UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI - UFSJ
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA - DEFIM
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

JORDAN RAMIRES SANTANA

Métodos Numéricos para Cálculo de Autovalores e Autovetores

Ouro Branco
2018

JORDAN RAMIRES SANTANA

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA CÁLCULO DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Dissertação apresentada ao Departamento de Física e Matemática da Universidade Federal de São João del-Rei como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em rede Nacional, PROFMAT.

Orientadora: Profa. Dra. Gilcélia Regiane de Souza

Ouro Branco
2018

Santana, Jordan Ramires

Métodos numéricos para cálculo de autovalores e autovetores - 71 páginas

Jordan Ramires Santana - 2018

Orientadora: Profa. Dra. Gilcélia Regiane de Souza

Dissertação de Mestrado Universidade Federal de São João del-Rei/CAP.
Departamento de Física e Matemática - DEFIM.
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, 2018

1. Matrizes. 2. Autovalores. 3. Autovetores. 4. Métodos Numéricos.
5. Método da Potência. 6. Método de Householder. 6. Algoritmo QR.

JORDAN RAMIRES SANTANA

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA CÁLCULO DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Dissertação apresentada ao Departamento de Física e Matemática da Universidade Federal de São João del-Rei como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em rede Nacional, PROFMAT.

Aprovada em 02 de Fevereiro de 2018

Profa. Dra. Gilcélia Regiane de Souza	UFSJ
Prof. Dr. Rogério Casagrande	UFJF
Prof. Dr. Denis Gouvêa Ladeira	UFSJ

Dra. Gilcélia Regiane de Souza
Orientadora

Ouro Branco
2018

Sumário

Lista de Figuras

Resumo

Santana, Jordan Ramires. **Métodos numéricos para cálculo de autovalores e autovetores**. 2018. 71p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) − Universidade Federal de São João del-Rei, Campus Alto Paraopeba − CAP, Ouro Branco, MG.

O método básico para cálculo de autovalores de uma matriz é o uso da equação característica. No entanto, esse método tem limitações porque não existem fórmulas para determinar as soluções de equações polinomiais de grau maior do que 4. A saída para essa dificuldade é o uso de métodos numéricos para cálculo aproximado de autovalores. Nesse trabalho, apresentaremos dois métodos numéricos para o cálculo de autovalores: Método da Potência e o Algoritmo QR. Apresentaremos também o Método Householder para encontrar uma matriz simétrica tridiagonal semelhante a uma matriz simétrica. Finalizando, mostraremos exemplos de aplicações dos métodos numéricos estudados.

Palavras-chave: Matrizes, Autovalores, Autovetores, Métodos Numéricos, Método da Potência, Método de Householder, Algoritmo QR.

Abstract

Santana, Jordan Ramires. **Numerical methods for calculating eingevalues and eingenvectors**. 2018. 71p. Dissertation (Professional Master's Degree in Mathematics) – Universidade Federal de São João del-Rei, Campus Alto Paraopeba – CAP, Ouro Branco, MG.

The basic method for calculating eigenvalues of a matrix is the use of the characteristic equation. However, this method has limitations because there are no formulas to determine the solutions of polynomial equations of degree greater than 4. The output for this difficulty is the use of numerical methods for the approximate calculation of eigenvalues. In this work we present two numerical methods for the calculation of eigenvalues: Power Method and QR Algorithm. We will also present the Householder Method to find a symmetric tridiagonal matrix similar to a symmetric matrix. Finally, we will show examples of applications of the numerical methods studied.

Keywords: Matrices, Eigenvalues, Eigenvectors, Numerical methods, Power Method, Householder Method, QR Algorithm.

1 Introdução

A Álgebra Linear desempenha papel importante em diferentes áreas da Matemática. As engenharias, estatística, análise, computação e várias outras se utilizam com frequência das ferramentas de Álgebra Linear. O desenvolvimento da informática e o uso de algoritmos e modelos lineares justificam o aumento do interesse pela matéria. Nesse contexto, o estudo de autovalores e autovetores merecem destaque devido aos diversos usos e aplicações. Um grande número de problemas pode ser resolvido através da determinação de $\boldsymbol{x}$ (autovetor) e λ (autovalor) da equação $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Para isso considere a equação $det\,(A - \lambda I) = 0$, essa equação pode ser resolvida através de fórmulas que envolvem radicais, mas esse processo possui limitações porque não temos fórmulas desse tipo para resolver equações de grau igual ou superior a 5. A saída é utilizarmos métodos numéricos para calcular aproximadamente os autovalores. O objetivo principal desse trabalho é apresentar alguns desses métodos.

Inicialmente apresentamos uma revisão de conceitos básicos e de definições, envolvendo matrizes e vetores, importantes para o entendimento de todo o texto. Na sequência, definimos autovalores e autovetores, a equação que os relaciona, a teoria envolvida e exemplos. Para estimar a posição dos autovalores usamos o conceito de raio espectral e os Teoremas de Gerschgorin.

O Método da Potência foi o primeiro descrito. Explicamos, demonstramos e fizemos exemplos de sua aplicação. Mostramos também o uso do Quociente de Rayleigh, a estratégia de se usar a mudança de escala para trabalhar com números menores no método e estabelecemos qual o erro foi utilizado. Apresentamos também o algoritmo desse método.

Em seguida explicamos o Método de Householder. Antes, porém, falamos das transformações ortogonais, dando destaque para a matriz de Givens. O método de Householder é usado para transformar uma matriz inicial em uma matriz Hessenberger superior e se for simétrica, em uma matriz simétrica tridiagonal. Explicamos a transformada de Householder e a utilizamos em um exemplo para determinar uma matriz simétrica tridiagonal semelhante à uma matriz simétrica dada.

O método QR foi o último método apresentado. Caracterizamos todo o método e mostramos o seu uso em conjunto com as transformações de Givens em um exemplo. O método QR foi o escolhido para resolver um problema prático sobre vibrações induzidas por terremotos em um prédio de 5 andares.

Na última parte do trabalho, propomos 3 atividades que podem ser aplicadas em alunos do 3º ano do Ensino Médio, usando parte da teoria apresentada.

2 Conceitos Básicos

Nesta seção apresentamos alguns conceitos relacionados a Álgebra Linear, necessários para o desenvolvimento das seguintes seções. No Apêndice A, encontra-se alguns conceitos básicos.

Definição 2.1 *Seja V um conjunto não-vazio em que está definida a operação de adição e multiplicação por escalar. Se os seguintes axiomas são satisfeitos para os objetos* $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ *em V e para os escalares α e β em K, então dizemos que V é um* ***espaço vetorial*** *e que os objetos de V são* ***vetores****:*

Axioma 1: *Se* $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ *são objetos em V então $x + y$ é um objeto em V.*
Axioma 2: $\boldsymbol{x + y = y + x}$
Axioma 3: $\boldsymbol{(x + y) + z = x + (y + z)}$
Axioma 4: *Existe um objeto* $\boldsymbol{0}$ *em V, chamado* ***vetor nulo*** *ou* ***vetor zero*** *de V, tal que* $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}$ *para cada* $\boldsymbol{x}$ *em V.*
Axioma 5: *Para cada x em V, existe um objeto $-\boldsymbol{x}$, chamado um* ***negativo*** *de* $\boldsymbol{x}$*, tal que* $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
Axioma 6: *Se α é qualquer escalar e* $\boldsymbol{x}$ *é um objeto em V, então $\alpha\boldsymbol{x}$ é um objeto em V.*
Axioma 7: $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$.
Axioma 8: $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$.
Axioma 9: $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$.
Axioma 10: $1{\cdot}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

Se os escalares são reais então o ***espaço vetorial é real*** *e se os escalares são complexos o* ***espaço vetorial*** *é* ***complexo****. Nesse texto, normalmente os escalares serão considerados números reais.*

Definição 2.2 *Se $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ é um conjunto não-vazio de vetores, então a equação vetorial*

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + k_r\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{0}$$

tem pelo menos uma solução, a saber,

$$k_1 = 0,\ k_2 = 0,\ \ldots,\ k_r = 0$$

Se esta é a única solução, então o conjunto S é chamado ***linearmente independente*** *(L.I.). Se exitem outras soluções, então S é um conjunto* ***linearmente dependente*** *(L.D.).*

O número de vetores lineares de um espaço vetorial determina sua dimensão. Assim, se tiver um número n de vetores L.I., o espaço vetorial terá dimensão **n** e qualquer n + 1 vetores serão L.D.

Definição 2.3 *Qualquer conjunto de* ***n*** *vetores linearmente independentes é chamado* ***base*** *de um espaço vetorial de dimensão* ***n****.*

Dessa forma, qualquer vetor do espaço pode ser representado de forma única como uma combinação linear dos vetores de uma base.

Definição 2.4 *Uma* ***base*** γ *é* ***ortogonal*** *se é formada por vetores ortogonais entre si, ou seja, para todo par de vetores distintos* $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ *da base* γ *se verifica que* $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$*.*

Definição 2.5 *Uma* ***base*** β *é* ***ortonormal*** *se é ortogonal e todo vetor da base é um vetor unitário (ou seja,* $\| \cdot \| = 1$ *para todo vetor de* β*).*

Definição 2.6 *Um subconjunto* W *de um espaço vetorial* V *é chamado um* ***subespaço vetorial*** *de* V *se* W *é um espaço vetorial em relação as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em* V*.*

Definição 2.7 *Seja* V *um espaço vetorial. Um* ***produto interno*** *em* V *é uma função que a cada par de vetores* $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ *em* V *associa um número real, denotado por* $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$*, que satisfaz as seguintes condições:*

Para quaisquer vetores $\boldsymbol{u}$*,* $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ *de* V *e qualquer número real* k*,*

1. $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \geq 0$;

2. $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ *se, e somente se,* $\boldsymbol{v} = 0$;

3. $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle$;

4. $\langle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$;

5. $\langle k\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = k \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$

Um espaço vetorial com um produto interno é chamado, abreviadamente, de espaço com produto interno.

Definição 2.8 *Se* $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *e* $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *são vetores em* $\mathbb{R}^n$*, então a fórmula*

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

define $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ *como* ***produto euclidiano do*** $\mathbb{R}^n$*.*

No Apêndice A encontra-se alguns conceitos básicos a respeito de matrizes, abaixo apresentamos os conceitos usados nas seções seguintes:

Denotaremos por $\mathbb{R}^n$ o conjunto de todos os vetores coluna n dimensionais com componentes reais.

Definição 2.9 *Uma* ***norma de vetor*** *em* $\mathbb{R}^n$ *é uma função,* $\| \cdot \|$*, de* $\mathbb{R}^n$ *em* $\mathbb{R}$ *com as seguintes propriedades:*
(i) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$*,*
(ii)$\|\boldsymbol{x}\| = 0$ *se e somente se* $\boldsymbol{x} = 0$*,*
(iii) $\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{x}\|$ *para todo* $\alpha \in R$ *e* $\|\boldsymbol{x}\| \in \mathbb{R}^n$*,*
(iv) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ *para todo* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$*.*

Em $\mathbb{R}^n$, existe uma família inteira de normas, as chamadas normas-p.

Definição 2.10 *A norma-p do vetor* $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ *é representada por* $||x||_p$ *e definida por*

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ com } 1 \leqslant p < \infty$$

Na definição a seguir há duas normas importantes, a norma Euclidiana, caso particular da norma-p para p=2 e a norma infinita.

Definição 2.11 *As normas* $\|\boldsymbol{x}\|_2$ *e* $\|\boldsymbol{x}\|_\infty$ *do vetor* $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ *são definidas por*

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \left\{ \sum_{i=n}^{n} x_i^2 \right\}^{1/2} \text{ e } \quad \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

A norma $\|\boldsymbol{x}\|_2$ *é chamada* ***norma Euclidiana*** *ou* ***norma 2*** *do vetor* $\boldsymbol{x}$*.*

Exemplo 2.1 *O vetor* $\boldsymbol{x} = (2, -1, -3)^t$ *em* R^3 *tem normas*

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14} \quad e \quad \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\{|2|, |-1|, |-3|\} = 3$$

□

Definição 2.12 *Uma* ***norma de matriz*** *no conjunto de todas as matrizes* $n \times n$ *é uma função de valores reais,* $\|\cdot\|$*, definida neste conjunto, satisfazendo, para todas as matrizes* A *e* B *de ordem* $n \times n$ *e todos os números reais* α*:*

(i) $\|A\| \geq 0$*;*

(ii)$\|A\| = 0$*, se e somente se* A *for 0, a matriz com todos os elementos 0;*

(iii)$\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$*;*

(iv)$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$*;*

(v)$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Definição 2.13 *Seja* A *uma matriz* $(n \times n)$*. Definimos então: Matriz Norma 1 ou Coluna (* $\|A\|_1$ *), Matriz Norma Infinita ou Linha (* $\|A\|_\infty$ *) e Norma Euclidiana (* $\|A\|_E$*)*

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = \textit{a maior soma absoluta dos elementos da coluna.}$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \textit{ a maior soma absoluta dos elementos da linha.}$$

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

Definição 2.14 *Uma **matriz ortogonal** é uma matriz quadrada A com a propriedade*

$$A^{-1} = A^T$$

Baseado nessa definição, uma matriz A é ortogonal se, e somente se,

$$AA^T = A^T A = I$$

Observe que se A é ortogonal, então sua transposta também é uma matriz ortogonal ($(A^T)^{-1} = A$). Assim, a inversa de uma matriz ortogonal também é ortogonal.

Uma matriz ortogonal A possui as seguintes propriedades:

Propriedade I: O produto de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.
Demonstração: Para provar essa propriedade, lembre que $(AB)^T = B^T A^T$. Sejam R e S matrizes ortogonais, logo

$$(RS)\,(RS)^T = RSS^T R^T = R\left(SS^T\right)R^T = RR^T = I$$

$\square$

Propriedade II: Uma matriz ortogonal é uma matriz cujas linhas (ou colunas) formam uma base ortonormal (veja em [2]).

Propriedade III: Uma matriz ortogonal A conserva ângulos e norma (veja em [2]).

Propriedade IV: O determinante de uma matriz ortogonal A é -1 ou é 1.

Demonstração: Sabemos que A e A^T possuem o mesmo determinante e que o determinante de uma matriz identidade é igual a 1. Aplicando o determinante em ambos os membros de $AA^T = I$, temos

$$det(AA^T) = det(A)det(A^T) = (det(A))^2 = 1$$

$\square$

Propriedade V: Os autovalores reais de A são: -1 ou 1.

Demonstração: Seja λ um autovalor e $\boldsymbol{x}$ um autovetor correspondente a A (matriz ortogonal). Usando a propriedade III, sabemos que calcular $A\boldsymbol{x}$ não muda a norma de $\boldsymbol{x}$. Como $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, então podemos escrever

$$|\boldsymbol{x}| = |A\boldsymbol{x}| = |\lambda\boldsymbol{x}| = |\lambda|\,|\boldsymbol{x}|$$

Portanto, $\lambda = -1$ ou $\lambda = 1$. □

Um exemplo importante de matrizes ortogonais são as matrizes de rotação que serão descritas na definição a seguir.

Definição 2.15 *As matrizes abaixo rotacionam cada vetor do $\mathbb{R}^2$ no sentido horário e anti-horário, respectivamente, de um ângulo ϕ,*

$$\begin{bmatrix} cos\phi & sen\phi \\ -sen\phi & cos\phi \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} cos\phi & -sen\phi \\ sen\phi & cos\phi \end{bmatrix},$$

por isso são chamadas ***matrizes de rotação****.*

No $\mathbb{R}^n$, a matriz:

$$U = \begin{bmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& cos\phi & 0 & \dots & 0 & sen\phi && \\ &&&& 1 &&&&& \\ &&&& \vdots & \ddots &&&& \\ &&&&&& 1 &&& \\ &&& -sen\phi & 0 & \dots & 0 & cos\phi && \\ &&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&& 1 \end{bmatrix}$$

onde:

$$u_{pp} = u_{qq} = cos\phi,$$

$$u_{pq} = -u_{qp} = sen\phi,$$

$$u_{ii} = 1, \ i \neq p, \ i \neq q,$$

$$u_{ij} = 0, \quad no \ \ restante.$$

é uma matriz de rotação de um ângulo ϕ no plano dos eixos p e q.

Definição 2.16 *Duas **matrizes** A e B são **semelhantes** se existir uma matriz invertível P tal que*

$$PAP^{-1} = B \tag{1}$$

Note que se B é semelhante a A, podemos afirmar que A é semelhante a B. Logo, podemos dizer simplesmente que A e B são semelhantes. Para provar que essa afirmação é verdadeira basta multiplicar a equação (1) por P^{-1} à esquerda e por P à direita:

$$P^{-1}PAP^{-1}P{=}P^{-1}BP$$

Como $P^{-1}P$ é a matriz identidade:

$$A = P^{-1}BP$$

Usando que $(P^{-1})^{-1} = P$, obtemos:

$$A = P^{-1}B(P^{-1})^{-1}$$

Logo, pela definição, a matriz A é semelhante a B.

As matrizes A e B semelhantes possuem as seguintes propriedades:

Propriedade I: $\det(A) = \det(B)$.

Propriedade II: A é invertível $\iff$ B é invertível.

Propriedade III: A e B têm o mesmo polinômio característico[1].

Demonstração: Denotando por $p_A(x)$ e $p_B(x)$ os polinômios característicos de A e B, respectivamente. Se B é semelhante a A, existe uma matriz invertível Q tal que $B = Q^{-1}AQ$. Então,

$$p_B(x) = det\,(B - \lambda I) = det\,(Q^{-1}AQ - \lambda I) =$$

$$= det\,(Q^{-1}\,(A - \lambda I)\,Q)$$

$$= det\,(Q^{-1})\,det\,(A - \lambda I)\,det\,(Q)$$

$$= det\,(Q^{-1}Q)\,det\,(A - \lambda I)$$

$$= det\,(I)\,det\,(A - \lambda I)$$

$$= p_A(x)$$

□

Propriedade IV: A e B possuem os mesmos autovalores com a mesma multiplicidade (mas não possuem necessariamente os mesmos autovetores).

Demonstração: Usando a propriedade III, matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico, então possuem os mesmos autovalores com a mesma multiplicidade.

□

Propriedade V: A e B tem o mesmo traço.

[1] Pode ser mostrado que se A é uma matriz $n \times n$ então det $(A - \lambda I)$ é um polinômio de grau n chamado **polinômio característico** de A, sendo λ um escalar chamado autovalor.

Propriedade VI: A e B possuem o mesmo posto.

As demonstrações das outras propriedades pode ser encontrada em [2].

Definição 2.17 *(Matriz Diagonalizável)*

*Uma **matriz** A de ordem n é **diagonalizável** se for semelhante à uma matriz diagonal, ou seja, existe uma matriz não-singular P tal que $P^{-1}AP$ é a matriz diagonal. Nesse caso, dizemos que P **diagonaliza** A.*

Definição 2.18 *(Diagonalização)*

***Diagonalização** é o processo de encontrar uma matriz diagonal correspondente para uma matriz diagonalizável.*

Definição 2.19 *(Matriz Tridiagonal)*

Uma matriz tridiagonal é uma matriz quadrada cujos únicos elementos não nulos estão na diagonal principal e nas diagonais imediatamente acima e abaixo da principal.

Uma matriz T é dita tridiagonal se $T_{ij} = 0$ quando $|i - j| > 1$. Uma matriz tridiagonal genérica é apresentada a seguir:

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_{m-1\ n} \\ 0 & \cdots & 0 & t_{m\ n-1} & t_{mn} \end{bmatrix}$$

Esse tipo de matriz, entre outras aplicações, pode ser usada no algoritmo QR para aumentar a eficiência do método.

Definição 2.20 *O Núcleo de uma Matriz*
Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, chamaremos de $N(A)$ o conjunto de todas as soluções do sistema homogêneo $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$. Assim

$$N(A) = \{\boldsymbol{x}_{n\times 1} \in \mathbb{R}^n | \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}\}$$

Como em $N(A)$ se verifica a multiplicação por escalar e operação adição, podemos mostrar que $N(A)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$. No estudo de autovalores e autovetores precisaremos do conceito de núcleo de uma matriz.

Um **método iterativo**, em matemática computacional, é um procedimento que gera uma sequência de soluções aproximadas que vão melhorando conforme iterações executadas, e resolvem um problema inicialmente proposto. Para implementar um método iterativo é necessário um algoritmo iterativo e um critério de parada. Esse método recebe o nome de convergente se a sequência correspondente converge, fornecida uma tolerância inicial de aproximação.

Apresentar métodos iterativos para cálculo de autovalores é o objetivo principal desse trabalho.

3 Autovalores e Autovetores

A discussão da equação

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{2}$$

é fundamental para o entendimento de autovalores e autovetores. Observe que a equação (2) pode ser reescrita com

$$(A - \lambda I)\,\boldsymbol{x} = 0 \tag{3}$$

Encontrar um escalar λ para que o sistema $n \times n$ representado por essa equação tenha uma solução não-trivial é determinar o(s) autovalor(res) de A e o(s) autovetor(res) $\boldsymbol{x}$ associado(s) a ele. Como podemos ver na próxima definição.

Definição 3.1 *Para uma matriz A $n \times n$, escalares λ e vetores $\boldsymbol{x}_{n\times 1} \neq \boldsymbol{0}$ que satisfazem a equação $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, são chamados **autovalores** e **autovetores** de A, respectivamente, e qualquer desses pares, $(\lambda,\boldsymbol{x})$, são chamados **autopares** de A. O conjunto dos autovalores distintos, denotados por $\sigma(A)$, são chamados **espectro** de A.*

- *$\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow A - \lambda I$ é singular $\Leftrightarrow det(A - \lambda I) = 0$*

- $\{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \mid \boldsymbol{x} \in N(A - \lambda I)\}$ *o conjunto de todos os autovalores associados com* λ*. A partir de agora,* $N(A - \lambda I)$ *é chamado* ***autoespaço*** *de* A*.*

A interpretação geométrica de $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ deve ser entendida como uma transformação gerada por A, que causa nos autovetores mudanças apenas de tamanho ou sinal. A direção de $A\boldsymbol{x}$ em R^n continua a mesma de $\boldsymbol{x}$. O autovalor λ é simplesmente a medida de quanto o autovetor $\boldsymbol{x}$ dilatou ou contraiu.

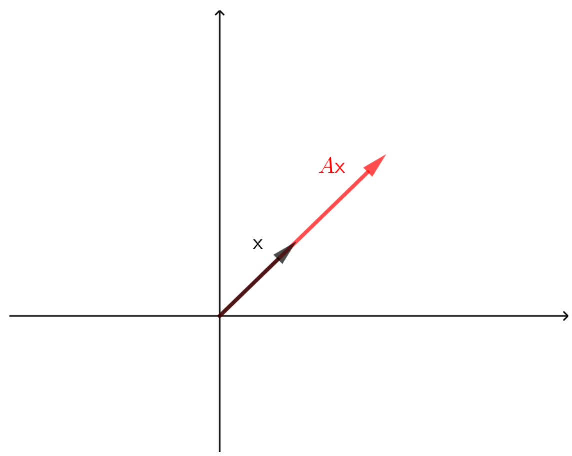

Figura 1: Interpretação geométrica de $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ com $\lambda > 1$

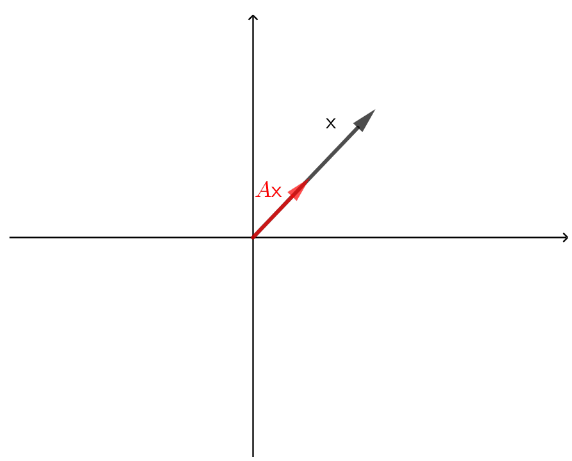

Figura 2: Interpretação geométrica de $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ com $0 < \lambda < 1$

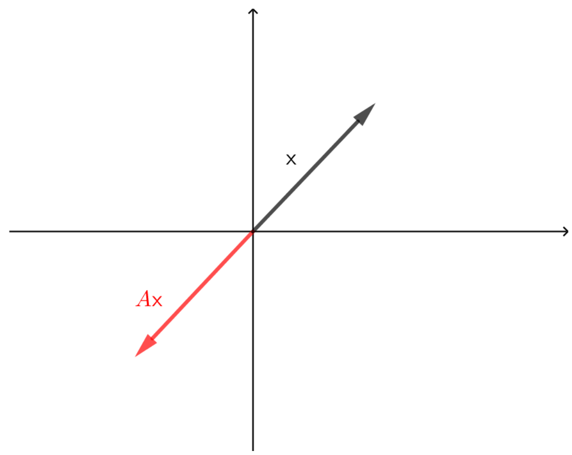

Figura 3: Interpretação geométrica de $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ com $\lambda < -1$

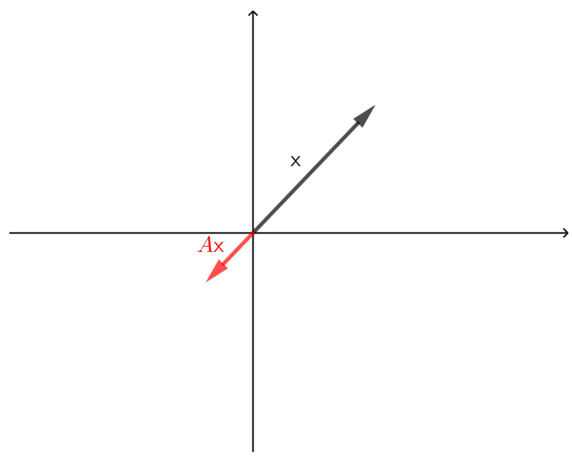

Figura 4: Interpretação geométrica de $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ com $-1 < \lambda < 0$

É importante destacar que a equação (2) resulta em um sistema homogêneo que obviamente possui a solução trivial, mas $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ não nos traz nenhuma informação útil. Buscamos, então, escalares λ e vetores não-nulos $\boldsymbol{x}$ que satisfazem a equação citada. Como não desejamos a solução trivial, o sistema homogêneo formado não deve ter solução única, assim $A - \lambda I$ deve ser singular (não ter inversa) e consequentemente $det(A - \lambda I)$ deve ser zero. O polinômio $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$ obtido é chamado de ***polinômio característico*** e as soluções da ***equação característica*** $p(\lambda) = 0$ são aos autovalores de A. O problema de determinar os autovalores e autovetores de uma matriz A dada é resolvido através da expansão de $det(A - \lambda I)$.

Exemplo 3.1 *Determine os autovalores e autovetores de*

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -7 \\ 14 & 11 \end{pmatrix}$$

Solução: *O polinômio característico é*

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -10-\lambda & -7 \\ 14 & 11-\lambda \end{vmatrix} = (-10-\lambda)(11-\lambda) - 98$$

Desenvolvendo e igualando a zero, temos:

$$\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$$

Resolvendo a equação, obtemos $\lambda = -3$ e $\lambda = 4$.

Para determinar os autovetores precisamos resolver os dois sistemas homogêneos $(A + 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e $(A - 4I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Já que A tem ordem 2, vamos considerar $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda = -3$,

$$A + 3I = \begin{pmatrix} -7 & -7 \\ 14 & 14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -7 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$x_1 = -x_2 \text{ e } x_2 \text{ livre} \Longrightarrow$$

$$N(A + 3I) = \left\{ x | x = \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Para $\lambda = 4$,

$$A + 4I = \begin{pmatrix} -14 & -7 \\ 14 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -14 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$x_1 = -x_2/2 \text{ e } x_2 \text{ livre} \Longrightarrow$$

$$N(A+3I) = \left\{ x | x = \alpha \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

□

Para o próximo Teorema precisaremos do conceito de raio espectral.

Definição 3.2 ***Raio Espectral***

Para matrizes quadradas A, o número

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

é chamado ***raio espectral*** *de A.*

Algumas aplicações requerem apenas um limite para os autovalores de A. Assim, a precisão de cada autovalor pode não ser necessária, mas apenas um limite superior. Uma aproximação mais grosseira pode ser obtida observando que $\rho(A) \leq \|A\|$ para toda norma de matriz. A seguir vamos demonstrar essa relação:

Demonstração: Note que, se $\boldsymbol{x}$ é um autovetor de A, então $\alpha\boldsymbol{x}$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$, também é, pois

$$A\alpha\boldsymbol{x} = \alpha A\boldsymbol{x} = \lambda\alpha\boldsymbol{x} = \alpha\lambda\boldsymbol{x}$$

Geralmente, os autovetores podem ser normalizados, ou seja, $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ em alguma norma escolhida.

Como $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, podemos

$$|\lambda| = |\lambda| \cdot \|\boldsymbol{x}\| = \|\lambda\boldsymbol{x}\| = \|A\boldsymbol{x}\| \leq \|A\|\|\boldsymbol{x}\| = \|A\|$$

Assim,

$$\rho(A) = \max |\lambda| \leq \|A\|$$

$$|\lambda| \leq \|A\| \;\; para \;\; todo \;\; \lambda \in \sigma(A).$$

□

Usando essa relação obtemos um grande círculo (em $\mathbb{C}$) cujo raio geralmente é muito maior do que o raio espectral $\rho(A)$. Podemos melhorar esse resultado usando um conjunto de círculos de Gerschgorin que são descritos nos teoremas a seguir.

Teorema 3.1 ***Teoremas de Gerschgorin***

Os Teoremas de Gerschgorin são usados quando queremos ter uma ideia da localização dos autovalores de uma matriz. Há situações onde não precisamos obter os autovalores com muita precisão, basta saber os sinais dos autovalores ou se estão contidos no círculo unitário.

a) Primeiro Teorema de Gerschgorin - Os autovalores de uma matriz $A = (a_{ij})$ estão na reunião dos círculos de centro a_{ii} e raio

$$r_i = \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

no plano complexo $\mathbb{C}$.

b) Segundo Teorema de Gerschgorin - Se a união de q desses círculos formam uma região conectada, isolada dos círculos restantes, então existe q autovalores nessa região.

Prova: A prova deste teorema pode ser encontrada em [17].

Vamos denotar por R_i o cículo do plano complexo com centro a_{ii} e raio $r_i = \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$; ou seja,

$$R_i = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

Exemplo 3.2 *Estime os autovalores de* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

A primeira aproximação que podemos fazer é usando o raio espectral (definição 3.2) e a relação $|\lambda| \leq \|A\|$. Como $\|A\|_\infty = 16$, temos 16 como o limite superior para os autovalores de A. Se usarmos o Teorema 3.1, conseguiremos uma aproximação melhor da posição dos *autovalores.*

Os círculos de Gerschgorin são:

$$R_1 = \left\{ z \in \mathbb{C};\;\; |z - a_{11}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{4} |a_{1j}| \right\} =$$

$$= \{z \in \mathbb{C};\;\; |z - 1| \leq |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}|\} = \{z \in \mathbb{C};\;\; |z - 1| \leq 2\}$$

$$R_2 = \left\{ z \in \mathbb{C};\;\; |z - a_{22}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{4} |a_{2j}| \right\} =$$

$$= \{z \in \mathbb{C};\; |z - 12| \leq |a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}|\} = \{z \in \mathbb{C};\;\; |z - 12| \leq 4\}$$

$$R_3 = \left\{ z \in \mathbb{C};\;\; |z - a_{33}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{4} |a_{1j}| \right\} =$$

$$= \{z \in \mathbb{C};\;\; |z + 1| \leq |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}|\} = \{z \in \mathbb{C};\;\; |z + 1| \leq 1\}$$

$$R_4 = \left\{ z \in \mathbb{C};\;\; |z - a_{44}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{4} |a_{1j}| \right\} =$$

$$= \{z \in \mathbb{C};\;\; |z - 0| \leq |a_{41}| + |a_{42}| + |a_{43}|\} = \{z \in \mathbb{C};\;\; |z| \leq 5\}$$

Para a matriz A, a representação para os Círculos de Gerschgorin são:

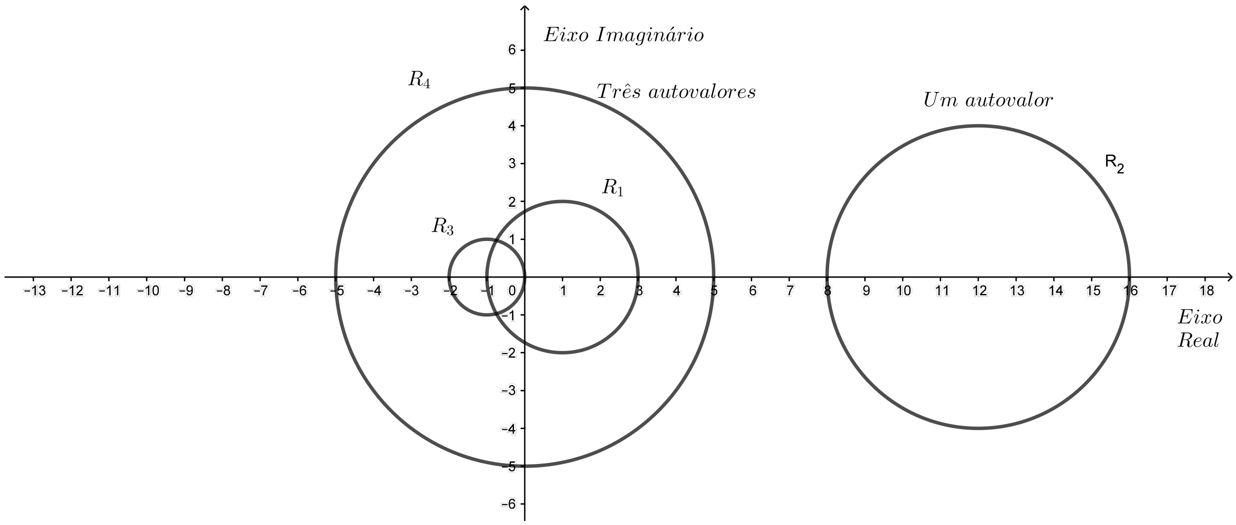

Figura 5: Círculos de Gerschgorin do exemplo 3.2

Já que R_1, R_3 e R_4 são disjuntos de R_2, existem 3 autovalores dentro de $R_1 \cup R_3 \cup R_4$ e um dentro de R_2 (segunda parte do Teorema 2.1). Usando outros recursos é possível descobrir que $\sigma(A) = \{\pm i, 2, 10\}$.

□

4 Necessidade de Métodos Numéricos Para Cálculo de Autovalores

Na seção 2 foi apresentado um método para determinar autovalores usando o polinômio característico e as soluções da equação característica. Entretanto, esse método envolve cálculo de determinantes, o que pode tornar o processo muito demorado, principalmente no caso de matrizes muito grandes. Outro problema que pode ocorrer é que a equação característica é uma equação polinomial e não existem fórmulas para determinar as soluções de equações polinomiais de grau maior que 4. Niels Henrik Abel provou que uma equação polinomial genérica do quinto grau não é solúvel por radicais. Galois fez uma teoria mais completa que estabeleceu condições sobre as quais uma equação polinomial arbitrária pode ser solúvel por radicais. Dessa forma, normalmente temos de trabalhar com valores aproximados para autovalores quando temos problemas práticos, ou seja, métodos numéricos que contornam as dificuldades que podem surgir com a equação característica.

Podemos determinar os autovalores de uma matriz M usando algoritmos que alcançam bons resultados. Os processos consistem em alterar M através de várias transformações de semelhança envolvendo matrizes ortogonais. Os elementos diagonais das matrizes que foram transformadas convergem rapidamente aos autovalores de M. O uso de matrizes ortogonais é explicado pelo fato que, em geral, evita o acúmulo de erros numéricos. Quando M é simétrica, a sequência de matrizes ortogonais resulta em uma matriz, que também é ortogonal e cujas colunas são os autovetores de M. Mesmo quando a matriz não é simétrica os algoritmos produzem autovalores com uma razoável precisão.

Na próxima seção falaremos de alguns métodos numéricos para cálculo de autovalores.

5 Métodos Numéricos para o Cálculo de Autovalores

Os métodos numéricos que serão usados nesse trabalho são:

1. Método das Potências.

2. Método de Householder.

3. O Algoritmo QR.

Na sequência vamos descrever esses métodos, faremos algumas demonstrações e resolveremos exemplos. O método Householder não é especificamente para determinar autovalores, mas é uma ferramenta útil no uso do algoritmo QR.

5.1 Método da Potência

O **Método da Potência** é o método utilizado quando temos interesse em determinar o autovalor de maior valor absoluto de uma matriz A e seu correspondente autovetor, sem o uso do polinômio característico. Esse autovalor é chamado de autovalor dominante de A.

Através de iterações o método da potência produz uma sequência de escalares que converge para o **autovalor dominante** λ_1 e uma sequência de vetores que converge para o **autovetor dominante** $\mathbf{v_1}$. Para facilitar, vamos considerar que a matriz A é diagonalizável. O Teorema a seguir é básico para o método da potência.

Teorema 5.1 *Seja A uma matriz $n \times n$ diagonizável com autovalor dominante λ_1, então* *existe um vetor x_0 não nulo tal que a sequência de vetores x_k definida por*

$$x_1 = Ax_0$$

$$x_2 = Ax_1$$

$$\vdots$$

$$x_k = Ax_{k-1}$$

tende a um autovetor dominante de A.

Demonstração:

Sabemos por hipótese que λ_1 é o autovalor dominante, então

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$$

Sejam $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ os autovetores correspondentes. Como também por hipótese, A é diagonalizável, então $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ são linearmente independente [1] e podemos escrever x_0 como uma combinação linear desses autovetores, assim:

$$x_0 = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + \ldots + c_n\mathbf{v_n} \tag{1}$$

Multiplicando pela esquerda os dois membros da equação (1) por A obtemos:

$$Ax_0 = c_1A\mathbf{v_1} + c_2A\mathbf{v_2} + \ldots + c_nA\mathbf{v_n} \tag{2}$$

Na equação (2), trocando Ax_0 por x_1 (1ª iteração) e lembrando da equação que relaciona autovalor e autovetor $A\mathbf{v_i} = \lambda_i\mathbf{v_i}$, podemos escrever:

$$x_1 = c_1\lambda_1\mathbf{v_1} + c_2\lambda_2\mathbf{v_2} + \ldots + c_n\lambda_n\mathbf{v_n} \tag{3}$$

Observe que $x_1 = Ax_0$.

Colocando λ_1 em evidência na equação (3):

$$x_1 = \lambda_1\left[c_1\mathbf{v_1} + c_2\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{v_2} + \ldots + c_n\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\mathbf{v_n}\right] \tag{4}$$

[1] Em álgebra linear, um conjunto S de vetores diz-se linearmente independentes se nenhum de seus elementos for combinação linear dos outros dois.

Multiplicando a equação (4) por A, teremos x_2 (2ª iteração). Observe também que

$$x_2 = Ax_1 = A(Ax_0) = A^2x_0$$

$$x_2 = \lambda_1 \left[c_1 A\mathbf{v_1} + c_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} A\mathbf{v_2} + \ldots + c_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1} A\mathbf{v_n} \right]$$

E novamente substituindo $A\mathbf{v_i}$ por $\lambda_i \mathbf{v_i}$, teremos:

$$x_2 = \lambda_1 \left[c_1 \lambda_1 \mathbf{v_1} + c_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \lambda_2 \mathbf{v_2} + \ldots + c_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \lambda_n \mathbf{v_n} \right]$$

Outra vez colocando λ_1 em evidência:

$$x_2 = \lambda_1 \lambda_1 \left[c_1 \mathbf{v_1} + c_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathbf{v_2} + \ldots + c_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \mathbf{v_n} \right]$$

$$x_2 = \lambda_1^2 \left[c_1 \mathbf{v_1} + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \mathbf{v_2} + \ldots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^2 \mathbf{v_n} \right]$$

$$\vdots$$

Generalizando,

$$x_k = \lambda_1^k \left[c_1 \mathbf{v_1} + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{v_2} + \ldots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{v_n} \right]$$

$$x_k = Ax_{k-1} = A^k x_0$$

Por hipótese, λ_1 é o autovalor de maior valor absoluto. Para $i = 1, \ldots, n$, $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right|$ é sempre menor que 1. Então,

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k = 0$$

Então,

$$x_k = A^k x_0 \to \lambda_1^k c_1 \mathbf{v_1} \;\; quando \quad k \to \infty,$$

como $\lambda_1 \neq 0$ e $\mathbf{v_1} \neq 0$, x_k converge para um múltiplo não nulo de $\mathbf{v_1}$, ou seja, um autovetor correspondente a λ_1, se $c_1 \neq 0$.(Essa é a condição que deve ser imposta sobre o vetor inicial: ele deve ter uma componente c_1 na direção do autovetor dominante $\mathbf{v_1}$). □

Abaixo apresentamos, um exemplo, somente para ilustração de uma matriz A 2×2 e seus autovalores:

Exemplo 5.1 *Dada a matriz A*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix},$$

e usando o processo descrito na seção 2, sabemos que o polinômio característico de A é

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

Assim, os autovalores de A são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$, do qual o dominante é $\lambda_2 = -2$ e o seu autovetor correspondente é da forma

$$x = \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

.

□

No exemplo a seguir usaremos o método da potência para determinar o autovalor dominante da matriz A do exemplo 5.1. Chamamos a atenção que para uma matriz de ordem

2×2 o processo não é atraente e desnecessário, mas escolhemos uma matriz pequena a título de ilustração:

Exemplo 5.2 *Encontre uma sequência que aproxime o autovetor dominante de A do exemplo 5.1 usando o método da potência:*

Solução:

Começamos pela escolha de um x_0 não-nulo:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 16 \\ 73 \end{bmatrix}$$

1ª iteração:

$$x_1 = Ax_0 = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -844 \\ -349 \end{bmatrix} = -349 \begin{bmatrix} 2,4183 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$$

2ª iteração:

$$x_2 = Ax_1 = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -849 \\ -349 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2500 \\ 901 \end{bmatrix} = 901 \begin{bmatrix} 2,7747 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$$

3ª iteração:

$$x_3 = Ax_2 = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2500 \\ 901 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5812 \\ -2005 \end{bmatrix} = -2005 \begin{bmatrix} 2,8988 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$$

4ª iteração:

$$x_4 = Ax_3 = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5812 \\ -2005 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12436 \\ 4213 \end{bmatrix} = 4213 \begin{bmatrix} 2,9518 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$$

5ª iteração:

$$x_5 = Ax_4 = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12436 \\ 4213 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25684 \\ -8629 \end{bmatrix} = -8629 \begin{bmatrix} 2,9765 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$$

6ª iteração:

$$x_6 = Ax_5 = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -25684 \\ -8629 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52180 \\ 17461 \end{bmatrix} = 17461 \begin{bmatrix} 2,9884 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$$

7ª iteração:

$$x_7 = Ax_6 = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 52180 \\ 17461 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -105172 \\ -35125 \end{bmatrix} = -35125 \begin{bmatrix} 2,9942 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$$

8ª iteração:

$$x_8 = Ax_7 = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -105172 \\ -35125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 211156 \\ 70453 \end{bmatrix} = 70453 \begin{bmatrix} 2,9971 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$$

9ª iteração:

$$x_9 = Ax_8 = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 211156 \\ 70453 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -423124 \\ -141109 \end{bmatrix} = -141109 \begin{bmatrix} 2,9986 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$$

10ª iteração:

$$x_{10} = Ax_9 = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -423124 \\ -141109 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 847060 \\ 282421 \end{bmatrix} = 282421 \begin{bmatrix} 2,9993 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$$

□

Note que na 10ª iteração obtemos um múltiplo escalar de $\begin{bmatrix} 2,9993 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$ que é bem próximo do autovetor dominante $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, obtido pelo polinômio característico.

Se encontramos o autovetor dominante, como podemos encontrar o autovalor dominante correspondente? Uma maneira possível é percebendo que, se x_k é aproximadamente um autovetor dominante de A correspondente a um autovalor dominante λ_1, então

$$x_{k+1} = Ax_k \approx \lambda_1 x_k$$

.

Exemplo 5.3 *Vamos calcular para o exemplo 5.2 a razão:*

$$s_k = \frac{x_{k+1}}{x_k}$$

$s_1 = \frac{901}{-349} = -2,5817$

$s_2 = \frac{-2005}{901} = -2,2253$

$s_3 = \frac{4213}{-2005} = -2,1012$

$s_4 = \frac{-8629}{4213} = -2,0482$

$s_5 = \frac{17461}{-8629} = -2,0235$

$s_6 = \frac{-35125}{17461} = -2,0116$

$s_7 = \frac{70453}{-35125} = -2,0058$

$s_8 = \frac{-141109}{70453} = -2,0029$

$s_9 = \frac{282421}{-141109} = -2,0014$

Chegamos a um valor λ igual a -2,0014 que é um valor próximo do autovalor dominante $\lambda_2 = -2$ obtido através do polinômio característico.

□

No cálculo do autovalor dominante foi possível fazer uma comparação com o resultado obtido pela razão s_k e o calculado pelo polinômio característico. Vamos supor que autovalor não tenha sido calculado previamente ou que o polinômio característico tenha um grau que impeça o seu cálculo usando equação. O Teorema a seguir fornece uma alternativa para o cálculo do autovalor dado o seu autovetor correspondente.

Teorema 5.2 ***Quociente de Rayleigh***

Se $\boldsymbol{x}$ é um autovetor de uma matrix A, então o seu correspondente autovalor é dado por

$$\lambda = \frac{A\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$$

Este quociente é chamado ***Quociente de Rayleigh****.*

Demonstração:

Como $\boldsymbol{x}$ é um autovetor de A, sabemos que $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ e podemos escrever

$$\frac{A\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}} = \frac{\lambda\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}} = \frac{\lambda\left(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}\right)}{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}} = \lambda$$

□

Quando o método da potência determina uma autovetor dominante com uma boa aproximação, o quociente Rayleigh fornece um correspondente autovalor dominante também com boa aproximação.

Exemplo 5.4 *Use o resultado do exemplo 5.2 para se aproximar do autovalor dominante da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Na 10ª interação do exemplo 4.1 tivemos:

$$x_{10} = \begin{bmatrix} 847060 \\ 282421 \end{bmatrix} = 282421 \begin{bmatrix} 2,9993 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$$

Usando $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2,9993 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$ como aproximação do autovetor dominante de A, usaremos o quociente Rayleigh para obter o autovalor dominante de A.

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,9933 \\ 1,0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6,0014 \\ -2,0007 \end{bmatrix}$$

$$A\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = \left(-6,0014\right)\left(2,9993\right) + \left(-2,0007\right)\left(1,0000\right) = -20,0007$$

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = \left(2,9993\right)\left(2,9993\right) + \left(1\right)\left(1\right) = 9,9958$$

Assim, o quociente Rayleigh é:

$$\frac{A\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}} = \frac{-20,0007}{9,9958} = -2,0009$$

que é uma boa aproximação do autovalor dominante $\lambda_2 = -2$.

Se analisarmos o exemplo 5.2, os resultados das componentes dos x_k obtidos nas iterações tornam-se rapidamente números de módulos grandes, o que pode gerar erros expressivos no final do processo. Para fugirmos desse problema, podemos multiplicar, a cada passo da iteração, o vetor obtido por algum escalar que diminua o módulo de suas componentes. Isso pode ser feito sem prejuízo porque múltiplos escalares dos x_k ainda irão convergir para um autovetor dominante. Uma possibilidade é dividir x_k por $\|x_k\|$, fazendo que cada vetor obtido na iteração fique unitário (normalização). Outra maneira, que é a que utilizaremos, é fazer a divisão de cada um dos x_k pela sua componente de maior valor absoluto (d_k) para que a maior componente fique igual a 1. Esse método recebe o nome de **mudança de escala**. Então, iremos substituir a componente x_k de maior valor absoluto por $y_k = \left(\frac{1}{d_k}\right) x_k$.

Voltando ao exemplo 5.2 para usarmos a mudança de escala:
Temos:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 16 \\ 73 \end{bmatrix}$$

Para x_0, temos $d_0 = 73$ e portanto,

$$y_0 = \left(\frac{1}{73}\right) x_0 = \left(\frac{1}{73}\right) \begin{bmatrix} 16 \\ 37 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2192 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = Ay_0 = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2192 \\ 1.0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11,5616 \\ -4.7808 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = \left(\frac{1}{-11,5616}\right) x_1 = \left(\frac{1}{-11,5616}\right) \begin{bmatrix} -11,5616 \\ -4,7808 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,4135 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = Ay_1 = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,4135 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,9621 \\ -1,0675 \end{bmatrix}$$

$$y_2 = \left(\frac{1}{-2,9091}\right) x_2 = \left(\frac{1}{-2,9621}\right) \begin{bmatrix} -2,9621 \\ -1,0675 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,3604 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = Ay_2 = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,3604 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,3248 \\ -0,8020 \end{bmatrix}$$

$$y_3 = \left(\frac{1}{-2,3248}\right) x_3 = \left(\frac{1}{-2,3248}\right) \begin{bmatrix} -2,3248 \\ -0,8020 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ -0,3450 \end{bmatrix}$$

$$x_4 = Ay_3 = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,3450 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,1397 \\ -0,7249 \end{bmatrix}$$

$$y_4 = \left(\frac{1}{-2,1397}\right) x_4 = \left(\frac{1}{-2,1397}\right) \begin{bmatrix} -2,1397 \\ -0,7249 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,3388 \end{bmatrix}$$

$$x_5 = Ay_4 = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,3388 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,0653 \\ -0,6939 \end{bmatrix}$$

$$y_5 = \left(\frac{1}{-2,0653}\right) x_5 = \left(\frac{1}{-2,0653}\right) \begin{bmatrix} -2,053 \\ -0,6939 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,3360 \end{bmatrix}$$

$$x_6 = Ay_5 = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,3360 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.0316 \\ -0,6798 \end{bmatrix}$$

$$y_6 = \left(\frac{1}{-2,0316}\right) x_6 = \left(\frac{1}{-2,0316}\right) \begin{bmatrix} -2,0316 \\ -0,6798 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,3346 \end{bmatrix}$$

$$x_7 = Ay_6 = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,3346 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.0156 \\ -0.6732 \end{bmatrix}$$

$$y_7 = \left(\frac{1}{-2,0156}\right) x_7 = \left(\frac{1}{-2,0156}\right) \begin{bmatrix} -2,0156 \\ -0,6732 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,3340 \end{bmatrix}$$

$$x_8 = Ay_7 = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,3340 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.0077 \\ -0.6699 \end{bmatrix}$$

$$y_8 = \left(\frac{1}{-2,0077}\right) x_8 = \left(\frac{1}{-2,0077}\right) \begin{bmatrix} -2,0077 \\ -0,6699 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,3337 \end{bmatrix}$$

$$x_9 = Ay_8 = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,3337 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.0038 \\ -0.6683 \end{bmatrix}$$

$$y_9 = \left(\frac{1}{-2,0038}\right) x_9 = \left(\frac{1}{-2,0038}\right) \begin{bmatrix} -2,0038 \\ -0,6683 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,3335 \end{bmatrix}$$

$$x_{10} = Ay_9 = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,3335 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.0020 \\ -0.6675 \end{bmatrix}$$

$$y_{10} = \left(\frac{1}{-2,0020}\right) x_{10} = \left(\frac{1}{-2,0020}\right) \begin{bmatrix} -2,0020 \\ -0,6675 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,3334 \end{bmatrix}$$

Podemos ver que a sequência de vetores y_k converge e temos que $y_{10} = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,3334 \end{bmatrix}$ é o autovetor dominante e a sequência de escalares d_k converge para $d_{10} = -2,0020$ que é o correspondente autovalor dominante.

Observação:

O autovetor dominante $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, obtido usando o polinômio característico, quando dividido por 3, sua componente de maior módulo, torna-se igual a $\begin{bmatrix} 1 \\ 0,3333 \end{bmatrix}$, o que mostra que y_{10} é uma boa aproximação.

5.1.1 Erro Relativo ϵ

Uma das maneiras de se calcular o erro no cálculo do autovalor λ é usar o erro relativo que chamaremos de ϵ. Esse tipo de erro pode ser usado também como critério de parada. Assim, por exemplo, podemos estabelecer que o λ deve ser calculado com precisão 10^{-2}, o que significa que as iterações devem ser feitas até ϵ ficar menor que 10^{-2}.

Definição 5.1 *Erro Relativo ϵ*

$$\epsilon = \frac{\left|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}\right|}{\left|\lambda_1^{(k+1)}\right|}$$

Exemplo 5.5 *Nas iterações realizadas com mudança de escala do exemplo 5.2, calcule o erro relativo ϵ no cálculo do autovalor dominante λ_1 na 7a iteração e na 10^a iteração:*

$$\epsilon = \frac{\left|\lambda_1^{(7)} - \lambda_1^{(6)}\right|}{\left|\lambda_1^{(7)}\right|} = \frac{|-2,0156 + 2,0316|}{|-2,0156|} = \frac{0,016}{2,0156} = 0,0079 < 10^{-2}$$

$$\epsilon = \frac{\left|\lambda_1^{(10)} - \lambda_1^{(9)}\right|}{\left|\lambda_1^{(10)}\right|} = \frac{|-2,0020 + 2,0038|}{|-2,0020|} = \frac{0,0018}{2,0029} = 0,0009 < 10^{-3}$$

5.1.2 Algoritmo do Método da Potência

O algoritmo que será apresentado foi feito no Octave [2]. O algoritmo tem como objetivo calcular o autovalor dominante de uma matriz usando o do método da potência. No programa é necessário primeiro o cálculo da norma infinita (normainf), assim o programa auxiliar da Figura 6 foi desenvolvido para tal fim.

[2]GNU Octave é uma linguagem computacional, desenvolvida para computação matemática. Possui uma interface em linha de comando para a solução de problemas numéricos, lineares e não-lineares, também é usada em experimentos numéricos. Faz parte do projeto GNU, é um software livre sob os termos da licença GPL. Foi escrito por John W. Eaton.

```
function IndiceMax=normainf(x)
% calculo da norma inf de um vetor

IndNorma=1;
Norma=abs(x(1));

N=length(x);

for i=2:N
    if(abs(x(i)) > Norma)
        Norma=abs(x(i));
        IndNorma=i;
    end
end

IndiceMax=IndNorma;

%disp('valor da norma inf ' );
%disp(Norma)
%disp('posicao da norma inf');
%disp(IndNorma);

end
```

Figura 6: Algoritmo para cálculo da normainf.

Depois de definir normainf, podemos apresentar um algoritmo para o método da potência (Figura 7).

```
function potencia(A,x,Tol)

% Normalizar o vetor com a norma inf
x = x./x(normainf(x));
iteracao=1;
Controle=1;

while Controle>0

    y=A*x';
    % normaliza o vetor y
    y=y';
    u=y(normainf(y));
    y=y./y(normainf(y));
    erro=y-x;
    normaerro=abs(erro(normainf(erro)));
    if normaerro<Tol
        Controle=0;
        disp('autovalor');
        disp(u);
        disp('autovetor');
        disp(y)
        disp('número de iterações');
        disp(iteracao);
    end
    x=y;
    iteracao=iteracao+1;
end
```

Figura 7: Algoritmo do Método da Potência

Exemplo 5.6 *Uso do algoritmo mostrado na Figura 7 para calcular o maior autovalor e seu autovetor correspondente da matriz A de ordem 5×5 abaixo:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Resultados obtidos:

```
>>A=[1 2 5 3 2;1 3 7 3 4;0 5 2 2 1;1 3 0 1 2;0 6 7 4 7]

A =

   1   2   5   3   2

   1   3   7   3   4

   0   5   2   2   1

   1   3   0   1   2

   0   6   7   4   7

>> x=[1 1 1 1 1]

x =

   1   1   1   1   1

>> Tol=0.0000001

Tol =

  1.0000e-07

>> potencia(A,x,Tol)

autovalor

  15.0117

autovetor

   0.4445    0.6739    0.3848    0.3187    1.0000

número de iterações

   10
```

Figura 8: Resultados obtidos do exemplo 5.6

Nos próximos métodos que serão apresentados as transformações ortogonais são fundamentais. Na próxima seção, essas transformações serão abordadas.

5.2 Transformações Ortogonais

Transformações ortogonais são ferramentas de enorme importância em Álgebra Linear Numérica. A seguir listamos algumas transformações ortogonais:

- Tranformações ortogonais elementares.
- Transformações de Householder.
- Rotações e reflexões.

As características e mais detalhes sobre essas transformações podem ser encontradas em [11]. Destacamos que os processos que envolvem transformações ortogonais são essencialmente estáveis. Vamos supor, por exemplo, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e seja $\boldsymbol{x}\text{'} = \boldsymbol{x} + \mathbf{e}$ uma aproximação de $\boldsymbol{x}$, se $\mathbf{Q}$ é uma matriz ortogonal, então:

$$\mathbf{Q}\boldsymbol{x}\text{'} = \mathbf{Q}\boldsymbol{x} + \mathbf{Q}\mathbf{e}$$

O erro de $\mathbf{Q}\boldsymbol{x}\text{'}$ é $\mathbf{Qe}$. Em relação a norma euclidiana (ou norma 2) o vetor $\mathbf{Qe}$ tem o mesmo tamanho[3] que $\mathbf{e}$.

$$\|\mathbf{Qe}\|_2 = \|\mathbf{e}\|_2$$

Da mesma forma ocorre com as matrizes, se $\mathbf{A}\text{'} = \mathbf{A} + \mathbf{E}$, teremos

$$\mathbf{QA}\text{'} = \mathbf{QA} + \mathbf{QE}$$

$$\|\mathbf{QE}\|_2 = \|\mathbf{E}\|_2$$

Quando se aplica uma transformação ortogonal a um vetor ou matriz, o erro não aumenta em relação a norma 2.

Nas próximas duas seções falaremos um pouco sobre rotações e reflexões e o método Householder (que envolve a trasnformação de Householder).

5.3 Rotações e Reflexões

Muitas vezes é conveniente ter uma transformação que anula uma única coordenada em um vetor. Podemos conseguir isso através de uma rotação ou reflexão. A matriz R de rotação já foi definida anteriormente. Vamos, então, nos concentrar na matriz G tal que

$$G = \begin{bmatrix} cos\phi & sen\phi \\ sen\phi & -cos\phi \end{bmatrix}$$

Considerando

[3] A matriz ortogonal conserva o módulo.

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rcos\beta \\ rsen\beta \end{bmatrix}$$

um vetor em $\mathbb{R}^2$.

$$G\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} rcos(\phi - \beta) \\ rsen(\phi - \beta) \end{bmatrix}$$

A matriz G reflete $\boldsymbol{x}$ em torno da reta $x_2 = \left[tg\left(\frac{\phi}{2}\right)\right] x_1$. Fazendo $c = cos\phi = \frac{x_1}{r}$ e $s = sen\phi = \frac{x_2}{r}$, teremos

$$G\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 cos\phi + x_2 sen\phi \\ x_1 sen\phi - x_2 cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$$

A matriz G é ortogonal e simétrica. Na verdade, G é uma matriz ortogonal elementar[4] Se $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -sen\frac{\phi}{2} \\ cos\frac{\phi}{2} \end{bmatrix}$, então $G = I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^t$.

Exemplo 5.7 *Sendo* $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \end{bmatrix}$*, encontre uma matriz de reflexão G (de Givens) que anula a segunda coordenada de* $\boldsymbol{x}$*.*

$r = \sqrt{6^2 + 11^2} = \sqrt{36 + 121} = \sqrt{157} = 12,53$

$c = cos\phi = \frac{x_1}{r} = \frac{6}{12,53} = 0,4789$

$s = sen\phi = \frac{x_2}{r} = \frac{11}{12,53} = 0,8779$

$$G = \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4789 & 0,8779 \\ 0,8779 & -0,4789 \end{bmatrix}$$

$$G\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4789 & 0,8779 \\ 0,8779 & -0,4789 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12,53 \\ 0 \end{bmatrix}$$

□

[4]Uma matriz elementar é qualquer matriz obtida da matriz identidade por aplicação de uma das operações elementares.

Vamos agora considerar uma matriz G^5 de ordem n, com uma rotação de um ângulo ϕ no plano dos eixos p e q:

$g_{pp} = c = cos\phi$
$g_{qq} = -c = -cos\phi$
$g_{pq} = g_{qp} = s = sen\phi$
$g_{ii} = 1$, com i $\neq$ p e i $\neq$ q
e $g_{ij} = 0$ para os outros elementos.

Se $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, então

$$G\boldsymbol{x} = (x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_ic + x_js,\ x_{i+1},\ \ldots\ ,\ x_{j-1},\ x_is - x_jc,\ x_{j+1}, \ldots,\ x_n)^T$$

A transformação G muda apenas as i-ésima e j-ésima componentes de um vetor, sem alterar as outras coordenadas. G recebe o nome de **transformação de Givens** ou uma **reflexão de Givens**. Fazendo

$$c = \frac{x_i}{r} \quad e \quad s = \frac{x_j}{r} \quad \left(com \;\; r = \sqrt{x_i^2 + x_j^2}\right)$$

a j-ésima componente de $G\mathbf{x}$ será 0.

No nosso trabalho esse tipo transformação será de grande utilidade no método QR.

Observação: De maneira análoga poderíamos trabalhar com R e $R\boldsymbol{x}$ correspondente.

5.4 O Método de Householder

Os métodos iterativos para calcular autovalores, dependendo dos dados iniciais fornecidos, podem se tornar demorados e, em alguns casos, gerar um custo maior na sua implementação e uso. Uma saída para esse problema é melhorar os dados iniciais para que o método usado se torne mais eficiente. Nesse contexto, o Método Householder pode ser usado para melhorar o desempenho do Algoritmo QR. Esse método é usado para transformar uma matriz A inicial em uma matriz Hessenberger superior[6] e se A for simétrica, em uma matriz simétrica tridiagonal. Mais detalhes em [11].

Vamos descrever apenas como determinar uma matriz semelhante à matriz simétrica inicial dada em uma matriz simétrica tridiagonal. Para isso, precisamos definir o que é a

[5] G coincide com a matriz identidade, exceto pelos elementos nas posições (i,i), (i,j) e (j,j) (j,i).
[6] A é uma matriz de Hessemberger superior se e somente se $a_{ij} = 0$ sempre que $i \geq j + 2$.

transformada de Householder.

Definição 5.2 *Transformada de Householder*

Seja $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ *com* $\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{w} = 1$

A matriz $n{\times}n$ $P = I - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T$ *é denominada* ***transformação de Householder***.

Teorema 5.3 *Uma transformada de Householder,* $P = I - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T$*, é simétrica e ortogonal, e assim* $P^{-1} = P$.

Demonstração:

De $(\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T)^T = (\boldsymbol{w}^T)^T \boldsymbol{w}^T = \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T$ (usando o teorema 1.1) e a definição 4.2, temos:

$P^T = (I - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T)^T = I - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T = P$, ou seja, P é simétrica.

Agora se calcularmos PP^T e usarmos que $\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{w} = 1$ (hipótese), obtemos:

$PP^T = \left(I - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T\right)\left(I - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T\right) = I - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T + 4\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T =$
$= I$, o que prova que P é ortogonal.

Portanto,

$$P^T = P^{-1} = P$$

□

5.4.1 Cálculo de Uma Transformada de Householder

Nessa seção mostraremos um caminho para calcular a transformada de Householder. Para simplificar trabalharemos apenas com uma matriz coluna, mas o raciocínio mostrado pode ser usado em uma matriz de mais colunas.

Como calcular uma transformada de Householder $H_1 = I - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T$ para transformar a matriz coluna

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix},$$

onde os elementos não são todos nulos, em uma nova matriz coluna

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde os elementos $a_{31}, a_{41}, a_{51}, \ldots, a_{n1}$ sejam nulos?

Solução:

Desejamos que

$$H_1 A = \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}^T,$$

então,

$$(I - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T)A = \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}^T$$

Podemos reescrever o 1º membro da seguinte forma:

$$(I - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T)A = IA - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T A$$

Observe que $\boldsymbol{w}^T A$ é um número:

$$
\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = w_1 a_{11} + w_2 a_{21} + w_3 a_{31} + \dots + w_n a_{n1}
$$

Chamando esse número de r e voltando à equação (note que $IA = A$ e $\boldsymbol{w}r = r\boldsymbol{w}$), temos:

$$
A - 2r\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T
$$

$$
\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} - 2r \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Teremos:

$$
a_{11} - 2rw_1 = a_{11}
$$

$$
a_{21} - 2rw_2 = \alpha
$$

$$
a_{31} - 2rw_3 = 0
$$

$$
\vdots
$$

$$
a_{n1} - 2rw_n = 0
$$

Como $a_{11} - 2rw_1 = a_{11}$, temos $-2rw_1 = 0$ mas $r \neq 0$ (caso contrário teríamos $H_1 A = A$ e a primeira equação dessa solução não seria possível) e assim $w_1 = 0$. Das outras equações concluímos que

$$w_2 = \frac{a_{21} - \alpha}{2r}$$
$$w_3 = \frac{a_{31}}{2r}$$
$$\vdots$$
$$w_n = \frac{a_{n1}}{2r}$$

Como $w^t a = r$, temos:

$$w_1 a_{11} + w_2 a_{21} + w_3 a_{31} + \ldots + w_n a_{n1} = r$$

$$0.a_{11} + \left(\frac{a_{21} - \alpha}{2r}\right) a_{21} + \left(\frac{a_{31}}{2r}\right) a_{31} + \ldots + \left(\frac{a_{n1}}{2r}\right) a_{n1} = r$$

$$a_{21}^2 - \alpha a_{21} + a_{31}^2 + \ldots + a_{n1}^2 = 2r^2$$
$$-\alpha a_{21} + \sum_{j=2}^{n} a_{j1}^2 = 2r^2 \tag{1}$$

Seja $\hat{\mathrm{H}} \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ uma transformada de $H_{(n-1)\,\times\,(n-1)}$,

fazendo $\begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = \hat{\mathrm{A}}$ e $\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = y$, então $\hat{\mathrm{H}} \cdot \hat{\mathrm{A}} = \mathrm{y}$.

De

$$(\hat{\mathrm{H}}\ \hat{\mathrm{A}})^T(\hat{\mathrm{H}}\ \hat{\mathrm{A}}) = \hat{\mathrm{A}}^T(\hat{\mathrm{H}}^T\ \hat{\mathrm{H}})\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{A}}^T\mathrm{I}\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{A}}^T\hat{\mathrm{A}} =$$

$$= a_{21}^2 + a_{31}^2 + a_{41}^2 + \ldots + a_{n1}^2 =$$

$$= \sum_{j=2}^{n} a_{j1}^2$$

E de $(\hat{\mathrm{H}}\ \hat{\mathrm{a}})^T(\hat{\mathrm{H}}\ \hat{\mathrm{a}}) = y^T y = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha^2 + 0^2 + \ldots + 0^2.$

Logo,

$$\sum_{j=2}^{n} a_{j1}^2 = \alpha^2 \tag{2}$$

De (2) em (1) teremos:

$$-\alpha a_{21} + \alpha^2 = 2r^2$$

$$r^2 = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{a_{21}}{2}\alpha$$

$$r = \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{a_{21}}{2}\alpha\right)^{\frac{1}{2}}$$

Resumo:

$$\alpha = -sinal(a_{21}) \cdot \left(\sum_{j=2}^{n} a_{j1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \ se \ \ a_{21} \neq 0.$$

$$\alpha = -\left(\sum_{j=2}^{n} a_{j1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \ se \ \ a_{21} = 0.$$

$$r = \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{a_{21}}{2}\alpha \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$w_1 = 0, \quad w_2 = \frac{a_{21} - \alpha}{2r}, \quad w_3 = \frac{a_{31}}{2r}, \quad \ldots \quad , \quad w_n = \frac{a_{n1}}{2r}$$

Maiores informações sobre o sinal de α olhar em [5] página 550. No exemplo a seguir, mostraremos um exemplo de aplicação do método de Householder.

Exemplo 5.8 *Utilize o método Householder para colocar a matriz simétrica a seguir na forma tridiagonal:*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

1ª Iteração

$$\alpha = -sinal(a_{21}) \cdot \left(\sum_{j=2}^{n} a_{j1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a_{21}^2 + a_{31}^2 + a_{41}^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2} \simeq 1,4142$$

$$r = \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{a_{21}}{2}\alpha \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2} - \frac{(-1)}{2}\sqrt{2} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \simeq 1,3066$$

$$w_1 = 0$$

$$w_2 = \frac{a_{21} - \alpha}{2r} = \frac{-1 - \sqrt{2}}{2\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} \simeq -0,9239$$

$$w_3 = \frac{a_{31}}{2r} = \frac{-1}{2\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = -0,3827$$

$$w_4 = \frac{a_{41}}{2r} = \frac{0}{2\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = 0$$

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,9239 \\ -0,3827 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$H_1 = I_4 - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ -0,9239 \\ -0,3827 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0,9239 & -0,3827 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,7071 & -0,7071 & 0 \\ 0 & -0,7071 & 0,7071 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = H_1 A H_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1,4142 & 0 & 0 \\ 1,4142 & 4 & -1,1102.10^{-15} & 0 \\ 0 & -1,1102.10^{-15} & 4 & 0 \\ 0 & 1,4142 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2ª Iteração

$$\alpha' = -sinal(a_{32}) \cdot \left(\sum_{j=2}^{n} a_{j2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a_{32}^2 + a_{42}^2} = \sqrt{(-1,1102.10^{-15})^2 + (1,4142)^2} \simeq 1,4142$$

$(\alpha')^2 = 2,0000$

$$r = \left(\frac{\alpha'^2}{2} - \frac{a_{32}}{2}\alpha'\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{2} - \frac{(-1,1102.10^{-15}).2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,0000$$

$w'_1 = 0$

$w'_2 = 0$

$$w'_3 = \frac{a_{32} - \alpha'}{2r} = \frac{-1,1102.10^{-15} - 1,4142}{2.1} = -0,7071$$

$$w'_4 = \frac{a_{42}}{2r} = \frac{1,4142}{2.1} = 0,7071$$

$$\boldsymbol{w'} = \begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \\ w'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,7071 \\ 0,7071 \end{bmatrix}$$

$H_2 = I_4 - 2\boldsymbol{w'}\boldsymbol{w'}^T$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,7071 \\ 0,7071 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,7071 & 0,7071 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,7764.10^{-15} & 1,0000 \\ 0 & 0 & 1,0000 & -2,2204.10^{-16} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = H_2AH_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1,4142 & 0 & 0 \\ 1,4142 & 4,0000 & 1,4142 & -1,4142.10^{-15} \\ 0 & 1,4142 & 4,0000 & -7,9936.10^{-15} \\ 0 & -1,4242.10^{-15} & -7,9936.10^{-15} & 4,0000 \end{bmatrix}$$

Se considerarmos apenas 4 casas decimais nos elementos de A_2, teremos:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 4,0000 & 1,4142 & 0 & 0 \\ 1,4142 & 4,0000 & 1,4142 & 0 \\ 0 & 1,4142 & 4,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4,0000 \end{bmatrix}$$

A_2 está na forma simétrica tridiagonal.

Observação: *Segundo [5], página 551, com o uso do algoritmo de Householder vamos obter uma matriz simétrica tridiagonal se a matriz inicial for simétrica, se isso não ocorrer e tivermos uma matriz original sendo uma matriz $n \times n$ arbitrária vamos obter uma matriz que todos os elementos abaixo da subdiagonal inferior será zero, ou seja, o resultado será uma matriz Hesseberg superior.*

□

5.5 O Algoritmo QR

O **Algoritmo QR**, também conhecido como **Método de Francis**, é uma técnica de redução de matriz para determinar ao mesmo tempo todos os autovalores de uma matriz sem o uso do polinômio característico.

Seja A uma matriz não-singular de ordem n. O método é baseado na construção de uma sequência de matrizes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ da seguinte forma: decompomos $A = A_1$ no produto Q_1R_1, onde Q_1 é ortogonal e R_1 é triangular superior, obtendo $A_1 = Q_1R_1$. Na sequência, multiplicamos as duas matrizes na ordem inversa e formamos a matriz $A_2 = R_1Q_1$ e voltamos a fazer a decomposição e obtemos $A_2 = Q_2R_2$ e repetimos o processo. De forma geral, podemos escrever $A_k = R_{k-1}Q_{k-1} = Q_kR_k$.

A sequência A_k converge para uma matriz triangular superior e os seus elementos diagonais são os autovalores procurados. O processo finaliza quando o elemento de maior valor absoluto da matriz A_k abaixo da diagonal principal for menor que uma precisão estabelecida previamente.

No método descrito a matriz A_k e A são matrizes semelhantes, ou seja, possuem o mesmo polinômio característico e os mesmos autovalores. Observe:

$$A_1 = Q_1 R_1 \Rightarrow Q_1^{-1} A_1 = R_1$$

$$A_2 = R_1 Q_1 = Q_1^{-1} A_1 Q_1$$

generalizando,

$$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^{-1} Q_{k-1}^{-1} \dots Q_1^{-1} A_1 Q_1 \dots Q_{k-1} Q_k = Q^{-1} A_1 Q$$

Portanto, A_{k+1} é semelhante a A.

Não precisamos definir Q_k explicitamente. Usaremos as transformações de Givens definida anteriormente para multiplicar pela esquerda a matriz A_k até obtermos R_k[7]. Então definimos,

$$G_{n,n-1} \ \dots \ G_{32} G_{21} A_k = R_k$$

e

$$Q_k^T = G_{n,n-1} \ \dots \ G_{32} G_{21}$$

Assim,

$$A_{k+1} = R_k Q_k \quad e \quad A_{k+1} = Q_k^T A_k Q_k$$

Observação: $G_{n,n-1}$ zera o termo $a_{n,n-1}$ de uma matriz A. Depois de aplicarmos a transformação de Givens G_{21}, por exemplo, o termo a_{21} se torna igual a zero.

Exemplo 5.9 *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

[7]Poderíamos ter usado as transformações de Householder para o mesmo objetivo: obter uma matriz triangular semelhante a matriz A.

Faça uma iteração do algoritmo QR para a matriz A.

Solução

Vamos chamar de $\boldsymbol{x}$ *o vetor* $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *e fazermos* $A_1 = A$.

$$c = cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$s = sen\phi = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

teremos

$$G_{21} = \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = G_{21}A_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = R_1G_{21} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como A_2 *já convergiu para uma matriz diagonal, então os autovalores de* A *são* $\lambda_1 = 2$ *e* $\lambda_2 = 0$.

6 Usando Autovalores na Resolução de Problemas

O exemplo a seguir é uma adaptação de um exemplo proposto em [6] páginas: 352 e 353.

Exemplo 6.1 ***Vibrações Induzidas por Terremoto em Edifícios de Vários Pavimentos***

Vamos investigar a resposta às oscilações do solo, provocadas por terremotos, do edifício de 5 andares ilustrado na Fig. 9. Cada um dos cinco andares (acima dos solo) pesa 16 t, assim a massa de cada um é $m = 100$ *slugs. Assumimos uma força restauradora horizontal* $k = 5$ *(toneladas por pé) entre andares adjacentes. Isto é, as forças internas em resposta a deslocamentos horizontais dos andares individuais são aquelas mostradas na Fig. 10. Segue-se que as oscilações transversais livres indicadas na Fig. 12 satisfazem a equação* $Mx'' = Kx$ *com n =5,* $m_i = 1000$ *(para cada i), e* $k_i = 10000$ *(lb/ft) para* $1 \leq i \leq 7$. *O sistema então se reduz à forma* $x'' = Ax$ *com*

$$A = \begin{bmatrix} -20 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -20 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -20 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -10 \end{bmatrix}$$

A matriz A foi dada na forma simétrica tridiagonal, o que nos leva a concluir que o método QR é o método ideal para resolver esse problema.

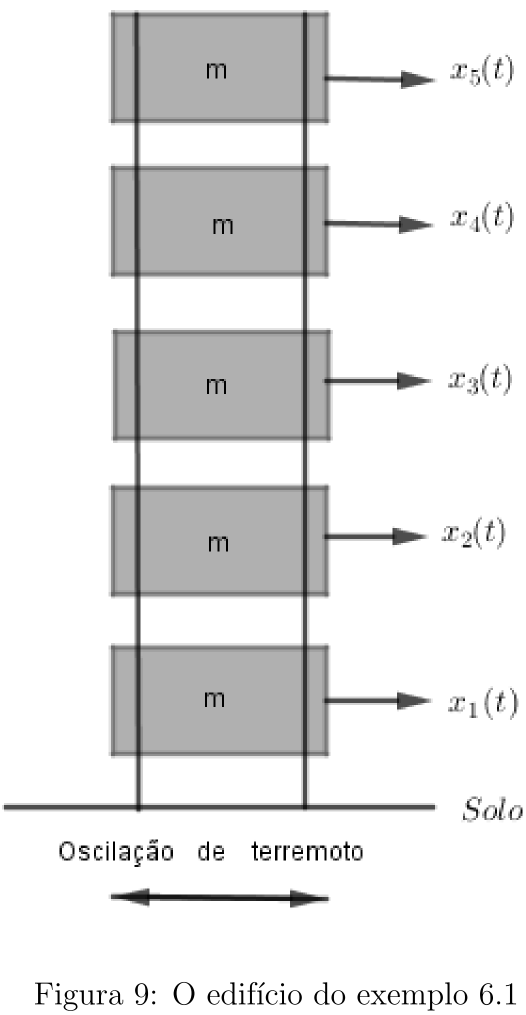

Figura 9: O edifício do exemplo 6.1

Figura 10: Forças no i-ésimo andar do prédio.

Como o problema se reduziu a forma $x'' = Ax$, um sistema de equações diferenciais, pode ser transformado em um problema equivalente à $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ (veja [4]). Devemos, então, calcular os autovalores da matriz A e usaremos para isso o método QR com transformações de Givens. Para realizarmos as interações usaremos novamente o Octave, mas antes preci-

samos esclarecer como as matrizes de Givens serão construídas, lembrando que as matrizes de rotação diferem apenas de 4 elementos da matriz identidade de mesma ordem da matriz inicial. Nas matrizes a seguir vamos representar $cos\phi = c$ e $sen\phi = s$:

$$G21 = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 \\ s & -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} G32 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & s & 0 & 0 \\ 0 & s & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G43 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & s & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} G54 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & s & -c \end{bmatrix}$$

Os comandos a seguir foram usados a cada iteração feita na barra de comandos do Octave:

Cálculo dos autovalores de uma matriz tridagonal simétrica:

$r = (A(1,1)^2 + A(2,1)^2)^{1/2}$

$c = A(1,1)/r$

$s = A(2,1)/r$

$G21 = [c\ s\ 0\ 0\ 0;\ s\ -c\ 0\ 0\ 0;\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0;\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0;\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1]$

$T1 = G21 * A$

Cálculo de G32 de T1

$r = (T1(2,2)^2 + T1(3,2)^2)^{1/2}$

$c = T1(2,2)/r$

$s = T1(3,2)/r$

$G32 = [1\ 0\ 0\ 0\ 0;\ s\ c\ 0\ 0\ 0;\ 0\ s\ -c\ 0\ 0;\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0;\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1]$

$T2 = G32 * T1$

Cálculo de G43 de T2

$r = (T2(3,3)^2 + T2(4,3)^2)^{1/2}$

$c = T2(3,3)/r$

$s = T2(4,3)/r$

$G43 = [1\ 0\ 0\ 0\ 0;\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0;\ 0\ 0\ c\ s\ 0;\ 0\ 0\ s\ -c\ 0;\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1]$

$T3 = G43 * T2$

Cálculo de G54 de T3

$r = (T3(4,4)^2 + T3(5,4)^2)^{1/2}$

$c = T3(4,4)/r$

$s = T3(5,4)/r$

$G54 = [1\ 0\ 0\ 0\ 0;\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0;\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0;\ 0\ 0\ 0\ c\ s;\ 0\ 0\ 0\ s\ -c]$

$R = G54 * T3$

$A = R * G21 * G32 * G43 * G54$

Na 1ª iteração obtemos a primeira matriz semelhante a matriz A inicial;

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5,6000 & 1,4967 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 \\ 1,4967 & 4,6857 & 1,7496 & -0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 1,7496 & 4,3810 & 1,8499 & -0,0000] \\ -0.0000 & 0,0000 & 1,8499 & 4,2424 & 1,1950 \\ 0,0000 & -0,0000 & -0,0000 & 1,1950 & 1,0909 \end{bmatrix}$$

Observação: *Pode causar estranheza o número zero acompanhado do sinal negativo, na verdade foi usado o chamado format short (formato curto), que faz o Octave apresentar o resultado com um número menor de casas decimais. Se fosse usado o format long (formato longo), veríamos que esse número é um número negativo de módulo muito pequeno, bem próximo ao zero.*

Depois de 47 iterações, obtemos:

$$A_{47} = \begin{bmatrix} -36,8251 & 0,0000 & -0,0000 & -0,0000 & -0,0000 \\ 0,0000 & -28,3083 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 \\ -0,0000 & 0,0000 & -17,1537 & 0,0000 & 0,0000\ ] \\ -0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -6,9028 & 0,0000 \\ 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,8101 \end{bmatrix}$$

Usando os autovalores da diagonal principal, podemos fazer a tabela a seguir:

i	***Autovalor*** λ	***Frequência*** $\omega = \sqrt{-\lambda}$	***Período*** $\boldsymbol{P} = \frac{2\pi}{\omega}(s)$
1	*-36,8251*	*6,0684*	*1,0354*
2	*-28,3083*	*5,3206*	*1.1809*
3	*-17,1537*	*4,1417*	*1,5171*
4	*-6,9028*	*2,6273*	*2,3915*
5	*-0,8101*	*0,9001*	*6,9807*

Se a frequência da força que atua em uma estrutura for equivalente à frequência natural da vibração, ocorrerá um fenômeno chamado de ***Ressonância****, haverá o aumento da amplitude da vibração, que significa que a estrutura irá vibrar com mais intensidade, podendo em alguns casos entrar em colapso. Um bom projeto de construção deve levar em conta os riscos desse fenômeno, estudar o clima do local que será feita a obra, incidência de ventos e outras ações da natureza. Mesmo quando isso é feito ainda há situações de grande risco, como os terremotos. Um fato interessante é observar que em regiões que aconteceram grande temores, algumas edificações ficaram destruídas e outras próximas não sofreram grandes danos, isso se explica pelo fato da vibração natural da construção coincidir ou não com a vibração do terremoto.*

$\square$

6.1 *Atividade 1*

Se $\boldsymbol{u}$ *é um vetor unitário (na forma de matriz coluna) de* $\mathbb{R}^2$ *da reta* r *que passa pela origem, então a matriz,* $G = \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T - I$*, chamada matriz refletora de Givens, leva todo ponto (na forma de matriz coluna)* $X \in \mathbb{R}^2$*, ao ponto* GX*, simétrico de* x *em relação à reta* r*.*

Dado o ponto $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ *e a reta* r *de equação* $y = \frac{1}{2}x$*:*

a) Calcule um vetor unitário $\boldsymbol{u}$ *da direção de* r *na forma de matriz coluna.*

b) Determine a matriz de Givens $G = \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T - I$*.*

c) Determine ponto simétrico GX *de* X *em relação à reta* r*.*

d) Represente em um único gráfico X*,* r *e* GX*.*

6.2 *Atividade 2*

Calcule a matriz refletora de Givens em relação a uma reta r *que tem um vetor unitário:*

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ sen\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

7 Conclusão

Realizamos um estudo de métodos para cálculo aproximado de autovalores. Mostramos a necessidade desses métodos devido a ausência de fórmulas para resolver equações acima do 4º grau. Percebemos que a teoria de autovalores e autovetores e a equação que os relaciona exige uma matemática relativamente simples para ser compreendida, conteúdos a maior parte presentes nos anos do Ensino Médio, como matrizes, determinantes, sistemas lineares e vetores. Por isso foi feito uma boa revisão de conceitos básicos no início do trabalho. Na sequência, mostramos como *estim*ar os autovalores de uma matriz usando o raio espectral e os Teoremas de Gerschgorin. Foi feito um exemplo para estimar os autovalores de uma matriz de ordem 4 e foi gerado um gráfico mostrando a interpretação geométrica dessa estimativa.

A teoria do Método da Potência foi apresentada. Determinamos o autovalor de maior módulo e seu autovetor associado de uma matriz de ordem 2 dada e vimos uma maneira de trabalhar com valores menores usando uma mudança de escala. Através da implementação de um algoritmo desse método no Octave conseguimos trabalhar com uma matriz de ordem 5. Antes, porém, mostramos como determinar o autovalor de uma matriz se tivermos o seu autovetor correspondente usando o Quociente de Rayleigh.

Em seguida, falamos da importância das transformações ortogonais em Álgebra Linear Numérica e destacamos o uso da matriz de Givens. Explicamos o uso do Método de Householder e resolvemos um exemplo transformando uma matriz 4×4 simétrica em um matriz simétrica tridiagonal.

O passo seguinte foi apresentar o Algoritmo QR e resolver um exemplo para determinar os autovalores de uma matriz de ordem 2. Optamos por usar as transformações de Givens no processo de achar uma matriz triangular semelhante a matriz dada. Finalmente, aplicamos o método QR em um problema prático sobre vibrações induzidas por terremotos em um prédio de vários pavimentos.

Concluímos que foi alcançado o objetivo de apresentar métodos numéricos para cálculo aproximado de autovalores. Entretanto, entendemos que o trabalho seria mais completo se tivéssemos apresentado as variações baseadas no Método da Potência: Método da Potência Simétrico e Método da Potência Inversa. Em relação ao estudo do Método de Householder, seria interessante se tivéssemos comparado o uso de uma matriz simétrica no método QR e o seu uso depois de transformada em uma matriz simétrica tridiagonal semelhante e observar se ocorreria aumento da eficiência e um número menor de iterações. No exemplo prático a matriz simétrica utilizada já estava na forma tridiagonal. Não era o objetivo desse trabalho, mas seria também de grande utilidade comparar métodos para cálculo aproximado de autovalores e autovetores, analisar as vantagens e desvantagens de cada um, analisar tempo de uso e custo e assim ser um trabalho com uma abrangência maior. Talvez sejam esses os temas de um trabalho futuro. Finalizando, destacamos que existem softwares matemáticos que calculam autovalores e autovetores com grande precisão, entre vários citamos o Maple, o Matlab, o Scilab e o próprio Octave usado nessa dissertação.

A atividade a seguir tem como público alvo alunos do 3º ano do ensino médio com conhecimentos básicos de matrizes e operações matriciais, trigonometria e que já tiveram uma introdução no estudo de geometria analítica.

8 Proposta de atividade para o ensino médio

Identificação de Uma Cônica

O problema de se identificar uma cônica [1](curva no plano representada por uma equação de 2º grau em x e y) através de sua equação torna-se simples se não possuir o termo xy. Aparecendo o termo misto, temos de fazer uma mudança de coordenadas de forma que nas novas coordenadas ele não esteja presente. Mais detalhes e o processo para demonstrar o teorema a seguir consultar [14].

Teorema 8.1 *Considere a equação*

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \tag{1}$$

com a, b, c, d, e, $f \in \mathbb{R}$, *sendo a, b e c não simultaneamente nulos. Então existe um sistema de coordenadas ortogonal* $x'y'$, *em que a equação (1) tem a forma*

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0,$$

em que λ_1 , λ_2 *são os autovalores de*

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$$

Mais ainda,

$$X = PX'$$

em que $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ *e P é uma matriz ortogonal(*$P^{-1} = P^t$*).*

---

[1]Elipse, parábola ou hipérbole.

Usando o Teorema 8.1 resolva o exercício a seguir:

Que lugar geométrico em $\mathbb{R}^2$ *a equação abaixo representa?*

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 24\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}y + 56 = 0$$

Comentário e agradecimento final

O objetivo desse trabalho foi realmente uma introdução ao cálculo aproximado de autovalores, assunto fundamental quando estudamos Álgebra Linear e suas aplicações. O trabalho foi feito com uma visão mais didática, se o objetivo for escolher qual o melhor método para resolver uma situação real, outros aspectos devem ser estudados com muito mais formalidade, como critérios de convergência, cálculos de erros acumulados, construção e implementação dos algoritmos, como os dados são armazenados, o custo operacional e outros tópicos também importantes. Entretanto, para estudantes nas séries iniciais de engenharia pode ser útil como um começo de estudo. Pode também ter utilidade para professores do Ensino Médio, que precisam de um embasamento teórico e tem a árdua tarefa de atrair os jovens para o estudo da Matemática. Estudos sobre modelos matemáticos e recursos computacionais são fundamentais em uma sociedade cada vez mais informatizada. Entre outros objetivos, o resgate da Matemática e a melhoria do ensino dessa matéria formam a razão de ser do Profmat. Nesse sentido, espero que esse trabalho tenha contribuído pelo menos um pouco para que isso se torne realidade.

Agora chegou o momento de agradecer. Em primeiro lugar agradeço a Deus pela oportunidade e aos meus pais, Selene e Itamar, pelo amor e cuidado que sempre tiveram comigo e tornaram tudo isso possível. Minhas filhas, Raíssa e Catarina, que mesmo longe muitas vezes, estão dentro do meu coração e me motivam a seguir em frente. Minha saudosa irmã Patrícia, que se ainda tivesse por aqui estaria comemorando comigo, alegre como ela sempre foi. À minha querida Graça, torcendo por mim em todos os momentos, uma parceria com amor que me tornou uma pessoa melhor. Agradeço também minha orientadora Gilcélia, pela sugestão do tema, pelas orientações claras e pelo apoio sempre que precisei. Aos meus amigos da turma do mestrado, sofremos e aprendemos juntos. À CAPES pelo apoio financeiro.

Apêndice

A Conceitos Básicos

Definição A.1 *Se A é uma matriz quadrada, então o* ***traço de*** *A, denotado por tr(A), é definido pela soma das entradas na diagonal principal de A.*

Exemplo A.1 *Traço de uma Matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$B = \begin{bmatrix} -6 & 18 & 50 & 30 \\ 7 & 11 & 12 & 60 \\ -19 & 2 & 0 & -8 \\ 10 & 8 & -23 & 9 \end{bmatrix} \qquad tr(B) = -6 + 11 + 0 + 9 = 14$$

□

Definição A.2 *Se A é uma matriz $m \times n$ qualquer, então a* ***transposta de*** *A, denotada por A^T, é definida como a matriz $n \times m$ que resulta da permutação das linhas com as colunas de A, ou seja, $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$.*

Exemplo A.2 *A matriz A a seguir:*

$$A = \begin{bmatrix} 19 & 6 \\ 14 & 17 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}$$

Tem como transposta:

$$A^T = \begin{bmatrix} 19 & 14 & 12 \\ 6 & 17 & 15 \end{bmatrix}$$

□

As matrizes transpostas possuem propriedades importantes.

Teorema A.1 ***Propriedades da Transposta***
Se os tamanhos das matrizes são tais que as operações indicadas podem ser efetuadas, então

Propriedade 1: $((A)^T)^T = A$

Propriedade 2: $(A+B)^T = A^T + B^T$ *e* $(A-B)^T = A^T - B^T$

Propriedade 3: $(kA)^T = kA^T$, *onde* k *é uma escalar qualquer.*

Propriedade 4: $(AB)^T = B^T A^T$

As propriedades 1, 2 e 3 podem ser provadas baseando-se na ideia de matriz transposta (trocando linhas por colunas). Verificamos a propriedade 4:

$$\left[(AB)^T\right]_{ij} = [AB]_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{p} \left[A^T\right]_{kj} \left[B^T\right]_{ik} = \sum_{k=1}^{p} \left[B^T\right]_{ik} \left[A^T\right]_{kj} = \left[B^T A^T\right]_{ij}$$

Definição A.3 *Forma Escada*
*Uma matriz $m \times n$ é **linha reduzida à forma escada** se:*

1. *O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1. Chamamos este número 1 de **líder** ou **pivô**.*

2. *Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem os seus outros elementos iguais a zero.*

3. *Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (ou seja, daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo).*

4. *Em quaisquer duas linhas sucessivas que não consistem só de zeros, o líder da linha inferior ocorre mais à direita da linha superior.*

O número de zeros precedendo o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta a cada linha, até que sobrem somente linhas nulas, se houver.

Exemplo A.3

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definição A.4 *Dada uma matriz $A_{n\times n}$, seja $B_{n\times n}$, a matriz-linha reduzida à forma linha equivalente a A. O **posto** de A, denotado por p, é o número de linhas não nulas de B. A **nulidade** de A é o número $n-p$. Maiores informações ver em [3].*

Definição A.5 *(Matrizes Diagonais e Triangulares)*

*Uma matriz A de ordem n é **triangular superior** se $a_{ij} = 0$ sempre que $i > j$; ela é **triangular inferior** se $a_{ij} = 0$ sempre que $i < j$; e é **diagonal** quando $a_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$. Equivalentemente, pode-se definir uma matriz diagonal como sendo uma matriz que é ao mesmo tempo triangular superior e inferior.*

Exemplo A.4 *Nas matrizes abaixo, E é triangular inferior, S é triangular superior e Y é diagonal:*

$$E = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 11 & 6 & 9 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

□

Definição A.6 *Uma matriz A de ordem n é dita **matriz simétrica** se $A^T = A$.*

Exemplo A.5 *Todas as matrizes a seguir são simétricas:*

$$B = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 10 \\ 7 & 1 & 6 \\ 10 & 6 & 2 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 9 & 11 & 13 \\ 11 & 1 & 5 \\ 13 & 5 & 14 \end{bmatrix}$$

□

B Solução da atividade proposta para o ensino médio

Inicialmente vamos reescrever a equação dada na forma matricial, para isso devemos determinar a matriz A:

Como $a = 5$, $b = -6$, $c = 5$, $d = -24\sqrt{2}$, $e = 8\sqrt{2}$ e $f = 56$

Então,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6/2 \\ 6/2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

e,

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -24\sqrt{2} & 8\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 56 = 0 \tag{2}$$

Vamos agora determinar os autovalores de A usando a equação característica. Assim,

$$det\left(\lambda I - A\right) = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 3 \\ 3 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \left(\lambda - 2\right)\left(\lambda - 8\right)$$

portanto, teremos $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 8$.

Para determinar os autovetores precisamos resolver os dois sistemas homogêneos $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e $(A - 8I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Já que A tem ordem 2, vamos considerar $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda = 2$,

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$x_1 = x_2 \text{ e } x_2 \text{ livre} \Longrightarrow$$

$$N(A + 3I) = \left\{ x | x = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Para $\lambda = 8$,

$$A + 4I = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$x_1 = -x_2 \text{ e } x_2 \text{ livre} \Longrightarrow$$

$$N(A-8I)=\left\{x|x=\alpha\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Normalizando os autovetores, teremos a matriz ortogonal P abaixo:

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

Então,

$$P^TAP=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 8\end{bmatrix} \tag{3}$$

Usando $X=PX'$ e a equação (3), podemos escrever (2) como,

$$\begin{bmatrix}x' & y'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-24\sqrt{2} & 8\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}+56=0 \tag{4}$$

Realizando as operações em (4), obtemos:

$$2x'^2+8y'^2-16x'+32y'+56=0$$

que pode ser simplificada e ficar igual a

$$x'^2+4y'^2-8x'+16y'+28=0 \tag{5}$$

Note que conseguimos uma equação sem o termo misto xy, mas ainda precisamos realizar uma translação de eixos para identificar o gráfico desta equação. Faremos isso completando os quadrados da equação (5):

$$x'^2-8x'+4y'^2+16y'+28=0$$

$$x'^2-8x'+4\left(y'^2+4y'\right)+28=0$$

$$x'^2-8x'+\left(\frac{8}{2}\right)^2+4\left(y'^2+4y'+\left(\frac{4}{2}\right)^2\right)+28=0+16+16$$

$$\left(x'^2 - 8x' + 16\right) + 4\left(y'^2 + 4y' + 4\right) + 28 = 32$$

$$\left(x'^2 - 8x' + 16\right) + 4\left(y'^2 + 4y' + 4\right) + 28 = 32$$

$$\left(x' - 4\right)^2 + 4\left(y' + 2\right)^2 = 4$$

Dividindo os dois membros por 4, temos:

$$\frac{\left(x' - 4\right)^2}{4} + \left(y' + 2\right)^2 = 1$$

ou

$$\frac{\left(x' - 4\right)^2}{4} + \frac{\left(y' + 2\right)^2}{1} = 1 \tag{6}$$

Substituindo $x' - 4$ por x'' e $y' + 2$ por y'', chegamos a equação a seguir:

$$\frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{1} = 1 \tag{7}$$

O lugar geométrico representado pela equação (7) é uma elipse na forma padrão no sistema x"y". A origem desse sistema se encontra no sistema de eixos x'y' em $(4, -2)$, que corresponde a $\left(3\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ no plano xy.

O ângulo θ que os eixos x e y foram girados pode ser calculado usando o autovetor normalizado $\mathsf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Não é complicado provar que sobre determinadas condições θ pode ser calculado por:

$$\theta = \arctan\left(\frac{x_{21}}{x_{11}}\right)$$

Então,

$$\theta = \arctan\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = 1 \ e \ \theta = 45^\circ$$

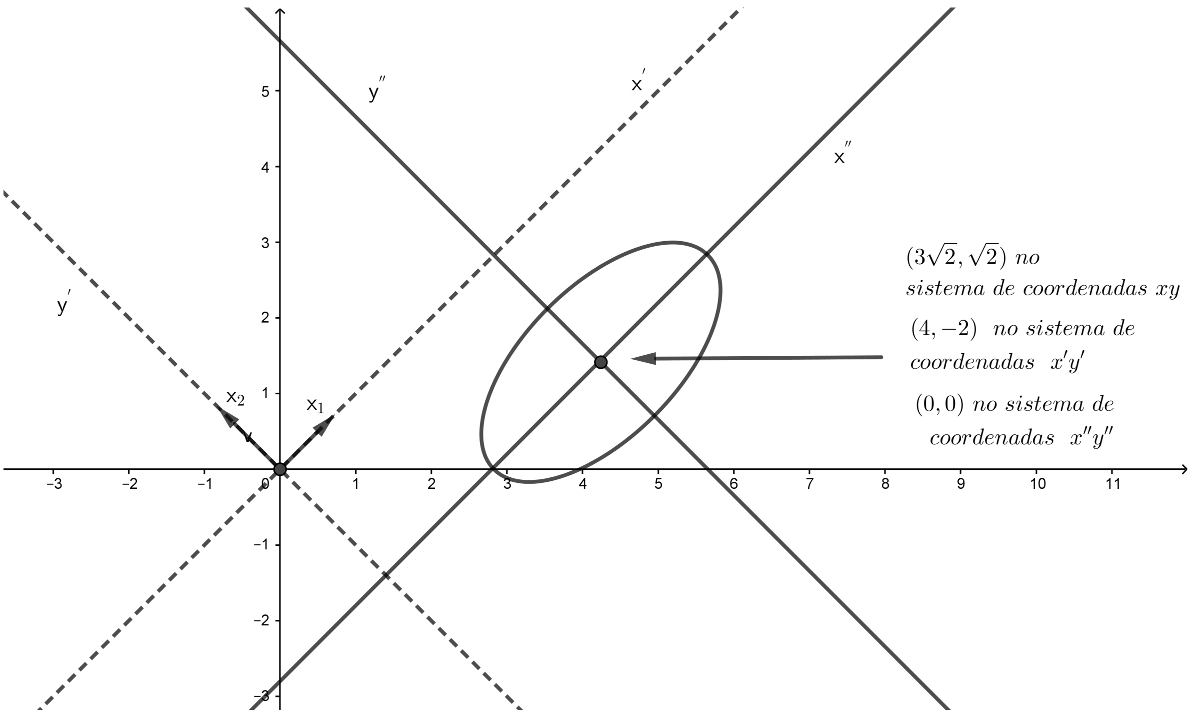

Figura 11: Elipse da atividade proposta para o ensino médio.

$\square$

Referências

[1] Álgebra Linear I. Disponível em:www.mat.puc-rio.br/cursos/MAT1200/roteiros. Acesso em: 26 nov. 2017.

[2] ANTON, Howard; RORRES, Chris, *Álgebra Linear com Aplicações*, Bookman, Porto Alegre, 2001.

[3] BOLDRINI, J.L., *Álgebra Linear*, 3a ed., Harper, São Paulo, 1980.

[4] BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 5ed, Guanabara Koogan, 1994.

[5] BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas: *Análise Numérica*. Cengage Learning, São Paulo, 2008.

[6] EDWARDS, C. H. e PENNEY, D. E. *Equações Diferenciais Elementares - com problemas de contorno*. 3ªed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 1995.

[7] FRANCO, Neide Maria Bertoldi, *Cálculo Numérico*, Prentice Hall, 2006.

[8] GOLUB, G. H.; VAN LOAN, C. F.; *Matrix computations*; Third Edition Johns Hopkins, Baltimore (1996).

[9] LAY, David C.: *Álgebra Linear e Suas Aplicações* - 4ª ed. LTC, 2013

[10] LARSON, Ron e EDWARDS, Bruce H., *Calculus*, Cengage Leraning, 9ª edição, 2010.

[11] LEON, Steven J., *Álgebra Linear com Aplicações.*, LTC, São Paulo, 1999.

[12] MEYER, Carl D. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Philadelphia: SIAM, 2000.

[13] POOLE, David, *Álgebra linear*, Cengage Learning, 2015.

[14] SANTOS, Reginaldo J., *Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear*, Imprensa Universitária da UFMG, 2014.

[15] TREFETEN, L.N.;BAU,D.;*Numerical Linear Algebra* (1997)

[16] WATKINS, D. *Fudamentals of Matrix Computations*. 2ed, John Wiley and Sons, 2002.

[17] WILKINSON, J.H. - *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Clarendon Press-Oxford, 1965.