Universidade Federal de São João Del Rei

O Teorema de Pincherle para Frações Contínuas

Jéssica Bruna Miranda Guedes

São João Del Rei, 2018

Jéssica Bruna Miranda Guedes

O Teorema de Pincherle para Frações Contínuas

Dissertação apresentada ao Programa PROFMAT da UFSJ - Universidade Federal de São João Del Rei, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Angel Dávalos Chuquipoma.

São João Del Rei
2018

Jéssica Bruna Miranda Guedes

O Teorema de Pincherle para Frações Contínuas

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Jorge Andrés Julca Avila
Universidade Federal de São João Del Rei
Departamento de Matemática

Prof. Dr. Francis Félix Córdova Puma
Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Matemática

Prof. Dr. José Angel Dávalos Chuquipoma (Orientador)
Universidade Federal de São João Del Rei
Departamento de Matemática

Universidade Federal de São João Del Rei, Fevereiro de 2018.

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus por estar sempre ao meu lado, me guiando e me dando a força de que eu precisava. Sem Ele não teria sido possível a realização deste sonho.

A meus pais, que são meu alicerce, pela presença em minha vida, conselhos, apoio e amor incondicionais. Vocês são meu exemplo, minha referência e minha fonte de inspiração.

Ao meu namorado Tarcísio, por todo o cuidado, amor, companheirismo e paciência até mesmo nos momentos mais difíceis.

Aos meus colegas de curso, que tantas vezes me ajudaram, e cuja convivência foi tão prazerosa e enriquecedora. Vocês certamente tornaram a caminhada mais leve e mais feliz.

Ao meu orientador, Dávalos, por sua ajuda e compreensão em meus momentos de dificuldade.

A todos aqueles que contribuíram de alguma forma para que eu chegasse até aqui, promovendo e potencializando meu aprendizado e meu crescimento pessoal e profissional.

"Foi o tempo que dedicaste à tua rosa que a fez tão importante..."

Antoine de Saint-Exupéry.

Sumário

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo estudar um objeto matemático ainda pouco conhecido: as frações contínuas. Apesar de muito pouco estudadas, tanto no Ensino Básico como no Ensino Superior, as frações contínuas apresentam uma vasta aplicabilidade nas mais diversas áreas: física, astronomia, música e variados problemas de Matemática Pura e Ciências Aplicadas. Além disso, no Ensino Fundamental, as frações contínuas podem ser utilizadas para explorar um tema com o qual os alunos, frequentemente, apresentam dificuldade: os números irracionais. No entanto, há de se destacar um fato primordial: nem toda fração contínua representa um número real. Posto isto, este trabalho tem foco no estudo de um ponto específico: as condições de convergência de uma fração contínua. Apresentamos dois teoremas principais a este respeito. O primeiro fornece uma condição necessária e suficiente para a convergência de uma fração contínua simples. O segundo, trata da convergência de uma fração contínua qualquer e é um teorema que foi desenvolvido pelo matemático italiano Salvatore Pincherle. Pincherle, que nasceu na cidade de Trieste (Itália) e viveu entre os anos de 1853 e 1936, passou a infância na cidade de Marselha (França), mas concentrou sua vida acadêmica nas Universidades de Pisa, Berlim e Bolonha, tendo deixado seu maior legado na área de Análise Funcional. No teorema de Pincherle apresentado neste trabalho, veremos que a convergência de uma fração contínua está diretamente ligada à existência de uma solução minimal da recorrência associada à fração. Além disso, o teorema fornece ainda uma equação que estabelece de forma explícita a relação entre a solução minimal e as sequências de termos que formam a fração contínua, o que permite determinar o limite da fração em caso de convergência.

Palavras-chave: Frações contínuas, convergência de frações contínuas, Teorema de Pincherle, Convergentes.

ABSTRACT

This present work aims to study a mathematical object yet barely known: the continued fractions. Despite of being very few studied, in High School as well as in College, the continued fractions present an wide applicability in many different areas: physics, astronomy, music and diverse problems in Pure Mathematics and Applied Sciences. Besides, in Elementary School, the continued fractions can be used to explore a subject with which the students, often, have difficulty: the irrational numbers. However, we must point out a crucial fact: not every continued fraction represents a real number. Therefore, this work has focus in the study of a specific issue: the conditions of convergence of a continued fraction. We present two principal theorems in this respect. The first one provides a necessary and sufficient condition for the convergence of a simple continued fraction. The second one considers the convergence of any continued fraction and it is a theorem that was developed by the italian mathematician Salvatore Pincherle. Pincherle, who was born in the city of Trieste (Italy) and lived between the years of 1853 and 1936, spend childhood in the city of Marseille (France), but concentrated his academic life in the Universities of Pisa, Berlin and Bologna, having left his greatest legacy in the field of Functional Analysis. In Pincherle's Theorem presented in this thesis we will see that the convergence of a continued fraction is directly attached to the existence of a minimal solution of the recurrence associated to the fraction. Furthermore, the theorem still provides an equation which establishes in an explicit way the relation between the minimal solution and the sequences of terms that form the continued fraction, what allows to determine the limit of the fraction in case of convergence.

keywords: Continued fractions, convergence of continued fractions, Pincherle's Theorem, Approximants.

Introdução

É muito difícil datar com precisão o surgimento das frações contínuas, pois há vestígios de sua utilização desde os tempos mais remotos. Grandes matemáticos contribuíram para o desenvolvimento deste tema. Rafael Bombelli $(1526-1572)$ e Pietro Cataldi $(1548-1626)$ usaram este tipo de fração para aproximar algumas raízes quadráticas. William Brouncker $(1620 - 1684)$, o primeiro presidente da Royal Society, escreveu a expansão de $\frac{4}{\pi}$, o que foi um passo importante nas aproximações de π. Mais tarde, Johann Heinrich Lambert $(1728 - 1777)$ escreveu a primeira demonstração de que π é irracional, usando frações contínuas. Leonhard Euler $(1707 - 1783)$ provou que qualquer irracionalidade quadrática (raiz de um polinômio do segundo grau com coeficientes inteiros) é expressa por uma fração contínua infinita simples periódica. Euler também apresentou a expansão do número "e" em frações contínuas. Estes são apenas alguns entre vários matemáticos de renome que proporcionaram o desenvolvimento e aprimoramento deste tema.

Apesar de importantes e notórias, as contribuições dos matemáticos citadas acima estão longe de ser os primeiros registros da utilização de frações contínuas. Muito antes, já haviam indícios do emprego delas por estudiosos antigos como, por exemplo, o caso do matemático indiano Aryabhata $(476 - 550)$ que, em seu livro Ariabatiia, publicado em 499, faz uma tentativa de resolver uma equação linear indeterminada, utilizando-se de uma técnica muito próxima ao conceito de frações contínuas e que fornece boas aproximações de números irracionais.

Hoje em dia, sabe-se da presença de frações contínuas nas mais diversas áreas como: na música, onde possuem uma relação estreita com a afinação musical; na astronomia, onde são usadas, por exemplo, para determinar em que momento um planeta se encontra a sua menor distância em relação ao sol; na física, onde podem ser utilizadas na resolução de problemas envolvendo associação infinita de resistores; na matemática, para obter aproximações de números irracionais; entre outras.

Embora as frações contínuas tenham uma grande aplicabilidade, este tema é pouco estudado. Não faz parte da matriz curricular do Ensino Básico e, mesmo no Ensino Superior, em áreas específicas como a Matemática, onde as frações contínuas podem ser utilizadas para aproximação de funções e resolução de equações diofantinas, por exemplo, a abordagem de tais conteúdos via frações contínuas ainda é rara.

A inclusão deste tópico no Ensino Fundamental e Médio poderia constituir uma ferramenta para explorar de forma mais rica um universo pouco compreendido entre os alunos: o conjunto dos números irracionais. A dificuldade de entendimento do conceito de número irracional é clara, seja pela incomensurabilidade do número ou pela forma simplória e vaga como este conjunto é apresentado aos alunos. Além de ser um auxílio para o professor, a familiaridade com o tema poderia, sem dúvidas, despertar o interesse e motivar o estudo deste assunto em ocasiões posteriores. No entanto, a metodologia utilizada e a forma de abordagem em sala de aula não serão contempladas neste trabalho. Aqui, daremos foco à convergência de frações contínuas, ou seja, estamos querendo responder à seguinte pergunta: quando é possível afirmar que uma dada fração contínua representa um número real? É natural que esta análise seja facilitada para o caso de uma fração contínua finita. Mas, pode ser bem mais difícil responder a esta pergunta, para o caso de frações contínuas infinitas. Buscaremos, neste trabalho, estabelecer sob quais condições uma fração contínua converge e, em caso de convergência, qual o seu limite. Para isto, esta dissertação está estruturada em quatro capítulos, elaborados como se segue.

No Capítulo 1, são apresentados conceitos, definições e resultados necessários ao leitor para o entendimento do trabalho. São eles: o conceito de sequências, recorrências, operadores diferença e antidiferença e séries alternadas. Além de alguns aspectos operacionais como a resolução de recorrências lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes e o teste de Leibniz para testar a convergência de uma série alternada.

No Capítulo 2, definimos uma fração contínua, e investigamos sua relação com a representatividade de números reais. Em um primeiro momento, atendo-nos ao caso das frações contínuas finitas, vemos como encontrar o número racional representado por uma fração deste tipo e, reciprocamente, de que formas um racional pode ser representado por sua expansão em frações contínuas. Em seguida, vemos a expansão em frações contínuas também de números irracionais. Exemplos numéricos são resolvidos para facilitar a compreensão.

No Capítulo 3, definimos o que é uma fração contínua convergente e buscamos estabelecer critérios para que isso aconteça. O Teorema 7 apresenta um resultado de suma importância: o fato de que toda fração contínua está relacionada a uma recorrência de segunda ordem. A recíproca também é verificada. O Teorema 9 estuda a convergência de um tipo específico de frações contínuas: as frações contínuas simples. Já o Teorema 10 (Teorema de Pincherle), é mais forte e mais completo, no sentido de que, além de estudar a convergência de uma fração contínua qualquer, também fornece seu limite, em caso de convergência.

Por fim, no Capítulo 4, apresentamos alguns problemas de aplicações envolvendo frações contínuas e os teoremas de convergência.

Capítulo 1

Noções Básicas

1.1 Recorrências

Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ o conjunto dos números naturais.

Definição 1. Uma sequência real é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um número real $x(n)$. Os valores $x(n)$ são ditos termos da sequência. De modo geral, uma sequência pode ser representada pela lista $x(1), x(2), ..., x(n), ...$ de seus termos dispostos de forma ordenada, de modo que, $x_1 = x(1),\ x_2 = x(2)$ e $x_n = x(n)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Neste trabalho, utilizaremos $\{x_n\}$ para denotar a sequência $\{x(1), x(2), ..., x(n), ...\}$ cujo n-ésimo termo é $x_n = x(n)$.

Definição 2. Uma recorrência é uma sequência em que, a partir de determinado termo, todos os outros são dados em função do(s) termo(s) anterior(es). Ou seja, uma recorrência é uma sequência $\{x_n\}$ tal que $\forall\ n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+k} = f\ (\ x_{n+k-1}\ ,\ x_{n+k-2}\ ,\ ...\ ,\ x_{n+1},\ x_n\ ) \tag{1.1}$$

onde $k \in \mathbb{N}$, e $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é uma função.

Observação 1. A igualdade (1.1) acima, conhecida como *equação de recorrência*, por si só não define a sequência. Por exemplo, a equação $x_{n+1} = x_n + 2,\ n \in \mathbb{N}$, pode ser usada para caracterizar a sequência dos naturais pares, a sequência dos naturais ímpares, ou ainda, qualquer progressão aritmética de razão 2. Para que uma sequência descrita por (1.1) esteja bem definida, é necessário que sejam fixados e conhecidos os k primeiros termos da sequência.

As recorrências podem ser classificadas de acordo com sua ordem, homogeneidade e linearidade como vemos nas definições seguintes.

Definição 3. A ordem de uma recorrência é a diferença entre o maior e o menor dos índices dos termos de sua equação.

Exemplo 1. $x_{n+5} = x_{n+4} \ + \ 4x_{n+2}$ é uma recorrência de terceira ordem já que $(n+5)-(n+2)=3$.

Definição 4. Uma recorrência é dita homogênea se cada termo depende exclusivamente dos anteriores. Caso contrário, isto é, se, além dos termos anteriores, cada elemento está também em função de um termo independente da sequência, a recorrência é dita não-homogênea.

Definição 5. Uma recorrência é dita linear, se a função $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ que relaciona cada termo aos anteriores for linear. Neste caso, a equação de recorrência tem a forma $x_{n+p} = C_1 x_{n+p-1} + ... + C_p x_n + g(n)$ para todo $n \geq p$, onde $g(n)$ e C_i são funções em n, com $i \in \{1,2,3,...,p\}$. Se uma recorrência não é linear, ela é dita não-linear.

Exemplo 2. Abaixo, temos algumas recorrências e suas respectivas classificações.

2.1. $x_{n+2} = 5x_{n+1} + x_n - 4$ é uma recorrência linear, de segunda ordem e não-homogênea.

2.2. $x_{n+1} = \dfrac{2}{3}x_n^3$ é uma recorrência homogênea, não-linear, de primeira ordem.

2.3. $x_{n+4} = x_{n+1} + \sqrt{x_n} + n^2$ é uma recorrência não-linear, não-homogênea, de quarta ordem.

Definição 6. Dada uma recorrência $\{x_n\}$ de ordem k, os valores $x_1, x_2, ..., x_k$ são chamados de **condições iniciais**. Por isto, o seguinte problema é chamado de problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} x_{n+k} = f(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, ..., x_{n+1}, x_n) \\ x_1 = x_1(n_0), x_2 = x_2(n_0), ..., x_{k-1} = x_{k-1}(n_0), x_k = x_k(n_0), \ n_0 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

É claro que conhecendo a equação de recorrência e as condições iniciais é possível determinar todos os termos da recorrência.

Exemplo 3. Se $x_{n+2} = x_n + 2x_{n+1}$, com $x_1 = 3$ e $x_2 = 1$, então $x_3 = 3 + 2.1 = 5$, $x_4 = 1 + 2.5 = 11$, $x_5 = 5 + 2.11 = 27$ e, portanto, $(x_n) = \{3, 1, 5, 11, 27, ...\}$.

Observação 2. Encontrar os elementos de uma sequência de maneira recursiva pode ser bastante trabalhoso, especialmente para valores muito grandes de n. Determinar certo termo se torna bem mais simples quando depende apenas da posição que ele ocupa na sequência e não de seus precedentes.

Definição 7. A **solução de uma recorrência** é uma fórmula fechada do tipo $x_n = s(n)$, $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que permite determinar x_n a partir apenas de n, sem que seja necessário conhecer termos anteriores da sequência. A seguir veremos soluções de alguns casos particulares de recorrências.

1.1.1 Solução de recorrências lineares de primeira ordem

Proposição 1. Se $\{x_n\}$ é uma recorrência linear de primeira ordem não homogênea do tipo $x_{n+1} = x_n + g(n)$, então sua solução é dada por $x_n = x_1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} g(k)$.

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + g(1) \\ x_3 &= x_2 + g(2) \\ x_4 &= x_3 + g(3) \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + g(n-1) \end{aligned}$$

Somando estas equações membro a membro e cancelando os termos semelhantes,

$$x_2 + x_3 + ... + x_{n-1} + x_n = x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + g(1) + g(2) + ... + g(n-1)$$

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} g(k)$$

$\square$

Exemplo 4. Resolva a recorrência $x_{n+1} = x_n + 4n + 1, \quad x_1 = 6.$

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + 4.1 + 1 = x_1 + 5 \\
x_3 &= x_2 + 4.2 + 1 = x_2 + 9 \\
x_4 &= x_3 + 4.3 + 1 = x_3 + 13 \\
&\vdots \\
x_n &= x_{n-1} + 4.(n-1) + 1 = x_1 + 4n - 3
\end{aligned}$$

somando as equações resulta que

$$x_n = x_1 + 5 + 9 + ... + 4n - 3 = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k+1)$$

mas $\sum\limits_{k=1}^{n-1} (4k+1) = \dfrac{(5 + 4n - 3)(n-1)}{2}$ pois é a soma dos $n-1$ primeiros termos de uma progressão aritmética de razão 4 e primeiro termo 1. Assim,

$$\begin{aligned}
x_n &= x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k+1) \\
x_n &= 6 + \frac{(5 + 4n - 3)(n-1)}{2} \\
x_n &= 2n^2 - n + 5.
\end{aligned}$$

Outro tipo de recorrência que pode ser facilmente resolvida são as recorrências lineares de primeira ordem homogêneas.

Proposição 2. Se $\{x_n\}$ é uma recorrência linear de primeira ordem homogênea, ou seja, é do tipo $x_{n+1} = g(n)\, x_n$, com $g(n)$ e x_n não nulos, então sua solução é dada por $x_n = x_1 \prod_{k=1}^{n-1} g(k)$.

Demonstração: Tem-se que

$$\begin{aligned} x_2 &= g(1)\, x_1 \\ x_3 &= g(2)\, x_2 \\ x_4 &= g(3)\, x_3 \\ &\vdots \\ x_n &= g(n-1)\, x_{n-1} \end{aligned}$$

Basta substituir cada termo na expressão seguinte, e segue o resultado

$$x_n = g(n-1)\,.\, \ldots\, .g(2)\,.g(1)\,.x_1$$
$$x_n = x_1 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} g(k)$$

$\square$

Exemplo 5. Resolveremos a recorrência $x_{n+1} = 3x_n, \quad x_1 = C$, onde C é uma constante real. Pela proposição acima, $x_n = x_1 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} 3 = C \cdot 3^{n-1}$. De fato,

$$x_n = 3 \cdot x_{n-1} = 3 \cdot (3x_{n-2}) = \underbrace{3.3.....3}_{(n-1)\ vezes} \cdot x_1 = 3^{n-1} x_1 = 3^{n-1} C.$$

De maneira geral, não há grandes dificuldades em se resolver recorrências lineares de primeira ordem pois, como mostra o teorema a seguir, elas sempre podem ser reduzidas ao caso mais simples, cuja solução é dada na **Proposição 1.**

Teorema 1. Se a_n é uma solução não nula da recorrência homogênea $x_{n+1} = g(n)\, x_n$, então a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência $x_{n+1} = g(n)\, x_n + h(n)$ em $y_{n+1} = y_n + \dfrac{h(n)}{g(n)\, a_n}$.

Demonstração: Seja a_n uma solução não nula da recorrência $x_{n+1} = g(n)\, x_n$. Fazendo $x_n = a_n y_n$, temos $x_{n+1} = a_{n+1} y_{n+1}$. Aplicando estas substituições à equação de recorrência,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= g(n)\, x_n + h(n) \\ a_{n+1} y_{n+1} &= g(n)\, a_n y_n + h(n) \\ g(n)\, a_n y_{n+1} &= g(n)\, a_n y_n + h(n) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h(n)}{g(n)\, a_n} \end{aligned}$$

□

Exemplo 6. Resolveremos a recorrência $x_{n+1} = 3x_n + 1, \quad x_1 = 1$.

Conforme vimos no **Exemplo 5**, $a_n = 3^{n-1}$ é solução não nula da recorrência $x_{n+1} = 3x_n$. Fazendo a substituição $x_n = 3^{n-1} y_n$, obtemos

$$3^n y_{n+1} = 3.3^{n-1} y_n + 1 \Rightarrow y_{n+1} = y_n + 3^{-n}.$$

Pela **Proposição 1**, esta última recorrência tem solução $y_n = y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^{-k}$.

Mas $\sum_{k=1}^{n-1} 3^{-k}$ é a soma de $n-1$ termos de uma progressão geométrica de primeiro termo e razão iguais a 3^{-1} e, portanto

$$\sum_{k=1}^{n-1} 3^{-k} = \frac{3^{-1}\left(\left(3^{-1}\right)^{n-1} - 1\right)}{3^{-1} - 1} = -\frac{1}{2}\left(3^{1-n} - 1\right)$$

logo,

$$y_n = y_1 - \frac{1}{2}\left(3^{1-n} - 1\right).$$

Como $x_n = 3^{n-1} y_n$ para todo n e $x_1 = 1$, então $y_1 = x_1 = 1$ e assim

$$y_n = 1 - \frac{1}{2}\left(3^{1-n} - 1\right) = \frac{3}{2} - \frac{3^{1-n}}{2}.$$

Por fim,

$$\begin{aligned} x_n &= 3^{n-1}\left(\frac{3}{2} - \frac{3^{1-n}}{2}\right) \\ x_n &= \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right). \end{aligned}$$

1.1.2 Solução de recorrências lineares de segunda ordem

Nesta seção, veremos como encontrar as soluções de recorrências lineares de segunda ordem homogêneas e com coeficientes constantes, isto é, recorrências que assumem a forma

$$x(n+2) + px(n+1) + qx(n) = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Admitimos que $q \neq 0$ pois, caso contrário, (1.2) seria uma recorrência de primeira ordem.

A cada recorrência do tipo (1.2) associamos a equação quadrática $r^2 + pr + q = 0$, chamada **equação característica**.

Exemplo 7. A recorrência $x(n+2) - 3x(n+1) + 2x(n) = 0$ tem equação característica $r^2 - 3r + 2 = 0$.

Exemplo 8. A recorrência $2x(n+2) - 8x(n+1) + 6x(n) = 0$ equivale à recorrência $x(n+2) - 4x(n+1) + 3x(n) = 0$ e ambas têm equação característica $r^2 - 4r + 3 = 0$.

A equação característica fornece um auxílio importante na resolução de recorrências do tipo (1.2). O **Teorema 2** a seguir, mostra que, se r_1 e r_2 são raízes da equação característica, então qualquer sequência da forma $A(n) = K{r_1}^n + L{r_2}^n$, com $K, L \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, é solução da recorrência. Em seguida, o **Teorema 3** mostra que, se $r_1 \neq r_2$, então a recíproca é verdadeira, isto é, todas as soluções da recorrência são do tipo $A(n) = K{r_1}^n + L{r_2}^n$, onde $K, L \in \mathbb{R}$.

Teorema 2. Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, então $A(n) = K{r_1}^n + L{r_2}^n$ é solução de $x(n+2) + px(n+1) + qx(n) = 0$, para quaisquer valores $K, L \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Basta substituir $A(n)$ no lado esquerdo da recorrência e constatar que o resultado é nulo. Com efeito,

$A(n+2) + pA(n+1) + qA(n) =$

$$\begin{aligned}
&= Kr_1{}^{n+2} + Lr_2{}^{n+2} + p \cdot (Kr_1{}^{n+1} + Lr_2{}^{n+1}) + q \cdot (Kr_1{}^n + Lr_2{}^n) \\
&= Kr_1{}^{n+2} + Kpr_1{}^{n+1} + Kqr_1{}^n + Lr_2{}^{n+2} + Lpr_2{}^{n+1} + Lqr_2{}^n \\
&= Kr_1{}^n \cdot (r_1{}^2 + pr_1 + q) + Lr_2{}^n \cdot (r_2{}^2 + pr_2 + q) \\
&= Kr_1{}^n \cdot 0 + Lr_2{}^n \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Exemplo 9. A recorrência $x(n+2) - 3x(n+1) - 10x(n) = 0$ tem como equação característica a equação quadrática $r^2 - 3r - 10 = 0$ cujas raízes são $r_1 = -2$ e $r_2 = 5$. Logo, de acordo com o Teorema 2, todas as sequências da forma $A(n) = K(-2)^n + L \cdot 5^n, K, L \in \mathbb{R}$ são soluções desta recorrência.

Observação 3. O fato de $q \neq 0$ implica que $r = 0$ não é raiz da equação característica.

Teorema 3. Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções de $x(n+2) + px(n+1) + qx(n) = 0$ são da forma $A(n) = Kr_1{}^n + Lr_2{}^n$, com $K, L \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Seja $A(n)$ uma solução qualquer da recorrência dada. Queremos mostrar que $A(n) = Kr_1{}^n + Lr_2{}^n$, o que equivale a mostrar que $B(n) = A(n) - Kr_1{}^n - Lr_2{}^n = 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$. Inicialmente, vejamos quais constantes K e L são soluções do sistema abaixo.

$$\begin{cases} Kr_1 + Lr_2 = A(1) & (1.3) \\ Kr_1{}^2 + Lr_2{}^2 = A(2) & (1.4) \end{cases}$$

multiplicando (1.3) por r_1

$$\begin{cases} Kr_1{}^2 + Lr_1r_2 = A(1) \cdot r_1 & (1.5) \\ Kr_1{}^2 + Lr_2{}^2 = A(2) & (1.6) \end{cases}$$

fazendo (1.6) - (1.5), temos

$$\begin{aligned}
L{r_2}^2 - Lr_1r_2 &= A(2) - A(1)\cdot r_1 \\
L\cdot({r_2}^2 - r_1r_2) &= A(2) - A(1)\cdot r_1 \\
L &= \frac{A(2) - A(1)\cdot r_1}{r_2\cdot(r_2 - r_1)}
\end{aligned}$$

Analogamente, multiplicando (1.3) por r_2

$$\begin{cases} Kr_1r_2 + L{r_2}^2 = A(1)\cdot r_2 & (1.7) \\ K{r_1}^2 + L{r_2}^2 = A(2) & (1.8) \end{cases}$$

fazendo (1.8) - (1.7), temos

$$\begin{aligned}
K{r_1}^2 - Kr_1r_2 &= A(2) - A(1)\cdot r_2 \\
K\cdot({r_1}^2 - r_1r_2) &= A(2) - A(1)\cdot r_2 \\
K &= \frac{A(2) - A(1)\cdot r_2}{r_1\cdot(r_1 - r_2)}
\end{aligned}$$

estas soluções são possíveis porque $r_1 \neq r_2$ e $r_1, r_2 \neq 0$. Além disso,

$$\begin{aligned}
B(n+2) + pB(n+1) + qB(n) &= A(n+2) - K{r_1}^{n+2} - L{r_2}^{n+2} + p\cdot(A(n+1) - K{r_1}^{n+1} \\
&\quad - L{r_2}^{n+1}) + q\cdot(A(n) - K{r_1}^{n} - L{r_2}^{n}) \\
&= (A(n+2) + pA(n+1) + qA(n)) - K{r_1}^{n}\cdot\big({r_1}^2 + pr_1 + q\big) \\
&\quad - L{r_2}^{n}\cdot\big({r_2}^2 + pr_2 + q\big)
\end{aligned}$$

a expressão acima é igual a 0, uma vez que $A(n)$ é solução da recorrência e r_1 e r_2 são raízes da equação característica. Portanto,

$$B(n+2) + pB(n+1) + qB(n) = 0.$$

Além disso, decorre de (1.3) e (1.4) que $B(1) = B(2) = 0$. E, dessa forma, $B(n) = 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Exemplo 10. Vamos determinar as soluções da recorrência $x(n+2)+5x(n+1)-24x(n)=0$.

A equação característica é $r^2+5r-24=0$, cujas raízes são

$$r=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot(-24)}}{2}$$

$$r_1=\frac{-5-11}{2}=-8 \quad \text{e} \quad r_2=\frac{-5+11}{2}=3$$

logo, de acordo com o Teorema 3, as soluções da recorrência são as expressões do tipo $A(n)=K\cdot(-8)^n+L\cdot 3^n$, onde $K,L\in\mathbb{R}$.

Observação 4. No exemplo acima, o fato de K e L serem constantes arbitrárias deve-se ao fato de não serem fornecidas as condições iniciais, o que acarreta a existência de infinitas soluções para a recorrência. Uma vez fixadas as condições iniciais, as constantes K e L assumem valores específicos, o que produz uma solução única. Como exemplo desta situação, resolveremos, a seguir, uma das mais conhecidas recorrências de segunda ordem: a sequência de Fibonacci. Trata-se da sequência $\{1,1,2,3,5,8,13,...\}$, onde cada elemento, a partir do terceiro, é igual à soma de seus dois antecessores imediatos.

Exemplo 11. (Sequência de Fibonacci) Vamos determinar a solução da seguinte recorrência .

$$\begin{cases} x(n+2)=x(n+1)+x(n) \\ x(1)=x(2)=1 \end{cases}$$

A equação característica é $r^2=r+1$ ou $r^2-r-1=0$, cujas raízes são

$$r=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

logo, a solução é $x(n)=K\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+L\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, onde $K,L\in\mathbb{R}$.

Aplicando as condições iniciais, isto é $x(1)=x(2)=1$, temos

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)K + \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)L = 1 \\ \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 K + \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 L = 1 \end{cases}$$

subtraindo a primeira equação da segunda

$$\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]K + \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]L = 0$$

$$\left[\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right) - \left(\frac{2+2\sqrt{5}}{4}\right)\right]K + \left[\left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right) - \left(\frac{2-2\sqrt{5}}{4}\right)\right]L = 0$$

$$\left(\frac{4}{4}\right)K + \left(\frac{4}{4}\right)L = 0$$

$$L = -K$$

substituindo L por $-K$ na primeira equação do sistema,

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)K + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)(-K) = 1$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right)K = 1$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{2}K = 1$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

e, consequentemente, $L = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}$. Desse modo, a solução da recorrência é

$$x(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Os dois teoremas seguintes mostram quais são as soluções de recorrências de segunda ordem lineares homogêneas no caso em que as raízes da equação característica são iguais.

Teorema 4. Se a equação $r^2+pr+q=0$ possui duas raízes iguais, $r_1=r_2=r$, então $A(n)=Kr^n+Lnr^n$ é solução de $x(n+2)+px(n+1)+qx(n)=0$, para todo $K,L\in\mathbb{R}$.

Demonstração: Sabemos que a soma das raízes r_1 e r_2 da equação quadrática $r^2+pr+q=0$ é igual a $r_1+r_2=-p$. Sendo $r_1=r_2=r$, tem-se $2r=-p$ ou

$$2r+p=0. \tag{1.9}$$

Para mostrar que $A(n)$ é solução, vamos substituir $A(n)$ no lado esquerdo da recorrência e verificar que o resultado é nulo.

$$\begin{aligned}
&A(n+2)+pA(n+1)+qA(n)=\\
&\quad= Kr^{n+2}+L\cdot(n+2)\cdot r^{n+2}+p\cdot\big(Kr^{n+1}+L\cdot(n+1)\cdot r^{n+1}\big)\\
&\qquad +q\cdot(Kr^n+Lnr^n)\\
&\quad= Kr^n\cdot\big(r^2+pr+q\big)+Lnr^n\cdot\big(r^2+pr+q\big)+Lr^{n+1}\cdot(2r+p)
\end{aligned}$$

A expressão acima é igual zero. Com efeito, os dois primeiros parênteses são nulos porque r é raiz da equação característica e o último parêntese é nulo por (1.9). Assim, concluímos a prova.

$\square$

Teorema 5. Se $r^2+pr+q=0$ possui duas raízes iguais, $r_1=r_2=r$, então todas as soluções de $x(n+2)+px(n+1)+qx(n)=0$ são da forma $A(n)=Kr^n+Lnr^n$, onde $K,L\in\mathbb{R}$.

Demonstração: Seja $A(n)$ uma solução qualquer da recorrência dada. Devemos mostrar que $A(n)=Kr^n+Lnr^n$ ou, equivalentemente, $B(n)=A(n)-Kr^n-Lnr^n=0\ \forall\ n\in\mathbb{N}$. Inicialmente, vejamos quais constantes K e L são soluções do sistema abaixo.

$$\begin{cases} Kr+Lr=A(1)\\ Kr^2+2Lr^2=A(2)\end{cases}$$

multiplicando a primeira equação por r e, em seguida, subtraindo-a da segunda, obtemos

$$\begin{cases} Kr^2 + Lr^2 = A(1) \cdot r \\ Kr^2 + 2Lr^2 = A(2) \end{cases}$$

$$Lr^2 = A(2) - A(1) \cdot r \quad \Rightarrow \; L = \frac{A(2) - A(1) \cdot r}{r^2}.$$

De maneira análoga, multiplicando a primeira equação do sistema por $2r$ e, em seguida, subtraindo do resultado a segunda equação, temos

$$\begin{cases} 2Kr^2 + 2Lr^2 = 2A(1) \cdot r \\ Kr^2 + 2Lr^2 = A(2) \end{cases}$$

$$Kr^2 = 2A(1) \cdot r - A(2) \quad \Rightarrow \; K = \frac{2A(1) \cdot r - A(2)}{r^2}.$$

Estas soluções são possíveis porque $r \neq 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} B(n+2) + pB(n+1) + qB(n) &= A(n+2) - Kr^{n+2} - L \cdot (n+2) \cdot r^{n+2} + p \cdot [A(n+1) \\ &\quad -Kr^{n+1} - L \cdot (n+1) \cdot r^{n+1}] + q \cdot [A(n) - Kr^n - L \cdot n \cdot r^n] \\ &= [A(n+2) + p.A(n+1) + q.A(n)] - kr^n.[r^2 + pr + q] \\ &\quad -Lnr^n.[r^2 + pr + q] - Lr^{n+1}.[2r + p] \\ &= 0 - kr^n.0 - Lnr^n.0 - Lr^{n+1}.0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Desta maneira, como $B(n+2) + pB(n+1) + qB(n) = 0$ e $B(1) = B(2) = 0$, temos $B(n) = 0 \; \forall \; n \in \mathbb{N}$.

□

Exemplo 12. Vamos resolver a recorrência abaixo.

$$\begin{cases} x(n+2) - 4x(n+1) + 4x(n) = 0 \\ x(1) = 1, \quad x(2) = 6 \end{cases}$$

A recorrência tem equação característica $r^2 - 4r + 4 = 0$ ou $(r-2)^2 = 0$ cuja única raiz é $r = 2$. Portanto, pelo Teorema 5, todas as soluções da recorrência são do tipo

$$x(n) = K.2^n + L.n.2^n, \quad K, L \in \mathbb{R}.$$

Aplicando as condições iniciais, temos

$$\begin{cases} x(1) = 1 \\ x(2) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K.2^1 + L.1.2^1 = 1 \\ K.2^2 + L.2.2^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2K + 2L = 1 \\ 4K + 8L = 6 \end{cases}$$

resolvendo o sistema, obtemos

$$\begin{array}{ccc} -4L + 8L = -2 + 6 & & 2K + 2 = 1 \\ 4L = 4 & \text{e} & 2K = -1 \\ L = 1 & & K = -\dfrac{1}{2} \end{array}$$

Assim,

$$\begin{aligned} x(n) &= -\frac{1}{2} \cdot 2^n + 1.n.2^n \\ x(n) &= -2^{n-1} + n.2^n \\ x(n) &= 2^n(-2^{-1} + n) \end{aligned}$$

Definição 8. Uma solução $\varphi(n)$ de uma recorrência é dita **minimal** se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\varphi(n)}{y(n)} = 0$ para qualquer $y(n)$ solução da recorrência, não múltipla de $\varphi(n)$.

Proposição 3. Se r_1 e r_2 são raízes de $r^2 + pr + q = 0$, com $r_1 \neq r_2$, então $x(n+2) + px(n+1) + qx(n) = 0$ possui solução minimal.

Demonstração: Sem perda de generalidade, suponhamos $r_1 < r_2$. Afirmamos que $\varphi(n) = {r_1}^n$ é solução minimal de $x(n+2) + px(n+1) + qx(n) = 0$. Com efeito, se $y(n)$ é uma solução qualquer não múltipla de $\varphi(n)$, então, $y(n) = K{r_1}^n + L{r_2}^n$, com $L \neq 0$. Daí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi(n)}{y(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{{r_1}^n}{K{r_1}^n+L{r_2}^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{K+L\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^n}$$

mas

$$r_1<r_2\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n=\pm\infty\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{K+L\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^n}=0.$$

□

1.2 Operadores diferença e antidiferença

Definição 9. Seja $x(n)$ uma sequência real qualquer. Definimos o *operador diferença* Δ como a aplicação $\Delta:\ \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ tal que

$$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n),\ n\in\mathbb{N}.$$

Definição 10. Sejam $F(n)$ e $f(n)$ duas sequências reais. Definimos o *operador antidiferença* Δ^{-1} como a aplicação $\Delta^{-1}:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \textit{se}\quad \Delta F(n)=0, \quad \textit{então,}\quad \Delta^{-1}(0)=F(n)=c, \quad \textit{com}\quad c\in\mathbb{R}.\\ \textit{se}\quad \Delta F(n)=f(n), \quad \textit{então,}\quad \Delta^{-1}f(n)=F(n)+c, \quad \textit{com}\quad c\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Da definição resulta que $\Delta\Delta^{-1}f(n)=f(n)\ \forall\ n\in\mathbb{N}$. A seguir, vemos uma propriedade do operador antidiferença.

Proposição 4. Se $f(n)$ é uma sequência real e Δ^{-1} é o operador antidiferença, então

$$\Delta^{-1}f(n)=\sum_{i=1}^{n-1}f\left(i\right)+c.$$

A demonstração desta proposição pode ser encontrada nas referências de [1].

1.3 Séries alternadas

Definição 11. Uma série alternada é uma soma do tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u(n), \ \ u(n) \geq 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

$u(n)$ é chamado termo geral da série.

Exemplo 13. (Série harmônica alternada) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots.$

Definição 12. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u(n)$ é dita convergente a L se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} u(k) = L$. Caso contrário, é dita divergente.

Proposição 5. Se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u(n)$ converge, então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u(n) = 0$.

Demonstração: Seja $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} u(k)$. Se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u(n)$ converge, então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = L$. Como $u(n) = \pm(S_n - S_{n-1})$, temos $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u(n) = \pm \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \pm(L - L) = 0$. □

Exemplo 14. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3n}{4n - 1}$ diverge, pois $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n-1} = \frac{3}{4} \neq 0$.

Proposição 6. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u(n)$ converge se as seguintes condições são verificadas

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u(n) = 0$

2. $u(n)$ é monotonamente decrescente, isto é, $u(n) > u(n+1) \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.

Por fugir do escopo deste trabalho, não apresentaremos aqui a demonstração da proposição 6. Tal prova, pode ser consultada em [3].

Exemplo 15. A série harmônica alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$ satisfaz

1. $\lim_{n\to\infty} u(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

2. $u(n) > u(n+1)$ porque $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$

logo, a série é convergente.

Capítulo 2

Frações Contínuas

Definição 13. Sejam $a_1, a_2, ..., b_0, b_1, b_2, ...$ números inteiros. Uma fração contínua é uma expressão do tipo

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + ...}}}$$

Se uma fração contínua admite a forma abaixo, ela é dita uma fração contínua *finita*.

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{\ddots + \cfrac{a_{k-1}}{b_{k-1} + \cfrac{a_k}{b_k}}}}$$

Se temos $a_k = 1,\ \forall\ k = 1, 2, ...$, então a fração contínua é dita *simples* e, portanto, tem a forma

$$b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + ...}}} \quad \text{ou} \quad b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{b_{k-1} + \cfrac{1}{b_k}}}}.$$

2.1 Fração contínua de um número racional

A seguir, veremos que uma fração contínua nos fornece uma maneira de representar um número real qualquer por meio de uma sequência de números inteiros, em que o primeiro termo pode ser positivo, negativo ou nulo e todos os outros são necessariamente positivos. Além disso, como toda fração contínua é equivalente a uma fração contínua simples, neste capítulo, trataremos apenas de frações contínuas desta forma.

Notação: Convencionamos que a notação $[b_0, b_1, b_2, b_3, ...]$ pode ser utilizada para representar a fração contínua $b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + ...}}}$, do mesmo modo que $[b_0, b_1, ..., b_k] := b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{b_{k-1} + \cfrac{1}{b_k}}}}$.

Teorema 6. Todo número racional pode ser representado de duas maneiras distintas sob a forma de fração contínua finita simples e toda fração contínua finita simples representa um número racional.

Demonstração: Seja x um racional. Se $x \in \mathbb{Z}$ então, $x = [x]$. Se $x \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, então $x = \frac{p}{q}$ com $mdc(p, q) = 1$. Neste caso, sabemos, pelo princípio da divisão euclidiana, que existem únicos b_1 e r_1 tais que $p = b_1 q + r_1$, com $0 < r_1 < q$. Assim,

$$\frac{p}{q} = \frac{b_1 q}{q} + \frac{r_1}{q} = b_1 + \cfrac{1}{\cfrac{q}{r_1}}$$

Caso $r_1 = 1$ as expressões $b_1 + \frac{r_1}{q}$ e $b_1 + \cfrac{1}{\cfrac{q}{r_1}}$ são exatamente iguais e $\frac{p}{q} = [b_1, q]$.
Se $r_1 \neq 1$, existem únicos b_2 e r_2 tais que $q = b_2 r_1 + r_2$, com $0 < r_2 < r_1$. De onde,

$$\frac{p}{q} = b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{r_1}{r_2}} = b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\cfrac{r_2}{r_1}}}$$

Caso, $r_2 = 1$, temos $\frac{p}{q} = [b_1, b_2, r_1]$. Caso $r_2 \neq 1$, aplicamos o algoritmo de euclides à fração irredutível $\frac{r_2}{r_1}$. Como a sequência de restos $r_1, r_2, r_3, ...$ destas divisões é estritamente decrescente, temos que $r_j = 1$ para algum j, o que garante que este processo seja finito e, desta forma, teremos

$$\frac{p}{q} = b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{b_{n-1} + \cfrac{1}{b_n}}}} = [b_1, b_2, ..., b_n]$$

com, $b_n = r_{j-1}$.

A existência de duas representações distintas para um mesmo racional se deve ao fato de que, sendo $b_n > 1$, o termo b_n pode ser substituído por $b_n - 1 + \frac{1}{1}$ gerando as frações contínuas $[b_1, b_2, ..., b_n]$ e $[b_1, b_2, ..., b_n - 1, 1]$.

A segunda parte do teorema pode ser provada sem dificuldades, uma vez que, dada uma fração contínua finita $[b_1, b_2, ..., b_n]$, temos

$$[b_1, b_2, ..., b_n] = b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{b_{n-1} + \cfrac{1}{b_n}}}} = b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{b_{n-2} + \cfrac{b_n}{b_{n-1}b_n + 1}}}}$$

e assim, basta efetuar as operações de forma retroativa para chegar ao racional representado por tal fração contínua.

□

Exemplo 16. A seguir, escreveremos o racional $\frac{32}{5}$ por meio de frações contínuas.

$$\frac{32}{5} = 6 + \frac{2}{5} = 6 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{2}} = 6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = [6, 2, 2]$$

ou ainda,

$$6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}=[6,2,1,1]$$

Exemplo 17. Encontraremos o número representado pela fração contínua $[3,1,5,4]$.

$$[3,1,5,4]=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4}}}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{21}{4}}}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{21}}=3+\cfrac{1}{\cfrac{25}{21}}=3+\frac{21}{25}=\frac{96}{25}.$$

O processo para encontrar uma fração contínua de um número racional através do algoritmo de Euclides é facilmente justificado, uma vez que a própria fração $\frac{p}{q}$ sugere uma divisão. Mas veremos, a seguir, que a representação de um número por meio de frações contínuas é possível mesmo quando ele não assume a forma $\frac{p}{q}$, isto é, para os números irracionais.

2.2 Fração contínua de um número irracional

Seja φ um número irracional e $b_1=\lfloor\varphi\rfloor$ a parte inteira de φ, isto é, b_1 é o único inteiro tal que $b_1\leq\varphi<b_1+1$. Temos que

$$\varphi=b_1+\varphi-b_1=b_1+\frac{1}{x_1},$$

onde

$$x_1=\frac{1}{\varphi-b_1}>1.$$

Como x_1 é irracional e maior que 1, temos que $x_1 = b_2 + \dfrac{1}{x_2}$ onde $b_2 = \lfloor x_1 \rfloor$ e $x_2 = \dfrac{1}{x_1 - b_2}$. Novamente, temos as mesmas condições para x_2, e repetindo este processo, obtemos

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & b_3 + \dfrac{1}{x_3} \\ \vdots & & \\ x_i & = & b_{i+1} + \dfrac{1}{x_{i+1}} \\ \vdots & & \end{array}$$

com, $b_i \in \mathbb{Z} \ \forall \ i = 1, 2, ...$ e x_i irracional maior que 1 $\forall \ i = 1, 2, ...$ Desta forma,

$$\varphi = b_1 + \frac{1}{x_1} = b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{x_2}} = \ ... \ = b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{x_n}}}}$$

$b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{x_n}}}} = [b_1, b_2, b_3, ...]$ é a fração contínua de φ. É claro que, como $x_i \neq z_1 + \dfrac{1}{z_2} \ \forall \ z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$, o processo acima deve ser repetido indefinidamente. Ou seja, a fração contínua que representa um número irracional é infinita.

Exemplo 18. Vamos escrever $\sqrt{8}$ na forma de fração contínua.

$$\begin{aligned}
\varphi &= \sqrt{8}, \qquad b_1 = \lfloor \varphi \rfloor = 2 \\
x_1 &= \frac{1}{\sqrt{8}-2} = \frac{1\left(\sqrt{8}+2\right)}{\left(\sqrt{8}-2\right)\left(\sqrt{8}+2\right)} = \frac{\left(\sqrt{8}+2\right)}{4} \\
b_2 &= \left\lfloor \frac{\left(\sqrt{8}+2\right)}{4} \right\rfloor = 1 \\
x_2 &= \frac{1}{\frac{\left(\sqrt{8}+2\right)}{4}-1} = \left(\frac{4}{\sqrt{8}-2}\right)\left(\frac{\sqrt{8}+2}{\sqrt{8}+2}\right) = \sqrt{8}+2 \\
b_3 &= \left\lfloor \sqrt{8}+2 \right\rfloor = 4 \\
x_3 &= \frac{1}{\sqrt{8}+2-4} = \frac{1}{\sqrt{8}-2} = \left(\frac{1}{\sqrt{8}-2}\right)\left(\frac{\sqrt{8}+2}{\sqrt{8}+2}\right) = \frac{\sqrt{8}+2}{4} \\
b_4 &= \left\lfloor \frac{\sqrt{8}+2}{4} \right\rfloor = 1 \\
x_4 &= \frac{1}{\frac{\sqrt{8}+2}{4}-1} = \left(\frac{4}{\sqrt{8}-2}\right)\left(\frac{\sqrt{8}+2}{\sqrt{8}+2}\right) = \sqrt{8}+2 \\
b_5 &= \left\lfloor \sqrt{8}+2 \right\rfloor = 4 \\
x_5 &= \frac{1}{\sqrt{8}+2-4} = \frac{1}{\sqrt{8}-2} = \left(\frac{1}{\sqrt{8}-2}\right)\left(\frac{\sqrt{8}+2}{\sqrt{8}+2}\right) = \frac{\sqrt{8}+2}{4}
\end{aligned}$$

Observe que, neste caso, temos $b_i = 1$ se i é par e $b_i = 4$ se i é ímpar e diferente de 1. Portanto,

$$\sqrt{8} = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\frac{\sqrt{8}+2}{4}}}}}} = [2, 1, 4, 1, 4, ...].$$

Capítulo 3

Convergência de Frações Contínuas

No Capítulo 2, vimos que toda fração contínua finita representa um número racional e, analogamente, todo racional pode ser representado por meio de uma fração contínua finita. Mas o que será que podemos dizer em relação aos números irracionais? É claro que, se um número irracional possui uma representação em fração contínua, esta é infinita. Mas será que toda fração contínua infinita representa um número (irracional)? A resposta é não. A seguir, veremos em que casos podemos afirmar que isto ocorre. No presente capítulo estudaremos um critério de convergência para frações contínuas.

Neste capítulo, por tratar de convergência, trabalharemos especificamente com frações contínuas infinitas que, como já vimos, são expressões do tipo

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + ...}}}$$

onde $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são sequências de números reais. A fração contínua acima pode ser escrita de forma mais compacta de uma das duas formas a seguir:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1+}\,\frac{a_2}{b_2+}\,\frac{a_3}{b_3+}\,... \qquad \text{ou} \qquad b_0 + K_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

Definição 14. O n-ésimo convergente $C(n)$ de uma fração contínua é definido como

$$C(n) := \frac{A(n)}{B(n)} := b_0 + K_{j=1}^{n}\left(\frac{a_j}{b_j}\right) = b_0 + \frac{a_1}{b_1+}\,\frac{a_2}{b_2+}\,\cdots\,\frac{a_n}{b_n}.$$

A razão $\dfrac{A(n)}{B(n)}$ pode ser chamada também de n-ésimo *quociente parcial* e as sequências $A(n)$ e $B(n)$ são chamadas, respectivamente, de *n-ésimo numerador parcial* e *n-ésimo denominador parcial.* Assumiremos que $\dfrac{A(n)}{B(n)}$ está sempre na forma reduzida, isto é, $A(n)$ e $B(n)$ não têm fatores comuns e, portanto, são primos entre si.

Exemplo 19. Considere a fração contínua $1 + \dfrac{2}{5+}\,\dfrac{3}{1+}\,\dfrac{4}{2+}\,\dfrac{7}{3+}\,\dfrac{4}{3+}\ldots$. Vamos determinar seus três primeiros convergentes.

$$\begin{aligned}
C(1) &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}\\
C(2) &= b_0 + K_{j=1}^{2}\left(\frac{a_j}{b_j}\right) = b_0 + \frac{a_1}{b_1+}\,\frac{a_2}{b_2} = 1 + \frac{2}{5+}\,\frac{3}{1} = 1 + \cfrac{2}{5+\cfrac{3}{1}} = 1 + \frac{2}{8} = \frac{5}{4}\\
C(3) &= b_0 + K_{j=1}^{3}\left(\frac{a_j}{b_j}\right) = b_0 + \frac{a_1}{b_1+}\,\frac{a_2}{b_2+}\,\frac{a_3}{b_3} = 1 + \frac{2}{5+}\frac{3}{1+}\frac{4}{2} = 1 + \cfrac{2}{5+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{2}}}\\
C(3) &= 1 + \cfrac{2}{5+\cfrac{3}{3}} = 1 + \frac{2}{6} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Observação 5. Uma forma alternativa de definir os convergentes de uma fração contínua é através da seguinte composição

$$t_0(u) = b_0 + u, \quad t_n(u) = \frac{a_n}{b_n + u}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

A aplicação t_n é chamada de Transformação de Möbius.

Observação 6. Não é difícil notar que o n-ésimo convergente é dado por $C(n) = (t_0 \circ t_1 \circ ... \circ t_n)(0)$. Com efeito, basta substituir para o valor de n desejado.

Se $n = 1$, temos

$$C(1) = (t_0 \circ t_1)(0) = t_0(t_1(u))(0) = t_0\left(\frac{a_1}{b_1+u}\right)(0) = b_0 + \frac{a_1}{b_1+0} = b_0 + \frac{a_1}{b_1}.$$

Se $n = 2$,

$$\begin{aligned} C(2) &= (t_0 \circ t_1 \circ t_2)(0) = t_0(t_1(t_2(u)))(0) = t_0\left(t_1\left(\frac{a_2}{b_2+u}\right)\right)(0) \\ &= t_0\left(\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+u}}\right)(0) = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+0}} = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2}}. \end{aligned}$$

Ou, se n é um natural qualquer,

$$\begin{aligned} C(n) &= (t_0 \circ t_1 \circ ... \circ t_{n-1} \circ t_n)(0) \\ &= t_0 \circ t_1 \circ ... \circ t_{n-1}(t_n(u))(0) \\ &= t_0 \circ t_1 \circ ... \circ t_{n-1}\left(\frac{a_n}{b_n+u}\right)(0) \\ &= t_0 \circ t_1 \circ ... \circ t_{n-2}\left(\cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1}+\cfrac{a_n}{b_n+u}}\right)(0) \\ &= t_0\left(\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{...+\cfrac{a_n}{b_n+u}}}\right)(0) \\ &= b_0 + \cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{...+\cfrac{a_n}{b_n+0}}} \\ &= b_0 + \cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{...+\cfrac{a_n}{b_n}}}. \end{aligned}$$

Definição 15. Uma fração contínua é dita convergente a L se $\lim_{n\to\infty} C(n) = L$, caso contrário, é dita divergente.

A seguir, provamos que $A(n)$ e $B(n)$, dados na definição 14, satisfazem uma recorrência de segunda ordem, comumente chamada de *fórmula de recorrência fundamental para frações contínuas.*

Teorema 7. Seja $b_0 + K_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ uma fração contínua cujo n-ésimo convergente é $C(n) = \frac{A(n)}{B(n)}$. Então $A(n)$ e $B(n)$ satisfazem, respectivamente, as recorrências abaixo

$$\begin{array}{rcl} A(n) & = & b_nA(n-1) + a_nA(n-2),\ A(-1) = 1,\ A(0) = b_0 \\ B(n) & = & b_nB(n-1) + a_nB(n-2),\ B(-1) = 0,\ B(0) = 1 \end{array} \tag{3.1}$$

Demonstração: A prova será feita por indução sobre n. Para $n = 1$, temos

$$C(1) = b_0 + \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_1b_0 + a_1}{b_1} = \frac{A(1)}{B(1)}$$

logo,

$$\begin{array}{rcl} A(1) & = & b_1b_0 + a_1 = b_1.b_0 + a_1.1 = b_1A(0) + a_1.A(-1) \\ B(1) & = & b_1 = b_1.1 + a_1.0 = b_1.B(0) + a_1.B(-1) \end{array}$$

Assim, temos (3.1) válido para $n = 1$. Suponha, agora, que o Teorema vale para $n = m$, isto é,

$$\begin{array}{rcl} A(m) & = & b_mA(m-1) + a_mA(m-2),\ A(-1) = 1,\ A(0) = b_0 \\ B(m) & = & b_mB(m-1) + a_mB(m-2),\ B(-1) = 0,\ B(0) = 1 \end{array}$$

Vamos mostrar que o mesmo vale para $n = m + 1$. Com efeito, como

$$C(m) = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{\ddots + \cfrac{a_m}{b_m}}} \quad \text{e} \quad C(m+1) = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{\ddots + \cfrac{a_m}{b_m + \cfrac{a_{m+1}}{b_{m+1}}}}},$$

temos que o quociente $C(m+1) = \dfrac{A(m+1)}{B(m+1)}$ pode ser obtido a partir de $C(m) = \dfrac{A(m)}{B(m)}$, bastando substituir em $C(m)$ o termo b_m por $b_m + \dfrac{a_{m+1}}{b_{m+1}}$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
A(m+1) &= \left(b_m + \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\right) A(m-1) + a_m A(m-2) \\
&= \left[b_{m+1} b_m A(m-1) + a_{m+1} A(m-1) + b_{m+1} a_m A(m-2)\right] b_{m+1}^{-1} \\
&= \left[b_{m+1}\left(b_m A(m-1) + a_m A(m-2)\right) + a_{m+1} A(m-1)\right] b_{m+1}^{-1} \\
&= \left[b_{m+1} A(m) + a_{m+1} A(m-1)\right] b_{m+1}^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B(m+1) &= \left(b_m + \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\right) B(m-1) + a_m B(m-2) \\
&= \left[b_{m+1} b_m B(m-1) + a_{m+1} B(m-1) + b_{m+1} a_m B(m-2)\right] b_{m+1}^{-1} \\
&= \left[b_{m+1}\left(b_m B(m-1) + a_m B(m-2)\right) + a_{m+1} B(m-1)\right] b_{m+1}^{-1} \\
&= \left[b_{m+1} B(m) + a_{m+1} B(m-1)\right] b_{m+1}^{-1}
\end{aligned}
$$

logo,

$$
\begin{aligned}
C(m+1) &= \frac{A(m+1)}{B(m+1)} \\
&= \frac{\left[b_{m+1} A(m) + a_{m+1} A(m-1)\right] b_{m+1}^{-1}}{\left[b_{m+1} B(m) + a_{m+1} B(m-1)\right] b_{m+1}^{-1}} \\
&= \frac{b_{m+1} A(m) + a_{m+1} A(m-1)}{b_{m+1} B(m) + a_{m+1} B(m-1)}
\end{aligned}
$$

O que mostra a validade de (3.1) para $n = m+1$ e, desta forma, o Teorema vale $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

$\square$

O Teorema 7 relaciona uma fração contínua a uma recorrência de segunda ordem. A recíproca deste resultado também é verdadeira, como vemos a seguir.

Teorema 8. Toda recorrência de segunda ordem linear e homogênea pode ser associada a uma fração contínua.

Demonstração: Considere a recorrência não nula $x(n)-b_nx(n-1)-a_nx(n-2)=0$ onde $a_n, x(n-1)\neq 0\ \forall\ n\in\mathbb{N}$. Dividindo esta equação por $x(n-1)$, tem-se

$$\frac{x(n)}{x(n-1)}-b_n-\frac{a_nx(n-2)}{x(n-1)}=0$$

tomando $y(n)=\dfrac{x(n)}{x(n-1)}$, obtemos

$$y(n)-b_n-\frac{a_nx(n-2)}{x(n-1)}=0$$

$$y(n)-b_n=\frac{a_nx(n-2)}{x(n-1)}=\frac{a_n}{\dfrac{x(n-1)}{x(n-2)}}=\frac{a_n}{y(n-1)}$$

$$y(n-1)=\frac{a_n}{-b_n+y(n)} \tag{3.2}$$

Mas, veja que (3.2) pode ser aplicada repetidamente, de forma que

$$\begin{aligned} y(n-1) &= \frac{a_n}{-b_n+y(n)}=\cfrac{a_n}{-b_n+\cfrac{a_{n+1}}{-b_{n+1}+y(n+1)}} \\ &= \cfrac{a_n}{-b_n+\cfrac{a_{n+1}}{-b_{n+1}+\cfrac{a_{n+2}}{-b_{n+2}+y(n+2)}}}=... \\ &= \frac{a_n}{-b_n+}\,\frac{a_{n+1}}{-b_{n+1}+}\,\frac{a_{n+2}}{-b_{n+2}+...} \end{aligned}$$

Em particular, quando $n = 1$,

$$y(0) = \frac{a_1}{-b_1+} \frac{a_2}{-b_2+} \frac{a_3}{-b_3 + ...}$$

□

Observação 7. Se a fração contínua $K_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ converge a L, então a fração contínua $K_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{-b_n}\right)$ converge a $-L$. Com efeito, basta perceber que $K_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{-b_n}\right) = \cfrac{a_1}{-b_1 + \cfrac{a_2}{-b_2 + \cfrac{a_3}{-b_3 + ...}}} = \cfrac{a_1}{-\left(b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + ...}}\right)} =$
$-\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + ...}}} = -K_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right).$

3.1 Uma fórmula para $C(n)$

Vamos, agora, tentar encontrar uma fórmula que descreva n-ésimo convergente $C(n)$ e que nos auxilie na análise das condições de convergência de uma dada fração contínua. Sabemos, por (3.1), que

$$\begin{aligned} A(n) &= b_n A(n-1) + a_n A(n-2),\ A(-1) = 1,\ A(0) = b_0 \\ B(n) &= b_n B(n-1) + a_n B(n-2),\ B(-1) = 0,\ B(0) = 1 \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira igualdade por $B(n-1)$ e a segunda por $A(n-1)$, temos

$$A(n)B(n-1) = b_n A(n-1)B(n-1) + a_n B(n-1)A(n-2) \quad (3.3)$$
$$B(n)A(n-1) = b_n A(n-1)B(n-1) + a_n A(n-1)B(n-2) \quad (3.4)$$

subtraindo a segunda da primeira, tem-se

$$\begin{aligned}
A(n)B(n-1)-B(n)A(n-1) &= b_nA(n-1)B(n-1)+a_nB(n-1)A(n-2)\\
&- b_nA(n-1)B(n-1)-a_nA(n-1)B(n-2)\\
A(n)B(n-1)-B(n)A(n-1) &= -a_n\left[A(n-1)B(n-2)-B(n-1)A(n-2)\right]
\end{aligned}$$

o que equivale à recorrência $u(n)=-a_nu(n-1)$ com

$$u(n)=A(n)B(n-1)-B(n)A(n-1) \tag{3.5}$$

e condição inicial $u(0)=A(0)B(-1)-B(0)A(-1)=b_0.0-1.1=-1$

Além disso,

$$\begin{aligned}
u(n) &= -a_nu(n-1)\\
u(n) &= -a_n(-a_{n-1})u(n-2)\\
u(n) &= -a_n(-a_{n-1})(-a_{n-2})...(-a_1)u(0)\\
u(n) &= -a_n(-a_{n-1})(-a_{n-2})...(-a_1)(-1)\\
u(n) &= (-1)^{n+1}a_1a_2...a_n \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

De (3.5) e (3.6), temos

$$A(n)B(n-1)-B(n)A(n-1)=(-1)^{n+1}a_1a_2...a_n \tag{3.7}$$

Dividindo (3.7) por $B(n-1)B(n)$,

$$\frac{A(n)}{B(n)}-\frac{A(n-1)}{B(n-1)}=\frac{(-1)^{n+1}a_1a_2...a_n}{B(n-1)B(n)}$$

$$\Delta\left(\frac{A(n-1)}{B(n-1)}\right)=\frac{(-1)^{n+1}a_1a_2...a_n}{B(n-1)B(n)} \tag{3.8}$$

Aplicando o operador antidiferença, definido na Seção 1.2, a (3.8) obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta\Delta^{-1}\left(\frac{A(n-1)}{B(n-1)}\right) &= \Delta^{-1}\left(\frac{(-1)^{n+1}a_1a_2...a_n}{B(n-1)B(n)}\right)\\
\frac{A(n-1)}{B(n-1)} &= \Delta^{-1}\left(\frac{(-1)^{n+1}a_1a_2...a_n}{B(n-1)B(n)}\right)\\
\frac{A(n-1)}{B(n-1)} &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}a_1a_2...a_k}{B(k-1)B(k)}+\frac{A(0)}{B(0)}\\
C(n-1) &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}a_1a_2...a_k}{B(k-1)B(k)}+b_0
\end{aligned}$$

ou, ajustando os índices,

$$C(n) = b_0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}a_1a_2...a_k}{B(k-1)B(k)} \tag{3.9}$$

3.2 Teoremas de Convergência

O teorema abaixo trata da convergência de frações contínuas para um caso particular: as frações contínuas simples, isto é, quando tem-se $a_n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e cujo termo b_0 é nulo. Em seguida, veremos o Teorema de Pincherle que fornece um critério de convergência para uma fração contínua qualquer.

Teorema 9. (Primeiro teorema de convergência) Seja $\{b_n\}$ uma sequência de reais positivos. A fração contínua $K_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{b_n}\right)$ converge se, e somente se, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Demonstração: Por (3.9), temos

$$K_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{b_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{B(n-1)B(n)}.$$

Logo, a fração contínua dada converge se, e somente se, a série do lado direito da equação acima converge. Como vimos, uma série infinita alternada converge se a sequência formada pelo seu termo geral é monotonamente decrescente e converge a zero quando n tende a infinito.

Por (3.1), temos $B(n) = b_n B(n-1) + a_n B(n-2),\ B(-1) = 0,\ B(0) = 1$. Como $a_n = 1\ \forall\ n \in\ \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned} B(n) &= B(n-2) + b_n B(n-1),\ n = 1, 2, 3, ... \\ B(n+1) &= B(n-1) + b_{n+1} B(n),\ n = 0, 1, 2, 3, ... \end{aligned}$$

Mas, como $b_n > 0\ \forall\ n \in\ \mathbb{N}$, temos também $B(n) > 0\ \forall\ n \in\ \mathbb{N}$, dai

$$\begin{aligned} B(n+1) &= B(n-1) + b_{n+1} B(n) \Rightarrow \\ &\Rightarrow B(n+1) > B(n-1) \qquad (3.10) \\ &\Rightarrow B(n)B(n+1) > B(n-1)B(n)\ \forall\ n \in\ \mathbb{N} \\ &\Rightarrow B(n-1)B(n) \text{ monotonamente crescente} \\ &\Rightarrow \frac{1}{B(n-1)B(n)} \text{ monotonamente decrescente.} \end{aligned}$$

(3.11)

Assim sendo,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{B(n-1)B(n)} \text{ converge } &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{B(n-1)B(n)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} B(n-1)B(n) = \infty. \end{aligned}$$

Observe que, pelas condições iniciais da recorrência e por (3.10),

$$\begin{aligned} B(0) &= 1 \\ B(1) &= b_1 \\ B(2) &= B(0) + b_2 B(1) = 1 + b_1 b_2 > 1 \\ B(3) &> B(1) = b_1 \\ B(4) &> B(2) > 1 \\ &\vdots \\ B(2n-1) &\geq b_1 \\ B(2n) &\geq 1, \quad n = 1, 2, 3, ... \end{aligned}$$

portanto, $B(n) \geq \gamma = min(1, b_1), \ \forall \ n \in \ \mathbb{N}$.

Desta forma,

$$\begin{array}{rcl} B(n) & = & B(n-2) + b_n B(n-1) \\ B(n-1)B(n) & = & B(n-2)B(n-1) + b_n B(n-1)B(n-1) \\ & \geq & B(n-2)B(n-1) + b_n \gamma^2 \\ & \geq & (b_1 + b_2 + ... + b_n)\gamma^2 \end{array}$$

o que implica que

$$\lim_{n\to\infty} B(n-1)B(n) \geq \lim_{n\to\infty}(b_1 + b_2 + ... + b_n)\gamma^2 = \gamma^2 \lim_{n\to\infty}(b_1 + b_2 + ... + b_n)$$

e, portanto, se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, ou seja, $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i = \infty$, então $\lim_{n\to\infty} B(n-1)B(n) = \infty$ e $K_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{b_n}\right)$ converge.

Por outro lado,

$$\begin{array}{rcl} B(n) & = & B(n-2) + b_n B(n-1) \\ B(n-1) + B(n) & = & B(n-2) + B(n-1) + b_n B(n-1) \\ B(n-1) + B(n) & = & B(n-2) + (1 + b_n)B(n-1) \\ & \leq & B(n-2) + b_n B(n-2) + (1 + b_n)B(n-1) \\ & \leq & (1 + b_n)\left[B(n-2) + B(n-1)\right] \\ & \vdots & \\ & \leq & (1 + b_1)(1 + b_2)...(1 + b_n) \\ & \leq & e^{b_1}.e^{b_2}....e^{b_n} \\ B(n-1) + B(n) & \leq & e^{b_1 + b_2 + ... + b_n} \end{array}$$

Desta forma, se $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i = L$, então $\lim_{n\to\infty} B(n-1) + B(n) \leq e^L$.

Como $\lim_{n\to\infty} B(n-1)B(n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(B(n-1) + B(n))^2 \leq \frac{1}{2}e^{2L}$, então $\lim_{n\to\infty} B(n-1)B(n) \neq \infty$ e, portanto, $K_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{b_n}\right)$ diverge.

$\square$

Definição 16. Dizemos que $C(n)$ é *combinação linear* de $A(n)$ e $B(n)$ se existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $C(n) = \alpha A(n) + \beta B(n)$.

Definição 17. Dizemos que $A(n)$ e $B(n)$ são *linearmente independentes (l.i.)* se $\alpha A(n) + \beta B(n) = 0$ implica $\alpha = \beta = 0$.

Definição 18. Dizemos que $A(n)$ e $B(n)$ são *linearmente dependentes (l.d.)* se existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, não simultaneamente nulos, tais que $\alpha A(n) + \beta B(n) = 0$.

Proposição 7. Sejam $A(n)$ e $B(n)$ duas soluções da recorrência $x(n+2) + px(n+1) + qx(n) = 0$. Então $\alpha A(n) + \beta B(n)$ também é solução para quaisquer valores $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Substituindo $\alpha A(n) + \beta B(n)$ na recorrência, temos

$$\alpha A(n+2)+\beta B(n+2)+p\cdot(\alpha A(n+1)+\beta B(n+1))+q\cdot(\alpha A(n)+\beta B(n)) =$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha A(n+2) + \alpha p A(n+1) + \alpha q A(n) + \beta B(n+2) + \beta p B(n+1) + \beta q B(n) \\
&= \alpha \cdot (A(n+2) + pA(n+1) + qA(n)) + \beta \cdot (B(n+2) + pB(n+1) + qB(n)) \\
&= \alpha.0 + \beta.0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\square$

Proposição 8. Se $A(n)$ e $B(n)$ são duas soluções linearmente independentes da recorrência $x(n+2)+px(n+1)+qx(n) = 0$, então qualquer outra solução da recorrência será da forma $\alpha A(n) + \beta B(n)$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Vamos considerar aqui o caso em que a equação característica $r^2 + pr + q = 0$ possui duas raízes distintas r_1 e r_2. A demonstração para o caso de raízes iguais é análoga. Sendo $r_1 \neq r_2$, vimos que as soluções da recorrência são todas da forma $x(n) = K{r_1}^n + L{r_2}^n$. Assim, sejam $A(n) = K_1{r_1}^n + L_1{r_2}^n$, $B(n) = K_2{r_1}^n + L_2{r_2}^n$ e $C(n) = K_3{r_1}^n + L_3{r_2}^n$. Escrevendo $C(n)$ como combinação linear de $A(n)$ e $B(n)$, temos

$$\begin{gathered}
C(n) = \alpha A(n) + \beta B(n) \\
K_3{r_1}^n + L_3{r_2}^n = \alpha \cdot (K_1{r_1}^n + L_1{r_2}^n) + \beta \cdot (K_2{r_1}^n + L_2{r_2}^n) \\
(\alpha K_1 + \beta K_2).{r_1}^n + (\alpha L_1 + \beta L_2).{r_2}^n = K_3{r_1}^n + L_3{r_2}^n
\end{gathered}$$

$$\begin{cases} \alpha K_1 + \beta K_2 = K_3 \\ \alpha L_1 + \beta L_2 = L_3 \end{cases}$$

este sistema seria impossível somente se $\dfrac{K_1}{L_1} = \dfrac{K_2}{L_2} \neq \dfrac{K_3}{L_3}$. Mas como $A(n)$ e $B(n)$ são linearmente independentes, $\dfrac{K_1}{L_1} \neq \dfrac{K_2}{L_2}$ e, portanto o sistema é sempre possível.

$\square$

3.3 O Teorema de Pincherle

Teorema 10. (Teorema de Pincherle) A fração contínua

$$K_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\frac{a_3}{b_3+}... \tag{3.12}$$

converge se, e somente se, a recorrência

$$x(n) - b_n x(n-1) - a_n x(n-2) = 0, \quad a_n \neq 0, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{3.13}$$

possui solução minimal $\varphi(n)$, com $\varphi(n-2) \neq 0$. Além disso, no caso da convergência da fração contínua, temos

$$-\frac{\varphi(n-1)}{\varphi(n-2)} = \frac{a_n}{b_n+}\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}+}\frac{a_{n+2}}{b_{n+2}+}..., \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{3.14}$$

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponha que a fração contínua (3.12) converge, então o seguinte limite existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{B(n)} = L,$$

onde $A(n)$ e $B(n)$ são, respectivamente, o n-ésimo numerador e denominador parcial da fração. Do Teorema 7, sabemos que $A(n)$ e $B(n)$ satisfazem respectivamente (3.1), isto é,

$$\begin{aligned} A(n) - b_n A(n-1) - a_n A(n-2) &= 0, \quad A(-1) = 1, \quad A(0) = 0 \\ B(n) - b_n B(n-1) - a_n B(n-2) &= 0, \quad B(-1) = 0, \quad B(0) = 1, \end{aligned}$$

ou seja, tanto $A(n)$ quanto $B(n)$ são soluções de (3.13). Afirmamos que a função $\varphi(n) = A(n) - LB(n)$ é a solução mínimal de (3.13) procurada. Com efeito:
Para provar a afirmativa consideramos $y(n)$ uma solução qualquer da recorrência. Uma vez que o quociente parcial $\frac{A(n)}{B(n)}$ está sempre na forma reduzida, $A(n)$ e $B(n)$ são coprimos e, consequentemente, são duas soluções

linearmente independentes de (3.13). Assim, qualquer solução $y(n)$ da recorrência (3.13) será da forma $y(n) = \alpha A(n)+\beta B(n)$, onde α, β são escalares. Então,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{y(n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{A(n) - LB(n)}{\alpha A(n) + \beta B(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{A(n) - LB(n)}{B(n)}}{\dfrac{\alpha A(n) + \beta B(n)}{B(n)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{A(n)}{B(n)} - L}{\alpha\left(\dfrac{A(n)}{B(n)}\right) + \beta} = 0.
\end{aligned}$$

Assim, φ é uma solução minimal. Além disso, $\varphi(-1) = A(-1)-LB(-1) = 1$.

($\Leftarrow$) Inversamente, suponhamos agora que (3.13) possui uma solução minimal $\varphi(n)$, com $\varphi(n-2) \neq 0$, para $n = 1, 2, 3....$ Provaremos que a fração contínua (3.12) converge. Com efeito:

Do Teorema 8 e de (3.2), vemos que a fração contínua associada a (3.13) é

$$K_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{-b_n}\right),$$

cujo n-ésimo convergente é $C^*(n) = \dfrac{A^*(n)}{B^*(n)}$. Do Teorema 7, sabemos que $A^*(n)$ e $B^*(n)$ satisfazem, respectivamente,

$$\begin{aligned}
A^*(n) + b_n A^*(n-1) - a_n A^*(n-2) &= 0, \quad A^*(-1) = 1, \quad A^*(0) = 0 \\
B^*(n) + b_n B^*(n-1) - a_n B^*(n-2) &= 0, \quad B^*(-1) = 0, \quad B^*(0) = 1,
\end{aligned}$$

Da Observação 7, temos que

$$K_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{-b_n}\right) = -K_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right).$$

Da hipótese, temos que (3.13) admite uma solução minimal denotada por $\varphi^*(n)$. Por outro lado, da Proposição 8, $\varphi^*(n)$ é da forma

$$\varphi^*(n) = MA^*(n) + LB^*(n), \quad n = -1, 0, 1, ...$$

Mas, $\varphi^*(-1) = 1 \Rightarrow MA^*(-1) + LB^*(-1) = 1 \Rightarrow M = 1$. Assim, $\varphi^*(n) = A^*(n) + LB^*(n)$. Sendo $\varphi^*(n)$ solução minimal e $B^*(n)$ solução não múltipla de (3.13), temos

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi^*(n)}{B^*(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{A^*(n) + LB^*(n)}{B^*(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{A^*(n)}{B^*(n)} + L.$$

Desenvolvendo as recorrências que definem $A(n), B(n), A^*(n)$ e $B^*(n)$ não é dificil verificar que

$$A(n) = (-1)^{n+1} A^*(n) \quad \text{e} \quad B(n) = (-1)^n B^*(n).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{A^*(n)}{B^*(n)} &= -\lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{B(n)} = -\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{B(n)} - L = -L = \frac{0 - L\cdot 1}{1 - L\cdot 0} \\ &= -\frac{A^*(0) + LB^*(0)}{A^*(-1) + LB^*(-1)} = -\frac{\varphi^*(0)}{\varphi^*(-1)} = \frac{\varphi(0)}{\varphi(-1)}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

pois, $\varphi(n) = A(n) - LB(n)$ (primeira parte da demonstração deste teorema). Mas, pela Observação 7, se $K_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{-b_n}\right)$ converge a $-L = \frac{\varphi(0)}{\varphi(-1)}$, então $K_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ converge a $L = -\frac{\varphi(0)}{\varphi(-1)}$. Desta forma, temos que $\lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{B(n)} = -(-L) = L$, provando assim a convergência da fração contínua (3.12).

Por último, no caso da convergência da fração contínua, sendo $\varphi(n)$ solução da recorrência (3.13), temos

$$\varphi(n) - b_n\varphi(n-1) - a_n\varphi(n-2) = 0, \quad a_n \neq 0, \quad n = 1, 2, 3... \tag{3.16}$$

Dividindo (3.16) por $\varphi(n-1)$ obtemos

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n-1)} - b_n - a_n \frac{\varphi(n-2)}{\varphi(n-1)} = 0,$$

logo,

$$\frac{\varphi(n-1)}{\varphi(n-2)} = \frac{a_n}{-b_n + \dfrac{\varphi(n)}{\varphi(n-1)}}. \tag{3.17}$$

De forma análoga obtemos

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n-1)} = \frac{a_{n+1}}{-b_{n+1} + \dfrac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}}.$$

Assim, substituindo a igualdade anterior em (3.17) obtém-se

$$\frac{\varphi(n-1)}{\varphi(n-2)} = \cfrac{a_n}{-b_n + \cfrac{a_{n+1}}{-b_{n+1} + \cfrac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}}}.$$

Aplicando esta fórmula repetidamente obtemos

$$\frac{\varphi(n-1)}{\varphi(n-2)} = \cfrac{a_n}{-b_n + \cfrac{a_{n+1}}{-b_{n+1} + \cfrac{a_{n+2}}{-b_{n+2}}...}} = \frac{a_n}{-b_n+}\frac{a_{n+1}}{-b_{n+1}+}\frac{a_{n+2}}{-b_{n+2}+}..., \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Logo,

$$-\frac{\varphi(n-1)}{\varphi(n-2)} = \cfrac{a_n}{b_n + \cfrac{a_{n+1}}{b_{n+1} + \cfrac{a_{n+2}}{b_{n+2}}...}} = \frac{a_n}{b_n+}\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}+}\frac{a_{n+2}}{b_{n+2}+}..., \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Provando a igualdade de (3.14). Para provar a convergência de (3.14) utilizaremos o método de indução sobre n. Com efeito, em (3.15) foi provado que para $n = 1$ a fração contínua converge, isto é,

$$\frac{-\varphi(0)}{\varphi(-1)} = \frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\frac{a_3}{b_3+}...$$

Supondo que (3.14) é válido para algum n, provaremos a validade de (3.14) para $n+1$. Vejamos, de (3.16), tem-se para $n+1$

$$\varphi(n+1) - b_{n+1}\varphi(n) - a_{n+1}\varphi(n-1) = 0, \quad a_{n+1} \neq 0,$$

dividindo por $\varphi(n)$, utilizando a hipótese de indução e simplificando, obtém-se

$$\begin{aligned} -\frac{\varphi(n)}{\varphi(n-1)} &= \cfrac{a_{n+1}}{b_{n+1} - \cfrac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}} \\ &= \cfrac{a_{n+1}}{b_{n+1} + \cfrac{a_{n+2}}{b_{n+2} + \cfrac{a_{n+3}}{b_{n+3}}...}}. \end{aligned}$$

Provando, desta forma, o Teorema de Pincherle.

□

Observação 8. O Teorema de Pincherle não apenas oferece um critério para que uma fração contínua convirja, como fornece o limite em caso de convergência.

Capítulo 4

Problemas de aplicação

Neste capítulo apresentaremos alguns problemas de aplicação de frações contínuas. Os problemas 1 e 2 são exemplos de aplicação direta dos teoremas de convergência. Já os demais, são exemplos de como problemas com temas no Ensino Médio podem ser resolvidos através do uso de frações contínuas.

Problema de aplicação 1: Considere a fração contínua

$$\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\cdots. \tag{4.1}$$

Vamos determinar se esta fração converge ou não e, em caso afirmativo, para qual número real.

Temos $a_n = b_n = 1\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} b_i = \infty$, pelo Teorema 9, temos que (4.1) converge. A recorrência

$$x(n+2) - x(n+1) - x(n) = 0. \tag{4.2}$$

possui equação característica $r^2 - r - 1 = 0$ cujas raízes são $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
Como a equação característica possui duas raízes distintas, (4.2) tem solução minimal e, consequentemente, (4.1) converge.
Temos que $\varphi(n) = \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ é solução minimal de (4.2), e então, pelo Teorema de Pincherle, (4.1) converge para

$$-\frac{\varphi(0)}{\varphi(-1)} = -\frac{1}{\dfrac{2}{1-\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Problema de aplicação 2: Considere a fração contínua

$$\frac{z}{2w+}\,\frac{z}{2w+}\,\frac{z}{2w+}.... \tag{4.3}$$

onde, z e w são inteiros positivos. Vamos determinar se esta fração converge ou não e, em caso afirmativo, para qual número real.

Temos $a_n = z$ e $b_n = 2w\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. A recorrência

$$x(n+2) - 2w \cdot x(n+1) - z \cdot x(n) = 0 \tag{4.4}$$

tem equação característica $r^2 - 2w.r - z = 0$ cujas raízes são $\dfrac{2w \pm \sqrt{4w^2+4z}}{2} =$ $w \pm \sqrt{w^2+z}$.
Deste modo, se $w^2+z > 0$, (4.4) possui solução minimal $\varphi(n) = \left(w - \sqrt{w^2+z}\right)^n$.
E então, pelo Teorema de Pincherle, (4.3) converge para

$$-\frac{\varphi(0)}{\varphi(-1)} = \frac{-1}{\left(w-\sqrt{w^2+z}\right)^{-1}} = \frac{-1}{\dfrac{1}{w-\sqrt{w^2+z}}} = \sqrt{w^2+z} - w.$$

Desta maneira, temos que

$$\cfrac{z}{2w + \cfrac{z}{2w + \cfrac{z}{2w + ...}}} = \sqrt{w^2+z} - w. \tag{4.5}$$

O que conclui o exercício. Mas, observe ainda que, de (4.5), resulta

$$\sqrt{w^2+z} = w + \cfrac{z}{2w + \cfrac{z}{2w + \cfrac{z}{2w + ...}}} \tag{4.6}$$

que é uma fórmula para encontrar a expansão em fração contínua de qualquer número real do tipo $\sqrt{w^2+z},\ w, z \in\ \mathbb{N}$. Por exemplo,

$$\sqrt{14} = \sqrt{3^2+5} = 3 + \cfrac{5}{6 + \cfrac{5}{6 + \cfrac{5}{6 + ...}}}$$

$$\sqrt{43} = \sqrt{6^2+7} = 6 + \cfrac{7}{12 + \cfrac{7}{12 + \cfrac{7}{12 + ...}}}$$

Em geral, como $\sqrt{N} = \sqrt{M^2 + (N - M^2)}$, com $M < N$, (4.6) fornece uma maneira simples e fácil para encontrar a fração contínua da raiz quadrada de qualquer número natural.

Os problemas 3, 4 e 5 são exemplos de aplicação no Ensino Básico. É claro que os teoremas de convergência apresentados neste trabalho envolvem tópicos bastante avançados para o Ensino Fundamental e Médio, como resolução de recorrências de segunda ordem, séries infinitas e limites. Porém é possível utilizar as frações contínuas, em um nível mais elementar, para a resolução de vários problemas com temática de Ensino Básico. Além do que, através destes problemas é possível trabalhar vários outros conteúdos de forma paralela.

Problema de aplicação 3: Determine o valor da expressão abaixo.

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2018}}}}} \quad + \quad \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2018}}}}}$$

Solução:

Seja $1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2018}}} = a$. Então,

$$\frac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{2018}}}}} + \frac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{2018}}}}} =$$

$$= \frac{1}{1+1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{2018}}}}} + \frac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{2018}}}}}$$

$$= \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+\cfrac{1}{a}} = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{\cfrac{1+a}{a}} = \frac{1}{1+a} + \frac{a}{1+a} = \frac{1+a}{1+a} = 1.$$

Os problemas de aplicação seguintes trazem uma das maiores utilidades das frações contínuas: aproximação de números irracionais por meio de uma sequência de racionais. A definição de número irracional como sendo todo aquele que não é racional pode levar o aluno a pensar, equivocadamente, que não existe relação entre tais conjuntos. Por isto, a abordagem de irracionais via frações contínuas pode ser esclarecedora e rica.

Problema de aplicação 4: Antes de resolver este problema propomos a seguinte atividade: O professor deve dividir a sala em grupos. Cada grupo deve escolher um número natural r e, com o auxílio de um barbante e uma régua ou trena, construir uma circunferência de raio r. Em seguida, responder às seguintes perguntas:

1. Qual o comprimento C da circunferência construída?

2. Quanto vale $\dfrac{C}{2r}$?

Independentemente do valor r escolhido, todos os grupos irão constatar que a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro é um número entre 3,1 e 3,2. De fato, o número encontrado é π. Há mais de 4000 anos, os egípcios descobriram que havia uma relação entre estas medidas. Há mais de 20 séculos antes de Cristo, os babilônios, os hebreus e os chineses já utilizavam a aproximação 3,16. Mas foi o grego Arquimedes, que viveu no século III a. C., o primeiro a obter um resultado muito bom para esse quociente: $\frac{22}{7}$ ou, em notação decimal, 3,14. A partir do século XVIII, esse número passou a ser indicado pela letra π, inicial da palavra periferia, em grego. Mais tarde, os matemáticos provaram que a representação decimal desse número tem infinitas casas depois da vírgula que não se repetem periodicamente, ou seja, provaram que π é irracional. Utilize a aproximação $\pi \approx 3,14$ para encontrar a expansão em frações contínuas de π.

Solução:

$$\pi = \lfloor \pi \rfloor + \pi - \lfloor \pi \rfloor = \lfloor \pi \rfloor + \frac{1}{x_1}$$

$$b_1 = \lfloor \pi \rfloor = 3 \qquad x_1 = \frac{1}{\pi - 3} = 7,14...$$

$$b_2 = \left\lfloor \frac{1}{\pi - 3} \right\rfloor = 7 \qquad x_2 = \frac{1}{\dfrac{1}{\pi - 3} - 7} = \frac{\pi - 3}{22 - 7\pi} = 15,996...$$

$$b_3 = \left\lfloor \frac{\pi - 3}{22 - 7\pi} \right\rfloor = 15$$

$$x_3 = \frac{1}{\dfrac{\pi - 3}{22 - 7\pi} - 15} = \frac{22 - 7\pi}{106\pi - 333} = 1,003417...$$

$$b_4 = \left\lfloor \frac{22 - 7\pi}{106\pi - 333} \right\rfloor = 1$$

$$x_4 = \frac{1}{\dfrac{22 - 7\pi}{106\pi - 333} - 1} = \frac{106\pi - 333}{-113\pi + 355} = 292,638...$$

$$b_5 = 292$$

Continuando este processo, temos $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, ...]$.

Problema de aplicação 5: Uma fábrica especializada em peças automotivas precisa produzir uma peça em formato triangular de modo que um de seus ângulos seja reto e o outro meça aproximadamente 60°. Além disso, os catetos deste triângulo devem ser números inteiros. Defina a medida de cada cateto, sabendo que a soma deles deve estar entre 100 cm e 150 cm.

Solução: Seja ABC um triângulo tal que $A\hat{B}C = 90°$ e $B\hat{C}A = 60°$. Se x e y são as medidas em cm dos lados AB e BC, respectivamente, então, $tg(60°) = \frac{x}{y} = \sqrt{3}$. Vamos verificar, através dos convergentes de $\sqrt{3}$, quais inteiros x e y nos fornecem a relação desejada.

$$b_1 = \lfloor\sqrt{3}\rfloor = 1 \qquad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1,36...$$

$$b_2 = \left\lfloor \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right\rfloor = 1 \qquad x_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} = \sqrt{3}+1$$

$$b_3 = \lfloor\sqrt{3}+1\rfloor = 2 \qquad x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}+1-2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Assim, $\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...]$. Portanto, os convergentes são

$$C_0 = 1.$$

$$C_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2.$$

$$C_2 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = \frac{5}{3} \approx 1,667.$$

$$C_3 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{7}{4} = 1,75.$$

$$C_4 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{19}{11} \approx 1,727.$$

$$C_5 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}}}} = \frac{26}{15} \approx 1,7333.$$

$$C_6 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}} = \frac{71}{41} \approx 1,7317.$$

Basta tomar $x = 71$ e $y = 41$ que teremos todas as condições satisfeitas, isto é, a soma dos catetos igual a 112 cm e o ângulo $B\hat{C}A \approx 60°$.

Considerações Finais

Sabemos que as frações contínuas são um tema escasso no Ensino Básico. Elas podem, ocasionalmente, ser utilizadas em exercícios escolares, competições matemáticas, provas de seleção, entre outros, para a resolução de problemas, mas são sempre colocadas de forma isolada, sem uma análise mais ampla ou detalhada. Em meus processos de pesquisa, pude perceber que esta característica se estende também aos níveis mais avançados de estudos. Notei uma certa carência de conteúdo acadêmico principalmente no que diz respeito à convergência de frações contínuas. Este foi, ao mesmo tempo, um desafio e um fator motivador para o meu trabalho. Acredito que há muito a ser estudado e desenvolvido nesta área. Alguns resultados que esta dissertação apresenta de forma modesta e sucinta podem ser ampliados e aprimorados. Por exemplo, na fração contínua $K_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$, se substituirmos as sequências reais $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ por sequências de números complexos não nulos, os resultados de convergência continuam valendo.

Espero que a leitura deste trabalho possa, de algum modo, instigar, motivar e despertar o interesse de alunos, professores e estudiosos em geral, para esta temática tão rica, vasta e cheia de possibilidades quanto as frações contínuas.

Referências Bibliográficas

[1] ELAYDI, Saber. **An introduction to difference equations.** Springer, 2005.

[2] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta.** Coleção PROFMAT - Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[3] LIMA, Elon Lages. **Análise Real volume 1.** Projeto Euclides, 2008.

[4] MOREIRA, Carlos Gustavo T. de A.. **Frações contínuas, representações de números e aproximações diofantinas.** Primeiro colóquio da região Sudeste, 2011.

[5] MARQUES, Bruno Alves. **Equações Diofantinas Lineares e Equação de Pell: uma abordagem via frações contínuas**. Disponível em < https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94205 >. Acesso em: 19 de Janeiro de 2017.

[6] PEREIRA, Marcus Vinícuis. **Recorrências - Problemas e Aplicações.** Disponível em < https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/3992504/mod_resource/content/1/Recorr%C3%AAncias.pdf >. Acesso em: 16 de Janeiro de 2017.

[7] SILVA, Sebastião Alves da. **Introdução às frações contínuas**. Disponível em < https://tedebc.ufma.br/jspui/handle/tede/1611 >. Acesso em: 14 de Março de 2017.

[8] BARROW, John David. **Chaos in Numberland: the secret life of continued fractions.** Disponível em <https://plus.maths.org/content/chaos-numberland-secret-life-continued-fractions>. Acesso em: 19 de Dezembro de 2017.

[9] SIMÕES, Dyêgo Ayllo da Silva. **Recorrências - Conceitos e Aplicações.** Disponível em <http://tede.biblioteca.ufpb.br/bitstream/tede/7533/5/arquivototal.pdf>. Acesso em: 25 de Janeiro de 2017.

[10] OLIVEIRA, Antônio Marcos Nunes. **Irracionais e frações contínuas no Ensino Médio.** Disponível em < https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=40006 > . Acesso em: 29 de Maio de 2017.

[11] SOUSA, Carlos Maurício de. **Aritmética, frações contínuas e aplicações à música.** Disponível em < https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160060791 > . Acesso em: 20 de Dezembro de 2017.

[12] OLIVEIRA, Evison Rosalino de. **O uso de frações contínuas e do paradoxo de Galileu: aplicações na resolução de problemas físicos na educação básica.** Disponível em < https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=508 > . Acesso em: 20 de Dezembro de 2017.

[13] COEN, Salvatore. **Mathematicians in Bologna 1861 - 1960.** Disponível em < https://books.google.com.br/books?id=SVI8ftMVE3gC&pg=PR6&lpg=PR6&dq=mathematicians+in+bologna&source=bl&ots=glKuF-FApa&sig=QaOizoOtaZisyoIC_LSW1gaGq5A&hl=pt-BR&sa=X&ved=0ahUKEwiVhLmwnIHZAhVCDJAKHbTpDysQ6AEITTAF#v=onepage&q=mathematicians%20in%20bologna&f=false > . Acesso em: 03 de Janeiro de 2018.