Universidade Federal do Rio de Janeiro
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

Vânia Carmela Notarangelo da Fonseca

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS DA DISTINGUIBILIDADE E INDISTINGUIBILIDADE DE OBJETOS EM ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

Rio de Janeiro
2017

VANIA CARMELA NOTARANGELO DA FONSECA

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS DA DISTINGUIBILIDADE E INDISTINGUIBILIDADE DE OBJETOS EM ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

Trabalho de Conclusão do Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, apresentada à Universidade Federal do Rio de Janeiro como requisito final para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Doutor Nei Carlos dos Santos Rocha

Rio de Janeiro

2017

CIP - Catalogação na Publicação

N676o

NOTARANGELO DA FONSECA, VANIA CARMELA
OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS DA DISTINGUIBILIDADE E INDISTINGUIBILIDADE DE OBJETOS EM ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE / VANIA CARMELA NOTARANGELO DA FONSECA. -- Rio de Janeiro, 2017.
115 f.

Orientador: NEI CARLOS DOS SANTOS ROCHA.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2017.

1. ANALISE COMBINATÓRIA, PROBABILIDADE, DISTINGUIBILIDADE E INDISTINGUIBILIDAE. I. DOS SANTOS ROCHA, NEI CARLOS, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

VANIA CARMELA NOTARANGELO DA FONSECA

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS DA DISTINGUIBILIDADE E INDISTINGUIBILIDADE DE OBJETOS EM ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Nei Carlos S Rocha

NEI CARLOS DOS SANTOS ROCHA (orientador)

WALCY SANTOS

MARISA BEATRIZ BEZERRA LEAL

ALBA REGINA MORETTI

Aprovado em:.15 de dezembro de 2017

Local de defesa: Sala C–116, bloco C – Instituto de Matemática,

Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Dedico este trabalho ao meu pai (in memorian) e à minha mãe (in memorian) que lutaram incansavelmente, me proporcionando uma educação de qualidade que me permitiu chegar até este momento; ao meu marido Jorge Braz, meu companheiro e incentivador de todas as horas; às minhas filhas Paula e Mariana, minhas maiores amigas e às minhas netinhas Ana Luíza e Lara, alegrias do meu viver.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter me dado força e coragem para superar as dificuldades e realizar este trabalho.

Ao meu pai Antonio Notarangelo *(in memorian)*, à minha mãe Vanilda Marques Notarangelo *(in memorian)*, à minha sogra Zely Maia da Fonseca e ao meu sogro Robel Borges da Fonseca *(in memorian)*, por terem me apoiado em todos os momentos da minha vida.

Ao meu marido Jorge Braz pelo carinho, paciência, compreensão e muito amor.

Às minhas filhas Paula Notarangelo da F. Serra e Mariana Notarangelo da Fonseca, por todo apoio e carinho.

Aos meus genros Reginaldo e Uirah, sempre dispostos a ajudar.

Aos meus familiares e amigos, em especial a Lucia Hermínia e Gabriel Calzavara, pelo apoio na construção deste trabalho.

À Francisca, por ter cuidado de tudo por mim.

Aos meus colegas da turma do mestrado, que muito ajudaram em vários momentos, em especial à Paula Pego, Marcia Porto e Silvana Bessa, minhas amigas.

Ao meu orientador, doutor Nei Rocha, exemplo de profissional e grande ser humano , pelo empenho, dedicação e paciência frente às minhas dificuldades.

A todos os professores da UFRJ, em especial à Doutora Walcy Santos, pela competência com que compartilharam os seus conhecimentos conosco.

A CAPES, pela bolsa concedida durante a realização desta pesquisa.

Às diretoras do Colégio Estadual Duque de Caxias, Rosane e Penha, e demais funcionários, pelo carinho e cooperação.

À direção administrativa e demais funcionários da Escola Municipal Cidade dos Meninos, pelo apoio e incentivo.

A todos os funcionários do Colégio Flama, em especial ao professor Hugo José, sua filha Carolina e Aline Rangel, pela ajuda e carinho.

Aos meus queridos alunos que colaboraram com sua participação neste trabalho.

A todos o meu muito obrigada!

RESUMO

O objetivo deste trabalho é discutir as dificuldades epistemológicas e pedagógicas do conceito de distinguibilidade e indistinguibilidade intrínseca e extrínseca aos objetos no contexto de Análise Combinatória e Probabilidade no Ensino Médio. Esses conceitos são chaves na caracterização dos problemas e norteiam sobremaneira as estratégias de cardinalização de configurações tanto em combinatória quanto em probabilidade, daí a cautela necessária para uma boa abordagem pedagógica do tema. Neste trabalho, além do tratamento teórico do assunto por meio de exemplos, foi também realizado um trabalho com os alunos que cursam o Ensino Médio, na Escola Estadual Duque de Caxias. Inicialmente, através de um pré-teste com a finalidade de se avaliar a noção internalizada dos conceitos de distinguibilidade e indistinguibilidade de objetos em Análise Combinatória, sem o conhecimento teórico prévio, o entendimento de problemas de enumeração que poderiam ser resolvidos pela explicitação de todas as configurações possíveis. A partir das conclusões obtidas no pré-teste foi feito um novo trabalho formal com os alunos, tanto de Análise Combinatória quanto de Probabilidade, com a finalidade de se avaliar, por meio de um pós-teste, se estes melhoraram a performance em problemas mais complexos em que a explicitação das possibilidades não mais era possível. Como esperado, os obstáculos ao pleno entendimento não foram sanados de todo numa primeira abordagem, o que corrobora com a relevância da conscientização desse tema tanto para os professores quanto para os alunos do Ensino Básico.

Palavras-chave: Análise Combinatória, Probabilidade, Distinguibilidade, Indistinguibilidade.

Abstract

The main objective of this work is to discuss the epistemological and pedagogical obstacles of the concept of intrinsic and extrinsic distinguishability and indistinguishability of objects in the context of Combinatorics and Probability in High School. These are key concepts for the characterization and understanding of problems and guide the cardinalization strategies of configurations both in combinatorics and probability. Hence, caution is necessary for a good pedagogical approach to the theme. In this work, in addition to the theoretical treatment of the subject, by means of examples, a study case was also carried out with the students that attend the Secondary School, in the State School Duque de Caxias. Initially the assessment was made through a pre-test to evaluate, without theoretical knowledge, the understanding of enumeration problems that could be solved by the explicit configurations, in order to evaluate the internalized notion of the concepts of distinguishability and indistinguishability of objects in Combinatorics. From the conclusions of the pre-test, a formal approach of both Combinatorics and Probability was done with the students, in order to evaluate, through a post-test if they had improved the performance in more complex problems in which the explicit roll of possibilities was no longer possible. As expected, the obstacles for fully understanding are not totally overcome at first, which corroborates, in our view, the relevance of raising awareness of this issue for both teachers and students in Basic Education.

Keywords: Combinatorics, Probability, Distinguishability, Indistinguishability

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Árvore de possibilidades 7

Figura 2 – Distribuição de objetos em caixa...13

Figura 3 – Posição na roda...18

Figura 4 – Permutação Circular..18

Figura 5 – Permutação Circular 19

Figura 6 – Tabela dos casos de alocação das bandeiras nos mastros.....................................34

Figura 7 – Gráfico – Importância da atividade no dia a dia...54

Figura 8 – Gráfico – Gostou da atividade ?..55

Figura 9 – Gráficos – 1º Caso do Pré-Teste 55

Figura 10 – Erros no 1º caso...56

Figura 11 – Gráficos – 2º Caso do Pré-Teste 56

Figura 12 – Erros no 2º caso..57

Figura 13 – Gráficos – 3º Caso do Pré-Teste 57

Figura 14 – Erros no 3º caso do Pré-Teste...58

Figura 15 – Gráficos – 4º Caso do Pré-Teste 58

Figura 16 – Erros no 4º caso do Pré-Teste...59

Figura 17 – Gráficos – 5º Caso do Pré-Teste 59

Figura 18 – Erros no 5º caso do Pré-Teste...60

Figura 19 – Gráficos – 6º Caso do Pré-Teste 60

Figura 20 – Erros no 6º caso do Pré-Teste...61

Figura 21 – Gráficos – 7º Caso do Pré-Teste 61

Figura 22 – Erros no 7º caso do Pré-Teste..62

Figura 23 – Gráficos – 8º Caso do Pré-Teste 62

Figura 24 – Erros no 8º caso do Pré-Teste...63

Figura 25 – Gráfico Interesse na Atividade 63

Figura 26 – Gráfico – Nível da turma é Adequado?...64

Figura 27 – Gráfico – Dificuldades Encontrada..64

Figura 28 – Gráfico – Nota do aluno na Avaliação 65

Figura 29 – Avaliação geral dos alunos do 1º ao 8º caso..65

Figura 30 – Gráfico de Acertos e Erros do 1º ao 8º caso..66

Figura 31 – Gráfico de Acertos e Erros do 9º caso...67

Figura 32 – Erros no 9º caso 68

Figura 33 – Acerto dos Alunos no 9º caso..68

Figura 34 – Gráficos de Acertos e Erros do 10º caso...69

Figura 35 – Erros no 10º caso 69

Figura 36– Acertos no do 10º caso...70

Figura 37 – Gráficos do 11º caso 71

Figura 38 – Erros no 11º caso..71

Figura 39 – Acerto no 11º caso 71

Figura 40 – Gráficos do 12º caso..72

Figura 41 – Erros no 12º caso 73

Figura 42 – Acertos no 12º caso 73

Figura 43 – Justificativa dos alunos...74

Figura 44- Gráfico com a Opinião dos Alunos sobre cada caso..74

Figura 45 – Gráfico de Acertos e Erros de todos os casos..75

Figura 46 – Tabela de Acertos e Erros da 1ª Etapa..75

Figura 47 – Tabela de Acertos e erros da 2ª Etapa..76

Figura 48 – Figura da 1ª questão da OBMEP..78

Figura 49- Erros da 1ª Questão da OBMEP..78

Figura 50 –.Gráficos de Acertos e Erros da 1ª Questão da OBMEP......................................78

Figura 51 – Erros na Questão 2A da OBMEP..79

Figura 52 –.Gráficos da Questão 2A da OBMEP..79

Figura 53– Erros na Questão 2B da OBMEP...80

Figura 54 – Gráficos da Questão 2B da OBMEP..80

Figura 55 – Erros na Questão 2C da OBMEP...81

Figura 56 – Gráficos da Questão 2C da OBMEP...81

Figura 57 – Erros na Questão 2D da OBMEP...82

Figura 58 – Gráficos da Questão 2D da OBMEP..82

Figura 59 – Erros na Questão 2E da OBMEP 83

Figura 60 – Gráficos da Questão 2E da OBMEP...83

Figura 61 – Solução dos Alunos da 3ª Questão da OBMEP...83

Figura 62 – Erros da 3ª Questão da OBMEP..84

Figura 63 – Gráficos da 3ª Questão da OBMEP...84

Figura 64 – Erros na 4ª Questão da OBMEP..85

Figura 65 – Gráficos da 4ª Questão da OBMEP...85

Figura 66 – Erros na Questão 5A da OBMEP..86

Figura 67 – Gráficos da Questão 5ª da OBMEP..86

Figura 68 – Figura da Questão 5B da OBMEP...86

Figura 69 – Erros na Questão 5B da OBMEP...87

Figura 70 – Gráfico da Questão 5B da OBMEP..87

Figura 71 – Figura da 6ª Questões da OBMEP..87

Figura 72– Erros na 6ª Questões da OBMEP...88

Figura 73 –Gráficos da 6ª Questões da OBMEP...88

Figura 74 – Gráfico de Acertos e Erros das Questões da OBMEP..88

Figura 75 – Gráfico da opinião dos alunos sobre o Pós-Teste..89

Figura 76 – Tabela de Acertos e Erros do Pós-Teste..89

Figura 77 –Erros na Questão 1A de Probabilidade...90

Figura 78 – Gráficos da Questão 1ª de Probabilidade..91

Figura 79 – Erros na Questão 1B de Probabilidade..91

Figura 80 – Gráficos da Questão 1B de Probabilidade...92

Figura 81 – Erros na Questão 2A de Probabilidade...93

Figura 82 – Gráfico de Acertos e Erros da Questão 2A de Probabilidade.............................93

Figura 83 – Erros na Questão 2B de Probabilidade...94

Figura 84 – Gráfico da Questão 2B de Probabilidade..94

Figura 85 – Erros da Questão 2C de Probabilidade..95

Figura 86 – Gráficos da Questão 2C de Probabilidade...95

Figura 87 – Erros da Questão 3A de Probabilidade...96

Figura 88 – Gráfico da Questão 3A de Probabilidade..96

Figura 89 – Erros da Questão 3B de Probabilidade...97

Figura 90 – Gráfico da Questão 3B de Probabilidade...97

Figura 91 – Erros da Questão 3C de Probabilidade..98

Figura 92 – Gráfico da Questão 3C de Probabilidade..98

Figura 93 – Tabela de Acertos e Erros de Probabilidade 99

Figura 94 – Gráfico da avaliação dos alunos sobre os problemas de probabilidade 99

Figura 95 – Tabela de Acertos e erros sobre probabilidade 99

Sumário

Resumo

Abstract

Lista de Ilustrações

Introdução..1

Capítulo 1

A Questão da Distinguibilidade e Indistinguibilidade de Objetos em Análise Combinatória

1- PRINCIPAIS OBJETOS DA COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO.............5

1.1 Princípio Aditivo...5
1.2 Princípio Multiplicativo 6
1.3 Arranjos Simples 9
1.4 Permutação Simples 10
1.5 Arranjos com Repetição 12
1.6 Combinação Simples 13
1.7 Permutação com Repetição 15
1.8 Permutação Circular...17
1.9 Combinação Completa 19

2 – O PROBLEMA DA ALOCAÇÃO DE BANDEIRAS EM MASTROS

2.1 - Bandeiras distinguíveis e mastros distinguíveis, sem ordem interna nos mastros, com mastros podendo ficar vazios...24
2.2 - Bandeiras distinguíveis e mastros distinguíveis, sem ordem interna nos mastros, com mastros não podendo ficar vazios...25
2.3 - Bandeiras distinguíveis e mastros distinguíveis, com ordem interna nos mastros, com mastros podendo ficar vazios...26
2.4 - Bandeiras distinguíveis e mastros distinguíveis, com ordem interna nos mastros, com mastros não podendo ficar vazios...27
2.5 - Bandeiras distinguíveis em mastros indistinguíveis sem ordenação interna nos mastros e mastros podendo ficar vazios...28
2.6 - Bandeiras distinguíveis, mastros indistinguíveis, sem ordenação interna e mastros não podem ficar vazios...29
2.7 - Bandeiras indistinguíveis e mastros distinguíveis sem exclusão, sem ordenação interna aos mastros e mastros podem ficar vazios...30
2.8 - Bandeiras indistinguíveis em mastros indistinguíveis, sem ordenação interna aos mastros e mastros podem ficar vazios...31
2.9 - Bandeiras indistinguíveis em mastros indistinguíveis, sem ordenação interna aos mastros e mastros não podem ficar vazios...32

Capítulo 2

A Questão da Distinguibilidade e Indistinguibilidade de Objetos em Probabilidade

2.1 - INTRODUÇÃO ...35
2.2 - Breve História da Probabilidade e Seus Obstáculos Cognitivos ...35

2.3 - Conceitos Básicos..40
2.4 - Espaço Amostral, Medida de Probabilidade e Resultados Básicos.................................42
2.4.1 – Axiomas e Resultados Básicos de Probabilidade...45
2.5 - Probabilidade Condicional 48
2.6 - Eventos Independentes 49

Capítulo 3

Estudo de Caso

3.1 - Pré-Teste de Análise Combinatória..52

3.2 - Análise do Pré- Teste 54

3.2.1 – 1º CASO...55
3.2.2 - 2º CASO...56
3.2.3 – 3º CASO 57
3.2.4 – 4º CASO 58
3.2.5 – 5º CASO...59
3.2.6 – 6º CASO...60
3.2.7 – 7º CASO...61
3.2.8 – 8º CASO...62
3.2.9 – 9º CASO 66
3.2.10 – 10º CASO...68
3.2. 11 - 11º CASO 70
3.2.12 – 12º CASO 72

3.3 – Pós-Teste de Análise Combinatória 79

3.3.1 - 1ª Questão da OBMEP- Pós –Teste 79
3.3.2 – 2ª Questão da OBMEP – Pós-Teste 79
3.3.2A – Questão 2A 79
3.3.2B – Questão 2B 80
3.3.2C – Questão 2C...81
3.3.2D – Questão 2D...82
3.3.2E - Questão 2E 83

3.4 - Estudo de Casos sobre as atividades de Probabilidade

3.4.1 - 1ª Questão 91

3.4.1.A – Questão 1.A 91
3.4.1.B – Questão 1.B 92
3.4.2.A – Questão 2.A 93
3.4.2.B – Questão 2.B 94
3.4.2C – Questão 2.C..95
3.4.3.A – Questão 3.A...96
3.4.3.B – Questão 3.B...97
3.4.3.C – Questão 3.C...98

Capítulo 4

Conclusão e Considerações Finais

Conclusão e Considerações Finais...101

Capítulo 5

Anexos

Anexo 1 – Pré-Teste de Análise Combinatória – 1ª Etapa...103
Anexo 2 – Questionário sobre o Pré-Teste de Análise Combinatória...................................105
Anexo 3 – Pré-Teste de Análise Combinatória – 2ª Etapa..107
Anexo 4 - Questionário sobre a 2ª Etapa 108
Anexo 5 –Pós-Teste de Análise Combinatória..109
Anexo 6 - Questionário sobre o Pós-Teste de Análise Combinatória...................................110
Anexo 7 – Problemas de Análise Combinatória e Probabilidade...112
Anexo 8 - Questionário sobre Análise Combinatória e Probabilidade 113

Bibliografia 114

Introdução

O presente trabalho foi motivado pela observação em sala de aula das grandes dificuldades no ensino e aprendizagem da Análise Combinatória e Probabilidade no Ensino Básico. Boa parte dessas dificuldades, além da própria natureza do assunto (transcender a contagem por uma heurística de "contar sem contar"), advém também da interpretação minuciosa do problema, já que mudanças mínimas no enunciado induzem ataques diferentes no cálculo da enumeração das configurações. Não é incomum professores relatarem as eternas perguntas sobre se um problema deve ser resolvido por combinação ou arranjo, indicando que esses não foram previamente instruídos da especificidade de cada estratégia de contagem, algo que, se feito adequadamente, prescindiria inclusive a nomeação dos objetos presentes na Análise Combinatória, tais como permutação, arranjo com repetição, arranjo simples, combinação simples, combinação completa, permutação circular, etc. A maioria dos professores está persuadida a afogar os alunos nessa taxonomia que pouco traz de maturidade matemática se os conceitos de distinguibilidade e indistinguibilidade não forem exaustivamente discutidos e trabalhados em sala de aula. Como bem dito por MORGADO (1991):

> *"Esse é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se muito difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para a sua solução." (MORGADO, 1991, p.2)*

O caso do tratamento da Probabilidade torna-se ainda mais delicado, já que o conceito e a matematização do acaso impõem maiores desafios, mesmo quando nos restringimos ao conceito clássico de probabilidade em que há um diálogo estreito da probabilidade com a análise combinatória, isto porque, em Probabilidade, muitas vezes devemos tratar configurações indistinguíveis como distinguíveis se desejamos construir um espaço amostral de elementos equiprováveis para uma melhor aferição da probabilidade de eventos. Trata-se, portanto, dentro do contexto probabilístico, de uma mudança paradigmática do que vinha sendo exigido na Análise Combinatória, em que a distinguibilidade ou não de objetos altera completamente a contagem de configurações possíveis.

O professor de Matemática se prepara para o exercício da profissão durante toda a sua vida acadêmica; porém, nem sempre está apto a exercê-la ao final da graduação, uma vez que deve possuir um domínio total dos conceitos para transmiti-los com segurança e clareza, de modo que consigam identificar e redimensionar antigas práticas, bem como corrigir possíveis erros conceituais ou metodológicos em determinados materiais didáticos. Nesse sentido, este trabalho visa a revelar quais são os obstáculos epistemológicos dessas duas searas da Matemática, reputadamente consideradas como as mais difíceis, para que se possa reconhecer equivalências e diferenças entre duas maneiras de se medir conjuntos: a medida canônica no contexto da Análise Combinatória, em que cada elemento do universal mede 1 e a medida de probabilidade no contexto de Probabilidade, em que cada elemento mede um número real entre 0 e 1 e o universal (espaço amostral) mede 1.

Este trabalho originou-se, portanto, a partir da percepção das dificuldades encontradas nos alunos ao lidar com a distinguibilidade e indistinguibilidade dos objetos e configurações. Embora os pré-requisitos sejam poucos, boa parte dos alunos apresenta dificuldades nos seguintes aspectos: interpretação do enunciado, entender o que está sendo pedido, perceber se é uma situação em que se deve somar ou multiplicar, se os elementos a serem contados são distinguíveis ou indistinguíveis, se a ordem é ou não importante para efeito de contagem, e o recondicionamento desses aspectos no contexto de probabilidade.

Há de se concordar com Roa e Navarro-Pelayo, ao citar Hadar e Hadass, quando destacam que as dificuldades mais frequentes dos alunos ao resolverem problemas combinatórios são:

> *a. Dificuldade em reconhecer o conjunto correto a enumerar;*
> *b. Escolher uma notação apropriada, o que é agravado com diferentes textos utilizando diferentes notações;*
> *c. Fixar uma ou mais variáveis;*
> *d.Generalizar a solução.(HADAR;HADASS,1981 apud ROA;NAVARRO-PELAYO,2001).*

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam a importância da Análise Combinatória e Probabilidade na formação e evolução da cognição dos alunos do Ensino Médio e o cuidado que deve-se ter ao introduzir esse tema na sala de aula. Segundo esse documento:

> *As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio... (BRASIL, 1998, p.257).*

Apesar de toda preocupação do PCN sobre o ensino da Análise Combinatória no Ensino Médio, este conteúdo, quando abordado por meio de resolução de problemas, apresenta muitas dificuldades na interpretação dos enunciados e no entendimento do que está sendo demandado. Na maioria das vezes, os livros didáticos propõem uma bateria de exercícios com uma única finalidade: a aplicação de fórmulas, não estimulando o raciocínio e a criatividade dos alunos para ajudá-los nas tomadas de decisão.

Com este trabalho, espera-se também contribuir para o ensino da Análise Combinatória e a Probabilidade na resolução de problemas no Ensino Médio, por meio de variações de um mesmo problema, no que tange à distinguibilidade e indistinguibilidade dos elementos, ensejando diferentes heurísticas de ataques aos problemas e procurando abranger os principais conteúdos de combinatória e probabilidade do Ensino Básico, sem muita ênfase em fórmulas como ocorre em muitos livros didáticos. Vê-se como lacunar nos livros didáticos o tratamento de um mesmo problema visto sob diferentes variantes de estruturas intrínsecas (cores, objetos diferentes, etc.) ou extrínsecas (ordem, circularidade, etc.), algo fundamental para uma boa reflexão sobre quais técnicas devem ser utilizadas para a enumeração das configurações possíveis em combinatória.

Inicialmente, foi avaliado, por meio de um pré-teste, o conhecimento já internalizado dos alunos no que se refere ao conceito de distinguibilidade. Neste pré-teste, os problemas selecionados poderiam ser resolvidos pela total explicitação das configurações pedidas, sem o convite ainda ao objetivo fundamental da Análise Combinatória de “contar sem contar”. A partir do diagnóstico dos alunos, um tratamento pedagógico da Análise Combinatória e

Probabilidade foi pensado para preparar os alunos para um pós-teste, de maneira a se avaliar se a percepção dos alunos melhorou no que se refere à cardinalização das configurações tanto para a Análise Combinatória quanto para a Probabilidade. Como esperado, em um domínio delicado da Matemática como esse, o amadurecimento se dá de forma paulatina. Como bem explicita PIAGET & INHELDER () em "A Origem da Ideia do Acaso na Criança", no que se refere à probabilidade, cuja gênese está também associada à cardinalidade de configurações pela Análise Combinatória: "Em contraste com as operações lógicas e aritméticas, a probabilidade é descoberta gradualmente."

A presente dissertação se estrutura da seguinte forma:

No Capítulo 1, se faz uma discussão dos principais objetos da Análise Combinatória tratados no Ensino Básico, problematizando as dificuldades de enumeração a partir da discussão do conceito de distinguibilidade/indistinguibilidade de estruturas. Alguns problemas analisados, neste capítulo, foram propostos no pré-teste e pós-teste submetidos aos alunos.

No Capítulo 2, a atenção é voltada para a Probabilidade e seus principais resultados, também por meio de problemas que revelem semelhanças e diferenças com a abordagem da Análise Combinatória.

No Capítulo 3, é feita uma reflexão sobre os resultados obtidos no pré-teste e no pós-teste, a fim de diagnosticar problemas prévios e posteriores no entendimento dessas duas searas da Matemática.

No Capítulo 4, se tece conclusões possíveis extraídas do estudo de casos e se faz algumas considerações finais do trabalho.

A dissertação se encerra com o anexo, contendo o material utilizado no estudo de casos e as referências bibliográficas utilizadas na concepção das ideias contidas aqui.

Capítulo 1

A Questão da Distinguibilidade e Indistinguibilidade de Objetos em Análise Combinatória

Neste capítulo, apresentaremos os principais objetos presentes na Análise Combinatória no Ensino Médio, fazendo, sempre que necessário, uma reflexão sobre eles, no que se refere aos conceitos de distinguibilidade e indistinguibilidade de estruturas em cada problema.

1- PRINCIPAIS OBJETOS DA COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

2.3 Princípio Aditivo

Axioma 1 : Se A e B forem conjuntos disjuntos, isto é, com intersecção vazia, e o número de elementos de A é $\mathbf{p}$ e o número de elementos de B é $\mathbf{q}$, então o conjunto A ∪ B, tem $\mathbf{p + q}$ elementos. Podemos dizer que o Princípio Aditivo é o principio básico de contagem.

A regra de soma pode ser formulada em termos de conjuntos e da função cardinalidade $|\,.\,|$ da seguinte forma:

$|\mathbf{A}\cup\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$, desde que A e B sejam conjuntos disjuntos.

Ou, mais geralmente,

$|\mathbf{A_1} \cup \mathbf{A_2} \cup \ ... \cup \mathbf{A_m}| = |\mathbf{A_1}| + |\mathbf{A_2}| + \ ... + |\mathbf{A_m}|$, quando $\mathbf{A_i} \cap \mathbf{A_j} = \emptyset$, para todo i, j.

Cabe ressaltar que o Princípio Aditivo da Análise Combinatória emana de fato de um dos axiomas básicos da Teoria da Medida e, como tal, não é demonstrável. Outro aspecto importante a mencionar é que para que valha o Princípio Aditivo, os conjuntos envolvidos devam possuir tanto internamente elementos distinguíveis, quanto entre eles, do contrário o Princípio não se verifica.

Como se trata do Princípio mais simples em Análise Combinatória, é importante caracterizar a estrutura do princípio por meio da discussão da distinguibilidade dos elementos, pois são os desdobramentos dessa discussão que trará maior conscientização aos alunos sobre como construir heurísticas para as soluções de problemas mais complexos. Vejamos um exemplo simples a ser discutido em sala de aula:

Exemplo 1: Paulo tem 5 CDs de Rock, 4 de Samba e 6 de MPB. De quantas maneiras ele pode escolher um CD para ouvir?

Solução: : Como os CDs de Rock, de samba e de MPB são conjuntos disjuntos, ou seja, não tem nada em comum e como o conjunto de cada estilo tem CDs distinguíveis, o número de maneiras de Paulo escolher apenas um CD, sem nenhuma restrição, será dado pela cardinalidade da união dos três conjuntos, a saber, 5+ 4 + 6 = 15 maneiras diferentes.

1.2 – Princípio Multiplicativo

O Princípio Multiplicativo não é um axioma, pois pode ser demonstrado a partir do próprio Princípio Aditivo, mas é assim denominado, porque compõe juntamente com o Princípio Aditivo o pilar sobre o qual se pode erigir boa parte dos objetos matemáticos de combinatória no que se refere à contagem.

Proposição 1 - Se um evento A pode ocorrer de **p** maneiras distintas e se para cada uma das **p** maneiras do evento A, um evento B pode ocorrer de **q** maneiras distintas, então o evento A seguido do (ou simultâneo ao) evento B pode ocorrer de **p . q** maneiras distintas.

Um aspecto importante deve ressaltado aqui para que se possa utilizar o Princípio Multiplicativo: a noção de invariância das escolhas, isto é, qualquer que seja a configuração do evento A, esta pode cruzar com o mesmo número de configuração do evento B. Caso isso não ocorra, então o Princípio Multiplicativo não poderá ser aplicado. Esse é o caso, por exemplo em problemas do tipo “de quantas maneiras podemos retirar de um baralho de 52 duas cartas, sendo a primeira uma carta de copas e a segunda um rei?”, pois embora haja 13 cartas de copas para a primeira escolha e 4 reis para a segunda escolha, o resultado não se dá pelo Princípio da Multiplicação 13 x 4, pois, quando a primeira carta de copas não é um rei, esta pode cruzar com 4 reis na segunda fase; mas quando a primeira carta é um rei de copas então esta pode cruzar com 3 reis, ferindo assim o princípio de invariância e exigindo a estratégia “dividir para conquistar”, por meio da cardinalização 12 x 4 + 1 x 3 = 51.

O Princípio Multiplicativo é muito empregado em experimentos em fases, tais que as escolhas feitas até a fase *i* cruzam com a mesma quantidade de formas oferecidas na fase *i* + 1. O exemplo a seguir ilustra o Princípio Multiplicativo em três fases experimentais.

Exemplo 2: Paulo tem 5 CDs de Rock, 4 de Samba e 6 de MPB. Suponha que Paulo queira ouvir um CD de Rock, um CD de Samba e um CD de MPB. De quantas maneiras ele poderá ouvi-los sem preocupação de ordem no gênero musical?

Solução: Paulo deverá ouvir três CDs. Primeiro deverá escolher um CD de Rock. Como ele possui 5 CDs de Rock, há 5 possibilidades para a escolha; como ele tem 4 CDs de Samba, há 4 possibilidades de escolha; e, finalmente, como ele tem 6 CDs de MPB, há 6 possibilidades de escolha para este gênero. Assim, Paulo poderá ouvir três CDs de cada gênero na ordem especificada de 5 . 4 . 6 = 120 formas diferentes.

Esse e outros problemas da Análise Combinatória podem ser representados pela conhecida árvore de possibilidades ou grafo. Vejamos como representar por uma árvore o problema da escolha dos CDs. Sejam os CDs de Rock representado pelo conjunto: R = $\{R_1,R_2,R_3,R_4,R_5\}$, os CDs de samba pelo conjunto $S=\{S_1,S_2,S_3,S_4\}$ e os CDs de MPB por $M=\{M_1,M_2,M_3,M_4,M_5,M_6\}$. Assim, temos as seguintes configurações:

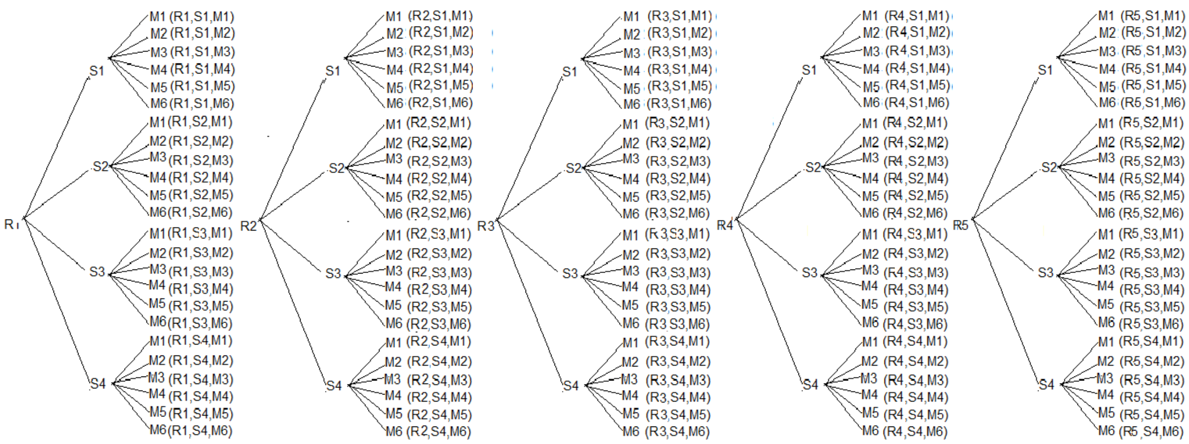


FIGURA 1 – ÁRVORE DE POSSIBILIDADES

A representação gráfica em árvore de possibilidades, para problemas de pequeno porte, favorece a um bom entendimento pela visualização dos cruzamentos possíveis, mas é pouco prático para número muito grande de configurações. Daí a Análise Combinatória ser a técnica de contar sem contar por excelência. Nosso objetivo é, portanto, saber estruturar mentalmente as combinações possíveis e calcular o número total de possibilidades sem precisar enumerá-las, pois muitas vezes isso será impossível devido ao grande número de opções e/ou de decisões envolvidas, como no problema anterior em que a árvore de possibilidades se torna muito trabalhosa. Por isso é interessante que o aluno perceba que nestes casos ele terá que utilizar outra estratégia.

Outro aspecto relevante do exemplo anterior é que as 120 possibilidades de escuta dos três gêneros foi obtida pela não distinguibilidade da ordem de escuta destes, embora o cálculo tenha sido feito por meio da ordenação arbitrada R, S e M. Caberia problematizar aos alunos qual estratégia deveria ser usada, a partir do resultado anterior, se a ordem da escuta (distinguibilidade extrínseca aos objetos) fosse exigida. Os alunos deveriam perceber que há seis ordens possíveis dos gêneros, a saber, (R, S, M), (R, M, S), (S, R, M), (S, M, R), (M, S, R), (M, R, S) e que, para cada uma dessas ordens, há 120 escolhas possíveis. Portanto, com a distinguibilidade extrínseca pela ordem, há agora 120 x 6 = 720 escolhas possíveis.

As técnicas da Análise Combinatória, como o Princípio Multiplicativo, nos fornecem soluções gerais para atacar certos tipos de problema. No entanto, esses problemas exigem engenhosidade, criatividade e uma plena compreensão da situação descrita. Portanto, é preciso estudar bem o fato, as condições dadas e as possibilidades envolvidas, ou seja, ter perfeita consciência dos dados e da resolução que se busca, e se colocar no lugar da pessoa que está realizando a ação.

O fatorial de um número natural desempenha um papel relevante nas diversas estratégias de contagem em combinatória.

Definição 1 - Dado um número natural n, define-se o fatorial de n, representado por n!, como

$$n! = n.(n - 1).(n - 2) \ldots 3.2.1 = 1.2.3. \ldots .(n - 2).(n - 1).n.$$

Por convenção, 0! = 1. Esta convenção está amparada em estruturas empíricas, como veremos mais tarde.

Exemplo 3: Quantos números de três algarismos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

Solução: Como temos 9 algarismos, existem 9 opções, para cada um dos 3 algarismos. Pelo princípio da multiplicação, existem, portanto, 9 x 9 x 9 = 729 números distintos de três algarismos com os algarismos dados.

Exemplo 4: Do exercício anterior quantos números de três algarismos são possíveis se nenhum número é repetido?

Solução: Nesse caso, como não existem restrições podemos começar a escolha tanto pela unidade como pela centena, como temos 9 opções para a unidade, e ele não pode ser usado novamente, há assim 8 escolhas para a dezena e, por sua vez, restam 7 escolhas para a centena. Assim a quantidade de números possíveis é 9 x 8 x 7 = 504 números distintos de três algarismos distintos.

Neste exemplo vemos que a ordenação dos algarismos é relevante pois induz a números diferentes, dependendo de o algarismo se situar na unidade, dezena ou centena. Ou seja, há uma distinguibilidade íntrínseca (pelos algarismos distintos) e extrínsica (pela ordem em que se situam).

1.3 – Arranjos Simples

Os arranjos desempenham um papel importante nas configurações de alocação de objetos distinguíveis em compartimentos também distinguíveis, com cada compartimento contendo um único objeto, ou, de outra forma, nas configurações de alocação de objetos distinguíveis em ordem relevante (distinguível). Além disso, os arranjos simples são paradigmas do número de amostras de tamanho r de uma população de tamanho n ($r \leq n$), sem reposição dos elementos e com ordem desejada.

Proposição 2 - Arranjo Simples - Suponha que n objetos distinguíveis devam ser alocados em r compartimentos distinguíveis ($r \leq n$), de forma que cada compartimento contenha exatamente um objeto. O número de alocações possíveis é dado por

$$A_n^r = A_{(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Demonstração: Pelo Princípio Multiplicativo há $A_{(n,r)} = n(n - 1)(n - 2)\cdots(n - (r - 1))$ formas de alocar r objetos dos n disponíveis nos r compartimentos. Multiplicando e dividindo o resultado por $(n - r)!$ Temos:

$$A_n^r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\big(n-(r-1)\big).(n-r)!}{(n-r)!},$$

ou seja,

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Exemplo 5: Suponha que 10 corredores disputem uma Maratona. Quantos resultados de pódium (primeiro, segundo e terceiro lugares) são possíveis?

Solução: Pelo Princípio Multiplicativo, temos

$$10.9.8 = 720 = \frac{10.9.8.7!}{7!} = \frac{10!}{(10-3)!} = A_{10}^3.$$

Vemos que ordem construída para a solução do exemplo anterior tem o poder de revelar que o Arranjo Simples emana do Princípio Multiplicativo e que há uma distinguibilidade também pela ordem com que os três corredores foram escolhidos para a alocação no pódium.

Exemplo 6: Quantos números de dois algarismos distintos podemos obter com os algarismos 1, 2 e 3?

Solução:

- Para escolha do primeiro elemento temos 3 opções;
- para a escolha do segundo elemento temos 2 opções.

Usando o Princípio Multiplicativo, temos 3 x 2 = 6 números de dois algarismos distintos, ou de outra maneira,

$$\mathrm{A}_3^2 = \frac{3!}{(3-2)} = \frac{3!}{1!} = \frac{3.2.1}{1} = 6.$$

1.4 – Permutação Simples

A permutação simples é um caso particular de Arranjo Simples em que o número de objetos distinguíveis coincide com o número de compartimentos distinguíveis.

Proposição 3 - Permutação Simples - Sejam n objetos distintos, ordenados em fila. Então o número de configurações das ordenações possíveis, ou, por outra, o número de permutações dos objetos é dado por

$$P_n = n!$$

P_n é chamado de permutação de n objetos distintos.

Demonstração: Para escolhermos o primeiro elemento da ordenação temos n opções, sobrando (n-1) elementos para o segundo, uma vez que não podemos escolher o objeto escolhido para a primeira posição. Esse raciocínio prossegue até que, para o último elemento, resta apenas uma opção (o elemento que ainda não foi escolhido). Pelo Princípio Multiplicativo, o total de maneiras de ordenar tais objetos é n.(n - 1).(n - 2).(n - 3). ... . 3.2.1 = n!, ou seja, $P_n = n!$.

Exemplo 8: Quantos números de três algarismos distintos podemos obter com os algarismo 5, 6 e 7 ?

Solução: $P_3 = 3! = 3.2.1 = 6$

Exemplo 9: Quantos são os anagramas da palavra "AMOR"?

Solução: Como a palavra possui quatro letras distinguíveis, devemos procurar o número de maneiras de permutá-las em ordem relevante. Há, portanto,

$$P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24 \text{ anagramas.}$$

Exemplo 10: Quantos números de três algarismos distintos podemos obter com os algarismo 1, 2 e 3?

Solução:

- Para o primeiro elemento temos 3 opções de escolha;
- para o segundo elemento temos 2 opções de escolha;
- para o terceiro elemento temos 1 opção de escolha.

Portanto, pelo Princípio Multiplicativo temos: 3.2.1 = 6 números de dois algarismos distintos. Usando a fórmula do Arranjo Simples, podemos justificar a convenção 0! = 1, pois

$$A_3^3 = P_3 \text{ e assim}$$

$$\frac{3!}{(3-3)} = \frac{3!}{0!} = 3!$$

O que nos leva à imposição, para efeito de generalização de resultados, de 0! = 1.

Em termos gerais, temos que se r = n, então

$$A_{n,n} = P_n \ \Rightarrow \ \frac{n!}{(n-n)!} = n! \ \Rightarrow \ \frac{n!}{0!} = n! \Rightarrow \ 0! = \frac{n!}{n!} = 1.$$

Os dois aspectos chave aqui é que, no Arranjo Simples e na Permutação Simples, tanto os objetos quanto a ordem são distinguíveis.

1.5 – Arranjos com Repetição

Arranjos com repetição são casos particulares do Princípio da Multiplicação e têm o paradigma do número de amostras de tamanho r de uma população de tamanho n, com reposição dos elementos e com ordem desejada.

Proposição 4 – Arranjo com Repetição – Suponha que r objetos devem ser selecionados de n objetos distinguíveis, de forma ordenada e com reposição dos elementos, permitindo assim repetições dos elementos. O número de seleções possíveis é dado por

$$AR_n^r = \ n^r$$

Demonstração: Temos assim um experimento em r fases (r extrações) com cada fase tendo n possíveis escolhas conforme o esquema, já que se pode repetir elementos em compartimentos distintos e a ordem é distinguível.

F_1	F_2	F_3	. . .	F_r
n	n	n		n

Pelo Princípio Multiplicativo, temos r fatores de n, ou seja, $AR_n^r =$ n . n . n . ... . n = n^r.

Exemplo 11: : De quantas maneiras podem ser distribuídos seis ingressos gratuitos para um show a 10 pessoas, não havendo restrição para o número de ingressos que cada pessoa pode receber?

Solução: Para cada um dos 6 ingressos há 10 pessoas possíveis. Assim, temos

$$AR_{10}^{6} = 10^{6} = 1.000.000.$$

Exemplo 12: De quantos modos podemos distribuir 3 objetos distinguíveis 1, 2 e 3 em duas caixas distinguíveis.

Solução: As alocações possíveis são

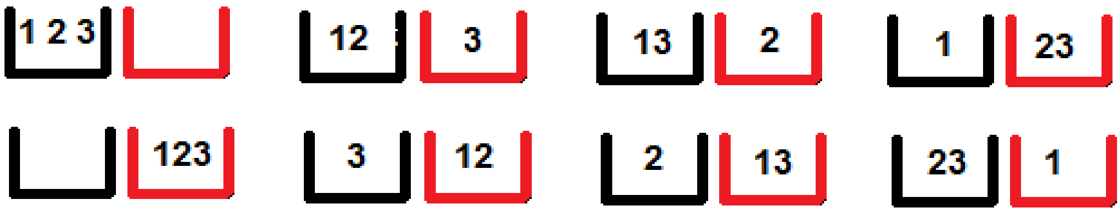


FIGURA 2 – DISTRIBUIÇÃO DE OBJETOS EM CAIXAS

Portanto, temos 8 maneiras de distribuir 3 objetos distinguíveis em duas caixas distinguíveis, pois

- o objeto número 1 tem duas escolhas de caixa, vermelha ou preta;
- o objeto numero 2 tem duas escolhas de caixa, vermelha ou preta;
- o objeto número 3 tem duas escolhas de caixa, vermelha ou preta.

Assim, pelo Princípio Multiplicativo, temos $2.2.2 = 2^3 = 8$ maneiras distintas para distribuir os objetos nas caixas, ou, equivalentemente, $AR_{2}^{3} = 2^3 = 8$.

1.6 – COMBINAÇÃO SIMPLES

A combinação é uma excelente oportunidade para se discutir o paradigma do número de amostras de tamanho r de uma população de tamanho n ($r \leq n$), sem reposição e sem ordem, ou seja do paradigma do Arranjo Simples descontado das réplicas geradas pela ordenação não desejada.

Proposição 5 – Combinação Simples - Suponha que n objetos distinguíveis devam ser alocados em r compartimentos indistinguíveis ($r \leq n$), de forma que cada compartimento contenha um único objeto. O número de alocações possíveis é dado por

$$C_{n,r} = C_n^r = \frac{A_{n,r}}{P_{r,r}} = \frac{n!}{(n-k)!\,r!}$$

Demonstração: Pelo reconhecimento de que se trata de um arranjo simples descontado das réplicas geradas pela ordenação desnecessária temos

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{P_r^r} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{\frac{r!}{(r-r)!}} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

Vemos, portanto que a combinação simples de *n*, *r* a *r*, se distingue do conceito de arranjo de *n*, *r* a *r* pelo fato de que, na combinação, a ordenação dos objetos distinguíveis não é relevante, isto é, os compartimentos da alocação são indistinguíveis, enquanto que no contexto de arranjo simples os compartimentos são distinguíveis .

Exemplo 13: Seja A o conjunto {a, b, c, d}. De quantas maneiras distintas podemos escolher 3 elementos desse conjunto, ou, equivalentemente, quantos subconjuntos de 3 elementos podemos formar com o conjunto A?

Solução: Temos 4 maneiras distintas para escolher o 1º elemento, 3 maneiras distintas para escolher o 2º e 2 maneiras para o 3º. Pelo Princípio Multiplicativo, temos 4 x 3 x 2 = 24 possibilidades de escolhermos três elementos num conjunto com 4 elementos com relevância na ordenação.

Porém, podemos observar que a escolha {a, b, c} que é uma combinação simples de A foi contada também das seguintes formas: {a, c, b}, {b ,a ,c}, {b, c, a},{c, a, b} e {c, b, a}, que representam subconjuntos iguais e foram contados como se fossem diferentes, ou seja, para cada 6 configurações de ordem de um dado subconjunto só nos interessa uma dessas configurações. Portanto teremos apenas $\frac{24}{6} = 4$ subconjuntos de 3 elementos do conjunto A.

Assim a resolução do problema em termos de combinação simples é dada como

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!1!} = 4.$$

Exemplo 14: De quantas maneiras é possível dividir 12 atletas em três times (Bom de Bola, Perna de Pau, Pé de Ferro), com 4 atletas, cada um?

Solução: Há C_{12}^4 modos de formar o Bom de Bola (subconjuntos de 4 atletas dos 12). Dos 8 atletas restantes temos C_8^4 para formar o time Perna de Pau (subconjuntos de 4 atletas dos 8). Finalmente, dos 4 últimos atletas para formar o Pé de Ferro, há C_4^4 possibilidades (subconjuntos de 4 atletas dos 4 restantes). Pelo Princípio Multiplicativo, tendo em mente a distinguibilidade dos três times, temos $C_{12}^{4}\ .\ C_{8}^{4}\ .\ C_{4}^{4} = \frac{12!}{4!8!}.\frac{8!}{4!4!}.1 = 495 \text{ x } 70 \text{ x } 1 = 34.650$ diferentes formações de três times distintos.

Exemplo 15: De quantas maneiras é possível dividir 12 atletas em três grupos de 4 atletas?

Solução: O número de possibilidades é igual ao número obtido no problema anterior dividido por 3!, pois a permutação dos nomes dos três times representa os mesmos 3 grupos de 4 atletas.

Assim, temos

$$\frac{C_{12}^{4}.C_{8}^{4}.C_{4}^{4}}{3!} = \frac{34.650}{6} = 5.775.$$

1.7 – PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

A permutação com repetição é a generalização da combinação simples e representa emblematicamente o número de permutações de objetos nem todos distinguíveis.

Proposição 6 - Permutação com Repetição - O número de permutações de n objetos tais que há n_1 objetos indistinguíveis do tipo 1, n_2 objetos indistinguíveis do tipo 2, . . . , e n_k objetos indistinguíveis do tipo k é dada por

$$\boldsymbol{P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = C_n^{n_1}.C_{n-n_1}^{n_2}.\ \ldots\ .C_{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}^{n_k}} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ .\ .\ .\ n_k!}.$$

Demonstração:

● Os n_1 objetos do tipo 1 podem ser colocados nas n posições iniciais de $\boldsymbol{C_n^{n_1}}$ maneiras, deixando $n - n_1$ posições livres para a próxima alocação.

● Então os n_2 objetos de tipo 2 podem ser colocados nas $n - n_1$ posições restantes de $C_{n-n_1}^{n_2}$ maneiras, deixando $n - n_1 - n_2$ posições livres a alocação seguinte.

● O processo continua sucessivamente, até que n_k objetos de tipo k sejam colocados em $\boldsymbol{C_{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}^{n_k}}$ maneiras.

Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o número total de permutações distintas é dado por

$$\boldsymbol{P_n^{n_1,n_2,\dots,n_k} = C_n^{n_1}.C_{n-n_1}^{n_2}\cdot \ \dots \ .C_{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}}^{n_k}}$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdot\dots\cdot\frac{(n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1})!}{n_k!0!} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ .\ .\ .\ n_k!} = P_n^{n_1,n_2,\dots,n_k}$$

Exemplo 16: De quantas maneiras distintas podemos organizar as letras da palavra BATATA, isto é, quantos anagramas admite a palavra BATATA?

Solução: Na palavra BATATA temos 1 B, 3 A's e 2 T's num total de 6 letras. Para formar um anagrama, devemos escolher 3 das 6 posições para as letras A's, o que pode ser feito de C_6^3 maneiras, 2 das 3 posições restantes para colocar as letras T's, o que pode ser feito de C_3^2 maneiras, e finalmente apenas 1 posição para a letra B. Pelo Princípio Multiplicativo temos

$$C_6^3 \ \text{x} \ C_3^2 \ \text{x} \ 1 = 20 \text{ x } 3 \text{ x } 1 = 60.$$

Outra solução: O número de anagramas é a permutação com repetição $P_6^{3,2,1} = \frac{6!}{3!2!1!} = 60$.

Exemplo 17: De quantas maneiras podemos lançar uma moeda 7 vezes e obter 4 caras (C) e 3 coroas (K) ?

Solução: Duas dessas sequências podem ser, por exemplo,

CCKKKCC ou CCCKKCK

Podemos inicialmente pensar que temos 7 letras distinguíveis. A maneira de arrumarmos essas 7 letras é 7! = 5.040. Porém, os 4 C's e os 3 K's não são na verdade distinguíveis, pois note, por exemplo, que a sequência CCKKKCC possui a mesma ordem que CCKKKCC. Na verdade, a diferenciação dos C's é artificial e não existe, pois retiradas as cores elas são indistinguíveis. Portanto, para essa sequência dada, as trocas dos 4 C's entre si e as trocas dos 3 K's entre si geram a mesma sequência. Há assim 4! x 3! = 144 configurações idênticas para cada configuração gerada. Portanto, só nos interessam as 5.040/144 = 35 sequências distintas.

Em termos de permutação com repetição de objetos nem todos distinguíveis, temos

$$P_7^{4,3,1} = \frac{7!}{4!3!1!} = \frac{7.6.5.4!}{4!3.2.1} = \frac{210}{6} = 35.$$

1.8 – Permutação Circular

A permutação circular pode ser vista como uma permutação linear descontada de suas réplicas de padrão circular, já que aqui a circularidade por rotação dos objetos é indistinguível.

Proposição 7 - Permutação Circular - Suponha *n* objetos distinguíveis dispostos circularmente. Então o número de padrões circulares gerados pelos *n* objetos é dado por

$$(PC)_n = (n-1)!$$

Demonstração: Inicialmente iremos calcular o número de maneiras de alocar os n objetos linearmente, para em seguida descontar com base nas replicações geradas no padrão linear que são indistinguíveis no padrão circular.

Sejam F_1, F_2, F_3, ... ,F_n os lugares em um circulo.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} F_1 & F_2 & F_3 & . \;\; . \;\; . & F_n \\ & & & & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccccc} P_1 & P_2 & P_3 & . \;\; . \;\; . & P_n \\ P_n & P_1 & P_2 & . \;\; . \;\; . & P_{n-1} \end{array}\right\} \text{Mesma arrumação}$$

Não havendo distinguibilidade nas posições devido à rotação dos objetos, temos *n* padrões lineares equivalentes a um único padrão circular. Assim,

$$(PC)_n = [n.(n-1).(n-2).(n-3). \;\ldots\; .\; 1] \text{ x } \frac{1}{n} = \frac{n!}{n} = \frac{n.(n-1)!}{n} = (n-1)!\,.$$

Permutações circulares estão relacionadas com permutações simples, filtradas dos padrões lineares que são indistinguíveis no padrão circular. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 18: De quantos modos podemos dispor quatro crianças (Antonio, Beatriz, Carol e Daniel) em uma roda em padrão circular?

Solução: Primeiro devemos imaginar um círculo e em seguida as crianças dispostas ao redor do círculo.

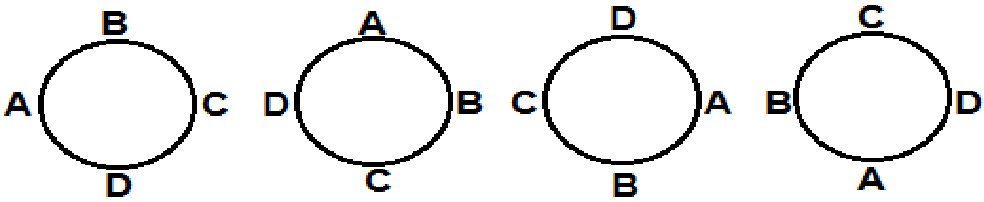


FIGURA 3 – POSIÇÕES NUMA RODA

Se colocarmos o A no lugar de B, B no lugar de C, C no lugar de D, D no lugar de A, e assim sucessivamente como mostra a figura acima, não teremos padrões circulares diferentes, apesar de termos mudado todos os elementos de posição. O que ocorreu, de fato, foi apenas uma rotação entre eles. Dessa forma, diferentemente do que acontece em uma fila linear, em uma disposição circular a simples troca de posições dos elementos por rotação não forma uma nova configuração circular, como representado na figura anterior. Como proceder então, se as configurações acima são iguais? Uma maneira de contornar essa situação é escolher a primeira criança a ficar na roda, e em seguida permutar as restantes de maneira idêntica a uma fila linear comum, a primeira criança funcionando como uma espécie de bússola orientadora das outras crianças dispostas em torno dela. Como o que importa é a disposição relativa entre as crianças, há um modo de colocar a primeira criança na roda; a segunda terá três posições possíveis, a direita, a esquerda ou em frente a primeira criança, a terceira terá duas posições possíveis e a quarta uma única posição. Assim temos

$$(PC)_4 = 1 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1 = 1 \text{ x } 3! = 3! = (4 - 1)! = 6.$$

Exemplo 19: De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com sete crianças, de modo que duas delas não fiquem juntas?

Solução: Já que essas duas crianças não podem ficar juntas, primeiro permutaremos circularmente as demais que são um total de cinco. (Chamaremos essas cinco crianças de 1, 2, 3, 4 e 5)

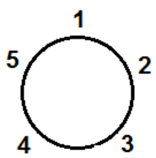


FIGURA 4 – PERMUTAÇÃO CIRCULAR

Denotando as crianças que não podem ficar juntas por 6 e 7, há cinco modos de colocar a criança 6 na roda e quatro modos de colocar a criança 7, garantindo que ela não fique junto da 6. Mas é simples garantir que elas não fiquem juntas, basta colocarmos cada uma nos espaços entre duas crianças acima e nunca colocar a criança 7 no mesmo espaço que a 6.

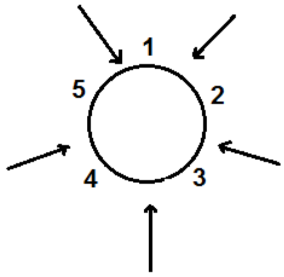


FIGURA 5 – PERMUTAÇÃO CIRCULAR

Podemos dispor circularmente as crianças 1, 2, 3, 4 e 5 de $(PC)_5 = (5 - 1)! = 4! = 24$ maneiras diferentes. Em seguidas contamos as maneiras de dispor as crianças 6 e 7 de 5 x 4 = 20 maneiras diferentes. Assim, o total de maneiras possíveis é dado por $24 \times 5 \times 4 = 480$ rodas.

Exemplo 20: De quantos modos se pode formar uma roda de ciranda com quatro mulheres e cinco homens, de modo que as mulheres fiquem juntas?

Solução: Considerando as quatro mulheres juntas como uma só, haverá seis "pessoas" diferentes (o grupo das 4 mulheres e os 5 homens), e teremos, portanto, $(PC)_6 = (6 - 1)! = 5! = 120$ rodas distintas. Como o total de maneiras de se permutar as mulheres entre si é $P_4 = 4! = 24$, então o total de maneiras de se formar essas rodas de acordo com o comando da questão é de $120 \times 24 = 2.880$.

1.9 – Combinação Completa

O conceito de Combinação completa, nem sempre abordado no Ensino Básico, está associado ao número de modos de se selecionar um subconjunto de *r* elementos de um conjunto de *n* elementos distinguíveis com repetições permitidas, mas sem importância da ordem. Uma outra interpretação paradigmática é que ela está associada ao número de amostras de tamanho *r* de uma população de tamanho *n*, com reposição e sem ordem.

Proposição 8 - Combinação Completa - Seja A um conjunto de *n* elementos. Então o número de amostras com reposição de *r* elementos de A, ou por outra, o número de subconjuntos de *r* elementos de A com repetições permitidas é dado por

$$\left\langle {n \atop r} \right\rangle = \binom{n+r-1}{r}$$

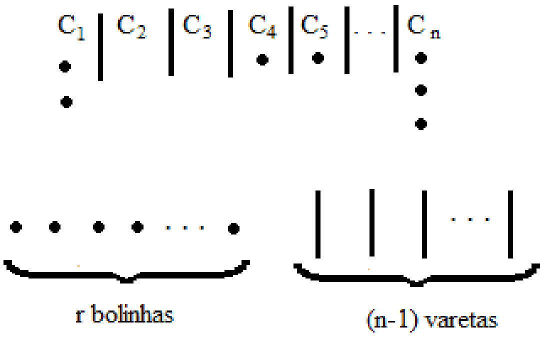
A notação $\left\langle {n \atop r} \right\rangle$ é chamada de combinação completa (ou com repetição) de n, r a r.

Alguns autores adotam a notação $(CR)_n^r$.

Demonstração: Seja $P = \{x_1, x_2, x_3, \ \dots \ , x_n\}$. O número de amostras possíveis com as restrições impostas equivale ao número de soluções da equação linear a coeficiente unitário dada por

$C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n = r$ com $C_i \geq 0$ e $i = 1, 2, 3, \dots n$, onde C_i é o numero de vezes que o elemento x_i aparece na amostra.

A solução desse problema algébrico é equivalente ao número de alocações de *r* bolas indistinguíveis em *n* caixas distinguíveis, cada alocação representando uma solução da equação $C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n = r$. Por sua vez, o problema é equivalente ao número de padrões formados por r bolinhas indistinguíveis e n -1 varetas também indistinguíveis que fazem o papel de separar as n caixas.

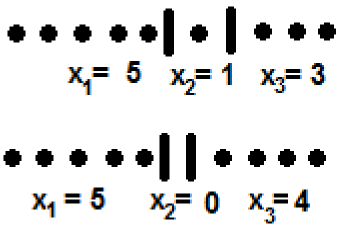


Assim, o problema se reduz a um problema de permutação com repetição, cuja solução é dada por

$$(CR)_{n+r-1}^r = (n+r-1)! \, . \, \frac{1}{r!(n-1)!} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = P_{n+r-1}^{r,n-1} = \binom{n+r-1}{r}.$$

Exemplo 21: Determine o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1+x_2+x_3 = 9$.

Solução: Na equação $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, temos $n = 9$ e $r = 3$. Duas das soluções poderiam ser (5, 1, 3) e (5, 0, 4) que podem ser representadas em padrões de varetas e bolinhas (valores) como, respectivamente,



Sendo assim, o número total de soluções inteiras não-negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ é igual ao número total de sequências de n ● e r – 1 sinais | a elas associadas. Tal número é a combinação $C_{n+r-1,r}$. Denotando por $(CR)_{3,9} = (CR)_3^9$ o número de soluções inteiras não negativas da equação dada, temos

$$(CR)_3^9 = C_{3+9-1}^9 = C_{11}^9 = \frac{11!}{(11-9)!9!} = \frac{11!}{2!9!} = \frac{11.10.9!}{2!9!} = \frac{11.10}{2.1} = 55.$$

ou, equivalentemente,

$$P_{3+9-1}^{9,3-1} = P_{11}^{9,2} = \frac{11!}{9!2!} = \frac{11.10.9!}{9!2!} = \frac{11.10}{2.1} = 11\,.5 = 55.$$

Exemplo 22: De quantas maneiras você pode comprar 9 frutas, se suas opções são maçãs, bananas, peras e abacaxis?

Solução: Deseja-se o número de amostras de tamanho 9 selecionadas de uma população de tamanho 4 sem ordem e com reposição, cujo valor é o número de soluções inteiras não negativas da equação

$$M + B + P + A = 9.$$

Assim, temos

$$(CR)_4^9 = C_{4+9-1}^9 = C_{12}^9 = \frac{12!}{(12-9)!9!} = \frac{12!}{3!9!} = \frac{12.11.10.9!}{3!9!} = \frac{12.11.10}{3.2.1} = 220,$$

ou, equivalentemente,

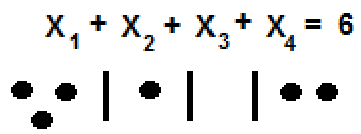
$$P_{9+4-1}^{9,4-1} = P_{12}^{9,3} = \frac{12!}{3!9!} = \frac{12.11.10.9!}{3!9!} = \frac{12.11.10}{3.2.1} = 220.$$

Exemplo 23: De quantas maneiras você pode dar 10 bombons de mesmo tipo a 4 amigos se cada amigo deve receber pelo menos um bombom?

Solução: Cada uma das 4 pessoas deve já receber um bombom. Logo, sobram 6 dos 10 bombons indistinguíveis a serem distribuídos a 4 pessoas distinguíveis, o que equivale a obter o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$, ou seja,

$$(CR)_4^6 = C_{4+6-1}^6 = C_9^6 = \frac{9!}{(9-6)!6!} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9.8.7.6!}{6!3.2.1} = \frac{9.8.7}{3.2.1} = 84.$$

ou, equivalentemente



$$P_9^{6,3} = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9.8.7.6!}{6!3.2.1} = \frac{9.8.7}{3.2.1} = 84.$$

Exemplo 24: Quantas soluções existem para a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 12$, onde x_1, x_2, x_3 são inteiros maiores ou igual a 2?

Solução: Podemos reescrever o problema com $x_i = y_i + 2$, para i = 1, 2, 3, $y_i \geq 0$ para encontrar o número de soluções não negativas do problema em termos de y_i.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12$$

$$y_1 + 2 + y_2 + 2 + y_3 + 2 = 12$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 12 - 6$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 6$$

A equação $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ com $x_i \geq 2$ é equivalente $y_1 + y_2 + y_3 = 6$ com y_1, y_2, $y_3 \geq 0$ e inteiros, cuja solução é dada por

$$(CR)_3^6 = C_{3+6-1}^6 = C_8^6 = \frac{8!}{(8-6)!6!} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8.7.6!}{2!6!} = \frac{8.7}{2.1} = 28,$$

ou, equivalentemente,

$$P_{3+6-1}^{6,3-1} = P_8^{6,2} = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8.7}{2.1} = 28\,.$$

2 – O PROBLEMA DA ALOCAÇÃO DE BANDEIRAS EM MASTROS

Um mesmo problema combinatório pode frequentemente reformulado de muitas maneiras diferentes. O problema das bandeiras, utilizado na avaliação pré-teste dos alunos, se mostra bastante rico na problematização do conceito de distinguibilidade e indistinguibilidade de propriedades intrínsecas ou extrínsecas aos objetos. Por esta razão, é importante dedicar tempo para se familiarizar com esta terminologia e as heurísticas adequadas para a solução em cada caso. Nesta seção, contemplaremos o problema de como calcular o número de maneiras de distribuir r bandeiras em n mastros sob várias condições. As que são geralmente impostas são as seguintes:

- as bandeiras podem ser distinguíveis ou indistinguíveis;
- os mastros podem ser distinguíveis ou indistinguíveis;
- a alocação pode ser ordenada ou não ordenada nos mastros;
- mastros podem ou não ficarem vazios.

O termo **distinguível** refere-se ao fato de que as bandeiras ou os mastros são marcados com alguma característica que os torne distinguíveis, por exemplo, cada um com números, cores, tamanhos ou formas diferentes. Quando falarmos de r bandeiras distinguíveis, iremos supor que elas estão numeradas com números inteiros consecutivos de 1 a r, e quando falamos de n mastros distinguíveis, assumiremos que estes também estão numerados com números inteiros consecutivos de 1 a n.

O termo **indistinguível** refere-se ao fato de que as bandeiras ou mastros são idênticos e não há maneira de diferenciá-los, ou então se refere à indistinguibilidade pela ordem com que as bandeiras são alocadas aos mastros.

Por exemplo, ao alocarmos bandeiras indistinguíveis em mastros distinguíveis, não faz diferença qual bandeira irá para qual mastro, mas apenas quantas bandeiras se situam em cada mastro. Neste contexto também nem a ordem é relevante, já que as bandeiras são idênticas.

Em nossa discussão, omitimos a solução do caso em que tanto as bandeiras quanto os mastros são indistinguíveis, pois a solução equivale ao problema de como particionar um inteiro positivo r (número de bandeiras) numa soma de no máximo n inteiros positivos, problema esse resolvido na Combinatória avançada por funções geradoras. Quando as bandeiras são distinguíveis e os mastros são indistinguíveis, o problema é facilmente resolvido se o número de mastros é 2, pois ele equivale ao número de maneiras de separar o conjunto de bandeiras em dois subconjuntos disjuntos e complementares, o que pode ser feito de $2^r/2 = 2^{r-1}$ maneiras, se mastros podem ficar vazios. No entanto, para 3 ou mais mastros indistinguíveis o problema também está além do nível médio, pois se trata do número de maneiras de particionar o conjunto das r bandeiras em n subconjuntos disjuntos cuja união é o conjunto das bandeiras. Daí esses problemas não terem sido tratados em sala de aula.

Felizmente, podemos usar conhecimento discutido anteriormente de Permutações e Combinações para nos ajudar com os problemas de distribuir bandeiras em mastros e conscientizar os alunos para a importância dos conceitos de distinguibilidade/indistinguibilidade de propriedades. Portanto, em cada caso, a ideia é tentar primeiramente reformular o problema em termos de permutações e combinações.

Vejamos os casos tratados no pré-teste com os alunos, na forma de explicitação de todas as configurações possíveis, já que estes ainda não haviam sido expostos à teoria.

2.1 - Bandeiras distinguíveis e mastros distinguíveis, sem ordem interna nos mastros, com mastros podendo ficar vazios

Quantas maneiras existem para distribuir *r* bandeiras distinguíveis em *n* mastros distinguíveis, sem ordem nos mastros e com mastros podendo ficar vazios?

Neste caso, colocaremos *r* bandeiras numeradas de 1 a *r*, em *n* mastros, numerados de 1 a *n*, mas sem restrição no número de objetos que podem entrar em cada mastro e sem ordenação interna nos mastros. Esse problema pode ser reparafraseado como um problema de cardinalizar o número de funções de domínio no conjunto das bandeiras e contradomínio o conjunto dos mastros. Cada função equivale a uma alocação das bandeiras nos mastros com as condições exigidas. Trata-se, portanto, de um arranjo com repetição, conforme a *Proposição 4*. Assim, existem n^r maneiras diferentes para alocar às *r* bandeiras distinguíveis os *n* mastros distinguíveis.

Exemplo 25: Calcule o número de formas de se alocar 3 bandeiras em 2 mastros com as seguintes condições:

- as 3 bandeiras são nas cores vermelha, preta e branca, ou seja, são distinguíveis;
- os 2 mastros têm cores diferentes, ou seja, são distinguíveis;
- a ordem das bandeiras nos mastros não importa;
- mastros podem ficar vazios.

Solução: Para cada bandeira existem dois mastros possíveis de associação. Logo, pela P*roposição 4*, referente ao arranjo com repetição, temos

$$(AR)_2^3 = 2^3 = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 = 8 \text{ possibilidades.}$$

Para o pré-teste, os alunos poderiam enumerar essas possibilidades, por se tratar de uma quantidade pequena, a saber:

M_1	M_2
P B V	∅
P B	V
P V	B
B V	P
∅	P B V
V	P B
B	P V
P	B V

Portanto, temos 8 possibilidades de distribuir 3 bandeiras distinguíveis em 2 mastros distinguíveis, com os mastros podendo ficar vazios e sem ordenação interna das bandeiras nos mastros.

2.2 - Bandeiras distinguíveis e mastros distinguíveis, sem ordem interna nos mastros, com mastros não podendo ficar vazios

Quantas maneiras existem para distribuir *r* bandeiras distinguíveis em *n* mastros distinguíveis, sem ordem nos mastros e com mastros não podendo ficar vazios?

Neste caso, colocaremos *r* bandeiras numeradas de 1 a *r*, em *n* mastros, numerados de 1 a *n*, com a restrição de que nenhum mastro fique vazio e sem ordenação interna nos mastros. Esse problema pode ser reparafraseado como um problema de cardinalizar o número de funções sobrejetoras de domínio no conjunto das bandeiras e contradomínio o conjunto dos mastros. Logo, devemos ter $r \geq n$, pois do contrário não haverá configuração possível. Cada função sobrejetora equivale a uma alocação das bandeiras nos mastros com as condições exigidas. Esse problema exige a aplicação do Princípio da Inclusão-Exclusão, não tratado teoricamente aqui, mas por se tratar de um problema de dimensão pequena, ele foi utilizado para se avaliar a percepção de que se trata de uma filtração do exemplo 25, retirando-se as configurações que contenham o conjunto vazio em algum dos mastros.

Exemplo 26: Calcule o número de formas de se alocar 3 bandeiras em 2 mastros com as seguintes condições:

- as 3 bandeiras são nas cores vermelha, preta e branca, ou seja, são diferentes;
- os 2 mastros têm cores diferentes, ou seja, são distinguíveis;
- a ordem das bandeiras nos mastros não importa;
- mastros não podem ficar vazios.

Solução: Sem a quarta restrição vimos que há $(AR)_2^3$ = 2^3 = 2 x 2 x 2 = 8 possibilidades de alocação. Devemos retirar destas as funções em que nenhum ponto do domínio leva ao mastro M_1 e as funções em que nenhum ponto de domínio leva ao mastro M_2. Há apenas duas funções (ou duas alocações) em que isso se dá, a saber,

M_1	M_2
P B V $\varnothing$	$\varnothing$ P B V

Há portanto 8 – 2 = 6 possíveis alocações nas condições exigidas.

2.3 - Bandeiras distinguíveis e mastros distinguíveis, com ordem interna nos mastros, com mastros podendo ficar vazios

Quantas maneiras existem para distribuir *r* bandeiras distinguíveis em *n* mastros distinguíveis, com ordem nos mastros e com mastros podendo ficar vazios?

Neste caso, colocaremos *r* bandeiras numeradas de 1 a *r*, em *n* mastros, numerados de 1 a *n*, mas sem restrição no número de objetos que podem entrar em cada mastro e com ordenação interna nos mastros. Esse problema tem duas fases em sua solução. A primeira fase seria calcular quantas bandeiras cada mastro receberá. Isso será feito por meio do cálculo de quantas soluções inteiras não negativas tem a equação $M_1 + M_2 + ... + M_n = r$. Na segunda fase, devemos permutar as r bandeiras distinguíveis para cada uma das soluções obtida na primeira fase. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, temos $(CR)_{n,r}$ x $r!$.

Exemplo 27: Calcule o número de formas de se alocar 3 bandeiras em 2 mastros com as seguintes condições:

- as 3 bandeiras são nas cores vermelha, preta e branca, ou seja, são distinguíveis;
- os 2 mastros têm cores diferentes, ou seja, são distinguíveis;
- a ordem das bandeiras nos mastros importa;
- mastros podem ficar vazios.

Solução: O número de soluções inteiras não negativas de $M_1 + M_2 = 3$ é dado por $(CR)_{2,3} = C_{4,3} = 4$. Para cada quantidade alocada, devemos permutar as 3 bandeiras de 3! = 6 maneiras possíveis. Assim, temos, pelo Princípio Multiplicativo 4 x 6 = 24 alocações possíveis, a saber:

M_1	M_2	M_1	M_2
P B V	$\varnothing$	$\varnothing$	P B V
P V B	$\varnothing$	$\varnothing$	P V B
B P V	$\varnothing$	$\varnothing$	B P V
B V P	$\varnothing$	$\varnothing$	B V P
V B P	$\varnothing$	$\varnothing$	V B P
V P P	$\varnothing$	$\varnothing$	V P P
P B	V	V	P B
B P	V	V	B P
P V	B	B	P V
V P	B	B	V P
B V	P	P	B V
V B	P	P	V B

2.4 - Bandeiras distinguíveis e mastros distinguíveis, com ordem interna nos mastros, com mastros não podendo ficar vazios

Quantas maneiras existem para distribuir r bandeiras distinguíveis em n mastros distinguíveis, com ordem nos mastros e com mastros não podendo ficar vazios?

Neste caso, colocaremos r bandeiras numeradas de 1 a r, em n mastros, numerados de 1 a n, mas com a restrição restrição de pelo menos uma bandeira em cada mastro e com ordenação interna nos mastros. Esse problema tem duas fases em sua solução. A primeira fase seria calcular quantas bandeiras cada mastro receberá. Isso será feito por meio do cálculo de quantas soluções inteiras positivas tem a equação $M_1 + M_2 + ... + M_n = r$. Teremos nesse caso $n - 1$ varetas e $r - n$ bolas, já que uma bola deverá ser previamente alocada em cada mastro. Assim, haverá $(CR)_{n,r-n}$ Na segunda fase, devemos permutar as r bandeiras distinguíveis para cada uma das soluções obtida na primeira fase. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, temos $(CR)_{n,r-n}$ x $r!$.

Exemplo 28: Calcule o número de formas de se alocar 3 bandeiras em 2 mastros com as seguintes condições:

- as 3 bandeiras são nas cores vermelha, preta e branca, ou seja, são distinguíveis;

- os 2 mastros têm cores diferentes, ou seja, são distinguíveis;
- a ordem das bandeiras nos mastros importa;
- mastros não podem ficar vazios.

Solução: O número de soluções inteiras positivas de $M_1 + M_2 = 3$ é dado por $(CR)_{2,1} = C_{2,1} = 2$. Para cada quantidade alocada, devemos permutar as 3 bandeiras de 3! = 6 maneiras possíveis. Assim, temos, pelo Princípio Multiplicativo 2 x 6 = 12 alocações possíveis, a saber:

M_1	M_2	M_1	M_2
P B	V	V	P B
B P	V	V	B P
P V	B	B	P V
V P	B	B	V P
B V	P	P	B V
V B	P	P	V B

2.5 - Bandeiras distinguíveis em mastros indistinguíveis sem ordenação interna nos mastros e mastros podendo ficar vazios

Quantas maneiras existem para distribuir *r* bandeiras indistinguíveis em *n* mastros distinguíveis, sem ordem interna nos mastros e com mastros podendo ficar vazios?

Este problema, de difícil solução para o nível médio, equivale ao número de formas de se particionar o conjunto de *r* bandeiras em *n* subconjuntos disjuntos, podendo ser vazio, cuja união restitui o conjunto das bandeiras. Quando o número de mastros é 2, o problema se reduz a obter o número de subconjuntos gerados pelo conjunto das bandeiras dividido por 2, ou seja, $2^r/2 = 2^{r-1}$. O caso geral está fora do escopo do Ensino Básico e será omitido.

Exemplo 29: Calcule o número de formas de se alocar 3 bandeiras em 2 mastros sendo:

- as 3 bandeiras são nas cores vermelha, preta e branca, ou seja, são distinguíveis;
- os 2 mastros têm a mesma cor, isto é, são indistinguíveis;
- a ordem das bandeiras nos mastros não importa;
- mastros podem ficar vazios.

Solução: O número de subconjuntos do conjunto de 3 bandeiras distinguíveis é dado por $2^3 = 8$. Portanto, temos 8/2 = 4 alocações possíveis, a saber:

M_1	M_2
P B V	$\emptyset$
P B	V
P V	B
B V	P

2.6 - Bandeiras distinguíveis, mastros indistinguíveis, sem ordenação interna e mastros não podem ficar vazios

Quantas maneiras existem para alocar r bandeiras distinguíveis em n mastros indistinguíveis, sem ordenação interna e mastros não podendo ficar vazios?

Este problema, de difícil solução para o nível médio, equivale ao número de formas de se particionar o conjunto de *r* bandeiras em *n* subconjuntos não vazios, disjuntos, cuja união restitui o conjunto B das bandeiras. Quando o número de mastros é 2, o problema se reduz a obter a metade do número de subconjuntos gerados pelo conjunto das bandeiras previamente retirado dos dois pares ($\emptyset$, B) e (B,$\emptyset$), ou seja, $(2^r - 2)/2 = 2^{r-1} - 1$. O caso geral está fora do escopo do Ensino Básico e será omitido.

Exemplo 30: Calcule o número de formas de se alocar 3 bandeiras em 2 mastros nas seguintes condições:

- as 3 bandeiras são nas cores vermelha, preta e branca, ou seja, são diferentes;
- os 2 mastros têm a mesma cor, ou seja, são indistinguíveis;
- a ordem das bandeiras nos mastros não importa;
- mastros não podem ficar vazios.

Solução: Assim temos $(2^3 - 2)/2 = 2^{3-1} – 1 = 4 – 1 = 3$, a saber:

M_1	M_2
PB	V
PV	B
BV	P

2.7 - Bandeiras indistinguíveis e mastros distinguíveis sem exclusão, sem ordenação interna aos mastros e mastros podem ficar vazios

Quantas maneiras existem para distribuir bandeiras indistinguíveis em mastros distinguíveis, sem ordenação interna e mastros podem ficar vazios?

Neste caso, temos r bandeiras idênticas para ser distribuída em n mastros distinguíveis, mas sem restrição no número de bandeiras que podem ocupar um determinado mastro.

Uma vez que as bandeiras são indistinguíveis e os mastros são distinguíveis, o problema se reduz a encontrar o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$, o que nos leva à *Proposição 8*. Trata-se, portanto, de uma combinação completa, $(CR)_{n,r} = C_{n+r-1,r}$. Assim temos

$$(CR)_{n,r} = \frac{(n+r-1)!}{(r-1)!\,n!}$$

maneiras diferentes de alocar as bandeira com as condições dadas.

Exemplo 31: Calcule o número de formas de se alocar 3 bandeiras em 2 mastros com as seguintes condições:

- as 3 bandeiras têm a mesma cor vermelha, isto é são indistinguíveis;
- os 2 mastros têm cores diferentes , ou seja, são distinguíveis;
- a ordem das bandeiras nos mastros naturalmente não importa;
- mastros podem ficar vazios.

Solução: Pela *Proposição 8*, devemos verificar quantas são as soluções inteiras não negativas da equação $M_1 + M_2 = 3$. Há, portanto,

$$(CR)_{2,3} = C^3_{2+3-1} = C^3_4 = \frac{4!}{(4-3)!\,3!} = \frac{4!}{1!\,3!} = \frac{4\,x\,3!}{3!} = 4$$

alocações possíveis, a saber:

M_1	M_2
V V V	∅
V V	V
V	V V
∅	V V V

2.8 - Bandeiras indistinguíveis em mastros indistinguíveis, sem ordenação interna aos mastros e mastros podem ficar vazios

Quantas maneiras existem para distribuir *r* bandeiras indistinguíveis em *n* mastros indistinguíveis, sem ordenação interna e mastros podem ficar vazios?

Este problema, objeto da Teoria das Partições da Análise Combinatória avançada, é equivalente a se calcular o número de maneiras com que um número natural *r* pode ser escrito como a soma de *n* números inteiros não negativos, ou equivalentemente ao número de maneiras de se escrever um número natural *r* como a soma de no máximo *n* números inteiros positivos. Esse problema é resolvido por funções geradoras e está além do nível da Análise Combinatória do Ensino Básico. No entanto, para valores de pequeno porte, é uma boa oportunidade para conscientizar os alunos da estratégia de ataque ao problema com as estruturas de indistinguibilidade impostas.

Exemplo 30: De quantas maneiras é possível alocar 6 bandeiras indistinguiveis em 4 mastros indistinguiveis, com mastros podendo ficar vazios?

Solução: Desejamos calcular o número de maneiras de escrever o número natural 6 como a soma de 4 inteiros não negativos, ou equivalentemente, o número de maneiras de escrever o número natural 6 como a soma de no máximo 4 inteiros positivos. Cada partição do número 6 equivale a uma alocação das bandeiras indistinguíveis nos mastros também indistinguíveis, podendo os mastros ficarem vazios. Assim temos as seguintes decomposições:

$$6 + 0 + 0 + 0 = 6$$
$$5 + 1 + 0 + 0 = 6$$
$$4 + 2 + 0 + 0 = 6$$
$$4 + 1 + 1 + 0 = 6$$
$$3 + 1 + 1 + 1 = 6$$
$$3 + 2 + 1 + 0 = 6$$
$$3 + 3 + 0 + 0 = 6$$
$$2 + 2 + 2 + 0 = 6$$
$$2 + 2 + 1 + 1 = 6$$

Há portanto 9 alocações possíveis com as condições dadas.

Exemplo 31: De quantas maneiras colocar 6 bandeiras em 6 mastros idênticos, com mastros podendo ficar vazios?

Solução: Para a extensão do caso anterior, temos um total de 11 alocações, isto é, todas as 9 alocações do exercício anterior mais as duas seguintes:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 6$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$$

O problema a seguir foi proposto no pré-teste para se avaliar o entendimento prévio do conceito de indistinguibilidade de estruturas, já que sua solução é facilmente obtida pela caracterização das alocações possíveis.

Exemplo 32 : Calcule o número de formas de se alocar 3 bandeiras em 2 mastros com as seguintes condições:

- as 3 bandeiras têm a mesma cor, isto é, são iguais (indistinguíveis);
- os 2 mastros têm a mesma cor, ou seja, são iguais (indistinguíveis);
- a ordem das bandeiras nos mastros naturalmente não importa;
- mastros podem ficar vazios.

Solução: Existem apenas 2 maneiras de alocar as bandeiras, pois só há duas partições possíveis do número natural 3 como soma de 2 inteiros não negativos, a saber:

$$3 + 0 = 3$$

$$2 + 1 = 3$$

Enumerando as possibilidades, obtemos

M	M
V V V	∅
V V	V

2.9 - Bandeiras indistinguíveis em mastros indistinguíveis, sem ordenação interna aos mastros e mastros não podem ficar vazios

Quantas maneiras existem para distribuir *r* bandeiras indistinguíveis em *n* mastros indistinguíveis, sem ordenação interna e os mastros não podem ficar vazios?

Este problema é similar ao caso anteriormente estudado, modificado apenas pelo fato de que o número natural *r* deve ser particionado como a soma de exatamente *n* números inteiros positivos.

Exemplo 33: De quantas maneiras é possível alocar 6 bandeiras indistinguiveis em 4 mastros indistinguiveis, com mastros não podendo ficar vazios?

Solução: Desejamos calcular o número de maneiras de escrever o número natural 6 como a soma de exatamente 4 inteiros positivos. Cada partição do número 6 equivale a uma alocação das bandeiras indistinguíveis nos mastros também indistinguíveis, sem que os mastros fiquem vazios. Assim temos as seguintes decomposições:

$$3 + 1 + 1 + 1 = 6$$

$$2 + 2 + 1 + 1 = 6$$

Há, portanto, apenas 2 alocações possíveis com as condições dadas.

O problema de alocação das bandeiras em mastros se mostra, no nosso entender, bastante rico para conscientizar os alunos de que a maior dificuldade de "contar sem contar" pela Análise Combinatória reside no reconhecimento de estruturas de distinguibilidade e indistinguibilidade de estruturas intrínsecas e extrínsecas aos objetos. No entanto, esse problema naturalmente não esgota todas as heurísticas de que um aluno deve dotar para a solução de problemas os mais variados de combinatória. Os dois exemplos a seguir, destituídos do problema da alocação de bandeiras em mastros, ilustram bem outras estratégias a serem utilizadas quando da variação das estruturas de distinguibilidade do problema.

Exemplo 34: De quantas maneiras se pode marcar os números de 1 a 6 sobre as seis faces de cores diferentes (distinguíveis) de um dado cúbico?

Solução: Se um cubo tem as 6 faces pintadas de cores distinguíveis, o problema se reduz a alocar a cada cor um único número sem repeti-los. Trata-se portanto de um problema de permutação linear dos 6 números, uma vez que a troca de quaisquer dois números de duas faces de cores diferentes induz uma nova alocação. Assim, temos 6 números para colocarmos na primeira cor. Em seguida, temos 5 números para escolher para a próxima face; 4 para a face seguinte e assim por diante até o único número restante para a última face. Temos assim um total de

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720 \text{ dados possíveis.}$$

Exemplo 35: De quantas maneiras se pode marcar os números de 1 a 6 sobre as seis faces de cores iguais (indistinguíveis) de um dado cúbico?

Solução: Como as faces do dado são iguais, se ele for girado, ainda que os números estejam em posições diferentes, o dado permanece o mesmo. Assim podemos alocar o número 1 em qualquer das faces, já que as faces são indistinguíveis. Em seguida há 5 escolhas possíveis para o número da face oposta à face 1. Restam agora 4 números a serem alocados nas faces laterais em padrão circular, já que a rotação dos 4 números alocados gera o mesmo dado, ou seja, os últimos quatro números são permutados circularmente entre as quatro posições. Há 4 possibilidades para a primeira das faces, 3 para a segunda, 2 para a terceira e 1 para a quarta, mas cada disposição formada com estes números é equivalente às 4 rotações destes. Assim, temos $1 \text{ x } 5 \text{ x } \frac{4!}{4} = 5 \text{ x } 3! = 5 \text{ x } (PC)_4 = 30$ alocações possíveis, número bem menor que o caso anterior em que as faces são distinguíveis.

Segue abaixo um resumo dos casos de alocação das bandeiras nos mastros.

Bandeiras distinguíveis e mastros distinguíveis, sem ordem interna nos mastros, com mastros podendo ficar vazios	$(AR)_n^r$
Bandeiras distinguíveis e mastros distinguíveis, sem ordem interna nos mastros, com mastros não podendo ficar vazios	$(AR)_n^r - n$, para n=2
Bandeiras distinguíveis e mastros distinguíveis, com ordem interna nos mastros, com mastros podendo ficar vazios	Calcular o numero de soluções inteiras não negativas tem a equação $M_1 + M_2 + \ldots + M_n = r$ $r!\,(CR)_{n,r}$
Bandeiras distinguíveis e mastros distinguíveis, com ordem interna nos mastros, com mastros não podendo ficar vazios	Calcular o numero de soluções inteiras positivas tem a equação $M_1 + M_2 + \ldots + M_n = r$ $r!\,(CR)_{n,r-n}$
Bandeiras distinguíveis em mastros indistinguíveis sem ordenação interna nos mastros e mastros podendo ficar vazios	$2^r/2 = 2^{r-1}$, para n =2, o caso geral está fora do escopo do Ensino Médio e será omitido.
Bandeiras distinguíveis, mastros indistinguíveis, sem ordenação interna e mastros não podem ficar vazios	$(2^r - 2)/2 = 2^{r-1} - 1$ para n =2, o caso geral está fora do escopo do Ensino Médio e será omitido
Bandeiras indistinguíveis e mastros distinguíveis sem exclusão, sem ordenação interna aos mastros e mastros podem ficar vazios	$(CR)_{n,r} = C_{n+r-1,r}.$
Bandeiras indistinguíveis em mastros indistinguíveis, sem ordenação interna aos mastros e mastros podem ficar vazios	**Teoria das Partições da Análise Combinatória avançada** **O número de maneiras com que um número natural *r* pode ser escrito como a soma de *n* números inteiros não negativos**
Bandeiras indistinguíveis em mastros indistinguíveis, sem ordenação interna aos mastros e mastros não podem ficar vazios	**Teoria das Partições da Análise Combinatória avançada** **O número natural *r* deve ser particionado como a soma de exatamente *n* números inteiros positivos.**

FIGURA 6 – Tabela dos casos de alocação das bandeiras nos mastros

Vimos, portanto, neste capítulo de que forma cabal os conceitos de distinguibilidade e indistinguibilidade de estruturas norteiam completamente as heurísticas utilizadas nas soluções de problemas de combinatória. No próximo capítulo, veremos de que forma esses conceitos, tão cruciais na Análise Combinatória, serão reproblematizados e relativizados no contexto da Probabilidade.

Capítulo 2

A Questão da Distinguibilidade e Indistinguibilidade de Objetos em Probabilidade

2.1 INTRODUÇÃO

No contexto de Probabilidade somos convidados a relativizar os conceitos de distinguibilidade e indistinguibilidade de estruturas se desejarmos construir espaços amostrais mais amigáveis para a aferição da medida de probabilidade de determinados eventos. É muito comum tomarmos as estruturas como distinguíveis, mesmo quando essas não o são, para que os espaços amostrais sejam compostos de elementos equiprováveis, facilitando assim os cálculos desejados.

A seção a seguir pretende, de maneira muito sintética e não exaustiva, caracterizar a longa e difícil jornada do pensamento matemático no entendimento e na matematização do acaso, via Teoria das Probabilidades. Apesar de a noção de acaso ser inerente às civilizações as mais antigas, seu alcance matemático não é trivial como sua própria história atesta.

2.2 - Breve História da Probabilidade e Seus Obstáculos Cognitivos

A palavra *probabilidade* deriva do Latim *probare* (provar ou testar). O termo provável é muito utilizado em acontecimentos incertos, podendo ser substituído por outros como ‘sorte’, ‘risco’, ‘azar’, ‘incerteza’, ‘duvidoso’, dependendo do contexto. Alguns indícios alegam que a noção de probabilidade tem sua origem relacionada aos jogos de azar, durante a Idade Média. O jogo foi o impulsor e, também, o primeiro beneficiário da criação da teoria das probabilidades.

O desenvolvimento das teorias da probabilidade e as primeiras considerações matemáticas em relação aos jogos e apostas se devem aos matemáticos italianos Pacioli, Cardano e Tartaglia (séc. XVI). Outros matemáticos contribuíram para o desenvolvimento e a sintetização da probabilidade; dentre eles podemos citar: Blaise Pascal (1623–1662), Pierre de Fermat (1601–1655), Jacob Bernoulli (1654–1705), Pierre Simon Laplace (1749–

1827), Carl Friedrich Gauss (1777–1855) e Siméon Denis Poisson (1781 – 1840). É em meados do século XX que a Probabilidade adquirirá uma base axiomática irrefutável pelo matemático russo Andrei Kolmogorov (1903–1987), responsável por colocá-la como uma das teorias mais relevantes do século XX e XXI.

Boyer, no seu livro História da Matemática nos relata que:

> *A teoria das probabilidades deve mais a Laplace que a qualquer outro matemático. A partir de 1774 ele escreveu muitos artigos sobre o assunto, cujos resultados ele incorporou no clássico "Théorie Analytique das Probabilités" de 1812. Ele considerou a teoria em todos os aspectos e em todos os níveis e seu "Essai philosophique de probabilités" de 1812 é uma exposição introdutória para o leitor comum. Laplace escreveu que "no fundo a teoria das probabilidades é apenas o senso comum expresso em números"; mas sua Théorie analytique mostra a mão de um mestre da análise que conhece seu cálculo avançado.[...]*

Matemático, físico e astrônomo, Pierre-Simon Laplace (1749-1827) foi uma das estrelas da ciência francesa no período napoleônico, considerado o "Newton da França". Sua vasta e diversificada obra é um legado presente no dia a dia de todo físico, matemático e engenheiro modernos.

Pascal e Fermat foram também importantes na construção da teoria do cálculo das probabilidades, por meio dos cálculos relacionados às apostas nos jogos que resultaram em várias hipóteses, marcando o início da teoria das probabilidades como ciência.

Atualmente, o estudo das probabilidades é essencial em diversos campos científicos. Sua principal aplicação diz respeito ao estudo da equidade dos jogos e de seus prêmios, sendo sua principal aplicação destinada à Estatística Indutiva, na acepção de amostra, extensão dos resultados à população e na previsão de acontecimentos futuros.

Mendoza e Swift (1981) mostram a importância do ensino de Probabilidade nas escolas para que os alunos possam dominar esse conhecimento fundamental numa era imersa em incertezas como a nossa, ajudando-os no cotidiano e em sua vida econômica e social, por meio de tentativas, sondagens, análises, comparações, escolhas amostrais e tomada de decisões. Hoje em dia, as propostas curriculares de matemática no mundo todo sublinham a importância desse tema, enfatizando que o estudo da Probabilidade é imprescindível para dar ordem simbólica aos eventos do dia a dia das pessoas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN Matemática (Brasil, 1997), pg. 40 estabelecem que a principal finalidade para o estudo de probabilidade:

> *"é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano é de natureza aleatória, onde é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifesta intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos".*

Do ponto de vista psicológico, os estudos de Piaget e Inhelder (s/d) sobre a origem da idéia de acaso na criança nos permite compreender como se dá o desenvolvimento da noção de probabilidade no ser humano. Segundo eles, existem três estágios significativos, na construção da idéia de acaso pela criança. Um dos pontos de partida dessa pesquisa, sobre a origem da idéia de acaso na criança, foi sugerida por um matemático que trabalhava com a teoria das probabilidades e que se coloca para si mesmo a seguinte questão:

> *"Não existiria no homem normal uma 'intuição da probabilidade' tão fundamental e de uso tão frequente como, por exemplo, a intuição de número inteiro?" (PIAGET & INHELDER, s/d, p. 9)*

Piaget e Inhelder (s/d) nos informam que é possível. Eles mostram que no dia a dia existem coisas que ocorrem e não podem ser previstas de antemão, com precisão absoluta, mas que mesmo assim as pessoas arriscam prognósticos na tentativa de compreendê-las e conviver com elas. Então, a partir desse tipo de atitude das pessoas no seu cotidiano, eles nos levam a crer que o homem normal possui uma intuição de probabilidade. Podendo admitir a existência de uma intuição de probabilidade no homem normal, adulto e civilizado, esses autores dizem que o papel dessa intuição pode ser comparado ao papel de diversos esquemas práticos de caráter numérico ou espacial. Porém, esses autores aspiravam a saber se tal intuição seria inata ou calcada sobre certo nível mental e, se fosse calcada, qual o mecanismo de sua aquisição (PIAGET & INHELDER, s/d, p. 10).

De acordo com esses autores, deixando-se de lado os estados psicopatológicos e passionais que interferem em prognósticos probabilísticos,

> *"existem duas espécies de campos psicológicos perfeitamente normais, nos quais as noções de imprevisto e probabilismo manifestam-se de formas mais ou menos estranhas: a mentalidade primitiva e a da criança" (PIAGET & INHELDER, s/d, p. 10).*

Ainda de acordo com Piaget e Inhelder (s/d, p. 10)

> *"Lévy-Bruhl considerava a ausência da noção de acaso como um dos caracteres essenciais da mentalidade primitiva" e que "a intuição das probabilidades não poderia se manifestar numa mentalidade pré-científica da mesma forma que em nós".*

Segundo esses autores,

> *"A moderna concepção do acaso se opõe simultaneamente a dois tipos de causalidade. Por um lado se distingue do determinismo puramente mecânico cujas ligações espaço-temporais são idealmente reversíveis no que implica a intervenção de uma mistura irreversível. Por outro lado, e ainda nesse terreno da mistura ou da interferência das sequências causais, a moderna concepção de acaso contradiz de forma radical o conceito de milagre, pois sugere exatamente que a mistura tem suas leis enquanto que o milagre é a negação dessas leis" (PIAGET & INHELDER, s/d, p. 10-11).*

Os estudos de Piaget e Inhelder (s/d) sobre a origem da ideia do acaso na criança mostram que o primeiro estágio de desenvolvimento que ocorreria antes dos 7-8 anos de idade, e

> *"se caracteriza pela ausência de operações propriamente ditas, isto é, de composição reversível; os raciocínios em jogo permanecem então pré-lógicos e são regulados apenas por sistemas de regulações intuitivas, sem encaixes hierárquicos,*

sem conservação das totalidades e sem rigor nas inferências possíveis, mas com uma articulação progressivas das relações intuitivas, levando pouco a pouco ao nível operatório." (PIAGET & INHELDER, s/d, p. 294).

Segundo esses autores, por volta dos 7-8 a 11-12 anos começa um segundo período que marca uma transformação da ideia do acaso que:

"se caracteriza pela construção dos grupamentos operatórios de ordem lógica e numérica, porém num plano essencialmente concreto, ou seja, relativo a objetos manipuláveis representáveis no detalhe de suas relações reais" (PIAGET & INHELDER, s/d, p. 294).

Com o início da aprendizagem das operações lógico-aritméticas, a partir dos 7-8 anos começa um segundo período que marca o primeiro desenvolvimento da ideia do acaso.

Porém, é somente no terceiro estágio, após 11-12 anos, que o julgamento de probabilidade se organiza,

"por uma espécie de choque em volta da operação sobre o acaso. A este ponto de vista, podemos mesmo caracterizar da maneira seguinte o terceiro estágio em relação aos dois primeiros: durante o primeiro período, não há diferenciação entre o dedutível e o não dedutível, ficando a antecipação intuitiva a meio caminho entre a operação e o próprio acaso; no decorrer do segundo período, existe a diferenciação e, por conseguinte, inicialmente antítese entre o acaso e as operações, determinando estas o domínio do dedutivo, pois, o domínio do incomponível, e do irreversível, isto é do imprevisível, ao oposto, no decurso do terceiro período há a síntese entre o acaso e as operações, permitindo estas estruturar o campo das dispersões fortuitas em um sistema de probabilidades, por uma espécie de assimilação analógica do fortuito ao operatório"(PIAGET & INHELDER, s/d, p. 296/297).

Segundo esses autores, concorrem para esse resultado dois processos similares:

> *De um lado a construção dos sistemas combinatórios – marcada pela descoberta de um método que permite efetuar o conjunto das operações possíveis sobre um pequeno número de elementos – leva o sujeito a conceber a brassagem como o resultado de tais transformações, mas executadas sem ordem e realizando apenas parte das possibilidades particulares. Por outro lado, o pensamento formal, que permite a construção de tais sistemas combinatórios, leva igualmente à descoberta das proporções: a lei dos grandes números, que aplica as relações de proporcionalidade a essas mesmas operações combinatórias, leva então o sujeito a conceber a legitimidade de uma composição probabilista das modificações fortuitas, no sentido de uma dispersão proporcionalmente sempre mais regular, e, por conseguinte acessível – na sua totalidade, senão no detalhe – à previsão racional (PIAGET & INHELDER, s/d, p. 297).*

Assim, segundo esses autores assim termina a evolução individual da ideia do acaso,

> *"as probabilidades baseadas nos grandes números assinalam uma espécie de síntese entre a operação e o fortuito – após a antítese, a princípio radical, sentida no início do segundo período, e a não diferenciação própria do primeiro" (PIAGET & INHELDER, s/d, p. 297).*

Em resumo, do ponto de vista psicológico, o desenvolvimento da ideia de acaso, no ser humano se dá a partir das três etapas do desenvolvimento. A pesquisa de Piaget e Inhelder nos mostra como os resultados de seus estudos contribuíram para o conhecimento dos estágios de desenvolvimento cognitivo da criança, para que possamos tomar decisões mais acertadas quanto ao ensino das noções de probabilidade.

2.3 - Conceitos Básicos

O objetivo central da probabilidade é construir medidas de crença para ocorrência de fenômenos aleatórios baseadas, ora em observações dos fenômenos ao longo do tempo, construindo-se modelos de probabilidade por meio da Estatística e das distribuições de frequência dos fenômenos, ora pela crença a priori de propriedades tais como equiprobabilidade dos resultados em função estruturas físicas equilibradas dos objetos, tais como “dado honesto”, “moeda equilibrada”, etc. Como o conceito de espaço amostral é crucial no estabelecimento do modelo de probabilidade e, como ele próprio pode ser construído de diversas formas, desde que que contenha todos os resultados de um dado experimento, a escolha de sua estrutura norteará medidas de probabilidade diferentes, embora em qualquer dos casos construído, a probabilidade do evento não pode ser conflitada pela escolha, a menos que estejamos partindo de gêneses diferentes de como os resultados experimentais são gerados, como no famoso Paradoxo de Bertrand, que nos informa haver três respostas possíveis para a probabilidade de, ao selecionar aleatoriamente uma corda de uma circunferência, a corda ser maior que o lado de um triângulo equilátero inscrito na circunferência. No entanto, não há, ipso facto, uma contradição nas três respostas possíveis, pois cada uma medida é única se a gênese da construção da corda está bem definida.

O mais importante aqui neste trabalho é na verdade enfatizar que os conceitos de distinguibilidade e indistinguibilidade de estrutura, que univocamente definem a cardinalidade das configurações desejadas na Análise Combinatória, devem ser relativizados no contexto de Probabilidade para que possamos construir espaços amostrais mais adequados para a aferição das probabilidades de eventos.

Por exemplo, para a pergunta em Análise Combinatória “de quantas maneiras podemos ter resultados de faces de duas moedas idênticas lançadas ao mesmo tempo sobre a mesa”, a resposta mais coerente seria três, a saber, 2 caras, 2 coroas e 2 faces diferentes, dado que as moedas são indistinguíveis e que não houve controle de ordem de lançamento. No entanto, para a probabilidade, será conveniente dar distinguibilidade às moedas e considerar 4 casos, se desejarmos aferir de forma corretamente equiprovável aos caso casos, a saber, (cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa). Isto porque, mesmo as moedas sendo indistinguíveis, elas podem, sem o reconhecimento a olho nu, trocarem de papéis. Assim um espaço amostral do tipo {(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)} seria composto de 4 elementos equiprováveis, isto com probabilidade ¼ para cada par de ocorrência, enquanto que um espaço amostral (também legítimo, mas menos potencial para vários possíveis desdobramentos de perguntas) como {(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, coroa)} teria que atribuir a probabilidade de ¼ para cada par (cara, cara) e (coroa, coroa) e a probabilidade ½ para o par (cara, coroa), perdendo assim a estrutura de equiprobabilidade, mais desejável na quantificação da probabilidade.

Mas como justificar que convém considerar que (cara, coroa) seja distinguível de (coroa, cara) quando as moedas são idênticas? Uma maneira de justificar é que para que duas caras ocorram no lançamento das duas moedas, só existe uma forma de isso ser gerado: ambas as moedas devem assumir cara. Mas para que haja duas faces diferentes, mesmo sem reconhecer diferenças entre as moedas, estas podem trocar de papéis e, portanto, o evento "faces diferentes ocorrem" deve por princípio (no caso de moedas equilibradas) ser duas vezes mais provável de ocorrer do que "duas caras são obtidas", por exemplo. Assim, ao assumir a distinguibilidade de moedas indistinguíveis, construímos um espaço amostral mais adequado para a probabilidade, embora este seja inadequado para a Combinatória.

Para fixar ainda mais essa relativização dos conceitos de distinguibilidade e indistinguibilidade, tomemos, por exemplo, uma urna contendo três bolas brancas (**b**) indistinguíveis e 2 bolas vermelhas (**v**) também indistinguível. Seja o experimento de se retirar uma bola da urna e registrar a sua cor. Se fosse perguntado, pela Análise Combinatória, quantos são os resultados possíveis de registro de cores, então a resposta seria 2, a saber **b** e **v**. No entanto o conjunto {**b**, **v**}, embora também legítimo para um espaço amostral da Probabilidade, não é composto de elementos equiprováveis, pois o evento "bola vermelha é registrada", caracterizada pelo conjunto {**v**}, não tem medida ½ e sim 2/5, enquanto que o evento "bola branca é registrada", caracterizada pelo conjunto {**b**}, tem medida 3/5. No entanto, se déssemos distinguibilidade tanto às bolas brancas quanto às bolas vermelhas, teríamos um espaço amostral para a Probabilidade como $\{b_1, b_2, b_3, v_1, v_2\}$ com cada elemento equiprovável de probabilidade 1/5 e nesse espaço a probabilidade do evento "bola vermelha é registrada", caracterizada pelo conjunto $\{v_1, v_2\}$, tem probabilidade 2/5, calculada mais facilmente como no sentido clássico da razão entre número de casos favoráveis e número de casos possíveis.

Vemos, portanto, que há uma mudança paradigmática no tratamento de distinguibilidade e indistinguibilidade na Probabilidade, quando comparado aos problemas de Análise Combinatória.

2.4 - Espaço Amostral, Medida de Probabilidade e Resultados Básicos

O conjunto que contém todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado *espaço amostral*. Representaremos aqui o espaço amostral por U**,** sendo U finito, infinito enumerável e infinito não enumerável (este último caso apenas tratado no Ensino

Básico de forma velada sob a chamada Probabilidade Geométrica). Qualquer subconjunto de U ao qual se pode atribuir uma medida de probabilidade é denominado um *evento* (aleatório).

Exemplo 36: Se o experimento consiste no lançamento de um dado equilibrado e o registro da face superior do dado, o espaço amostral conveniente seria U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, sendo n(U) = 6 a sua cardinalidade.

Exemplo 37: Se o experimento consiste no lançamento de duas moedas (distinguíveis ou não), sendo cara (C) e coroa (K), o espaço amostral conveniente seria U = {(C,C), (C,K), (K,C), (K,K)}, e n(U) = 4 a sua cardinalidade.

Como discutido anteriormente, para a Análise Combinatória, no contexto de moedas indistinguíveis, teríamos apenas três possibilidades, a saber, sair duas caras, ou duas coroas, ou uma cara e uma coroa.

Exemplo 38: Se o experimento consiste no lançamento de dois dados (indistinguíveis ou não), o espaço amostral conveniente seria

$$U = \begin{Bmatrix} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{Bmatrix}$$

de cardinalidade n(U)= 36.

Para a Análise Combinatória, sendo os dados indistinguíveis, teríamos apenas 21 possibilidades, a saber, (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,4), (4,5), (4,6), (5,5), (5,6), (6,6). Sendo os dados distinguíveis teríamos 36 possibilidades tanto no contexto da Análise Combinatória quanto na Probabilidade.

Se em um fenômeno aleatório os elementos do espaço amostral são igualmente prováveis, então a probabilidade de ocorrer o evento A, subconjunto de um espaço amostral finito U, então a probabilidade de ocorrência do evento A, $P(A)$, é dada pela razão entre a cardinalidade do evento A (casos favoráveis) e a cardinalidade do espaço amostral U (casos possíveis). Este é o chamado conceito *Clássico* de probabilidade.

$$P(A) = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

com $n(A)$ a cardinalidade de A e $n(U)$ a cardinalidade de U.

Esta definição de probabilidade presupõe que todos que todos os elementos do espaço amostral U são igualmente prováveis, isto é, possuem o mesmo peso. Este é o caso de lançamento de uma moeda honesta.

Esta maneira clássica de se calcular a probabilidade é também conhecida como probabilidade de Laplace, em homenagem ao grande matemático francês Pierre-Simon Laplace, que idealizou, de maneira sistemática e rigorosa, as propriedades e princípios, desta forma de calcular a probabilidade.

Novamente, é importante ressaltar que, na probabilidade, elementos indistinguíveis são geralmente considerados como distinguíveis, para a construção de espaços de probabilidade clássicos, mais simples para os cálculos probabilísticos.

Exemplo 39: Qual é a probabilidade de, no lançamento de 4 moedas honestas indistinguíveis, obtermos cara em todos os resultados?

Solução: Primeiramente, é necessário construir um espaço amostral conveniente. Mesmo na condição de moedas indistinguíveis será adequado tomá-las todas como distinguíveis e construir um espaço amostral de elementos equiprováveis da forma: $U = \{(u_1, u_2, u_3, u_4) : u_i \in \{cara, coroa\}, i = 1, 2, 3, 4\}$ cuja cardinalidade é dada por

$$n(U) = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 = 16.$$

Assim, cada elemento de U tem a probabilidade 1/16 de ocorrer e a probabilidade do evento A, “cara em todos os resultados”, é definido pelo subconjunto $\{(cara, cara, cara, cara)\}$ de cardinalidade 1. Assim pela equiprobabilidade dos elementos do espaço amostral, temos

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{1}{16} = 0{,}0625 = \frac{6{,}25}{100} = 6{,}25\%$$

Observe que, no contexto de Análise Combinatória, como as moedas são indistinguíveis o número de formas de termos resultados seria 5 e não 16. No entanto a construção de um espaço amostral com 5 resultados (nenhuma cara, ou 1 cara e 3 coroas, ou 2 caras e 2 coroas, ou 3 caras e 1 coroa, ou 4 caras), geraria medidas de probabilidade não mais equiprováveis, pois nenhum desses eventos elementares tem probabilidade 1/5.

Exemplo 40: Dois dados indistinguíveis e equilibrados são lançados. Qual a probabilidade de que a soma dos números das faces superiores seja 7?

Solução: Primeiramente, construiremos um espaço amostral de elementos equiprováveis dando distinguibilidade aos dados de natureza indistinguível. Assim, teremos $U = \{(u_1, u_2) : u_i \in \{1,2,3,4,5,6\},\, i = 1,2\}$ cuja cardinalidade é $n(U)$= 6 x 6 = 36. Portanto, cada evento elementar de U tem probabilidade 1/36.

Seja A o evento “soma 7 é obtida”. Então A = {(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)}, portanto, temos $n(A)$ = 6, e assim

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0{,}16666\ \ldots \cong\ 0{,}17 = \frac{17}{100} = 17\%.$$

Aqui também, pela Análise Combinatória, sob a condição de dasdos indistinguíveis, o número de pares de faces obtidas seria $C_{6,2} + 6 = 21$. No entanto, um espaço amostral desse tipo deixaria de ser de elementos equiprováveis, uma vez que nenhum dos eventos elementares tem a probabilidade 1/21.

Na próxima subseção, revisaremos alguns dos resultados básicos de Probabilidade tratados no Ensino Básico. Esses resultados guardam um certo isomorfismo com as propriedades de cardinalidade no contexto de universais finito, e revelam assim o fato de que tanto a Análise Combinatória quanto a Probabilidade são dois casos particulares da Teoria da Medida, teoria essa riquíssima da Matemática e responsável por toda a construção teórica da Integração.

2.4.1 – Axiomas e Resultados Básicos de Probabilidade

A Teoria das Probabilidade está construída sobre três axiomas básicos, a saber:

- Para todo evento A, temos $P(A) \geq 0$.
- $P(U) = 1$.
- Se $A \cap B = \varnothing$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

O terceiro axioma, comumente tratado no Ensino Básico, é deficitário para a Teoria das Probabilidades geral, já que para dar conta de toda a gama de eventos será necessário substituí-lo pelo chamado axioma da σ -aditividade, a saber:

Se $A_1, A_2, A_3,...$ são eventos tais que $A_i \cap A_j = \varnothing$ para todo $i \neq j$ (isto é, disjuntos 2 a 2), então $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ...) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ...$.

De posse dos axiomas acima, pode-se mostrar os seguintes resultados básicos do Ensino Básico:

Proposição 9: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Demonstração: Sabemos que:

$$P(U) = 1$$
$$P(A \cup \bar{A}) = 1$$
$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Proposição 10: $0 \leq P(A) \leq 1$.

Demonstração: $0 \leq P(A)$ decorre do primeiro axioma. Agora, pela Proposição 9, temos

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \geq 0$$

e consequentemente $P(A) \leq 1$.

Proposição 11: $P(\varnothing) = 0$.

Demonstração:

$$P(U) = P(U \cup \varnothing)$$
$$P(U) = P(\mathrm{U}) + P(\varnothing), \text{pois } U \; e \; \varnothing \text{ são mutuamente exclusivos; daí}$$
$$P(\varnothing) = 0 .$$

Proposição 12: $Se\ A \subset B\ então\ P(A) = P(B) - P(B - A)$.

Demonstração: $Como\ B = A \cup (B - A), temos$

$$P(B) = P[A \cup (B - A)] = P(A) + P(B - A), \text{e, portanto,}$$
$$P(A) = P(B) - P(B - A).$$

Proposição 13: $Se\ A \subset B, então\ P(A) \leq P(B)$.

Demonstração: Como $P(A) = P(B) - P(B - A)$ e $P(B - A) \geq 0$, temos $P(A) \leq P(B)$.

Proposição 14: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

Demonstração: Como

$$P(A) = P[(A - B) \cup (A \cap B)], \text{ temos}$$

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$$

pois $(A - B)$ e $(A \cap B)$ são mutuamente exclusivos. Assim, temos

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Proposição 15: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Demonstração: Temos que

$$P(A \cup B) = P[(A - B) \cup B]. \text{ Assim,}$$

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B), \text{ pois } (A - B) \text{ e } B \text{ são mutuamente exclusivos.}$$

Pela Proposição 14, temos $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$. Logo,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Exemplo 41: Selecionado aleatoriamente um número natural de 1 a 100, qual a probabilidade de o número ser múltiplo de 6 ou de 10?

Solução: O espaço amostral para o experimento dado é $U = \{1, 2, 3, ..., 100\}$ de elementos equiprováveis. Como $n(U) = 100$, temos 1/100 para cada elemento de U. Sejam os eventos A "um múltiplo de 6 é selecionado" e B "um múltiplo de 10 é selecionado". Desejamos $P(A \cup B)$. Mas

$A = \{6,12,18,24,30,36,42,48,54,60,66,72,78,84,90,96\}$, com $n(A) = 16$; e

$B = \{10,20,30,40,50,60,70,80,90,100\}$, com $n(B) = 10$; e, finalmente,

$A \cap B = \{30,60,90\}$, com $n(A \cap B) = 3$. Assim, pela Proposição 15, temos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \text{ Assim,}$$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} - \frac{n(A \cap B)}{n(U)} = \frac{16}{100} + \frac{10}{100} - \frac{3}{100} = \frac{23}{100} = 23\%.$$

Exemplo 42: Selecionado aleatoriamente um número natural de 1 a 100, qual a probabilidade de este ser múltiplo de 6 e de 10?

Solução: Nesse caso, desejamos tão somente $P(A \cap B)$. Como $n(A \cap B) = 3$, temos

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(U)} = \frac{3}{100} = 3\%.$$

Observe que, nesse caso, $P(A \cap B) = 0{,}03 \neq 0{,}16 \times 0{,}1 = P(A) \times P(B)$, pois os eventos não são independentes, conforme a discussão a seguir do conceito de Probabilidade Condicional.

2.5 - Probabilidade Condicional

Em Ciência, informação é o material mais precioso que existe. Quanto mais informação dispomos de determinados fenômenos, mais acurados serão nossos modelos e nossos cálculos de probabilidade. É nesse sentido que surge o conceito de probabilidade condicional: como reavaliar a chance de um evento *A* ocorrer dado que sabemos que um outro evento *B* ocorreu e potencialmente pode trazer informação valiosa sobre *A*?

Seja *U* um espaço amostral sejam os eventos *A* e *B* não vazios, ou seja, $A \subset U$, $B \subset U$. Seja $P(B) > 0$. A probabilidade condicional do evento *A*, à luz da ocorrência do evento *B*, representada por $P(A|B)$ (lê-se "probabilidade de *A* dado *B*") é definida como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Pode-se mostrar que a probabilidade condicional é também uma medida de probabilidade satisfazendo os mesmos axiomas da probabilidade não condicional.

Exemplo 43: Dois dados equilibrados e indistinguíveis são lançados sobre a mesa e suas faces registradas. Pede-se:

(a) Calcular a probabilidade de obter soma 6 das faces;

(b) Calcular a probabilidade de obter soma 6 das faces, sabendo-se que as faces obtidas foram ímpares.

Solução: (a) Um espaço amostral conveniente para o cálculo da probabilidade do evento A "soma 6 das faces é obtida" é dado por $U = \{(u_1, u_2) : u_i \in \{1,2,3,4,5,6\}, i = 1,2\}$ cuja cardinalidade é $n(U) = 6 \times 6 = 36$. Portanto, cada evento elementar de *U* tem probabilidade 1/36.

Mas $A = \{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\}$ com cardinalidade 5. Assim, pela equiprobabilidade dos eventos elementares, temos $P(A) = \frac{5}{36}$.

(b) Seja *B* o evento "as duas faces obtidas foram ímpares", então temos

$$B = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3)(5,5)\}$$

de cardinalidade 9 e

$$A \cap B = \{(1,5),(5,1),(3,3)\},$$

de cardinalidade 3. Assim, temos

$$P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \text{ e } P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

Assim, pela definição de probabilidade condicional, temos

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{4}{1} = \frac{1}{3}.$$

Observemos que $P(A|B) \neq P(A)$, logo a informação trazida pelo evento *B* foi valiosa para a reavaliação da probabilidade de *A*, conceito esse denominado de dependência estocástica dos eventos *A* e *B*.

A seguir faremos uma breve apresentação sobre o conceito de dependência/independência estocásticas de eventos.

2.6 - Eventos Independentes

Independência é um conceito fundamental em Probabilidade e Estatística, já que muitos dos modelos utilizados na Estatística supõem observações de variáveis aleatórias independentes. Diremos que dois eventos *A* e *B* são independentes, se a informação a respeito de que um deles ocorreu não altera a probabilidade de o outro ocorrer, ou seja, a informação dada sobre um evento não contribui para a reavaliação probabilística do outro evento. Em notação matemática, dizemos então que *A* e *B* são independentes se

$$P(A|B) = P(A) \text{ ou, equivalentemente, } P(B|A) = P(B).$$

A consequência da estrutura acima é que, se A e B são independentes, então

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A), \text{ e assim}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \text{ x } P(B).$$

Como consequência também desta definição, temos o espaço amostral *U* e o evento impossível ∅ são independentes de qualquer outro evento, pois, sendo *A* um evento, temos

$$P(A \cap U) = P(A) = P(A) \text{ x } 1 = P(A) \text{ x } P(U) \text{ e}$$

$$P(A \cap \emptyset) = P(\emptyset) = 0 = P(A).P(\emptyset).$$

No entanto, um erro muito comum entre os alunos é associar independência com disjunção, quando é justamente o contrário o que se dá: se dois eventos *A* e *B* de probabilidades positivas são disjuntos, então eles são necessariamente **dependentes**, pois a ocorrência de um deles automaticamente anula a ocorrência do outro, que tinha probabilidade positiva.

Exemplo 43: Numa gaveta de meias há 3 pares iguais de meias brancas, 2 pares iguais de meias azuis e 1 par de meia xadrez. Dois pés de meias são retirados da gaveta e seus tipos são registrados.

(a) De quantas maneiras podemos obter registros de tipos de pares de meia?

(b) Qual a probabilidade de serem registrados dois pés de mesmo tipo?

Solução: (a) Devemos perceber que se trata de uma questão de Análise Combinatória e a questão da indistinguibilidade deve ser levada em consideração. Denotando meia xadrez por **x**, meia branca por **b** e meia azul por **a**, há 6 possibilidade de resultados de pares de meias, a saber, (**x**,**x**), (**b**,**b**), (**a**,**a**), (**x**,**a**), (**x**,**b**) e (**a**,**b**).

(b) Estamos agora no contexto de probabilidade, e devemos construir um espaço amostral conveniente. Se tomarmos o conjunto dos 6 resultados do item (a), este não será de elementos equiprováveis, já que as quantidades de meias são diferentes a depender do tipo. Um espaço amostral conveniente seria, portanto, dar distinguibilidade aos 12 pés de meia, indexando-os como m_{ij} com i representando o tipo *i* da meia (xadrez = 1, branca = 2 e azul = 3) e *j* representando os pés da meia *i*. Assim, na gaveta se encontram as 12 meias (agora tomadas todas como distinguíveis), representadas pelo conjunto *M* = { m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}, m_{23}, m_{24}, m_{25}, m_{26}, m_{31}, m_{32}, m_{33}, m_{34}} e podemos construir um espaço amostral de elementos equirpováveis como $U = \{(u_1, u_2) : u_i \in M, i = 1, 2, u_1 \neq u_2\}$, se desejarmos controlar a ordem da extração. Assim, temos, pela Análise Combinatória que *n*(*U*) = 12 x 11 = 132, e que cada elemento de *U* tem 1/132 de probabilidade de ser observado. Sejam os eventos *X* “o par retirado é de meias xadrezes”, *B* “o par retirado é de meias brancas” e *A* “o par retirado é de meias azuis”. Desejamos calcular $P(X \cup B \cup A) = P(X) + P(B) + P(A)$, pois os eventos *X*, *B* e *A* são disjuntos dois a dois.

Mas, pela Análise Combinatória, temos *n*(*X*) = 2 x 1 = 2, *n*(*B*) = 6 x 5 = 30 e *n*(*A*) = 4 x 3 = 12. Como o espaço amostral é equiprovável, temos

$$P(X) = \frac{2}{132}, \ P(B) = \frac{30}{132} \ \text{e} \ P(B) = \frac{12}{132}.$$

Assim, temos

$$P(X \cup B \cup A) = \frac{2}{132} + \frac{30}{132} + \frac{12}{132} = \frac{44}{132} = \frac{1}{3}.$$

Observe que, se por erro fosse utilizado o espaço construído no item (a) como equiprovável, o aluno chegaria à resposta equivocada de ½.

Encerramos a discussão dos conceitos de distinguibilidade/indistinguibilidade de estruturas no contexto de Probabilidade, reafirmando a visão de que é necessário um cuidado no tratamento desses conceitos na quantificação do acaso por haver uma mudança paradigmática nas discussões feitas no contexto de Análise Combinatória.

Capítulo 3

Estudo de Caso

Neste capítulo descreveremos as atividades desenvolvidas com os alunos do 2º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Duque de Caxias, no Município de Duque de Caxias, RJ, com o objetivo trabalhar os conceitos de distinguibilidade e indistinguibilidade de estruturas, tanto no campo da Análise Combinatória, quanto no campo da Estatística.

3.1 - Pré-Teste de Análise Combinatória

Iniciamos o assunto de Análise Combinatória em sala de aula com aplicação de um pré-teste, com um problema-base, a partir do qual variamos a distinguibilidade e indistinguibilidade de estruturas, com uma quantidade pequena de configurações para que o aluno pudesse enumerar todas as possibilidades de contagem, e resolvê-los com raciocínios simples sem o uso de fórmulas, levando em consideração que ainda não tinham ainda tido contato com o assunto. A proposta era eles se valerem dos conhecimentos adquiridos durante a sua vida escolar e a intuição para resolver os problemas, de maneira que pudéssemos avaliar se tinham conscientização de estruturas diferenciadas de distinguibilidade/indistinguibilidade induzem a diferentes heurísticas para a solução. Para isso, foi elaborada uma sequência didática de problemas, com as variações mencionadas, de maneira a colocar o aluno numa posição de ação e de tomada de decisões, para elicitar o conteúdo que seria trabalhado posteriormente em sala de aula. Sabemos que é praxe o ensino de Análise Combinatória por meio meras aplicações de fórmulas após a classificação dos problemas de contagem em problemas de arranjos, combinações ou permutações, algo que pouco ajuda na construção de boas heurísticas no ataque aos problemas.

O Pré-Teste foi aplicado numa turma de 30 alunos do 2º ano do Ensino Médio, com idade variando entre 16 e 18 anos, do Colégio Estadual Duque de Caxias, no Município de Duque de Caxias, RJ. Esses problemas, de mesmo enunciado base, foram divididos em 12 casos diferentes. Na primeira análise, usamos 8 casos diferentes com distinguibilidade intrínseca aos objetos. Neste momento os alunos não tinham conhecimento do assunto a ser abordado. Na segunda análise, com 4 casos, os alunos já tinham uma noção do Princípio Multiplicativo, e os problemas propostos versavam sobre contagem com estruturas de distinguibilidade extrínseca aos objetos, tais como ordem, por exemplo.

Nesse pré-teste os alunos poderiam enumerar todas as possibilidades e indiretamente e estavam usando vários tópicos pertinentes ao ensino da Análise Combinatória, como Princípio Multiplicativo, Arranjo, Permutação, Combinação Simples e Completa. Esse pré-teste teve como objetivo avaliar como os alunos resolveriam um problema de Análise Combinatória sem nunca ter ouvido falar no assunto.

De acordo com PONTE (2003, p.15), sobre a construção de uma nova abordagem de um tipo de aula, ao se referir a George Pólya, outro referencial teórico, o qual mostra o contraste das duas imagens da elaboração conceitual e estrutural da Matemática:

> *"A ciência rigorosa e formal de Euclides e, a outra, uma disciplina em construção como ciência experimental e indutiva"*

Foi exatamente essa a proposta na introdução da Análise Combinatória, a utilização da intuição, por conjecturas e experimentações, para cardinalizar cada caso do problema, sem nenhum conhecimento prévio. Os alunos usariam apenas a intuição e interpretação do enunciado. Porém, só conseguiram desenvolver a atividade depois de alguma intervenção do professor. As maiores dificuldades apresentadas foram:

- leitura e interpretação do enunciado,
- não entendimento do que o enunciado pedia,
- não entendimento da diferença entre bandeiras iguais e diferentes,
- não entendimento de como representar mentalmente mastros iguais.

Após a intervenção do professor, esclarecendo suas dúvidas sobre o que estava sendo pedido no problema, os alunos conseguiram resolver cada caso. O resultado foi bastante satisfatório, pois a grande maioria dos alunos trabalhou as atividades com bastante empenho e interesse, como num relato de uma aluna: *"O primeiro caso foi bem difícil de se entender, pois não sabia o que o enunciado estava pedindo, mas depois que o professor esclareceu minhas dúvidas, foi possível resolver os outros casos sem dificuldades. Porém, o quinto caso demorou um pouco para entender, pois as bandeiras eram iguais, mas depois ficou claro e consegui resolver os outros sem dificuldades"*.

3.2 - Análise do Pré- Teste

Foi pedido aos alunos que avaliassem a atividade realizada em sala de aula. Nessa avaliação foi perguntado aos alunos sobre o grau de dificuldade encontrada ao realizar a atividade, classificando cada caso em *fácil*, *médio*, *difícil* ou *não conseguiram fazer*. O mais interessante é que muitas vezes eles erraram atividades consideradas fáceis e acertavam muitas atividades consideradas por eles mesmos como difíceis. A seguir faremos uma análise da percepção dos alunos. Alguns casos não atestam a realidade dos fatos, mas estas foram a opinião dos alunos sobre as atividades.

1. Você considera esse tipo de exercício importante para saber a utilização da matéria no dia a dia?

( ) Sim ( ) Não

Mesmo tendo 52% da turma dizendo que a atividade é importante para o dia a dia, alguns alunos relutaram em fazer a atividade; eles reclamaram que não sabiam o que devia ser feito e não estavam entendendo o enunciado.

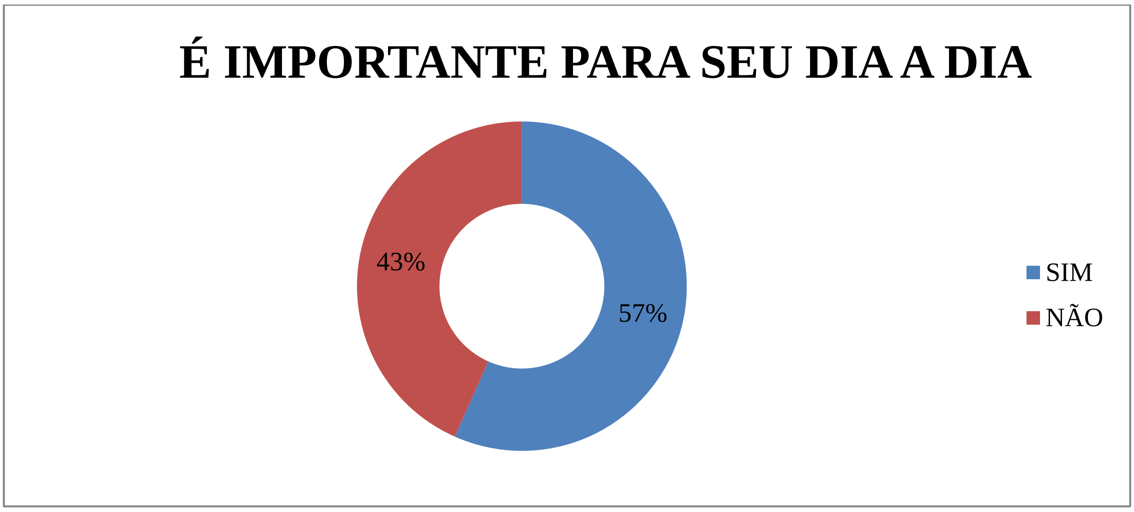


FIGURA 7 – GRÁFICO DA IMPORTÂNCIA DO TRABALHO NO DIA A DIA

2. Você gostou dessa atividade de matemática?

( ) Sim ( ) Não

A partir do momento que eles entenderam o que deveria ser feito, eles passaram a fazer a atividade e gostaram.

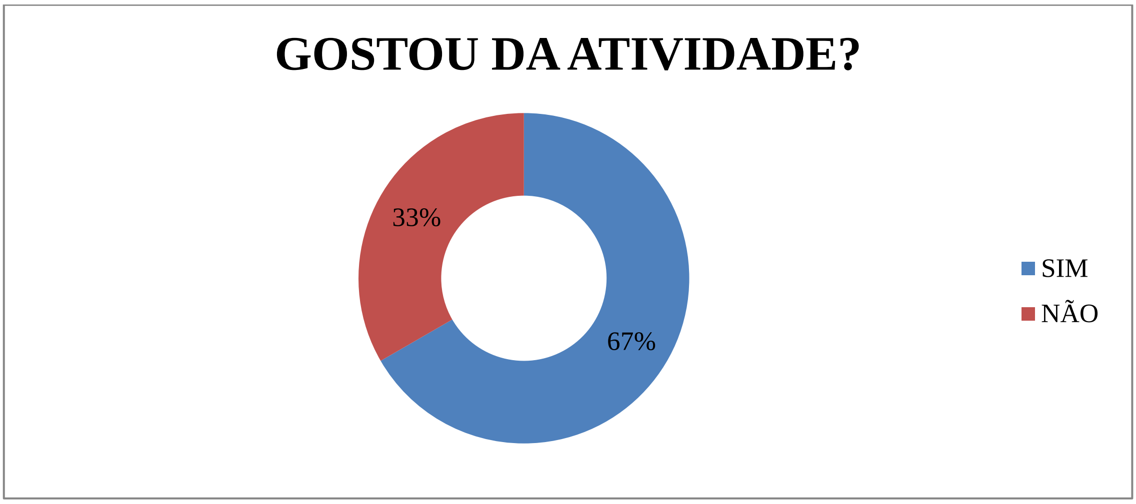


FIGURA 8 – GRÁFICO GOSTOU DA ATIVIDADE?

3.2.1 – 1º CASO

- As 3 bandeiras são nas cores vermelha, preta e branca, ou seja, são distinguíveis.
- Os 2 mastros têm cores diferentes, ou seja, são distinguíveis.
- A ordem das bandeiras nos mastros não importa.
- Mastros podem ficar vazios.

Solução: 8 possibilidades

M_1	M_2
BPV	$\varnothing$
$\varnothing$	BPV
BV	P
BP	V
PV	B
P	BV
V	BP
B	PV

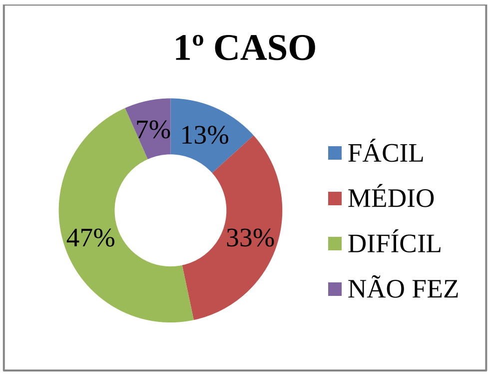
Classifique o 1º caso da lista de atividades:

( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.

( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.

( ) Difícil – Não seria possível chegar a uma resposta sem a intervenção do professor.

( ) Não conseguiu fazer



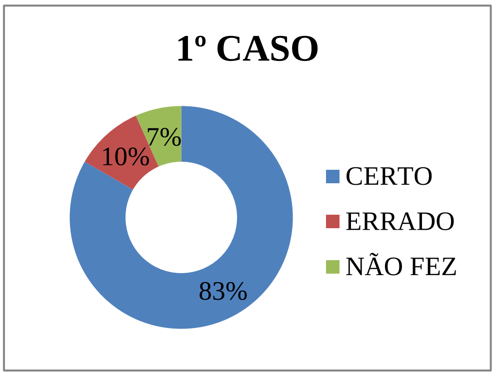


FIGURA 9 – GRÁFICOS DO 1º CASO

Nessa primeira questão, os alunos ficaram confusos, pois não entenderam o enunciado. Em seguida, foi explicado que eles deveriam enumerar as possibilidades de alocar as bandeiras nos mastros, que poderiam chamar bandeira branca de B, vermelha de V, preta de P e que a ordem não importava, colocar BVP é igual a colocar BPV. Dos 30 alunos que fizeram essa atividade apenas 5 erraram essa atividade, sendo que 3 alunos raciocinaram corretamente, porém esqueceram algumas possibilidades. Os alunos acharam no geral a questão fácil.

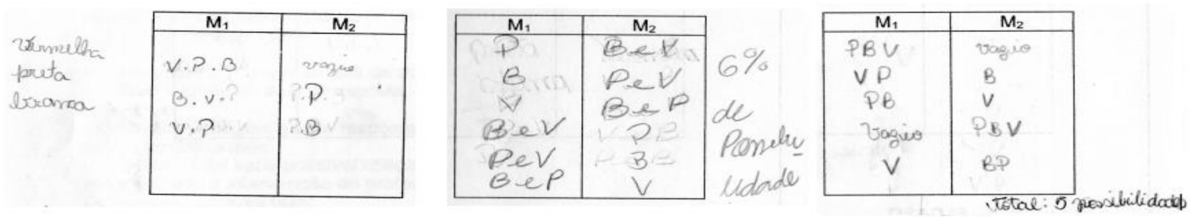


FIGURA 10 – ERROS NO 1º CASO

3.2.2 - 2º CASO

- As 3 bandeiras são nas cores vermelha, preta e branca, ou seja, são diferentes.
- Os 2 mastros têm cores diferentes, ou seja, são diferentes.
- A ordem das bandeiras nos mastros não importa.
- Os mastros **não** podem ficar vazios.

Solução: 6 possibilidades

M_1	M_2
BV	P
BP	V
PV	B
P	BV
V	BP
B	PV

Classifique o 2° caso da lista de atividades:

( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.

( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.

( ) Difícil – Não seria possível chegar a uma resposta sem a intervenção do professor.

( ) Não conseguiu fazer

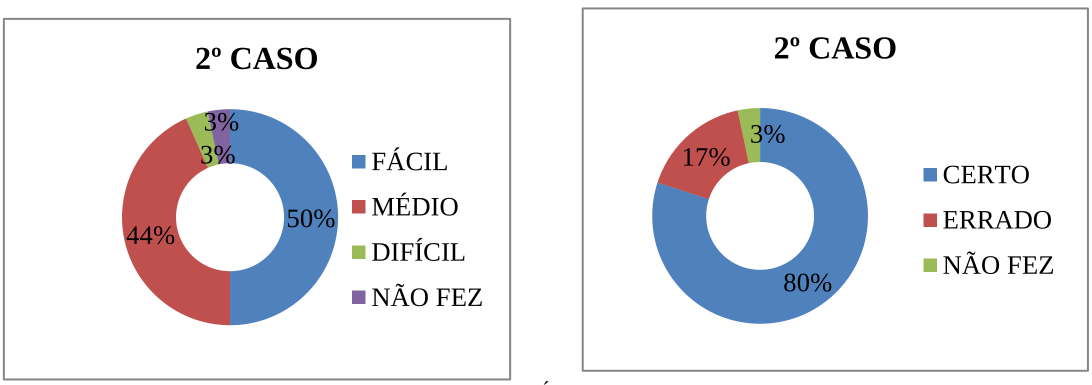


FIGURA 11 - GRÁFICOS DO 2º CASO

A grande maioria percebeu que no 2º caso bastava eliminar os mastros vazios do 1º caso, e resolveram com bastante tranquilidade. Quatro alunos raciocinaram corretamente, porém esqueceram algumas possibilidades. Apenas dois alunos que erraram a primeira erraram também a segunda.

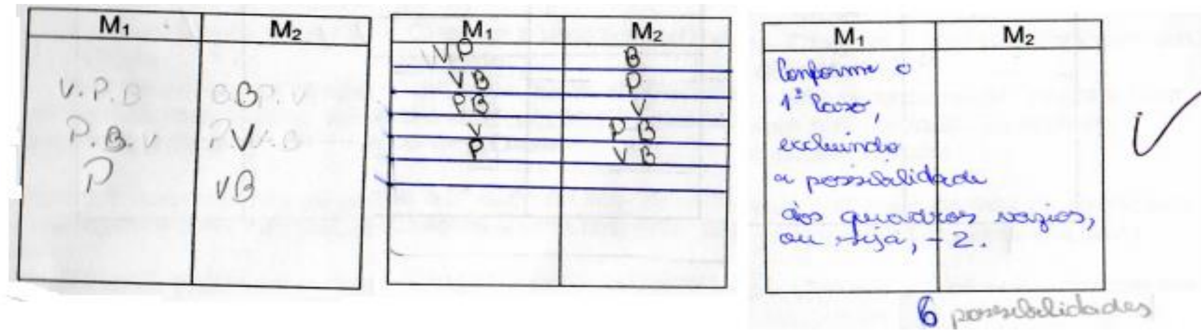


FIGURA 12-ERROS NO 2º CASO

3.2.3 – 3º CASO

- As 3 bandeiras são nas cores vermelha, preta e branca, ou seja, são diferentes.
- Os 2 mastros têm a mesma cor, isto é, são iguais.
- A ordem das bandeiras nos mastros não importa.
- Mastros podem ficar vazios.

Solução: 4 possibilidades

M_1	M_2
P B V	∅
PB	V
PV	B
BV	P

Classifique o 3° caso da lista de atividades:

( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.

( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.

( ) Difícil – Não seria possível chegar a uma resposta sem a intervenção do professor.

( ) Não conseguiu fazer

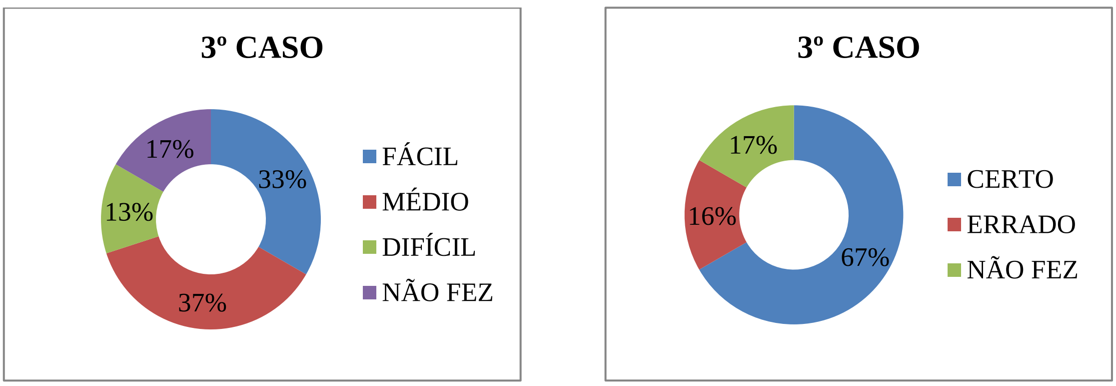


FIGURA 13- GRÁFICOS DO 3º CASO

A maior dificuldades neste caso foi entender o que seriam mastros iguais e entender que a ordem nos mastros não importava. Dois alunos não realizaram a atividade. Os alunos que erraram não perceberam que VP no mastro 1 e B no mastro 2 é a mesma coisa que B no mastro 1 e VP no mastro 2, pois os mastros são iguais, resolveram igual ao 1º caso. Vemos, portanto, que não é trivial o reconhecimento de estruturas distinguíveis e não distinguíveis.

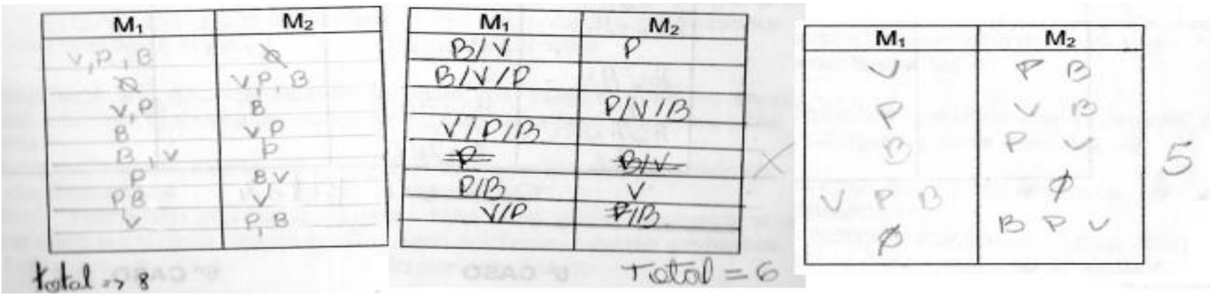


FIGURA 14- ERROS NO 3º CASO

3.2.4 – 4º CASO

- As 3 bandeiras são nas cores vermelha, preta e branca, ou seja, são diferentes.
- Os 2 mastros têm a mesma cor, ou seja, são iguais.
- A ordem das bandeiras nos mastros não importa.
- Os mastros **não** podem ficar vazios.

Solução: 3 possibilidades

M_1	M_2
PB	V
PV	B
BV	P

Classifique o 4° caso da lista de atividades:

( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.

( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.

( ) Difícil – Não seria possível chegar a uma resposta sem a intervenção do professor.

( ) Não conseguiu fazer

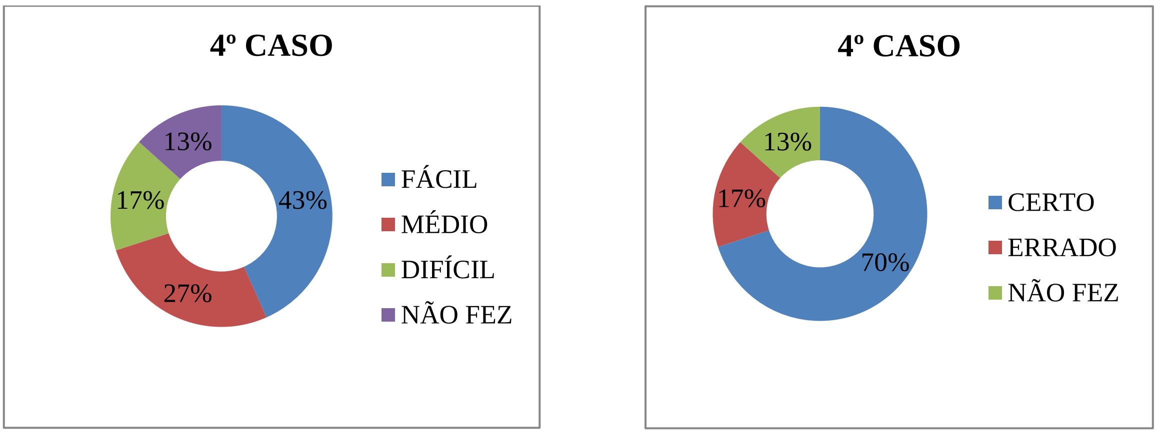


FIGURA 15 – GRÁFICOS DO 4º CASO

Todos que acertaram perceberam que bastava apenas retirar o caso dos mastros vazios do 3º caso. Até mesmo quem errou procedeu desta maneira. Apenas dois alunos não responderam o exercício, Uma aluna raciocinou correto em relação aos mastros iguais, porém trocou a ordem das bandeiras no mastro. A maior parte de erros foi não perceber que os mastros eram iguais.

FIGURA 16 – ERROS NO 4º CASO

3.2.5 – 5º CASO

- As 3 bandeiras têm a mesma cor, isto é, são iguais (indistinguíveis).
- Os 2 mastros têm cores diferentes, isto é, são diferentes (distinguíveis).
- A ordem das bandeiras nos mastros não importa.
- Mastros podem ficar vazios.

Solução: 4 possibilidades

M_1	M_2
P PP	∅
PP	P
P	PP
∅	P PP

Classifique o 5° caso da lista de atividades:

( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.

( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.

( ) Difícil – Não seria possível chegar a uma resposta sem a intervenção do professor.

( ) Não conseguiu fazer

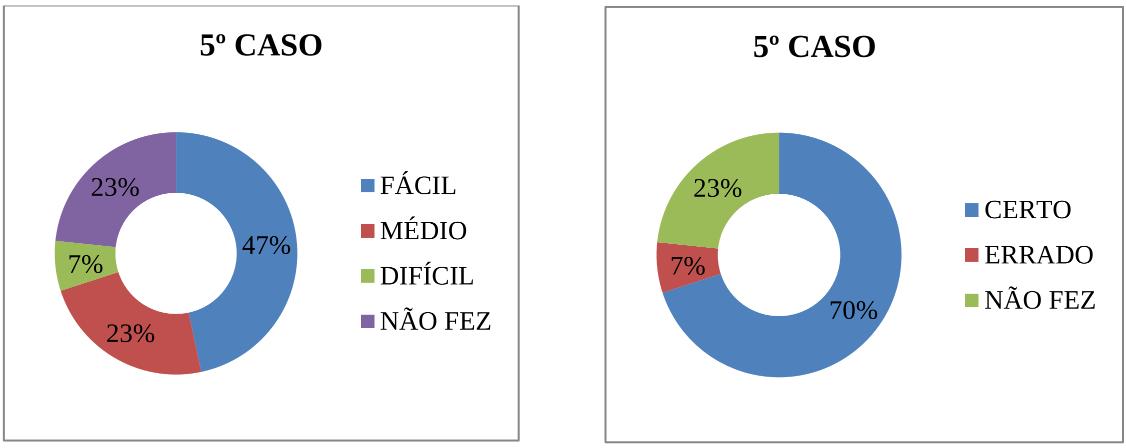
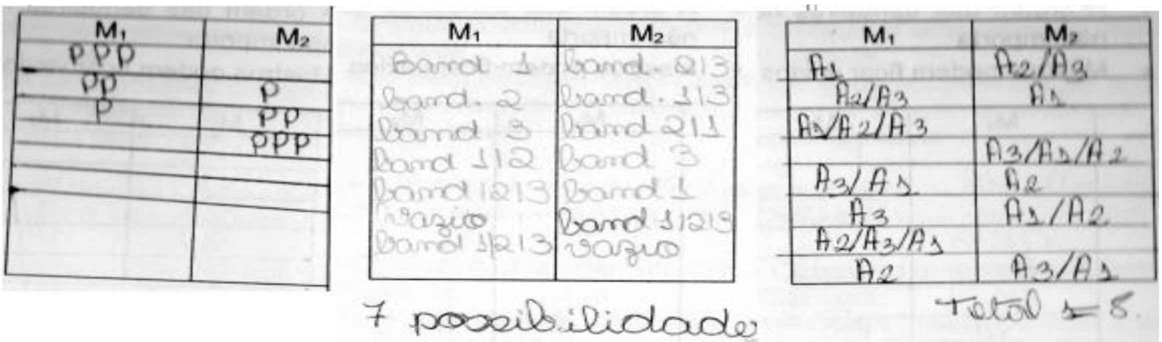


FIGURA 17- GRÁFICOS DO 5º CASO

A grande maioria percebeu que as bandeiras possuíam a mesma cor. Seis alunos não fizeram a atividade, dois alunos repetiram configurações. Duas alunas deram distinguibilidade às bandeiras iguais. Apesar de ser um caso de combinação completa, o percentual de acerto foi muito bom.



FIGRIA 18 – ERROS NO 5º CASO

3.2.6 – 6º CASO

- As 3 bandeiras têm a mesma cor, isto é, são iguais (indistinguíveis).
- Os 2 mastros têm cores diferentes, isto é, são diferentes (distinguíveis).
- A ordem das bandeiras nos mastros não importa.
- Os mastros **não** podem ficar vazios.

Solução: 2 possibilidades

M_1	M_2
PP	P
P	PP

Classifique o 6° caso da lista de atividades:

( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.

( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.

( ) Difícil – Não seria possível chegar a uma resposta sem a intervenção do professor.

( ) Não conseguiu fazer

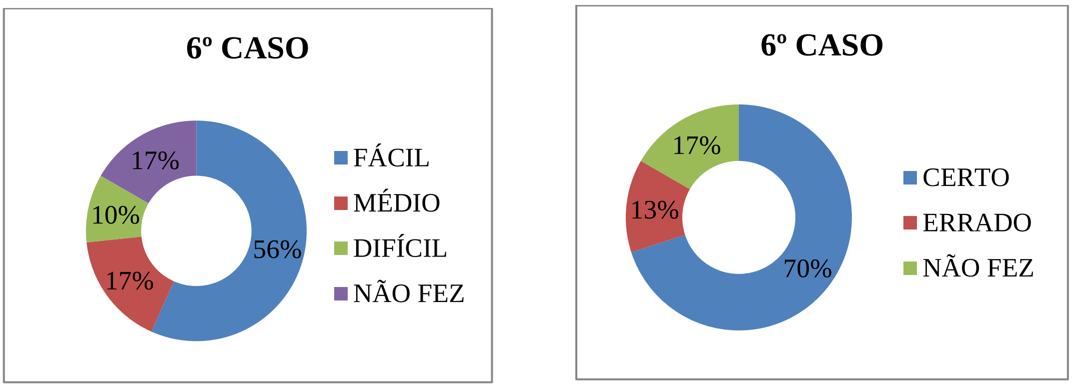


FIGURA 19- GRÁFICOS DO 6º CASO

Todos os alunos perceberam que deveriam retirar os mastros vazios do 5º caso. Os mesmos seis alunos que não fizeram o 5º caso também não fizeram o 6º caso. Apenas uma aluna errou essa atividade.

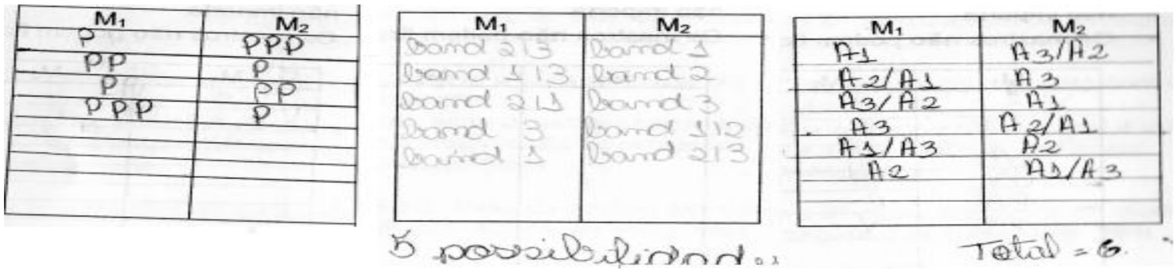


FIGURA 20 – RESOLUÇÃO DOS ALUNOS DO 6º CASO

3.2.7 – 7º CASO

- As 3 bandeiras têm a mesma cor, isto é, são iguais (indistinguíveis).
- Os 2 mastros têm a mesma cor, ou seja, são iguais (indistinguíveis).
- A ordem das bandeiras nos mastros não importa.
- Mastros podem ficar vazios.

Solução: 2 possibilidades

M_1	M_2
PPP P	$\varnothing$ PP

.

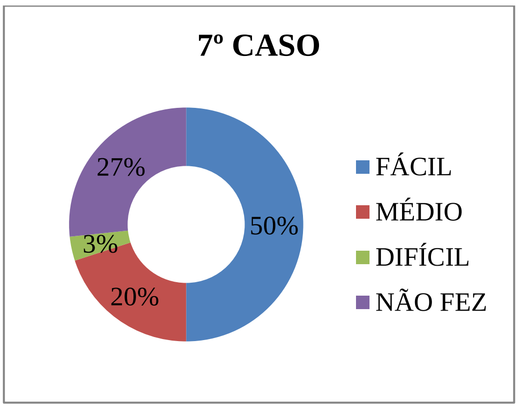
Classifique o 7° caso da lista de atividades:

( ) Fácil – Cheguei a uma resposta sem problema.

( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.

( ) Difícil – Não seria possível chegar a uma resposta sem a intervenção do professor.

( ) Não conseguiu fazer



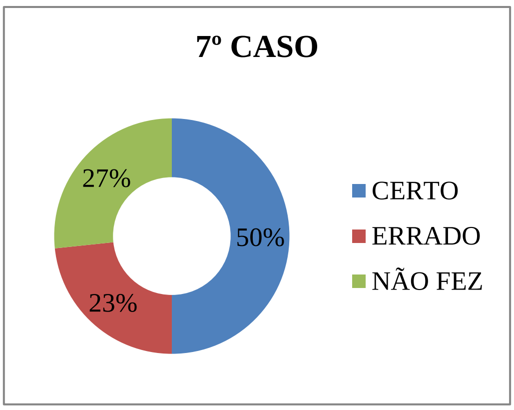


FIGURA 21 - GRÁFICO DO 7º CASO

Essa foi a atividade com maior percentual de erros. A dificuldade foi entender como representar mastros iguais e bandeiras iguais. Muitos não consideraram a indistinguibilidade dos mastros. Seis alunos não resolveram a atividade. Não é de se surpreender o índice alto de erros, pois como dissemos ao longo do trabalho, a solução geral desse problema passa pelo Teoria das Partições, assunto de Análise Combinatória avançada por lançar mão de funções geradoras.

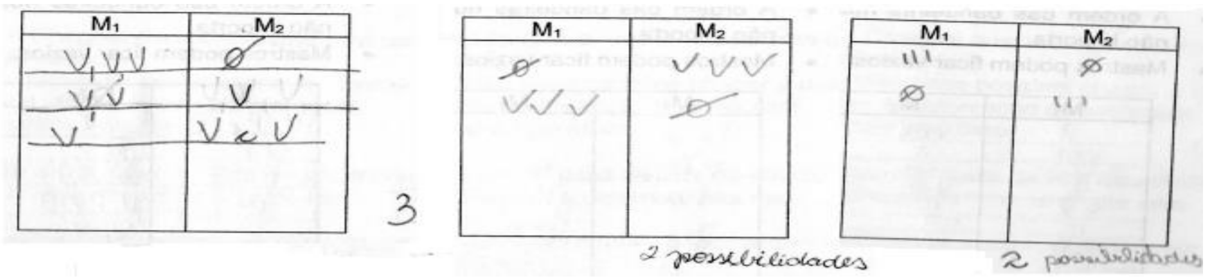


FIGURA 22 – ERROS NO 7º CASO

3.2.1 – 8º CASO

- As 3 bandeiras têm a mesma cor, isto é, são iguais (indistinguíveis).
- Os 2 mastros têm a mesma cor, ou seja, são iguais (indistinguíveis).
- A ordem das bandeiras nos mastros não importa.
- Os mastros não podem ficar vazios.

Solução: 1 possibilidade

M_1	M_2
PP	P

Classifique o 8° caso da lista de atividades:

( ) Fácil – Cheguei a uma resposta sem problema.

( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.

( ) Difícil – Não seria possível chegar a uma resposta sem a intervenção do professor.

( ) Não conseguiu fazer

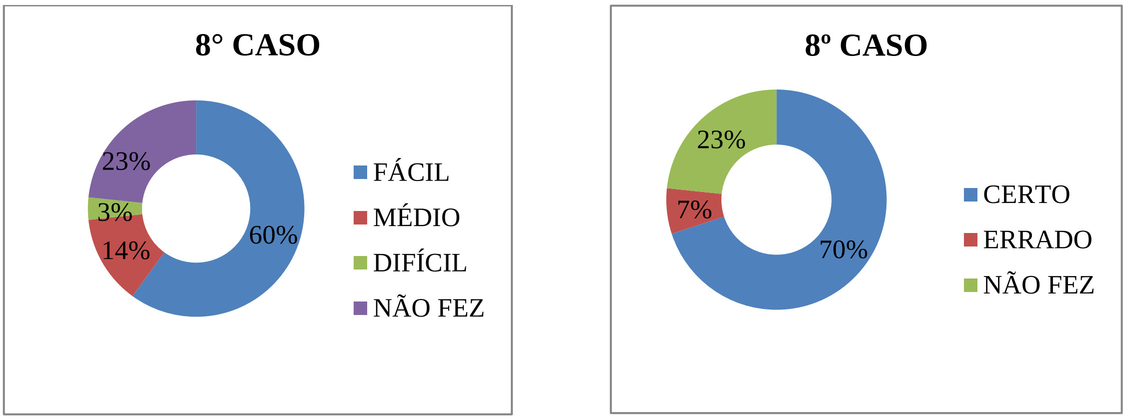


FIGURA 23- GRÁFICOS DO 8º CASO

Muitos alunos perceberam que bastava retirar a opção do mastro vazio do 7º caso. Alguns alunos não perceberam a indistinguibildade dos mastros e das bandeiras. Outros deram distinguibilidade aos mastros e as bandeiras. A grande dificuldade foi como proceder se os mastros e bandeiras são iguais.

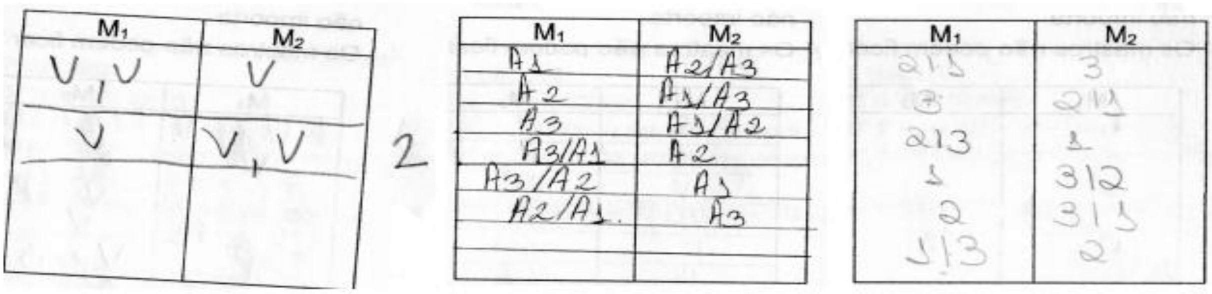


FIGURA 24 – ERROS NO 8º CASO

12. Os colegas de turma apresentaram interesse pelo processo ensino aprendizagem?

( ) Sim ( ) Não

Apesar da restrição do início, os alunos se interessaram bastante em fazer as atividades, depois que conseguiram entender o que estava sendo proposto.

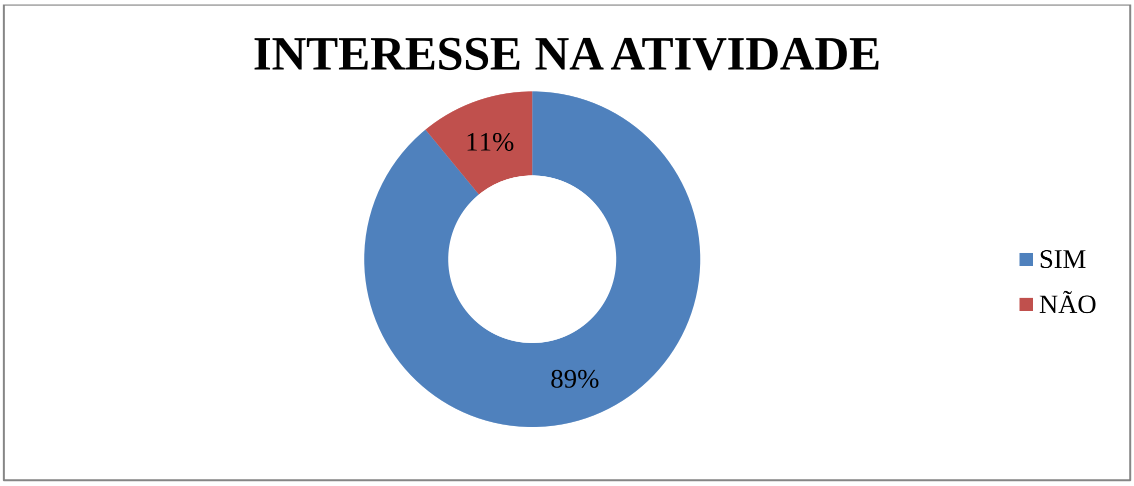


FIGURA 25 –GRÁFICO DO INETRESSE NA ATIVIDADE

13. O nível de preparo da turma é adequado para os níveis das questões trabalhadas nessa atividade?

( ) Sim ( ) Não

Como foi uma atividade em que os alunos não tinham conhecimento prévio do assunto, a turma achou a atividade bastante adequada e reportou que ajudou bastante no desenvolvimento da Análise Combinatória e Probabilidade.

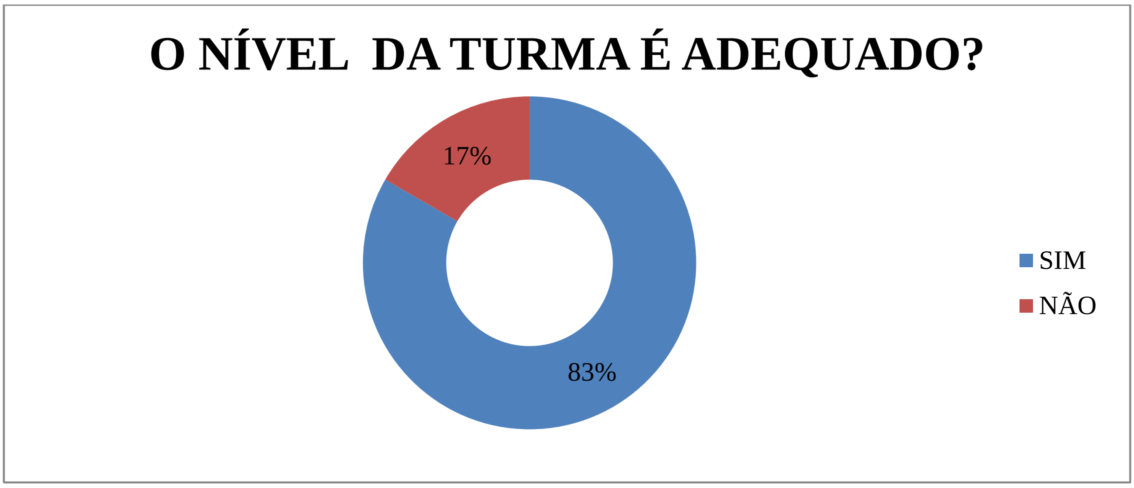


FIGURA 26 – GRÁFICO SE O NÍVEL DA TURMA É ADEQUADO?

14. Qual foi a sua maior dificuldade? (marque apenas uma opção)

( ) Entender o enunciado

( ) Entender o que está sendo pedido

( ) Entender a diferença entre bandeiras iguais e diferentes

( ) Entender a diferença entre mastros iguais e diferentes

Como o assunto era novo para os alunos, a maior dificuldade foi entender o que estava sendo pedido no problema.

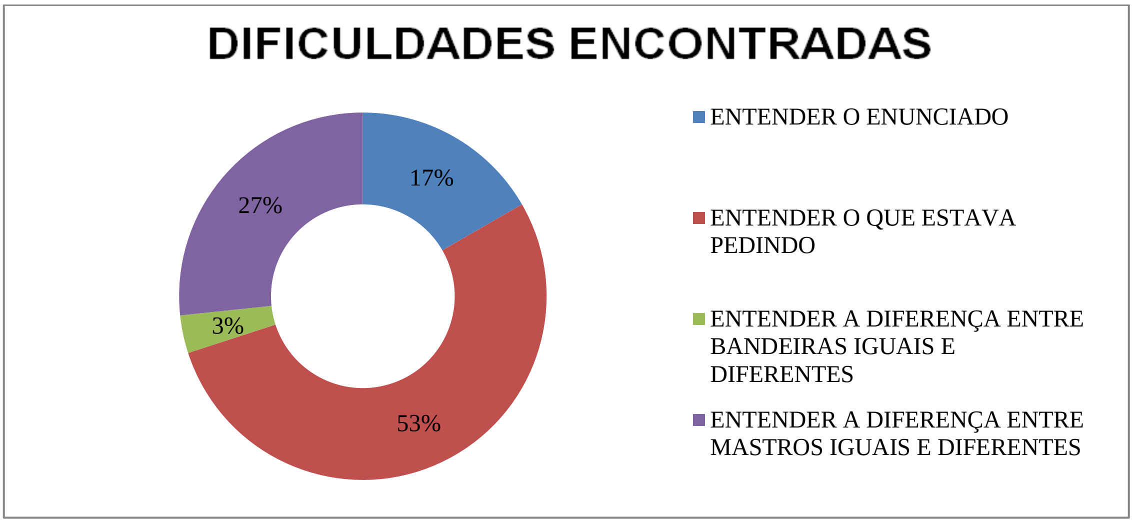


FIGURA 27- GRÁFICO – DIFICULDADES ENCONTRADAS

15. Dê uma nota geral entre 0 (zero) e 10 (dez) para sua aprendizagem na matéria dada.

1 ( )	2 ( )	3 ( )	4 ( )	5 ( )
6 ( )	7 ( )	8 ( )	9 ( )	10( )

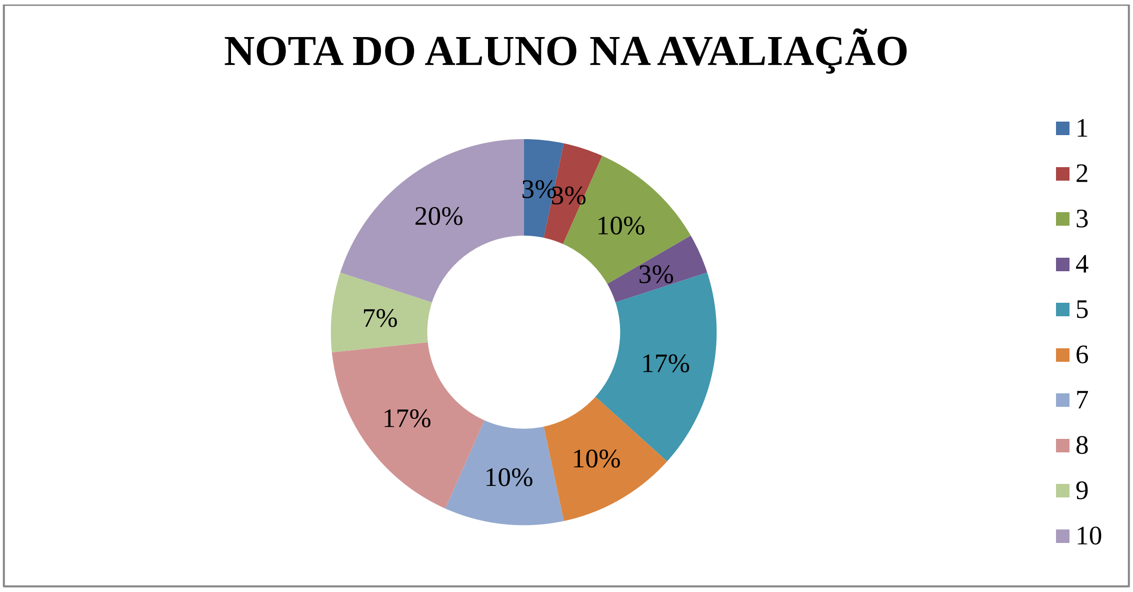


FIGURA 28 – GRÁFICO DA NOTA DADA PELO ALUNO NA AVALIAÇÃO

O gráfico abaixo nos mostra, de maneira geral, a opinião de cada um dos 30 alunos sobre a atividade realizada em sala de aula, analisando se as atividades eram fáceis, médias, difíceis ou não realizaram a atividade. Porém, a opinião deles não atesta *ipso facto* a realidade, pois, mesmo achando fácil, muitos acabavam errando a atividade.

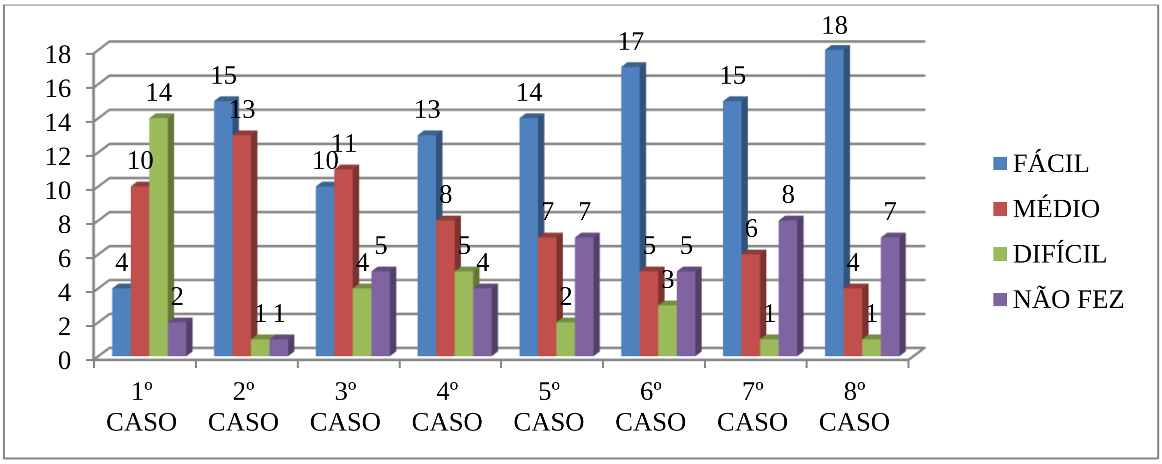


FIGURA 29 – GRÁFICO DA AVALIAÇÃO GERAL DOS ALUNOS DO 1º AO 8º CASO

No gráfico abaixo, foram analisados os acertos e erros em cada caso. De modo geral, a turma foi muito bem na atividade, levando em consideração que os alunos não tinham conhecimento prévio do assunto, e fizeram a atividade a partir da intuição, interpretação e tentativas. Naturalmente, a intervenção do professor foi fundamental para a realização das atividades e os resultados positivos, pois os alunos não entendiam de início o que o enunciado pedia.

Foi possível observar que o 3º caso de indistinguibilidade dos mastros gerou uma acentuada dificuldade. Isso também ficou evidente no 7º caso quando as bandeiras e os mastros eram indistinguíveis.

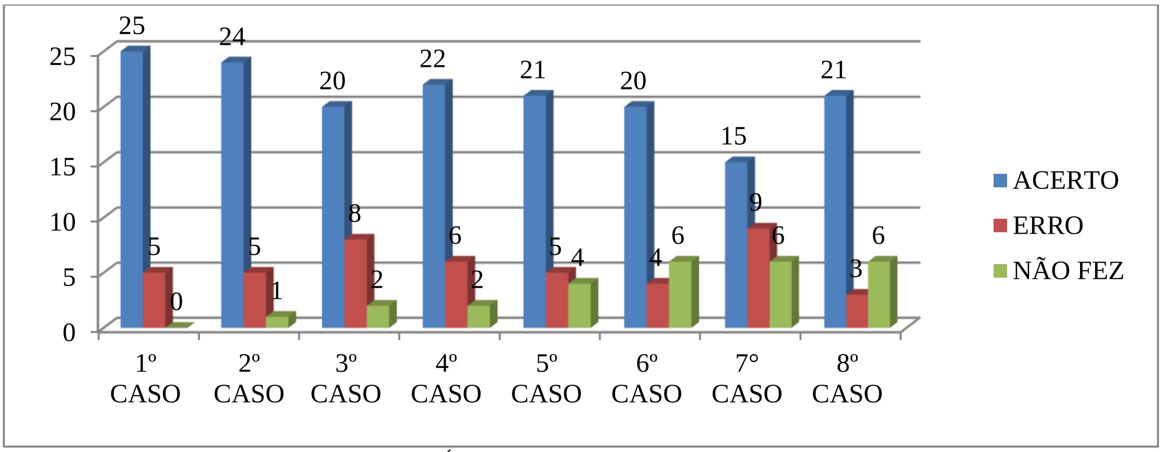


FIGURA 30 – GRÁFICO DE ACERTOS E ERROS DO 1º AO 8º CASO

Duas semanas depois, aplicamos a segunda atividade, envolvendo problemas de distinguibilidade extrínseca aos objetos, mais especificamente relacionada à ordem das bandeiras no mastro. Neste momento, os alunos já tinham uma noção do Princípio Multiplicativo, e o resultado foi bem surpreendente, pois os trinta alunos fizeram todas as atividades com bastante empenho e interesse e o resultado foi bem proveitoso.

Foi nítido perceber que quando o aluno entende o que precisa ser feito, ele o faz com empenho e satisfação, e quando ele não entende simplesmente não faz a atividade. Segue abaixo a análise de cada caso dessa segunda fase de avaliação.

3.2.9 – 9º CASO

- As 3 bandeiras são nas cores vermelha, preta e branca, ou seja, são diferentes.
- Os 2 mastros têm cores diferentes, ou seja, são diferentes.
- A ordem das bandeiras nos mastros é importante.
- Mastros podem ficar vazios.

Classifique o 9° caso da lista de atividades:

( ) Fácil – Cheguei a uma resposta sem problema.

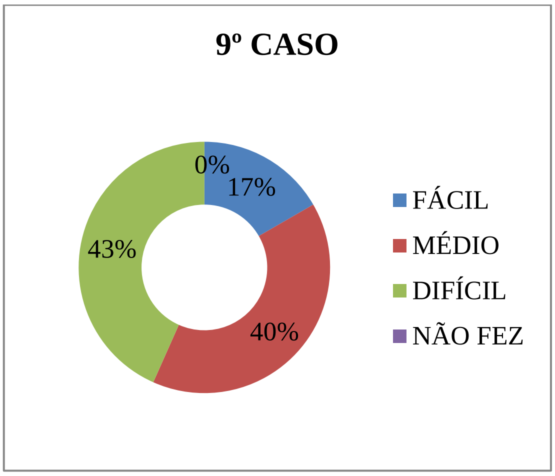
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.

( ) Difícil – Não seria possível chegar a uma resposta sem a intervenção do professor.

( ) Não conseguiu fazer

Solução: 24 possibilidades

M_1	M_2	M_1	M_2
PBV	∅	∅	PBV
PVB	∅	∅	PVB
BVP	∅	∅	BVP
BPV	∅	∅	BPV
VPB	∅	∅	VPB
VBP	∅	∅	VBP
PB	V	V	PB
BP	V	V	BP
PV	B	B	PV
VP	B	B	VP
BV	P	P	BV
VB	P	P	VB



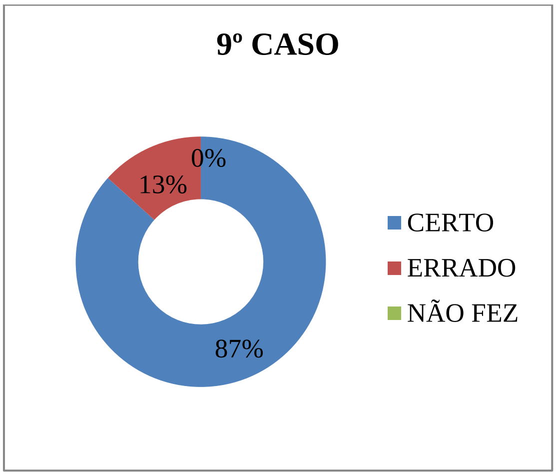


FIGURA 31 – GRÁFICOS DO 9º CASO

Nesta atividade os alunos tiveram dificuldade em entender o que seria a ordem das bandeiras nos mastros ser distinguível. Foi necessário explicar que colocar num mastro BVP é diferente de colocar BPV nesse mesmo mastro, e por esse motivo eles acharam a atividade difícil. A partir daí eles desenvolveram a atividade tranquilamente. Muitos alunos usaram a Proposição 1 do Princípio Multiplicativo, para resolver a atividade, como mostraremos abaixo. Dos 30 alunos que realizaram a atividade, apenas 4 erraram a atividade. O aproveitamento foi muito bom.

A primeira aluna raciocinou corretamente, percebeu a distinguibilidade dos mastros e das bandeiras porém, negligenciou algumas configurações. Outros não consideraram a distinguibilidade entre as bandeiras.

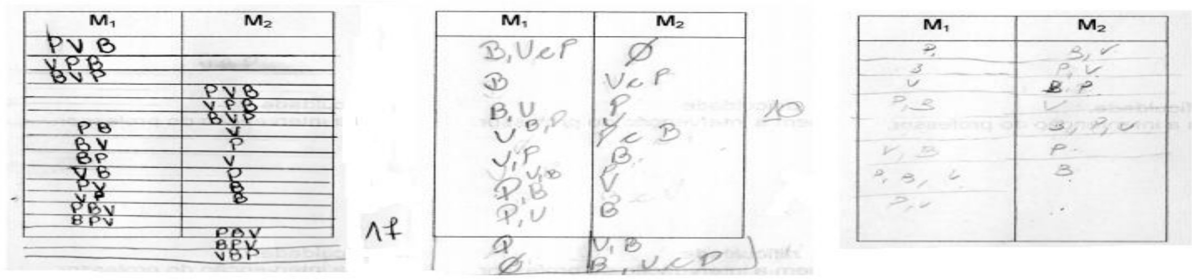


FIGURA 32 – ERROS NO 9º CASO

Abaixo estão algumas soluções criativas dos alunos nessa atividade.

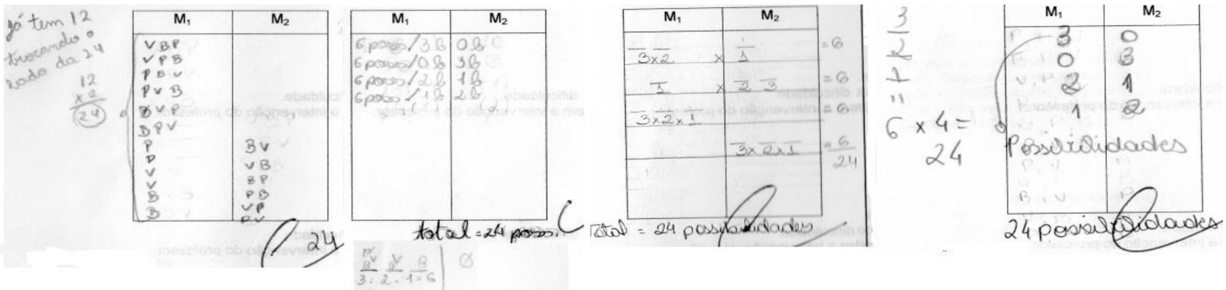


FIGURA 33 – ACERTOS NO 9º CASO

3.2.10 – 10º CASO

- As 3 bandeiras são nas cores vermelha, preta e branca, ou seja, são diferentes
- Os 2 mastros têm cores diferentes, ou seja, são diferentes
- A ordem das bandeiras nos mastros é importante
- Os mastros **não** podem ficar vazios

Solução: 12 possibilidades

M_1	M_2
PB	V
BP	V
BV	P
VB	P
PV	B
VP	B
V	PB
V	BP
P	BV
P	VB
B	PV
B	VP

Classifique o 10° caso da lista de atividades:

( ) Fácil – Cheguei a uma resposta sem problema.

( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.

( ) Difícil – Não seria possível chegar a uma resposta sem a intervenção do professor.

( ) Não conseguiu fazer

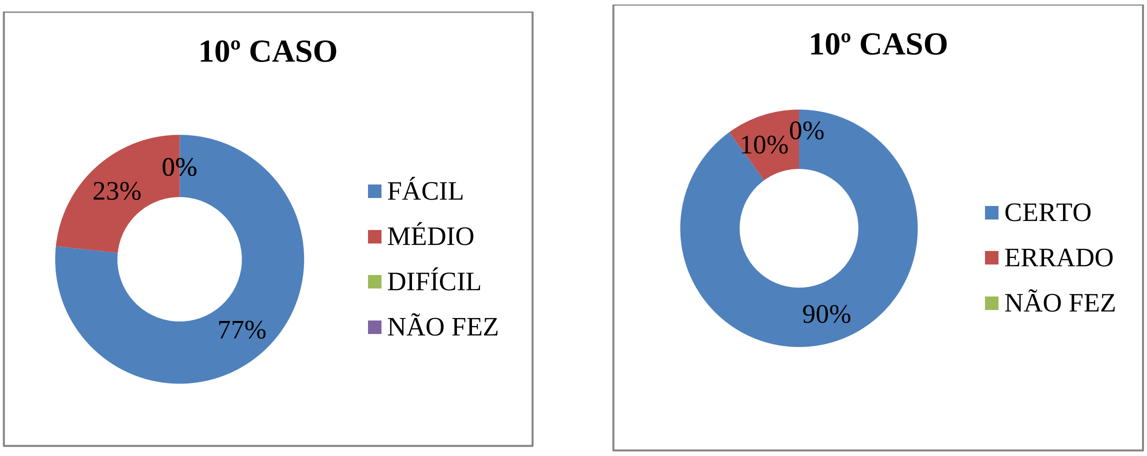


FIGURA 34- GRÁFICOS DO 10º CASO

No 10º caso os alunos logo perceberam que bastava eliminar os mastros vazios do 9º caso. Alguns usaram a Proposição 1, referente ao Princípio Multiplicativo. Dos 30 alunos, apenas três alunos erraram e todos os alunos realizaram a atividade.

O primeiro aluno abaixo não percebeu a distinguibilidade dos mastros, mas fez a distinguibilidade das bandeiras; o segundo não considerou todas as possibilidades; e o terceiro obteve a resposta correta, porém raciocinou de forma errada.

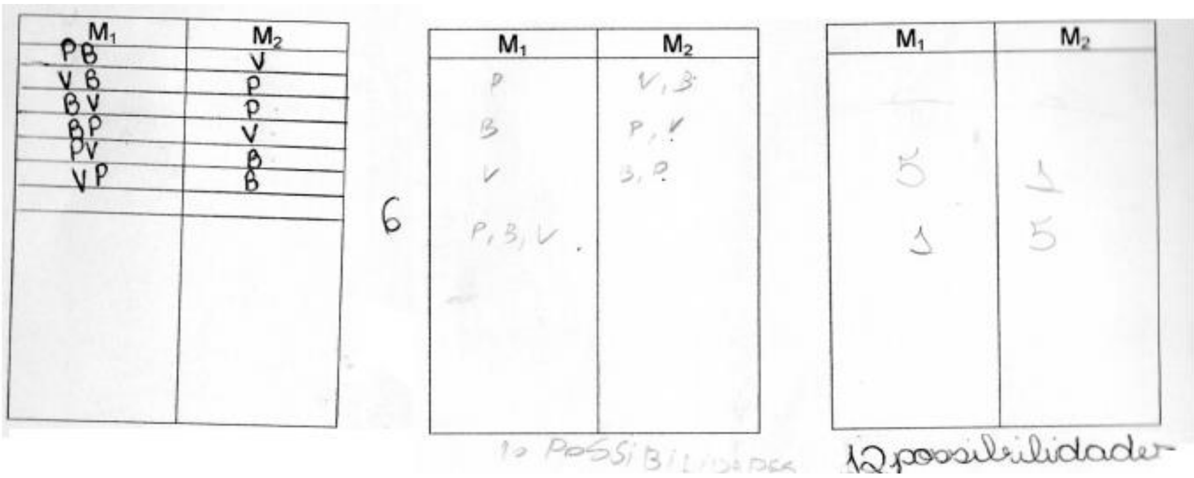


FIGURA 35 – ERROS NO 10º CARO

Algumas soluções diversificadas e corretas dos alunos. Esse foi o 10º caso, para o qual os alunos obtiveram uma maior quantidade de acertos.

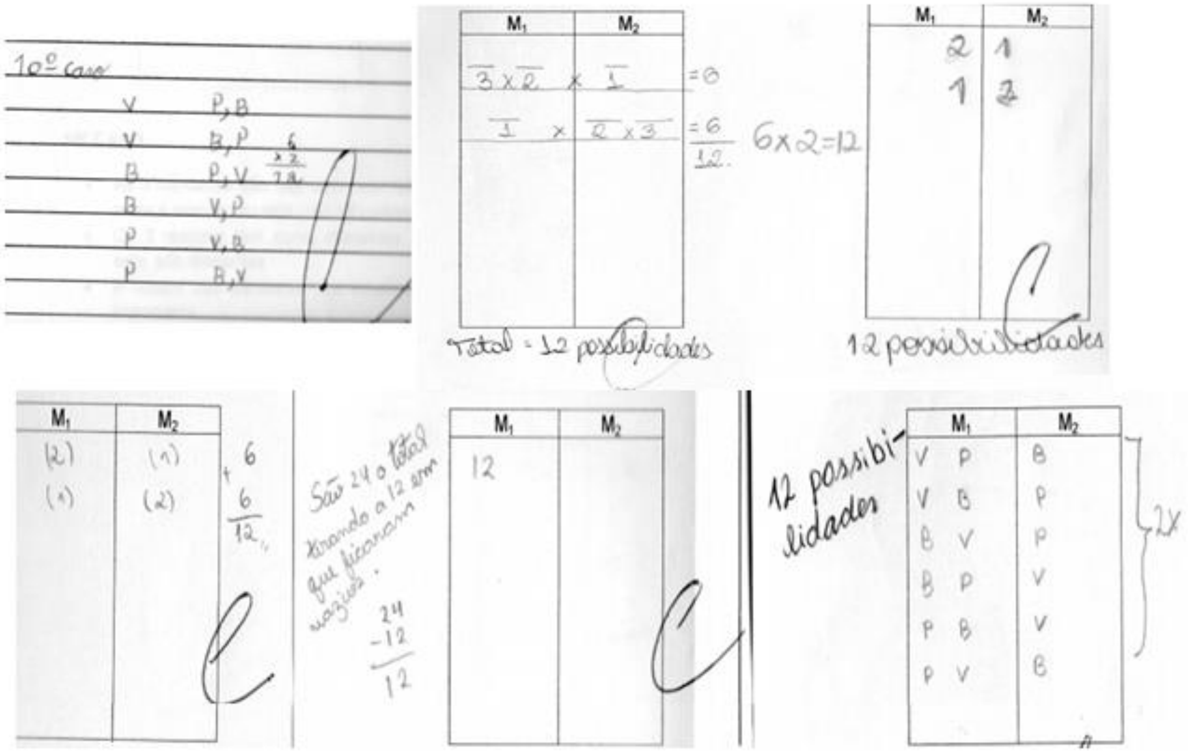


FIGURA 36 – ACERTOS NO 10º CASO

3.2.11 – 11º CASO

- As 3 bandeiras são nas cores vermelha, preta e branca, ou seja, são diferentes
- Os 2 mastros têm a mesma cor, isto é, são iguais
- A ordem das bandeiras nos mastros é importante
- Mastros podem ficar vazios

Solução: 12 possibilidades

M_1	M_2
PBV	∅
PVB	∅
BVP	∅
BPV	∅
VPB	∅
VBP	∅
PB	V
BP	V
PV	B
VP	B
BV	P
VB	P

Classifique o 11° caso da lista de atividades:

( ) Fácil – Cheguei a uma resposta sem problema.

( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.

( ) Difícil – Não seria possível chegar a uma resposta sem a intervenção do professor.

( ) Não conseguiu fazer

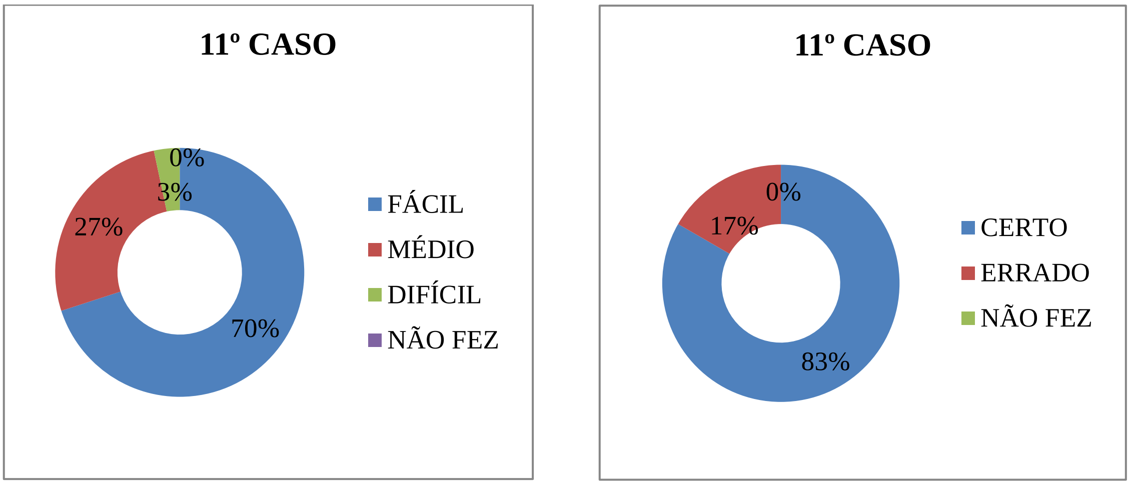


FIGURA 37 – GRÁFICO DO 11º CASO

Este caso, em comparação aos anteriores, teve uma maior quantidade de erros, embora a quantidade de acertos tenha sido boa, já que 25 alunos acertaram essa atividade. A maior dificuldade aqui foi identificar a distinguibilidade das bandeiras.

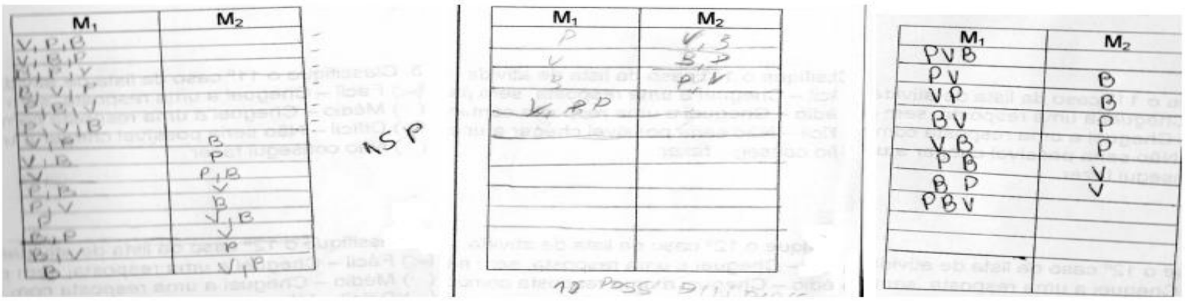


FIGURA 38 – ERROS NO 11º CASO

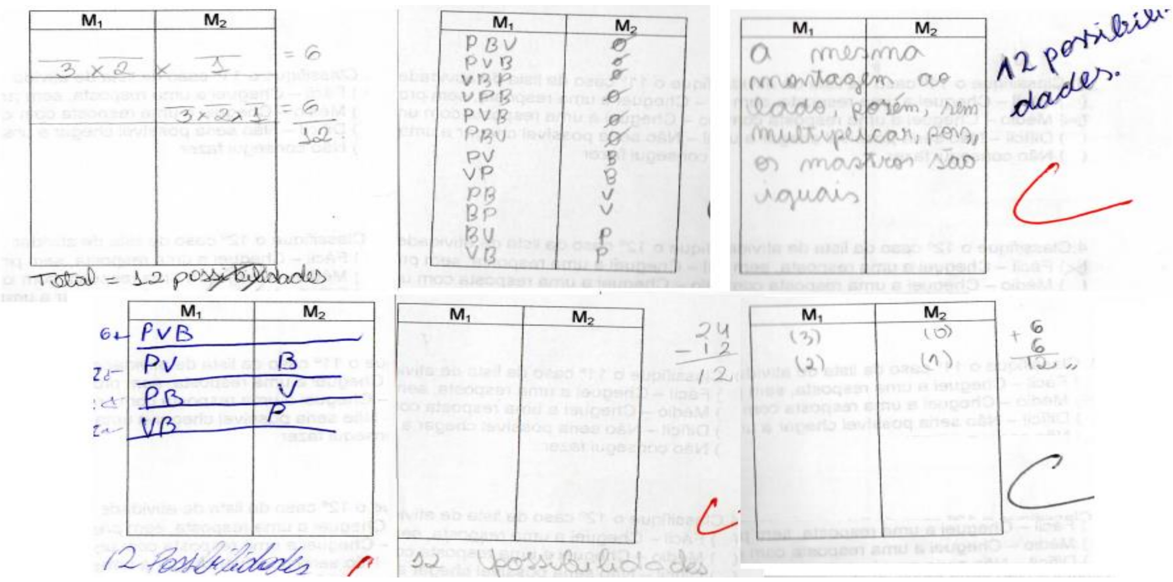


FIGURA 39- ACERTOS DOS ALUNOS NO 11º CASO

3.2.12 – 12º CASO

- As 3 bandeiras são nas cores vermelha, preta e branca, ou seja, são diferentes
- Os 2 mastros têm a mesma cor, ou seja, são iguais
- A ordem das bandeiras nos mastros é importante
- Os mastros **não** podem ficar vazios

Solução: 6 possibilidades

M_1	M_2
PV	B
VP	B
PB	V
BP	V
BV	P
VB	P

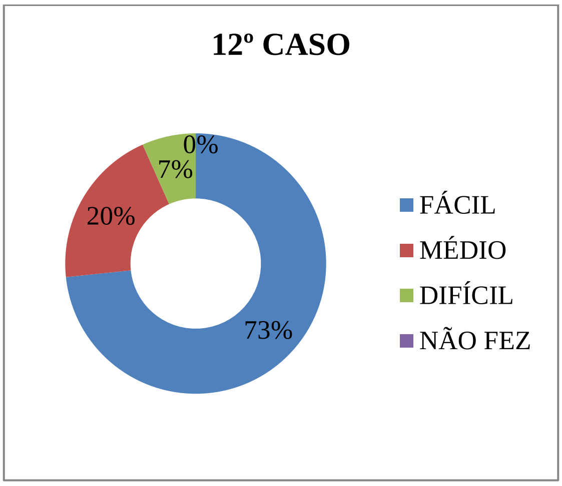
Classifique o 12° caso da lista de atividades:

( ) Fácil – Cheguei a uma resposta sem problema.

( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.

( ) Difícil – Não seria possível chegar a uma resposta sem a intervenção do professor.

( ) Não conseguiu fazer



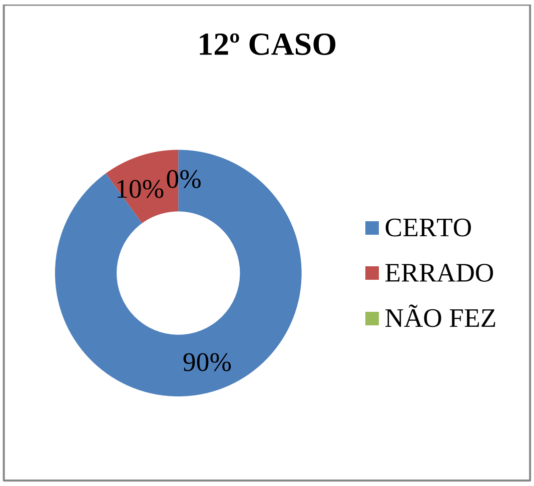


FIGURA 40 – GRÁFICO DO 12º CASO

Neste caso 90% turma acertou essa questão, um aproveitamento muito bom. Por fim, os alunos já avaliavam a atividade como fácil, pois já conseguiam fazer com segurança e autonomia.

Nos casos abaixo, os dois primeiros alunos não perceberam a distinguibilidade entre as bandeiras e o último não percebeu a indistinguibilidade dos mastros.

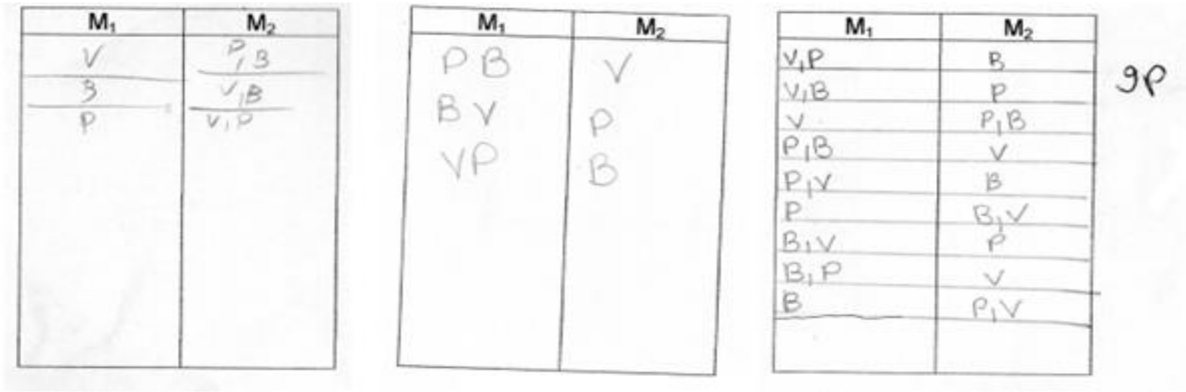


FIGURA 41 – ERROS NO 12º CASO

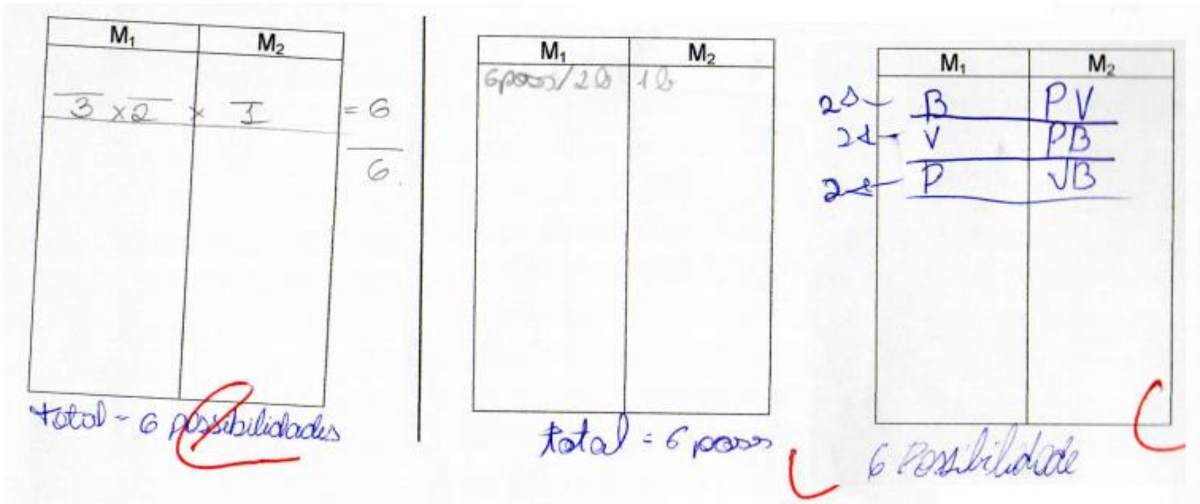


FIGURA 42 – ACERTOS NO 12º CASO

Unindo as duas etapas do pré-teste foi possível observar que o desempenho na segunda atividade foi bem proveitosa, pois todos os alunos se propuseram a fazer a atividade com bastante interesse e com muito mais confiança. Como a quantidade de possibilidades da segunda etapa era bem maior, a grande maioria da turma fez uso do Principio Multiplicativo para obter os resultados. Muitos questionaram e justificaram o seguinte:

- "*A ordem das bandeiras ser importante irá modificar o quê no problema?"*
- *"Explique por favor a ordem das bandeiras."*
- "*Nas questões com mastros diferentes basta multiplicar o resultado por 2?"*
- *"O 9º caso foi complicado de se entender, depois que o professor explicou que a ordem branco, vermelho e preto é diferente de branco, preto e vermelho, tudo ficou bem mais claro. Concluí que VBP≠VPB≠BVP≠BPV≠PBV≠PVB, ou seja, a ordem é importante."*
- *"Nesse caso posso usar o* Princípio Multiplicativo?*"*

Foi então necessária a intervenção do professor para esclarecer essas dúvidas. De início eles não entenderam o que significava a relevância da ordem nos mastros. Foi necessário explicar que colocar num mastro as bandeiras branca, vermelha e preta era diferente de colocar branca, preta e vermelha, por exemplo. Na atividade com mastros diferentes, eles logo perceberam que bastava multiplicar por 2, pois o que seria colocado no primeiro mastro iria ser colocado no segundo mastro.

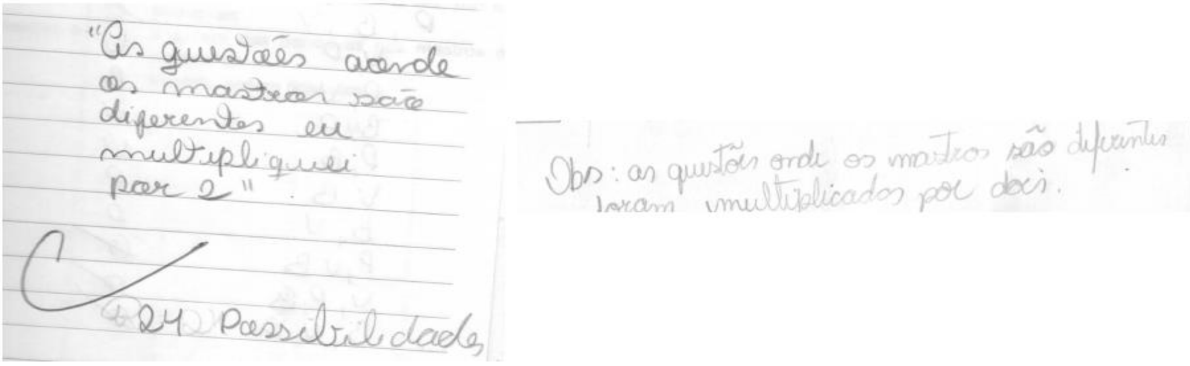


FIGURA 43 – JUSTIFICATIVA DOS ALUNOS

Nessa segunda etapa da atividade, os alunos estavam mais confiantes e interessados, tanto que muitos acharam a atividade fácil e acertaram, havendo poucos erros.

O gráfico abaixo mostra uma análise sobre o que cada aluno achou sobre as atividades das duas etapas tomadas em conjunto, se acharam fácil, médio, difícil ou não conseguiram fazer.

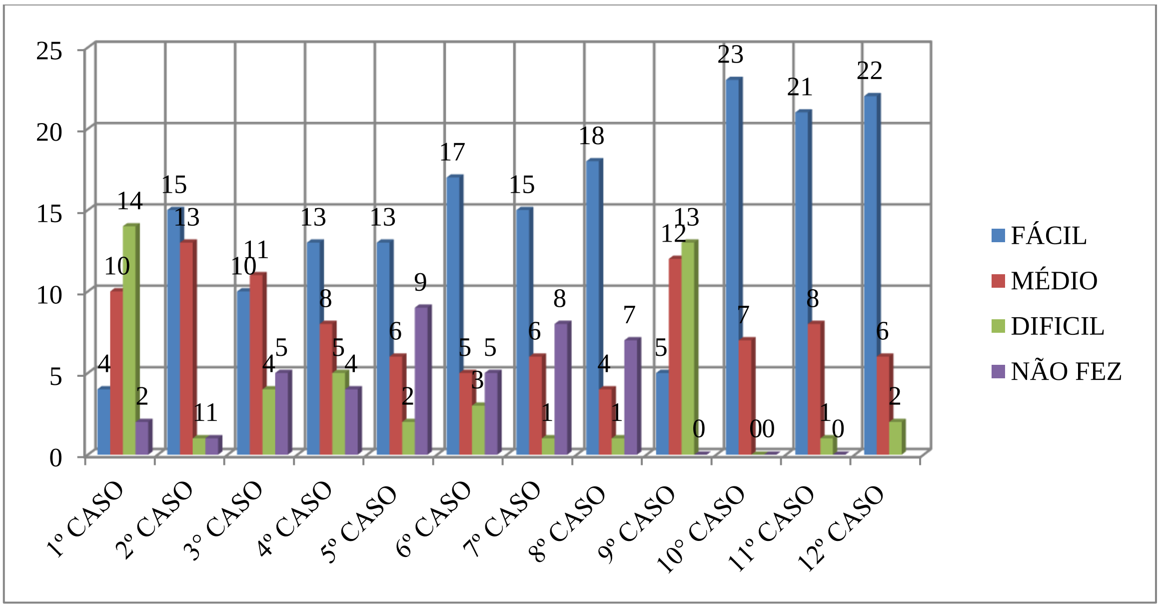


FIGURA 44 – GRÁFICO DA OPINIÃO DOS ALUNOS SOBRE CADA CASO

Em contrapartida, o gráfico a seguir expressa os acertos e os erros em cada uma das 12 atividades propostas.

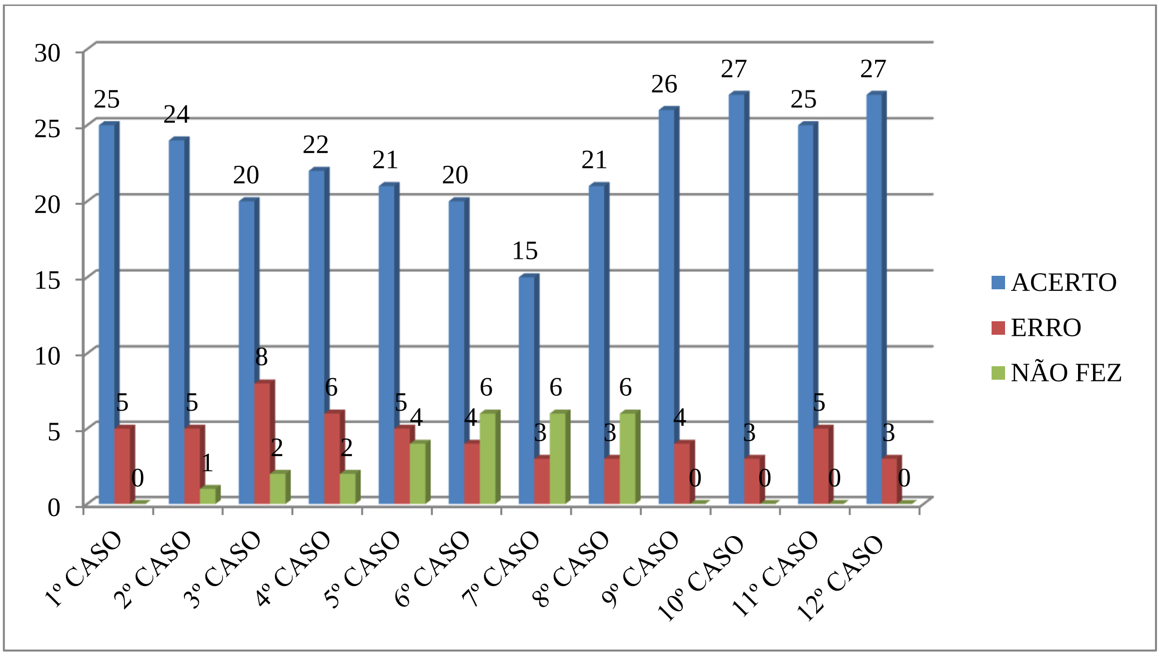


FIGURA 45 – GRÁFICO DE ACERTOS E ERROS DOS 12 CASOS

Realizamos uma análise entre o que os alunos acharam sobre as atividades, se era fácil, médio, difícil ou não realizaram a atividade e se eles acertaram ou erraram as atividades, mostrando que a grande maioria tinha noção do que eles estavam fazendo, fizeram a atividade com certeza do que estavam realizando. A primeira tabela é referente a primeira etapa, referente à distinguibilidade intrínseca aos objetos, já a segunda tabela é referente às atividades referentes à distinguibilidade extrínseca aos objetos.

Na primeira etapa foram 8 casos realizados por 30 alunos totalizando 240 resultados.

1º ETAPA				
	FÁCIL	**MÉDIO**	**DIFÍCIL**	**TOTAL**
ACERTO	92	48	28	168
ERRO	13	16	4	33

FIGURA 46 – TABELA DE ACERTOS E ERROS DA 1º ETAPA

Conduzimos o teste não-paramétrico de Qui-Quadrado para os resultados da tabela de contingência dos resultados da primeira etapa, a fim de diagnosticar se há independência entre a avaliação dos alunos das questões (fácil, médio e difícil) e a performance deles nas questões (acerto e erro). Ao nível de significância de 5%, não rejeitamos a hipótese de independência dessas categorias, pois o valor da estatística do teste foi $\chi_0^2 = 5{,}04$ com 2 graus de liberdade e o *p*-valor é 0,0805, ou seja, maior que o nível de significância estipulado. Assim, estatisticamente, a primeira etapa nos indica que a opinião dos alunos sobre as questões não tem influência sobre os seus erros e acertos.

Na segunda etapa foram 4 casos realizados por 30 alunos, totalizando 120 resultados

2º ETAPA				
	FÁCIL	**MÉDIO**	**DIFÍCIL**	**TOTAL**
ACERTO	65	27	13	105
ERRO	6	6	3	15

FIGURA 47 – ACERTOS E ERROS DA 2ª ETAPA

Conduzimos aqui também o teste não paramétrico de Qui-Quadrado para os resultados da tabela de contingência dos resultados da segunda etapa, a fim de diagnosticar se há independência entre a avaliação dos alunos das questões (fácil, médio e difícil) e a performance deles nas questões (acerto e erro). Ao nível de significância de 5%, também não rejeitamos a hipótese de independência dessas categorias, pois o valor da estatística do teste foi $\chi_0^2 = 3{,}6901$ com 2 graus de liberdade e o *p*-valor é 0,158, ou seja, maior que o nível de significância estipulado. Assim, estatisticamente, a segunda etapa continuou a nos indicar que a opinião dos alunos sobre as questões não teve influência sobre os seus erros e acertos.

Antes do ensino da Análise Combinatória, como técnica de contagem, os alunos já tinham tido contato com Fatorial, Números Binomiais, Triângulo de Pascal e Binômio de Newton.

Começamos o estudo da Análise Combinatória com a turma no dia 14/08/2017 com a aplicação do pré-teste, estimulando a criatividade e a intuição. O assunto foi estudado, baseando-se em uma metodologia de resolução de problemas, fazendo com que o aluno participasse de forma efetiva para evolução do seu conhecimento, explorando sua imaginação, ressaltando suas ideias, o trabalho em equipe e suas experiências. Procurou-se estimular assim o raciocínio lógico-matemático, sua criatividade e capacidade de resolver as questões, ajudando no desenvolvimento do seu processo cognitivo, nas tomadas de decisões de um cidadão atuante.

Aplicamos o Pré-Teste em duas etapas: Na primeira, problemas que envolviam distinguibilidade intrínseca aos objetos foram trabalhados em dois tempos de aula. No dia seguinte a atividade foi corrigida em sala de aula. Após essa atividade, na semana seguinte foi introduzido o Princípio Fundamental da Contagem (PFC, ou Princípio Multiplicativo), que fluiu muito bem graças à aplicação do pré-teste.

Logo após o conhecimento do PFC, eles realizaram a segunda etapa de atividades, versando sobre problemas que envolviam distinguibilidade extrínseca aos objetos, ou seja, a relevância ou não da ordenação das bandeiras nos mastros, assunto que suscitou muitas dúvidas. Uma aluna perguntou: *"se colocarmos as bandeiras branca, vermelha e preta é diferente de branca, preta e vermelha?"* Uma vez esclarecida a dúvida, todos resolveram as atividades sem maiores dificuldades. Para surpresa geral, nessa segunda etapa a turma foi muito bem, realizando todas as atividades com bastante êxito e dedicação. Eles estavam empolgados, pois estavam conseguindo entender o assunto e resolveram todos os exercícios.

Durante esse período, a turma teve 3 tempos de 50 minutos, por semana, totalizando 21 horas aulas para o estudo formal da Análise Combinatória.

Vale apena resaltar que a explanação de cada problema foi realizada de duas maneiras: tanto sem a preocupação com o uso de fórmulas, quanto pelo uso das fórmulas.

Segundo Roa e Navarro-Pelayo (2001, apud Almeida, 2010, p. 18):

> *"O raciocínio combinatório é um componente essencial do pensamento formal e um pré-requisito importante para o raciocínio lógico geral".*

Na maioria das vezes, o processo de ensino e aprendizagem desse assunto, no Ensino Médio apresenta muitos obstáculos epistemológicos, devido à interpretação dos enunciados e ao entendimento dos conceitos de distinguibilidade e indistinguibilidade de estruturas.

3.3 – Análise do Pós-Teste

Ao término do assunto de Análise Combinatória, os alunos realizaram uma atividade com consulta ao caderno e individualmente, contendo 6 problemas, alguns com subitens e adaptações retiradas da OBMEP. Essa atividade foi realizada por 28 alunos, com a mesma turma analisada no início do trabalho, durante duas aulas de 50 minutos cada. Apenas 39,29% da turma obteve nota acima de 5,0.

Seguem abaixo as questões resolvidas e comentadas, as soluções de alguns alunos e uma análise gráfica dos resultados.

3.3.1 - 1ª .Questão –(OBMEP/2012) Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantar em uma mesa triangular, cujos lados têm 2, 3 e 4 lugares, como na figura. De quantas maneiras esses amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e em um mesmo lado da mesa?

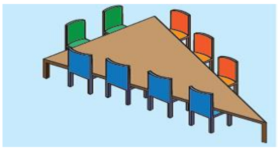


FIGURA 48 – QUESTÃO OBMEP

Solução: O casal tem seis opções de lugares, como eles podem trocar entre si, temos então 2 x 6 = 12 possibilidades de sentar o casal. Sentando o casal sobram 7 x 6 x 5 x 4 = 840 possibilidades para sentar as outras 4 pessoas. Assim o total de possibilidades é 12 x 840 = 10.080

A maior dificuldade foi entender o enunciado do problema. Uma dúvida de grande maioria da turma foi entender que Alice e Bernardo sentarem à mesa é diferente de Bernardo e Alice sentarem à mesa. Outra dúvida foi: *se ordem não importa, uso combinação*? Nesta questão alguns alunos acharam que se tratava de uma permutação circular. Seguem abaixo soluções de dois alunos.

FIGURA 49 – ERROS DA 1ª QUESTÃO

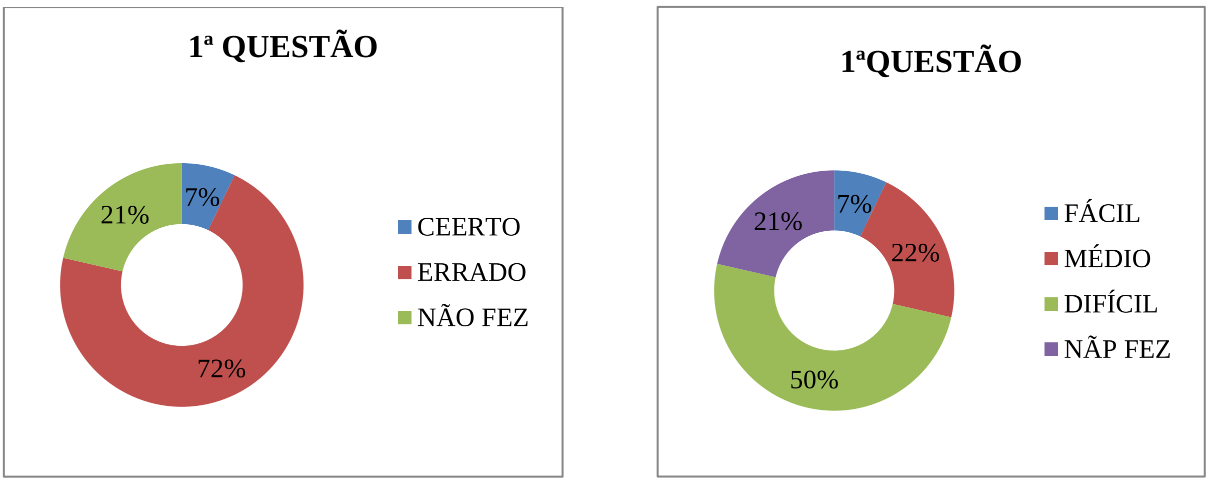


FIGURA 50 – GRÁFICOS DA 1º QUESTÃO

3.3.2 - 2ª .Questão (OBMEP/ADAPTADA/2013) Um hospital tem os seguintes funcionários:

***Sara Dores da Costa**: reumatologista*

***Iná Lemos**: pneumologista*

***Ester Elisa**: enfermeira*

***Ema Thomas**: traumatologista*

***Ana Lisa**: psicanalista*

***Inácio Filho**: obstetra*

3.3.2A) De quantas maneiras os funcionários podem fazer uma fila?

Solução:

$$P_6 = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$$

Alguns alunos raciocinaram corretamente, mas cometeram erros aritméticos; outros acharam que se tratava de uma permutação circular.

Nesta questão de PFC, 75% da turma conseguiu acertá-la. Foi a questão com a maior quantidade de acertos, como podemos observar no gráfico abaixo.

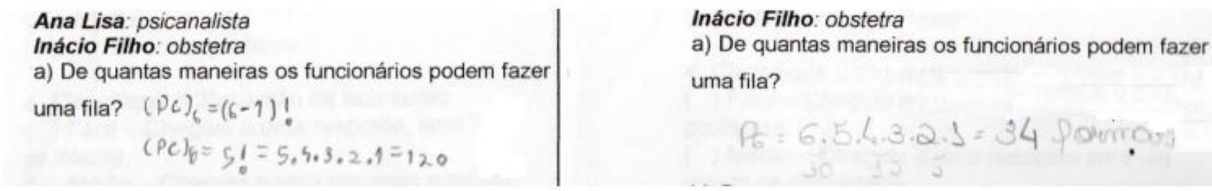


FIGURA 51 – ERROS DA QUESTÃO 2.A

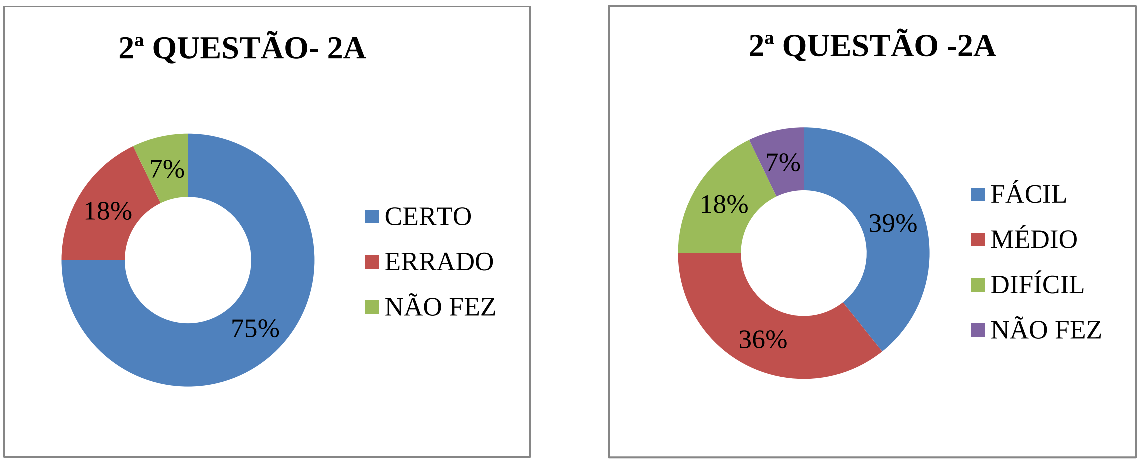


FIGURA 52 – GRÁFICOS DA QUESTÃO 2A

3.3.2B) De quantas maneiras os funcionários podem se sentar em uma mesa redonda ? Se todos se mudam para a cadeira dá esquerda, a Mesa continua igual?

Solução: Sim, a arrumação na mesa não se altera quando todos se mudam para a cadeira da esquerda.

$$(PC)_6 = (6-1)! = 5! = 5.4.3.2.1 = 120.$$

Mais de 50% da turma conseguiu acertar a questão. Cinco alunos deixaram a questão em branco; outros raciocinaram corretamente, mas erraram na conclusão. A maioria da turma respondeu que a mesa não se altera quando todos mudam para a cadeira da esquerda e entendeu que se tratava de uma permutação circular.

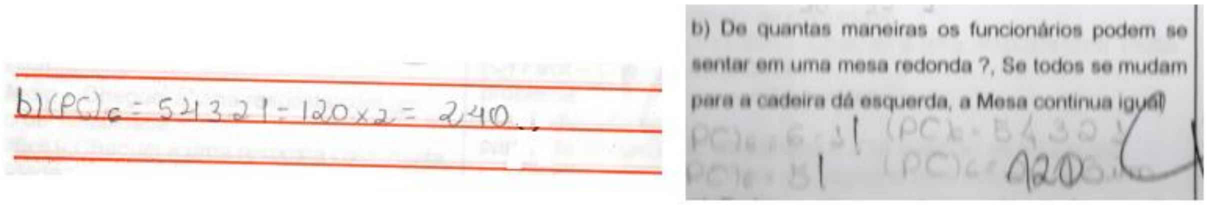


FIGURA 53 – ERROS DA QUESTÃO 2B

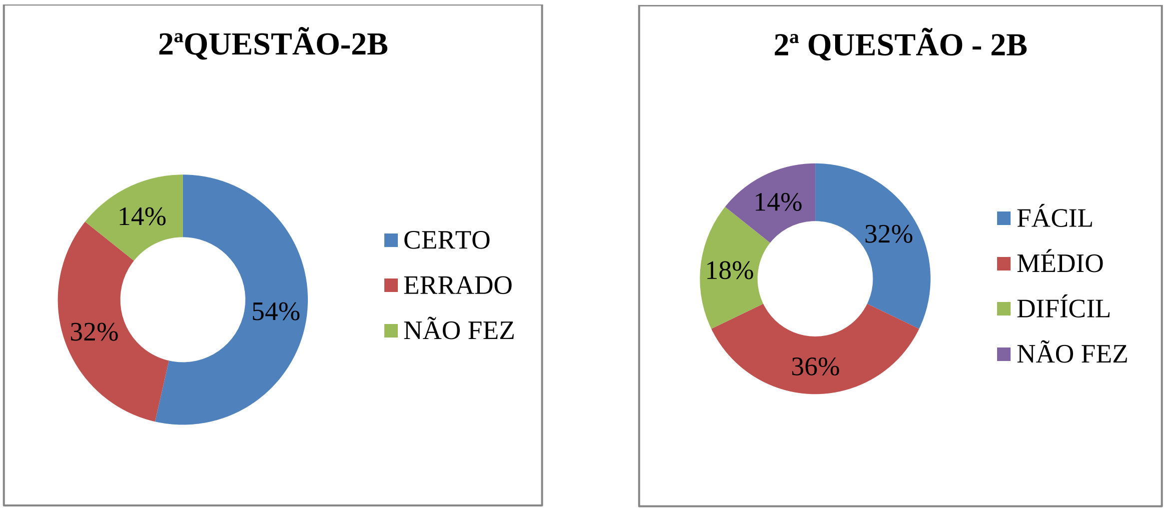


FIGURA 54 – GRÁFICOS DA QUESTÃO 2B

3.3.2C) E de quantas maneiras os funcionários podem compor uma comissão formada por presidente, vice-presidente e suplente?

Solução: Para escolha do presidente temos 6 possibilidades, para escolha do vice-presidente temos 5 possibilidades e para escolha do suplente temos 4 possibilidades. Pelo Principio Multiplicativo, temos 6 x 5 x 4 = 120 possibilidades.

Alguns alunos não perceberam a distinguibilidade entre presidente, vice e suplente e usaram erradamente combinação.

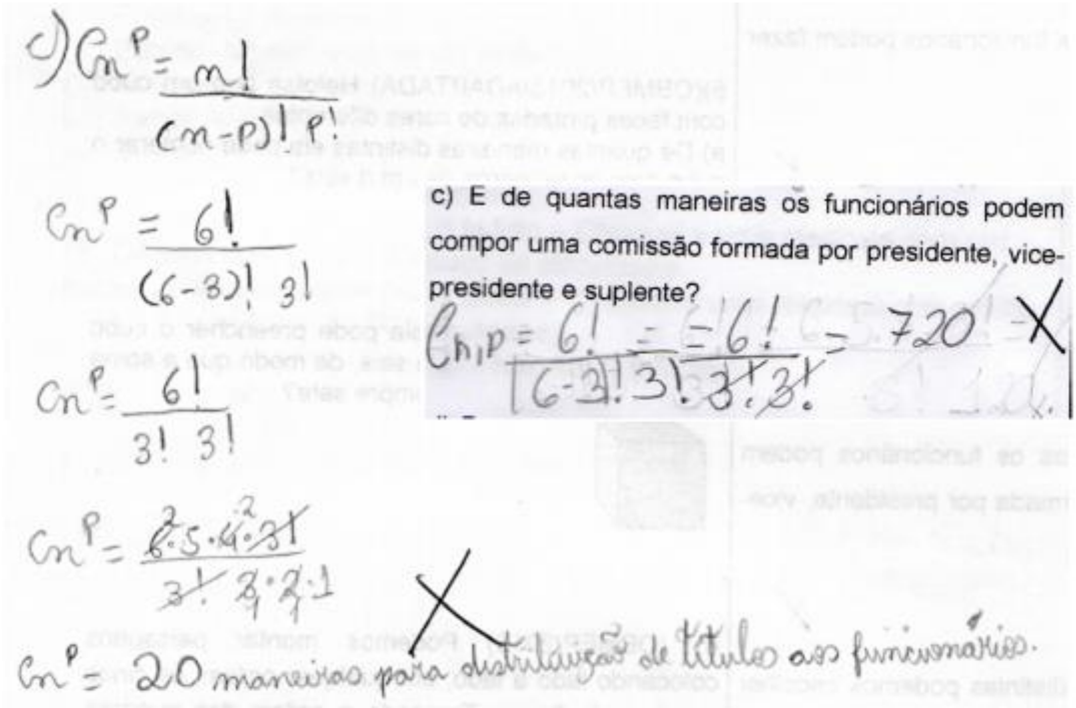


FIGURA 55 – ERROS DA QUESTÃO 2C

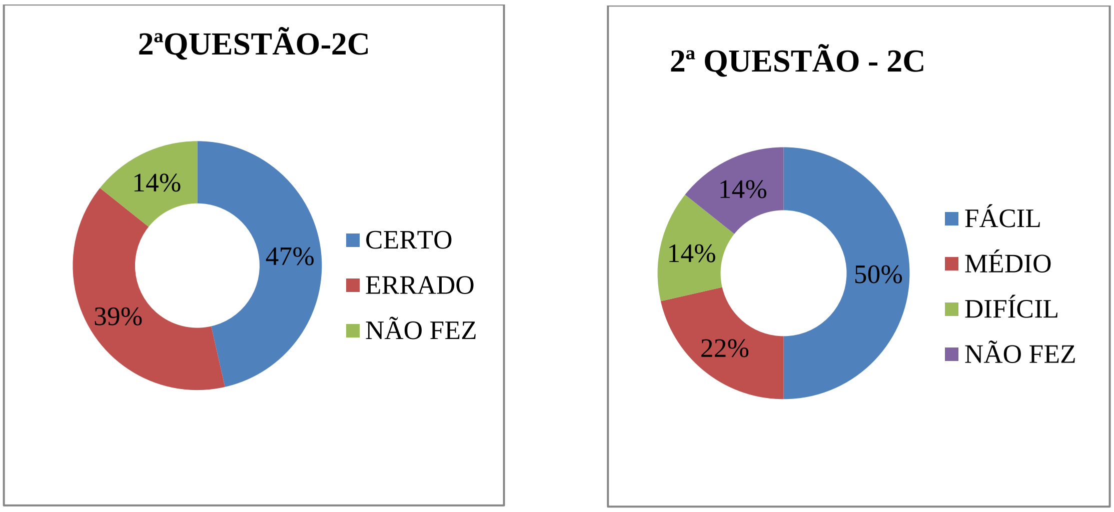


FIGURA 56 – GRÁFICOS DA QUESTÃO 2C

3.3.2D) De quantas maneiras distintas podemos escolher três desses funcionários?

Solução: Para escolhermos a primeira pessoa temos 6 possibilidades, a segunda 5 possibilidades e a terceira 4 possibilidades. Pelo Princípio Multiplicativo, temos 6 x 5 x 4 = 120 possibilidades. Porém, a configuração Sara, Iná e Ester é a mesma que Iná, Ester e Sara, ou seja, cada trio se repete 6 vezes. Logo devemos dividir o resultado anterior por 3!. Assim

$$\frac{6 \text{ x } 5 \text{ x } 4}{3!} = \frac{120}{3.2.1} = \frac{120}{6} = 20\,.$$

ou, equivalentemente,

$$C_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!3!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!3!} = \frac{120}{6} = 20.$$

Alguns alunos erraram essa questão, por considerarem que a ordem das pessoas era relevante. Porém, 47% da turma acertou essa questão.

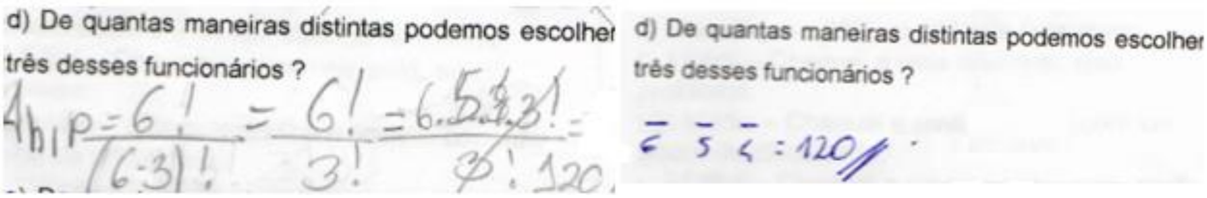


FIGURA 57 – SOLUÇÃO DOS ALUNOS DA QUESTÃO 2D

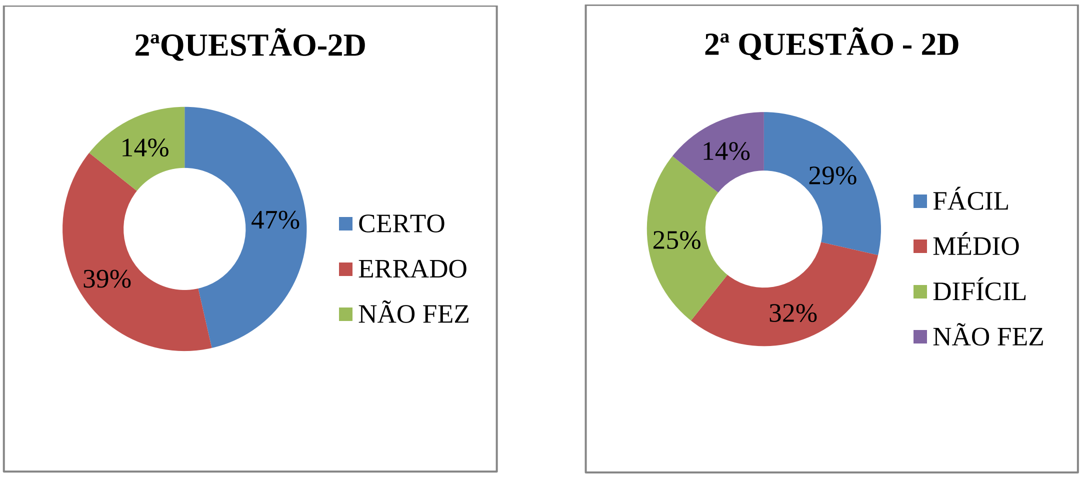
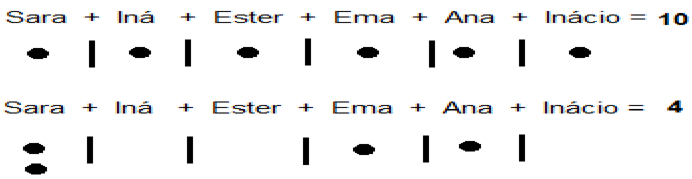


FIGURA 58 – GRÁFICOS DA QUESTÃO 2D

3.3.2E) De quantas maneiras distintas podemos distribuir 10 bombons serenata de amor entre eles, de modo que cada um receba no mínimo um bombom?

Solução: Como os bombons são indistinguíveis e as crianças são distinguíveis, estamos no contexto de Combinação Completa. Como cada pessoa deve ficar com pelo menos um bombom, devemos dar um bombom para cada pessoa, sobrando 4 bombons para serem distribuídos entre as seis pessoas.



Assim o problema se reduz a calcular o número de padrões construídos com 4 bolas e 5 barras, ou seja, temos uma permutação com repetição de 4 bolas e 5 barras.

$$P_9^{4,5} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{9 \text{ x } 8 \text{ x } 7 \text{ x } 6 \text{ x } 5!}{4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1 \text{ x } 5!} = \mathbf{126}.$$

Alguns alunos não perceberam que se tratava de uma combinação completa e resolveram por combinação simples; outros raciocinaram corretamente mas erraram na conclusão.

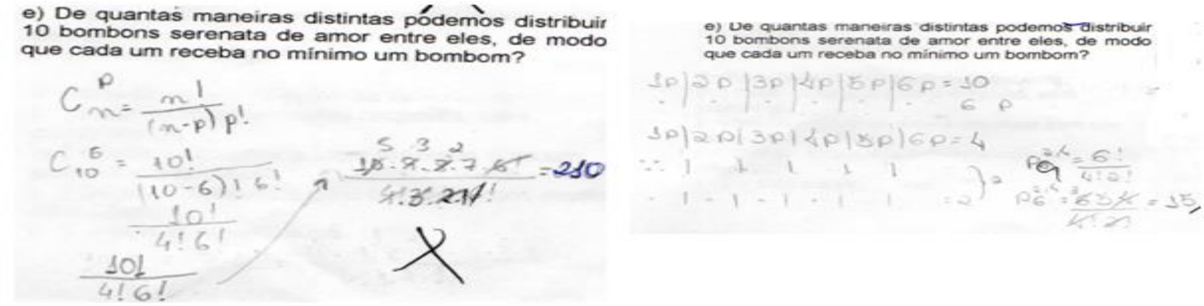


FIGURA 59 – ERROS NA QUESTÃO 2E

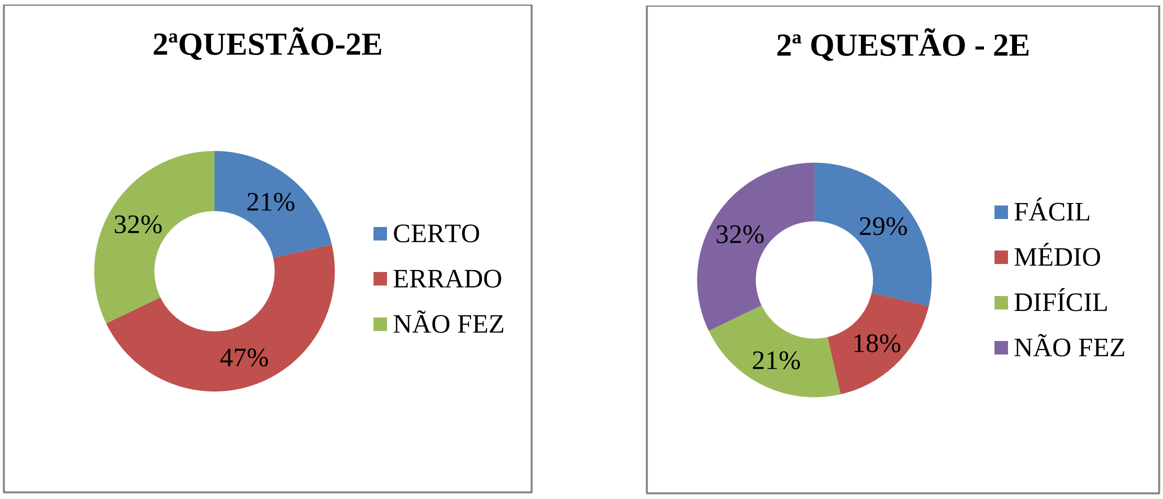


FIGURA 60 – GRÁFICOS DA QUESTÃO 2E

3.3.3) (OBMEP/2006) Três casais de namorados vão sentar-se em um banco de uma praça. Em quantas ordens diferentes os seis podem sentar-se de modo que cada namorado fique ao lado de sua namorada?

FIGURA 61 – FIGURA DA 3ª QUESTÃO

Solução: Para resolvermos esse exercício, basta aplicar o Princípio Multiplicativo: 3 casais, 6 pessoas e os casais juntos.

— — — — — —

6 x 1 x 4 x 1 x 2 x 1 = 48. Logo, existem 48 formas diferentes de que as seis pessoas possam se sentar não se separando de seu casal.

Este foi o exercício com o menor percentual de acerto. Boa parte da turma permutou os casais, esquecendo de permutá-los entre si.

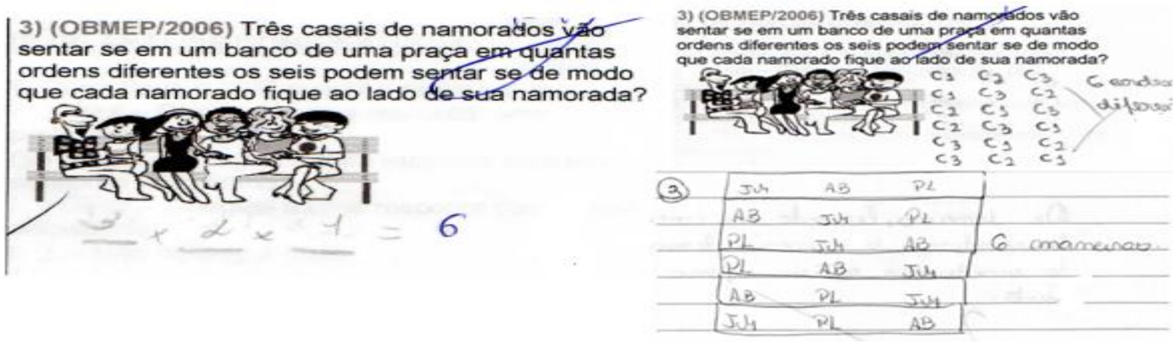


FIGURA 62 – ERROS DA 3ª QUESTÃO

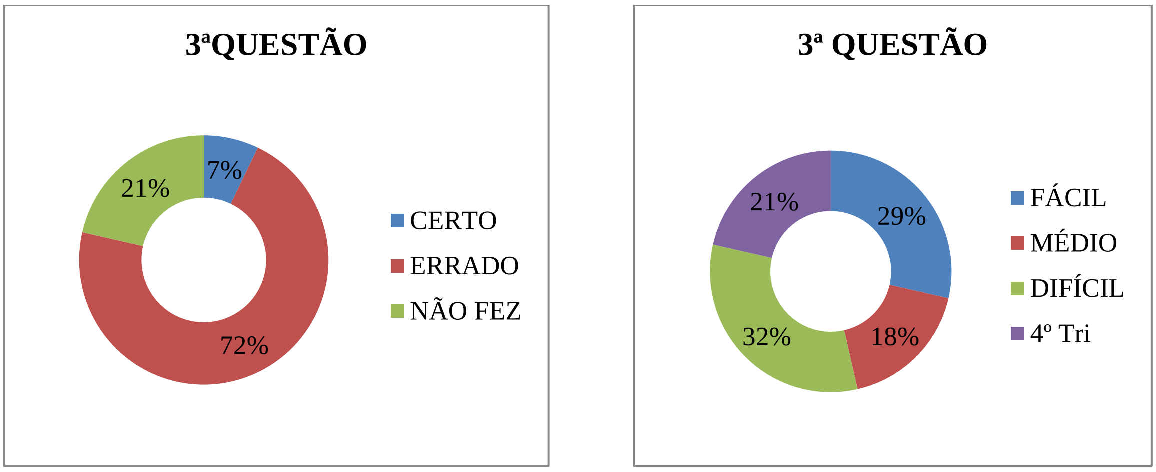


FIGURA 63 – GRÁFICOS DA 3ª QUESTÃO

3.3.4) Uma urna tem três bolas brancas , três bolas pretas e três bolas vermelhas. Todas as bolas são retiradas da urna uma a uma, sem reposição. Determine o numero de sequências de cores que podem ser obtidas ao retirarmos todas as bolas da urna?

Solução: Temos um problema de Permutação com Repetições. Vamos permutar 3 + 3 + 3 = 9 elementos com repetição de 3 bolas brancas, 3 bolas pretas e 3 bolas vermelhas. Assim, o números de sequências que podem ser formadas é

$$P_9^{3,3,3} = \frac{9!}{3!3!3!} = \frac{9 \text{ x } 8 \text{ x } 7 \text{ x } 6 \text{ x } 5 \text{ x } 4 \text{ x } 3!}{3! \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1} = 1.680.$$

Alguns alunos não perceberam que se tratava de uma permutação com repetição e o trataram como permutação simples; outros pensaram corretamente, porém concluíram de forma errada. Apenas 29% da turma conseguiu acertar essa questão.

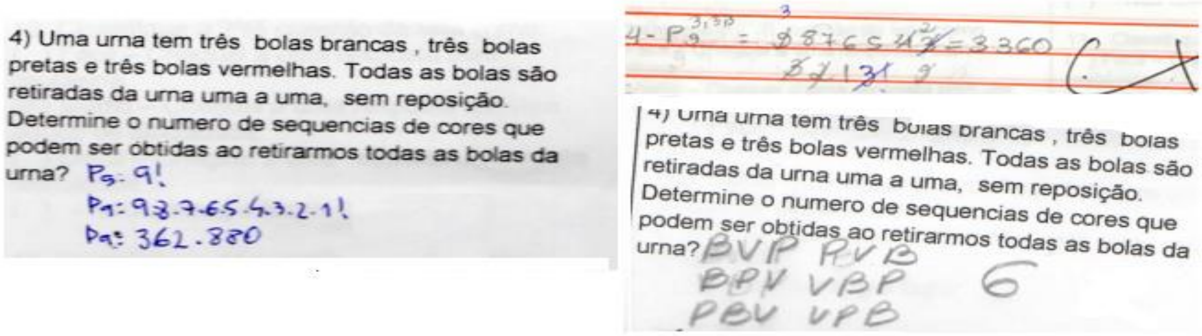


FIGURA 64 – ERROS DA 4ª QUESTÃO

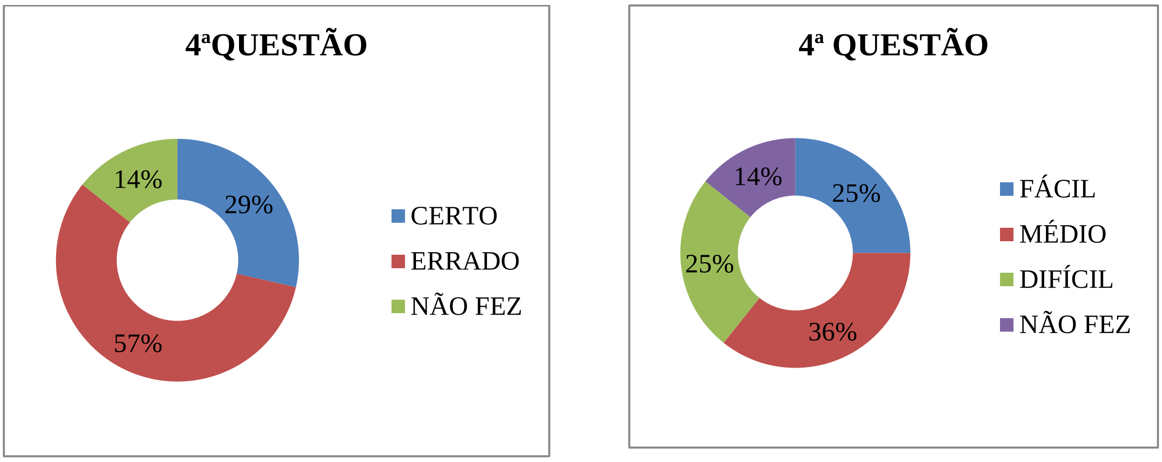


FIGURA 65- GRÁFICOS DA 4ª QUESTÃO

3.3.5) (OBMEP/2013/ADAPTADA) Heloísa tem um cubo com faces pintadas de cores diferentes.

3.3.5A) De quantas maneiras distintas ela pode numerar o cubo com os números de um a seis?

Solução: Se um cubo tem as 6 faces pintadas de cores distinguíveis, como já discutido anteriormente neste trabalho, o problema se reduz a um problema de permutação dos 6 números, pois temos 6 números para alocarmos na primeira cor, 5 números para a segunda cor, 4 para a terceira, e assim por diante, até a última cor com uma única opção. Assim, temos um total de $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720$ configurações.

Alguns alunos resolveram o problema por meio de uma permutação circular; outros usaram a permutação simples, porém erraram no cálculo aritmético. Neste problema, 50% da turma conseguiu acertar a questão e 5 alunos a deixaram em branco.

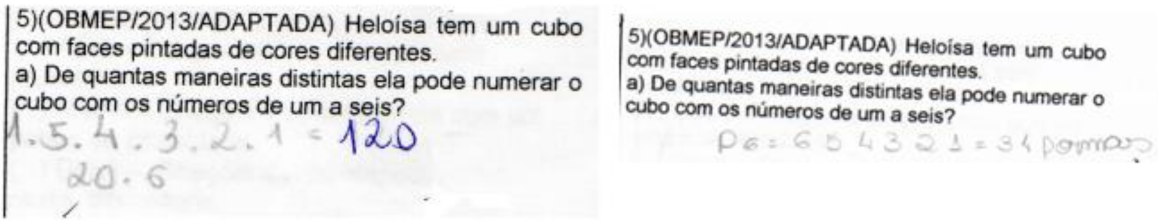


FIGURA 66 – ERROS DA QUESTÃO 5A

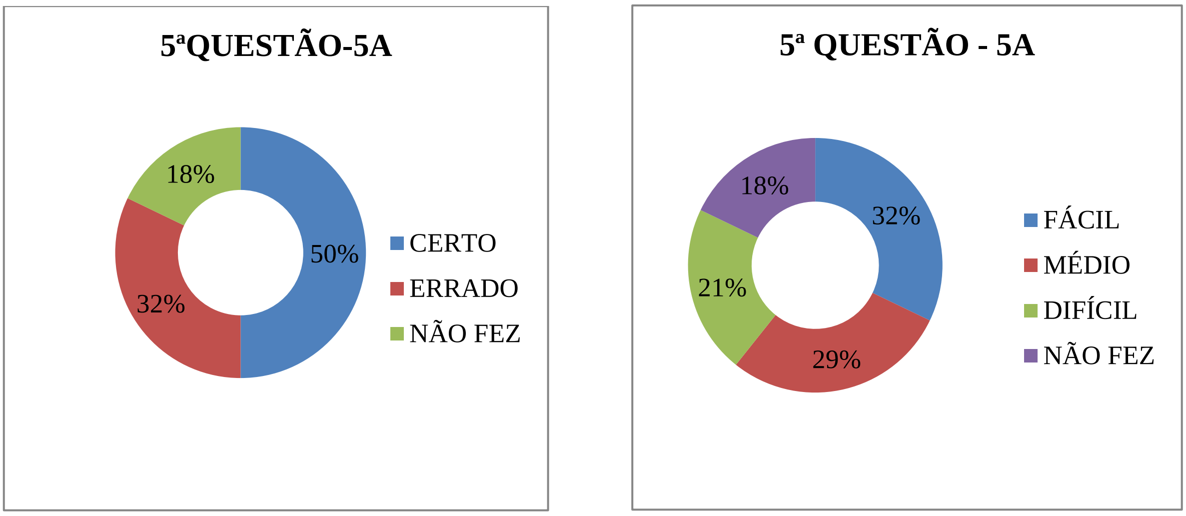


FIGURA 67 – GRÁFICOS DA QUESTÃO 5A

3.3.5B) De quantas maneira ela pode preencher o cubo com os números de um a seis, de modo que a soma das faces opostas seja sempre sete?

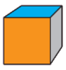


FIGURA 68 - CUBO

Solução: Como a soma das faces opostas devem somar 7, devemos escolher os seguintes pares de números 1 e 6, 2 e 5, e 3 e 4. Para escrever o número 1, Heloísa pode escolher uma dentre seis faces e o número 6 deve ser escrito na face oposta à escolhida, tendo apenas uma possibilidade. Para escrever o número 2, ela pode escolher uma entre as quatro faces restantes e o número 5 deve ser escrito na face oposta. Finalmente, restam duas faces para escrever o número 3, e o 4 deve ser escrito na face oposta. Assim, Heloísa pode escrever os números no cubo de $6 \times 1 \times 4 \times 1 \times 2 \times 1 = 48$ maneiras diferentes.

Alguns alunos resolveram o problema, achando que se tratava de uma combinação simples, como se reduzisse a escolher três pares em seis. Uns usaram arranjo e outros raciocinaram certo, mas esqueceram que cada par pode ser colocado em 2 posições diferentes.

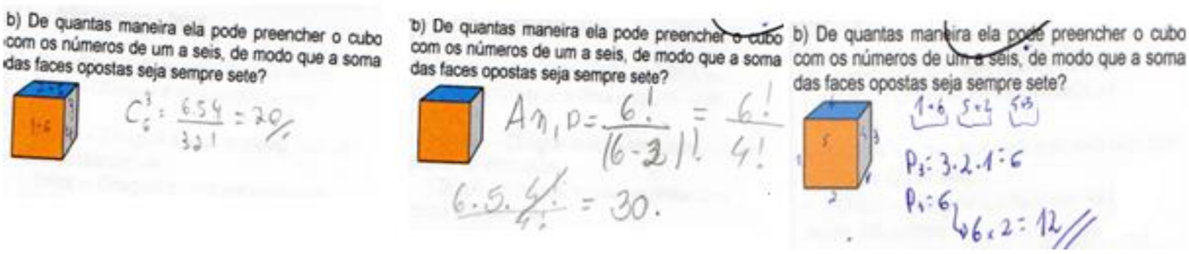


FIGURA 69 – ERROS DA QUESTÃO 5B

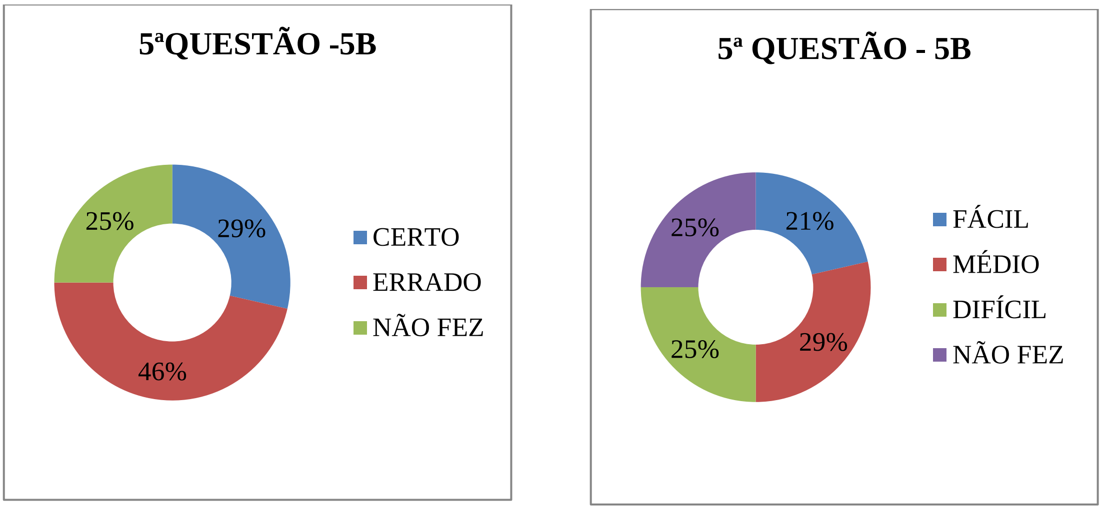


FIGURA 70 – GRÁFICOS DA QUESTÃO 5B

3.3.6) (OBMEP/2012) Podemos montar paisagens colocando lado a lado, em qualquer ordem, os cinco quadros da figura. Trocando a ordem dos quadros uma vez por dia, por quanto tempo, aproximadamente, é possível evitar que uma mesma paisagem se repita?

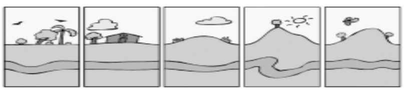


FIGURA 71 – FIGURA DA 6ª QUESTÃO

Solução: Temos cinco posições distintas para colocarmos quadros também distintos. Na primeira posição temos 5 escolhas distintas possíveis. Na segunda, temos 4 escolhas possíveis, e assim por diante. Pelo Princípio Multiplicativo, podemos formar $5\times4\times3\times2\times1 = 120$ paisagens distintas. Como um mês tem, aproximadamente 30 dias, podemos mudar a paisagem por aproximadamente $120 / 30 = 4$ meses.

Trata-se de um problema de Permutação Simples, que 61% da turma conseguiu acertar. Esse foi o segundo problema com a maior quantidade de acertos. A grande maioria que errou pensou corretamente, porém errou quando não considerou que o mês tem 30 dias.

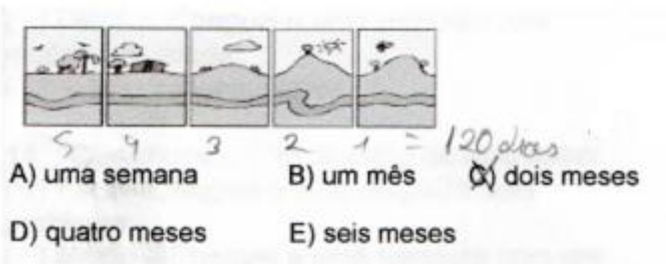
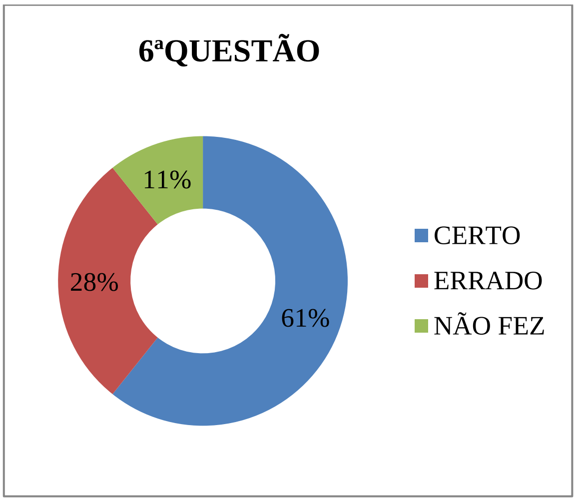


FIGURA 72 – ERRO DA 6ª QUESTÃO



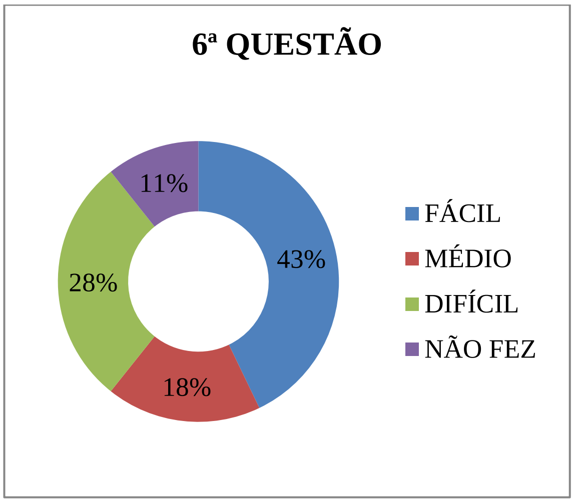


FIGURA 73 – GRÁFICO DE ACERTOS E ERROS DA 6ª QUESTÃO

Analise geral dos acertos e erros dos alunos na atividade da OBMEP

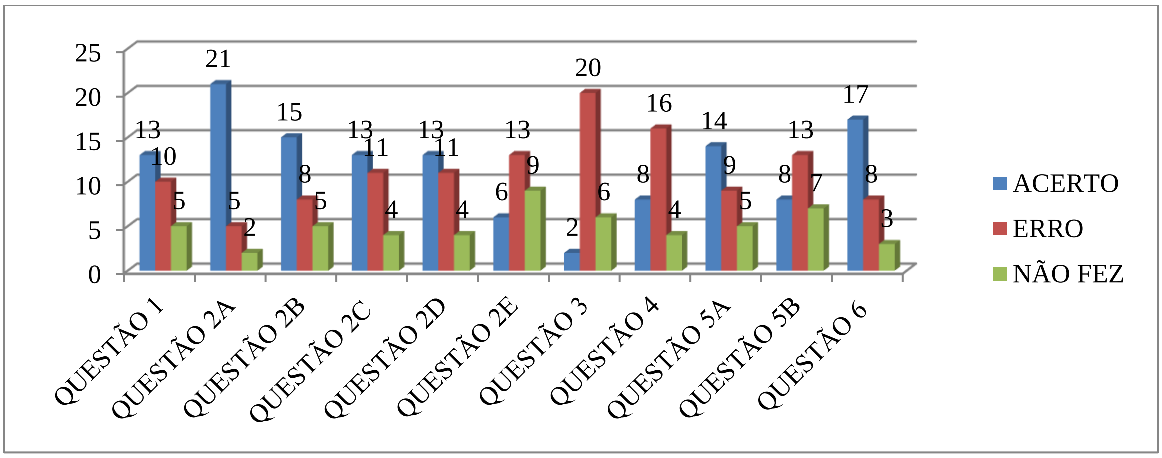


FIGURA 74 – GRÁFICO DOS ACERTO E ERROS DOS PROBLEMAS DA OBMEP

O gráfico abaixo revela a opinião dos alunos sobre cada questão de acordo com o grau de dificuldade (fácil, média, difícil ou não fizeram a questão).

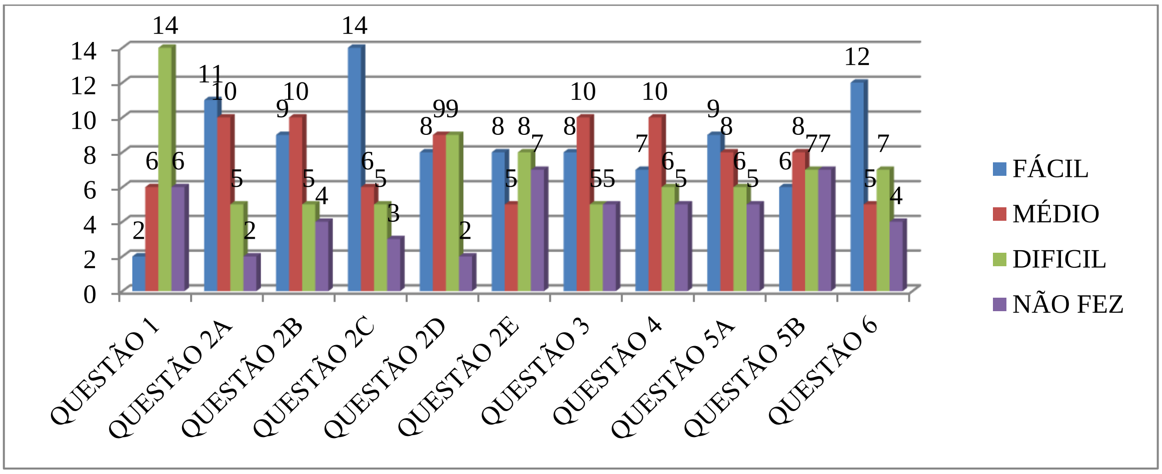


FIGURA 75 – GRÁFICO DA OPINIÃO DOS ALUNOS SOBRE O PÓS-TESTE

Na resolução de problemas da OBMEP foram 11 exercícios, realizados por 28 alunos, totalizando 308 resultados

PROBLEMAS DA OBMEP				
	FÁCIL	MÉDIO	DIFÍCIL	TOTAL
ACERTO	63	39	25	127
ERRO	31	52	50	133
NÃO FEZ	--	--	--	48
TOTAL				308

FIGURA 76 – TABELA DE ACERTOS E ERROS DOS PROBLEMAS DA OBMEP

Conduzimos aqui também o teste não paramétrico de Qui-Quadrado para os resultados da tabela de contingência dos resultados da tabela anterior, a fim de diagnosticar se há independência entre a avaliação dos alunos das questões (fácil, médio e difícil) e a performance deles nas questões (acerto e erro). Ao nível de significância de 5%, passamos agora a rejeitar a hipótese de independência dessas categorias, pois o valor da estatística do teste foi $\chi_0^2 = 20{,}9568$ com 2 graus de liberdade e o *p*-valor é praticamente nulo, ou seja, menor do que o nível de significância estipulado. Assim, estatisticamente, esta etapa nos indica que a opinião dos alunos sobre as questões teve influência sobre os seus erros e acertos, o que poderia nos levar a acreditar que o nível de conscientização quanto à dificuldade dos problemas condiciona a performance dos alunos.

3.4 - Estudo de Casos sobre as atividades de Probabilidade

3.4. 1) Numa gaveta temos 3 pares iguais de meias brancas, 2 pares de meias azuis e 1 par de meia xadrez.

3.4.1.A) De quantas maneiras podemos escolher um par de meias quaisquer?

Solução: Na gaveta temos meias brancas, azuis e xadrez e temos que escolher um par, esse é um caso de combinação completa ou seja, uma permutação com repetição. Assim:

b + a + x = 2

| • | •

Ou seja, temos que permutar quatro elementos, sendo duas barras e duas bolas

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4.3.2!}{2.1.2!} = 6.$$

Podemos enumerar as possibilidades que são (b,b), (a,a), (x,x), (b,a), (b,x) e (a,x). Todos os alunos que acertaram essa questão resolveram enumerando as possibilidades.

Alguns alunos resolveram usando Arranjo, outros Combinação, ou por tentativas repetiram opções.

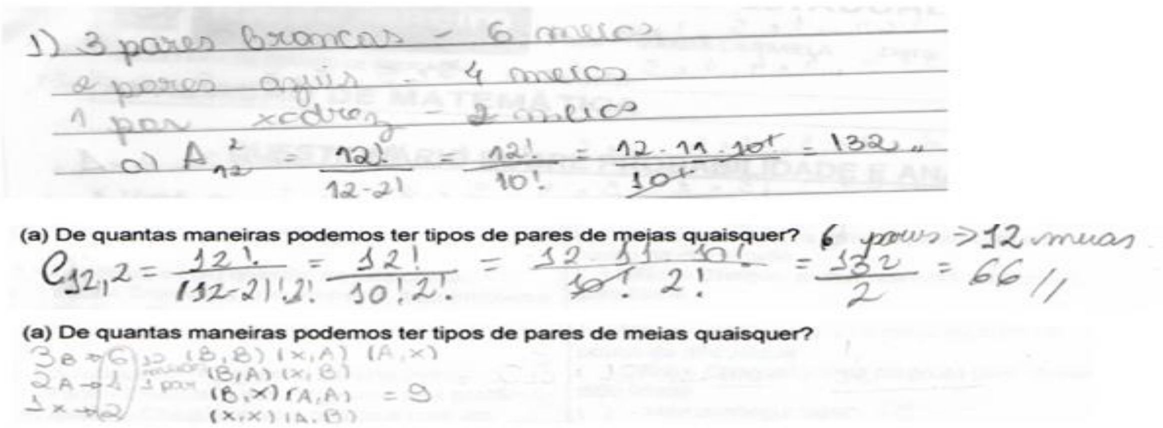
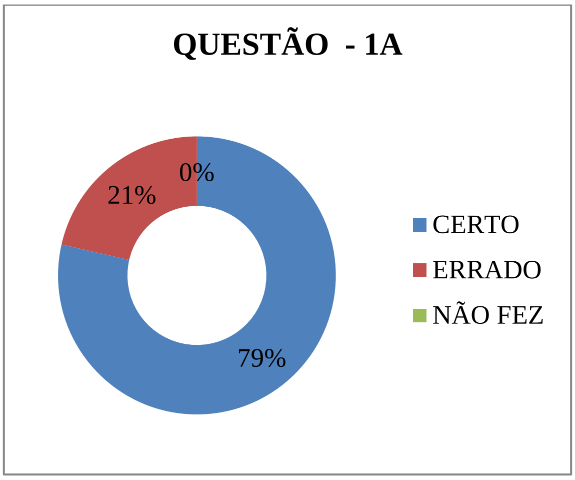


FIGURA 77 – ERROS NA QUESTÃO 1A



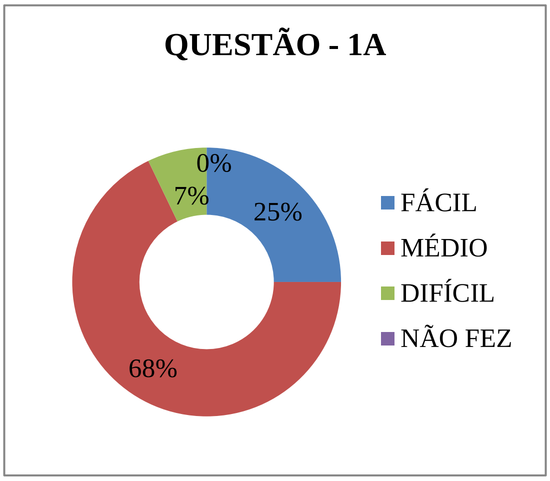


FIGURA 78 – GRÁFICOS DA QUESTÃO 1A

3.4.1.B) Se dois pés de meias são retirados sem reposição da gaveta, qual a probabilidade de serem de cores iguais ?

Solução: Já feita e comentada no corpo da dissertação.

Alunos que erraram a primeira também erraram a segunda. Nessa questão, 5 alunos cometeram erro aritmético básico. Boa parte da turma calculou a probabilidade corretamente, porém não somou os resultados.

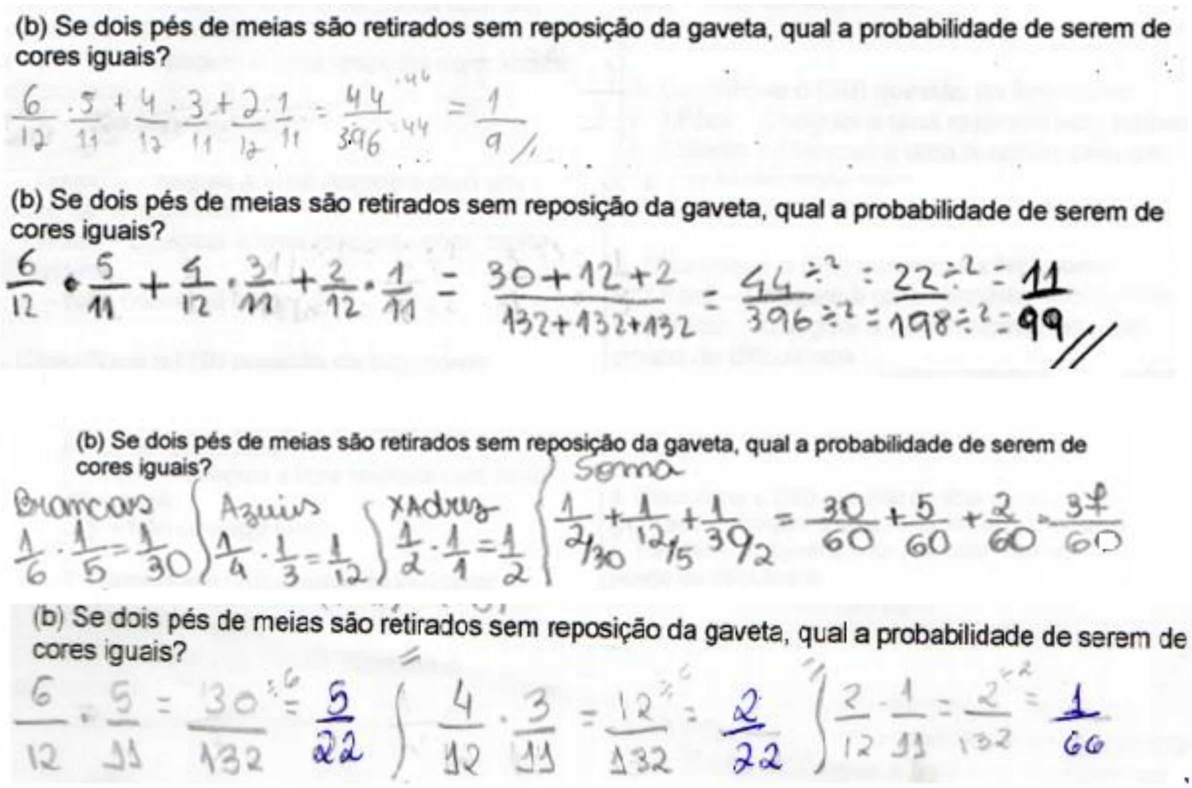


FIGURA 79 – ERROS DA QUESTÃO 1B

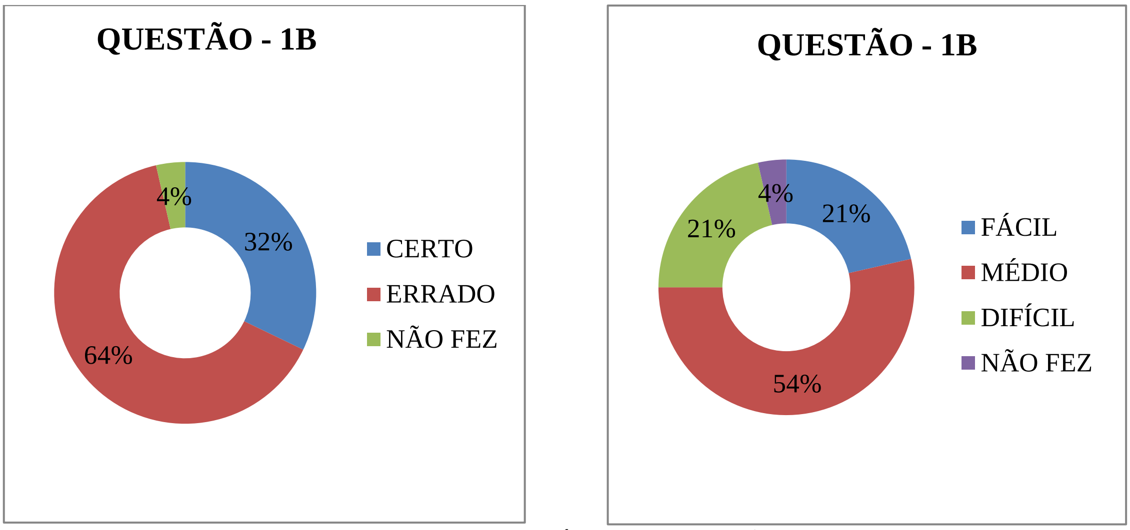


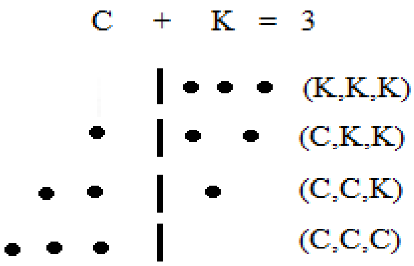
FIGURA 80 – GRÁFICOS DA QUESTÃO 1B

3.4.2) Lançam-se 3 moedas honestas sobre a mesa.

3.4.2.A) Quantos são os resultados possíveis deste lançamento se as três moedas são idênticas de 25 centavos?

Solução: Podemos obter, três caras, três coroas, duas caras e uma coroa e duas coroas e uma cara, isto é, (C,C,C), (K,K,K), (C,C,K),(K,K,C) , temos 4 possibilidades.

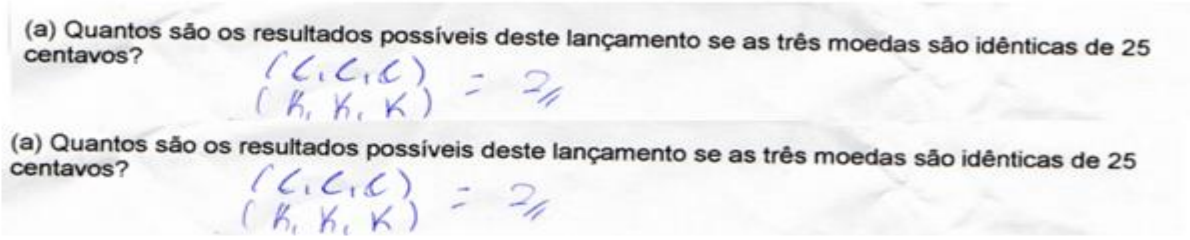
Quando jogamos uma moeda temos duas possibilidades C ou K , jogando três moedas é o mesmo que resolver a equação C + K =3, assim temos um caso de combinação completa ou seja, uma permutação com repetição.



Temos uma caso de permutação com repetição, devemos permutar 4 elementos, sendo 3 bolas e uma barra.

$$P_4^{3,1} = \frac{4!}{3!1!} = \frac{4.3!}{3!.1} = 4 \text{ possibilidades.}$$

Muitos alunos erraram essa questão considerando o espaço amostral da probabilidade de elementos equiprováveis; outros achando que só seriam todos iguais. Nenhum aluno percebeu que se trata de uma Combinação com Repetição. Como a quantidade é pequena foi possível enumerar todas as possibilidades.



(a) Quantos são os resultados possíveis deste lançamento se as três moedas são idênticas de 25 centavos?

(C, C, C)
(K, K, K) = 2//

(a) Quantos são os resultados possíveis deste lançamento se as três moedas são idênticas de 25 centavos?

(C, C, C)
(K, K, K) = 2//

FIGURA 81 – ERROS NA QUESTÃO 2A

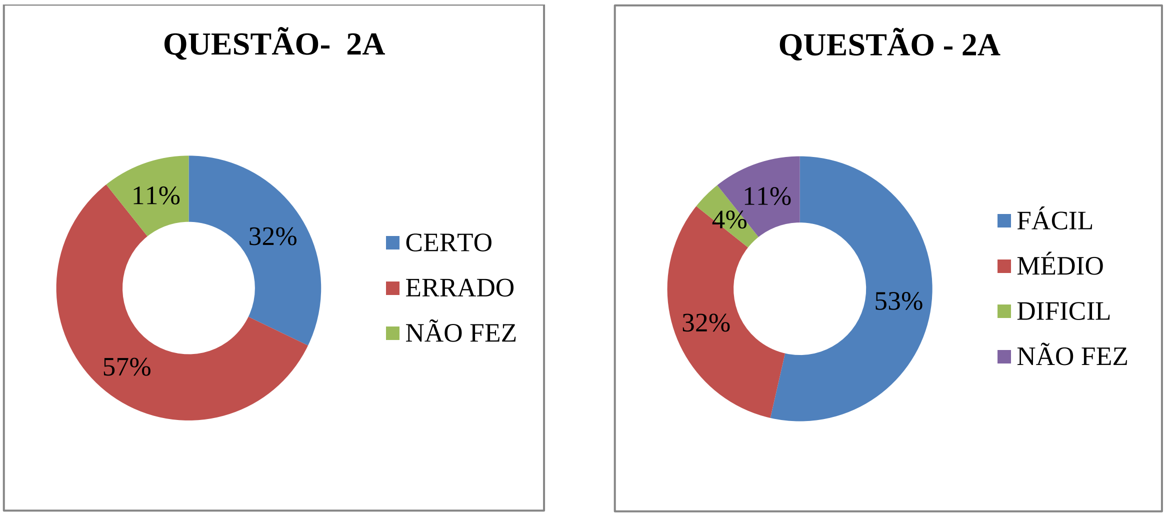


FIGURA 82 – GRÁFICOS DA QUESTÃO 2A

3.4.2.B) E se as três moedas são diferentes de 10, 25 e 50 centavos?

Solução: Quando jogamos três moedas a primeira tem 2 possibilidades (C ou K), a segunda 2 possibilidade e a terceira 2. Assim, pela Proposição 1, Princípio Multiplicativo, temos 2 x 2 x 2 = 8 possibilidades.

Essa foi a segunda questão com a maior quantidade de acertos. Cinco alunos deixaram a questão em branco. Muitos alunos resolveram a questão usando a Proposição 1, referente ao Princípio Multiplicativo; e outros enumeraram as possibilidades. Esses alunos, na hora de enumerar, esqueceram algumas opções.

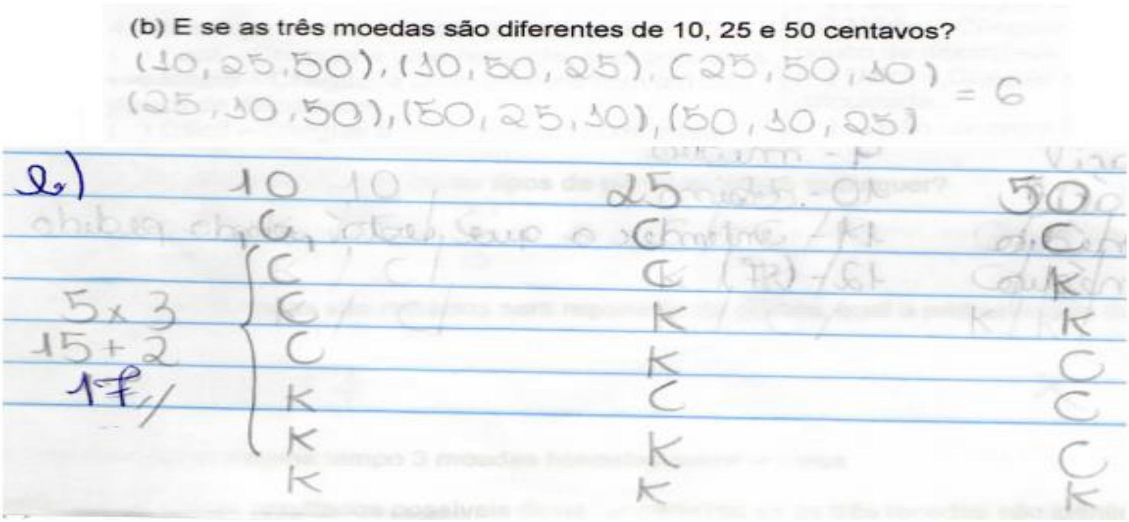
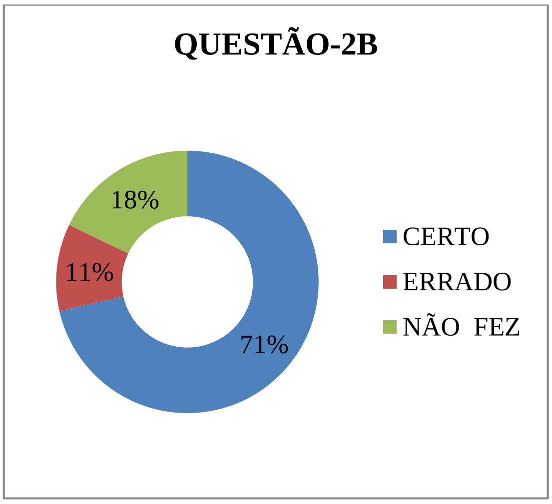


FIGURA 83 – ERROS DA QUESTÃO 2B



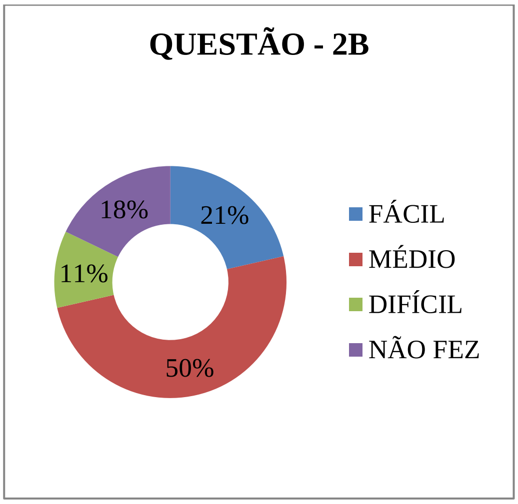


FIGURA 84 – GRÁFICOS DA QUESTÃO 2B

3.4.2.C) Construa o espaço amostral para se obter a probabilidade de sair duas caras no lançamento três moedas idênticas de 25 centavos e calcule seu valor.

Solução: O espaço amostral adequado de elementos equiprováveis é

U = {(C,C,C),(C,C,K),(C,K,C),(C,K,K),(K,K,K),(K,K,C),(K,C,K),(K,C,C)}, sendo $n(U) = 8$.

Seja A o evento de obter duas caras. Assim, A = { (C,C,K),(C,K,C),(K,C,C)}, com $n(A) = 3$, portanto temos, $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{3}{8}$.

Nessa questão, alguns construíram o espaço amostral corretamente, mas não calcularam a probabilidade. Outros construíram o espaço amostral corretamente, mas na hora de calcular a probabilidade consideraram o elemento (C,C,C) como favorável para duas caras.

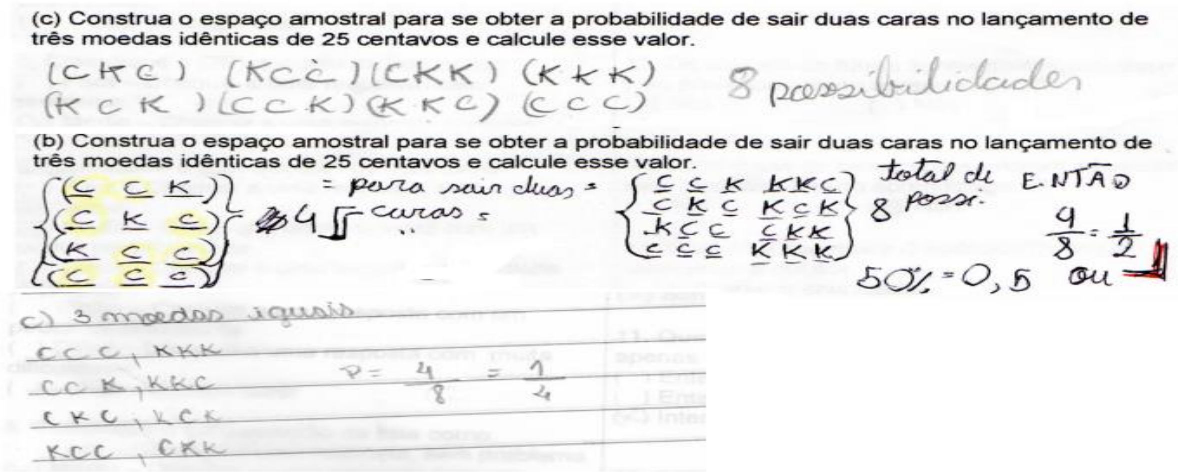


FIGURA 85 – ERROS NA QUESTÃO 2C

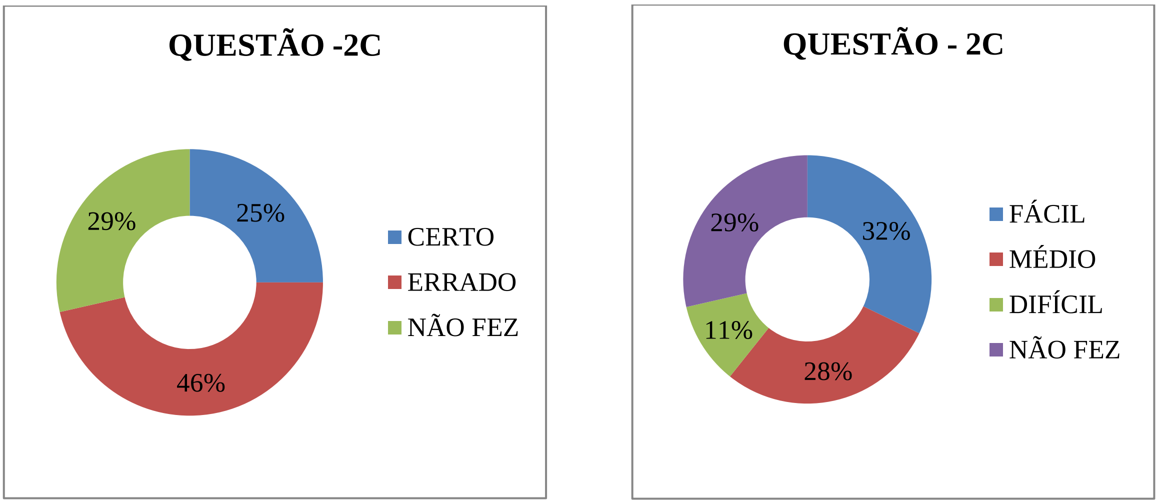


FIGURA 86– GRÁFICOS DA QUESTÃO 2C

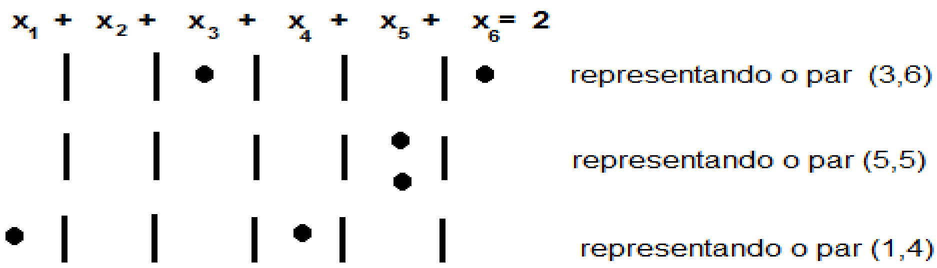
3.4.3) Dois dados são lançados simultaneamente sobre a mesa.

3.4.3.A) De quantas formas temos resultados para este experimento se os dados são idênticos?

Solução: Como a ordem não importa, podemos enumerar-las, assim temos 21 possibilidades, são elas,

$$A = \left\{ \begin{array}{r} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6) \\ (2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ (3,3),(3,4),(3,5),(3,6) \\ (4,4),(4,5),(4,6) \\ (5,5),(5,6) \\ (6,6) \end{array} \right\}$$

Outra solução, suponha que cada face do dado seja representada por $1 = x_1$, $2 = x_2$, $3 = x_3$, $4=x_4$, $5 = x_5$ e $6 = x_6$, como vamos jogar dois dados idênticos, o total de possibilidades é resolver a seguinte equação,



Assim temos uma permutação com repetição de 7 elementos com cinco barras e duas bolas,

$$P_7^{5,2} = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7x6x5!}{5!\,2x1} = 7x3 = 21.$$

Nessa questão muitos alunos usaram como resposta o espaço amostral do experimento, não consideraram a indistinguibilidade entre os pares, ou seja (1, 2) = (2, 1). Uns usaram Arranjo e outros Combinação.

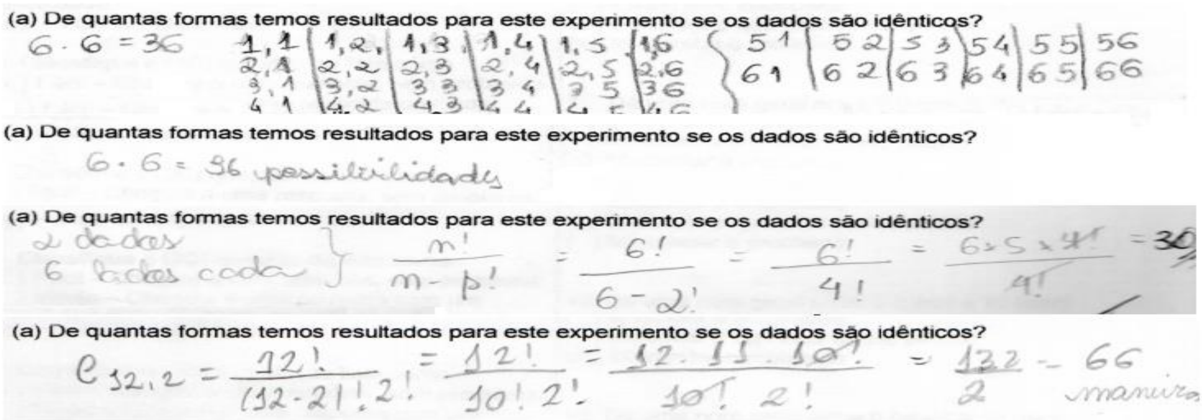


FIGURA 87 – ERROS NA QUESTÃO 3A

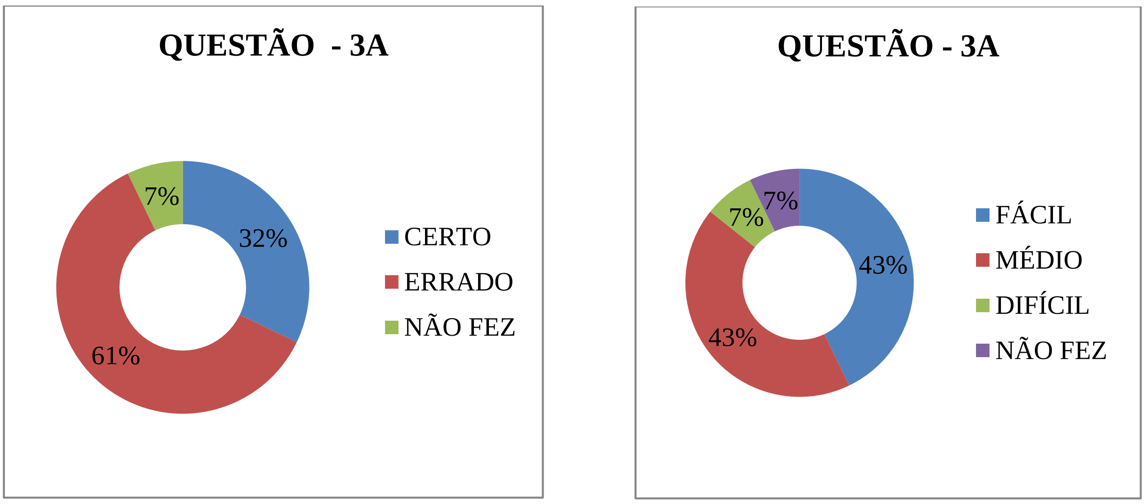


FIGURA 88 – GRÁFICOS DA QUESTÃO 3A

3.4.3.B) E se forem de cores diferentes?

Solução: Nesse caso temos que considerar os pares distinguíveis, por exemplo, o par (1, 2) diferente do par (2, 1). Logo o espaço amostral será $n(U) = 36$ possibilidades.

$$U = \left\{\begin{matrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6) \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6) \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6) \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{matrix}\right\}$$

Muitos alunos acertaram essa questão e apenas cinco alunos a deixaram em branco, Alguns alunos erraram essa questão, pois a questão anterior os induziu ao erro. Outros alunos foram sagazes e usaram a questão anterior para resolver corretamente a questão. Alguns alunos enumeraram as possibilidades e outros utilizaram a Proposição 1 referente ao Princípio Multiplicativo.

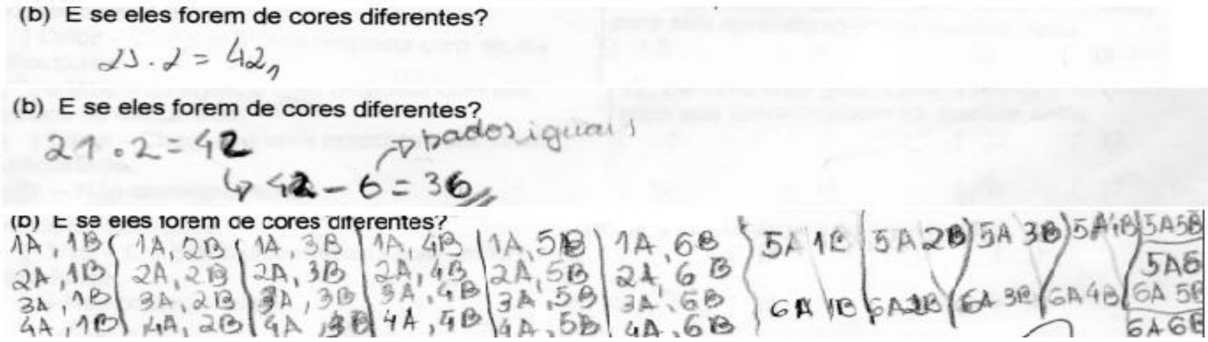


FIGURA 89 – ERRO E ACERTO NA QUESTÃO 3B

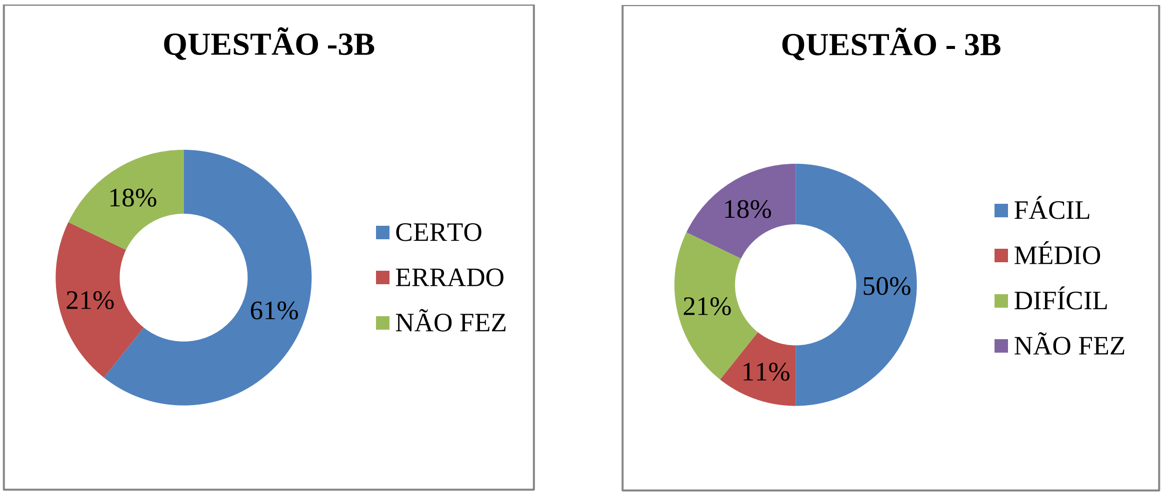


FIGURA 90 – GRÁFICOS DA QUESTÃO 3B

3.4.3.C) Construa o espaço amostral desse experimento para se obter a probabilidade de soma 7 em dois dados e calcule esse valor?

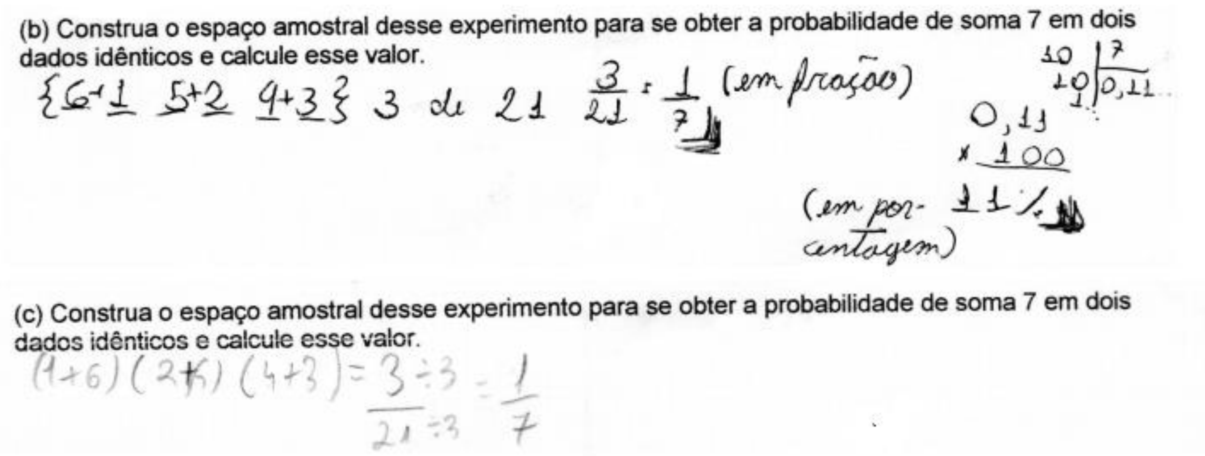
Solução: O espaço amostral é o mesmo da questão anterior, cuja cardinalidade é n(U) = 36, pois, em probabilidade, mesmo que os dados sejam iguais devemos considerá-los como distinguíveis, se desejarmos um espaço amostral de elementos equiprováveis.

Seja A o evento obter soma dos pontos igual a 7. Assim, temos

$A = \{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\}$, com $n(A) = 6$. Portanto, temos

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Pelo fato do enunciado caracterizar os dois dados como idênticos e como o item 1A requeria os resultados para esse experimento com os dados idênticos, os alunos foram levados ao erro, esquecendo que, para o cálculo da probabilidade, devem considerar os dados como distinguíveis.


(b) Construa o espaço amostral desse experimento para se obter a probabilidade de soma 7 em dois dados idênticos e calcule esse valor.

$\{6+1 \;\; 5+2 \;\; 4+3\}$ 3 de 21 $\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$ (em fração)

$10 \div 7$; $0,11$; $0,11 \times 100$

(em porcentagem) 11%

(c) Construa o espaço amostral desse experimento para se obter a probabilidade de soma 7 em dois dados idênticos e calcule esse valor.

$(1+6)(2+5)(4+3) = \frac{3 \div 3}{21 \div 3} = \frac{1}{7}$

FIGURA 91 – ERROS DA QUESTÃO 3C

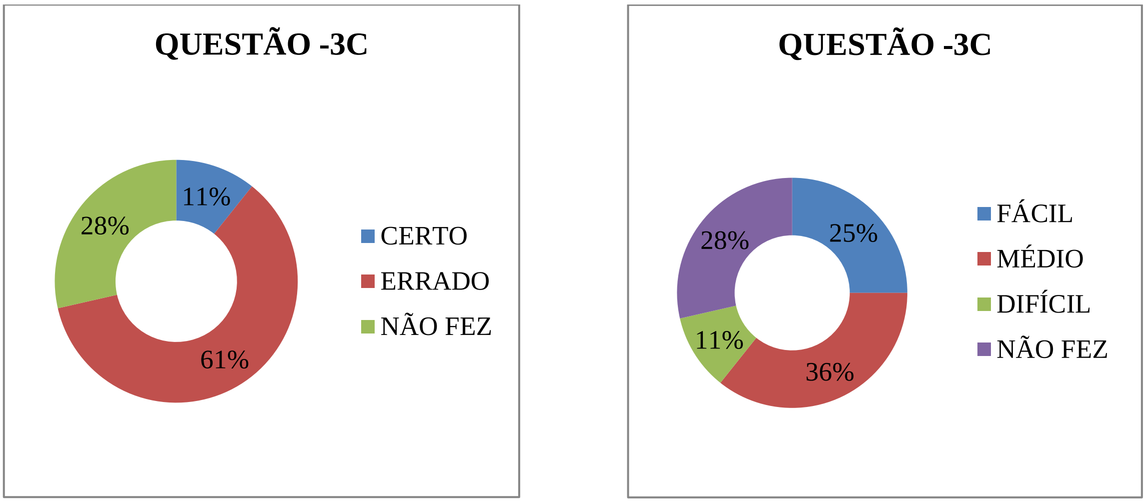


FIGURA 92 – GRÁFICOS DA QUESTÃO 3C

Analise geral dos acertos e erros dos alunos nos problemas sobre probabilidade.

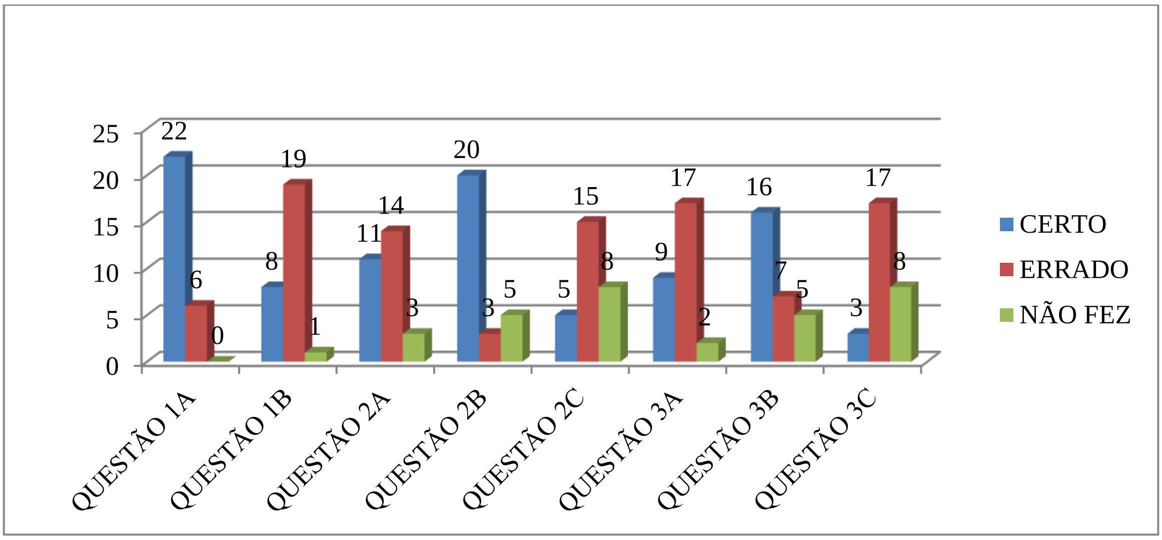


FIGURA 93 – TABELA DE ACERTOS E ERROS DAS QUESTÕES DE PROBABILIDADE

O gráfico abaixo mostra a opinião dos alunos sobre cada questão de acordo com o grau de dificuldade (fácil, média, difícil ou não fizeram).

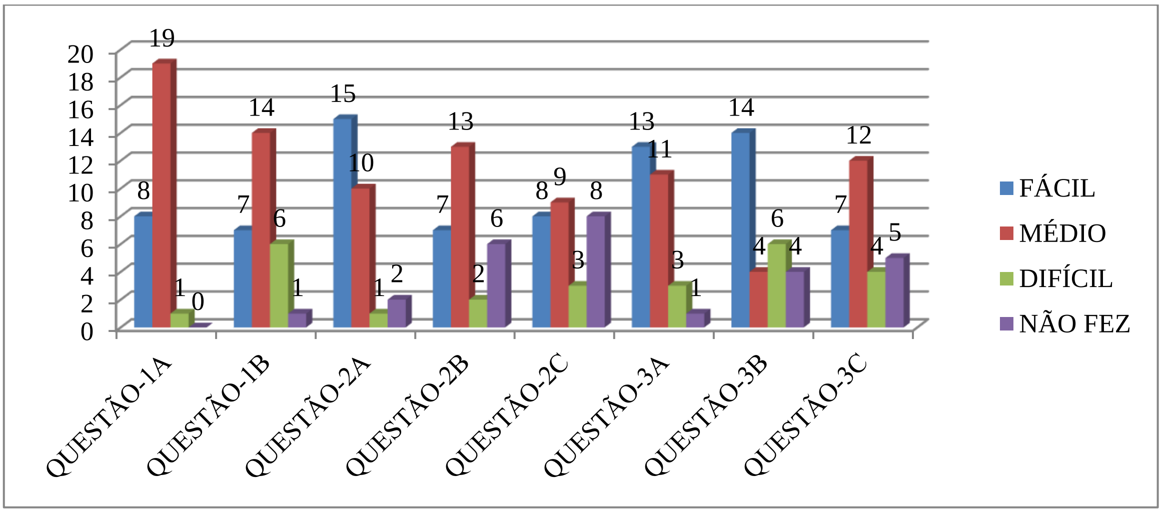


FIGURA 94 - GRÁFICO DA AVALIAÇÃO DOS ALUNOS NOS PROBLEMAS DE PROBABILIDADE

Os 8 problemas de probabilidade foram realizados por 28 alunos, totalizando 308 resultados.

PROBLEMAS DE PROBABILIDADE				
	FÁCIL	**MÉDIO**	**DIFÍCIL**	**TOTAL**
ACERTO	38	46	10	94
ERRO	38	44	15	97
NÃO FEZ	--	--	--	33
TOTAL				224

FIGURA 95– TABELA DOS PROBLEMAS DE PROBABILIDADE

Conduzindo, para os dados tabelados acima, o teste não paramétrico de Qui-Quadrado, a fim de diagnosticar se há independência entre a avaliação dos alunos das questões (fácil, médio e difícil) e a performance deles nas questões (acerto e erro), obtivemos a estatística do teste $\chi_0^2 = 0{,}9972$ com 2 graus de liberdade e o *p*-valor 0,6073, ou seja, maior do que o nível de significância de 5%. Assim, estatisticamente, para este grupo, o teste indica uma independência entre a opinião dos alunos sobre as questões e os seus erros e acertos.

Vemos a partir do estudo que no contexto de Probabilidade os desafios pedagógicos são ainda maiores para o aluno e o professor, pois aliado às dificuldades cognitivas de entendimento da matematização do acaso, junta-se a relativização do conceito de distinguibilidade/indistinguibilidade na construção de espaços amostrais convenientes.

Capítulo 4

Conclusão e Considerações Finais

Este trabalho teve como intenção inicial problematizar os conceitos de distinguibilidade e indistinguibilidade em Análise Combinatória e Probabilidade para um reconhecimento tanto do professor quanto do aluno dos obstáculos epistemológicos ao ensino e aprendizagem dessas duas searas da Matemática, consideradas por muitos como as mais delicadas do Ensino Básico.

Para sanar essas lacunas, faz-se necessário estimular o raciocínio, a criatividade e a descoberta dos alunos para torná-los mais autônomos e confiantes na busca de heurísticas para solução de problemas. A aplicação de problemas, como um pré-teste, se mostrou em nosso estudo de caso como uma forma de elicitar o assunto e auxiliar o resgate do pensar matemático, indo além de conceitos e fórmulas. Tais problemas, contendo o mesmo enunciado com proposições variadas, buscam levar os alunos, mesmo não tendo nenhum conhecimento combinatório, a resolvê-los.

O resultado é surpreendente, pois variando a distinguibilidade e indistinguibilidade de alguns atributos - ordem, cor, numeração e outros -, o problema muda a sua estrutura e oferece desafios diferentes para a solução, como feito no pré-teste aplicado ao problema das bandeiras, no qual os alunos, mesmo sem conhecimento prévio, trabalharam com os tópicos preestabelecidos - princípio multiplicativo, arranjo, permutação, combinação simples e completa - sem o uso de fórmulas, apenas enumerando os elementos. Posteriormente a essa ação, foi explicado a eles cada tópico do ensino da Análise Combinatória, trabalhando-os, inicialmente, sem a preocupação com o uso das fórmulas e, mais tarde, empregando-as.

A aplicação desse pré-teste foi de fundamental importância para o desenvolvimento da Análise Combinatória e da Probabilidade em sala de aula. Na Análise Combinatória, ao apresentar, por exemplo, o princípio multiplicativo, os alunos espontaneamente o associaram aos problemas das bandeiras. Já na introdução do conceito da Probabilidade, mostrando aos alunos a importância da distinguibilidade, enfatizou-se que, mesmo os elementos sendo indistinguíveis, deve-se considerá-los diferentes para uma boa construção do modelo de probabilidade.

Ao término do conteúdo, foi aplicado um pós-teste, a fim de se analisar o desempenho dos alunos, que de modo geral mostrou-se satisfatório.

Através da aplicação de problemas que fazem contrapontos entre a Análise Combinatória e a Probabilidade, espera-se que os alunos percebam a importância e a delicadeza desses conceitos na solução dos problemas, potencializando assim o ensino-aprendizagem desses dois temas relevantes para um mundo imerso em incerteza como o nosso.

Espera-se que a dissertação possa contribuir aos professores e alunos para um melhor tratamento dessas duas áreas da Matemática e que as questões postas aqui possam gerar outras desdobramentos de pesquisa futura na Educação Matemática.

Capítulo 5

ANEXO 1 – Pré-Teste de Análise Combinatória – 1ª Etapa

PRÉ-TESTE DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Nome:____ turma: ____ data: __/08/17

Descreva e calcule o número de formas de se alocar 3 bandeiras em 2 mastros em cada caso descrito abaixo

1º CASO

- As 3 bandeiras são nas cores vermelha, preta e branca, ou seja, são diferentes.
- Os 2 mastros têm cores diferentes, ou seja, são diferentes.
- A ordem das bandeiras nos mastros não importa.
- Mastros podem ficar vazios.

M_1	M_2

2º CASO

- As 3 bandeiras são nas cores vermelha, preta e branca, ou seja, são diferentes
- Os 2 mastros têm cores diferentes, ou seja, são diferentes
- A ordem das bandeiras nos mastros não importa
- Os mastros **não** podem ficar vazios

M_1	M_2

3º CASO

- As 3 bandeiras são nas cores vermelha, preta e branca, ou seja, são diferentes
- Os 2 mastros têm a mesma cor, isto é, são iguais
- A ordem das bandeiras nos mastros não importa
- Mastros podem ficar vazios

M_1	M_2

4º CASO

- As 3 bandeiras são nas cores vermelha, preta e branca, ou seja, são diferentes
- Os 2 mastros têm a mesma cor, ou seja, são iguais
- A ordem das bandeiras nos mastros não importa
- Os mastros **não** podem ficar vazios

M_1	M_2

5º CASO

- As 3 bandeiras têm a mesma cor, isto é, são iguais
- Os 2 mastros têm cores diferentes, isto é, são diferentes
- A ordem das bandeiras nos mastros não importa
- Mastros podem ficar vazios

M_1	M_2

6º CASO

- As 3 bandeiras têm a mesma cor, isto é, são iguais
- Os 2 mastros têm cores diferentes, isto é, são diferentes
- A ordem das bandeiras nos mastros não importa
- Os mastros **não** podem ficar vazios

M_1	M_2

7º CASO

- As 3 bandeiras têm a mesma cor, isto é, são iguais
- Os 2 mastros têm a mesma cor, ou seja, são iguais
- A ordem das bandeiras nos mastros não importa
- Mastros podem ficar vazios

M_1	M_2

8º CASO

- As 3 bandeiras têm a mesma cor, isto é, são iguais
- Os 2 mastros têm a mesma cor, ou seja, são iguais
- A ordem das bandeiras nos mastros não importa
- Os mastros não podem ficar vazios

M_1	M_2

ANEXO 2 – Questionário sobre o Pré-Teste de Análise Combinatória

GOVERNO DO **Rio de Janeiro**

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

COLÉGIO ESTADUAL DUQUE DE CAXIAS

PROF ª: VÂNIA CARMELA Data: ____/____/____ Turma:________

ALUNO:____ nº______

QUESTIONÁRIO SOBRE O PRÉ-TESTE DE ANÁLISE COMBINATORIA

1. Você considera esse tipo de exercício importante para saber a utilização da matéria no dia a dia?
( ) Sim ( )Não

2. Você gostou dessa atividade de matemática?
( ) Sim ( ) Não

3. Classifique o 1º caso da lista de atividades:
( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil – Não seria possível chegar a uma resposta sem a intervenção do professor.
( ) – Não conseguiu fazer

4. Classifique o 2° caso da lista de atividades:
( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil – Não seria possível chegar a uma resposta sem a intervenção do professor.
( ) – Não conseguiu fazer

5. Classifique o 3° caso da lista de atividades:
( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil – Não seria possível chegar a uma resposta sem a intervenção do professor.
( ) – Não conseguiu fazer

6. Classifique o 4° caso da lista de atividades:
( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil – Não seria possível chegar a uma resposta sem a intervenção do professor.
( ) – Não conseguiu fazer

7. Classifique o 5° caso da lista de atividades:
( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil – Não seria possível chegar a uma resposta sem a intervenção do professor.
( ) – Não conseguiu fazer

8. Classifique o 6° caso da lista de atividades:
( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil – Não seria possível chegar a uma resposta sem a intervenção do professor.
( ) – Não conseguiu fazer

9. Classifique o 7° caso da lista de atividades:
( ) Fácil – Cheguei a uma resposta sem problema.
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil – Não seria possível chegar a uma resposta sem a intervenção do professor.
( ) – Não conseguiu fazer

10. Classifique o 8° caso da lista de atividades:

( ) Fácil – Cheguei a uma resposta sem problema.

( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.

( ) Difícil – Não seria possível chegar a uma resposta sem a intervenção do professor.

( ) – Não consegui fazer

11. Os colegas de turma apresentaram interesse pelo processo ensino aprendizagem?

( ) Sim ( ) Não

12. O nível de preparo da turma é adequado para os níveis das questões trabalhadas nessa atividade?

( ) Sim ( ) Não

13. Qual foi a sua maior dificuldade?(marque apenas uma opção)

( ) Entender o enunciado

( ) Entender o que está sendo pedido

( ) Entender a diferença entre bandeiras iguais e diferentes

( ) Entender a diferença entre mastros iguais e diferentes

14. Dê uma nota geral entre 0 (zero) e 10 (dez) para sua aprendizagem na matéria dada.

( )1 ( )2 ( )3 ( )4 ( )5

( )6 ( )7 ( )8 ( )9 ( )10

ANEXO 3 – Pré-Teste de Análise Combinatória – 2ª Etapa

Nome:____ turma: ____ data: __/08/17

Descreva e calcule o número de formas de se alocar 3 bandeiras em 2 mastros em cada caso descrito abaixo.

9º CASO

- As 3 bandeiras são nas cores vermelha, preta e branca, ou seja, são diferentes.
- Os 2 mastros têm cores diferentes, ou seja, são diferentes.
- A ordem das bandeiras nos mastros é importante.
- Mastros podem ficar vazios.

M_1	M_2

10º CASO

- As 3 bandeiras são nas cores vermelha, preta e branca, ou seja, são diferentes
- Os 2 mastros têm cores diferentes, ou seja, são diferentes
- A ordem das bandeiras nos mastros é importante
- Os mastros **não** podem ficar vazios

M_1	M_2

11º CASO

- As 3 bandeiras são nas cores vermelha, preta e branca, ou seja, são diferentes
- Os 2 mastros têm a mesma cor, isto é, são iguais
- A ordem das bandeiras nos mastros é importante
- Mastros podem ficar vazios

M_1	M_2

12º CASO

- As 3 bandeiras são nas cores vermelha, preta e branca, ou seja, são diferentes
- Os 2 mastros têm a mesma cor, ou seja, são iguais
- A ordem das bandeiras nos mastros é importante
- Os mastros **não** podem ficar vazios

M_1	M_2

ANEXO 4 – Questionário sobre a 2ª Etapa

Questionário sobre a 2ª Etapa

1.Classifique o 9º caso da lista de atividades:

( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.

( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.

( ) Difícil – Não seria possível chegar a uma resposta sem a intervenção do professor.

( ) Não conseguiu fazer

2.Classifique o 10º caso da lista de atividades:

( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.

( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.

( ) Difícil – Não seria possível chegar a uma resposta sem a intervenção do professor.

( ) Não conseguiu fazer

3. Classifique o 11º caso da lista de atividades:

( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.

( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.

( ) Difícil – Não seria possível chegar a uma resposta sem a intervenção do professor.

( ) Não conseguiu fazer

4.Classifique o 12º caso da lista de atividades:

( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.

( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.

( ) Difícil – Não seria possível chegar a uma resposta sem a intervenção do professor.

( ) Não conseguiu fazer

ANEXO 5 – Pós-Teste de Análise Combinatória

GOVERNO DO **Rio de Janeiro**

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

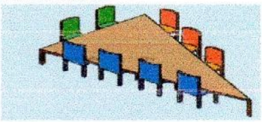
COLÉGIO ESTADUAL DUQUE DE CAXIAS

PROF ª: VÂNIA CARMELA Data: ____/____/_____ Turma:_________

ALUNO:_____________________________________ nº ______

AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA

1) (OBMEP/2012) Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantar em uma mesa triangular, cujos lados têm 2, 3 e 4 lugares, como na figura.
De quantas maneiras esses amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e em um mesmo lado da mesa?



2) (OBMEP/ADAPTADA/2013) Um hospital tem os seguintes funcionários:
Sara Dores da Costa*: reumatologista*
Iná Lemos*: pneumologista*
Ester Elisa*: enfermeira*
Ema Thomas*: traumatologista*
Ana Lisa*: psicanalista*
Inácio Filho*: obstetra*

a) De quantas maneiras os funcionários podem fazer uma fila?

b) De quantas maneiras os funcionários podem se sentar em uma mesa redonda ?, Se todos se mudam para a cadeira dá esquerda, a Mesa continua igual

c) E de quantas maneiras os funcionários podem compor uma comissão formada por presidente, vice-presidente e suplente?

d) De quantas maneiras distintas podemos escolher três desses funcionários ?

e) De quantas maneiras distintas podemos distribuir 10 bombons serenata de amor entre eles, de modo que cada um receba no mínimo um bombom?

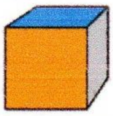
3) (OBMEP/2006) Três casais de namorados vão sentar se em um banco de uma praça em quantas ordens diferentes os seis podem sentar se de modo que cada namorado fique ao lado de sua namorada?

4) Uma urna tem três bolas brancas , três bolas pretas e três bolas vermelhas. Todas as bolas são retiradas da urna uma a uma, sem reposição. Determine o numero de sequencias de cores que podem ser obtidas ao retirarmos todas as bolas da urna?

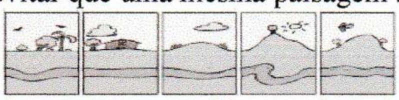
5)(OBMEP/2013/ADAPTADA) Heloísa tem um cubo com faces pintadas de cores diferentes.

a) De quantas maneiras distintas ela pode numerar o cubo com os números de um a seis?

b) De quantas maneira ela pode preencher o cubo com os números de um a seis, de modo que a soma das faces opostas seja sempre sete?



6) (OBMEP/2012) Podemos montar paisagens colocando lado a lado, em qualquer ordem, os cinco quadros da figura. Trocando a ordem dos quadros uma vez por dia, por quanto tempo, aproximadamente, é possível evitar que uma mesma paisagem se repita?



a) uma semana b) um mês c) dois meses
d) quatro meses e) seis meses

ANEXO 6 – Questionário sobre o Pós-Teste de Análise Combinatória

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

COLÉGIO ESTADUAL DUQUE DE CAXIAS

PROF ª: VÂNIA CARMELA Data: ____/____/_____ Turma:______

ALUNO:____nº_____

QUESTIONÁRIO SOBRE O PÒS-TESTE DE ANÁLISE COMBINATORIA

1. Você considera esse tipo de exercício importante para saber a utilização da matéria no dia a dia?
( ) Sim ( )Não

2. Você gostou dessa atividade de matemática?
( ) Sim ( ) Não

3. Classifique o 1ºquestão da lista como:
( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil – Cheguei a uma resposta com muita dificuldade.
( ) – Não conseguiu fazer

4. Classifique o 2°questão da lista como.
( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil – Cheguei a uma resposta com muita dificuldade..
( ) – Não conseguiu fazer

5. Classifique o 2°/A questão da lista como.
( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil – Cheguei a uma resposta com muita dificuldade..
( ) – Não conseguiu fazer

6. Classifique o 2°/B questão da lista como.
( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil – Cheguei a uma resposta com muita dificuldade..
( ) – Não conseguiu fazer

7. Classifique o 2°/C caso da lista como:
( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil – Cheguei a uma resposta com muita dificuldade.
( ) – Não conseguiu fazer

8. Classifique o 2°/D questão da lista como:
( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil – Cheguei a uma resposta com muita dificuldade.
( ) – Não conseguiu fazer

9. Classifique o 2º/E questão da lista como:
( ) Fácil – Cheguei a uma resposta sem problema.
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil – Cheguei a uma resposta com muita dificuldade..
( ) – Não conseguiu fazer

10. Classifique o 3° questão da lista como:
( ) Fácil – Cheguei a uma resposta sem problema.
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil –. Cheguei a uma resposta com muita dificuldade.
( ) – Não conseguiu fazer

11. Classifique o 4° questão da lista como:
( ) Fácil – Cheguei a uma resposta sem problema.
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil –. Cheguei a uma resposta com muita dificuldade.
( ) – Não conseguiu fazer

12. . Classifique o 5°/A questão da lista como:
( ) Fácil – Cheguei a uma resposta sem problema.
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil –. Cheguei a uma resposta com muita dificuldade.
( ) – Não conseguiu fazer

13. . Classifique o 5°/B questão da lista como:
( ) Fácil – Cheguei a uma resposta sem problema.
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil –. Cheguei a uma resposta com muita dificuldade.
( ) – Não conseguiu fazer

14. . Classifique o 6° questão da lista como:
( ) Fácil – Cheguei a uma resposta sem problema.
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil –. Cheguei a uma resposta com muita dificuldade.
( ) – Não conseguiu fazer

15. Os colegas de turma apresentaram interesse pelo processo ensino aprendizagem?
( ) Sim ( ) Não

16. O nível de preparo da turma é adequado para os níveis das questões trabalhadas nessa atividade?
( ) Sim ( ) Não

17. Qual foi a sua maior dificuldade?(marque apenas uma opção)
( ) Entender o enunciado
( ) Entender o que está sendo pedido
( ) Interpretar o problema
( ) Saber se é PFC, ou arranjo, ou permutação ou combinação

18. Dê uma nota geral entre 0 (zero) e 10 (dez) para sua aprendizagem na matéria dada.
( )1 ( )2 ( )3 ( )4 ( )5

( )6 ( )7 ( )8 ( )9 ( )10

ANEXO 7 – Problemas de Análise Combinatória e Probabilidade

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA

COLÉGIO ESTADUAL DUQUE DE CAXIAS

PROFª: VÂNIA CARMELA Data: ____/____/____ Turma:_________

ALUNO:____ nº ______

Nos exercícios abaixo analise se são sobre Analise Combinatória ou de probabilidade e resolva-os

1) Numa gaveta temos 3 pares iguais de meias brancas, 2 pares de meias azuis e 1 par de meia xadrez.

A) De quantas maneiras podemos escolher um par de meias quaisquer?

B) Se dois pés de meias são retirados sem reposição da gaveta, qual a probabilidade de serem de cores iguais ?

2) Lançam-se 3 moedas honestas de 25 centavos.

A) Quantos são os resultados possíveis para os três lançamentos?

B) Construa o espaço amostral desse experimento.

C) Deseja-se calcular a probabilidade de sair duas caras nesses três lançamentos

3) Dois dados idênticos foram lançados simultaneamente.

A) Qual o número de resultados para este experimento?

B) qual o espaço amostral desse experimento?

C) Qual a probabilidade de se obter soma 7 nesses dois dados?

ANEXO 8 – Questionário sobre Análise Combinatória e Probabilidade

GOVERNO DO Rio de Janeiro

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

COLÉGIO ESTADUAL DUQUE DE CAXIAS

PROF ª: VÂNIA CARMELA Data: ____/____/_____ Turma:_________

ALUNO:____n° _____

AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA

QUESTIONÁRIO SOBRE PROBABILIDADE E ANÁLISE COMBINATORIA

1. Você consegui ver a diferença entre Analise Combinatória e Probabilidade ?
( ) Sim ( ) Não

2. Classifique o (1A) questão da lista como:
( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil – Cheguei a uma resposta com muita dificuldade.
( ) – Não conseguiu fazer

3. Classifique o (1B) questão da lista como.
( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil – Cheguei a uma resposta com muita dificuldade..
( ) – Não conseguiu fazer

4. Classifique o (2A) questão da lista como.
( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil – Cheguei a uma resposta com muita dificuldade..
( ) – Não conseguiu fazer

5. Classifique o (2B) questão da lista como.
( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil – Cheguei a uma resposta com muita dificuldade..
( ) – Não conseguiu fazer

6. Classifique o (2°C) caso da lista como:
( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil – Cheguei a uma resposta com muita dificuldade.
( ) – Não conseguiu fazer

7. Classifique o (3A) questão da lista como:
( ) Fácil – Cheguei a uma resposta, sem problema.
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil – Cheguei a uma resposta com muita dificuldade.
( ) – Não conseguiu fazer

8. Classifique o (3B) questão da lista como:
( ) Fácil – Cheguei a uma resposta sem problema.
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil – Cheguei a uma resposta com muita dificuldade..
( ) – Não conseguiu fazer

9. Classifique o (3C) questão da lista como:
( ) Fácil – Cheguei a uma resposta sem problema.
( ) Médio – Cheguei a uma resposta com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil –. Cheguei a uma resposta com muita dificuldade.
( ) – Não conseguiu fazer

Bibliografia

D'AMBROSIO, U. Educação Matemática: **Da teoria á prática**. 23. ed. Campinas: Papirus, 2012.

BOYER, Carl B., **História da Matemática.** Trad. Elza F. Gomide, São Paulo; Edgard Blucher; Editora Universidade de São Paulo 1974.

LAPLACE, Pierre-Simon. **Ensaios filosóficos sobre as probabilidades;** tradução, introdução e notas de Pedro Leite Santana; rio de Janeiro; Contraponto; Editora PUC-RIO 2010.

MENDOZA, L. P.; SWIFT, J. Why teach statistics and probability: a rationale. In: SHULTE, A.P.; SMART, J.R. (Ed.). Teaching statistics and probability. Reston: Yearbook National Council of Teachers of Mathematics, 1981. p. 90-100

MORGADO, A. C. O. at. **Análise Combinatória e Probabilidade.** Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

MORGADO, A. C. O. e CARVALHO, P.C.P. at. **Matemática Discreta.** Coleção Profmat, Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.

MORO, M. L. F. A Teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget na Elaboração de um Esquema de Organização Curricular Conforme os Critérios de Integração, Continuidade e Sequencia. 1977. Dissertação (Mestrado em Ciências – Psicologia da Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

OBMEP- Provas da OMEP disponíveis em: http://www.obmep.org.br/provas.htm

PESSOA, C.; BORBA, R. **A Compreensão do Raciocínio Combinatório** por alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. Anais IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), Brasília, 2009.

PIAGET, J; INHELDER, B. A **origem da idéia de acaso na criança**. Tradução de Ana Maria Coelho. Rio de Janeiro: Record, s/d.

PONTE, João Pedro da; BROCHADO, Joana; OLIVEIRA, Helia. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2005.

ROA, R.; NAVARRO-PELAYO, V. RazonamientoCombinatorio e Implicaciones para laEnseñanza de laProbabilidad. In: JORNADAS EUROPEAS DE ESTADÍSTICA: La enseñanza y ladifusión de la estatística, 2001,Palma (Ilhas Baleares).

ROCHA, N. C. S. at. **Análise Combinatoria e Probabilidade.** Especialização em Ensino Médio de Matemática, Rio de Janeiro. Instituto de Matemática UFRJ, 2014-1

http://www.elcamino.edu/faculty/gfry/210/DistributeDifBallsDifBoxes.pdf

http://www.careerbless.com/aptitude/qa/permutations_combinations_imp7.php

https://anotacoesdeaula.wordpress.com/about/

https://www.ime.usp.br/~fmachado/MAE221/NotasProbabilidadeElcioCristian.pdf

http://www.cs.iit.edu/~wan/cs330/Chapter6-counting.pdf

http://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/def_en/kap_2/basics/m2_1_1.html