46) enfatiza conclusão anterior, de que a pipa reta é sempre maior (em termos de área e perímetro) que o trapézio isósceles bicêntrico que tem os mesmos círculo inscrito e circunscrito. Uma vez que $(1 - x)^2 > 0$ para qualquer número real não nulo x , temos:

$$(1 - x)^2 > 0 \Rightarrow 1 - 2x + x^2 > 0 \Rightarrow 1 + x^2 > 2x \Rightarrow \frac{1 + x^2}{2x} > 1 \text{ (se } x \text{ é estritamente positivo).}$$

Substituindo x nesta última expressão por $\operatorname{sen} \beta$ (válido porque $\operatorname{sen} \beta = \frac{H}{L} > 0$) obtemos:

$$\frac{1 + \operatorname{sen}^2 \beta}{2 \cdot \operatorname{sen} \beta} > 1, \text{ o que nos leva à conclusão de que } S_p > S_t.$$

Notemos que

$$0 < \operatorname{sen} \beta < 1, \text{ já que } 0 < \beta < 90^\circ \text{ (se ângulo reto o trapézio se degenera em um quadrado).}$$

Podemos calcular o valor da razão entre as áreas e perímetros máximos e mínimos dos quadriláteros bicêntricos passíveis de construção, dados dois círculos que atendem à Fórmula de Fuss, razão essa que chamamos de “ganho máximo” no final de 3.6.2. Sendo Ω o ganho máximo, como função de β este $\Omega(\beta)$ é dado por

$$\Omega(\beta) = \frac{S_p}{S_t} = \frac{1 + \text{sen}^2 \beta}{2 \cdot \text{sen} \beta}. \quad (3.47)$$

Examinamos o valor de Ω para diferentes possibilidades de medida do ângulo β na Tabela 1.

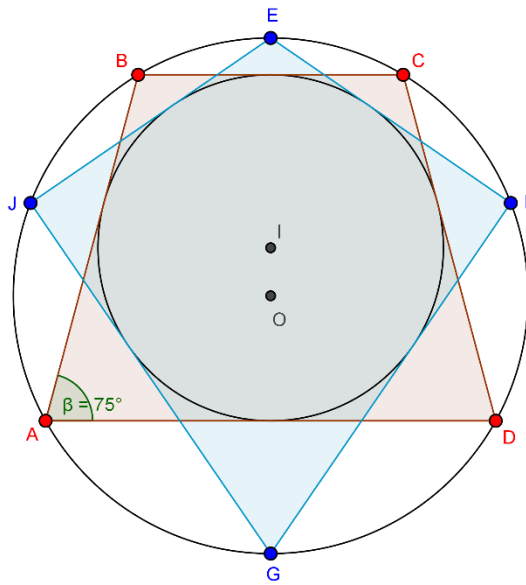
Tabela 1 – Ganho máximo de área e perímetro para quadriláteros bicêntricos.

β	$\Omega(\beta)$
15°	2,06
30°	1,25
45°	1,06
60°	1,01
75°	1,0006
90°	1

Fonte: Autor, 2017

O que se depreende da análise dessa tabela é que, para ângulos β maiores que 45° os quadriláteros bicêntricos de mesmos círculos inscrito e circunscrito têm variação de área e perímetro muito pequena. Já com ângulos β baixos o ganho é expressivo. Ilustramos tais conclusões nas próximas três figuras. Na figura 55 mostramos a pipa reta e o trapézio bicêntricos para ângulo β de 75° (ganho de área e perímetro imperceptível a olho nu).

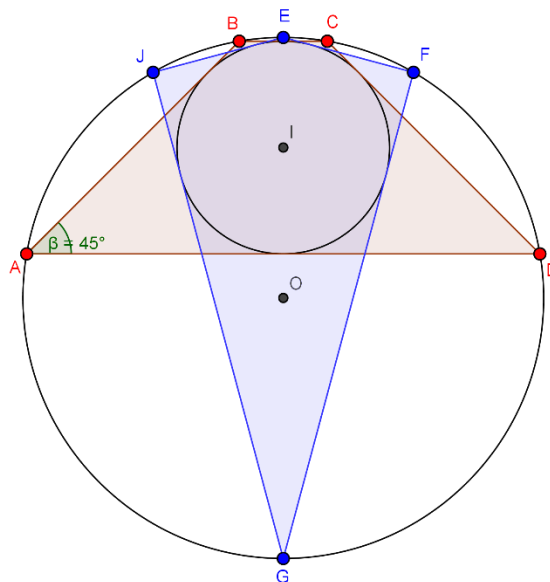
Figura 55 – Pipa reta e trapézio isósceles bicêntricos de mesmos círculos.



Fonte: Autor, 2017

Na figura 56 o ângulo β é de 45° , e assim a pipa reta é 6% maior que o trapézio isósceles.

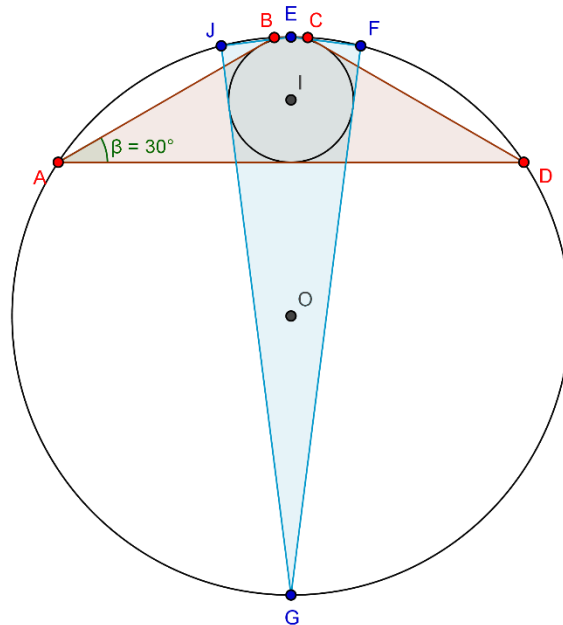
Figura 56 – Pipa reta e trapézio isósceles bicêntricos de mesmos círculos.



Fonte: Autor, 2017

Na figura 57 o ângulo β é de 30° , e assim a pipa reta é 25% maior que o trapézio isósceles.

Figura 57 – Pipa reta e trapézio isósceles bicêntricos de mesmos círculos.



Fonte: Autor, 2017

Observemos que procede o valor de 1 para a situação em que β seja ângulo reto, pois nesse caso o trapézio isósceles se degenera (em um quadrado), e sendo assim os dois círculos, inscrito e circunscrito coincidem, e portanto a pipa reta também se degenera, em um quadrado de mesmos perímetro e área que o dado pelo trapézio degenerado. Note-se entretanto que estamos interessados, nessa dissertação, nos quadriláteros bicêntricos menos “óbvios” que o quadrado (que é bicêntrico como todo polígono regular o é), ou seja, naqueles em que os centros dos círculos inscrito e circunscrito não coincidem. Mesmo porque isto também é uma exigência do enunciado do “Problema das Quatro Guaritas”, que norteia o nosso trabalho.

Outro aspecto que um observador mais arguto pode ter notado, a essa altura, é o de que o ganho máximo parece ter correlação negativa com a razão r / R . Isto também procede. A bem da verdade, podemos mesmo obter uma função $\Omega(r)$, que forneça o ganho máximo de área e perímetro entre os quadriláteros bicêntricos, uma vez que se suponha fixo o valor do raio do círculo circunscrito a todos eles, R . Para isso basta que dividamos a expressão da área máxima pela da área mínima, conforme o resultado obtido em 3.6.2. Assim,

$$\Omega(r) = \frac{r \cdot (r + \sqrt{r^2 + 4R^2})}{2r \cdot \sqrt{2r \cdot (\sqrt{r^2 + 4R^2} - r)}} = \frac{1}{R \cdot \sqrt{32}} \cdot \sqrt{\frac{(r + \sqrt{r^2 + 4R^2})^3}{r}}. \quad (3.48)$$

Construímos adicionalmente uma pequena planilha em Excel, em que obtivemos, para diferentes valores de r , o ganho $\Omega(r)$, com R fixo em 10. Essa planilha, exibida na Tabela 2,

mostra que de fato o ganho aumenta à medida em que r diminui. Outra observação que se pode fazer é a de que, em virtude do fato dos valores dos raios r e R dos círculos inscrito e circunscrito determinarem de modo único a distância d entre os centros de ambos, por meio da Fórmula de Fuss (3.6), essa tabela também pode ter versão alternativa em que se fixe R e varie d , por exemplo.

O mais importante, em toda a discussão sobre o quanto variam perímetro e área dos infinitos quadriláteros bicêntricos passíveis de construção, havendo dois círculos que satisfaçam a Fórmula de Fuss, é perceber que ganhos maiores (valores mais altos de Ω) implicam em valores de r menores, quando comparados a R , e em ângulos α e β também menores, ou seja, em figuras de construção mais trabalhosa, não apenas com o Geogebra mas especialmente à mão livre, e que resultam menos elegantes e harmoniosas, o que pode ser facilmente constatado se comparamos as figuras 55, 56 e 57. Nos parece que, em termos de beleza estética, seja incontestável que tal qualidade seja decrescente com a ordem, no que se refere a elas.

Tabela 2 – Ganho máximo de área e perímetro em função de r .

R = 10				
r	Ω	Porcentagem	β	α
7,07	1,00000	0,00	90°	90°
7,00	1,00002	0,00		
6,71	1,00060	0,06	75°	68,9°
6,00	1,00579	0,58		
5,67	1,01036	1,04	60°	48,6°
5,00	1,02493	2,49		
4,08	1,06066	6,07	45°	30°
4,00	1,06506	6,51		
3,00	1,14225	14,23		
2,24	1,25000	25,00	30°	14,5°
2,00	1,29865	29,86		
1,00	1,70423	70,42		
0,80	1,87705	87,70		
0,50	2,32150	132,15		
0,20	3,58897	258,90		

Fonte: Autor, 2017

4 SOLUÇÃO DO PROBLEMA DAS QUATRO GUARITAS

Vamos agora aplicar todo o desenvolvimento teórico suscitado pelos dois capítulos prévios para resolver o Problema das Quatro Guaritas, com que iniciamos, e que é por assim dizer a mola mestra, de nossa dissertação. Vimos, na Introdução, que as condições impostas pelo enunciado obrigam a que as quatro guaritas se localizem em quatro pontos tais que formem, se imaginamos uma vista aérea do terreno onde vai se dar o evento, um quadrilátero ao mesmo tempo cíclico e tangencial. Precisamos então percorrer cuidadosamente aquele enunciado, para, nos valendo das notações que recomenda, dar respostas aos cinco itens do problema. Basicamente se estipula que o raio do círculo inscrito no quadrilátero formado pelas posições dos postos de guarita mede 66 metros, e que a distância entre o centro da praça onde vai se dar o evento e a Central de Comunicações é de 21 metros.

O item a pede que se esboce uma vista aérea do local, e então deve ser considerado satisfatório qualquer desenho onde fique claro que seu autor compreende que se trata de um quadrilátero concomitantemente cíclico e tangencial. Naturalmente tal desenho pode ser feito à mão livre ou com o auxílio de instrumentos como régua, compasso e par de esquadros, ou mesmo pelo apelo a um software de Geometria Dinâmica como o que utilizamos ao longo de todo esse trabalho, o Geogebra, ou ferramenta equivalente (Cabri ou o ReC – “Régua e Compasso”). Assim, é aceitável e compreensível que não haja precisão nesse item, não se pode exigir isto quando se pede um “esboço”. Há boa chance de que os círculos apresentados, no caso de desenhos feitos à mão livre, estejam tortos ou ovais. O que se tenciona, nesse primeiro item, é aferir se o aluno consegue ou não concluir que o quadrilátero deve tangenciar um círculo menor, o que dá contorno à praça, e ter seus vértices sobre um círculo maior, o de centro na Central de Comunicações.

O item b questiona a natureza do quadrilátero esboçado anteriormente: ele pode ser paralelogramo? De que tipo(s), em caso afirmativo? Aqui a porcentagem de eventuais acertos deve ser função do nível de bagagem matemática, de conhecimento geométrico do(s) aluno(s) a quem estiver sendo proposto o problema. Turmas mais adiantadas, como é o caso das de cursinhos preparatórios para provas de pré-técnico e pré-militar, quando se tratar de ensino fundamental, e de turmas do tipo IME-ITA, no caso de ensino médio, tendem a ter mais sucesso para responder com êxito. O fator decisivo é o entendimento de que todo quadrilátero cíclico precisa ter ângulos opostos suplementares, porém paralelogramos têm seus ângulos adjacentes somando 180° . Assim, a princípio apenas os retângulos atenderiam o enunciado, mas os mais

genéricos também falham, porque todo quadrilátero tangencial precisa ter somas iguais de lados opostos. Sobrariam os quadrados – mas nesse caso os centros dos círculos inscrito e circunscrito precisariam coincidir, o que contradiz a situação proposta pelo enunciado, portanto todas as respostas ao segundo item são negativas.

O item c enfim pede uma solução precisa, rigorosa e portanto detalhada para o Problema das Quatro Guaritas. Para que não se tenha um cenário totalmente vago, isto é, tal que qualquer quadrilátero bicêntrico o satisfaça, adicionalmente se estabelece que o posto de guarita nomeado como o ponto (vértice do quadrilátero) B deve enxergar a praça sob um ângulo de visada de 90° , ou seja, que o quadrilátero ABCD seja tal que $\widehat{B} = 90^\circ$. Vamos portanto nos deter agora sobre o raciocínio que se faz necessário à resolução do nosso problema, sob tal condição.

4.1 Solução do Problema das Quatro Guaritas – Ângulo de visada reto

Supomos o problema resolvido na figura 58, onde temos os triângulos retângulos $\triangle AWI$ e $\triangle IXC$ semelhantes, uma vez que $\widehat{B} = 90^\circ$, e IW e IX são respectivamente tangentes a AB e BC, por serem os raios do círculo da praça nos pontos de tangência desses dois segmentos de reta. Fazemos $k =$ distância entre I e O, para não confundir com o lado DA do quadrilátero.

Logo,

$$\frac{a-r}{r} = \frac{r}{b-r} \Rightarrow a \cdot b - r \cdot (a+b) + r^2 = r^2 \Rightarrow a \cdot b = r \cdot (a+b). \quad (4.1)$$

A propriedade da bissetriz interna, aplicada à bissetriz $\beta = BI$ do ângulo \widehat{B} do triângulo ABC, nos dá:

$$\frac{R-k}{a} = \frac{R+k}{b} \Rightarrow \text{(utilizando propriedade de razões e proporções)}$$

$$\frac{R-k}{a} = \frac{R+k}{b} = \frac{2R}{a+b} \Rightarrow a = \frac{R-k}{2R} \cdot (a+b) \quad (4.2)$$

e

$$b = \frac{R+k}{2R} \cdot (a+b). \quad (4.3)$$

Multiplicando (4.2) e (4.3):

$$a \cdot b = \frac{R^2 - k^2}{4R^2} \cdot (a+b)^2 \Rightarrow \text{(de (4.1))} \frac{R^2 - k^2}{4R^2} \cdot (a+b) = r.$$

Então:

$$(a+b) = \frac{4R^2 r}{R^2 - k^2}. \quad (4.4)$$

Por outro lado, como o ΔABC é retângulo em B, temos:

$$a^2 + b^2 = 4R^2,$$

ou seja,

$$4R^2 = (a^2 + 2.a.b + b^2) - 2.a.b = (a + b)^2 - 2.a.b = (a + b)^2 - 2.r.(a + b) \text{ (de (4.1))}.$$

E então, substituindo $(a + b)$ pelo seu valor dado em (4.4):

$$4R^2 = \left(\frac{4R^2 r}{R^2 - k^2} \right)^2 - 2.r. \left(\frac{4R^2 r}{R^2 - k^2} \right).$$

Dividindo por $4R^2$ e multiplicando por $(R^2 - k^2)^2$ toda essa expressão, chegamos a

$$(R^2 - k^2)^2 = 4.r^2.R^2 - 2.r^2.(R^2 - k^2) = 2.r^2.(R^2 + k^2). \quad (4.5)$$

Abrindo os parênteses:

$$R^4 - 2.k^2.R^2 + k^4 = 4.r^2.R^2 - 2.r^2.R^2 + 2.k^2.r^2.$$

Temos então agora uma equação biquadrada em R^2 :

$$(R^2)^2 - 2.(k^2 + r^2).R^2 + k^4 - 2.k^2.r^2 = 0.$$

Aplicando a fórmula de resolução, obtemos

$$R^2 = r^2 + k^2 \pm r.\sqrt{r^2 + 4k^2}.$$

Contudo, as guaritas não podem estar a uma distância de O que seja inferior a $(r + k)$, então abandonamos a hipótese do sinal nessa expressão ser de “menos”. Logo:

$$R = \sqrt{r^2 + k^2 + r.\sqrt{r^2 + 4k^2}}$$

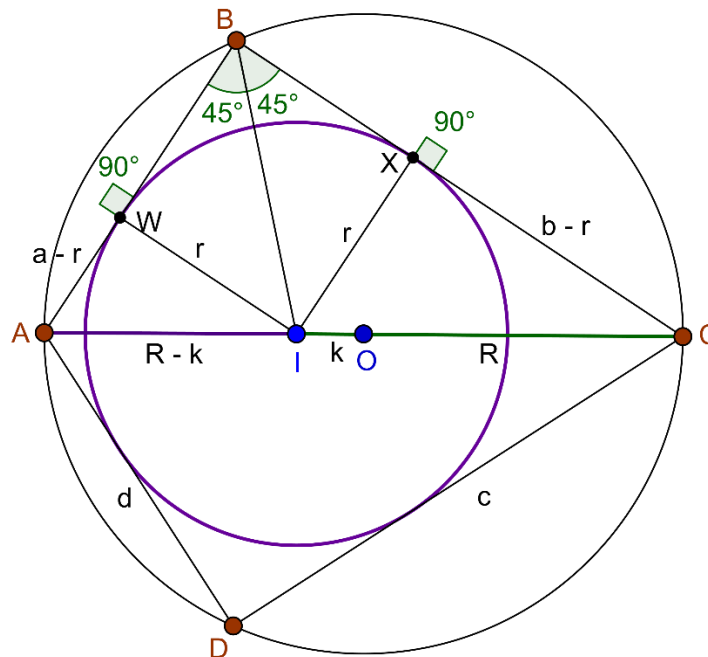
É interessante notar que fizemos todo esse desenvolvimento algébrico para calcular o valor do raio R sem apelarmos à Fórmula de Fuss. Isto foi proposital, quisemos mostrar que um bom aluno do último ano do ensino fundamental ou do ensino médio tem condições de dar a resposta pedida se atendo apenas à suposição básica de que a situação proposta pelo Problema das Quatro Guaritas é viável. Entretanto, voltando a (4.5):

$$(R^2 - k^2)^2 = 2.r^2.(R^2 + k^2).$$

Ora, esta é exatamente a expressão da Fórmula de Fuss, que obtivemos em (3.6).

Claro está que a tarefa foi enormemente facilitada pelo fato de que, nesse item d do Problema das Quatro Guaritas, se pede que haja ângulo de visada de 90° por parte de um dos postos de vigilância (a esta altura temos também plena noção de que na verdade isso acaba sendo válido também para uma outra guarita, pois a pipa reta tem dois ângulos retos, opostos), o que permitiu a utilização da proporção decorrente da semelhança entre os triângulos retângulos ΔAWI e ΔIXC , dada por (4.1). Sem impor essa condição de que dois dos ângulos do quadrilátero ABCD fossem retos, seria muito mais trabalhosa a solução sem a abordagem da Fórmula de Fuss.

Figura 58 – Resolução do item c do Problema das Quatro Guaritas



Fonte: Autor, 2017

Agora estamos aptos a responder o item d, calculando o raio R , ou seja, a distância que cada guarita deve guardar, em relação à Central de Comunicações. E o enunciado do Problema das Quatro Guaritas informa que a praça onde se dará o evento tem um raio de 66 metros, e que a Central de Comunicações dista 21 metros do centro da praça. Então, $r = 66$ e $k = 21$.

Assim, aplicando tais valores à expressão obtida para R , temos

$$R = \sqrt{66^2 + 21^2} + 66 \cdot \frac{\sqrt{66^2 + 4 \cdot 21^2}}{2 \cdot 66} = 99,8.$$

Podemos, portanto, concluir que os postos de observação precisam distar cerca de 100 metros da Central de Comunicações, para satisfazer o enunciado.

O item e é outro que dificilmente seria corretamente respondido em turmas comuns, tanto de ensino fundamental como médio, dada a sua complexidade, naturalmente maior. As discussões que conduzimos ao longo de 3.6.1 e 3.6.2 nos permitem afirmar que, para que a área coberta pelo quadrilátero $ABCD$ seja a maior possível, respeitadas as condições impostas pelo enunciado, se faz necessário optar pelo quadrilátero pipa reta, que, aliás, vem a ser a solução do item c. Já para que a soma das distâncias entre as guaritas fosse mínima, isto é, para que $ABCD$ tenha o menor perímetro possível, é preciso escolher como solução o trapézio isósceles

bicêntrico. Para determinar o valor de Ω associado a esse problema, podemos substituir r por 66 metros e R por 99,8, em nossa expressão do ganho recém-obtida. Temos:

$$\Omega = \frac{1}{R\sqrt{32}} \cdot \sqrt{\frac{(r + \sqrt{r^2 + 4R^2})^3}{r}} = \frac{1}{99,8\sqrt{32}} \cdot \sqrt{\frac{(66 + \sqrt{66^2 + 4 \cdot 99,8^2})^3}{66}} \cong 1,0001.$$

Ressalte-se uma vez mais que, quando r não tem valor muito pequeno, quando comparado ao de R , o ganho de área e perímetro, do menor para o maior quadrilátero bicêntrico, é de fato irrisório.

5 ATIVIDADES PARA APLICAÇÃO EM SALAS DE AULA

O conceito de quadriláteros bicêntricos possibilita a formulação de alguns interessantes exercícios e atividades para aplicação e discussão, em turmas de Matemática, do oitavo ano do ensino fundamental até o terceiro ano do ensino médio. Evidentemente se deve levar em conta o perfil dos alunos e das turmas, para que se possa dosar adequadamente o nível de dificuldade das atividades a escolher e/ou decidir que informações ou dicas acrescentar a cada enunciado, para que os exercícios que aqui propomos não se tornem enfadonhos, desestimulantes.

Um problema pode ser considerado extremamente fácil por alunos com considerável bagagem prévia de conhecimento matemático, como vem a ser o caso em turmas de cursos preparatórios para exames militares e/ou técnicos como os do Colégio Naval e do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, e eventualmente não ser visto da mesma forma por jovens estudantes de nossas escolas municipais e estaduais.

Cabe, portanto, a cada professor avaliar corretamente o seu público, ao invés de simplesmente propor às suas turmas o que apresentamos a seguir, sem preocupações com ressalvas como as que acabamos de fazer. É interessante que se registre desde já o quão poderoso é o conceito de Semelhança de Triângulos, por meio do qual se dá solução à grande maioria do que preparamos como exercícios e atividades. Vamos também mostrar as resoluções de alguns de nossos alunos, para as duas primeiras atividades.

5.1 Primeira Atividade Proposta

Após apresentarmos em dois tempos de aula o conceito de quadriláteros bicêntricos, acompanhado de contextualização consistindo em uma recordação dos assuntos que têm naturalmente maior pertinência, mais especificamente a Semelhança de Triângulos e os Teoremas do Quadrilátero Circunscritível e de Pitot, propomos, em um pré-vestibular da rede pública do Estado do Rio de Janeiro, estabelecimento de ensino de que falamos na Introdução desse trabalho, uma atividade remetendo ao conceito de quadriláteros bicêntricos. O enunciado de tal atividade, à qual destinamos um tempo inteiro de aula de 50 minutos e que foi proposta inicialmente a apenas uma das turmas, a ELE01, é mostrado na figura 59. Digitalizamos as resoluções de alguns alunos, que se encontram no Apêndice dessa dissertação.

Figura 59 – Primeira Atividade Proposta em sala de aula

Pré-Vestibular Social
2017
Disciplina: Matemática – Tutor: Adolfo Luiz Braucks Vianna
Turma: _____ Aluno: _____

Exercício de Aplicação

ABCD é quadrilátero bicêntrico. Sabe-se que:
AB = 5, BE = 4, EA = 6. Calcule:

- o valor do lado BC;
- o perímetro do quadrilátero.

Resolução:

Fonte: Autor, 2017

5.2 Segunda Atividade Proposta

Após fazer exercícios de revisão de semelhança de triângulos, decidimos introduzir os quadriláteros bicêntricos também na turma do pré-vestibular comunitário em que damos aula voluntariamente, apresentando antes os Teoremas do Quadrilátero Circunscritível e de Pitot. Na aula seguinte propusemos atividade consistindo de dois exercícios abordando o assunto dessa dissertação. Os enunciados dos exercícios, a cuja solução destinamos uma hora e meia, são mostrados nas figuras 60 e 61. Algumas resoluções dos alunos se encontram no Apêndice.

Figura 60 – Segunda Atividade Proposta em sala de aula – Exercício 1

Pré-Vestibular Comunitário
Atividades em classe – Geometria Euclidiana Plana – Professor: Adolfo Braucks
Aluno: _____

Exercício 1. Usando conceitos estudados até aqui, principalmente semelhança de triângulos e quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis, determine o valor do raio r do círculo inscrito no quadrilátero ABCD. Justifique passo a passo toda a sua solução.

Solução:

Fonte: Autor, 2017

Figura 61 – Segunda Atividade Proposta em sala de aula – Exercício 2

Exercício 2. Usando conceitos estudados até aqui, principalmente semelhança de triângulos e quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis, determine o valor do raio r do círculo inscrito no quadrilátero ABCD. Justifique passo a passo toda a sua solução.

Solução:

Fonte: Autor, 2017

5.3 Terceira Atividade Proposta

Para a terceira atividade nos ocorreu propor um exercício que partisse de uma situação mais concreta e palpável, com objetos que os alunos pudessem manusear, e não um exercício proposto de forma ortodoxa, no quadro branco, como foi o caso nas duas primeiras atividades que elaboramos. Eis a atividade:

5.3.1 Atividade de cunho prático: construção de quadriláteros bicêntricos em madeira

A atividade consiste no que se segue: entrega-se a cada aluno (ou, como foi na verdade o caso, quando da aplicação efetiva da atividade, grupo de dois ou três alunos – a própria turma pediu que fizéssemos dessa forma, com exceção de apenas uma aluna, que optou por tentar fazer a tarefa sozinha) duas hastes retas de igual comprimento, rígidas mas facilmente quebráveis, de cores distintas – por exemplo, uma verde e uma vermelha. Ambas as hastes devem então ser cortadas ou rompidas, à mão ou com o auxílio de uma tesoura, a critério dos jovens, mas apenas uma única vez cada uma, de modo a gerar quatro varetas menores, duas de cada cor. A tarefa é montar quadriláteros tendo lados de cores alternadas, isto é, tais que os dois lados verdes e os dois lados vermelhos sejam não adjacentes, mas sim opostos. Num momento posterior os alunos devem ser desafiados a continuar procurando montar quadriláteros, ainda obedecendo a essa mesma condição cromática, mas com a exigência adicional de que suas áreas sejam as maiores possíveis.

Na prática o que se imagina (foi como trabalhamos com a turma) é a viabilização de tal atividade por meio das finas varetas cilíndricas de madeira do popular jogo de destreza manual e que ainda goza de grande apelo infanto-juvenil, o “Pega-Varetas”, fabricado no Brasil por uma renomada empresa do ramo desde 1961. Pode-se encontrar no comércio de qualquer cidade de porte médio este brinquedo, comumente por importâncias módicas, não raro inferiores a R\$ 10 (quando fabricadas em plástico duro). As varetas do joguinho costumam medir aproximadamente 20 cm cada. É importante que cada aluno ou grupo de alunos receba duas hastes de tamanho rigorosamente igual, mas tendo cores distintas.

Ao quebrar as varetas em duas outras, se formam quatro segmentos de reta, dois de cada uma das cores. A montagem do quadrilátero tendo por lados tais segmentos, e de modo a que

as cores se alternem, já garante que o polígono seja tangencial (uma vez que a soma dos lados opostos produz as duas varetas originais, que têm o mesmo comprimento). Ora, dados quatro valores, expressos pelas variáveis a , b , c e d , sabe-se que o quadrilátero de maior área, tendo por lados essas quatro grandezas (e desde que isto seja possível, isto é, desde que nenhum dos números seja maior que a soma dos outros três), é o cíclico – a Fórmula de Bretschneider (2.7) o indica claramente, já que o cosseno da soma dos ângulos opostos vale -1 quando tais ângulos são suplementares, o que só ocorre justamente quando o quadrilátero é inscrito ou cíclico. Assim, só se obtém êxito na procura do quadrilátero de maior área possível quando ele lograr satisfazer a tal condição.

Nosso desafio, na colocação em prática dessa atividade, é, portanto, o de orientar o alunado a investigar sob que condição ou condições uma das infinitas possibilidades de montagem de um quadrilátero, dados os seus lados, é aquela em que seus quatro vértices passam a ser pontos de uma mesma circunferência de círculo. Naturalmente que o professor / facilitador deve conduzir a mediação dessa atividade levando em conta o nível de aprendizado da turma, sua bagagem de conhecimento geométrico. Em um curso pré-militar, com fortes candidatos a uma vaga no Colégio Naval, cremos que não raro um ou mais alunos, quiçá a maioria da turma, vislumbre que os ângulos opostos do quadrilátero a montar sejam suplementares.

Uma das alternativas de encaminhamento da solução é utilizar por duas vezes a lei dos cossenos para, supondo o problema resolvido, calcular o valor de uma das diagonais do quadrilátero bicêntrico, uma vez que, sendo seus ângulos opostos suplementares, têm cossenos simétricos. Com os quatro lados e uma diagonal a construção do quadrilátero é trivial.

Infelizmente, nenhum dos grupos formados no dia de execução da atividade em sala de aula conseguiu encaminhar a solução ao longo de cinquenta minutos, razão pela qual, a pedido da própria turma, a atividade acabou se tornando um dever de casa. Estabelecemos elástico prazo para os grupos enviarem soluções, mas ainda assim o assunto caiu no esquecimento, talvez pelo fato de se tratar de uma turma de pré-vestibular, pouco afeita a dedicar tempo de estudo em casa a assuntos que não sejam os mais típicos de cobrança na prova de Matemática do ENEM. Assim, apenas uma aluna, exatamente a que pedira para não integrar grupo algum, se deu o trabalho de diligentemente concluir a atividade. A solução que nos enviou, bastante satisfatória em termos de precisão do desenho, se encontra anexa, no Apêndice.

5.4 Outras Propostas de Atividades abordando o conceito de Quadriláteros Bicêntricos

Durante a elaboração desse trabalho tivemos outras ideias de atividades que poderiam eventualmente ser realizadas com turmas do nono ano do ensino fundamental e ensino médio. Infelizmente não foi possível colocar isto em prática, porque lecionamos esse ano apenas em turmas de pré-vestibular, em que sua própria razão de ser, a preparação para o ENEM e outros exames de admissão a universidades (UERJ, PUC, etc), impede naturalmente que se dedique um tempo maior a aspectos da Geometria Plana. Entretanto nosso pensamento é o de que ainda assim essas atividades devem constar desta dissertação, e é isso que mostramos agora.

5.4.1 Construção teórica de um trapézio isósceles bicêntrico

Sejam L e H dois números reais não-nulos, com $L > H$.

- Resolva a equação do segundo grau $x^2 - 2Lx + H^2 = 0$;
- Chamando a maior e a menor das raízes da equação do item anterior de B e b , respectivamente, imagine trapézios que tenham por bases segmentos de reta com tais medidas. Mostre que existe um desses trapézios que é, a um só tempo, inscrito e circunscrito (isto é: calcule os seus lados oblíquos às bases e a sua altura);
- Chamando de r o raio do círculo inscrito no trapézio do item b, prove que $r = \frac{H}{2}$;
- Seja D a medida da diagonal do trapézio. Demonstre a seguinte relação: $D^2 = L^2 + H^2$;
- Chamando de β o valor do ângulo agudo interno, estabeleça duas relações que dão o valor de $\sin \beta$ e, a partir delas, conclua que o raio R do círculo circunscrito ao trapézio pode ser dado por $R = \frac{D.L}{2H}$;
- Mostre que vale a relação $4.R.r = L.\sqrt{L^2 + H^2}$;
- Sendo K a área do trapézio, forneça uma expressão de K em função de L e H ;
- A diagonal do trapézio pode ser perpendicular ao lado oblíquo a ela concorrente? Justifique a sua resposta.

5.4.2 Construção teórica de uma pipa reta

Sejam P e Q dois números reais não-nulos, com $P > Q$.

- a) Esboce uma “cruz” tendo por medidas P e Q , isto é, imagine dois segmentos de reta perpendiculares de medidas P e Q , que se cortem em um ponto E que seja médio do segmento menor – mas não do maior;
- b) Chamando de A , C , B e D , respectivamente, as extremidades, superior e inferior do segmento de comprimento P , e esquerda e direita do outro segmento de reta, mostre que há uma posição, para a altura em que o segundo corta o primeiro, tal que os ângulos \widehat{ABC} e \widehat{ADC} são retos (forneça a altura exata em que se dá esse corte no maior segmento de reta);
- c) Obtenha o quadrilátero $ABCD$ unindo esses pontos ordenadamente: trata-se do que chamamos em Geometria de uma “pipa reta”. A seguir demonstre que essa pipa é bicêntrica, ou seja, que admite simultaneamente círculo circunscrito e círculo inscrito;
- d) Determine os valores dos lados de $ABCD$, em função de P e Q ;
- e) Sendo α o valor do ângulo agudo interno, estabeleça uma relação entre P , Q e α ;
- f) Calcule os raios r e R , dos círculos respectivamente inscrito e circunscrito, em função de P e α , pelas expressões mais simples possíveis;
- g) Sendo K a área da pipa, dê K em função de P e α ;
- h) Voltando à atividade anterior, em que trabalhou com o trapézio isósceles bicêntrico, se uma pipa reta compartilhar dos mesmos círculos inscrito e circunscrito com um trapézio, qual dos dois é maior (possuindo os maiores valores para área e perímetro)? Sugestão: encontre uma relação entre os ângulos α e β .

5.4.3 O Problema dos Quatro Herdeiros

Essa situação-problema poderia ser o mote de nossa dissertação, em paralelo com ou até substituindo o Problema das Quatro Guaritas. Trata-se da alocação de quatro castelos que, para atender o que se pede, têm que estar situados nos vértices de um quadrilátero bicíclico. Eis o seu enunciado.

Uma poderosa rainha deu à luz a quadrigêmeos, sendo duas meninas, Ana e Clara, e dois meninos, Breno e Dario. Anos depois, já adultos, os herdeiros do trono decidem que vão morar em quatro castelos distintos, mas desejam construí-los de modo que:

- 1) a rainha precise percorrer a mesma exata distância, para deslocar-se do seu palácio, onde prefere continuar residindo ao lado do esposo, até qualquer uma das quatro estradas vicinais que ligarão os castelos dos filhos de gêneros diferentes - as maiores distâncias, entre os castelos de Ana e Clara e os de Breno e Dario, não receberão estradas de ligação;
- 2) todos os quatro castelos distem 50 quilômetros do centro administrativo do reino, que fica a 30 quilômetros do palácio da rainha.

Discutir / esboçar a construção dos quatro castelos.”

5.4.4 O Problema das Quatro Retas

É outra situação-problema que poderia ser a mola-mestra dessa dissertação. Eis o seu enunciado.

Quatro retas t , u , v e w em um plano π são tais que:

- 1) há no mínimo três direções dadas por elas - isto é, há dentre elas não mais do que duas retas paralelas;
- 2) há um e apenas um ponto do plano π que equidista de todas elas;
- 3) as quatro interseções entre elas que nunca estão em dois semiplanos diferentes, nas divisões de π por t , u , v ou w , também equidistam de um único ponto do plano, todavia distinto do citado no item anterior (o que se deseja aqui é fugir do conceito de “quadrilátero completo”, para que o problema tenha solução viável).

Discutir / esboçar a distribuição das quatro retas no plano. Sugestão: sejam os pontos mencionados em 3: $A = t \cap u$; $B = u \cap v$; $C = v \cap w$; $D = w \cap t$. Justifique suas construções e respostas.

6 O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA NO BRASIL E OS LIVROS DIDÁTICOS – UMA PERSPECTIVA CRÍTICA

A Geometria é indubitavelmente uma das mais importantes partes da Matemática. Há mesmo alguns colégios, escolas e cursinhos pré-vestibulares no Brasil que dividem a disciplina em duas: a primeira, comumente denominada “Matemática I”, ou, abreviadamente, “MAT I”, normalmente abrangendo Álgebra, Aritmética e Geometria Analítica (e às vezes rudimentos de uma Introdução à Análise, como é o caso em turmas IME-ITA), e a outra, “MAT II”, usualmente integrada por Geometria Plana e Espacial e Trigonometria. Não temos conhecimento de onde ou quando se começou a praticar tal divisão, mas especulamos que tenha visado originalmente separar a Matemática em duas partes, a grosso modo uma primeira de natureza mais abstrata, lidando com letras e números, e outra “mais prática”, onde o ensino / aprendizagem também possa se valer de desenhos.

Historicamente a aquisição de conhecimento geométrico se impôs ao homem como necessidade primordial quando ele precisou calcular distâncias, áreas, ângulos e volumes, para melhor lidar com o mundo à sua volta. Citemos Fossa (2012, p. 133):

Como grande parte da Matemática, a geometria resultou da abstração de certos aspectos da nossa experiência sensorial. A própria etimologia da palavra ‘geometria’ remonta à origem mundana dessa ciência, nos levando a recordar da sua estreita ligação com problemas de natureza prática.

Assim, questões cotidianas oriundas principalmente dos campos da agricultura, da astronomia e da construção civil teriam produzido os primeiros geômetras em todas as grandes civilizações da Antiguidade: babilônios, egípcios, harappeanos (povos antigos que habitaram o Vale do Rio Indo) e outras. Há quem diga, baseado nisso, que a Geometria e a Aritmética foram os primeiros campos da “Matemática pré-moderna” (Wikipedia, in “História da Geometria”). As Grandes Pirâmides do Egito, ainda hoje consideradas uma das Sete Maravilhas do Mundo, intrigam pesquisadores das mais diferentes áreas, perplexos porque não se consegue dar uma resposta satisfatória para a pergunta sobre como foi possível erguer tão prodigiosas construções em épocas tão remotas, sem uma engenharia avançada e mecanismos de transporte para as formidáveis pedras que as constituem. Outra construção igualmente imponente e cujas origens se perdem no tempo é a da Grande Muralha da China, tão assombrosa que sobre ela circulam ao redor do mundo lendas pitorescas, e que a internet ajuda a propagar, como a de que se trata

da única construção humana visível de nosso satélite natural. Tanto um caso como o outro mostram que o homem estudou e aprendeu Geometria desde muito antes da época cristã.

Sabe-se que babilônios e egípcios chegaram a boas aproximações do valor de Pi, de que certamente necessitaram para o cálculo de áreas e volumes que envolvessem círculos, esferas e curvas. Há evidências de que os egípcios aproximavam a área de um círculo como sendo o quadrado de oito nonas partes do seu diâmetro, o que denota a utilização de Pi como sendo aproximadamente igual a 3,1605, um erro de apenas 0,63% em relação ao valor correto. Os babilônios cometiam erro inacreditavelmente ainda menor com uma aproximação de $25 / 8 = 3,125$ para Pi (tal valor se encontra dentro de uma margem de erro de 0,53%). De acordo com Hayashi (2005, p. 363), os *Śulba Sūtras* (período védico indiano, datado do primeiro milênio antes de Cristo) contêm "a expressão verbal existente mais antiga do Teorema de Pitágoras no mundo, embora já tivesse sido conhecido para os antigos babilônicos.": "A corda diagonal (*akṣṇayā-rajju*) de um (retângulo) oblongo produz (área) tanto como as (cordas) do flanco (*pārśvamāni*) e a horizontal (*tiryāṇmānī*) produzem separadamente."

Por mais que haja muitas dúvidas, atualmente, no tocante a questões da historiografia da Matemática, num ponto todos os autores parecem concordar: os primeiros a produzir uma sistematização da Geometria, uma consolidação dos conhecimentos dessa área, foram os gregos. De fato vários são os nomes de geômetras gregos cujos profícuos trabalhos atravessaram oceanos de tempo, permanecendo ensinados em nossas escolas até hoje: Tales, Euclides, Pitágoras, Hiparco, Ptolomeu, Menelau e tantos outros.

6.1 O Ensino de Geometria no Brasil

6.1.1 O Movimento da Matemática Moderna

Qualquer pessoa que resolva se debruçar sobre a tarefa de pesquisar o ensino-aprendizagem de Geometria no Brasil inevitavelmente se depara, em quase todos os livros que toquem no assunto com maior ou menor profundidade, com críticas, algumas bastante contundentes, à "Matemática Moderna", um movimento de renovação curricular, que chegou ao Brasil na década de 1960 e permaneceu como uma alternativa para o ensino de Matemática por mais de uma década. Basicamente tais críticas alegam que a introdução do MMM (sigla

comumente usada para Movimento da Matemática Moderna) em nosso país teria sido um dos fatores responsáveis pelo abandono do ensino de Geometria na educação brasileira, devido ao fato de que muitos professores não teriam se sentido suficientemente preparados para desenvolver as propostas sugeridas pelo movimento para o ensino de Geometria. Em que pese nos lembrarmos vagamente de ter estudado, na década de 1970, com alguns livros-texto onde a expressão aparecia, fazendo as vezes até mesmo de título ou subtítulo, as poucas memórias que temos de então, tantas décadas depois, e o fato de que tais considerações críticas sejam quase unânimes, nos levaram a decidir dedicar algumas linhas a uma investigação sobre o assunto.

De acordo com SOARES (2001),

No Brasil, a Matemática Moderna veio como uma alternativa ao ensino tradicional que, apesar de demonstrar certa estabilidade de conteúdo e metodologia em livros e programas de ensino, recebia críticas por adestrar os alunos em fórmulas e cálculos sem aplicações; apresentar a Matemática em ramos estanques e isolados, entre outras.

Fazendo uma retrospectiva histórica dos fatos, o que se descobre é que em 1934 um grupo de matemáticos franceses, autointitulado Nicolas Bourbaki, se põe a escrever uma nova obra sobre Análise Matemática. Essa proposta, a princípio discreta, com o passar do tempo ganha amplitude mundial, tendo por meta organizar a Matemática como um todo. A visão da disciplina adotada por Bourbaki considera a Matemática como “um edifício dotado de profunda unidade, sustentada pela teoria dos conjuntos e hierarquizada em termos de estruturas abstratas, entre elas, algébricas e topológicas”. (Pour la Science, 2000, p. 32). Esse grupo tem enorme influência MMM em esfera internacional, e, especialmente, no Brasil. Jean Dieudonné, André Weil, Jean Delsarte e Alexandre Grothendieck, matemáticos e líderes do grupo Bourbaki, vieram para São Paulo, a partir da década de 1940, contratados pela Faculdade de Filosofia Ciências e Letras da Universidade de São Paulo. Aqui influenciaram e orientaram os responsáveis pelas cátedras como também alguns jovens assistentes (D’Ambrosio, 2000). Dentre eles, destacavam-se Osvaldo Sangiorgi, Jacy Monteiro, Omar Catunda, Benedito Castrucci, que na década de 60 iniciaram e divulgaram o MMM no Brasil.

O Estado de São Paulo é considerado pioneiro no país, devido à criação do GEEM – Grupo de Estudos do Ensino da Matemática, em 1961, na capital, liderado por Osvaldo Sangiorgi. O principal objetivo do GEEM foi coordenar e divulgar a introdução da Matemática Moderna na Escola Secundária. Isto se deu inicialmente na cidade de São Paulo, depois no interior daquela unidade da federação, se irradiando depois por toda a nação, o que pode ser considerado natural dada a pujança econômico-financeira que já ostentava naquele período.

Entre 1955 e 1966 se realizaram no Brasil cinco Congressos Nacionais de Ensino da Matemática. O IV Congresso Nacional, que teve sede em Belém no ano de 1962, objetivou a efetiva introdução da Matemática Moderna no ensino secundário. O GEEM se fez presente apresentando aulas-demonstração sobre o tratamento moderno de tópicos da Matemática, bem como palestras sobre a introdução da Matemática Moderna na escola secundária. O GEEM também apresentou sua sugestão de Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para o ginásio e para o colégio, documento que já havia sido aprovado em outros dois fóruns de discussão no mesmo ano, conforme Soares (2001, p.75-76).

Assim, de modo ainda um tanto titubeante, a matemática moderna, após chegar aos grandes centros do país, começa, nos anos 60, a ser lentamente adotada por escolas mais distantes, quase sempre de forma súbita, via livro didático. Carregada de simbolismos e enfatizando a precisão de uma nova linguagem, professores e alunos passam a conviver com a teoria dos conjuntos, com as noções de estrutura e de grupo. Repleta de promessas de um ensino mais atraente e descomplicado em superação à rigorosa matemática tradicional, no entanto, a Matemática Moderna chega ao Brasil carregada de formalismos, como destaca Búrigo (1990, p. 263), ao referir-se ao viés formalista não reconhecido naquele período: “o caminho proposto para a compreensão era, basicamente, o da representação do pensamento, segundo as regras da formalização da matemática, como disciplina acadêmica”.

A preocupação demasiada com a linguagem matemática e com a simbologia próprias da teoria dos conjuntos deixou marcas profundas, ainda não totalmente compreendidas, nas práticas pedagógicas daquele período. Ao tratar a Matemática como algo neutro, destituída de história, desprovida de processos de produção, sem relação alguma com o social e o político, o ensino da disciplina, nesse período, parece ter se descuidado da possibilidade crítica e criativa dos aprendizes, se desumanizando, em certo sentido. O moderno dessa matemática apresentava-se, para os alunos, mais como um conjunto de novos dispositivos e nomenclaturas descolados de sentidos e significados conceituais, uma disciplina abstrata e desligada da realidade.

No que tange especificamente ao ensino da Geometria, no Movimento da Matemática Moderna havia uma tendência a priorizar as transformações geométricas, o estudo dos espaços vetoriais e algumas modificações nos axiomas de Euclides. O que se constata da análise de livros-texto brasileiros do período (isto é, décadas de 60 e 70, principalmente) é que seus autores acompanharam algumas tendências do Movimento, como a utilização da linguagem dos conjuntos para introdução da geometria plana em um primeiro momento, e de transformações geométricas um pouco mais adiante.

Vários são os relatos que dão conta de que a resistência ao emprego de excessiva formalização, de certa forma desprovido os conteúdos matemáticos do seu significado, que seria uma das marcas registradas do MMM, partia dos próprios professores, que também tinham críticas ao fato de que esse novo conjunto de paradigmas talvez fosse mais adequado, no que se referia à sua aplicabilidade, ao Estado de São Paulo, mas não necessariamente ao restante do Brasil. Sabe-se que a iniciativa de divulgação da Matemática Moderna em nosso país esteve sempre sob a liderança do GEEM, o Grupo de Estudos de Ensino de Matemática, fundado em 1961 por professores do Estado de São Paulo, e tendo como principal expoente o professor Oswaldo Sangiorgi. O GEEM não só assumiu a liderança na difusão da nova linguagem modernizadora da matemática, mas se incumbiu de “reforçar a difusão das idéias modernizadoras”, especialmente, por meio de cursos e da “publicação dos primeiros livros didáticos de acordo com essa nova orientação” (MIORIM, 1998, p. 114).

As novas orientações enfatizavam o uso de uma linguagem matemática precisa e de justificações rigorosas, uma linguagem matemática própria às estruturas mentais dos estudantes. G. Papy, educador matemático belga e um dos ilustres palestrantes do V Congresso Nacional de Ensino da Matemática, destacou a importância do ensino de Conjuntos aos alunos, enquanto necessidade de fundamentar a própria Matemática que eles deviam aprender.

Curiosamente, um dos livros que nos propomos a analisar no escopo dessa dissertação, intitulado “Biblioteca da Matemática Moderna – tomo 1 (Aritmética – Teoria dos Conjuntos – Geometria Plana), de Antônio Marmo de Oliveira e Agostinho Silva – Livros Irradiantes S.A. (LISA) – 1969”, traz, nesta segunda edição, um Prefácio que é tão revelador das tensões então existentes entre os partidários do MMM e os seus detratores, que vale a pena reproduzi-lo, ainda que parcialmente:

Até pouco tempo, o ensino da Matemática tinha se degenerado num pesado algoritmo que, embora desenvolva uma habilidade formal, não conduz à compreensão da Matemática como um todo. Além do mais, a história mostra-nos que os conhecimentos matemáticos têm sido continuamente desenvolvidos, mudados e aperfeiçoados. Em vista disso, era necessária uma reação contra o algebrismo e que, simultaneamente, deveria vir de encontro às necessidades atuais de nossa sociedade. A esta reação se deu o nome de “movimento da Matemática Moderna”. Esse movimento eclodiu, no Brasil, por volta do ano de 1962, por via do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática. Como integrantes desse movimento, sentimos desde logo que o professor brasileiro encontraria uma série de dificuldades iniciais.

Uma delas é a falta de uma literatura especializada em nossa língua. Pensando em minorar essa falta é que decidimos lançar uma coleção que abrangesse a Matemática nos 1º e 2º ciclos de nossas escolas bem como nos cursos universitários sem,

naturalmente, pretendermos esgotar o assunto, mas apenas trazer à luz nossa modesta colaboração. Procuramos também atender às necessidades de nossos estudantes, evitando muitos detalhes técnicos e digressões, sempre que isso nos fosse possível.

(...) Depois penetramos na Geometria Plana, através de seus aspectos históricos. A exposição da mesma é feita de um modo que foge ao molde tradicional. Realmente, o leitor poderá notar que introduzimos certas noções de caracteres topológicos, tais como: vizinhança, fronteira de um conjunto, exterior e interior de um conjunto, etc.

Procuramos ainda tirar partido de certas propriedades do plano afim euclidiano, introduzindo as transformações geométricas e o produto escalar, propiciando assim ao leitor um primeiro contato bem elementar com o ente matemático denominado vetor.

É interessante notar dois aspectos principais nesses trechos de um livro oriundo do MMM aqui reproduzidos: o primeiro, que os próprios autores reconhecem a “dificuldade do professor brasileiro” para encampar as mudanças no ensino de Matemática propostas pelo MMM o segundo, que se tenha cogitado seriamente ensinar Geometria Plana, em um país de dimensões continentais e tão sabidamente desigual, no que se refere às realidades social, econômico-financeira e cultural, com apelo a recursos topológicos – algo que não se ensina, atualmente, nem no ensino médio das melhores escolas particulares dos grandes centros metropolitanos em território nacional. Não poderia dar certo. E não deu.

Para PIAGET (1984, p. 14), “mesmo no campo da Matemática, muitos fracassos escolares se devem àquela passagem muito rápida do qualitativo (lógico) para o quantitativo (numérico)”. Referindo-se ao ensino da “Matemática Moderna” este renomado epistemólogo advertia, desde a década de 50, que essa experiência poderia ser prejudicada pelo fato de que:

Embora seja ‘moderno’ o conteúdo ensinado, a maneira de o apresentar permanece às vezes arcaica do ponto de vista psicológico, enquanto fundamentada na simples transmissão de conhecimentos, mesmo que se tente adotar (e bastante precocemente, do ponto de vista da maneira de raciocinar dos alunos) uma forma axiomática (...). Uma coisa porém é inventar na ação e assim aplicar praticamente certas operações; outra é tomar consciência das mesmas para delas extrair um conhecimento reflexivo e sobretudo teórico, de tal forma que nem os alunos nem os professores cheguem a suspeitar de que o conteúdo do ensino ministrado se pudesse apoiar em qualquer tipo de estruturas naturais.

Malgrado toda a expectativa que se alastrou no Brasil, em torno da modernização do ensino, com a criação em vários estados de grupos voltados para o estudo e difusão da Matemática Moderna, a nova abordagem passou a ser fortemente criticada em nosso país na década de 70, momento em que ocorria o esvaziamento do movimento em outras nações. Uma das mais acirradas críticas que também influenciou os educadores brasileiros foi a de (KLINE, 1976), obra muito divulgada e que argumentou veementemente contra as imperfeições de um

ensino onde “os alunos absorvem uma porção de idéias complicadas porém não aprendem a somar”. Uma das críticas feitas pelo autor foi do negligenciamento da Matemática Moderna em relação à motivação. Alegando que “despojar os conceitos de seu significado é conservar a casca e jogar fora o fruto (...)” ao negligenciarem da motivação e aplicação, os pedagogos apresentaram o caule mas não a flor e assim abandonaram o verdadeiro valor da Matemática. O autor teceu dessa forma várias críticas contundentes à forma (não ao conteúdo) como era trabalhada a Matemática. Na década de 80 já era mais difícil encontrar no mercado livros-texto da disciplina onde aparecesse no título a expressão “Matemática Moderna”.

6.1.2 Os livros-texto de Matemática e a Geometria no Ensino Fundamental e no Médio

Vamos analisar nesse tópico como tem sido apresentada a Geometria Euclidiana Plana nos livros-texto brasileiros, nos últimos dois séculos, refletindo criticamente sobre o assunto. Para tanto recorreremos a um total de onze livros: cinco deles foram adquiridos em sebos da cidade do Rio de Janeiro, e têm datas de publicação que variam entre os últimos anos do século XIX e a década de 70 do século XX, passando portanto pela década de 60, que, como vimos no tópico anterior, foi aquela em que se observou o período áureo da contribuição, para o conteúdo dos livros da disciplina, do assim chamado Movimento da Matemática Moderna (MMM). As outras seis publicações são livros-texto atuais de Matemática, que se pode encontrar em salas de aula, e portanto estão à venda nas livrarias especializadas. Nosso interesse maior evidentemente será pelos assuntos que embasam toda a construção teórica que fizemos nos capítulos anteriores dessa dissertação, isto é, nossa meta é traçar uma comparação qualitativa entre as abordagens, dos livros do século XX e dos atuais, de Semelhança de Triângulos, Quadriláteros Inscritíveis (e o teorema que os especifica) e Quadriláteros Circunscritíveis (e o Teorema de Pitot).

O livro mais antigo que tivemos em nossas mãos foi o “Curso de Geometria – de acordo com o programma de admissão à Escola Polytechnica”, de Timotheo Pereira, lente do Gymnasio Nacional, “obra adoptada no Gymnasio Nacional, no Collegio militar e muitos outros estabelecimentos de instrução” – 2ª edição – Livraria de Francisco Alves”, em relação ao qual a própria grafia dos verbetes constantes em sua capa, que propositalmente não alteramos e pode ser vista na figura 61, já lhe poderia denunciar a idade: ele foi publicado em 1898, portanto no apagar das luzes do século retrasado. O livro se inicia com algumas “Noções

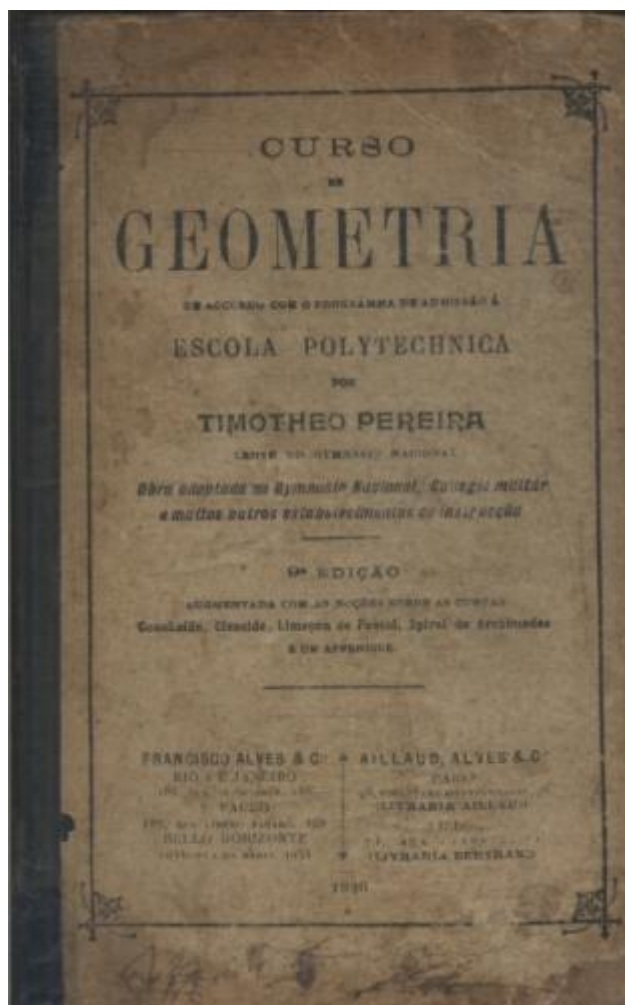
preliminares”, das quais a primeira causaria estranheza a qualquer estudante atual: “Corpo geométrico é uma porção limitada do espaço”. Outra conceituação absolutamente anacrônica é a seguinte:

O espaço, a superfície e a linha podem ser considerados em relação às suas formas ou às suas grandezas relativas. Quando são considerados em relação às suas formas, chamão-se figuras. Quando são considerados em relação às suas grandezas relativas, têm o nome geral de extensão.

Não utilizamos o termo “extensão” em sala de aula, nos dias de hoje, para mencionar o cálculo seja de um perímetro, de uma área ou de um volume. Outro detalhe que chamou a nossa atenção ao analisar essa publicação de quase 120 anos atrás foi a inclusão de um certo teorema, segundo o qual “Quando uma recta é perpendicular a outra, esta outra é perpendicular á primeira”, ou seja, “A relação de perpendicularismo entre retas é simétrica”. O que mais nos impressionou não foi exatamente a colocação disto na forma de um teorema, mas sim o que vem a seguir, um corolário afirmando que “Todos os ângulos rectos são iguaes”. Aqui sim reside algo assaz pitoresco, pois qualquer um que esteja familiarizado com a imortal obra de Euclides, “Os Elementos”, há de lembrar-se que este é justamente um dos seus postulados, o quarto: “Todos os ângulos retos são iguais entre si”.

De fato, nos parece que Timotheo Pereira comete um pequeno equívoco aqui, uma vez que, ao definir inicialmente retas perpendiculares, ele diz que uma reta é perpendicular a outra quando, “cahindo sobre esta outra, forma com ella ângulos adjacentes iguaes”, e, em seguida, completa, concluindo que “os ângulos formados pela perpendicular chamão-se ângulos rectos”. Sendo assim a própria definição do que seriam retas perpendiculares já trazia subjacentes, não só o “teorema do perpendicularismo simétrico”, como o seu “corolário”: naturalmente não se poderia fazer distinção entre qual dos dois “lados” de uma reta (“acima” ou “abaixo”, “à esquerda” ou “à direita” dela) está sendo “atacado” pela outra reta que lhe é perpendicular, e essa observação simples, que recorre à simetria (por que um observador situado de um dos “lados” de uma reta teria algum privilégio ou falta dele, se comparado a um observador “do outro lado?”), já é suficiente para que se possa afirmar com segurança que os quatro ângulos (retos!) assim formados são iguais. Isto é intuitivo, é básico e primitivo, e não é outra a razão por que constitui um dos Postulados de Euclides. A tentativa do autor de transformar o resultado em algo “demonstrável” é um tiro n’água, portanto. Nos parece consequência do esquecimento, pelo autor, do conceito de simetria, ao escrever o livro.

Figura 62 – Capa do livro “Curso de Geometria”, de 1898.



Fonte: Autor, 2017

Curiosamente, ao definir triângulos semelhantes, Timotheo Pereira escreve textualmente que “Triangulos semelhantes são aquelles que têm os lados respectivamente proporcionaes (...)”, e mais adiante enuncia, como teorema, que “Dous triangulos semelhantes são equiângulos”. Não obstante seja de fácil demonstração que uma condição é necessária e suficiente para a outra – e ele o faz em seu livro - e que portanto, a rigor, se possa utilizar, como definição do conceito de triângulos semelhantes tanto o fato de terem os mesmos ângulos como o de que os lados homólogos, isto é, opostos aos ângulos congruentes, nos dois triângulos, sejam proporcionais, nos parece que o uso do termo “semelhantes”, cujo significado é “parecidos, similares, aparentados”, torne mais natural que, em salas de aula, utilizemos o aspecto angular como definição para a semelhança. Aliás, no escopo dessa dissertação, foi essa a definição de

que nos valem, em (2.1): “Dois triângulos são semelhantes quando possuem a mesma forma, isto é, os mesmos ângulos, mas não necessariamente os mesmos tamanhos”.

O “Curso de Geometria” conceitua corretamente quadriláteros inscritíveis (cíclicos) e circunscritíveis (tangenciais) e se ocupa também de enunciar e demonstrar os teoremas respectivos. Não há, porém, sequer alusão ao fato de que alguns quadriláteros podem gozar das duas condições, nem nenhum exemplo ou exercício mencionando essa circunstância eventual.

Também adquirimos em sebos outros quatro livros que não são mais adotados em nossas escolas, “Geometria”, de Oswaldo Marcondes – Editora do Brasil S/A (1964), cuja capa aparece na figura 62, “Matemática – 3ª série”, de Ary Quintella – Companhia Editora Nacional (1967), que tem sua capa mostrada na figura 63, “Matemática para a Escola Moderna – 4ª série”, de Scipione di Pierro Neto – Editora IBEP (Instituto Brasileiro de Edições Pedagógicas), com capa exibida na figura 64, além do já citado “Biblioteca da Matemática Moderna” (1969), sobre cujo prefácio nos detemos um pouco no tópico anterior e do qual utilizamos a capa na figura 65. Infelizmente não consta em lugar nenhum o ano de publicação do livro do professor Scipione di Pierro Neto, aliás um personagem-chave, na questão da introdução e do posterior ocaso do MMM no Brasil, já que foi inicialmente um entusiasta da ideia e depois a criticou de maneira mais ferrenha, justamente por ter percebido que muito do que se fez em nosso país, nesse assunto, foi consequência de certo “modismo” associado à Matemática Moderna, e não fruto de proposta pedagógica séria e corretamente alinhavada e embasada. Mesmo recorrendo ao prodigioso mecanismo Google de busca de informações na grande rede não obtivemos o precioso dado. Temos certeza apenas que se trata de um ano na década de 1960 ou de 70.

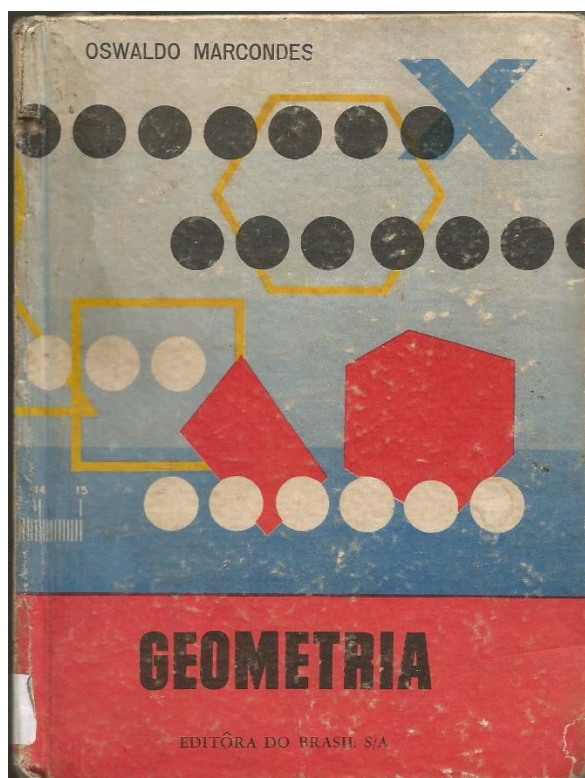
Quanto à Semelhança de Triângulos, o livro “Geometria” surpreendentemente define o conceito cometendo o equívoco de associá-lo às duas condições que se verificam quando triângulos gozam dessa condição, e de que falamos há três parágrafos atrás, quais sejam a de terem os mesmos ângulos e lados homólogos proporcionais, dando portanto a entender, a um estudante incauto, que essas condições são independentes, e não uma consequência imediata e trivial da outra. Em nenhum momento Oswaldo Marcondes se preocupa em mostrar que, se dois triângulos têm os mesmos ângulos, então seus lados homólogos são proporcionais, ou vice-versa. Ary Quintella, em seu livro “Matemática”, opta por apresentar primeiro o conceito de Semelhança de Polígonos, abordando ato contínuo a Semelhança de Triângulos, como caso particular da primeira situação, tendo todavia a precaução de, nessa segunda definição, deixar claro para o leitor que as duas condições que decorrem do fato de que dois triângulos são semelhantes NÃO são independentes; ele diz, textualmente, que “se uma das condições for satisfeita, a outra será necessariamente satisfeita”. Já Scipione define, em sua obra “Matemática

para a Escola Moderna”, a semelhança como estando associada à congruência dos três ângulos, nos dois triângulos. Em seguida, o que nos parece ser sim um sintoma da influência do MMM sobre o seu trabalho, antes até mesmo de enumerar os “casos” de semelhança de triângulos, como a grande maioria dos livros-texto opta por fazer até hoje, mostra que a semelhança de triângulos é uma relação de equivalência. Apesar de verdadeira, essa propriedade tem pouca ou nenhuma aplicação prática nos ensinamentos fundamental e médio (quem quererá dividir os infinitos triângulos existentes em classes de equivalência ditadas pelos valores de seus ângulos?), o que evidencia os excessos cometidos pelos arautos da Matemática Moderna nos agora longínquos anos em que isto esteve em voga no Brasil. Outro claro sinal do quanto esse livro tem alguma sintonia com esses preceitos (e nem nos referimos aqui ao seu título...) é o fato de que, logo depois de citar os famosos casos de semelhança de triângulos, Scipione introduz uma transformação geométrica, a Homotetia. Como vimos, a abordagem de transformações dessa natureza ao longo dos primeiros ciclos de estudo foi uma marca do MMM.

No entanto, o livro que analisamos que quase pode ser considerado uma “bíblia” desse movimento é o “Biblioteca da Matemática Moderna”. Ousamos dizer que o curso de Geometria Plana que ele contém impressionará qualquer docente contemporâneo. Ele passeia livremente por conceitos topológicos, inclusive o de Continuidade, comete abusos semânticos como o de chamar de “fronteira do círculo” a sua circunferência, introduz os vetores, chega às transformações geométricas e, só então, define a Semelhança de Triângulos, como caso particular de uma delas, a Homotetia Direta. Talvez fosse muito difícil a compreensão plena do assunto, ensinado com abordagens a tal ponto inusitadas, por um aluno dessa época.

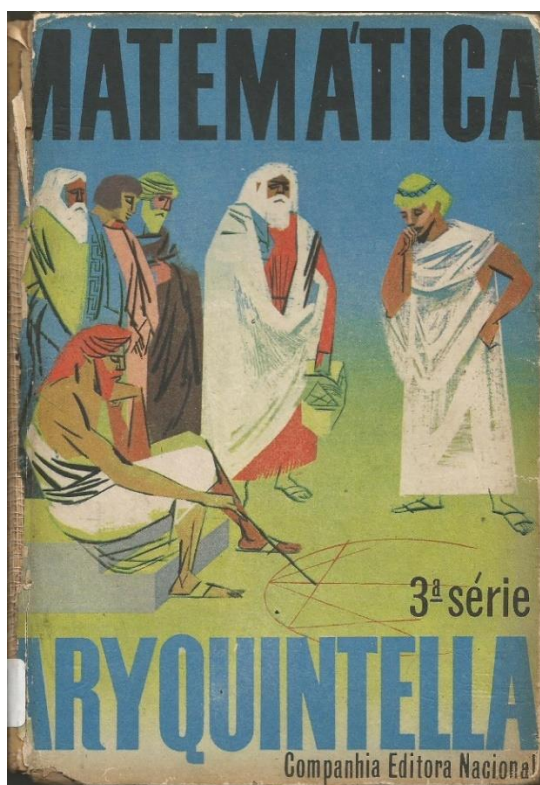
Quanto aos quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis, o livro “Geometria” trata do assunto, enunciando e demonstrando os teoremas que estabelecem sob que circunstâncias ocorrem tais condições, além de também o fazer com o Teorema de Ptolomeu. Infelizmente, contudo, essa obra parece se preocupar mais com polígonos regulares, e sendo assim o único quadrilátero bicêntrico a que se permite dedicar algumas linhas é o quadrado – sem que apareça a palavra bicêntrico, na teoria ou em algum exercício, uma vez sequer. Esse também é o caso do livro “Matemática para a Escola Moderna”: se detém apenas timidamente sobre o assunto de polígonos inscritos e circunscritos em e a um círculo, mas se limita a fazê-lo contemplando os polígonos regulares, com considerações e posteriores exercícios sobre lado do polígono regular inscrito em função do raio do círculo, lado e apótema do polígono regular circunscrito.

Figura 63 – Capa do livro “Geometria”, de 1964.



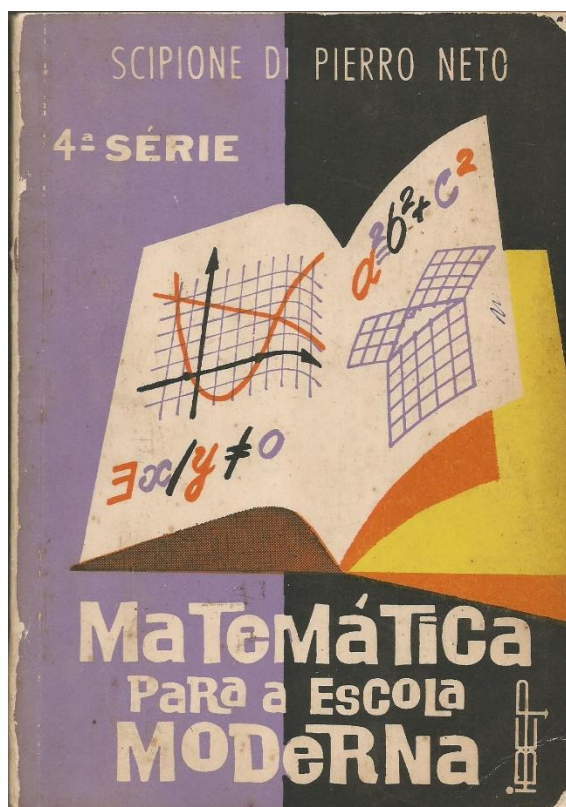
Fonte: Autor, 2017

Figura 64 – Capa do livro “Matemática – 3ª série”, de 1967.



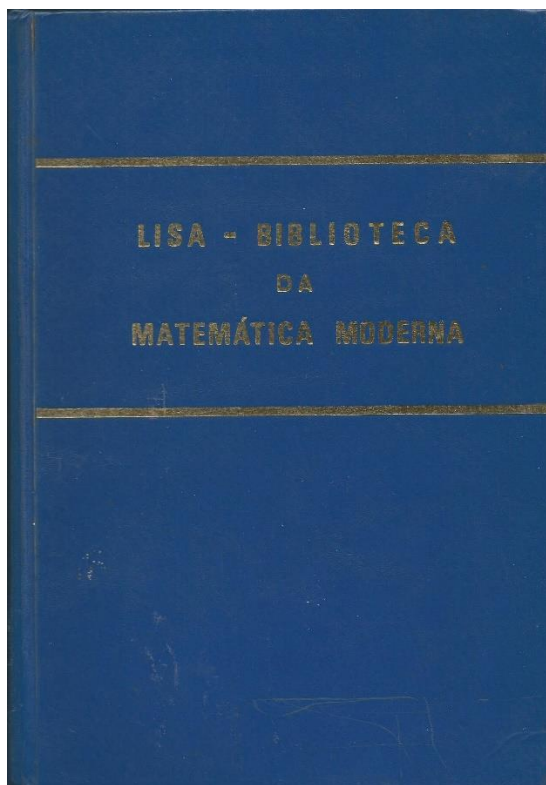
Fonte: Autor, 2017

Figura 65 – Capa do livro “Matemática para a escola moderna”.



Fonte: Autor, 2017

Figura 66 – Capa do livro “Biblioteca da Matemática Moderna”, de 1969.



Fonte: Autor, 2017

Quanto aos livros-texto contemporâneos, optamos por analisar os conteúdos de três publicações de cada um dos dois últimos anos do Ensino Fundamental, ou seja, o oitavo e o nono, respectivamente correspondentes às antigas sétima e oitava séries do Primeiro Grau. Por se tratar de obras que é possível encontrar com facilidade em livrarias como Eldorado, Saraiva e qualquer outra que trabalhe com material escolar, não julgamos procedente mostrar suas capas, como fizemos com os livros antigos.

Do oitavo ano os livros aqui citados são “A Conquista da Matemática”, de Benedicto Castrucci, José Ruy Giovanni e José Ruy Giovanni Jr. – Editora FTD S.A. (2007), “Matemática”, de Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis – Editora Moderna Ltda. (2009) e o “Araribá Plus Matemática”, também da Moderna (2014). Quando nos debruçamos sobre os seus sumários (e eis aqui a primeira diferença em relação aos livros antigos, que chamavam isto de “Índice”, e não de “Sumário”), veio a primeira surpresa: ao contrário do que se poderia esperar, uma vez que são de editoras diferentes e têm seus anos de publicação mais afastados, os livros de 2007 e 2014 são mais próximos um do outro, em termos de conteúdo, do que o de 2009 com qualquer um dos dois. “A Conquista da Matemática” e “Araribá Plus Matemática” começam com um capítulo dedicado aos números reais, em seguida abordam monômios e polinômios, produtos notáveis e fatoração.

O livro de Imenes e Lellis se inicia com números primos, depois fala de operações com frações. No tocante à Geometria, também há uma afinidade temática entre aquelas duas obras, que introduzem o assunto definindo ponto, reta e plano como “conceitos intuitivos” (“A Conquista...”) e “elementos primitivos” (“Araribá...”) da Geometria, sendo que o primeiro se preocupa em também trazer a etimologia da palavra “Geometria” e comentar brevemente alguns antecedentes históricos do assunto, enquanto o segundo procura contextualizar o conceito de “projeções”, recorrendo a exemplos com shows e outros espetáculos. Ao passo que Imenes e Lellis preferem mostrar ao seu público os instrumentos tradicionais do desenho geométrico plano, o que nos parece uma alternativa bastante válida – com efeito, o aluno que trava contato com construções geométricas na prática, aprendendo sobre a construção de lugares geométricos e conhecendo os processos de determinação da terceira e quarta proporcionais naturalmente fica melhor capacitado para compreender e assimilar os assuntos do âmbito da Geometria. Aliás, e graças a sermos possuidores também de exemplares dos livros de Imenes e Lellis do 6º e 7º anos, podemos dizer que, a priori, se fôssemos encarregados de recomendar uma coleção de livros do segundo ciclo do ensino fundamental, para adoção em uma escola, é bastante provável que recaísse sobre eles a nossa opção, posto que também nos anos anteriores seus

livros sugerem que o aluno tente desenhar as figuras, recomendando-o até mesmo mediante o apelo a fatores de natureza artística.

Os assuntos de nosso maior interesse, todavia, são Semelhança de Triângulos e Quadriláteros Inscritíveis e Circunscritíveis. Não aparecem nos livros de 8º ano, razão por que analisamos agora os livros do 9º ano de que dispomos: “Matemática”, de Edwaldo Bianchini – Editora Moderna (2006), “Matemática & Realidade”, de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado – Atual Editora (2009) e “Araribá Plus Matemática”, Editora Moderna (2014).

O livro de Edwaldo Bianchini principia o seu ataque à semelhança de triângulos falando de proporcionalidade em Geometria, com o conceito de razão entre (as medidas de dois) segmentos de reta, seguindo depois com feixe de paralelas, teorema de Tales, o corolário da reta paralela ao lado de um triângulo determinando segmentos proporcionais nos outros dois lados, o teorema da bissetriz interna, para então abordar semelhança, iniciando com um enfoque mais genérico de figuras semelhantes, polígonos semelhantes (com uma boa ideia de atividade prática visando a ampliação / redução de figuras pela utilização de papel quadriculado) e só então chegando à semelhança de triângulos. Onde, infelizmente, comete o mesmo erro que apontamos anteriormente no livro “Geometria”, de Oswaldo Marcondes: define a semelhança de triângulos como sendo o que acontece quando, analogamente à semelhança de polígonos, os lados correspondentes são proporcionais e os ângulos correspondentes são congruentes. Então não fica claro que basta uma dessas condições ser verdadeira, que ela acarreta a outra. Mais adiante ele expõe a circunferência e o círculo e os polígonos regulares, mostrando que são circunscritíveis e inscritíveis. Mas não há menção ao teorema de Pitot ou quadriláteros cíclicos.

A obra de Iezzi, Dolce e Machado também mostra a comparação de grandezas expressas como comprimentos de dois segmentos de reta, e prossegue com o feixe de paralelas e o teorema de Tales. Ao começar a falar de semelhança se vale de boas ilustrações para enfatizar a ideia de “mesma forma”, e quando chega finalmente à semelhança de triângulos ele o faz diretamente, sem antes abordar genericamente a semelhança de polígonos – aliás ele não toca nesse assunto em parte alguma do livro, a nosso ver um acerto, já que qualquer polígono pode ser decomposto em triângulos, e então a semelhança destes últimos torna implícita, quando isto se aplica, a semelhança daqueles. Com isso o livro é extremamente feliz quando define a semelhança de triângulos, pois o faz com uma ótima figura mostrando um triângulo menor “dentro” de outro maior, salientando então a congruência angular entre os dois. Continua a sua saga geométrica com triângulos retângulos, suas relações métricas, e mais adiante também se detém sobre polígonos regulares, naturalmente inscritíveis e circunscritíveis. Focando apenas nos assuntos do domínio da Geometria, esse livro nos parece superior ao anterior.

A publicação “Araribá Plus” faz uma revisão dos conceitos de razão e proporção, sem associá-los a segmentos de reta, e dando exemplos como o da velocidade média, uma escolha acertada. Depois envereda por razão entre dois segmentos, proporção, feixe de retas paralelas e o teorema de Tales, de forma bastante similar ao que fizeram os dois livros anteriores. Aborda as figuras semelhantes, também utilizando de forma feliz os exemplos de ampliação e redução com papel quadriculado como ilustração, e então define polígonos semelhantes. Quando define a semelhança de triângulos, comete o mesmo erro já comentado por duas vezes nessa dissertação, aqui ainda mais gritante, porque a definição que aparece é: “Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais”, ou seja, dando a um aluno sem bagagem prévia do assunto a impressão errônea de que é preciso verificar duas condições independentes entre si para garantir a semelhança de triângulos. Mais adiante o livro expõe os mesmos assuntos dos dois anteriores, uma vez mais sem mencionar quadriláteros circunscritíveis ou inscritíveis, à exceção dos quadrados, e portanto sem enunciar os teoremas de Pitot e dos quadriláteros cíclicos.

O exposto nos catorze parágrafos anteriores nos leva a duas conclusões principais:

1^a) de um modo geral, os livros de Matemática do século passado eram mais crus, em termos de terem muito menos ilustrações e de serem, para usar uma expressão em inglês bastante atual, menos *user friendly*, mas eram também mais fortes, no que se refere ao conteúdo, que os livros-texto adotados por nossas escolas atualmente – é como se fosse necessário um esforço muito maior, para ensinar os mesmos conceitos aos alunos de hoje, em comparação com seus pais e avós: muitas figuras, muita (tentativa de) contextualização, uma plêiade de exemplos... mas menos conteúdo, no frigidar dos ovos;

2^a) para falar de livro que aborde ao menos *en passant* os quadriláteros (não regulares) inscritíveis e os circunscritíveis, é preciso sair da mesmice, da seara dos livros-texto comumente adotados por nossas escolas, é preciso escolher ponto fora da curva, pensar fora da caixa.

É o caso de dois livros que nem são exatamente novos no mercado editorial, mas que conservam, não à toa, inabalável prestígio entre os docentes de Matemática no Brasil. Nos referimos à coleção “Geometria” (em dois volumes), do saudoso mestre Morgado, de Eduardo Wagner (docente do IMPA) e Miguel Jorge (vetusto professor do IME e do Colégio Santo Inácio), atualmente na quarta edição, sob os auspícios de uma editora pouco conhecida, a VestSeller, e ao não menos renomado “Fundamentos de Matemática Elementar – volume 9”, dedicado exclusivamente à Geometria Plana, do supracitado Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo, em sua 9^a edição, da Atual Editora.

6.1.3 Outros livros brasileiros de Geometria

O livro “Geometria II”, em sua 4ª edição, de 2008, traz, em seu Capítulo 8, dedicado aos quadriláteros, as condições para que um polígono de quatro lados seja tanto inscrito como circunscrito, separadamente, mas sem apresentá-las nas formas de teoremas. Também contém as relações (teoremas) de Ptolomeu e Hiparco para quadriláteros inscritíveis, e, após enunciar e demonstrar a fórmula de Brahmagupta para estes últimos (expressão 2.9 nessa dissertação), chega, em seu item 8.10, à expressão da área do quadrilátero inscrito e circunscrito – sem usar a denominação “bicêntrico” – como sendo dada pela raiz quadrada do produto das medidas de seus lados (expressão 2.10 nessa dissertação). Na relação de Problemas Propostos que se segue, há o desenho de um quadrilátero, utilizado para o enunciado que é comum às questões de 309 a 312. Esse quadrilátero aparece inscrito em um círculo, e, por ter dois lados de comprimentos diferentes concorrendo em um ângulo interno que é reto, trata-se de uma pipa reta, ou seja quadrilátero bicêntrico - mas isso não é citado.

O mesmo livro II apresenta antes o assunto da Semelhança de Triângulos, mas a define se baseando na proporcionalidade dos lados homólogos dos triângulos, mostrando a seguir que isto implica na congruência dos ângulos, e vice-versa, na forma de um teorema.

O livro “Fundamentos de Matemática Elementar – Geometria plana”, em sua 9ª edição, datada de 2013, contém, no Capítulo X, “Circunferência e círculo”, os tópicos de números 155, 156 e 157, “Quadrilátero circunscrito – definição”, “Propriedade” e “Condição necessária e suficiente”, em que, basicamente, enuncia e demonstra o Teorema de Pitot, ida e volta (embora não cite o nome do matemático e engenheiro francês), que é o conteúdo do item 2.3.2 desta dissertação. Mais adiante, no tópico 169, “Quadrilátero inscrito – propriedade”, enuncia e demonstra o teorema correspondente, que integra o item 2.3.3 deste trabalho. O exercício proposto de número 373, na lista relativa a esse capítulo, faz referência em seu enunciado a um trapézio isósceles circunscrito a um círculo, ficando portanto implícito que se trata de um quadrilátero bicêntrico, embora não haja menção alguma a isto.

Curiosamente esse livro apresenta a Semelhança de Triângulos apenas no Capítulo XII, portanto após os assuntos referentes a quadriláteros. E também aqui se comete o equívoco de definir a semelhança como ocorrendo se e somente se duas condições se verificam, quais sejam a proporcionalidade entre os lados homólogos dos dois triângulos e a congruência dos ângulos respectivamente opostos a tais lados em cada um deles.

O livro “Atividades Matemáticas – Geometria Plana”, de Silvio de Souza Ribeiro, editora MC Publicações Didáticas, em sua 4ª edição, de 2009, aborda o quadrilátero circunscrito e o Teorema de Pitot, como consequência do assunto das tangentes a uma circunferência tiradas de um ponto exterior, e depois o quadrilátero inscrito, em decorrência do assunto dos ângulos inscritos numa circunferência, também juntamente com o respectivo teorema. Os exercícios 21 e 23, do tópico de “Circunferência e Círculo”, lidam com trapézios isósceles circunscritos a círculos, e portanto bicêntricos. Este é mais um livro que incorre no erro de definir a semelhança de triângulos como se caracterizando pelas propriedades de proporcionalidade de lados e congruência de ângulos a eles opostos, como se fossem condições independentes e não uma delas sendo consequência imediata da outra.

A obra “Tópicos de Matemática Elementar”, da prestigiosa “Coleção do Professor de Matemática”, da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), em seu volume 2, dedicado à Geometria Euclidiana Plana, cujo autor é Antonio Caminha Muniz Neto, traz um item, o 3.5 Quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis, em que introduz uma inovação, a proposição 3.39, segundo a qual um quadrilátero convexo ABCD é inscritível se e somente se uma de duas condições é satisfeita, sendo a primeira delas a tradicional imposição de que dois ângulos internos opostos de ABCD sejam suplementares, mas a segunda a igualdade $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$.

Ressaltemos que é imediato que um quadrilátero cíclico seja tal que isto se dê, uma vez que, sendo A e D pontos da circunferência do círculo circunscrito a ABCD, os dois ângulos são inscritos relativos ao arco BC. Entretanto, a volta não é assim tão trivial, dependendo do apelo ao lugar geométrico do arco capaz, e desse modo é bastante oportuno que o livro da SBM traga isto. O livro também enuncia e demonstra o Teorema de Pitot, ao falar do quadrilátero circunscritível. Na lista de exercícios que se segue, um deles, de número 12, citado como tendo sido de uma Olimpíada Internacional de Matemática, pede que se construa, com régua e compasso, um quarto ponto, D, em um círculo onde já se encontrem previamente marcados três pontos A, B e C, de modo que o quadrilátero ABCD seja circunscritível. Salientemos, um tanto orgulhosos, nesse momento, que a resolução de tal exercício se encontra nessa dissertação, aparecendo aqui como um dos métodos de construção de um quadrilátero bicêntrico, em 3.5.2, com o procedimento ilustrado, passo a passo, pelas figuras 37 a 41.

Na mesma coleção da SBM há outro livro, “Geometria Euclidiana Plana”, de João Lucas Marques Barbosa, em que a Proposição 8.12 é o Teorema do Quadrilátero Inscritível, e o Teorema de Pitot para quadriláteros circunscritíveis aparece na forma de um problema desse mesmo capítulo, o de número 5. Não encontramos exercícios sobre quadriláteros bicêntricos nessa publicação.

6.2 O quadrilátero pipa: por que o ignoramos, se amamos as pipas?

Algo que chamou a nossa atenção desde que começamos a estudar os quadriláteros bicíclicos foi o fato, insólito a nosso ver, de que não haja, na literatura brasileira especializada em Geometria, menção alguma aos quadriláteros do tipo pipa (ou deltoide), no país em que é tão corriqueiro que as crianças, de norte a sul, se ocupem da popular arte de “empinar uma pipa”, tanto assim que esse brinquedo tão amado tem várias denominações em nosso território: papagaio, pandorga, pipa, raia. No subúrbio carioca adotam-se os nomes arraia, para designar o que em Geometria chamamos de pipa, isto é, um quadrilátero com dois pares de lados adjacentes congruentes; e pipa propriamente dita, para aquelas em forma de pentágono.

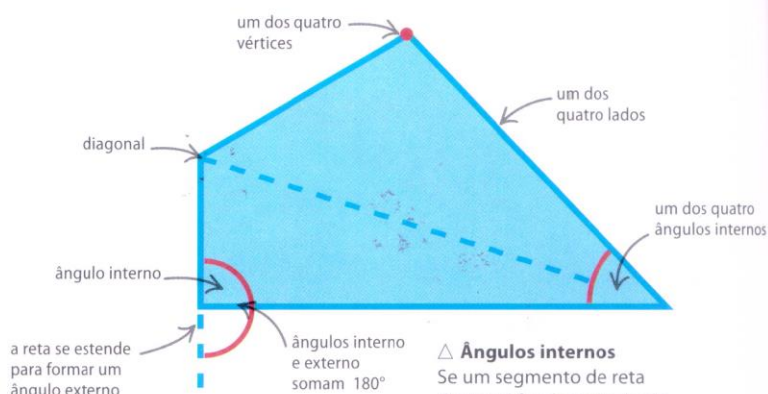
A bem da verdade, mesmo algumas publicações na língua inglesa esquecem tais quadriláteros ao fazer classificações dos polígonos com quatro lados e vértices. Encontra-se o verbete *kite*, mas há muitos sites que falam apenas em *parallelogram*, *trapezium* (no Reino Unido) ou *trapezoid* (nos Estados Unidos) para o que chamamos de trapézio em português, e *irregular quadrilateral* (por vezes *trapezoid*) (em inglês britânico) ou *trapezium* (em inglês norte-americano) para os quadriláteros que não possuem lados paralelos. O que parece ocorrer é que, na categorização dos quadriláteros, leva-se em conta apenas a existência ou não de um ou dois pares de lados opostos paralelos, ignorando os valores das medidas de tais lados como critério primário de separação e nomenclatura.

Após muita pesquisa finalmente encontramos uma publicação em português brasileiro que reconhece nas pipas “mérito suficiente” para constarem como um dos itens, em uma classificação de quadriláteros. Trata-se de “Matemática para pais e filhos”, de Carol Vorderman, obra traduzida do original em inglês, lançado na Grã-Bretanha em 2010 pela Penguin Random House, tendo tido seus direitos de lançamento no Brasil adquiridos pela Publifolha em 2015. O livro é interessante, muito acessível como o nome indica, e não se preocupa com resultados intrincados ou demonstrações de teoremas. No seu segundo capítulo, que se ocupa da Geometria, há, no verbete do Quadrilátero, um infográfico, na forma de fluxograma, onde são feitas e respondidas perguntas sobre o polígono convexo de quatro lados, que vão determinando de que tipo de quadrilátero se trata, conforme se pode ver na figura 66, conforme as sucessivas perguntas produzem um nível de especificação cada vez maior. Depois que se responde às questões “Todos os ângulos são retos?”, “Os ângulos opostos são iguais?”, “Há dois lados paralelos?” e “Há lados adjacentes de mesmo comprimento?” com três respostas “NÃO” sucessivas e uma resposta “SIM”, se chega finalmente à pipa.

Figura 67 – Classificação dos quadriláteros contemplando a pipa.

Introdução ao quadrilátero

O quadrilátero é uma forma bidimensional com quatro lados retos, quatro vértices (pontos de convergência dos lados) e quatro ângulos internos. Os ângulos internos do quadrilátero sempre somam 360° . Um ângulo interno e seu correspondente externo sempre somam 180° , porque formam uma reta. Há vários tipos de quadrilátero, cada um com propriedades diferentes.

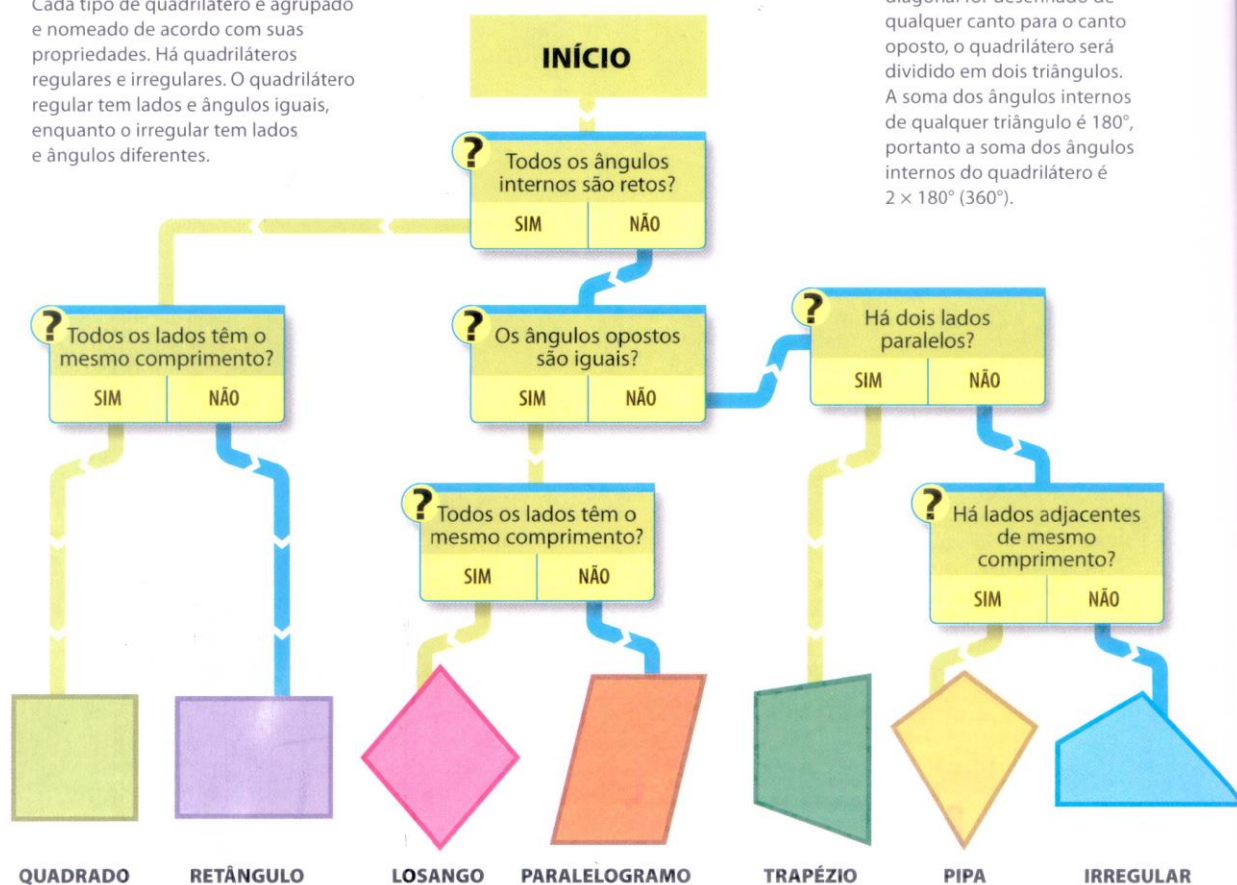


▽ Tipos de quadrilátero

Cada tipo de quadrilátero é agrupado e nomeado de acordo com suas propriedades. Há quadriláteros regulares e irregulares. O quadrilátero regular tem lados e ângulos iguais, enquanto o irregular tem lados e ângulos diferentes.

△ Ângulos internos

Se um segmento de reta diagonal for desenhado de qualquer canto para o canto oposto, o quadrilátero será dividido em dois triângulos. A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180° , portanto a soma dos ângulos internos do quadrilátero é $2 \times 180^\circ$ (360°).

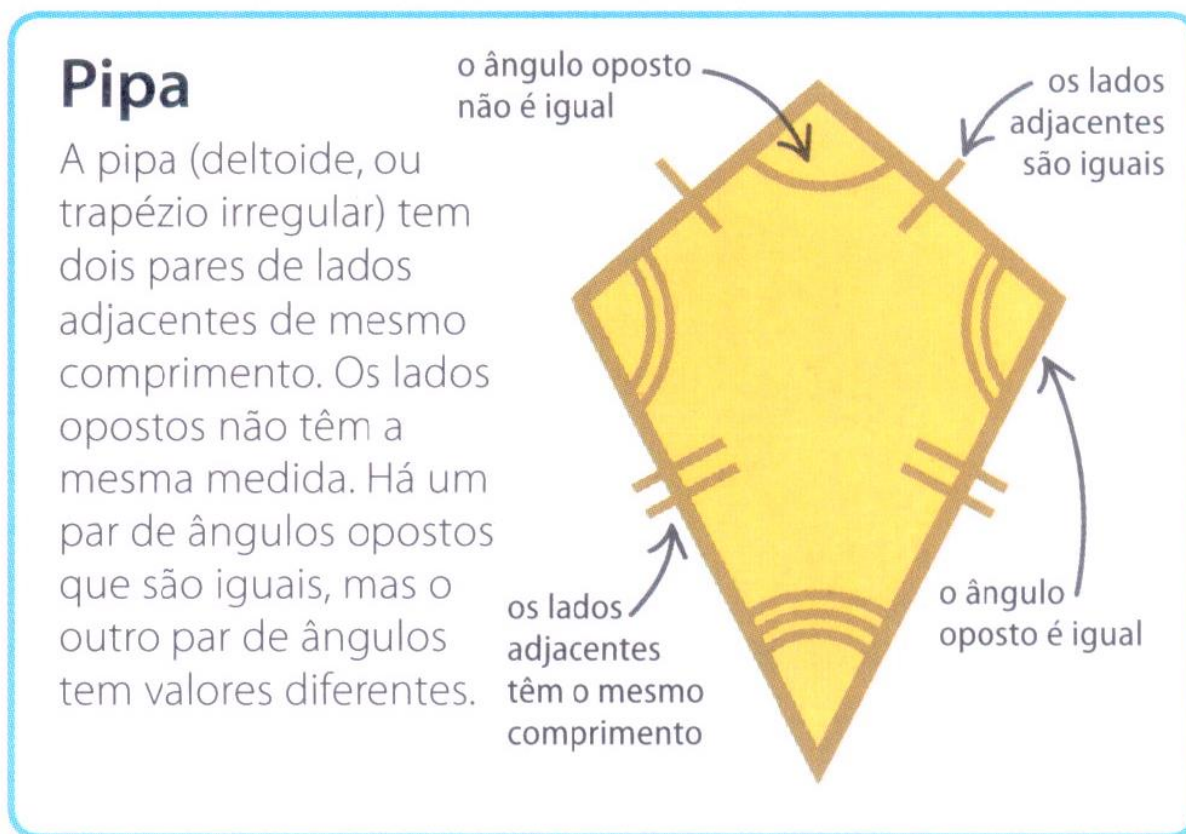


Fonte: Livro “Matemática para pais e filhos”, Publifolha, 2015.

Na página seguinte há uma boa definição para as pipas, o que é mostrado na figura 67. Não custa lembrar que são bicêntricas apenas as pipas retas, nas quais tenham o valor de 90° os ângulos opostos que são formados por dois lados não congruentes.

Há uma Dissertação de Mestrado, também sob a égide do Programa do ProfMat, que se ocupa especificamente dos quadriláteros pipa, muito apropriada aos que porventura desejem se aprofundar sobre o assunto.

Figura 68 – Definição de pipa em uma publicação escrita em português do Brasil.



Fonte: Livro “Matemática para pais e filhos”, Publifolha, 2015.

Uma curiosidade sobre pipas e trapézios isósceles, que sob certas condições podem ser bicêntricos (respectivamente se os ângulos congruentes forem retos, no caso das pipas, e se os lados desiguais corresponderem à média aritmética das bases, para os trapézios), e que respondem sempre pelas áreas (e perímetros) de maiores e menores valores, dentre todos os infinitos quadriláteros bicíclicos passíveis de construção para dois círculos que satisfaçam a Fórmula de Fuss, são ditos “duais”, sob certa perspectiva, presente, por exemplo, em um interessante livro que importamos, pois infelizmente não foi ainda lançado no Brasil. Seu nome é *Some Adventures in Euclidean Geometry*, e foi escrito por um matemático sul-africano, Michael de Villiers, sendo editado pela Lulu Press, Inc. No início de sua obra ele faz uma crítica bastante bem-humorada a respeito de certa incompletude das classificações dos quadriláteros, que também apontamos aqui, para indicar o nosso descontentamento com a exclusão das pipas de tais categorizações. Mais tarde ele explica que a dualidade é “um tipo especial de simetria”, que se dá, na Geometria, quando os vértices de um polígono correspondem aos lados do outro ou quando um dos polígonos é sempre inscrito e o outro circunscrito, ou ainda quando a

pontos colineares de um deles correspondem retas concorrentes do outro. Pensando sob essa ótica, são duais, para dar um primeiro exemplo de aplicação do peculiar conceito, os retângulos e os losangos, pois:

- em um retângulo os ângulos internos são iguais; em um losango os lados são iguais;
- retângulos são inscritíveis ou cíclicos; losangos são circunscritíveis ou tangenciais;
- retângulos têm dois eixos de simetria nas mediatrizes compartilhadas pelos seus lados opostos; losangos têm dois eixos de simetria nas bissetrizes compartilhadas pelos seus ângulos opostos.

Do mesmo modo são duais as pipas retas e os trapézios isósceles bicêntricos que com elas compartilham círculos inscrito e circunscrito. Senão vejamos:

- as pipas têm apenas dois ângulos opostos congruentes (mas não os outros dois); os trapézios isósceles têm apenas dois lados opostos iguais (mas não os outros dois);
- as pipas retas são bicíclicas, os trapézios isósceles, sob condições adequadas, também;
- as pipas retas bicêntricas têm um único eixo de simetria, que é dado pela bissetriz comum dos ângulos opostos que não são congruentes; os trapézios isósceles bicíclicos têm um único eixo de simetria, dado pela mediatriz comum dos lados opostos que não têm a mesma medida; além disso, para os mesmos círculos inscrito e circunscrito, a pipa reta e o trapézio isósceles bicêntricos compartilham tal eixo de simetria, comum a ambos. Na figura 53 pode-se examinar esse eixo de simetria, que é a reta dada pelos centros dos dois círculos, e que passa pelos vértices A e C da pipa reta, e pelos pontos médios M e N das bases do trapézio isósceles. E mais:
- cada um dos ângulos opostos congruentes das pipas retas (os retos) tem por valor a média aritmética das medidas dos outros dois ângulos opostos do quadrilátero; cada um dos lados opostos congruentes dos trapézios isósceles bicíclicos tem por valor a média aritmética das medidas dos outros dois lados opostos do quadrilátero.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pretendemos com essa dissertação mostrar que um assunto matemático relativamente pouco conhecido em nosso país pode, ainda assim, não só ser utilizado na resolução de problemas bastante agradáveis e desafiadores, como vêm a ser os Problemas das Quatro Guaritas, dos Quatro Herdeiros e das Quatro Retas, mas também e talvez principalmente suscitar a revisão de tópicos muito mais básicos, como a semelhança de triângulos, que têm enorme relevância, na construção do edifício do saber matemático, nesse caso especificamente o geométrico, e na solução de exercícios que são interessantes para qualquer candidato a exames de admissão a estabelecimentos de ensino, especialmente os do primeiro ano do nível médio, como é o caso das escolas militares, e as universidades.

A Geometria tem enorme importância como área do conhecimento humano, pois qualquer pessoa pode se deparar, a certa altura de sua vida, com situações do cotidiano em que seja imperioso lidar com medidas de posições, distâncias, ângulos, áreas, volumes, além do que uma boa bagagem de saber geométrico pode contribuir para o aguçamento da capacidade cognitiva que se convencionou chamar de inteligência espacial, que está ligada à nossa capacidade de orientação, à nossa aptidão para decifrar mapas, e a outros aspectos da vida mundana.

Por serem figuras geométricas com boa riqueza de detalhes, uma vez que as desenhemos sem omitir nenhuma de suas características principais, os quadriláteros bicêntricos despertam naturalmente a curiosidade dos jovens estudantes, atraídos pela sensação de harmonia e pela percepção de simetrias que são ensejadas pelos círculos, neles inscritos e a eles circunscritos. Quando se lhes revela, em sala de aula, que problemas lidando com esses graciosos polígonos podem ser resolvidos com razoável rapidez, através do apelo a teoremas básicos da geometria euclidiana, isto produz um encantamento e uma perplexidade inegáveis, e perceber que os alunos ficam enlevados, nas ocasiões em que trabalhamos com eles esse conteúdo, foi uma experiência rica e extremamente gratificante.

Assim, nosso desejo e nossa expectativa são de que essa dissertação de mestrado possa ser fonte, de pesquisas, por outros docentes, e também de inspiração a quem deseje, como foi o nosso caso, se propor o desafio de escrever o seu trabalho de conclusão da pós-graduação sobre um assunto para o qual não existe ainda literatura específica a respeito, em solo pátrio. A jornada de aquisição do saber científico é sempre a um só tempo cativante, desafiadora e bela!

REFERÊNCIAS

- Araribá Plus Matemática. Obra coletiva, concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editora executiva Mara Regina Garcia Gay. 4. ed. São Paulo: Moderna, 2014.
- BARBOSA, J. L. M. Geometria Euclidiana Plana. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- BIANCHINI, E. Matemática. São Paulo: Moderna, 2006.
- BIANCHINI, F. A origem da civilização indiana no vale do Indo-Sarasvati: teorias sobre a invasão ariana e suas críticas recentes. p. 57 – 108, in: GNERRE, M. L. A.; POSSEBON, F. (orgs.). Cultura oriental: língua, filosofia e crença. Vol.1 . João Pessoa: Editora da UFPB, 2012.
- BOURBAKI: *une société secrète de mathématiciens. Pour la Science*, Paris: fev.-maio 2000.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- CASTRUCCI, B.; GIOVANNI, J. R.; JR. J. R. G. A Conquista da Matemática. São Paulo: Editora FTD S. A., 2007.
- CHACE, A. B. The Rhind Mathematical Papyrus. Vol.1. Oberlin, Ohio (U.S.A.): Mathematical Association of America, 1927.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. Fundamentos de Matemática Elementar – volume 9. 9.ed. São Paulo: Atual, 2013.
- FOSSA, J. A. Ensaio sobre a Educação Matemática. 2ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.
- HAYASHI, T. Indian Mathematics, in: FLOOD, G. The Blackwell Companion to Hinduism, Oxford: Basil Blackwell, 616 pages, p. 360 – 375, ISBN 978-1-4051-3251-0.
- IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. Matemática e Realidade. São Paulo: Atual, 2009.
- IMENES, L. M.; LELLIS, M. Matemática. São Paulo: Moderna Ltda., 2009.
- KLINE, M. O Fracasso da Matemática Moderna. São Paulo: Ibrasa, 1976.
- MARCONDES. O. Geometria. São Paulo: Editora do Brasil, 1964.
- MASTROCHIRICO, R. Condições para um quadrilátero convexo ser um quadrilátero pipa. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do ABC, 2013.
- MIORIM, M. A. Introdução à História da Matemática: São Paulo: Atual, 2008.

MLODINOW, L. A janela de Euclides – A história da geometria: das linhas paralelas ao hiperespaço. São Paulo: Geração Editorial, 2005. p. 9 – 27.

MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M. Geometria II. Fortaleza: VestSeller, 2008.

MOURA, L. K. J. de. Abordagem alternativa no estudo dos quadriláteros. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Mato Grosso, 2013.

NETO, A. M. C. Tópicos de Matemática Elementar – Volume 2 – Geometria Euclidiana Plana. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NETO, S. D. P. Matemática para a Escola Moderna – 4ª série. São Paulo: Instituto Brasileiro de Edições Pedagógicas.

OLIVEIRA, A. M. de; SILVA, A. Biblioteca da Matemática Moderna – tomo 1 (Aritmética – Teoria dos Conjuntos – Geometria). São Paulo: Livros Irradiantes S.A., 1969.

PEREIRA, T. Curso de Geometria. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1898.

PIAGET, J. Para onde vai a educação? 8. ed. Rio de Janeiro: José Olympio, 1984.

QUINTELLA, A. Matemática – 3ª série. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1967.

RIBEIRO, S. S. Atividades Matemáticas – Geometria Plana. Rio de Janeiro: MC Publicações Didáticas, 2009.

ROQUE, T. História da Matemática – Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012. p. 13 - 28.

SOARES, F. Movimento da matemática moderna no Brasil: avanço ou retrocesso? Dissertação de Mestrado em Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2001. Disponível em: http://www2.dbd.puc-rio.br/pergamum/teses/2001-SOARES_F_S.pdf

VILLIERS, M. *Some Adventures in Euclidean Geometry*. KwaZulu-Natal (South Africa): Lulu Press, Inc., 2009.

VORDERMAN, C. Matemática para pais e filhos – a maneira mais fácil de compreender e explicar todos os conceitos da disciplina. São Paulo: Publifolha, 2015.

APÊNDICE

Aqui há resoluções de nossos alunos, para as três primeiras atividades apresentadas.

Figura 69 – Resolução da Atividade 5.1 pela aluna A

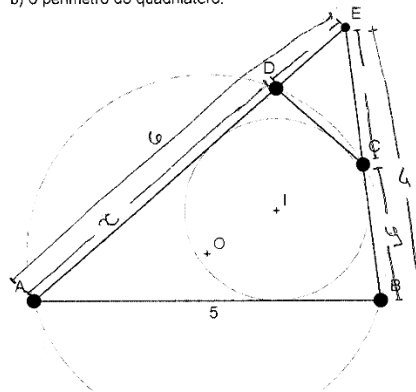
Pré-Vestibular Social da Fundação Cecierj / Consórcio Cederj – Pólo Centro – 2017
 Disciplina: Matemática – Tutor: Adolfo Luiz Braucks Vianna
 Turma: 01 Aluno: _____

Exercício de Aplicação

ABCD é quadrilátero bicêntrico. Sabe-se que:

AB = 5, BE = 4, EA = 6. Calcule:

- a) o valor do lado BC; $\rightarrow 2$
 b) o perímetro do quadrilátero.



Resolução:

$$\begin{aligned} AB &\rightarrow 5 \\ BE &\rightarrow 4 \\ EA &\rightarrow 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DE &= 6 - x \\ CE &= 4 - y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AD + CB &= 5 + DC \\ CD &= x + y - 5 \end{aligned}$$

$$\text{Perímetro DEC} = 6 - x + 4 - y + x + y - 5$$

$$\text{Perímetro DEC} = 5$$

$$\text{Perímetro ABE} = 5 + 4 + 6 = 15$$

$$\text{Perímetro ABE} = 15$$

$$\triangle CDE \sim \triangle ABE \rightarrow \frac{5}{15} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{DE}{BE} = \frac{6-x}{4} = \frac{4}{3} \rightarrow (6-x) \cdot 3 = 16$$

$$x = \frac{14}{3}$$

$$\frac{CE}{BE} = \frac{4-y}{4} = \frac{4}{3} \rightarrow (4-y) \cdot 3 = 16$$

$$12 - 3y = 16$$

$$-3y = 4$$

$$y = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

$$DC = \frac{14}{3} + 2 - 5$$

$$\frac{14}{3} + \frac{6}{3} - \frac{15}{3}$$

$$DC = \frac{5}{3}$$

$$\text{Perímetro DCAB} = \frac{5}{3} + 2 + 5 + \frac{14}{3}$$

$$\frac{5}{3} + \frac{16}{3} + \frac{15}{3} + \frac{14}{3}$$

$$\frac{40}{3}$$

Fonte: aluna A, 2017

Figura 70 – Resolução da Atividade 5.1 pelo aluno B

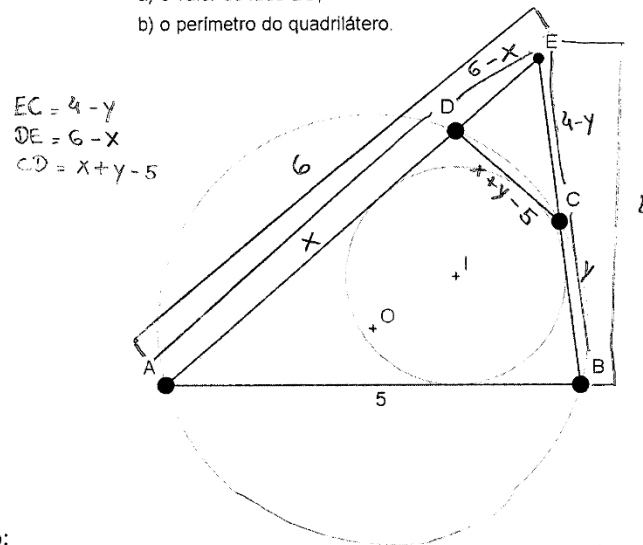
Pré-Vestibular Social da Fundação Cecierj / Consórcio Cederj – Pólo Centro – 2017
 Disciplina: Matemática – Tutor: Adolfo Luiz Braucks Vianna
 Turma: 1 Aluno: _____

Exercício de Aplicação

ABCD é quadrilátero bicêntrico. Sabe-se que:

AB = 5, BE = 4, EA = 6. Calcule:

- a) o valor do lado BC;
 b) o perímetro do quadrilátero.



Resolução:

$$\frac{4-y}{6} = \frac{6-x}{4} = \frac{10-(x+y)}{10} = \frac{(x+y)-5}{5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{4-y}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow 4-y=2 \quad \boxed{y=2}$$

$$\frac{6-x}{4} = \frac{1}{3}$$

$$(6-x) \cdot 3 = 4$$

$$18 - 3x = 4$$

$$3x = 14 \rightarrow \boxed{x = \frac{14}{3}}$$

$$a) \frac{14}{3} + 2 - \frac{15}{3} = \boxed{\frac{5}{3}} \rightarrow \text{VALOR "BC"}$$

~~~~~

b) Perímetro

$$5 + 2 + \frac{14}{3} + \frac{5}{3} = \boxed{\frac{26}{3}}$$

Figura 71 – Resolução da Atividade 5.1 pela aluna C

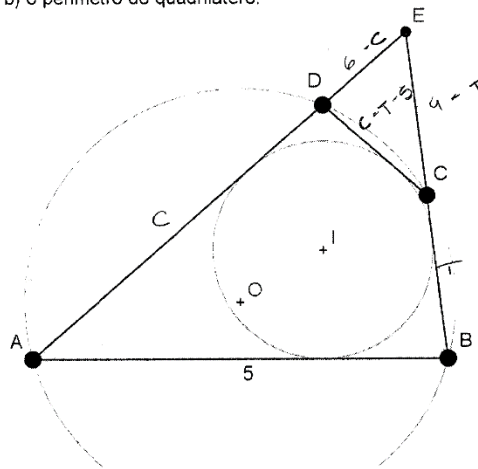
Pré-Vestibular Social da Fundação Cecierj / Consórcio Cederj – Pólo Centro – 2017  
 Disciplina: Matemática – Tutor: Adolfo Luiz Braucks Vianna  
 Turma: 01 Aluno: \_\_\_\_\_

Exercício de Aplicação

ABCD é quadrilátero bicêntrico. Sabe-se que:

AB = 5, BE = 4, EA = 6. Calcule:

- o valor do lado BC;
- o perímetro do quadrilátero.



Resolução:

$$EC = 4 - T$$

$$DE = 6 - C$$

$$\frac{4 - T}{6} = \frac{6 - C}{4} = \frac{10 - (C - T)}{10} = \frac{C + T - 5}{5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{4 - T}{6 = 2} = \frac{1}{3 = 1} = 4 - x = 2$$

$$x = 2$$

$$\frac{6 - C}{4} = \frac{1}{3} = (6 - C) \cdot 3 = 4$$

$$18 - 3C = 4$$

$$3C = 14 = C = \frac{14}{3}$$

$$B = p - \frac{5}{1} + \frac{2}{1} + \frac{14}{3} + \frac{5}{3} =$$

$$\frac{15 + 6 + 14 + 5}{6} = \frac{40}{3}$$

$$CD = \frac{14}{3} + 2 = \frac{15}{3} = \frac{5}{3}$$

Figura 72 – Resolução da Atividade 5.1 pelo aluno D

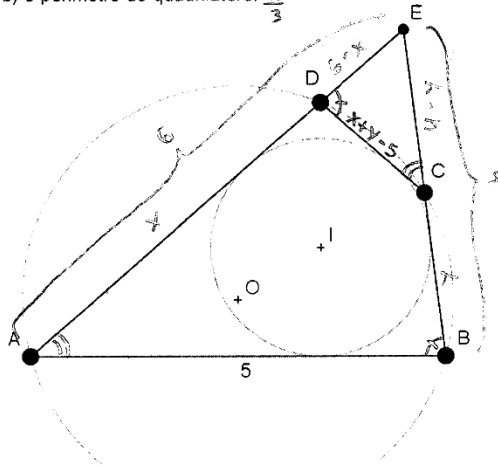
Pré-Vestibular Social da Fundação Cecierj / Consórcio Cederj – Pólo Centro – 2017  
 Disciplina: Matemática – Tutor: Adolfo Luiz Braucks Vianna  
 Turma: ELE01 Aluno: \_\_\_\_\_

Exercício de Aplicação

ABCD é quadrilátero bicêntrico. Sabe-se que:

AB = 5, BE = 4, EA = 6. Calcule:

- a) o valor do lado BC, 2  
 b) o perímetro do quadrilátero.  $\frac{40}{3}$



Resolução:

$$x + y = 5 + \overline{CD}$$

$$\overline{CD} = x + y - 5$$

$$\overline{CD} = \frac{14}{3} + 2 - \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

$$EC = 4 - y$$

$$DE = 6 - x$$

$$\frac{4 - y}{6} = \frac{6 - x}{4} = \frac{10 - (x + y)}{10} = \frac{(x + y) - 5}{5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{4 - y}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow 4 - y = 2 \Rightarrow \boxed{y = 2}$$

$$\frac{6 - x}{4} = \frac{1}{3} \Rightarrow (6 - x) \cdot 3 = 4 \Rightarrow 18 - 3x = 4 \Rightarrow 3x = 14 \Rightarrow x = \frac{14}{3}$$

Perímetro

$$5 + 2 + \frac{14}{3} + \frac{5}{3} = \frac{15}{3} + \frac{6}{3} + \frac{14}{3} + \frac{5}{3} = \frac{26}{3} + \frac{11}{3} = \frac{40}{3}$$

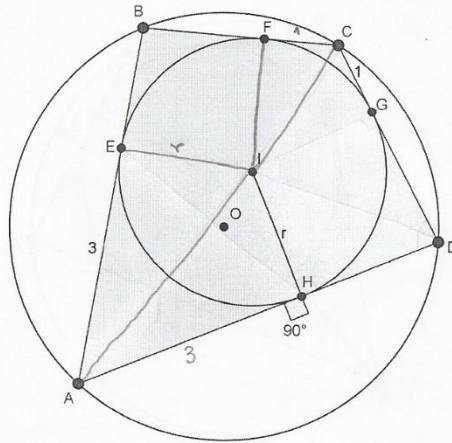
Fonte: Aluno D, 2017



Figura 73 – Resolução da Atividade 5.2 pela aluna E (1)

Pré-Vestibular Comunitário Floresta da Barra – 2017  
 Atividades em classe – Geometria Euclidiana Plana – Professor: Adolfo Braucks  
 Aluno: \_\_\_\_\_

Exercício 1. Usando conceitos estudados até aqui, principalmente semelhança de triângulos e quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis, determine o valor do raio  $r$  do círculo inscrito no quadrilátero ABCD. Justifique passo a passo toda a sua solução.



Solução:

$$\triangle AEI = \triangle IFC$$

$$\frac{AE}{IF} = \frac{EI}{FC} = \frac{AI}{IC} \Rightarrow \frac{3}{r} = \frac{r}{1} = \frac{AI}{IC}$$

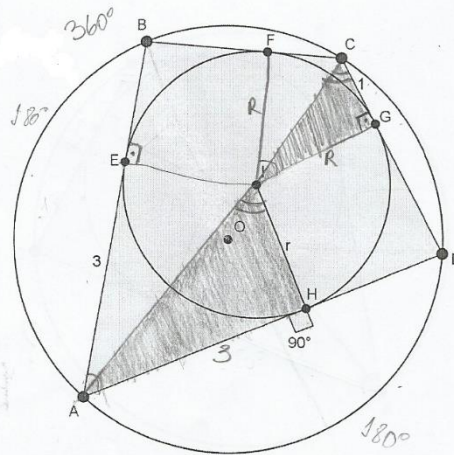
$$r^2 = 3 \Rightarrow r = \sqrt{3}$$



Figura 75 – Resolução da Atividade 5.2 pela aluna F (1)

Pré-Vestibular Comunitário Floresta da Barra – 2017  
 Atividades em classe – Geometria Euclidiana Plana – Professor: Adolfo Braucks  
 Aluno: \_\_\_\_\_

Exercício 1. Usando conceitos estudados até aqui, principalmente semelhança de triângulos e quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis, determine o valor do raio  $r$  do círculo inscrito no quadrilátero ABCD. Justifique passo a passo toda a sua solução.



Solução:

$$\triangle AHI \sim \triangle IGC$$

$$\frac{AH}{IG} = \frac{HI}{GC} = \frac{AI}{IC} \Rightarrow \frac{3}{R} = \frac{r}{1} = \frac{AI}{IC}$$

$$\frac{3}{R} = \frac{r}{1} \Rightarrow 3 = Rr \Rightarrow r = \frac{3}{R}$$

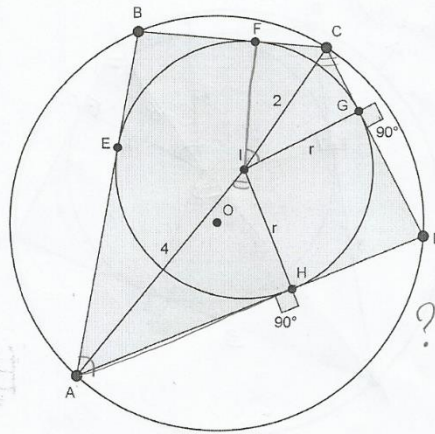
Figura 76 – Resolução da Atividade 5.2 pela aluna F (2)

Pré-Vestibular Comunitário Floresta da Barra – 2017

Atividades em classe – Geometria Euclidiana Plana – Professor: Adolfo Braucks

Aluno: \_\_\_\_\_

Exercício 2. Usando conceitos estudados até aqui, principalmente semelhança de triângulos e quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis, determine o valor do raio  $r$  do círculo inscrito no quadrilátero ABCD. Justifique passo a passo toda a sua solução.



Solução:

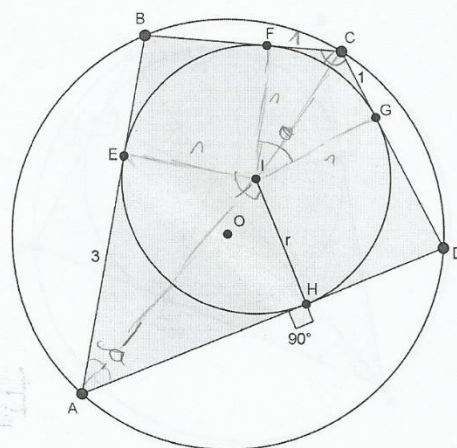
$$\triangle AHI \sim \triangle IGC$$

$$\frac{AH}{IG} = \frac{HI}{GC} = \frac{AI}{IC} \Rightarrow \frac{AH}{R} = \frac{R}{GC} = \frac{4}{2} \quad ?$$

Figura 77 – Resolução da Atividade 5.2 pelo aluno G (1)

Pré-Vestibular Comunitário Floresta da Barra – 2017  
 Atividades em classe – Geometria Euclidiana Plana – Professor: Adolfo Braucks  
 Aluno: \_\_\_\_\_

Exercício 1. Usando conceitos estudados até aqui, principalmente semelhança de triângulos e quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis, determine o valor do raio  $r$  do círculo inscrito no quadrilátero ABCD. Justifique passo a passo toda a sua solução.



Solução:

$$\frac{AE}{EF} = \frac{EI}{FC}$$

$$\frac{3}{r} = \frac{r}{1}$$

$$3 = r^2 \quad \boxed{r = \sqrt{3}}$$

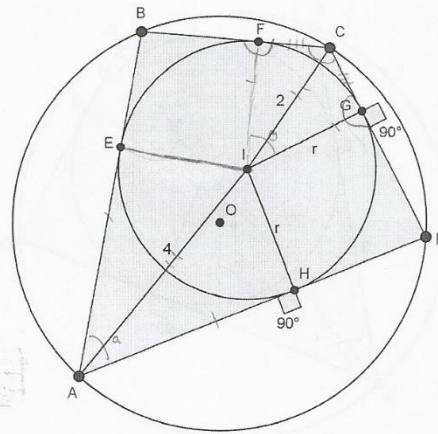
Figura 78 – Resolução da Atividade 5.2 pelo aluno G (2)

Pré-Vestibular Comunitário Floresta da Barra – 2017

Atividades em classe – Geometria Euclidiana Plana – Professor: Adolfo Braucks

Aluno: \_\_\_\_\_

Exercício 2. Usando conceitos estudados até aqui, principalmente semelhança de triângulos e quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis, determine o valor do raio  $r$  do círculo inscrito no quadrilátero ABCD. Justifique passo a passo toda a sua solução.



Solução:

$$\frac{AE}{2} = \frac{EI}{FC} = \frac{IA}{4}$$

$$\frac{4}{2} = \frac{r}{FC}$$

$$r = 2 \cdot FC$$

$$\left(\frac{r}{4}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = 1$$

$$\frac{r^2}{16} + \frac{r^2}{4} = 1$$

$$r^2 + 4r^2 = 16$$

$$5r^2 = 16$$

$$r = \sqrt{\frac{16}{5}}$$

**Figura 79 – Resolução da Atividade 5.3 pela aluna H – Parte 1**

*Boa noite professor Adolfo.*

*Então, estava fazendo o que você explicou ontem, para montar o tal quadrilátero bicêntrico. Peguei uma folha de papel, para escrever os lados, que tinha medido com uma régua milimetrada depois de fazer os cortes, com a tesoura nas duas varetas do jogo. Anotei isso num papel, deu 13,2 cm e 6,7 cm na vareta verde. Achando também, 11,6 cm, e 8,3 cm na vermelha.*

*Daí, então eu fiz aquela conta, da diagonal, que explicou na aula com uma calculadora do celular, usando a tal fórmula de lei dos cossenos. e que ficou assim, o resultado:*

$$\begin{aligned}
 D^2 &= 13,2^2 + 11,6^2 - 2 \times 13,2 \times 11,6 \times \cos A = 6,7^2 + 8,3^2 + 2 \times 6,7 \times 8,3 \times \cos A \\
 \Rightarrow -2 \times 13,2 \times 11,6 \times \cos A - 2 \times 6,7 \times 8,3 \times \cos A &= 6,7^2 + 8,3^2 - 13,2^2 - 11,6^2 \\
 \Rightarrow -415,86 \times \cos A &= -195,02 \\
 \Rightarrow \cos A &= -195,02 / -415,86 = 0,4689558986
 \end{aligned}$$

*E então, calculando pela função da calculadora do celular o valor do ângulo a:*

$$A = \text{Inv } \cos^{-1} 0,4689558986 = 62,0334570222$$

*Daí eu peguei um transferidor e medi dois ângulos, um de 62 graus para ser o ângulo a e o outro oposto a ele, que no caso, seria o ângulo C do quadrilátero, o seu valor ele é o suplemento do outro Ângulo, o A:  $c = 180 - 62 = 118$  graus.*

*Eu tentei colar os pedaços das duas varetas fazendo esses ângulos, e tentei com cola mas ficou molenga, e também com chiclete, não deu certo. Pois ficou entortando tudo.*

*Então pensei, se não seria melhor desenhar com caneta colorida, das cores vermelha e também na cor azul por que não achei caneta verde, desenhando então o quadrilátero ABCD.*

*Com a régua desenhei uma reta de 8,3 cm, na caneta vermelha. Então usando o desenho que vc fez no quadro na aula eu sabia que agora vem o ângulo C. Sendo que na outra ponta da esquerda dessa reta, é o ponto B. Peguei o transferidor e marcando esse ângulo na direita, que no caso eu achei que era um ângulo de 118 graus. Com a régua, continuei fazendo uma linha reta, e parei quando encontrei a marcação de 6,7 centímetros. Ali ficou então o ponto D.*

*E de novo seguindo as anotações de aula, eu coloquei o compasso com abertura na régua milimetrada, como agora era lado que era pedaço da vareta vermelha, então abri até chegar no 11,6 centímetros. E no ponto B abri o compasso, agora lado verde, então valor de 13,2 cm.*

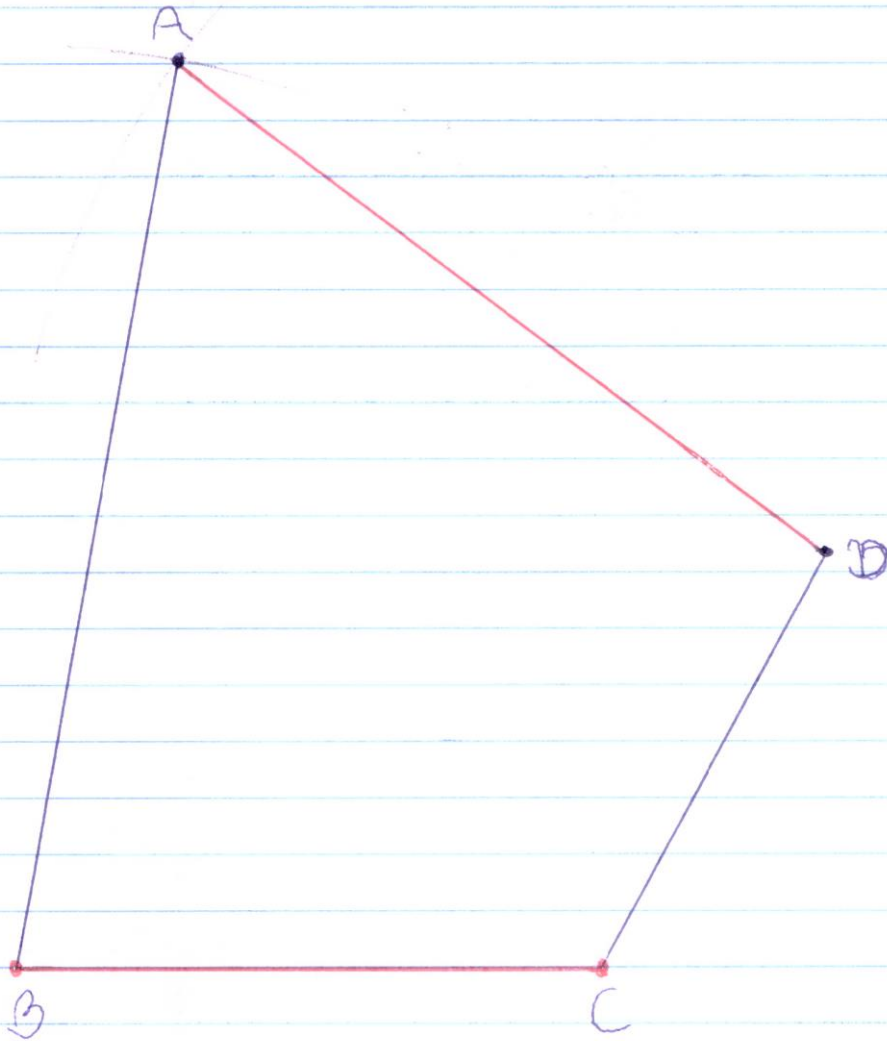
*Os dois círculos, se encontraram no ponto que vai ser no caso o ponto A. Depois eu completei o desenho com as canetas e usando a cor azul, porque eu não achei em casa caneta verde.*

*Na outra folha está o desenho, meu irmão passou num scanner da firma que trabalha. Mas não deu espaço aqui mesmo não, então estou mandando junto com essa explicação de o que eu fiz. Mas não consegui copia toda explicação de como desenharam os dois círculos, sendo que um dentro do quadrilátero, e outro, fora de ABCD mas passando pelos quatro pontos que eu tinha achado. Então acho que só falta esses dois círculos desenhados pra completar o "Para o lar".*

*Tomara que esteja certo.*

*Patricia*

Figura 80 – Resolução da Atividade 5.3 pela aluna H – Parte 2



Fonte: Aluna H, 2017